

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ  
 ДОКЛАДЫ

LXXIII, № 1

1981

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնածու (պատ. ֆառտույար), է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Ա. Թ. ՐԱԲՍՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱՔՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Ս. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЪЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

## Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

62

### ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

|                                                                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Վ. Ս. Զախարյան, Ա. Գ. Հունանյան—Գրիների տիպի պոտենցիալի եզրային առնչություններ                                                                                | 3  |
| Լ. Շ. Աղաբաբյան, Հ. Բ. Ներսիսյան—Աստիճանային վերացում ունեցող երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարման համար Գուրսաի խնդրի կոռեկտության բավարար պայմանների մասին | 9  |
| Ռ. Ց. Մուսայելյան—Նշանափոխ կորության որոշ լրիվ չափերի ռեզոլյար ամբողջական $L^2$ ընկղմելիության մասին                                                          | 17 |
| Ա. Հ. Բաբյան-Վիներ—Հոպֆի այլափոխվող սիմվոլով ինտեգրալ հավասարումները                                                                                          | 24 |
| Մ. Մ. Զրբաշյան, Ս. Գ. Ռաֆայելյան—Կշռային $L_p$ դասի էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների մասին                                                               | 29 |

### ԿՐԻԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Շ. Ե. Բոգոյան—Ինտեգրալ միկրոսխեմաների վրա հավաքված տրամաբանական սխեմաների նկարագրության լեզու | 37 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### ՄԵԽԱՆԻԿԱ

|                                                                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Գ. Ի. Կրեսին, Վ. Գ. Մազյա—Մաքսիմումի սկզբունքը Լամերի և Ստոկսի համակարգերի համար կիսատարածության մեջ                | 46 |
| Ս. Ա. Նազարով—Ճեղքի համար նրա ափերի տեղամասերի կցման դեպքում գազաթի մոտ խտացող լարումների եղակիության ցուցիչի մասին | 51 |

### ԷԼԵԿՏՐԱՄԵԽԱՆԻԿԱ

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ա. Ղ. Իոսիֆյան, Գ. Լ. Արեշյան—Փոփոխական հոսանքի ունակային սինխրոն մեքենաների տեսության հիմունքները | 54 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### ԷԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

|                                                                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Լ. Ա. Մատինյան, Հ. Ա. Զիլինգարյան, Գ. Կ. Մարկոսյան, Լ. Ս. Մարկոսյան—Իմ-մորիլիզացված տրիպսինի ֆորեզը դիադինամիկ և սինուսոիդալ մոդուլացված հոսանքի միջոցով | 62 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                           | Стр. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>МАТЕМАТИКА</b>                                                                                                                                                         |      |
| В. С. Захарян, А. Г. Унанян—Изменение на отрезке потенциала типа Грина . . . . .                                                                                          | 3    |
| Л. Ш. Агабабян, А. Б. Персесян—О достаточных условиях корректности задачи Гурса для гиперболического уравнения второго порядка со степенным выражением . . . . .          | 9    |
| Р. Ц. Мусаелян—О регулярном погружении в целом в $E^3$ некоторых полных метрик знакопеременной кривизны . . . . .                                                         | 17   |
| А. О. Бабаян—Интегральные уравнения Винера—Хопфа с вырождающимся символом . . . . .                                                                                       | 24   |
| М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян—О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов $L_p$ . . . . .                                                                 | 29   |
| <b>ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА</b>                                                                                                                                              |      |
| Ш. Е. Бозоян—Алгебраическое описание схем, построенных на интегральных микросхемах . . . . .                                                                              | 37   |
| <b>МЕХАНИКА</b>                                                                                                                                                           |      |
| Г. И. Кресин, В. Г. Мазья—О принципе максимума для систем Ламе и Стокса в полупространстве . . . . .                                                                      | 46   |
| С. А. Назаров—О показателе сингулярности напряжений для трещины при сцеплении участков ее берегов, сгущающихся к вершинам . . . . .                                       | 51   |
| <b>ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА</b>                                                                                                                                                    |      |
| А. Г. Иосифьян, Г. Л. Арешян—Основы теории синхронных емкостных машин переменного тока . . . . .                                                                          | 54   |
| <b>ФИЗИОЛОГИЯ</b>                                                                                                                                                         |      |
| Л. А. Матинян, Р. А. Чилингарян, Г. К. Маркосян, Л. С. Маркосян—Форез иммобилизованного трипсина посредством динамических и синусоидальных модулированных токов . . . . . | 62   |

## C O N T E N T S

## MATHEMATICS

- V. S. Zukarian, A. G. Hunanian*—The change of the potential Grin's type on the segment . . . . . 3
- L. Sh. Agababyan, A. B. Nersesyan*—On sufficient conditions of the well posed Goursat problem for the second order degenerated hyperbolic equation . . . . . 9
- R. Ts. Musaellan*—Of regular immersion in the whole of  $E^3$  of some complete metric alternating curvature. . . . . 17
- A. O. Babayan*—Integral Wiener-Hopf equations with vanishing symbol . . . . . 24
- M. M. Djrbashian, S. G. Rafaelian*—On entire functions of exponential type of weighted  $L_p$ -classes . . . . . 29

## APPLIED MATHEMATICS

- Sh. Y. Bozoyan*—About algebraic description of the schemes built on the integral microschemes . . . . . 37

## MECHANICS

- G. I. Kresin, V. G. Maz'ya*—On the maximum principle for Lamé and Stokes systems in a half-space . . . . . 46
- S. A. Nazarov*—On the singularity exponent of stresses for a crack with contact areas of edges thickening at the top . . . . . 51

## ELECTROMECHANICS

- A. G. Iosifian, G. L. Arechian*—Fundamentals of theory of the alternating current synchronous capacitive machines . . . . . 51

## PHYSIOLOGY

- L. A. Matinian, R. A. Chilingarian, G. K. Markossian, L. S. Markossian*—Phoresis of the immobilized trypsin by means of diadynamic and sinusoidal modulated currents . . . . . 62

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 18.9.1981. Подписано к печати 2.10.1981. ВФ 10958.  
 Бумага № 1, 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Плоскопечать. Печ. лист. 4,0. Усл. печ. лист. 5,6.  
 Учет.-изд. 4,47. Тираж 500. Заказ 725. Издат. 5530.  
 375019, Ереван, Барекамутян, 24-г, II эт., 1 к.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян, А. Г. Унанян

# Изменение на отрезке потенциала типа Грина

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 31/X 1980)

1. Пусть  $D$  — единичный круг, а  $\mu$  — неотрицательное распределение массы на  $D$ . Рассмотрим потенциал Грина

$$U_0(z) = \int_D G(z, \xi) d\mu(\xi),$$

где  $G(z, \xi)$  — функция Грина для  $D$ .

Карлесоном <sup>(1)</sup> доказана следующая

Теорема. Пусть  $0 < \rho < 1$  и

$$\int_D (1 - |\xi|)^\beta d\mu(\xi) < \infty$$

для некоторого фиксированного  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ . Тогда для всех  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 2\pi$ , кроме, быть может, некоторого множества с нулевой  $\beta$ -хаусдорфовой мерой при  $0 < \beta < 1$  и с нулевой логарифмической емкостью при  $\beta = 0$ , функция  $U_0(z)$  имеет конечное изменение на отрезке, соединяющем точки  $\rho e^{i\gamma}$  и  $e^{i\gamma}$ .

Отметим, что под конечным изменением на отрезке  $[\rho e^{i\gamma}, e^{i\gamma}]$  понимаем конечность следующего интеграла:

$$\int_\rho^1 \left| \frac{\partial U_0(re^{i\gamma})}{\partial r} \right| dr.$$

Этот результат обобщен <sup>(2)</sup> одним из авторов для того случая, когда в условии теоремы Карлесона функция  $(1 - |\xi|)^\beta$  заменена функцией  $h(1 - |\xi|)$ , удовлетворяющей некоторым условиям, и в терминах меры Хаусдорфа, ассоциированной с функцией  $h$ , описывается мера того исключительного множества, на котором изменение функции  $U_0(z)$  бесконечно.

Определим теперь при  $\xi, z \in D$  функцию

$$A_a(z, \xi) = \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) \cdot \exp\{-W_a(z; \xi)\} \quad (-1 < a < \infty), \quad (1)$$

где

$$W_a(z; \xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^a}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+a+k)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+k)} \cdot \left\{ \xi^{-k} \int_0^{|\xi|} (1-x)^a x^{k-1} dx - \right. \\ \left. - \xi^{-k} \int_{|\xi|}^1 (1-x)^a x^{-k-1} dx \right\} z^k. \quad (1')$$

Следующую функцию назовем функцией типа Грина:

$$G_a(z; \xi) = \log |A_a(z; \xi)|; \quad z, \xi \in D. \quad (2)$$

Функция  $A_a(z; \xi)$  введена М. Джрбашьяном при построении им теории факторизации классов  $N_a$  ( $-1 < a < \infty$ ) — мероморфных в единичном круге функций.

Заметим, что из (1), согласно (1'), имеем

$$A_0(z; \xi) = \frac{\xi - z}{1 - \bar{\xi}z} \cdot \frac{|\xi|}{\xi}; \quad (3)$$

следовательно, из (2) при  $a=0$  получим функцию

$$G_0(z; \xi) = \log \left| \frac{1 - z \cdot \bar{\xi}}{\xi - z} \right|, \quad (4)$$

которая совпадает с обычной функцией Грина для  $D$ .

Потенциал типа Грина определим следующим образом:

$$U_a(z) = \int_D G_a(z; \xi) d\mu(\xi). \quad (5)$$

В настоящей заметке приводятся теоремы о конечности радиального изменения функции  $U_a(z)$ .

2. Из определения (2) функции  $G_a(z; \xi)$ , согласно (1), легко усмотреть, что

$$G_a(z; \xi) = \operatorname{Re} [W_0(z, \xi) - W_a(z; \xi)] - \log |A_0(z; \xi)|. \quad (6)$$

Для дальнейшего заметим, что, как известно (4),

$$|\operatorname{grad} [W_0(z; \xi) - W_a(z; \xi)]| \leq c \cdot \frac{(1-|\xi|)^{1+a}}{|1-z\bar{\xi}|^{2+a}}, \quad z, \xi \in D, \quad (-1 < a < 0), \quad (7)$$

где  $c$  — как здесь, так и в дальнейшем абсолютная постоянная.

С помощью простых вычислений будем иметь также

$$|\operatorname{grad} G_0(z; \xi)| \leq \frac{1-|\xi|^2}{|1-z\bar{\xi}| \cdot |z-\xi|}. \quad (8)$$

Имея в виду (7) и (8) и равенство (6), получим:

$$|\operatorname{grad} G_a(z; \xi)| \leq c \frac{(1-|\xi|)^{1+a}}{|1-z\bar{\xi}|^{2+a}} + \frac{1-|\xi|^2}{|1-z\bar{\xi}||z-\xi|} \quad (-1 < a < 0). \quad (9)$$

Заметим, что для сходимости произведений  $\prod_k A_a(z; \xi_k)$  существует условие, аналогичное условию Бляшке (<sup>2</sup>): для того, чтобы  $\prod_k A_a(z; \xi_k)$  было сходимо, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_1^\infty (1-|\xi_k|)^{1+a} < +\infty,$$

поэтому естественно для существования потенциала (5) потребовать условие

$$\int_D (1-|\xi|)^{1+a} d\mu(\xi) < +\infty. \quad (10)$$

3. Следующая теорема дает важное граничное свойство для потенциала типа Грина.

**Теорема 1.** Пусть  $\mu$  вполне аддитивная, неотрицательная функция в  $D$ . Если

$$\int_D (1-|\xi|)^{1+a} d\mu(\xi) < +\infty, \quad -1 < a < 0,$$

то для всех  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 2\pi$ , кроме, быть может, некоторого множества  $E$  с нулевой  $(1+a)$ -емкостью, функция  $U_a(z)$  ( $-1 < a < 0$ ) имеет конечное изменение на отрезке, соединяющем точки  $re^{i\gamma}$  и  $e^{i\gamma}$ , т. е.

$$\int_\gamma \left| \frac{\partial U_a(re^{i\gamma})}{\partial r} \right| dr < +\infty; \quad -1 < a < 0 \quad (11)$$

при  $\gamma \in [0, 2\pi] \setminus E$

**Доказательство.** Вспомним, что под  $(1+a)$ -емкостью понимается величина

$$C_{1+a}(E) = \frac{1}{\inf_\mu \sup_z \int_E \frac{d\mu(\xi)}{|z-\xi|^{1+a}}}. \quad (12)$$

Следовательно, для исключительного множества  $E_0$  должны получить  $C_{1+a}(E_0) = 0$ ; это значит, что

$$\int_{E_0} \frac{d\mu(\xi)}{|z-\xi|^{1+a}} = +\infty \quad \text{для любой меры } \mu(\xi).$$

Докажем, что если существует на  $E_0$  мера  $\mu_1(\theta)$  такая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|z-\xi|^{1+a}} < C_1, \quad (13)$$

т. е.  $C_{1+\alpha}(E_0) \neq 0$ , то на этом множестве изменение потенциала  $U_\alpha(z)$  остается конечным. Очевидно, что этим теорема будет доказана. Из неравенства (9) получим:

$$\int_{\rho}^1 \left| \frac{\partial U_\alpha(re^{i\gamma})}{\partial r} \right| dr < c \int_{\rho}^1 dr \int_D \frac{(1-|\xi|)^{1+\alpha}}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} d\mu(\xi) + \\ + \int_{\rho}^1 dr \int_D \frac{1-|\xi|^2}{|1-z\bar{\xi}| \cdot |z-\xi|} d\mu(\xi) = I_1 + I_2.$$

То, что  $I_2$  остается ограниченным на  $[0, 2\pi]$  кроме, быть может, некоторого множества с нулевой  $(1+\alpha)$ -емкостью ( $-1 < \alpha < 0$ ), доказано в работе (1).

Остается это доказать для  $I_1$ .

Если покажем, что

$$\int_0^{2\pi} I_1(\gamma) d\mu_1(\theta) < +\infty,$$

то это означает, что  $I_1 < +\infty$  вне некоторого множества, которое имеет нулевую  $(1+\alpha)$ -емкость.

$$\int_0^{2\pi} I_1(\gamma) d\mu_1(\theta) = c \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\rho}^1 dr \int_D \frac{(1-|\xi|)^{1+\alpha}}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} d\mu(\xi) \right\} d\mu_1(\theta) = \\ = \int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(z) \int_{\rho}^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}. \quad (14)$$

Оценим последний интеграл.

Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} \leq \frac{1}{1-r\rho} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{1+\alpha}}.$$

Используя следующее неравенство:

$$|1-z\bar{\xi}| \geq \frac{1}{2} |e^{i\gamma} - \xi|,$$

имеем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} \leq \frac{2^{1+\alpha}}{1-r\rho} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|e^{i\gamma} - \xi|^{1+\alpha}}.$$

Но ввиду неравенства (13), которое имеет место и при  $|z|=1$ , получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|e^{i\gamma} - \xi|^{1+\alpha}} < c_1.$$

Значит,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|1 - z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} \leq \frac{c_1 \cdot 2^{1+\alpha}}{1 - r\rho} = \frac{c_0}{1 - r\rho}.$$

Используя (15) и (14), получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} I_1(\gamma) d\mu_1(\theta) &\leq c \cdot c_0 \int_D (1 - |\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) \int_{\rho}^1 \frac{dr}{1 - r\rho} = \\ &= c \cdot c_0 \frac{1}{\rho} \log(1 + \rho) \int_D (1 - |\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) = \frac{c \cdot c_0}{\rho} \log(1 + \rho) \int_D (1 - |\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi). \end{aligned}$$

Но так как нас интересуют те значения  $\rho$ , которые близки к 1, то можем принять, что

$$c \cdot c_0 \frac{\log(1 + \rho)}{\rho} \leq d,$$

а согласно условию теоремы

$$\int_D (1 - |\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) < N.$$

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} I_1(\gamma) d\mu_1(\theta) \leq d \cdot N = A_0,$$

где  $d$ ,  $N$  и  $A_0$  абсолютные постоянные.

Значит,

$$\int_{\rho}^1 dr \int_D \frac{(1 - |\xi|)^{1+\alpha}}{|1 - z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} d\mu(\xi) < +\infty$$

всюду, кроме, быть может, некоторого множества  $E$ ,  $(1+\alpha)$ -емкость которого равна нулю.

Так как из конечности радиального изменения вытекает существование радиального предела, то из этой теоремы получим важное граничное свойство для потенциала типа Грина:

**Теорема 2.** Потенциал типа Грина  $U_\alpha(z)$  ( $-1 < \alpha < 0$ ) во всех точках единичного круга имеет граничные пределы

$$U_\alpha(e^{i\gamma}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} U_\alpha(re^{i\gamma}),$$

кроме, быть может, некоторого множества,  $(1+\alpha)$ -емкость которого равна нулю.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Վ. Ս. ԶԱԲԱՐՅԱՆ, Ա. Դ. ՀՈՒՆԱՆՅԱՆ

### Գրինի տիպի պոտենցիալի եզրային սոնչություններ

Կատարված աշխատանքում դիտարկված է Գրինի տիպի պոտենցիալը և ուսումնասիրված է նրա փոփոխությունը հատվածի վրա: Աշխատանքը շարադրելու համար օգտագործված են Կաուչսոնի և Զրբաշյանի կողմից ներմուծված գաղափարներ և դրանց որոշ առնչություններ: Դրանք շարադրված են հոդվածի առաջին և երկրորդ մասերում:

Աշխատանքի հիմքը կազմող երկու թեորեմները, որոնք բացահայտում են Գրինի տիպի պոտենցիալի վարքը հատվածի վրա և շրջանի եզրին, բերված են երրորդ մասում և հետևյալն են.

**Թեորեմ. 1.** Թող  $\mu$ -լիովին ադիտիվ, ոչ բացասական ֆունկցիա է  $D$ -ում: Եթե

$$\int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) < +\infty \quad -1 < \alpha < 0,$$

ապա բոլոր  $\gamma$ -երի համար՝  $0 < \gamma < 2\pi$ , բացի միգուցե ինչ որ  $E$  բազմությունից, որի  $(1+\alpha)$  ունակությունը 0 է,  $U_\alpha(z)$  ( $-1 < \alpha < 0$ ) ֆունկցիան  $re^{i\gamma}$  և  $e^{i\gamma}$  կետերը միացնող հատվածի վրա ունի վերջավոր փոփոխություն, այսինքն՝

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial U_\alpha(re^{i\gamma})}{\partial r} \right| dr < +\infty \quad -1 < \alpha < 0,$$

երբ  $\gamma \in [0, 2\pi] \setminus E$

**Թեորեմ. 2.** Գրինի տիպի պոտենցիալը՝  $U_\alpha(z)$ -ը ( $-1 < \alpha < 0$ ) միավոր շրջանի բոլոր կետերում ունի եզրային սահմաններ.

$$U_\alpha(e^{i\gamma}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} U_\alpha(re^{i\gamma})$$

բացի միգուցե ինչ որ բազմությունից, որի  $(1+\alpha)$ -ունակությունը հավասար է 0-ի:

Երկրորդ թեորեմի ապացույցը բերված չէ, քանի որ այն հետևում է առաջին թեորեմից:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> L. Carleson, On a Class of Meromorphic Functions and Its Associated Exceptional Sets, Uppsala 1950. <sup>2</sup> В. С. Закарян, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 27, № 4 (1963). <sup>3</sup> М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. <sup>4</sup> В. С. Закарян, ДАН АрмССР, т. 56, № 4 (1978).

УДК 517.956.226

МАТЕМАТИКА

Л. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсисян

О достаточных условиях корректности задачи Гурса для  
 гиперболического уравнения второго порядка со  
 степенным выражением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 28/1 1981)

Введение. Рассмотрим уравнение

$$y^{2m}u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (0.1)$$

где  $m > 0$ ,  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $c(x, y)$ ,  $f(x, y)$  — непрерывные функции в четырехугольнике  $D$ , ограниченном характеристиками уравнения (0.1), выходящими из точек  $O(0, 0)$  и  $C(0, a)$ . Через  $OA$  и  $OB$  обозначим куски характеристик, выходящих из начала координат  $O(0, 0)$ .

Задача Гурса. Найти в области  $D$  решение уравнения (0.1), непрерывное в  $\bar{D}$  и удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{OA} = \mu_1(y), \quad u|_{OB} = \mu_2(y). \quad (0.2)$$

В рассматриваемой постановке задача Гурса, насколько нам известно, не изучалась. В работе (1) изучается задача Гурса для уравнения

$$y^2u_{xx} - u_{yy} + \alpha u_x = 0, \quad \alpha = \text{const}$$

в области, ограниченной отрезком  $[0, 1]$  оси  $x$  и характеристиками, выходящими из точек  $A(0, 0)$  и  $B(1, 0)$ . В работах (2, 3) изучается, в частности, задача Гурса для областей, содержащих кусок линии вырождения.

Без ограничения общности можно считать  $b(x, y) = \mu_1(y) = \mu_2(y) = 0$ . Первое достигается введением новой неизвестной функции  $v$  по формуле

$$u = v \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_h^y b(x, s) ds \right\},$$

а однородность граничных условий, например, заменой

$$v(x, y) = u(x, y) - \frac{\gamma_2(y) - x}{\gamma_2(y) - \gamma_1(y)} \mu_1(y) - \frac{\gamma_1(y) - x}{\gamma_1(y) - \gamma_2(y)} \mu_2(y),$$

где  $x = \gamma_i(y)$  — уравнения характеристик  $OA$  и  $OB$ .

В предлагаемой работе выявляются достаточные условия корректности задачи

$$y^{2m} u_{xx} - u_{yy} + a(x, y) u_x + c(x, y) u = f(x, y); \quad (1)$$

$$u|_{OA} = u|_{OB} = 0 \quad (2)$$

при соответствующих ограничениях на коэффициенты уравнения (1), причем, как и в случае задачи Коши для уравнения (1), оказывается, что основному ограничению подвергается коэффициент  $a(x, y)$ .

Основным результатом работы является

**Теорема.** Пусть в области  $D$  выполняются условия:

$$1) \quad \frac{1}{4} \left( \frac{2m}{m+1} y^{m-1} - a(x, y)^2 \right)_y^2 + y^{2m} a_x^2(x, y) \leq L^2 \left( \frac{m-1}{m+1} \right)^2 y^{2(m-2)};$$

$$2) \quad |c(x, y)| \leq L \left( \frac{m+1}{2} \right)^{\frac{2}{m+1}} y^{-2};$$

$$3) \quad f(x, y) \in C(\bar{D}),$$

где

$$L = \text{const} > 0, \quad L < 2 \left( \frac{m+1}{2} \right)^{2\beta-1} \cdot \frac{1}{4m+6}, \quad \beta = \frac{m}{m+1}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) из класса  $C(\bar{D})$ , устойчивое относительно возмущений  $f \in C(\bar{D})$ .

Таким образом, оказывается, что для корректности задачи (0.2) достаточны примерно те же условия, что и в случае задачи Коши для уравнения (0.1) с данными на линии вырождения (см. (4), гл. 5, § 1).

1. Сведение к интегральному уравнению. Переходя к новым переменным

$$\zeta = x - \frac{y^{m+1}}{m+1}, \quad \eta = x + \frac{y^{m+1}}{m+1} \quad (3)$$

и используя соотношения

$$x = \frac{\zeta + \eta}{2}, \quad y = \left[ \frac{m+1}{2} (\eta - \zeta) \right]^{\frac{1}{m+1}}, \quad \eta > 0, \quad \zeta < 0,$$

приведем уравнение (1) к виду

$$u_{\zeta\eta} + \frac{1}{4} \left[ \frac{a_1(\zeta, \eta)}{\left( \frac{m+1}{2} (\eta - \zeta) \right)^{2\beta}} + \frac{2m}{(m+1)(\eta - \zeta)} \right] u_{\zeta} + \frac{1}{4} \left[ \frac{a_1(\zeta, \eta)}{\left( \frac{m+1}{2} (\eta - \zeta) \right)^{2\beta}} - \right.$$

$$\left[ -\frac{2m}{(m+1)(\eta-\zeta)} \right] u_\eta + \frac{1}{4} \frac{c_1(\zeta, \eta)}{\left( \frac{m+1}{2} (\eta-\zeta) \right)^{2\beta}} u = \frac{1}{4} \frac{f_1(\zeta, \eta)}{\left( \frac{m+1}{2} (\eta-\zeta) \right)^{2\beta}}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\zeta, \eta) &= a \left( \frac{\eta+\zeta}{2}, \left( \frac{m+1}{2} (\eta-\zeta) \right)^{\frac{1}{m+1}} \right); \\ c_1(\zeta, \eta) &= c \left( \frac{\eta+\zeta}{2}, \left( \frac{m+1}{2} (\eta-\zeta) \right)^{\frac{1}{m+1}} \right); \\ f_1(\zeta, \eta) &= f \left( \frac{\eta+\zeta}{2}, \left( \frac{m+1}{2} (\eta-\zeta) \right)^{\frac{1}{m+1}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия (2) примут вид

$$u|_{\zeta=0} = u|_{\eta=0} = 0. \quad (6)$$

Решение задачи (4), (6) ищется в области  $D_1 = \{\zeta, \eta; \zeta_0 < \zeta < 0, 0 < \eta < \eta_0\}$  плоскости переменных  $\zeta, \eta$ . Рассмотрим, далее, уравнение

$$y^{2m} u_{xx} - u_{yy} + m y^{m-1} u_x = f(x, y) \quad (7)$$

при граничных условиях (2). После замены переменных (3) уравнение (7) примет вид

$$u_{\zeta\eta} + \frac{\beta}{\eta-\zeta} u_\zeta = \frac{1}{4} \frac{f_1(\zeta, \eta)}{\left[ \frac{m+1}{2} (\eta-\zeta) \right]^{2\beta}}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) при граничных условиях (6) выписывается в явном виде (4):

$$u(\zeta, \eta) = \frac{1}{p} \int_0^\zeta (\eta-t)^{-\beta} dt \int_0^\eta f_1(t, s)(s-t)^{-\beta} ds; \quad p = 4 \left( \frac{m+1}{2} \right)^{2\beta}. \quad (9)$$

Запишем уравнение (4) в виде

$$\begin{aligned} u_{\zeta\eta} + \frac{\beta}{\eta-\zeta} u_\zeta &= \frac{1}{4 \left[ \frac{m+1}{2} (\eta-\zeta) \right]^{2\beta}} \left\{ f_1(\zeta, \eta) - c_1(\zeta, \eta) u + \right. \\ &\quad \left. + (u_\zeta + u_\eta) \left[ m \left( \frac{m+1}{2} \right)^{2\beta-2} (\eta-\zeta)^{2\beta-1} - a_1(\zeta, \eta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя теперь формулу (9), получаем

$$u(\zeta, \eta) = \frac{1}{p} \int_0^\zeta (\eta-t)^{-\beta} dt \int_0^\eta f_1(t, s)(s-t)^{-\beta} ds -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{p} \int_0^{\zeta} (\eta-t)^{-\beta} dt \int_0^{\eta} c_1(t, s)(s-t)^{-\beta} u(t, s) ds + \\
& + \frac{1}{p} \int_0^{\zeta} (\eta-t)^{-\beta} dt \int_0^{\eta} A(t, s)(s-t)^{-\beta} (u_t + u_s) ds,
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$A(\zeta, \eta) \equiv m \left( \frac{m+1}{2} \right)^{2\beta-2} (\eta-\zeta)^{2\beta-1} - a_1(\eta, \zeta). \tag{12}$$

Третий интеграл в формуле (11) преобразуем интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\zeta} (\eta-t)^{-\beta} dt \int_0^{\eta} A(t, s)(s-t)^{-\beta} u_s ds + \\
& + \int_0^{\eta} ds \int_0^{\zeta} A(t, s)(\eta-t)^{-\beta} (s-t)^{-\beta} u_t dt = \\
& = \int_0^{\zeta} (\eta-t)^{-\beta} \left\{ A(t, \eta)(\eta-t)^{-\beta} u(t, \eta) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\eta} u(t, s) [A(t, s)(s-t)^{-\beta}]_s ds \right\} dt + \\
& + \int_0^{\eta} \left\{ A(\zeta, s)(\eta-\zeta)^{-\beta} (s-\zeta)^{-\beta} u(\zeta, s) - \int_0^{\zeta} [A(t, s)(\eta-t)^{-\beta} (s-t)^{-\beta}]_t u(t, s) dt \right\} ds = \\
& = \int_0^{\zeta} (\eta-t)^{-2\beta} A(t, \eta) u(t, \eta) dt + \int_0^{\zeta} A(\zeta, s)(\eta-\zeta)^{-\beta} (s-\zeta)^{-\beta} u(\zeta, s) ds - \\
& - \int_0^{\zeta} (\eta-t)^{-\beta} dt \int_0^{\eta} (s-t)^{-\beta} \left[ A_s(t, s) + A_t(t, s) + \frac{\beta A(t, s)}{\eta-t} \right] u(t, s) ds. \tag{13}
\end{aligned}$$

Подставляя выражение (13) в уравнение (11), приходим к интегральному уравнению для неизвестной функции  $u(\zeta, \eta)$ :

$$\begin{aligned}
u(\zeta, \eta) = & F(\zeta, \eta) + \frac{1}{p} \int_0^{\zeta} (\eta-t)^{-2\beta} A(t, \eta) dt + \frac{(\eta-\zeta)^{-\beta}}{p} \int_0^{\eta} (s-\zeta)^{-\beta} A(\zeta, s) u(\zeta, s) ds - \\
& - \frac{1}{p} \int_0^{\zeta} (\eta-t)^{-\beta} dt \int_0^{\eta} (s-t)^{-\beta} \left[ c_1(t, s) + \frac{\beta}{\eta-t} A(t, s) + \right.
\end{aligned}$$

$$+ A_s(t, s) + A_t(t, s) \Big| u(t, s) ds = Pu + F, \quad (14)$$

где

$$F(\zeta, \eta) = \frac{1}{p} \int_0^\zeta (\eta - t)^{-\beta} dt \int_0^\eta f_1(t, s)(s - t)^{-\beta} ds.$$

2. Доказательство теоремы. Применим обычную схему последовательных приближений:  $u_n = Pu_{n-1} + F$ ,  $u_0 = 0$ ,  $n \geq 1$ .

Пусть функции  $A(\zeta, \eta)$ ,  $c_1(\zeta, \eta)$  и  $f(\zeta, \eta)$  непрерывны в области  $D_1$  и, кроме того, выполняются условия:

$$A_\zeta^2 + A_\eta^2 \leq \alpha^2 L^2 (\eta - \zeta)^{2(\alpha-1)}; \quad \eta > 0, \zeta < 0, A(\eta, \eta) = 0; \quad (16)$$

$$|c_1(\zeta, \eta)| \leq L(\eta - \zeta)^{\alpha-1}; \quad (17)$$

$$|f_1(\zeta, \eta)| \leq M, \quad (18)$$

где  $\alpha \geq 2\beta - 1$ ,  $L = \text{const} > 0$ . Имеет место

Лемма. В области  $D_1$  справедлива оценка

$$|u_n(\zeta, \eta)| \leq \frac{M}{2p(1-\beta)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{NL}{p} \right)^k \frac{(\eta - \zeta)^{2-2\beta+k\gamma}}{(2-2\beta+\gamma) \dots (2-2\beta+k\gamma)}, \quad (19)$$

где  $\gamma = \alpha + 1 - 2\beta$ ,  $N = 4m + 6$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Используя условие (16) леммы, имеем:

$$|A(\zeta, \eta)| = \left| \int_\zeta^\eta \frac{\partial A(s, \eta)}{\partial \eta} ds \right| \leq L(\eta - \zeta)^\alpha. \quad (20)$$

Применим, далее, полную индукцию. Принимая во внимание условия (16), (17), (18) и (20), получаем:

$$|u_1(\zeta, \eta)| = |F(\zeta, \eta)| \leq \frac{M}{p} \left| \int_0^\zeta (\eta - t)^{-\beta} dt \int_0^\eta (s - t)^{-\beta} ds \right| \leq \frac{M(\eta - \zeta)^{2-2\beta}}{p(1-\beta)(2-2\beta)};$$

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(\zeta, \eta)| &\leq \frac{M(\eta - \zeta)^{2-2\beta}}{p(1-\beta)(2-2\beta)} + \frac{M}{p^2(1-\beta)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{L^{k+1} N^k (\eta - \zeta)^{2-2\beta+(k+1)\gamma}}{p^k (2-2\beta) \dots (2-2\beta+k\gamma)} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{2-2\beta+(k+1)\gamma} + \frac{1}{2-2\beta+(k+1)\gamma-\beta} + \right. \\ &+ \frac{1}{[2-2\beta+(k+1)\gamma](2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta)} + \\ &+ \frac{\beta}{[2-2\beta+(k+1)\gamma](2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta+1)} + \\ &+ \left. \frac{2\alpha}{[2-2\beta+(k+1)\gamma](2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta)} \right] \leq \frac{M(\eta - \zeta)^{2-2\beta}}{p(1-\beta)(2-2\beta)} + \\ &+ \frac{M}{p^2(1-\beta)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{L^{k+1} N^k (\eta - \zeta)^{2-2\beta+(k+1)\gamma}}{p^k (2-2\beta) \dots (2-2\beta+k\gamma) [2-2\beta+(k+1)\gamma]} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ 2 + \frac{2\alpha - 1}{2 - 2\beta + k\gamma + \alpha - \beta} + \frac{\beta}{2 - 2\beta + k\gamma + \alpha - \beta + 1} \right]. \quad (21)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} 2 + \frac{2\alpha + 1}{2 - 2\beta + k\gamma + \alpha - \beta} + \frac{\beta}{2 - 2\beta + k\gamma + \alpha - \beta + 1} &\leq 2 + \frac{2\alpha + \beta + 1}{2 - 3\beta + \alpha + k\gamma} \leq \\ &\leq 2 + \frac{2\alpha + \beta + 1}{1 - \beta} \leq 2 + 4(m + 1) = 4m + 6. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя оценку (22) в формулу (21), получаем окончательно

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &\leq \frac{M(\eta - \zeta)^{2-2\beta}}{p(1-\beta)(2-2\beta)} + \\ &+ \frac{M}{p^2(1-\beta)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(LN)^{k+1}(\eta - \zeta)^{2-2\beta+(k+1)\gamma}}{p^k(2-2\beta)\dots(2-2\beta+k\gamma)[2-2\beta+(k+1)\gamma]}, \end{aligned}$$

откуда и следует оценка (19).

Нетрудно видеть, что оценка (19) может быть выведена и из аналогично доказываемого неравенства

$$|u_n - u_{n-1}| \leq M \frac{(NL)^{n-1}(\eta - \zeta)^{2-2\beta+(n-1)\gamma}}{p^n(1-\beta)(2-2\beta)\dots[2-2\beta+(n-1)\gamma]}, \quad n \geq 1. \quad (23)$$

Полученные оценки (19) и (23) описывают скорость сходимости итерационного процесса в зависимости от значений  $\alpha$ .

Пусть  $\alpha = 2\beta - 1$ . Тогда  $\gamma = 0$  и оценки (19) и (23) принимают, соответственно, вид:

$$|u_n(\zeta, \eta)| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(LN)^k(\eta - \zeta)^{2-2\beta}}{(2p)^{k+1}(1-\beta)^{k+2}} \leq \frac{(\eta - \zeta)^{2-2\beta} M}{(1-\beta)[2p(1-\beta) - LN]}; \quad (24)$$

$$|u_n(\zeta, \eta) - u_{n-1}(\zeta, \eta)| \leq M \frac{(LN)^{n-1}(\eta - \zeta)^{2-2\beta}}{(2p)^n(1-\beta)^{n+1}}. \quad (25)$$

Последовательность  $|u_n(\zeta, \eta)|$  будет равномерно сходиться в  $\bar{D}_1$  к непрерывной функции  $u(\zeta, \eta)$ , если потребовать выполнения условия

$$L < \frac{2p(1-\beta)}{N} = \frac{2p}{(4m+6)(m+1)}. \quad (26)$$

Легко видеть, что предельная функция  $u(\zeta, \eta)$  будет решением интегрального уравнения (14). Единственность решения и его устойчивость следуют из того, что разность  $v(\zeta, \eta)$  двух решений удовлетворяет оценке

$$|v(\zeta, \eta)| \leq \frac{M}{2p(1-\beta)} \left( \frac{NL}{2(1-\beta)} \right)^{n-1} (\eta - \zeta)^{2-2\beta}$$

при любом  $n$ , и, следовательно,  $v(\zeta, \eta) \equiv 0$ .

Если  $\alpha \geq 2\beta - 1$ , то  $\gamma \geq 0$  и последовательность  $|u_n(\zeta, \eta)|$  будет равномерно сходиться в любой, достаточно малой, окрестности нача-

ла координат при любом значении константы  $L$ , причем скорость сходимости будет факториальной.

Формально продифференцировав уравнение (14) по  $\zeta$  (или  $\eta$ ) и применяя оценки типа (23), по известной схеме получаем, что не только удовлетворяются условия задачи (1), (2), но и гладкость решения и соответственно повышается с повышением гладкости коэффициентов уравнения (1).

Сделаем теперь несколько замечаний.

1°. Все вышеприведенные результаты остаются в силе, если рассматривать уравнение

$$y^{2m}K(x, y)u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y),$$

где  $K(x, y)$  — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$K(x, y) \geq \text{const} > 0.$$

2°. Условие теоремы можно заменить более общим условием

$$\frac{1}{4} \left( \frac{2m}{m+1} y^{m-1} \pm a(x, y) \right)_y^2 + y^{2m} a_x^2(x, y) \leq L^2 \left( \frac{m-1}{m+1} \right)^2 y^{2(m-2)},$$

имеющим место хотя бы в одном из случаев  $(\pm)$ .

3°. Нетрудно видеть, что в зависимости от условий на коэффициенты уравнения (1) можно было бы допустить неограниченность определенного порядка функции  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$ .

4°. Используя функцию типа Миттаг—Лефлера  $E_p(z, \mu)$ , (5), оценку для  $u(\zeta, \eta)$  можно представить в виде

$$|u(\zeta, \eta)| \leq \frac{\Gamma\left(\frac{2-2\beta}{\gamma}\right)(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{2p\gamma(1-\beta)} E_1\left(\frac{NL}{p\gamma}(\eta-\zeta)^\gamma, \frac{2-2\beta}{\gamma}\right) \cdot M,$$

и, следовательно, (5),

$$|u(\zeta, \eta)| \leq \frac{\Gamma\left(\frac{2-2\beta}{\gamma}\right)(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{2p\gamma(1-\beta)^\gamma} \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{NL}{p\gamma}(\eta-\zeta)^\gamma \right]^{1-\frac{2-2\beta}{\gamma}} \cdot \exp\left[ \frac{NL(\eta-\zeta)^\gamma}{p\gamma} \right] + \frac{c_1}{1 + \frac{NL}{p\gamma}(\eta-\zeta)^\gamma} \right\} \cdot M,$$

что описывает степень устойчивости решения задачи (1), (2) относительно  $f$  (см. (18)).

5°. Очевидно, что условия 1)–3) теоремы легко переносятся на случай общей задачи (0.1), (0.2).

Институт математики  
Академии наук Армянской ССР  
Ереванский государственный университет

Աստիճանային վերացում ունեցող երկրորդ կարգի հիպերբոլական  
հավասարման համար Գուրսայի խնդրի կոոեկտության  
բավարար պայմանների մասին

Դիտարկվում է Գուրսայի խնդիրը

$$y^{2m}u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)$$

հավասարման համար, երբ  $u(x, y)$  ֆունկցիան հայտնի է  $(0, 0)$  կետից ելնող  
խարակտերիստիկաների վրա:

Բացահայտվում են խնդրի կոոեկտության բավարար պայմանները: Հիմ-  
նական սահմանափակումը դրվում է  $a(x, y)$  գործակցի վրա և ունի հետևյալ  
տեսքը.

$$\frac{1}{4} \left( \frac{2m}{m+1} y^{m-1} - a(x, y) \right)_y^2 + y^{2m} a_x^2(x, y) \leq L^2 \left( \frac{m-1}{m+1} \right)^2 y^{2(m-2)}$$

որտեղ՝

$$L = \text{const} > 0, \quad L < 2 \left( \frac{m+1}{2} \right)^{2\beta-1} \frac{1}{4m+6}, \quad \beta = \frac{m}{m+1}$$

Ապացույցի հիմքում ընկած է հաջորդական մոտավորությունների եղա-  
նակի կիրառությունը համապատասխան ինտեգրալ հավասարման համար:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Т. Ш. Кальменов, Дифференциальные уравнения, т. 8, № 1 (1972). <sup>2</sup> В. Н. Врагов, Дифференциальные уравнения, т. 8, № 1 (1972). <sup>3</sup> Б. А. Бубнов, Сибирский мат. журн., т. 19, № 2 (1978). <sup>4</sup> М. М. Смирнов, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, Наука, М., 1966. <sup>5</sup> М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования в комплексной области, Наука, М., 1966.

УДК 514.7

МАТЕМАТИКА

Р. Ц. Мусаелян

# О регулярном погружении в целом в $E^3$ некоторых полных метрик знакопеременной кривизны

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/II 1981)

1. Пусть на всей плоскости  $xy$  задана полная метрика отрицательной кривизны посредством линейного элемента

$$ds^2 = dx^2 + [B(x) + b(y)]^2 dy^2. \quad (1)$$

В дальнейшем будем обозначать  $w(x, y) = B(x) + b(y)$ . Предположим, что  $w(x, y) > 0$  в любой точке плоскости  $xy$ . Пусть, далее, кривизна метрики  $K(x, y) = -k^2 < 0$ , где  $k$  — положительная величина. Будем предполагать также, что  $|B'(x)| < 1$  для любого  $x$ ;  $-\infty < x < +\infty$ . Справедлива следующая

**Теорема.** При сформулированных выше условиях метрика (1) погружается в  $E^3$  в виде регулярной поверхности.

Доказательство теоремы будет дано в пункте 3.

2. Известно, что при заданных первой и второй квадратичных формах поверхность определяется в пространстве однозначно с точностью до движения. Это значит, что при заданной первой квадратичной форме вопрос о реализации ее сводится к отысканию коэффициентов второй квадратичной формы, которые принято обозначать через  $L(x, y)$ ,  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$ . Эти коэффициенты должны удовлетворять системе уравнений Петерсона—Кодацци и Гаусса, которая для приведенных коэффициентов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  второй квадратичной формы ( $L$ ,  $M$ ,  $N$  деленный на дискриминант метрики  $W = \sqrt{EG - F^2}$ ) в метрике  $ds^2 = dx^2 + \varphi^2(x, y)dy^2$  имеет следующий вид:

$$\begin{cases} m_x - l_y = -2 \frac{\varphi_x}{\varphi} m + \frac{\varphi_y}{\varphi} l \\ n_x - m_y = \varphi \varphi_x \cdot l \\ ln - m^2 = -k^2. \end{cases} \quad (2)$$

Систему (2) после несложных преобразований можно свести к следующей системе двух квазилинейных уравнений гиперболического типа (см. (1))

$$\begin{cases} r_x + sr_y = A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s \\ s_x + rs_y = A_1 s + A_2 r + A_3 s^2 + A_4 rs + A_5 s^2 r \end{cases}, \quad (3)$$

где функции  $r(x, y)$  и  $s(x, y)$  определяются из соотношений

$$r = -\frac{m+k}{n}, \quad s = -\frac{m-k}{n},$$

а  $k = \sqrt{-K(x, y)}$ , где  $K(x, y)$  — кривизна рассматриваемой метрики. Заметим, что характеристиками системы (3) являются интегральные кривые, определенные обыкновенными дифференциальными уравнениями  $\frac{dy}{dx} = r(x, y)$ ,  $\frac{dy}{dx} = s(x, y)$ , вдоль которых левые части системы (3), очевидно, представляют собой полные производные функций  $r(x, y)$  и  $s(x, y)$ . Коэффициенты  $A_i(x, y)$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) системы (3) при заданной метрике представляют собой определенные функции и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\varphi_x}{\varphi} + Q_x, \quad A_2 = -\frac{\varphi_x}{\varphi} - Q_x, \quad A_3 = Q_y; \\ A_4 &= -\frac{\varphi_y}{\varphi} - Q_y, \quad A_5 = -\frac{\varphi_y}{\varphi} + Q_y, \quad Q = \frac{1}{2} \ln k. \end{aligned}$$

Замечание 1. Система (3), вообще говоря, неэквивалентна системе (2). Однако если решение удовлетворяет условию  $r \neq s$ , то  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , определяемые соотношениями

$$l = \frac{2krs}{s-r}, \quad m = -\frac{k(s+r)}{s-r}, \quad n = \frac{2k}{s-r},$$

являются решениями системы (2).

Замечание 2. Для линейного элемента общего вида система типа (3) получена Э. Г. Позняком (см. (2)).

Замечание 3. Если метрика реализована посредством регулярной поверхности, то  $r(x, y)$  и  $s(x, y)$  представляют собой угловые коэффициенты асимптотических линий в параметрической плоскости  $xoy$ .

3. Доказательство теоремы. Запишем систему (3) для метрики (1). Она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} r_x + sr_y = \left( -\frac{B'(x)}{w(x, y)} + Q_x \right) r - \left( \frac{B'(x)}{w(x, y)} + Q_x \right) s + Q_y r^2 - \\ \quad - \left( \frac{b'(y)}{w(x, y)} + Q_y \right) rs - B'(x) w(x, y) r^2 s \\ s_x + rs_y = \left( -\frac{B'(x)}{w(x, y)} + Q_x \right) s - \left( \frac{B'(x)}{w(x, y)} + Q_x \right) r + Q_y s^2 - \\ \quad - \left( \frac{b'(y)}{w(x, y)} + Q_y \right) rs - B'(x) w(x, y) s^2 r. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть

$$r(x, 0) = r_0(x) = \frac{k(x, 0)}{\sqrt{1 - B'^2(x)}}, \quad s(x, 0) = s_0(x) = -\frac{k(x, 0)}{\sqrt{1 - B'^2(x)}} \quad (5)$$

начальные данные системы (4) на оси  $ox$ . Предположим, что на искомой поверхности координатная сеть совпадает с сетью линий кривизны. Это значит, что  $r(x, y) = -s(x, y)$ . Полученное условие дает нам возможность решать систему (4). Вычитая из первого уравнения системы (4) второе, получим

$$r_x(x, y) = -2Q_x r(x, y) + B' w(x, y) r^3(x, y). \quad (6)$$

Уравнение (6) подстановкой  $r(x, y) = \frac{1}{\sqrt{u(x, y)}}$  сводится к следующему линейному уравнению:

$$u_x(x, y) = -4Q_x u(x, y) - 2B'(x) w(x, y). \quad (7)$$

Решая уравнение (7) (напомним, что  $Q(x, y) = \frac{1}{2} \ln k(x, y)$ , где  $k = \sqrt{-K(x, y)}$ , а  $K$  — кривизна метрики) и учитывая подстановку, окончательно получим

$$r(x, y) = \frac{\sqrt{B'(x)}}{\sqrt{1 - B'^2(x)} \sqrt{B(x) + b(y)}}, \quad s(x, y) = -r(x, y). \quad (8)$$

Замечание 1 и сказанное в начале пункта 2 завершают доказательство теоремы.

Замечание 4. Из формул (8) видно, что мы можем погрузить и неполную метрику, если на погруженной части выполнено условие  $|B'(x, y)| < 1$ .

4. В этом пункте с помощью предыдущих результатов получим явное выражение для радиус-вектора поверхности, которая несет метрику (1) и удовлетворяет теореме.

Обращаясь к замечанию 1 пункта 2, учитывая (8) и обозначения (см. пункт 2)  $l = \frac{L}{W}$ ,  $n = \frac{N}{W}$ , где  $L, N$  — коэффициенты второй квадратичной формы,  $W = \sqrt{EG - F^2}$  — дискриминант первой квадратичной формы, получим вторую квадратичную форму искомой поверхности

$$II = L(x) dx^2 + N(x, y) dy^2, \quad (9)$$

где

$$L(x) = -\frac{B''(x)}{\sqrt{1 - B'^2(x)}}, \quad N(x, y) = w(x, y) \sqrt{1 - B'^2(x)}.$$

Будем искать поверхность в параметрической форме  $X = X(x, y)$ ,  $Y = Y(x, y)$ ,  $Z = Z(x, y)$ , для которой квадратичные формы (1) и (9) являются соответственно первой и второй квадратичными формами поверхности.

Пусть

$$\vec{R}(x, y) = X(x, y)\vec{e}_1 + Y(x, y)\vec{e}_2 + Z(x, y)\vec{e}_3 \quad (10)$$

есть радиус-вектор искомой поверхности. Эту вектор-функцию двух скалярных аргументов  $x, y$  будем рассматривать на всей плоскости. Будем предполагать, что в любой точке векторное произведение  $[\vec{R}_x, \vec{R}_y]$  не равно нулю, т. е. касательные вектора  $\vec{R}_x$  и  $\vec{R}_y$  неколлинеарны. Пусть  $\vec{P} = \vec{P}(x, y)$  — единичная нормаль искомой поверхности. Известно (см. (3)), что векторы  $\vec{R}_{xx}, \vec{R}_{xy}, \vec{R}_{yy}, \vec{P}_x$  и  $\vec{P}_y$  можно представить в виде линейной комбинации векторов  $\vec{R}_x, \vec{R}_y$  и  $\vec{P}$  (дифференциальные формулы Гаусса—Вейнгартена). В нашем случае эти формулы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \vec{R}_{xx} = L\vec{P} \\ \vec{R}_{xy} = \frac{w_x}{w}\vec{R}_y \\ \vec{R}_{yy} = -ww_x\vec{R}_x + \frac{w_y}{w}\vec{R}_y + N\vec{P} \\ \vec{P}_x = -L\vec{R}_x \\ \vec{P}_y = -\frac{N}{w^2}\vec{R}_y \end{cases} \quad (11)$$

Будем искать решение (11). Из второго уравнения системы (11), интегрируя по  $x$ , получим

$$\vec{R}_y(x, y) = w(x, y)\vec{z}(y),$$

где  $\vec{z}(y)$  — любая регулярная функция от  $y$ . Интегрируя последнее равенство, получим

$$\vec{R}(x, y) = \int w(x, y)\vec{z}(y)dy + \vec{\beta}(x), \quad (12)$$

где  $\vec{\beta}(x)$  — любая регулярная вектор-функция действительного переменного  $x$ . Таким образом, мы получили радиус-вектор искомой поверхности, в уравнении которой участвуют две произвольные вектор-функции действительных переменных. Наша цель — найти такие функции  $\vec{z}(y)$  и  $\vec{\beta}(x)$ , чтобы поверхность, имеющая уравнение (12), имела квадратичные формы (1) и (9) как соответственно первая и вторая квадратичные формы.

Из последних двух уравнений системы (12) после несложного преобразования получим следующее уравнение:

$$\vec{P}(x, y) = -\sqrt{1 - B''(x)} \int \vec{z}(y)dy + \int \frac{B''(x)}{\sqrt{1 - B''(x)}} \vec{\beta}'(x)dx.$$

Используя последнее уравнение, а также уравнение (12), из первого и третьего уравнения системы (11) после нетрудного вычисления получим следующую систему:

$$\begin{cases} \vec{\beta}''(x) = -\frac{B''(x)}{\sqrt{1-B'^2(x)}} \cdot \int \frac{B''(x)}{\sqrt{1-B'^2(x)}} \vec{\beta}'(x) dx \\ \vec{\alpha}'(y) + \int \vec{\alpha}(y) dy = -B'(x) \vec{\beta}'(x) + \sqrt{1-B'^2(x)} \int \frac{B''(x)}{\sqrt{1-B'^2(x)}} \vec{\beta}'(x) dx. \end{cases} \quad (13)$$

Будем искать решение системы (13). Из второго уравнения этой системы получим следующее уравнение:

$$\vec{\alpha}''(y) + \vec{\alpha}(y) = 0.$$

Это уравнение, очевидно, имеет решение

$$\vec{\alpha}(y) = \vec{\tau} \cos y + \vec{\sigma} \sin y, \quad (14)$$

где векторы  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\sigma}$  постоянные. Из системы (13) с учетом (14) после несложного преобразования получим уравнение

$$\vec{\beta}''(x) = -\frac{B'(x)B''(x)}{1-B'^2(x)} \cdot \vec{\beta}'(x).$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$\vec{\beta}(x) = \vec{v} \int \sqrt{1-B'^2(x)} dx, \quad (15)$$

где вектор  $\vec{v}$  постоянный. Таким образом, учитывая формулы (14) и (15), для радиус-вектора искомой поверхности получим следующее выражение:

$$\vec{R}(x, y) = \int w (\vec{\tau} \cos y + \vec{\sigma} \sin y) dy + \vec{v} \int \sqrt{1-B'^2(x)} dx. \quad (16)$$

Покажем, что векторы  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{v}$  попарно перпендикулярные и единичные.

Из того, что  $\vec{R}_x^2 = 1$ ,  $\vec{R}_x \cdot \vec{R}_y = 0$ ,  $\vec{R}_y^2 = w^2(x, y)$ , получим следующую систему:

$$\begin{cases} |\vec{\tau} \cos y + \vec{\sigma} \sin y|^2 = 1 \\ \left| B'(x) \cdot \int (\vec{\tau} \cos y + \vec{\sigma} \sin y) dy + \vec{v} \sqrt{1-B'^2(x)} \right|^2 = 1 \\ \left| (\vec{\tau} \cos y + \vec{\sigma} \sin y) \left[ B'(x) \int (\vec{\tau} \cos y + \vec{\sigma} \sin y) dy + \vec{v} \sqrt{1-B'^2(x)} \right] \right| = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из первого уравнения системы (17) получим  $\vec{\alpha}(y) \cdot \vec{\alpha}'(y) = 0$  (см. (14)), т. е.  $\vec{\alpha} \perp \vec{\alpha}'$ . С другой стороны  $\vec{\alpha}(y) \cdot \int \vec{\alpha}(y) dy = 0$  (см. (13)). Отсюда

и из последнего уравнения системы (17) получим  $0 = \vec{\alpha}(y)\vec{\beta}'(x) = \sqrt{1-B^2(x)} \vec{v} \cdot \vec{\alpha}(y)$ , т. е.  $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$ . Далее, рассуждая аналогичным образом, приходим к следующему факту —  $\vec{v} \perp \vec{\alpha}'$ . Нетрудно теперь заметить, что  $\vec{v} \perp \vec{\tau}$  и  $\vec{v} \perp \vec{\sigma}$ . Далее поступим так. Продифференцируем первое уравнение системы (17) по  $y$ , второе по  $x$  и последнее по  $y$ . К полученным соотношениям добавим первое уравнение системы (17). Учитывая, что  $\vec{v} \perp \vec{\tau}$  и  $\vec{v} \perp \vec{\sigma}$ , получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma}(\cos^2 y - \sin^2 y) - (\vec{\tau}^2 - \vec{\sigma}^2) \sin y \cos y = 0 \\ \vec{\tau}^2 \sin^2 y + \vec{\sigma}^2 \cos^2 y - 2 \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} \sin y \cos y = |\vec{v}|^2 \\ \vec{\tau}^2 \sin^2 y + \vec{\sigma}^2 \cos^2 y - 2 \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} \sin y \cos y = 1 \\ \vec{\tau}^2 \cos^2 y + \vec{\sigma}^2 \sin^2 y + 2 \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} \sin y \cos y = 1. \end{cases} \quad (18)$$

Из второго и третьего уравнения системы (18) получим  $|\vec{v}| = 1$ . Далее из последнего вычтем предпоследнее и возьмем его с первым. Получим

$$\begin{cases} \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma}(\cos^2 y - \sin^2 y) - (\vec{\tau}^2 - \vec{\sigma}^2) \sin y \cos y = 0 \\ 4 \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} \sin y \cos y + (\vec{\tau}^2 - \vec{\sigma}^2)(\cos^2 y - \sin^2 y) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, эта система относительно  $\vec{\tau} \cdot \vec{\sigma}$  и  $\vec{\tau}^2 - \vec{\sigma}^2$  имеет единственное нулевое решение, т. е.  $\vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} = \vec{\tau}^2 - \vec{\sigma}^2 = 0$ . Отсюда получим, что  $\vec{\tau} \perp \vec{\sigma}$  и  $|\vec{\tau}| = |\vec{\sigma}|$ . Из (18) получим также  $|\vec{\tau}| = |\vec{\sigma}| = 1$ . Таким образом, векторы  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярные и единичные.

Выражение (16), в котором векторы  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{v}$  удовлетворяют выше приведенным условиям, представляют собой радиус-вектор искомой поверхности с метрикой (1) и второй квадратичной формой (9).

Пусть  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{v}$  в базисе  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  имеют координаты  $\vec{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ ,  $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ,  $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Тогда очевидно, что параметрические уравнения поверхности будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= \int w(x, y)(\tau_1 \cos y + \sigma_1 \sin y) dy + v_1 \int \sqrt{1-B^2(x)} dx \\ Y(x, y) &= \int w(x, y)(\tau_2 \cos y + \sigma_2 \sin y) dy + v_2 \int \sqrt{1-B^2(x)} dx \\ Z(x, y) &= \int w(x, y)(\tau_3 \cos y + \sigma_3 \sin y) dy + v_3 \int \sqrt{1-B^2(x)} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

**Замечание 5.** Известно, что кривизна метрики (1) (также поверхности (19)) вычисляется по формуле

$$K(x, y) = - \frac{B''(x)}{B(x) + b(y)}.$$

Очевидно, кривизна  $K(x, y)$  для данной поверхности (19) может менять знак.

З а м е ч а н и е 6. Метрика (1) реализована посредством поверхности (19). Из этих формул видно, что можно снизить требования регулярности по сравнению с требованиями регулярности в пункте 3.

З а м е ч а н и е 7. Отметим, что из семейства (19) можно выделить поверхность, напоминающую поверхность вращения. Именно, когда  $\vec{\tau} = \{0, 1, 0\}$ ,  $\vec{\sigma} = \{-1, 0, 0\}$ ,  $\vec{\nu} = \{0, 0, 1\}$ , то

$$X(x, y) = w(x, y) \cos y - \int b'(y) \cos y dy;$$

$$Y(x, y) = w(x, y) \sin y - \int b'(y) \sin y dy;$$

$$Z(x) = \int \sqrt{1 - B''(x)} dx.$$

Автор приносит глубокую благодарность Э. Г. Позняку за постановку задачи и внимание к ее решению.

Армянский государственный Педагогический институт им. Х. Абовяна

Ի. Յ. ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ

### Նշանափոխ կորության որոշ լրիվ շափերի ռեգուլյար ամբողջական $E^3$ բնկղմելիության մասին

Այս աշխատանքում դիտարկված է ամբողջ հարթության վրա որոշված  $ds^2 = dx^2 + [B(x) + b(y)]^2 dy^2$  շափը (աբստրակտ տված մակերևույթի առաջին բառակուսային ձևը)։ Սկզբում ենթադրելով, որ վերոհիշյալ շափը ունի փոփոխական բացասական գաուսյան կորություն և բավարարում է որոշ պայմանների, ապացուցվում է, որ այն ռեալիզացվում է որպես մակերևույթ՝ պատկանող  $C^3$  դասին։ Աշխատանքի երկրորդ մասում հաջողվում է գտնել մակերևույթների ընտանիք, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի վերոհիշյալ շափը։ Դա հնարավորություն է տալիս նախ իջեցնել ռեգուլյարության ապրիորի պահանջի շափը, որը սովորաբար թելադրում են առաջին բառակուսային ձևին (այսինքն շափին), և երկրորդ՝ ակնհայտ է, որ մենք կարող ենք արդեն խոսել այդ շափերի նշանակության մասին։

### Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

<sup>1</sup> Б. Л. Рождественский, ДАН СССР, т. 143, № 1 (1962). <sup>2</sup> Э. Г. Позняк, Укр. геометр. сб., вып. 3 (1966). <sup>3</sup> А. В. Погорелов, Дифференциальная геометрия, Наука, М., 1974.

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

А. О. Бабаян

# Интегральные уравнения Винера—Хопфа с вырождающимся символом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 25/II 1981)

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)ds = f(t) \quad t \geq 0 \quad (1)$$

с символом, имеющим вид

$$1 - K(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{i\lambda t}dt = \left| \frac{\lambda}{\lambda + i} \right|^a \theta(\lambda)(1 - H(\lambda)), \quad (2)$$

где  $\operatorname{Re} a > 0$ ,  $\theta(\lambda)(1 - H(\lambda)) \neq 0$  для всех  $\lambda$ .  $\theta(\lambda)$  имеет вид

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1 & 0 < \lambda \leq \varepsilon \\ c & -\varepsilon \leq \lambda \leq 0 \end{cases} \quad c \neq 0$$

$$\theta(\lambda) = 1 \quad |\lambda| \geq 2\varepsilon$$

при некотором  $\varepsilon$  и предполагается дифференцируемой везде, кроме точки ноль, а

$$1 - H(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\lambda\tau}d\tau \quad h \in L^1(-\infty, \infty).$$

Исследование проводится в пространствах  $L^p(0, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Уравнение (1) рассматривается в работах <sup>(1,2)</sup> в случае, когда символ уравнения не обращается в нуль на замкнутой вещественной оси. В работах <sup>(3-7)</sup> методом левой и правой нормализации изучается уравнение с символом, имеющим нуль целого порядка. В случае, когда символ имеет выделенные нули нецелого порядка, в работе <sup>(8)</sup> проводится исследование уравнения (1) в пространствах  $L^p(0, \infty)$  при

$1 < p < \infty$  путем построения левой нормализации с помощью операторов Бесселя и Лиувилля интегро-дифференцирования. Случай, когда (1) исследуется в  $L^\infty(0, \infty)$ , рассмотрен в (9) при условии, что символ имеет производную, удовлетворяющую условию Гельдера там, где он отличен от нуля. В (10) уравнение (1) исследуется в пространствах  $L^p(0, \infty)$  при  $1 \leq p < \infty$ .

1. Сначала введем некоторые обозначения. Множество функций, имеющих вид

$$c + \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{it\lambda} dt, \quad h \in L^1(-\infty, \infty), \quad (3)$$

будем обозначать  $R$ . Множество функций, допускающих представление (2) с  $h=0$  п. в. на  $(-\infty, 0)$ , обозначается  $R^+$ ; множество функций, допускающих представление (2) с  $h=0$  п. в. на  $(0, \infty)$ , обозначается  $R^-$ . Легко можно проверить, что  $R, R^+, R^-$  — алгебры относительно поточечного умножения. Кроме того в силу теоремы Винера — Леви, если  $G(\lambda) \in R$  и  $G(\lambda)$  не обращается в нуль на  $[-\infty, \infty]$ , то и  $[G(\lambda)]^{-1} \in R$ . Аналогичные результаты справедливы для  $R^+$  и  $R^-$ .

Преобразование Фурье функции  $f$  из класса  $L^p(-\infty, \infty)$  при некоторых  $p$  будет обобщенной функцией, действующей на  $S$  (пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций) таким образом:

$$(\hat{f}, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{\psi}(t) dt \quad \psi \in S.$$

Здесь  $\hat{f}$  преобразование Фурье функции  $f$ . Если функция  $h \in L^1(-\infty, \infty)$ , то  $\hat{h} \hat{f}$  будет обозначать следующую обобщенную функцию:

$$(\hat{h} \hat{f}, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} (h * f)(t) \hat{\psi}(t) dt \quad \psi \in S. \quad (*)$$

Операторы  $\pi^+$  и  $\pi^-$ , переводящие класс преобразований Фурье функций из  $L^p(-\infty, \infty)$  в классы преобразований Фурье функций из  $L^p(0, \infty)$  и  $L^p(-\infty, 0)$  (здесь и далее класс  $L^p(0, \infty)$  ( $L^p(-\infty, 0)$ ) будем отождествлять с подпространством  $L^p(-\infty, \infty)$ , состоящим из функций, обращающихся в нуль на отрицательной (положительной) полуоси) определим следующим образом;

$$(\pi^+[\hat{f}], \psi) = \int_0^{\infty} f(t) \hat{\psi}(t) dt$$

$\psi \in S.$



$$F(\lambda) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m G(\lambda) + F_1^-(\lambda), \quad (7)$$

где  $m = \left[ \operatorname{Re} \alpha_+ - \frac{1}{q} \right] + 1$ ,  $F_1^-(\lambda) \in R^-$ ,  $G(\lambda)$  — преобразование Фурье функции  $g(t) \in L^1 \cap L^p$ . В этом случае уравнение (1) имеет решение при  $m \geq -\gamma + 1$  тогда и только тогда, когда выполнены  $m + \gamma$  условий:

$$\int_0^\infty t^k e^{-t} \psi_1(t) dt = 0 \quad k = 0, 1, \dots, m + \gamma - 1,$$

где  $\psi_1(t)$  — прообраз Фурье функции  $\left( \frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{\alpha_-} \frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)}$ , а  $G(\lambda)$  определяется из (7).

При  $m = -\gamma$  существует единственное решение (1), которое определяется как прообраз Фурье функции

$$\Phi^+(\lambda) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + i} \right)^{m - \alpha_+} \Phi_0^+(\lambda) \pi^+ \left[ \left( \frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{\alpha_-} \frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)} \right].$$

При  $m < -\gamma$  уравнение (1) всегда разрешимо, однородное уравнение имеет  $-\gamma - m$  линейно-независимых решений, а общее решение неоднородного уравнения определяется как прообраз Фурье функции

$$\begin{aligned} \Phi^+(\lambda) = & \left( \frac{\lambda}{\lambda + i} \right)^{-\alpha_+} \left( \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{-\gamma} \Phi_0^+(\lambda) \left( \frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \times \\ & \times \left[ \pi^+ \left[ \left( \frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{\alpha_-} \frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)} \right] + \sum_{j=0}^{-\gamma - m - 1} \frac{c_j \lambda^j}{(\lambda - i)^{-\gamma - m}} \right], \end{aligned}$$

где  $c_j$  — произвольные постоянные.

б) При  $\operatorname{Re} \alpha_+ = [\operatorname{Re} \alpha_+]$ ,  $\alpha_+ \neq [\operatorname{Re} \alpha_+]$  в случае, когда (1) рассматривается в пространствах  $L^p$  при  $1 \leq p < \infty$  результаты те же, что и в пункте а). Пусть (1) рассматривается в  $L^\infty$ . В этом случае достаточно предположить, что правая часть (1) допускает представление

$$F(\lambda) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{m_1} G(\lambda) + F_1^-(\lambda), \quad (8)$$

где  $m_1 = [\operatorname{Re} \alpha_+] - 1$ ,  $G(\lambda)$  — преобразование Фурье функции из  $L^1(0, \infty)$ ,  $F_1^- \in R^-$ . Все результаты пункта а) сохраняются, если заменить  $m$  на  $m_1$  и подставить  $G(\lambda)$  из представления (8).

в) Пусть теперь  $\alpha_+ = [\operatorname{Re} \alpha_+]$ . В этом случае изменится результат, когда (1) рассматривается в  $L^1(0, \infty)$ . Будем предполагать, что правая часть (1) допускает представление

$$F(\lambda) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{m_1} G(\lambda) + F_1^-(\lambda), \quad (9)$$

где  $m_2 = [\operatorname{Re} \alpha_+]$ ,  $G(\lambda)$  — преобразование Фурье функции  $g(t) \in L^1$ , а  $F_1^- \in R^-$ . Тогда результаты а) сохраняются, если заменить  $m$  на  $m_2$  и подставить  $G(\lambda)$  из представления (9).

В случае же, когда (1) рассматривается в  $L^p(0, \infty)$  при  $1 < p \leq \infty$ , сохраняются результаты пункта б).

В заключение заметим, что вышеприведенные результаты не следуют из (<sup>10</sup>), где методом неоднозначной факторизации исследована задача (1) при  $1 \leq p < \infty$ , однако не дается ответ на вопрос о принадлежности решений пространству  $L^p(0, \infty)$ .

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

## Ա. Հ. ԲԱԲՍՅԱՆ

Վիճե՛ր — Հոպֆի ալլափոխվող սիմվոլով ինտեգրալ հավասարումներ

Աշխատանքում դիտարկվում է (1) հավասարումը այն պայմանով, որ սիմվոլը ունի (3) տեսքը:

Հետազոտման ժամանակ օգտագործվում է սիմվոլի շալափոխվող մասի ֆակտորիզացիայի հնարավորությունը:

Պարզաբանվում են պայմանները, որոնց դեպքում (1) հավասարումը ունի լուծում, երբ աջ մասը թույլատրում է (7), (8), կամ (9) ներկայացումը:

Հաշվարկվում է համասեռ հավասարման գծային անկախ լուծումների քանակը:

Տրվում է այդ լուծումների տեսքը ֆուրյեի ձևափոխությունների տերմիններով:

## ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> М. Г. Крейн, УМН, т. 13, вып. 5 (1958). <sup>2</sup> Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Изв. АН СССР, сер. математика, т. 20, № 1 (1956). <sup>3</sup> В. Б. Дыбин, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 2, № 4 (1967). <sup>4</sup> В. Б. Дыбин, ДАН СССР, т. 191, № 4 (1970). <sup>5</sup> Н. Г. Чеботарев, Изв. вузов, математика, № 10, 1967. <sup>6</sup> М. И. Хайкин, Изв. вузов, математика, № 10, 1967. <sup>7</sup> Ф. Д. Гахов, В. И. Смагина, Изв. АН СССР, сер. математика, 26, № 3 (1962). <sup>8</sup> Н. К. Карапетянц, Дифференциальные уравнения, т. 13, № 8 (1977). <sup>9</sup> Н. Е. Товмасян, Сибирский мат. журн., т. 19, № 4 (1973). <sup>10</sup> З. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений, М., 1979. <sup>11</sup> М. И. Хайкин, Изв. вузов, математика, № 8, 1978.

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Академик АН Армянской ССР М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян

О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов  $L_p$

(Представлено 27/V 1981)

В общих результатах об интерполяционных рядах, порожденных нулями целых функций типа синуса, установленных Б. Я. Левиным (<sup>1</sup>), в качестве частного случая содержится известная теорема В. А. Котельникова в следующей формулировке.

Для любой последовательности  $\{a_k\} \in l^p$  ( $1 < p < +\infty$ ) ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k \frac{\sin \sigma z}{z - \frac{\pi}{\sigma} k} \quad (0 < \sigma < +\infty) \quad (1)$$

равномерно сходится в любом круге  $|z| \leq R$ , а также по норме  $L_p(-\infty, +\infty)$  и дает отображение всего пространства  $l^p$  на все пространство целых функций  $f(z)$  экспоненциального типа  $\leq \sigma$ , причем

$$c_1 \|f\|_p^p \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p \leq c_2 \|f\|_p^{p^{**}} \text{ и } a_k = f\left(\frac{\pi}{\sigma} k\right), \quad (2)$$

где  $c_j > 0$  ( $j=1, 2$ ) — постоянные, не зависящие от  $f$ .

Цель настоящей заметки распространить этот результат на случай весовых пространств класса  $l^{p,x}$  последовательностей  $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty}$  с конечной нормой

$$\|\{a_k\}\|_{p,x} = \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1+|k|)^x \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (3)$$

\* Формула эта при иных условиях на функцию  $f$  известна давно (см. (<sup>2</sup>), задачу 165.)

\*\* В дальнейшем вместо такого рода двойных неравенств будем употреблять символ  $\asymp$ .



откуда в силу неравенства (8) следует также оценка

$$|f(z)| \leq c_2 (1+|z|)^{-\frac{1}{p}} e^{\gamma|y|} \|f\|_{p,x,\gamma}, \quad 0 \leq |z| < +\infty, \quad (9)$$

где  $c_2 > 0$  не зависит от  $f^*$ . Из неравенства (9) легко будет следовать полнота всех пространств  $W_{\sigma}^{p,x}[\gamma]$  ( $-\infty < \gamma < +\infty$ ).

II. Тожественность множеств  $W_{\sigma}^{p,x}[\gamma]$  и  $W_{\sigma}^{p,x}[0]$  очевидна, хотя нормы у этих пространств различны.

Лемма 3. Для любой функции  $f(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$  ( $1 < p < +\infty, -1 < x < +\infty$ ) и при любом  $-\infty < \gamma < +\infty$  будем иметь:

$$1^{\circ}. \|f\|_{p,x,\gamma} \asymp \|f\|_{p,x}; \quad (10)$$

$$2^{\circ}. \|f(x+iy)\|_{p,x} \asymp \|f\|_{p,x}, \quad \forall y \in (-\infty, +\infty). \quad (11)$$

1°. На  $W_{\sigma}^{p,x}[0]$  определим оператор  $T$ , положив  $Tf = f \in W_{\sigma}^{p,x}[\gamma]$ , где  $\gamma \in (-\infty, +\infty)$  — данное число. Ясно, что  $T$  отображает все  $W_{\sigma}^{p,x}[0]$  на все  $W_{\sigma}^{p,x}[\gamma]$ , т. е. имеется обратный оператор  $T^{-1}$  такой, что при

$$f \in W_{\sigma}^{p,x}[\gamma], \quad T^{-1}f = f \in W_{\sigma}^{p,x}[0].$$

Разберем отдельно два случая:

1) Если  $x \geq 0$ , то  $|x|^2 \leq |x+iy|^2$ , и очевидно,

$$\|f\|_{p,x} \leq \|f\|_{p,x,\gamma} = \|Tf\|_{p,x,\gamma}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p,x}[0], \quad (12)$$

откуда следует, что

$$\|T^{-1}f\|_{p,x} \leq \|f\|_{p,x}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p,x}[\gamma],$$

т. е. оператор  $T^{-1}$  ограничен. По теореме Банаха ограничен и оператор  $T$ , т. е.

$$\|Tf\|_{p,x,\gamma} = \|f\|_{p,x,\gamma} \leq A_1 \|f\|_{p,x}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует (10) в случае  $x \geq 0$ .

2) Если  $-1 < x < 0$ , то  $|x+iy|^2 \leq |x|^2$  и поэтому для любого  $f \in W_{\sigma}^{p,x}[0]$

$$\|Tf\|_{p,x,\gamma} = \|f\|_{p,x,\gamma} \leq \|f\|_{p,x}, \quad (14)$$

т. е. оператор  $T$  ограничен. Поэтому обратный оператор  $T^{-1}$  также ограничен и, следовательно,

$$\|T^{-1}f\|_{p,x} = \|f\|_{p,x} \leq A_1 \|f\|_{p,x,\gamma}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p,x}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) вытекает (10) и в этом случае.

2°. Отметим, что из (10), заменив функцию  $f(z)$  на  $f(z \pm iy)$ , в силу (8) мы получим неравенство

$$\|f(x \pm iy)\|_{p,x} \leq A_1 \|f(x \pm iy)\|_{p,x,\gamma} \leq A_1 e^{\gamma|y|} \|f\|_{p,x} \quad (16)$$

для любого  $\gamma \in (-\infty, +\infty)$ .

Положив  $\varphi(z) = f(z+iy)$ , в силу (16) для функции  $\varphi$  будем иметь

\* Здесь и в дальнейшем зависимость постоянных от остальных параметров  $p, x, \gamma, \sigma$  и т. д., как правило, мы специально отмечать не будем.

$$\|\varphi(x - iy)\|_{p,x} \leq A_1 e^{\alpha|y|} \|\varphi\|_{p,x},$$

или, что то же самое,

$$\|f\|_{p,x} \leq A_1 e^{\alpha|y|} \|f(x + iy)\|_{p,x}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует утверждение (11).

III. Лемма 4. Если  $f(z) \in W_{\frac{\alpha}{2}}^{p,x}$  ( $1 < p < +\infty$ ,  $x > -1$ ), то для любых  $h \in (-\infty, +\infty)$  и  $\alpha \in (0, +\infty)$

$$\left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(\alpha k + ih)|^p (1 + |k|)^x \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{p,x} \quad (18)$$

где  $c > 0$  от  $f$  не зависит.

Рассмотрим в плоскости  $z$  с разрезом  $(-\infty, 0)$  функции  $f(\pm z + ih)z^{x/p}$ . Если  $x = 0$ , то для любого  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , если же  $x \neq 0$ , то для  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , очевидно, справедливы неравенства

$$|f(\alpha k + ih)| |k|^{\frac{x}{p}} \leq \frac{\alpha^{-\frac{x}{p}}}{2\pi} \int_{|\zeta - \alpha k| = \rho} |f(\zeta + ih)| |\zeta|^{\frac{x}{p}} |d\zeta|, \quad 0 < \rho < \frac{\alpha}{2}.$$

Умножая на  $\rho d\rho$  и интегрируя по интервалу  $(0, \alpha/2)$ , в силу неравенства Гельдера следует

$$|f(\alpha k + ih)|^p |k|^x \leq \frac{4}{\pi \alpha^{x+2}} \int \int_{|\zeta - \alpha k| \leq \frac{\alpha}{2}} |f(\zeta + ih)|^p |\zeta|^x |d\zeta|, \quad |k| \geq 1, \quad (19)$$

и, следовательно,

$$\sum_{|k| \geq 1} |f(\alpha k + ih)|^p |k|^x \leq c^2 \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\eta \int_{|\zeta| \geq \frac{\alpha}{2}} |f(\zeta + ih + i\eta)|^p (\zeta^2 + \eta^2)^{\frac{x}{2}} d\zeta.$$

Но в силу (10) и (11)

$$\int_{|\zeta| \geq \frac{\alpha}{2}} |f(\zeta + i(h + \eta))|^p (\zeta^2 + \eta^2)^{\frac{x}{2}} d\zeta \leq \|f(\zeta + i(h + \eta))\|_{p,x,\eta}^p \leq$$

$$\leq c_1 \|f(\zeta + i(h + \eta))\|_{p,x}^p \leq c_2 \|f\|_{p,x}^p,$$

и поэтому

$$\sum_{|k| \geq 1} |f(\alpha k + ih)|^p (1 + |k|)^x \leq c_3 \|f\|_{p,x}^p. \quad (20)$$

Но из неравенства (9) следует, что

$$|f(ih)|^p \leq c_4 \|f\|_{p,x}^p,$$

откуда и из (20) следует неравенство (18) леммы.

Условимся, наконец, обозначать через  $H_{\pm}^{p,x}$  соответственно классы аналитических в полуплоскостях  $G^{(\pm)}$  функций  $\varphi^{\pm}(z)$ , для которых







$$l^{p,x} : \| (a_k) \|_{p,x} = \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1+|k|)^x \right)^{1/p} < +\infty$$

$$W_{\sigma}^{p,x} : \| f \|_{p,x} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^x dx \right)^{1/p} < +\infty$$

$p$  և  $x$  պարամետրերի  $1 < p < +\infty$  և  $-1 < x < +\infty$  արժեքների համար,  $W$ -ի շարք օժանդակ լեմմաներից հետո ապացուցվում է հետևյալ հիմնական պնդումը (թեորեմ 3).

Ցանկացած  $(a_k) \in l^{p,x}$  հաջորդականության համար

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k \frac{\sin \pi z}{z - \pi/k}, \quad a_k = f(\pi/\sigma k)$$

շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ամեն մի  $|z| \leq R$  շրջանում, զուգամետ է նաև  $W_{\sigma}^{p,x}$ -ի մետրիկայում, և առկա է ամբողջ  $l^{p,x}$  տարածության արտապատկերումը ֆունկցիաների  $W_{\sigma}^{p,x}$  ամբողջ տարածության վրա:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Б. Я. Левин, Целые функции, Изд-во МГУ, М., 1971. <sup>2</sup> Г. Поля, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. I, отд. III, Наука, М., 1956. <sup>3</sup> R. P. Boas, Entire functions, N. Y., 1954. <sup>4</sup> В. М. Мартиросян, Изв. АН Армянской ССР, Математика, т. 13, № 5—6, 490—531 (1978). <sup>5</sup> М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. <sup>6</sup> С. Г. Рафаелян, ДАН АрмССР, т. 70, № 4 (1980).

















Поскольку интегральная микросхема построена из функциональных и запоминающих элементов, то "раскрывая" эти микросхемы, мы в конце концов получим схему из функциональных и запоминающих элементов. Можно указать простые формальные правила преобразования записи схемы при раскрытии ее элементов. Таким образом задача моделирования функционирования схемы из интегральных микросхем сводится к задаче моделирования схемы из функциональных и запоминающих элементов (<sup>3</sup>).

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Շ. Ե. ԲՈԶՈՅԱՆ

Ինտեգրալ միկրոսխեմաների վրա հավաքված տրամաբանական սխեմաների  
նկարագրության լեզու

Բանաձևերի՝ առանց փակագծերի գրության լեզուն ընդհանրացվում և հարմարեցվում է ինտեգրալ միկրոսխեմաների վրա հավաքված տրամաբանական սխեմաների նկարագրությանը: Մտցվում է սխեմայի գրության հասկացողությունը, որը հանդիսանում է սիմվոլների վերջավոր հաջորդականություն: Ապացուցվում է թեորեմ, որը նշում է անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, որպեսզի սիմվոլների տված հաջորդականությունը լինի ինտեգրալ միկրոսխեմաների վրա հավաքված որևէ տրամաբանական սխեմայի գրություն:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Մ. Ե. Бозоян, ДАН АрмССР, т. 78, № 4, (1979). <sup>2</sup> Մ. Ե. Бозоян, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1978, № 6. <sup>3</sup> Մ. Ե. Бозоян, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1981. <sup>4</sup> Łukasiewicz, Coll. Intern. Centre. Nat. Rech. Sci., vol. 36 (1950).





































