ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXII, № 5

1981

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. քարտուղար), է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Հ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՋԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм. ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-крор. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1981, т. 72, № 5. с. 257—320.

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год.
На русском языке

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Ա. Վաղարշակյան—*Ոչ սիմետրիկ կշռային ֆունկցիայով բազմանդամներով մոտարկելու մասին* 259

Վ. Ս. Մանուկյան—*Կարլեմանի եզակիությունը մի դասի ֆունկցիաների համար* . 263

Է. Մ. Պողոսյան—*Շախմատային ալգորիթմների ինքնահամակերպման պրոբլեմի լուծելիության մասին* 269

Հ. Ս. Աստեյան—*Նախամաքսիմալ բազմության m-աստիճանների բուլյան ենթահանրահաշիվների մասին* 275

Ա. Գ. Ջերնյավսկի—*Հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ հատկությունների անալոգների մասին* 280

Ա. Ա. Ֆոնարև—*Անշարժ կետերի մասին* 286

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Դ. Մ. Կիրակոսյան—*Իդեալական պլաստիկական սալերի ամենափոքր ծավալի բավարար պայմանների մասին* 291

ՖԻԶԻԿԱ

Ֆ. Պ. Սաֆարյան—*Էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի էլեկտրոն-ֆոնոնային ոչ ճառագայթային անցումը Nd^{3+}-իոնների միջև, որոնք գտնվում են ինտրիում-ալյումինիումի նռնաքարի բյուրեղում խառնուրդների ձևով* 296

ԲԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Զ. Լ. Դոլաբչյան, Ն. Գ. Տատինյան, Ռ. Ս. Գաբրիելյան, Ս. Ա. Փիրուզյան—*Սրտամկանի սուր ինֆարկտի ժամանակ էլեկտրասրտարանական մեթոդների տեղեկատվությունը սրտի կծկողական ակտիվության նկատմամբ* 304

Բովանդակություն LXXII *հատորի* 312

© Издательство АН АрмССР. Доклады АН АрмССР. 1981.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

А. А. Вагаршакян—О приближении многочленами с несимметрической весовой функцией 259

В. М. Манукян—Особенность Карлемана для одного класса функций . 263

Э. М. Погосян—О разрешимости проблемы адаптации шахматных алгоритмов 269

О. С. Асатрян—О булевых подалгебрах m-степеней казимаксимальных множеств 275

А. Г. Чернявский—О квазианалитических аналогах некоторых свойств гармонических функций 280

А. А. Фонарев—О неподвижных точках 286

МЕХАНИКА

Р. М. Киракосян—О достаточных условиях наименьшего объема идеально-пластических пластинок 291

ФИЗИКА

Ф. П. Сафарян—Электрон-фононный безызлучательный переход энергии электронного возбуждения между примесными центрами Nd^{3+} в иттрий-алюминиевом гранате (ИАГ) 296

МЕДИЦИНА

З. Л. Долабчян, Н. Г. Татинян, Р. С. Габриелян, С. А. Пирузян—К вопросу об информативности электрокардиологических методов в отношении сократительной активности сердца при остром инфаркте миокарда . . 304

Содержание LXXII тома 312

Индекс 77730

CONTENTS

MATHEMATICS

A. A. Vagarshakian—Approximation by polynomials with nonsymmetric weighted function. 259

V. M. Manukian—The carleman singularity for one class of functions . 263

E. M. Pogossian—On solvability of chess programms adaptation problem . 269

H. S. Assatrian—On some boolean subalgebras of m-degrees of puasimaximal sets. 275

A G. Cherniavskii—On the quasi-analytical analogues of some properties of harmonic functions. 280

A. A. Fonarev—On the fixed points. 286

MECHANICS

R. M. Kirakosian—On the satisfating condintions for the smollest volume of ideal plastic plates. 291

PHYSICS

F. P. Safarian—Radiationless transition of the electron excitation energy between the impurity ions Nd^{3+} in ittrium-alluminum garnet 296

MEDICINE

S. L. Do'abjian, N. G. Tatinian, R. S. Gabriellan, S. A. Piruzian—On the informativity of electrocardiological methods Concerning Contractile activity of the heart in acute myocardial infarction. 304

Contents of volume LXXII 312

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 30.07.1981 г. Подписано к печати 27.08.1981 г. ВФ 05440.
Бумага № 1, 70×108 1/16. Плоскопечать. Печ. лист 4,0 Усл. печ. лист. 5,6.
Учет.-изд. 4,39. Тираж 500. Заказ 603. Издат. 5514
375019, Ереван, Барекамутян, 24-г. II эт., 1 к.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 517.5188

МАТЕМАТИКА

А. А. Вагаршакян

О приближении многочленами с несимметрической весовой функцией

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/I 1981)

Обозначим через $C_p(-\infty,+\infty)$ пространство непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-p(x)}=0,$$

где $p(x)\geqslant 0$—неубывающая функция. Норма элемента f вводится следующим образом:

$$\|f\|=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|e^{-p(x)}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только те пространства $C_p(-\infty,+\infty)$, к которым принадлежат все многочлены.

Настоящая заметка посвящена следующей задаче: при каких условиях на весовую функцию $p(x)$ многочлены всюду плотны в пространстве $C_p(-\infty,+\infty)$? Приведенная задача для широкого класса четных весовых функций была исследована С. Н. Бернштейном ([1,2]). После работ С. Н. Бернштейна этой задачей интересовались многие математики, с результатами работ которых можно познакомиться в обзорных статьях М. М. Джрбашяна ([3]), С. Н. Мергеляна ([4]) и Н. И. Ахиезера ([5]).

Мы рассматриваем случай, когда $p(x)$ не является четной функцией. Отдельные конкретные случаи нечетной весовой функции были рассмотрены в работе И. О. Хачатряна ([6]).

Теорема. *Пусть весовая функция $p(x)$ имеет вид*

$$p(x)=\begin{cases} a|x|, & \text{при } x<0 \\ q(x), & \text{при } x>0, \end{cases}$$

где $a>0$—некоторое число, а $q(x)>0$—логарифмически выпуклая функция.

Тогда многочлены всюду плотны в пространстве непрерывных функций $C_p(-\infty,+\infty)$ тогда и только тогда, когда расходится интеграл

$$\int_1^\infty \frac{q(x)}{x^{3/2}}\,dx=\infty. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как в случае, когда интеграл (1) сходится, многочлены не плотны даже на полуоси $(0, +\infty)$ с весом $e^{-q(x)}$ ([3]). Докажем достаточность. Предположим обратное: имеет место (1), однако многочлены не плотны в $C_p(-\infty, +\infty)$. Тогда существует мера $d\mu\neq 0$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p(x)}|d\mu(x)|<\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\mu(x)=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots$$

Рассмотрим функцию

$$g(w)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixw}d\mu(x).$$

Обозначим

$$g_1(w)=\int_{-\infty}^{0} e^{ixw}d\mu(x), \qquad g_2(w)=\int_{0}^{\infty} e^{ixw}d\mu(x).$$

Легко заметить, что $g_1(w)$—аналитическая функция в полуплоскости $\{w;\ \operatorname{Im} w<a\}$, а $g_2(w)$—в полуплоскости $\{w;\ \operatorname{Im} w>0\}$. Следовательно, $g(w)$—аналитическая функция в полосе $\{w;\ 0<\operatorname{Im} w<a\}$. Заметим, что

$$g^{(k)}(0)=i^k\int_{-\infty}^{\infty} x^k d\mu(x)=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots$$

Из условия (1) следует, что существует выпуклая, неубывающая последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\max_{|w-i\rho|<\rho}|g^{(n)}(w)|\leqslant M_n, \quad n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $0<\rho<\min\{a, 1\}$ и расходится ряд (см. ([9]))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{M_n}{M_{n+1}}}=\infty. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $f(z)=g(i\rho-i\rho e^{-z})$, определенную при $\operatorname{Re} z>0$. Заметим, что $f^{(n)}(0)=0, \quad n=0,\ 1,\ \ldots$ Очевидно, что для любого n имеет место следующая формула:

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=1}^{n} A_{k,n}e^{-kz}g^{(k)}(i\rho-i\rho e^{-z}).$$

Мы утверждаем, что $|A_{k,n}|\leqslant C_n^k$. Действительно, пусть предполагае-

мое неравенство имеет место для некоторого n и всех k, $0<k\leqslant n$. Докажем его справедливость при $n+1$ и $0<k\leqslant n+1$. Поскольку

$$f^{(n+1)}(z)=-\sum_{k=1}^{n} A_{k,n}(ke^{-kz}g^{(k)}(i\rho-i\rho e^{-z})+i\rho e^{-(k+1)z}g^{(k+1)}(i\rho-i\rho e^{-z}) =$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}(kA_{k,n}+i\rho A_{k-1,n})e^{-kz}g^{(k)}(i\rho-i\rho e^{-z})-i\rho A_{n,n}e^{-(n+1)z}g^{(n+1)}(i\rho-i\rho e^{-z}),$$

то

$$|A_{k,n+1}|=|kA_{k,n}+i\rho A_{k-1,n}|\leqslant kC_n^k+C_n^{k-1}\leqslant C_{n+1}^k.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{-k\operatorname{Re}z}\,|g^{(k)}(i\rho-i\rho e^{-z})|\leqslant 2^n M_n$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2^n M_n}{2^{n+1}M_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{M_n}{M_{n+1}}}=+\infty.$$

В силу теоремы Б. Салинаса (см. ([7,8])) $f(z)\equiv 0$. Поэтому $d\mu\equiv 0$. Теорема доказана.

Автор благодарен академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за обсуждение работы и ценные советы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ

Ոչ սիմետրիկ կշռային ֆունկցիայով բազմանդամներով մոտարկելու մասին

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է ամբողջ առանցքի վրա բազմանդամներով կշռային մոտարկման խնդիրը: Դիտարկվում են այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$p(x)=\begin{cases} a|x|, & \text{երբ } x<0\\ q(x), & \text{երբ } x>0,\end{cases}$$

որտեղ $a>0$, *իսկ* $q(x)>0$ *լոգարիթմական ուռուցիկ ֆունկցիա է: Բերվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ* $q(x)$*-ի վրա, որոնց դեպքում բազմանդամները լրիվ են անընդհատ ֆունկցիաների տարածության մեջ* $\exp\{-p(x)\}$ *կշռի առկայությամբ:*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *S. Bernstein*, Bull. Math. de France, vol. 52 (1924). [2] *С. Н. Бернштейн*, ДАН СССР, т. 88, № 4 (1953). [3] *М. М. Джрбашян*, Мат. сб., т. 36 (78), № 3 (1955). [4] *С. Н. Мергелян*, УМН, т. 11, вып. 5. (71) (1956). [5] *Н. И. Ахиезер*, УМН, т. 11, № 4 (70) (1956). [6] *И. О. Хачатрян*, Изв. АН АрмССР, т. 3, № 4—5 (1968). [7] *М. М. Джрбашян, Г. С. Казарян*, Изв. АН СССР, т. 37, № 1 (1973). [8] *R. B. Salinas*, Rev. Acad. Ciencias, Madrid, vol. 49 (1955). [9] *С. Мандельбройт*, Примыкающие ряды, ИЛ, М., 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. М. Манукян

Особенность Карлемана для одного класса функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 12/I 1981)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$—полная, ортонормальная система (ПОНС) в $L^2[0,1]$ и $f(x)\in L^2[0,1]$. Тогда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty.$$

Карлеман впервые установил ([1]) существование непрерывной функции, коэффициенты Фурье которой по тригонометрической системе удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty \quad \text{при всех } p<2. \tag{1}$$

В связи с этим возникло следующее определение ([2,3]): функция $f(x)$ обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$, если коэффициенты Фурье $c_n=(f,\varphi_n)$ удовлетворяют условию (1). А. М. Олевский в работе ([4]) установил, что для любой ортонормированной полной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует непрерывная функция, обладающая особенностью Карлемана относительно этой системы. Им же в работе ([5]) построена ПОНС, относительно которой каждая непрерывная функция (кроме тождественного нуля) обладает особенностью Карлемана.

В настоящей работе для произвольной точки $x_0\in[0,1]$ построена полная ортонормальная система функций в $L^2[0,1]$, для которой каждая функция $f(x)\in L^2[0,1]$, $(f\overline{\infty}0)$ непрерывная в точке x_0, обладает особенностью Карлемана, причем все функции системы непрерывны во всех точках отрезка $[0,1]$ за исключением точки x_0. Заметим попутно, что ни одна из функций этой системы не могла быть непрерывной в точке x_0, так как такая функция не обладала бы особенностью Карлемана, являясь в то же время непрерывной в точке x_0.

При построении этой системы используются идеи А. М. Олевского, разработанные в работе ([5]).

Теорема 1. *Для произвольной точки* $x_0 \in [0, 1]$ *существует ПОНС функций* $\{\varphi_n(x)\}$, *определенных на* $[0, 1]$ *и непрерывных в любой точке этого отрезка кроме точки* x_0, *такая, что любая функция* $f(x) \in L^2[0, 1]$ $(f \overline{\infty} 0)$, *непрерывная в точке* x_0, *обладает особенностью Карлемана относительно этой системы.*

Лемма 1. (Основная лемма). *Пусть даны: произвольная точка* $x_0 \in [0,1]$, *ПОНС функций* $\{\varphi_n(x)\}$, *определенных на* $[0,1]$, *и пусть функции* $\varphi_n(x)$ *можно представить в виде* $\varphi_n(x) = f_n(x) + \nu_n(x)$ $n = 1, 2, \ldots$, *где* $f_n(x)$ *и* $\nu_n(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

I) $f_n(x)$ *непрерывны на* $[0, 1]$ $n = 1, 2, \ldots$;

II) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^q$ *равномерно сходится при любом* $q > 2$ *и любом* $0 < \alpha < 1$ *на отрезке* $[0, \alpha)$, *если* $x_0 \neq 1$, *на отрезке* $(\alpha, 1]$, *если* $x_0 = 1$;

III) $$\nu_n(x) = \begin{cases} \nu_n \sin \dfrac{2^n \pi}{x - x_0}, & \text{если} \quad x \neq x_0 \\ 0, & \text{если} \quad x = x_0, \ \nu_n > 0 \quad n = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

IV) $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2 < \infty$,

тогда любая функция $f(x) \in L^2[0, 1]$ $(f \overline{\infty} 0)$, *непрерывная в точке* x_0, *обладает особенностью Карлемана относительно системы* $\{\varphi_n(x)\}$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f(x) \in L^2[0, 1]$ $(f \overline{\infty} 0)$, которая не обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$, и покажем, что $f(x)$ разрывна в точке x_0. Так как $f(x)$ не обладает особенностью Карлемана, то существует $p < 2$ такое, что $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty$, где $c_n = (f, \varphi_n)$. Пользуясь неравенством Гёльдера, из условий I и II получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ сходится к некоторой непрерывной на $[0, 1)$ (в случае $x_0 = 1$ на $(0, 1]$) функции $\Phi(x)$, поскольку сходимость осуществляется равномерно внутри $[0, 1)$ (в случае $x_0 = 1$ внутри $(0, 1]$), т. е. на любом интервале $[0, \alpha)$ (в случае $x_0 = 1$ на интервале $(\alpha, 1]$), где $0 < \alpha < 1$. Учитывая также равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ на $[0, 1]$, убедимся, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ равномерно сходится внутри $[0, 1)$ (в случае $x_0 = 1$ внутри $(0, 1]$). Обозначим сумму этого ряда через $g(x)$. Ясно, что $g \overline{\infty} f$ и $g(x) = \Phi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ на $[0, 1)$ (в случае $x_0 = 1$ на $(0, 1]$). Так как $\Phi(x)$ непрерывна в точке x_0,

то если функция $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ имеет существенный разрыв в этой точке, то и $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0. Из того, что $f \overline{\sim} 0$, следует существование такого n_0, что

$$c_{n_0} \neq 0,\ c_n = 0 \text{ при } n < n_0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда $x_0 \neq 1$. Возьмем последовательность $x_k = x_0 + \frac{2^{n_0+1}}{4k+1}$ и выберем k_0 так, чтобы при $k > k_0$ $x_k \in [0,\ 1]$. Для произвольных $n > n_0$ и $k > k_0$ имеем:

$$c_n \nu_n(x_k) = c_n \nu_n \cdot \sin 2^{n-n_0-1}\ (4k+1)\pi = 0;$$

$$c_{n_0} \nu_{n_0}(x_k) = c_{n_0} \nu_{n_0} \cdot \sin (2k+1/2)\pi = c_{n_0} \nu_{n_0} \neq 0. \tag{3}$$

Тогда, учитывая равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ и условия (2), (3), получим

$$\lim_{k\to\infty} \psi(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} c_n \nu_n(x_k) = c_{n_0} \nu_{n_0} \neq 0. \tag{4}$$

Возьмем теперь последовательность $x_k' = x_0 + \frac{1}{k}$ и выберем k' так, что при $k > k_0'$ $x_k' \in [0,\ 1]$. Для таких k и произвольного n имеем

$$c_n \nu_n(x_k') = c_n \nu_n \sin 2^n k\pi = 0,$$

из чего следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \psi(x_k') = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} c_n \nu_n(x_k') = 0. \tag{5}$$

Но так как $x_k \to x_0$, $x_k' \to x_0$, то условия (4) и (5) показывают, что функция $\psi(x)$ имеет в точке x_0 разрыв II порядка.

Если же $x_0 = 1$, то возьмем $x_k = 1 - \frac{2^{n_0+1}}{4k+1}$ и $x_k' = 1 - \frac{1}{k}$. Тем самым лемма доказана.

Для доказательства теоремы осталось построить полную ортонормальную систему, которая удовлетворяет условиям основной леммы.

Лемма 2. *Если в* $L^2[0,\ 1]$ *даны:*

1°) *ортонормальная система ограниченных функций* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$;

2°) *функции* $\|\gamma_i(x)\|_{L^2} \leqslant 1$ $i = 1,\ 2,\ \ldots,$ *то для произвольных* $\varepsilon > 0$ *и функции* $\tau(x) \in L^2[0,\ 1]$ *существуют натуральное число* m, *функции* $\{\varphi_{n+j}(x)\}_{j=1}^{m}$, *многочлен* $P(x)$, *составленный из функций* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+m}$, *такие, что:*

1) $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+m}$ *ОНС в* $L^2[0,\ 1]$;

II) $\varphi_{n+j}(x)=f_j(x)+\nu_j\gamma_j(x)$ $j=1, 2, \ldots, m$, *где* $f_j(x)$ *непрерывны на* $[0, 1]$, *а* $\nu_j>0$;

III) $\sum_{j=1}^{m}|f_j(x)|^q<\varepsilon$ *на* $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ *при любом* $q>2+\frac{1}{n}$;

IV) $\sum_{j=1}^{m}\nu_j^2<\varepsilon$;

V) $\|P(x)-\tau(x)\|_{L^2}<\varepsilon$.

Приведем схему доказательства этой леммы. Дополним систему $\{\varphi_i(x)\}_1^n$ непрерывными функциями ([6]) до ортонормального базиса в $L^2[0, 1]$. Разложим $\tau(x)$ по этому базису и возьмем достаточно много членов этого разложения так, чтобы полученный многочлен $Q(x)$ был достаточно близок к $\tau(x)$. Присоединив к системе $\{\varphi_i(x)\}_1^n$ те элементы базиса, которые также участвуют в многочлене $Q(x)$, получим ОНС $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x), p_1(x), \ldots p_l(x)$. Рассмотрим эти функции как векторы пространства $L^2\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$. Подпространство, натянутое на эти векторы, обозначим через L, а его ортогональное дополнение — через H. В H выберем некоторую ортонормальную систему функций и, взяв достаточно много членов этой системы, доопределим эти функции нулем на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$. Вновь полученные функции вместе с предыдущими составляют ОНС $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x), p_1(x), \ldots p_m(x)$ в $L^2[0, 1]$, причем все функции $p_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ непрерывны на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$. К системе функций $\{p_i(x)\}_1^m$ применим ортонормированную матрицу Уолша $A_l(m=2^l)$. Получим ОНС $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x), g_1(x), \ldots g_m(x)$, причем на отрезке $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ опять все функции $g_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ непрерывны, а $\sum_{i=1}^{m}|g_i(x)|^q<\frac{\varepsilon}{16}$ при любом $2+\frac{1}{n}<q<3$. Теперь опишем, как строится функция $\varphi_{n+1}(x)$ в предположении, что $m=1$. (При $m>1$ описываемый ниже процесс повторяется соответствующее число раз.) Функцию $\varphi_{n+1}(x)$ ищем в форме $\varphi_{n+1}(x)=\beta_1\psi_1(x)$, где β_1 нормирующий множитель, достаточно близкий к единице, а $\psi_1(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{\varphi}_i(x)+\bar{g}_1(x)+\alpha_1\gamma_1(x)$, где α_1 достаточно мало, $\bar{\varphi}_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ и $\bar{g}(x)$ непрерывные функции, достаточно близкие соответственно к $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ и $g_1(x)$, причем на отрезке $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ $\bar{g}_1(x)=g_1(x)$. Коэффициенты a_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ выбраны так, что функция $\psi_1(x)$ ортогональна всем $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, и числа a_i

достаточно малы, что возможно получить, решая систему линейных уравнений $\sum_{i=1}^{n} a_i (\bar{\varphi}_i, \varphi_j) = -(\bar{g}_1 + \alpha_1 \gamma_{i1}, \varphi_j)$ $j = 1, 2, \ldots n$ и вспомнив, что детерминант является непрерывной функцией своих элементов. Таким образом можно получить ОНС $|\varphi_i(x)|_1^{n+m}$. Обозначим $f_k(x) = \beta_k \bar{g}_k(x) + \beta_k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \bar{\varphi}_i(x)$ и $\nu_k = \alpha_k \beta_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, тогда $\varphi_{n+k}(x) = f_k(x) + \nu_k \gamma_k(x)$, причем функции $f_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ непрерывны на отрезке $|0, 1|$, а $\nu_k (1 \leqslant k \leqslant m)$ достаточно малы, так что I, II и IV условия леммы выполняются для системы $\{\varphi_i(x)\}_1^{n+m}$. Так как $f_k(x)$ достаточно близки к $\bar{g}_k(x)$, а $\bar{g}_k(x) = g_k(x)$ на $\left| 0, \frac{n}{n+1} \right|$, то отсюда следует выполнение условия III. Заметим, что линейное пространство, натянутое на $\{g_i(x)\}_1^m$, содержит в себе линейное подпространство, натянутое на $|p_i(x)|_1^l$. Из этого следует, что $Q(x)$ можно представить как линейную комбинацию функций $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)$, $g_1(x), \ldots g_m(x)$. Обозначим через $P(x)$ многочлен, составленный из функций $\varphi_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n+m)$ с коэффициентами этой линейной комбинации. Из того, что функции $\varphi_{n-i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ выбраны достаточно близко к $g_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, следует выполнение V условия леммы. Система, удовлетворяющая условиям леммы 2, построена.

Построение системы $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющей условиям основной леммы, уже очевидно. Возьмем счетное, всюду плотное в $L^2[0, 1]$ множество функций $\tau_k(x)$, последовательность положительных чисел ε_k таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, функции $\gamma_i(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{2^i \pi}{x - x_0} & \text{если } x \neq x_0 \\ 0 & \text{если } x = x_0 \end{cases}$.

Построение системы $\{\varphi_n(x)\}$ осуществим последовательно, пачками. Возьмем $\varphi_1(x) = \dfrac{\gamma_1(x)}{\|\gamma_1(x)\|}$. Предположив, что после k-того шага выбраны первые n_k функций $\varphi_n(x)$ $(1 \leqslant n \leqslant n_k)$, опишем $k+1$-ый шаг. К имеющейся уже ортонормальной системе ограниченных функций $\{\varphi_i(x)\}_1^{n_k}$, к функциям $\{\gamma^{n_k+i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ применим предыдущую лемму, взяв $\varepsilon = \varepsilon_k$ и $\tau(x) = \tau_k(x)$. Легко проверить, что для построенной таким образом системы выполняются все условия основной леммы. Заметим только, что полнота системы $\{\varphi_n(x)\}$ обеспечивается V условием леммы 2 и тем, что множество функций $\tau_k(x)$ всюду плотно в $L^2[0, 1]$.

Замечание 1. Воспользовавшись замечанием А. М. Олевского ([5]), можно, слегка изменив предыдущую конструкцию, получить аналогичный результат и для особенностей типа Вейля. Именно,

Теорема 2. *Для любой последовательности $w(n) \to \infty$ и точки $x_0 \in |0, 1|$ существует полная ортонормальная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[0, 1]$ и непрерывных в любой точке этого отрезка кроме точки x_0, такая, что коэффициенты Фурье произ-*

вольной функции $f(x) \in L^2[0, 1]$ $(f \overline{\infty} 0)$, *непрерывной в точке* x_0, *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w(n) = \infty .$$

В заключение автор выражает благодарность Ф. Г. Арутюняну за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский государственный университет

Վ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Կարլեմանի եզակիությունը մի դասի ֆունկցիաների համար

Եթե $\{\varphi_n(x)\}$-ը օրթոնորմավորված լրիվ սիստեմ է $L^2[0,1]$-ում, *ապա, ինչպես հայտնի է, կամայական* $f(x) \in L^2[0, 1]$ *ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցների համար* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$: *Բայց եթե* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty$, *բոլոր* $p < 2$ *համար, ապա ասում են, որ* $f(x)$ *ֆունկցիան ունի Կարլեմանի եզակիություն* $\{\varphi_n(x)\}$ *օրթոնորմավորված լրիվ սիստեմում:*

Տվյալ աշխատանքում կամայական $x_0 \in [0, 1]$ *կետի համար կառուցված է* $L^2[0, 1]$-ում *օրթոնորմավորված ֆունկցիաների լրիվ սիստեմ, ըստ որի կամայական* $f(x) \in L^2[0, 1]$ *ֆունկցիա* $(f \infty 0)$, *որն անընդհատ է* x_0 *կետում, ունի Կարլեմանի եզակիություն՝ ըստ այդ սիստեմի:*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. [2] *С. Качмаж, Г. Штейнгауз*, Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958. [3] *П. Л. Ульянов*, Успехи матем. науки, т. 19, вып. 1 (1964). [4] *А. М. Олевский*, Сиб. матем. журн., т. 4, № 3 (1963). [5] *А. М. Олевский*, Сиб. матем. журн., т. 8, № 4 (1967). [6] *H. S. Shapiro*, Michigan Math. J., vol. 11, № 1 (1964).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 519.8

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

О разрешимости проблемы адаптации шахматных алгоритмов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 26/I 1981)

1. В 1950 г. К. Шеннон в ([1]) сформулировал проблему построения «самоулучшающейся» программы, «вырабатывающей собственные принципы игры», которую считал наиболее существенной в шахматном программировании. Ниже доказывается разрешимость проблемы Шеннона, формализованной в виде требования о построении алгоритма итеративной оптимизации шахматных алгоритмов при «разумных» ограничениях на стоимость каждого шага итерации. Соответствующая проблема выделяется из проблемы адаптации комбинаторных алгоритмов при ограничениях типа I (ПАКА1), сформулированной в ([2]), снятием требования о строго последовательном усилении гипотез при каждом акте их преобразования. Разрешимость же доказывается в предположении о том, что класс шахматных алгоритмов задается посредством некоторого исчисления с конечным числом правил вывода. Последнее позволяет построить процедуру перечисления всех сочетаний из сравнительно небольшого числа шахматных алгоритмов и, последовательно проверяя в них наличие более сильного алгоритма, чем текущий алгоритм, в пределе с определенной точностью построить оптимальный. Возможность же необходимых локальных проверок следует из приведенной в ([3]) теоремы 2, знакомство с которой, а также с работой ([4]) предполагается.

2.1. ПАКА2 определим как проблему, в которой при заданной комбинаторной оптимизационной проблеме L, множестве алгоритмов U, предназначенных для разрешения L, квазифункциональном отношении $\rho \subseteq U \times U$ и пороге $\Delta_0^*(t)$ на допустимое число элементарных вычислений при построении очередной t-ой гипотезы требуется построить алгоритм предельных вычислений, моделирующий ρ. Произвольную ПАКА2, в которой L есть α—приближенная проблема оптимального управления в шахматах (ПОУ^{ш}), U—заданное множество разрешающих алгоритмов ПОУ^{ш}, U^*—подмножество всех оптимальных в ПОУ^{ш} алгоритмов из U и $\rho \subseteq U \times U^*$, назовем *шахматной* (ПАКА2^{ш}).

Отметим, что хотя в ПАКА2^{ш} предполагается, что $U^{*}\neq\emptyset$, однако и в противном случае смысл нижеследующих утверждений сохраняется, если вместо оптимальных в ПОУ^{ш} решений рассматривать наилучшие из U.

2.2. Покажем, что ПАКА2^{ш} при наличии процедуры последовательного порождения определенной длины наборов алгоритмов для ПОУ^{ш} становится разрешимой.

Для упрощения дальнейших рассуждений без искажения существа рассматриваемых вопросов вместо величин $k_1^i+k_2^i$, $l_1^i+l_2^i$—указателей выхода из неопределенных зон в теореме 2 из ([3]) нам будет удобно оперировать с величинами $m=2\max(\max\limits_{f_i\in F^*}k_1^i,\ \max\limits_{f_i\in F^*}k_2^i)+1$ и $m'=2\max(\max\limits_{f_i\in F^*}l_1^i,\ \max\limits_{f_i\in F^*}l_2^i)+1$.

Предикатом усиления назовем предикат, который для алгоритма i (с i-го абсолютного места) и произвольных z других алгоритмов, разрешающих ПОУ^{ш}, проверяет, проигрывает ли i каждой из z и имеется ли среди z алгоритмов такой, который выигрывает не только у i, но также у всех остальных из z.

Как следует из теоремы 2 из ([3]), выполнение предиката усиления при $z\geqslant m$ является достаточным условием при выборе алгоритма сильнее чем i.

Пусть $\psi_z(t)$—процедура, порождающая по $z>0$ алгоритмов из U в ПАКА2^{ш} такая, что для произвольной z-ки s существует t, $1\leqslant t<\infty$, при которой $\psi_z(t)=s$. Пусть также $\Delta(\psi_z,\ t)$—число элементарных вычислений, необходимое для порождения процедурой $\psi_z(t)$ произвольных z алгоритмов, разрешающих ПОУ^{ш}, и проверки для них предиката усиления относительно заданного алгоритма i.

Будем говорить, что алгоритм ω *разрешает* ПАКА2^{ш} *с точностью* l, если для произвольного $f\in U$ предельное решение $\omega(f)$ отлично от истинного решения ПОУ^{ш} не более чем на l абсолютных мест.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Произвольная* ПАКА2^{ш}, *для которой существует процедура порождения* $\psi_z(t)$ *при* $z\geqslant m$ *и* $\Delta^*(t)\geqslant\Delta\psi_z(t)$, *разрешима с точностью* $m'+z$.

2.3.1. Итак, вопрос разрешимости ПАКА2^{ш} нами сведен к вопросу о возможности построения порождающей процедуры $\psi_z(t)$ при $z\geqslant m$ с достаточно хорошей оценкой $\Delta(\psi_z,\ t)$ на число элементарных вычислений при построении t-ой гипотезы. Покажем осуществимость указанной процедуры при некоторых достаточно естественных требованиях к множеству разрешающих алгоритмов ПОУ^{ш}.

2.3.2. Пусть $\Gamma_n^k(t)$—определенный в ([3]) алгоритм порождения Δ_n^k—наборов длины $1\leqslant k\leqslant n$. Справедлива следующая

Теорема 2. *Для произвольных множества* B, *с порождающим алгоритмом* $\psi_1(x)$ *(без повторений) и* $z>0$, *алгоритм* $\psi_z(t)$

такой, что $\psi_z(1)=\{\psi_1(1), \ldots, \psi_1(z)\}$ *и* $\psi_z(t)=\{\psi_1(n), \psi_1((\Gamma^{z-1}_{n-1}(t-C^{z-1}_{n-1}))_1), \ldots$ $\ldots, \psi_1((\Gamma^{z-1}_{n-1}(t-C^{z-1}_{n-1}))_{z-1})\}$ *при* $C^z_{n-1}<t\leqslant C^z_n$ *и* $n>z$, *порождает все z-ки из* **B** *(без повторений).*

2.3.3. Опишем порождающую процедуру для класса разрешающих алгоритмов ПОУ^{ш}, выделяемого при предположениях достаточно общего типа.

Как следствие гипотезы об оптимальном в ПОУ^{ш} алгоритме нами в (2) был определен класс алгоритмов **B**, которому предположительно принадлежит оптимальный. Каждый элемент **B** задается конкретизацией алгоритмов синтеза стратегий и поиска в тезаурусе, координатора и тезауруса. В свою очередь в каждом из указанных механизмов порождения элементов **B** имеется свое, будем полагать, конечное число других механизмов преобразования алгоритмов или *регуляторов.* Можно, например, выделить в **B** регуляторы, основанные на следующих принципах:

1) накопления закономерностей, в частности, посредством включения в тезаурус закономерностей из списков, которые либо заданы априори, либо должны быть извлечены из заданных текстов или полностью синтезированы;

2) оптимизации заданных закономерностей, в частности, их детерминизации, компактизации записей, увеличения общности применения, уточнения степени правдоподобия, организации взаимного расположения в тезаурусе и др.;

3) оптимизации алгоритмов построения стратегических планов, вычисления правдоподобия целей, поиска в тезаурусе, синтезе стратегий, координатора и др.

Тем самым можно считать, что классы типа **B** определяются конкретизацией индивидуально распознаваемых состояний каждого из заданных l регуляторов, вообще говоря, с бесконечными областями их изменения. Требование же индивидуальной распознаваемости уточняется посредством предположения о том, что все состояния каждого регулятора пронумерованы и заданы кодирующие-декодирующие операторы перехода от состояния произвольного регулятора к его номеру и наоборот. Произвольное множество алгоритмов вышеуказанного типа при $l>0$ назовем l *-порожденным.*

Ясно, что особо интересны l -порожденные множества, содержащие оптимальный для ПОУ^{ш} алгоритм, а вопрос построения соответствующей полной системы регуляторов естественно ставить в рамках принятой гипотезы об этом алгоритме.

Будем говорить, что l-порожденное множество с *независимой регуляцией*, если произвольный алгоритм этого множества, полученный в результате применения заданной выборки регуляторов, не зависит от порядка их применения; в противном случае будем говорить о *зависимой регуляции.*

При наличии подходящих кодирующих-декодирующих операторов вопрос генерации алгоритмов l-порожденного множества **B**^{l} можно свес-

ти к вопросу генерации l-ичных чисел. Действительно, если $\mathbf{B}^l$—множество с зависимой регуляцией и алгоритм $f \in \mathbf{B}^l$ получен установкой регулятора i_1 в состояние j_1, ..., регулятора i_r в состояние j_r, то код $\xi_1(f)$ определим как l-ичное число $\underbrace{i_1 \ldots i_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{i_r \ldots i_r}_{j_r}$, где $1 \leqslant r \leqslant l$.

В свою очередь произвольное l-ичное число A интерпретируем как код определенного алгоритма $\xi_1^{-1}(A)$ из $\mathbf{B}^l$, полученного установкой регулятора $(A)_1$ в 1-ое состояние, регулятора $(A)_2$ в 1-ое состояние, если $(A)_2 \neq (A)_1$, и во 2-ое состояние, в противном случае, и т. д., регулятора $(A)_i$ в $(j+1)$-ое состояние, где $1 \leqslant i \leqslant l$, а j—кратность появления элемента i в A.

Ясно, что для произвольных $f \in \mathbf{B}^l$ и l-ого числа A $\xi_1^{-1}\xi_1(f) = f$ и $\xi_1\xi_1^{-1}(A) = A$.

Если же $\mathbf{B}^l$ с независимой регуляцией и $f \in \mathbf{B}^l$, то код $\xi_2(f)$ определим как l-ое число, полученное из $\xi_1(f)$ упорядочением чисел $(\xi_1(f))_1, \ldots, (\xi_1(f))_{|\xi_1(f)|}$ в порядке их возрастания, а $\xi_2^{-1}(A) = \xi_1^{-1}(A)$. Поскольку последовательность применения регуляторов не влияет на структуру порожденных алгоритмов, то $\xi_2^{-1}\xi_2(f) = f$ (с точностью до эквивалентности алгоритмов).

Пусть теперь $\psi_1^{l1}(x)$—алгоритм, который по произвольному натуральному числу x в десятичной записи выдает l-ое представление x, а $\psi_1^{l2}(x)$ при $x = 1, 2, \ldots$ выдает в порядке возрастания (без пропусков) те l-ые числа, в каждом из которых элементы младших разрядов не превышают элементов старших. Очевидна следующая

Теорема 3. *Алгоритм* $\xi_1^{-1}\psi_1^{l1}(x)(\xi_1^{-1}\psi_1^{l2}(x))$ *при* $x = 1, 2, \ldots$ *перечисляет без повторений элементы l-порожденного множества* $\mathbf{B}^l$ *с зависимой (независимой) регуляцией.*

Заметим, что при допущении повторений процедуру ψ_1^{l1} можно использовать и при независимой регуляции. Отметим также, что процедуры $\xi_1^{-1}\psi_1^{l1}$ и $\xi_1^{-1}\psi_1^{l2}$ можно использовать при перечислении всевозможных выводов в исчислениях, поскольку каждое l-порожденное множество можно интерпретировать как множество выводов заданного исчисления с l правилами вывода, в котором независимой регуляции соответствуют выводы, эквивалентные при разных последовательностях применения заданной выборки правил.

2.3 4. В нижеследующей теореме 4 дается положительный ответ на вопрос о разрешимости. ПАКА2$^{\text{ш}}$ с l-порожденным множеством алгоритмов для ПОУ$^{\text{ш}}$.

Пусть $c = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 5} c_i$, где c_i при $i = 1, \ldots, 5$—число элементарных вычислений для сравнения, сложения, умножения, деления и вычитания двух чисел, соответственно, а $c_{\text{м}}$ и $c_{\text{д}}$—число элементарных вычислений для проведения одного матча и перехода от l-ичного кода алгоритма к самому алгоритму посредством декодирующего оператора ξ_1^{-1}, соответственно. Справедлива следующая

Теорема 4. *Произвольная* ПАКА2^{ш} *с* l*-порожденным множеством алгоритмов для* ПОУ^{ш} *и* $\Delta^*(t) \geqslant 2c_{\text{м}}m^2 + 5cm(1 + \log_l(t + m + 2)) + c_{\text{д}}m$ *разрешима с точностью* $m + m'$.

Отметим, что в приведенной выше оценке $\Delta(\psi_z, t)$ не рассмотрена сложность достижения того или иного состояния регуляторов. Такое пополнение в нашем представлении возможно лишь после дальнейших исследований сложности синтеза знаний.

Доказательство теоремы 4 одновременно дает нам определенный метод адаптации шахматных алгоритмов—*метод локальных турниров*—1 (МЛТ-1), который при известных состояниях регуляторов заданного множества l-порожденных алгоритмов доставляет с определенной точностью наилучший алгоритм этого множества посредством перечисления всех z-ок из него и проверки для них предиката усиления.

Отметим также, что при адаптации шахматных алгоритмов каждая текущая гипотеза уже является решением (быть может, и не оптимальным), а стимулом к ее преобразованию служит выполнимость локально вычислимого предиката усиления. Аналогичным стимулом при индуктивном синтезе программ по примерам их работы ([6]) является рассогласованность гипотезы с очередным анализируемым примером. При этом гипотезы, которые могут и не принадлежать классу решений проблемы, последовательно обобщаются до построения в пределе искомого решения.

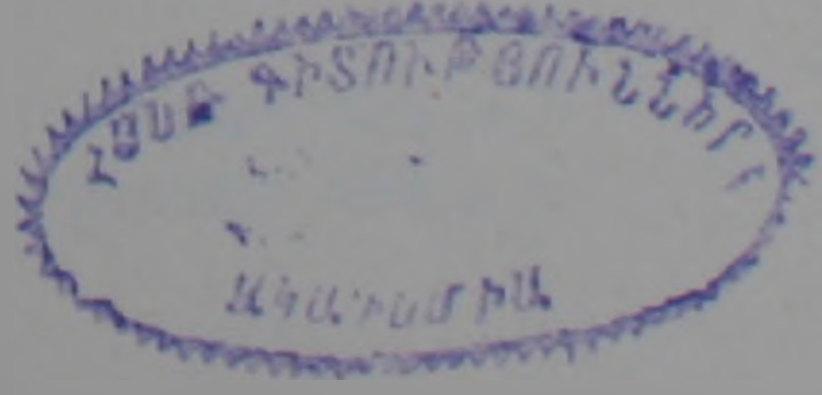
3. Разрешимые ПАКА2 можно дополнить требованием выбора оптимальных относительно заданного оператора качества алгоритмов. При использовании временной сложности выбор оптимального алгоритма будет существенно зависеть от соотношения между заданными точностью решений, значением $\Delta^*(t)$, кратностью просмотра порождающих алгоритмов и др. В нижеследующей теореме 6 утверждается возможность и выделяются условия однократного порождения z-ок алгоритмов процедурой ψ_z при поиске оптимального.

Теорема 5. *Произвольная* ПАКА2^{ш}, *для которой существует процедура порождения* $\psi_{2m'}(t)$ *при* $\Delta^*(t) \geqslant \Delta(\psi_{2m'}, t)$ *и однократном последовательном порождении* $2m'$*-ок посредством* $\psi_{2m'}(t)$ *разрешима с точностью* $3m'$.

Теорема 6. *Произвольная* ПАКА2^{ш} *с* l*-порожденным множеством алгоритмов для* ПОУ^{ш} *и* $\Delta^*(t) \geqslant 8c_{\text{м}}(m')^2 + 10cm'(1 + \log_l(t + 2m' + 2)) + 2c_{\text{д}}m'$ *разрешима с точностью* $3m'$ *при однократном последовательном порождении* $2m'$*-ок алгоритмов.*

Доказательство теоремы 6 легко получить из доказательства теоремы 4 заменами в нем m на $2m'$ и теоремы 1 на теорему 5.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета



Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Նախմատային ալգորիթմների իճճնահամակերպման պրոբլեմի լուծելիության մասին

1950 թ. Կ. Շեննոնը ձևակերպեց «ինքնալավացվող», «իր սեփական խաղային սկզբունքները կառուցող» ծրագրի պրոբլեմը, որը համարում էր շախմատային ծրագրավորման պրոբլեմներից ամենաէականը։

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ Շեննոնի պրոբլեմը լուծելի է, եթե այն ձևակերպվի ինչպես շախմատային ալգորիթմների իտերատիվ օպտիմիզացման մեթոդի կառուցման պահանջ, որտեղ իտերացիայի յուրաքանչյուր քայլի արժեքի վրա դրված են բանական սահմանափակումներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Шеннон*, Работы по теории информации и кибернетике, М., 1963. [2] *Э. М. Погосян*, Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта», Паланга, 3—5 сент., 1980. [3] *Э. М. Погосян*, ДАН АрмССР, т. 70, № 2 (1980). [4] *Э. М. Погосян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 1 (1979). [5] *Э. М. Погосян*, ДАН АрмССР, т. 50, № 2 (1970). [6] *Я. М. Барздинь, И. Э. Этмане*, Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта», Паланга, 3—5 сент., 1980.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 51.01.:518.5

МАТЕМАТИКА

О. С. Асатрян

О булевых подалгебрах m-степеней квазимаксимальных множеств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/II 1981)

В верхней полурешетке m-степеней выявляются конечные подрешетки, которые являются булевыми подалгебрами. Доказано, что булева алгебра подмножеств квазимаксимального множества β, факторизованная по конечной симметрической разности, изоморфна начальному сегменту m-степеней β. Из этого, в частности, следует, что все конечные булевы алгебры встречаются в полурешетке m-степеней.

Описаны все множества, лежащие в m-степени квазимаксимального множества.

Все хорошо известные из ([1]) понятия, используемые в изложении, вводятся без определений. Определения 1 и 2 принадлежат Лахлану ([2]).

Янг (см. ([1]), с. 307) показал, что максимальное множество m—минимально.

Теорема 1. *Если α и β—максимальные множества, то $\alpha\cap\beta$—наименьшая верхняя грань α и β по m-сводимости.*

Доказательство. Если α и β лежат в одном и том же элементе E/F, где E/F фактор множества всех подмножеств натурального ряда относительно конечно-симметрической разности, то нечего доказывать. Предположим, что α и β лежат в различных элементах E/F. Тогда $\beta\setminus\alpha$ и $\alpha\setminus\beta$ бесконечные множества. Поэтому $N\setminus(\alpha\cup\beta)$ конечное множество, так как в противном случае, с одной стороны, $N\setminus(\alpha\cup\beta)$ бесконечно, с другой стороны, $\beta\setminus\alpha$ бесконечно и α содержится в р.п. множестве $\alpha\cup\beta$, что противоречит нашему предположению о максимальности α.

Общерекурсивную функцию, m-сводящую α к $\alpha\cap\beta$, построим согласно следующей инструкции.

Пусть $b\in\beta$ и $c\in\alpha\cap\beta$. Начнем перечислять α и β и параллельно построим о. р. ф.

$$\varphi(x)=\begin{cases} b & \text{если } x\in N\setminus(\alpha\cup\beta)\\ c & \text{если } x \text{ вычисляется в } \alpha \text{ раньше чем в } \beta\\ x & \text{если } x \text{ вычисляется в } \beta \text{ раньше чем в } \alpha.\end{cases}$$

То, что $\varphi(x)$ общерекурсивная функция, следует из конечности $N \setminus (\alpha \cup \beta)$. Рассуждая стандартно, легко убедиться, что φ m-сводит α к $\alpha \cap \beta$.

Пользуясь точно такой же инструкцией, можно построить о. р. ф. $\psi(x)$, m-сводящую β к $\alpha \cap \beta$. Из этих двух утверждений следует, что $\alpha \cap \beta$ является верхней гранью максимальных множеств α и β по m-сводимости. Покажем теперь, что $\alpha \cap \beta$ наименьшая верхняя грань. Для этого убедимся в том, что всякое m-сводящее к $\alpha \cap \beta$ р. п. множество γ либо рекурсивно, либо лежит в одной из степеней α, β, $\alpha \cap \beta$.

Пусть $\gamma \leqslant_m \alpha \cap \beta$ и f m-сводящая о. р. ф.

Рассмотрим следующие случаи:

1а) $f(\gamma)$ конечное множество;

1б) $f(\gamma)$—бесконечное множество и $f(\bar{\gamma})$ конечное множество;

2а) $f(\gamma)$, $f(\bar{\gamma})$ и $f(\bar{\gamma}) \cap \alpha$ бесконечны и $f(\bar{\gamma}) \cap \beta$ конечно;

2б) $f(\gamma)$, $f(\bar{\gamma})$ и $f(\bar{\gamma}) \cap \beta$ бесконечны и $f(\bar{\gamma}) \cap \alpha$ конечно;

2в) $f(\gamma)$, $f(\bar{\gamma})$ и $f(\bar{\gamma}) \cap \alpha$ бесконечны и $f(\bar{\gamma}) \cap \beta$ бесконечно.

Из доказательства теоремы будет видно, что других возможностей нет. Легко убедиться, что в случаях 1а) и 1б) γ рекурсивное множество. Теперь рассмотрим по отдельности остальные 3 случая.

2а) Предположим, что $(\alpha \setminus \beta) \setminus f(\gamma)$ бесконечно, тогда $\beta \cup f(N)$ р. п. подмножество β, имеющее бесконечное дополнение, и так как $f(\bar{\gamma}) \cap (\alpha \setminus \beta)$ бесконечно, то β не максимально. Это противоречит нашему предположению о максимальности β. Поэтому $(\alpha \setminus \beta) \setminus f(\bar{\gamma})$ конечное множество. Покажем теперь, что в случае 2а) $\beta \leqslant_m \gamma$. Для этого предположим, что $a \in \gamma$ и $b \in \bar{\gamma}$ выбранные числа, и построим о. р. ф. h для m-сведения β к γ по следующей инструкции:

Перечислим α, β, γ и параллельно строим

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{если } (x \in f(\bar{\gamma}) \cap \beta) \vee (x \text{ вычисляется в } \beta \text{ раньше чем в } f(N)) \\ b & \text{если } x \in (\alpha \setminus \beta) \setminus f(N) \text{ или } x \in N \setminus (\alpha \cup \beta) \\ f^{-1}(x) & \text{если } x \text{ вычислится в } f(N) \text{ раньше чем в } \beta \text{ и } x \notin \bar{\alpha} \cap f(N). \end{cases}$$

(Здесь $f^{-1}(x) = \mu y(f(y) = x)$. Это обозначение будем использовать и дальше).

В том, что условия для построения о. р. ф. функции $h(x)$ непротиворечивы и полны, можно убедиться, рассуждая стандартно, после чего m-сводимость β к γ функцией h очевидна. Сводимость γ к β следует из конечности $f(\bar{\gamma}) \cap \beta$. Таким образом мы доказали, что γ лежит в m-степени β.

2б) (Этот случай подобен случаю 2а.) Надо только поменять местами α и β во всех рассуждениях и в схеме для $h(x)$. Тогда мы получим $h'(x)$, m-сводящую α к γ.

В этом случае мы получаем принадлежность γ m-степени α.

2в) В этом случае, как и при 2а), 2б), мы убеждаемся, что $(\beta \setminus \alpha) \setminus f(\overline{\gamma})$ и $(\alpha \setminus \beta) \setminus f(\overline{\gamma})$ обе конечны. Тогда можем построить о. р. ф. $g(x)$, m-сводящую $\alpha \cap \beta$ к γ:

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{если } x \in [N \setminus (\alpha \cap \beta)] \setminus f(N) \\ a & \text{если } x \text{ появится в } \alpha \cap \beta \text{ раньше чем в } f(N) \\ f^{-1}(x) & \text{если } x \text{ появится в } f(N) \text{ раньше чем в } \alpha \cap \beta. \end{cases}$$

Как и при 2а), 2б), убедимся, что $\alpha \cap \beta$ m-сводится к γ функцией g. А сводимость γ к $\alpha \cap \beta$ мы уже предположили. Таким образом в случае 2в) γ лежит в m-степени $\alpha \cap \beta$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Множество m-степеней всех надмножеств квазимаксимального множества β образует конечную булеву подалгебру $\mathfrak{M}_3$ в верхней полурешетке m-степеней р. п. множеств.*

Доказательство. Сформулируем лемму и опишем метод доказательства следствия.

Лемма 1. *Максимальное разбиение дополнения квазимаксимального множества р. п. множествами единственно с точностью до конечных множеств.*

Следует применить метод индукции по максимальному разбиению дополнения для доказательства того, что $\mathfrak{M}_3$ конечная решетка. Потом надо убедиться в том, что если $\beta = \bigcap\limits_{i \leqslant n} \alpha_i$, $\delta = \bigcap\limits_{i \in D} \alpha_i$ (где n число максимального разбиения $\overline{\beta}$, $D \subseteq \{0, 1, \ldots, n\} \leftrightarrows U$), то $\gamma = \bigcap\limits_{i \in U \setminus D} \alpha_i$ является дополнением δ в $\mathfrak{M}_3$.

Далее нас будет интересовать следующий вопрос. Можно ли описать другие множества, лежащие в минимальных m-степенях и степенях квазимаксимальных множеств.

Определение 1. Р. п. множество α максимально в множестве β (или β-максимально) если $|\beta \setminus \alpha| = \infty$,

$$\forall \gamma [\gamma \subset \beta \Rightarrow [\, |\gamma \cap (\beta \setminus \alpha)| < \infty \vee |\overline{\gamma} \cap (\beta \setminus \alpha)| < \infty \,]].$$

Лемма 2. *Для произвольного бесконечного р. п. множества β существует β-максимальное множество.*

Доказательство. Пусть δ максимальное множество и $f(N) = \beta$ есть 1—1 о. р. перечисление р. п. β. Тогда очевидно, что $f(\delta)$ β-максимальное множество.

Теорема 2. *Если β γ-максимально и γ рекурсивное множество, то β лежит в минимальной m-степени.*

Доказательство. Пусть γ рекурсивное множество и β γ-максимально. Предположим, что α р. п. множество и $\alpha \leqslant_m \beta$. Покажем, что либо α рекурсивно, либо $\beta \leqslant_m \alpha$. Действительно, если $(\gamma \setminus \beta) \cap f(N)$ конечно, то α перечислимое множество, так как γ рекурсивное множество. Тогда α рекурсивное множество. Если же $(\gamma \setminus \beta) \cap f(N)$ бесконечное множество, то $\gamma \cap f(N)$ р. п., содержится в γ и поэтому в силу γ-максимальности β $(\gamma \cap f(N)) \cup \beta$ почти совпадает с γ. В этом

случае сводящую функцию построим следующим образом. Пусть a и b числа соответственно из α и $\bar{\alpha}$. Перечислим β и строим функцию $g(x)$:

$$g(x)=\begin{cases} a & \text{если } x \text{ появится в } \beta \text{ раньше, чем в } f(N) \\ b & \text{если } x\in\bar{\gamma}\cup[\gamma\setminus(\beta\cup f(N))] \\ f^{-1}(x) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $g(x)$ m-сводит β к α, т. е. β лежит в минимальной m-степени. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 β лежит в соответствующей m-степени некоторого максимального множества.*

Доказательство. Пусть β γ-максимально и f 1—1 о. р. перечисление γ. Тогда $\alpha=f^{-1}(\beta)$ максимальное множество.

Остается показать, что α и β лежат в одной и той же m-степени. Действительно, α m-сводится к β функцией f. Функцию, m-сводящую β к α, строим по схеме, описанной в доказательстве теоремы.

Следующая теорема дает полное описание всех множеств, лежащих в m-степени квазимаксимального множества.

Определение. Р. п. множество β γ-квазимаксимально, если β есть пересечение конечного числа γ-максимальных множеств.

Теорема 3. *Для любых рекурсивного γ и рекурсивно перечислимого β β γ-квазимаксимально тогда и только тогда, когда β лежит в m-степени квазимаксимального множества.*

Доказательство. Если β γ-квазимаксимально, то, используя идеи из теорем 1 и 2, доказываем, что α лежит в m-степени соответствующего квазимаксимального множества. Обратное утверждение здесь мы докажем только для частного случая, из которого уже будет видно, как надо обобщать доказательство для общего случая, т. е. для произвольного квазимаксимального множества.

Пусть β максимальное множество, $\alpha\leqslant_m^f\beta$ и $\beta\leqslant_m^h\alpha$, где f и h соответствующие сводящие функции.

Покажем, что α максимально в $\gamma=\alpha\cup h(N)$ и γ рекурсивное множество.

Предположим, что α не максимально в γ. Тогда $\gamma\setminus\alpha\leftrightarrows\delta$ не сжато и пусть W_{x_0} такое р. п. множество, что $|W_{x_0}\cap\delta|=\infty$ и $|\delta\setminus W_{x_0}|=\infty$. Легко убедиться в справедливости следующего утверждения:

$$\forall y[y\in h(\bar{\beta})\Rightarrow|\{x/h(x)=y\}|<\infty],$$

которое следует из иммунности $\bar{\beta}$. В таких условиях $h^{-1}(W_{x_0})$ опровергает сжатость $\bar{\beta}$. Получили противоречие. Значит, α γ-максимальное множество.

Теперь предположим, что $f(\bar{\gamma})$ бесконечное множество, и придем к противоречию—из этого будет следовать, что $\bar{\gamma}$ рекурсивное множество.

Рассмотрим два бесконечных р. п. множества $f(\bar{\gamma})$ и $f(N)$. Они

бесконечны в силу нерекурсивности α. $f(\delta)$ и $f(N)$ удовлетворяют следующим трем условиям:

1) $|f(N)\cap\bar{\beta}|=\infty$;

2) $|f(\delta)\cap\bar{\beta}|=\infty$, в противном случае δ не сжато;

3) $|(f(N)\setminus f(\delta))\cap\bar{\beta}|=\infty$, так как $f(N)\setminus f(\delta)=f(\bar{\gamma})$.

Из этих условий видно, что $\bar{\beta}$ не сжато.

Пришли к противоречию. $f(\bar{\gamma})$ конечное, поэтому $\bar{\gamma}$ рекурсивное множество, что и требовалось доказать.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Հ. Ս. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Նախամաքսիմալ բազմության m-աստիճանների բուլյան ենթահանրահաշիվների մասին

Հայտնի է, որ բնական շարքի բոլոր ծնթաբազմությունների անլուծելիության m-աստիճանների վերին կիսացանցը՝ L, կիսացանց չէ։ Այս հոդվածում բացահայտված են L-ի վերջավոր ենթացանցեր, որոնք բուլյան հանրահաշիվներ են։ Որպես հետևանք ստացվում է, որ բոլոր վերջավոր բուլյան հանրահաշիվներն ունեն իզոմորֆ ներկայացուցիչներ L-ում։ Այս փաստը ապացուցելու համար օգտվում ենք նախամաքսիմալ (կվազիմաքսիմալ) α բազմության բոլոր թվարկելի ընդլայնումների բազմության՝ $\hat{\alpha}$-ի կառուցվածքից։ Ըստ Լախլանի թեորեմի (տե՛ս [1], էջ 109) հիպերհիպերպարզ բազմության համար $\hat{\alpha}$-ն բուլյան հանրահաշիվ է։ Նախամաքսիմալ α բազմությունը նույնպես հիպերհիպերպարզ է, ուրեմն $\hat{\alpha}$-ն բուլյան հանրահաշիվ է։ Ֆակտորիզացնելով $\hat{\alpha}$-ն՝ ըստ վերջավոր սիմետրիկ տարբերության, ստանում ենք վերջավոր բուլյան հանրահաշիվ և ապացուցում, որ այդ հանրահաշիվը իզոմորֆ է α-ին m-բերվող բոլոր m-աստիճանների կիսացանցին։ Հարկավոր է նշել, որ ապացույցը չի օգտագործում Լախլանի թեորեմը։ Ստացված է նաև այն բոլոր բազմությունների լրիվ նկարագրությունը, որոնք ընկած են որևէ նախամաքսիմալ բազմության m-աստիճանում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Мир, М., 1972. [2] *Дж. Шенфилд*, Степени неразрешимости, Наука, М., 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

А. Г. Чернявский

О квазианалитических аналогах некоторых свойств гармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 9/III 1981)

Классическая теорема Карлемана—Островского о квазианалитических классах функций состоит в описании всех неотрицательных последовательностей $\{m_n\}_0^\infty$, для которых класс функций $C\{m_n\} = \{f \in C^\infty(a, b), |f^{(n)}(t)| \leqslant A_f B_f^n m_n, a \leqslant t \leqslant b, n = 0, 1, \ldots\}$ является квазианалитическим, т. е. не содержит функции $f(t) \not\equiv 0$, у которой $f^{(n)}(x_0) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$

Эта теорема получила глубокие обобщения в работах М. М. Джрбашяна (1), М. М. Джрбашяна и А. Б. Нерсесяна (2) и близких по тематике исследованиях и была обобщена П. Лелоном (3), а затем и другими авторами для функций нескольких переменных. В работе (1) было введено новое понятие α-квазианалитичности и описаны последовательности $\{m_n\}$, при которых для фиксированного оператора дробного дифференцирования в смысле Вейля $L = D_\infty^{1/\rho}$, $\rho \geqslant 1$ из соотношений $|L^n f| \leqslant A_f m_n$, $L^n f(0) = 0$, $f \in C^\infty([0, \infty))$, $\sup\{|x^p f^{(q)}(x), 0 \leqslant x < \infty\} < \infty$, $p, q, n = 0, 1, \ldots$ с необходимостью следует $f \equiv 0$.

Операторная трактовка проблемы квазианалитичности, которая содержится в этом результате, может быть использована для различных классов операторов L. Целью настоящей работы является рассмотрение случая $L = \Delta$ в R^N, $N > 1$, в котором получены обобщения некоторых хорошо известных свойств гармонических функций.

Пусть $K(r) = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in R^N, \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_N^2 \leqslant r^2\}$, $S(r) = \{x \in R^N, \|x\| = r\}$, фиксировано $r_0 > 0$ и $G = K(r_0)$. Для произвольного мультииндекса $p = (p_1, \ldots, p_N)$ положим $D_x^p = D_{x_1}^{p_1} \ldots D_{x_N}^{p_N}$, $|p| = p_1 + \ldots + p_N$. Будем использовать некоторые свойства операторов интегрирования целого и дробного порядка $D_0^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, которые приведены в монографии М. М. Джрбашяна (4).

Пусть задано произвольное целое $k \geqslant 0$ и произвольная N-мерная сферическая функция $Y_{k,N}(\omega)$, $\omega \in S(1)$ порядка k (см. (5)).

Теорема. *Для того, чтобы из соотношений*

$$u(x)\in C^\infty(G),\ |\Delta^n u(x)|\leqslant A_u\|x\|^{k-1}m_n,\ x\in G,$$
$$D_x^p\Delta^n u(0)=0,\quad |p|\leqslant k;\quad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{1}$$

следовало, что

$$v_u(r)=\int\limits_{S(r)} u(x)\,Y_{k,N}(x/r)dx\equiv 0,\quad 0<r\leqslant r_0, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{m_n\}$ *удовлетворяла условию квазианалитичности*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)dr}{r^{3,2}}=\infty,\qquad T(r)=\sup_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{m_n}. \tag{3}$$

В частности, при $k=0$ получается следующее квазианалитическое обобщение теоремы о среднем значении для гармонических функций.

Следствие 1. *Для того, чтобы из соотношений* $u\in C^\infty(G)$, $|\Delta^n u|\leqslant m_n$, $\Delta^n u(0)=0$ *следовало, что*

$$\int\limits_{S(r)} u(x)dx\equiv 0,\ 0<r\leqslant r_0, \tag{4}$$

необходимо и достаточно выполнение условия (3).

В случае, когда при $k=0$ $m_n\leqslant(\mathrm{const})^n(2n)!$, равенство (4) следует из формулы Пицетти ([6], с. 288)

$$v_u(r)=\sigma(r)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}\Delta^n u(0)\left(n!\,\Gamma\left(n+\frac{N}{2}\right)\right)^{-1},$$

где $\sigma(r)$—площадь сферы $S(r)$.

Для произвольных $k\geqslant 0$ сформулированная теорема обобщает хорошо известное (см. [5]) свойство ортогональности сферической функции $Y_{k,N}$ любому однородному гармоническому полиному порядка, большего k. Заметим еще, что условие $D_x^p\Delta^n u(0)=0$, $|p|\leqslant k$, $n=0,\ 1,\ \ldots$ является окончательным в формулировке теоремы, так как гармоническая функция $u(x)=\|x\|^k Y_{k,N}(x/\|x\|)$ удовлетворяет условиям $D_x^p\Delta^n u(0)=0$, $|p|\leqslant k-1$, но для нее не выполнено соотношение ортогональности (2). Отметим

Следствие 2. *Пусть* $\{m_n\}$—*неубывающая последовательность, удовлетворяющая условию квазианалитичности* (3). *Тогда из соотношений* $|D_x^q\Delta^n u|\leqslant m_n$, $D_x^p\Delta^n u(0)=0$, $|q|\leqslant 1$, $|p|\leqslant k$, $n\geqslant 0$ *следует тождество* (2).

Действительно, в этом случае из неравенств Шаудера ([6]) получим $|D_x^p\Delta^n u|\leqslant A_u' m_{n+k+1}$, $|p|<\max\{k,\ 1\}$, откуда вытекают соотношения вида (1) для последовательности $\{m_{n+k+1}\}$.

Прежде чем доказывать теорему, приведем несколько вспомо-

гательных утверждений. В доказательстве следующей леммы используется метод, развитый Ю. И. Любичем и В. А. Ткаченко ([7]).

Лемма 1. *Пусть в линейном нормированном пространстве S задан оператор A и для любого вектора $x\in S$ существует целая функция экспоненциального типа $F_\lambda(x)$, удовлетворяющая оценке*

$$|F_\lambda(x)|\leqslant K(1+|\lambda|^r)\|x\|,\ \operatorname{Re}\lambda=0, \tag{5}$$

где константы K, r не зависят от x. Предположим, что при всех $\lambda\in\mathbf{C}$, $x\in S$ справедливо представление

$$F_\lambda(Ax)=\lambda^2F_\lambda(x)+\varphi_\lambda(x), \tag{6}$$

в котором $\varphi_\lambda(x)$—полином от λ. Тогда, если $\|A^nx\|\leqslant m_n$ и выполнено условие квазианалитичности (3), *то $F_\lambda(x)$ есть полином от λ степени не выше r.*

Доказательство. Пусть $w(\lambda)$—целая функция экспоненциального типа с нулевым индикатором при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, у которой при $n=0, 1, \ldots$

$$\max\{|\lambda^n w(\lambda)|,\ \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0\}<\infty. \tag{7}$$

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию

$$\gamma_\lambda(t)=\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}F_\lambda(x)w(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda,\ t\geqslant 0.$$

Продифференцировав функцию γ_λ $2n$ раз, пользуясь соотношениями ([5]), теоремой Коши и леммой Жордана, получим

$$\gamma_\lambda^{(2n)}(t)=\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}F_\lambda(A^nx)w(\lambda)(-1)^{2n}e^{-\lambda t}d\lambda,\ t\geqslant 0;\quad |\gamma_\lambda^{(2n)}(t)|\leqslant\text{const}\,m_n.$$

В силу теоремы Винера—Пэли $\gamma_\lambda(t)=0$ при достаточно больших значениях t и по теореме Карлемана—Островского $\gamma_\lambda(t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$. Пользуясь теоремой Винера—Пэли и тем, что $w(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, получим (см. ([8])), что $F_\lambda(x)$ имеет минимальный экспоненциальный тип при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$. Аналогично рассуждая для полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$ и применяя принцип Фрагмена—Линделефа, получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (1). *Тогда $v_u(t)\in C^\infty([0, r_0])$, $v_u^{(n)}(0)=0$, $n=0, 1, \ldots$*

Доказательство. Для произвольного $r>0$ положим

$$g_r(x)=\tilde{g}_r(\|x\|)=\|x\|^k(\|x\|^{-N+2-2k}-r^{-N+2-2k})Y_{k,N}(x/\|x\|).$$

Пользуясь формулой Грина ([6]) и тем, что $\Delta g_r\equiv 0$; $g_r(x)=0$ при $\|x\|=r$; $v_{\Delta^n u}(r)=0(r^{N-2+k})$, $r\to 0$, $n=0, 1, \ldots$, имеем

$$\int_{K(r)}\Delta u(x)g_r(x)dx=\int_{S(r)}u(x)r^{-(N-1+k)}(N-2+2k)Y_{k,N}(x/\|x\|)dx,$$

$$v_u(r) = \frac{r^{N-1+k}}{N-2+2k} \int_0^r v_{\Delta u}(t)\bar{g}_r(t)dt, \quad |v_u(r)| \leqslant$$

$$\leqslant Cr^{N-2+k} D_0^{-2}[|v_{\Delta u}(t)|t^{-(N-2+k)}](r) \leqslant C^n r^{N-2+k} \times$$

$$\times D_0^{-2n}[|v_{\Delta^n u}(t)|t^{-(N-2+k)}](r) \leqslant C_1^{n+1} r^{2n},$$

откуда сразу получается утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть бесконечно дифференцируемая на отрезке* $[0, 1]$ *функция* $y(t)$, *у которой* $y^{(n)}(0)=0$, $n=0, 1, \ldots$, *удовлетворяет при* $0<t\leqslant 1$ *дифференциальному уравнению* $y^{(m)}+(yb_1)^{(m-1)}+\ldots$ $\ldots+yb_m=0$, $b_i \in C^\infty([0, 1])$, $|b_i(t)| \leqslant C/t^i$, $1 \leqslant i \leqslant m$ (*m фиксировано*). *Тогда* $y(t)\equiv 0$.

Доказательство. Функция $y(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению $y(x)=-D_0^{-1}[yb_1](x)-\ldots-D_0^{-m}[yb_m](x)$. Зафиксируем целое $p>\max\{Cm, m\}$ и введем норму $\|y\|_p=\sup\{|y(t)t^{-p}|, 0<t\leqslant 1\}$. Пусть $\|y\|_p>0$, но тогда оценки $|y(t)| \leqslant C\|y\|_p(D_0^{-1}[\tau^{p-1}](t)+\ldots+$ $+D_0^{-m}[\tau^{p-m}](t)) \leqslant C\|y\|_p t^p mp^{-1} < \|y\|_p t^p$, $\|y\|_p < \|y\|_p$ приводят к противоречию. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть выполнены соотношения (1, 3) и N нечетно. Положим

$$y_\lambda(x) = \|x\|^{(2-N)/2} H^{(1)}_{k+(N-2)/2}(i\lambda\|x\|) Y_{k,N}(x/\|x\|), \quad x \neq 0,$$

где $H_\nu^{(1)}(z)$ есть функция Ханкеля ([9]). Функция $y_\lambda(x)$ удовлетворяет (см. ([5,9])) уравнению $\Delta y_\lambda(x)=\lambda^2 y_\lambda(x)$, $x\neq 0$. Из рекуррентных формул для функций Ханкеля ([9]) и из нечетности N следует представление

$$y_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2-N}{2}-k} \sum_{p=0}^{\varkappa} a_p(\|x\|)\lambda^p e^{-\lambda\|x\|} Y_{k,N}(x/\|x\|), \quad \varkappa = \frac{N-3}{2}+k; \tag{8}$$

$$\sup_{r_0 \geqslant r > 0} (|r^{N-2+k-p} a_p(r)| + |r^{N-1+k-p} a_p'(r)|) < \infty,$$

$$p=0, 1, \ldots, \varkappa; \quad a_\varkappa(r) \equiv \text{const}\, r^{\frac{1-N}{2}}.$$

Зафиксируем произвольное $r<r_0$ и положим

$$F_\lambda(u) = \lambda^{\frac{N-2}{2}+k} \int_{K(r)} u(x) y_\lambda(x) e^{\lambda r} dx, \quad r<r_0. \tag{9}$$

Пользуясь формулой Грина и соотношениями (1), имеем

$$F_\lambda(\Delta u) - \lambda^2 F_\lambda(u) = \int_{S(r)} \lambda^{k+(N-2)/2} \left| \frac{\partial u}{\partial n} y_\lambda - u \frac{\partial}{\partial n} y_\lambda \right| e^{\lambda r} dx \equiv \varphi_\lambda(u).$$

Из представления (8) вытекает, что функция $\varphi_\lambda(u)$ есть полином от λ степени не выше $\varkappa$. В нормированном пространстве

$$S=\{u\in C^\infty(G);\ D_x^p \Delta^n u(0)=0,\ |p|\leqslant k,\ n=0, 1, \ldots,\ \|u\|=\max|u(x)/x^{k-1}|<\infty\}$$

рассмотрим оператор $A=\Delta$ и семейство функционалов F_λ, заданных формулой (9). Применяя лемму 1, получим, что

$$\sum_{p=0}^{\varkappa} \lambda^p \int_0^r v_u(t) a_p(t) e^{\lambda(r-t)}\, dt = \sum_{p=0}^{\varkappa} b_p \lambda^p.$$

Интегрируя по частям и пользуясь тем, что по лемме 2 $v_u^{(n)}(0)=0$, $n=0, 1, \ldots$, получим тогда, что

$$\sum_{p=0}^{\varkappa} \lambda^p \left[-\frac{1}{\lambda}(v_u(r)a_p(r)) - \ldots - \frac{1}{\lambda^{p+2}}(v_u(r)a_p(r))^{(p+1)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^r \frac{1}{\lambda^{p+2}}(v_u(t)\, a_p(t))^{(p+2)} e^{\lambda(r-t)}\, dt \right] = \sum_{p=0}^{\varkappa} b_p \lambda^p.$$

Сравнивая коэффициенты при степенях λ, получим

$$\sum_{p=0}^{\varkappa} (v_u(r)a_p(r))^{(p)} = 0, \qquad 0 < r < r_0. \tag{10}$$

Положим $y(t)=v_u(t)a_\varkappa(t)$, $b_i(t)=a_{\varkappa-i}(t)/a_\varkappa(t)$, $1 \leqslant i \leqslant \varkappa$. Из соотношений (8) $|b_i(t)| \leqslant \mathrm{const}/t^i$, $1 \leqslant i \leqslant \varkappa$ и в силу (10) $y^{(\varkappa)} + (yb_1)^{(\varkappa-1)} + \ldots + yb_\varkappa = 0$. Отсюда по лемме 3 $y \equiv 0$, следовательно $v_u(r) \equiv 0$ для нечетных N.

Пусть теперь N четно и $\tilde{x}=(x, x_{N+1})$, $x \in R_N$. Введем функцию $\tilde{u}(\tilde{x})=u(x)$. Очевидно, существует сферическая функция $Y_{k,N+1}$, для которой

$$Y_{k,N+1}(\tilde{x}/\|\tilde{x}\|) = \|x\|^k \|\tilde{x}\|^{-k} Y_{k,N}(x/\|x\|).$$

Применяя к функциям $\tilde{u}$, $Y_{k,N+1}$ утверждение теоремы, уже доказанное для пространств с нечетной размерностью, после элементарного преобразования имеем

$$0 \equiv \int_{-r}^{r} v_u(\sqrt{r^2-t^2})(r^2-t^2)^{k/2} = D_0^{-1/2}[v_u(\sqrt{t})t^{k/2}](r^2).$$

Из свойств оператора дробного интегрирования $D_0^{-1/2}$ следует (см. [4]), что $v_u(t) \equiv 0$.

Необходимость. Пусть не выполнено условие квазианалитичности (3) и $L=D_r^2+(N-1)r^{-1}D_r - k(k+N-2)/r^2$. Из теоремы Карлемана—Островского следует существование функции $f(t) \in C^\infty([0, r_0])$, $f(t) \geqslant 0$; $f(t)=0$ при $0 \leqslant t \leqslant r_0/2$; $f(t) \not\equiv 0$ при $t > r_0/2$, у которой $|L^n f(t)| \leqslant m_n$, $n=0, 1, \ldots$ Поэтому функция $u(x)=f(\|x\|)Y_{k,N}(x/\|x\|)$, $x \neq 0$; $u(0)=0$ удовлетворяет соотношениям $|\Delta^n u(x)| = |(L^n f(\|x\|))Y_{k,N}(x/\|x\|)| \leqslant \mathrm{const}\,\|x\|^{k-1} m_n$; $u(x)=0$ при $\|x\| \leqslant r_0/2$; $n=0, 1, \ldots$; $v_u(r) \not\equiv 0$. Теорема доказана.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Ա. Գ. ՍԵՐՈՅԱՎՍԿԻ

Հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ հատկությունների անալոգների մասին

Քվազիանալիտիկության պրոբլեմի օպերատորային մեկնաբանությունը, որը տրված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի հայտնի աշխատանքում (1), *օգտագործվում է տվյալ աշխատանքում ուսումնասիրելու համար Լապլասի օպերատորի նկատմամբ քվազիանալիտիկ ֆունկցիաների դասերը։ Յույց է տրված, որ հետևյալ առնչություններից՝*

$$|\Delta^n u(x)| \leqslant \|x\|^{k-1} m_n, \quad D_x^p \Delta^n u(0) = 0, \quad |p| \leqslant k, \quad n = 0, 1, \ldots$$

հետևում է՝ $u(x/\|x\|)$ ֆունկցիայի օրթոգոնալությունը k կարգի կամայական սֆերիկ ֆունկցիայի հետ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\{m_n\}$ հաջորդականությունը բավարարում է քվազիանալիտիկության բնական պայմաններին՝

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)\,dr}{r^{3/2}} = \infty, \quad T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n}.$$

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, сер. «Математика», т. 3, № 3 (1968). [2] *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 5 (1958). [3] *P. Lelong*, Ann. Inst. Fourier, t. 12, 627—641 (1962). [4] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [5] *Е. Гобсон*, Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952. [6] *Р. Курант*, Уравнения с частными производными, Мир, М., 1964. [7] *Ю. И. Любич, В. А. Ткаченко*, ДАН СССР, т. 190, № 4 (1970). [8] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, М., 1956. [9] *Г. Ватсон*, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 517.988.63

МАТЕМАТИКА

А. А. Фонарев

О неподвижных точках

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/IV 1981)

Доказывается аналог принципа Ю. Шаудера для уплотняющих на последовательностях отображений в счетно-нормированных пространствах.

Пусть E—полное счетно-нормированное пространство, т. е. E—линейное топологическое пространство, в котором задана счетная система попарно согласованных норм $\|\cdot\|_i$ и в котором всякая последовательность, фундаментальная по каждой из норм $\|\cdot\|_i$, сходится (см. [1]); E_i—это линейное пространство E, рассматриваемое как нормированное с нормой $\|\cdot\|_i$, а L_i—множество всех ограниченных последовательностей из E_i; $\{x_n\}$—обозначение последовательности, где индекс n изменяется от 1 до ∞.

Предположим, что для каждого i задана мера некомпактности ψ_i типа нормальной меры некомпактности [2], т. е. задана неотрицательная функция ψ_i, определенная на L_i, такая, что: 1) $\psi_i(\{x_n\})=0$ для $\{x_n\}\in L_i$ тогда и только тогда, когда $\{x_n\}\in L_i$ компактна (т. е. из любой подпоследовательности $\{x_n\}$ можно выделить фундаментальную в E_i подпоследовательность); 2) $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{x_n\}_{n=2}^{\infty})$ для любой $\{x_n\}\in L_i$; 3) если $\{x_n\}\in L_i$, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, зависящее от $\{x_n\}$ и ε, такое, что $|\psi_i(\{y_n\})-\psi_i(\{x_n\})|<\varepsilon$ для любой $\{y_n\}\in L_i$ с $\|y_n-x_n\|_i<\delta$ для $n=1, 2, \ldots$; 4) если $\{x_n\}\in L_i$, то $\psi_i(\{y_n\})\leqslant \psi_i(\{x_n\})$ для любой $\{y_n\}\subset co(\{x_n\})$ (co—выпуклая оболочка); 5) если множество $K\subset E_i$ ограничено, то существует такое $M=M(K)>0$, что $\psi_i(\{x_n\})\leqslant M$ для любой $\{x_n\}\subset K$; 6) $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{x_n+y\})$ для любых $\{x_n\}\in L_i$ и $y\in E_i$; 7) $\psi_i(\{\lambda x_n\})\leqslant\lambda\psi_i(\{x_n\})$ для любых $\{x_n\}\in L_i$ и $\lambda\in(0, 1)$.

Как обычно, будем называть множество $K\subset E$ ограниченным, если K ограничено в E_i для каждого i. Соответственно, последовательность $\{x_n\}\subset E$ будем называть ограниченной, если $\{x_n\}\in L_i$ для каждого i, и будем обозначать множество всех ограниченных последовательностей из E через L. Далее, будем называть отображение F из $T\subset E$ в E ограниченным, если из $\{x_n\}\subset T$ и $\{x_n\}\in L$ следует $\{F(x_n)\}\in L$.

Определение 1. Непрерывное ограниченное отображение F из $T \subset E$ в E называется нестрого уплотняющим, если из некомпактности $\{x_n\} \subset T$ и $\{x_n\} \in L$ следует $\psi_i(\{F(x_n)\}) \leqslant \psi_i(\{x_n\})$ для каждого i.

Определение 2. Непрерывное ограниченное отображение F из $T \subset E$ в E называется q-уплотняющим, если для каждого i существует такое $q_i \in (0, 1)$, зависящее от i, что из некомпактности $\{x_n\} \subset T$ и $\{x_n\} \in L$ следует $\psi_i(\{F(x_n)\}) \leqslant q_i \psi_i(\{x_n\})$.

Определение 3. Непрерывное ограниченное отображение F из $T \subset E$ в E называется уплотняющим, если оно нестрого уплотняющее и из некомпактности $\{x_n\} \subset T$, $\{x_n\} \in L$ следует, что существует такое i, зависящее от $\{x_n\}$, что $\psi_i(\{F(x_n)\}) < \psi_i(\{x_n\})$.

Лемма 1. *Пусть $T \subset E$ — замкнутое выпуклое ограниченное непустое множество. Если отображение F из T в T q-уплотняющее, то оно имеет в T неподвижную точку.*

Доказательство. Возьмем любую точку $y \in T$ и зафиксируем ее.

Рассмотрим последовательность множеств $N_0 = T$, $N_k = \overline{co}(F(N_{k-1}) \cup y)$ для $k = 1, 2, \ldots$ ($\overline{co}$ — замыкание выпуклой оболочки в E).

Для любого k: 1) $N_k \subseteq T$; 2) N_k выпукло и замкнуто; 3) $F(N_k) \subseteq N_k$; 4) $y \in N_k$.

Рассмотрим множество $N = \bigcap N_k$ ($k = 0, 1, \ldots$). Множество N непусто, выпукло, замкнуто, компактно и $F(N) \subset N$.

Докажем компактность N. Возьмем любую $\{x_n\} \subset N$ и зафиксируем ее. Зафиксируем i, т. е. E_i. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие номер k и $\alpha > 0$, что $q_i^k M_i + \alpha/(1 - q_i) < \varepsilon$, где M_i — такое число, что $\psi_i(\{y_m\}) \leqslant M_i$ для любой $\{y_m\} \subset N_0$, q_i — константа из определения 2. Из $\{x_m\} \subset N$ следует, что существует такая $\{y_m^k\} \subset co(F(N_{k-1}) \cup y)$ (m — номер члена последовательности, k — номер последовательности), что $\psi_i(\{x_m\}) \leqslant \psi_i(\{y_m^k\}) + \alpha$. Но так как $\psi_i(\{y_m^k\}) \leqslant \psi_i(\{z_m^k\})$ для некоторой $\{z_m^k\} \subset F(N_{k-1})$, то из $\psi_i(\{z_m^k\}) \leqslant q_i \psi_i(\{x_m^{k-1}\})$ для $\{x_m^{k-1}\} \subset N_{k-1}$, такой, что $F(x_m^{k-1}) = z_m^k$ ($m = 1, 2, \ldots$), имеем $\psi_i(\{x_m\}) \leqslant q_i \psi_i(\{x_m^{k-1}\}) + \alpha$. Рассуждая аналогично, для $\{x_m^{k-1}\}$ получим такую $\{x_m^{k-2}\} \subset N_{k-2}$, что $\psi_i(\{x_m^{k-1}\}) \leqslant q_i \psi_i(\{x_m^{k-2}\}) + \alpha$. Имеем $\psi_i(\{x_m\}) \leqslant q_i^2 \psi_i(\{x_m^{k-2}\}) + (q_i + 1)\alpha$. Продолжая процесс, получим $\psi_i(\{x_m\}) \leqslant q_i^k \psi_i(\{x_m^0\}) + (q_i^{k-1} + q_i^{k-2} + \ldots + q_i + 1)\alpha$, где $\{x_m^0\} \subset N_0$. Отсюда следует, что $\psi_i(\{x_m\}) < \varepsilon$. Значит, последовательность $\{x_m\}$ компактна в E_i, а следовательно, и в E.

По принципу Шаудера—Тихонова ([3]) существует такая точка $x \in N$, что $x = F(x)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть множество $T \subset E$ такое же, как в лемме* 1. *Если отображение F из T в T нестрого уплотняющее, то существует такая $\{x_n\} \subset T$, что $x_n - F(x_n) \to 0$ в E при $n \to \infty$.*

Доказательство. Возьмем любую точку $y \in T$ и зафиксируем ее.

Рассмотрим последовательность таких отображений F_n из T в T,

что $F_n(x)=\lambda_n F(x)+(1-\lambda_n)y$ для $x\in T$, $\lambda_n\in(0, 1)$ для $n=1, 2, \ldots$, $\lambda_n\to 1$ при $n\to\infty$. Для любого фиксированного n отображение F_n является q-уплотняющим. Значит, по лемме 1 существует такой $x_n\in T$, что $x_n=F_n(x_n)$ для $n=1, 2, \ldots$. Далее, $x_n-F(x_n)\to 0$ в E при $n\to\infty$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Пусть множество $T\subset E$ такое же, как в лемме 1. Если отображение F из T в T уплотняющее, то оно имеет в T неподвижную точку.*

Доказательство. По лемме 2 существует такая $\{x_n\}\subset T$, что $x_n-F(x_n)\to 0$ в E при $n\to\infty$. Значит, для каждого фиксированного i имеем $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{F(x_n)\})$, ибо $x_n-F(x_n)\to 0$ в E_i при $n\to\infty$. Следовательно, $\{x_n\}$ компактна в E. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При доказательстве леммы 1 свойства 6 и 7 меры некомпактности не используются. Если в лемме 2 и теореме 1 нуль E принадлежит T, то лемму 2 и теорему 1 можно доказать без использования свойства 6 меры некомпактности.

Из теоремы 1 следует ряд известных результатов (например, принцип неподвижной точки ([4]), причем выше использовалось доказательство этого принципа из ([5])).

Доказательство теоремы 1 показывает, что при изучении уплотняющих отображений можно ограничиться изучением q-уплотняющих отображений. Разумеется, в банаховом пространстве можно получить различные усиления теоремы 1, используя теорему 1 или построив соответствующую теорию вращения векторного поля без применения принципа трансфинитной индукции (см. ([2])). Например, справедлива

Теорема 2. *Пусть E—банахово пространство и в E задана на ограниченных последовательностях мера некомпактности ψ со свойствами 1—7. И пусть $T\subset E$—замкнутое выпуклое ограниченное множество, содержащее нуль E в качестве внутренней точки, а Γ—граница T. Если для непрерывного ограниченного отображения A из T в E имеем $\psi(\{A(x_n)\})<\psi(\{x_n\})$ для любой некомпактной $\{x_n\}\subset T$ и $A(x)\neq\lambda x$ для всех $\lambda>1$ и $x\in\Gamma$, то в T существует решение уравнения $x=A(x)$.*

В E справедливо утверждение, являющееся объединением принципа Шаудера—Тихонова и принципа сжимающих отображений в счетно-нормированных пространствах, т. е. утверждение 1, которое формулируется в конце статьи и которому предшествуют определение 4 и связанные с этим определением свойства.

Определение 4. Отображение F из $K\subset E$ в E называется: 1) нерастягивающим, если для каждого i имеем $\|F(x)-F(y)\|_i\leqslant\|x-y\|_i$ для всех $x, y\in K$; 2) сжимающим, если для каждого i существует такое $q_i\in(0, 1)$, зависящее от i, что $\|F(x)-F(y)\|_i\leqslant q_i\|x-y\|_i$ для всех $x, y\in K$; 3) вполне непрерывным, если оно непрерывное и из $\{x_n\}\subset K$, $\{x_n\}\in L$ следует, что $\{F(x_n)\}$ компактная.

Из доказательства принципа сжимающих отображений в метрических пространствах ([1]) и эквивалентности сходимости в E сходи-

мости по каждой из норм $\|\cdot\|_i$ вытекает следующий принцип сжимающих отображений в E: если отображение F из замкнутого множества $T\subset E$ в T сжимающее, то уравнение $F(x)=x$ $(x\in T)$ имеет единственное решение $x_0\in T$ и ИП (итерационный процесс) $x_{n+1}=F(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, начатый с любого $x_1\in T$, сходится в E к x_0. Для нерастягивающих отображений этот принцип не справедлив. Однако, используя доказательство теоремы 4.1 из ([6]), можно показать, что справедливо

Предложение 1. Пусть множество $T\subset E$ такое же, как в лемме 1; для каждого i имеем $\psi_i(\{x_n+y_n\})\leqslant\psi_i(\{x_n\})+\psi_i(\{y_n\})$ для всех $\{x_n\}, \{y_n\}\in L_i$; и пусть для некоторого i пространство E_i строго нормированное. Если отображение F из T в T нерастягивающее и уплотняющее, то ИП $x_{n+1}=\theta x_n+(1-\theta)F(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, где θ—некоторое фиксированное число из $(0, 1)$, начатый с любого $x_1\in T$, сходится к некоторой неподвижной точке отображения F.

Известно, что в любом нормированном пространстве можно задать меру некомпактности Хаусдорфа (см. ([2])). Если для каждого i мера некомпактности ψ_i является мерой некомпактности Хаусдорфа, определенной на L_i, то из свойств меры некомпактности Хаусдорфа вытекает, что если отображение F из $T\subset E$ в E представимо в виде $F=A+B$, где A—вполне непрерывное отображение из T в E, то: 1) F—нестрого уплотняющее отображение, если B—нерастягивающее отображение из T в E; 2) F—q—уплотняющее отображение, если B—сжимающее отображение из T в E. Следовательно из леммы 1 вытекает

Утверждение 1. Пусть множество $T\subset E$ такое же, как в лемме 1. Если отображение F из T в T представимо в виде $F=A+B$, где A—вполне непрерывное отображение из T в E, а B—сжимающее отображение из T в E, то отображение F имеет в T неподвижную точку.

Московский институт стали и сплавов

Ա. Ա. ՅՈՆԱՐԻՎ

Անշարժ կետերի մասին

Թող E-ն լրիվ հաշվելի նորմավորված տարածություն է $\|\cdot\|_i$—նորմերի հաշվելի սիստեմայով ([1]), E_i-ն գծային E տարածություն է $\|\cdot\|_i$ նորմայով, իսկ L_i-ն բոլոր սահմանափակ հաջորդականությունների բազմությունն է E_i գծային տարածությունից։

Ենթադրենք, որ կամայական i համար L_i վրա տրված է ոչ բացասական ψ_i ֆունկցիա՝ ոչ կոմպակտության չափը, հետևյալ հատկություններով

1) եթե $\{x_n\}\in L_i$, ապա $\psi_i\{x_n\}=0$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $\{x_n\}$ կոմպակտ է E_i-ում (հաջորդականության $\{x_n\}$ նշանակման մեջ ենթադրվում է, որ n-ը փոփոխվում է 1-ից մինչև ∞), 2) եթե $\{x_n\}\in L_i$, ապա $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{x_n\}_{n=2}^{\infty})$, 3) եթե $\{x_n\}\in L_i$, ապա կամայական $\varepsilon>0$ համար գոյություն ունի $\delta>0$ կախված ε և $\{x_n\}$-ից, այնպիսին, որ $|\psi_i(\{y_n\})-\psi_i(\{x_n\})|<\varepsilon$ եթե միայն $\{y_n\}\in L_i$ և $\|y_n-x_n\|_i<\delta$ $(n=1, 2, \ldots)$; 4) եթե $\{x_n\}\in L_i$, $\{y_n\}\subset co(\{x_n\})$, ապա $\psi_i(\{y_n\})\leqslant\psi_i(\{x_n\})$ (co—ուռուցիկ թաղանթն է; 5) եթե $K\subset E_i$ բազմությունը սահմանափակ է, $\{x_n\}\subset K$, ապա $\psi_i(\{x_n\})\leqslant M$, որտեղ $M=M(K)>0$; 6) եթե $\{x_n\}\in L_i$, $y\in E_i$, ապա $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{x_n+y\})$; 7) եթե $\{x_n\}\in L_i$ իսկ $\lambda\in(0, 1)$, ապա $\psi_i(\{\lambda x_n\})\leqslant\lambda\psi_i(\{x_n\})$:

Թեորեմ. Թող $T\subset E$ փակ սահմանափակ ուռուցիկ ոչ դատարկ բազմություն է: Ենթադրենք, որ տրված է T-ից T անընդհատ սահմանափակ արտապատկերում՝ F, այնպիսին, որ $\{x_n\}\subset T$ ոչ կոմպակտությունից հետևում է:

1) $\psi_i(\{F(x_n)\})\leqslant\psi_i(\{x_n\})$ ամեն մի i համար,

2) գոյություն ունի այնպիսի i, կախված $\{x_n\}$-ից, որ $\psi_i(F\{(x_n)\})<\psi_i(\{x_n\})$: Այդ դեպքում F արտապատկերումը ունի անշարժ կետ T-ում:

Այս թեորեմը հանդիսանում է հաշվելի-նորմավորված տարածության հաջորդականությունների վրա խտացվող արտապատկերման սկզբունքի անալոգը: Թեորեմից հետևում են մի շարք հայտնի արդյունքներ, օրինակ՝ անշարժ կետի սկզբունքը, տես (4):

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин,* Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, М., 1972. [2] *Б. Н. Садовский,* УМН, т. 27, вып. 1 (1972). [3] *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц,* Линейные операторы (общая теория), ИЛ, М., 1962. [4] *Б. Н. Садовский,* Функциональный анализ и его приложения, т. 1, вып. 2 (1967). [5] *А. А. Фонарев,* Дифференциальные и интегральные уравнения, межвузов. сб., вып. 5, Иркутск, 1978. [6] *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко* и др., Приближенное решение операторных уравнений, Наука, М., 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 539.374

МЕХАНИКА

Р. М. Киракосян

О достаточных условиях наименьшего объема идеально-пластических пластинок

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 28/I 1981)

Для однослойных конструкций известно ([1]), что если допустимо пренебрежение членами второго и более высоких порядков (членами $\frac{\partial^2 D}{\partial h^2}(\delta h)^2$, $\frac{\partial^3 D}{\partial h^3}(\delta h)^3$ и т. д.), то условие постоянства и положительности производной скорости диссипации D по искомой толщине h обеспечивает относительный минимум объема. Известно также ([2]), что если учесть влияние членов второго порядка, то условие $\frac{\partial D}{\partial h} = \text{const} > 0$ только для отдельных участков поверхности текучести приводит к конструкции относительного минимального объема.

В настоящей работе получается верхняя граница наименьшего объема для сплошных однослойных идеально-пластических пластин. В качестве приложения рассматривается задача проектирования шарнирно опертой по контуру круглой пластинки.

1. Пусть предельное состояние пластинки возникает, когда изгибающие моменты $M_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию текучести

$$F(M_{\alpha\beta}, h) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь h—полутолщина, F—однородная функция второй степени от изгибающих моментов $M_{\alpha\beta}$. Кинематически возможные скорости изменения кривизн пластинки $\varkappa_{\alpha\beta}$ будем называть совместимыми с предельным состоянием, если вектор с компонентами, пропорциональными $\varkappa_{\alpha\beta}$ в пространстве моментов, направлен по внешней нормали к поверхности текучести в данной точке $M_{\alpha\beta}$. В силу выпуклости поверхности текучести (1.1) скорость диссипации D, отнесенной к единице площади срединной плоскости пластинки, однозначным образом определяется скоростями изменения кривизн $\varkappa_{\alpha\beta}$, совместимыми с предельным состоянием $M_{\alpha\beta}$:

$$D(\varkappa_{\alpha\beta}, h) = M_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

(повторение индексов означает суммирование.)

Для любого статически допустимого состояния $M^s_{\alpha\beta}$, лежащего на выпуклой поверхности (1.1) или находящегося внутри этой поверхности, справедливо основное неравенство

$$M^s_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta} \leqslant D(\varkappa_{\alpha\beta},\ h). \tag{1.3}$$

Знак равенства будет иметь место лишь в случае, когда состояние $M^s_{\alpha\beta}$ является предельным, а скорости $\varkappa_{\alpha\beta}$ — совместимыми с этим состоянием.

Пусть пластинка толщиной $2h_c$ под действием изгибающей нагрузки интенсивностью q находится в предельном состоянии $M^c_{\alpha\beta}$ с совместимыми скоростями $\varkappa^c_{\alpha\beta}$. Соответствующие скорости прогиба, характеризующие картину разрушения, обозначим через w^c. Пользуясь уравнением виртуальной работы и понятием функции скорости диссипации (1.2), можно записать

$$\int_A qw^c dA = \int_A M^c_{\alpha\beta}\varkappa^c_{\alpha\beta} dA = \int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c) dA, \tag{1.4}$$

где A — площадь срединной плоскости пластинки.

Для любой другой пластинки толщиной $2h_s$, находящейся на грани разрушения или способной нести нагрузку q, на основе (1.3) и уравнения виртуальной работы справедливо неравенство

$$\int_A qw^c dA = \int_A M^s_{\alpha\beta}\varkappa^c_{\alpha\beta} dA \leqslant \int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_s) dA. \tag{1.5}$$

Из сравнения (1.4) и (1.5) получим

$$\int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c) dA \leqslant \int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_s) dA. \tag{1.6}$$

Легко показать, что в предельном состоянии изгибаемых однослойных пластинок скорость диссипации энергии, соответствующей единичной площади срединной плоскости, прямо пропорциональна квадрату толщины

$$D(\varkappa_{\alpha\beta},\ h) = h^2 D_0(\varkappa_{\alpha\beta}), \tag{1.7}$$

где $\varkappa_{\alpha\beta}$ совместимы с предельным состоянием, D_0 — функция от скоростей $\varkappa_{\alpha\beta}$.

Имея в виду это обстоятельство, можно написать

$$D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_s) = \frac{h_s^2}{h_c^2} \cdot D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c). \tag{1.8}$$

С учетом (1.8) неравенство (1.6) представим в виде

$$\int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c)\frac{h_c^2}{h_c^2} dA \leqslant \int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c)\frac{h_s^2}{h_c^2} dA. \tag{1.9}$$

В случае

$$\frac{D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c)}{h_c^2} \equiv \text{const} > 0 \tag{1.10}$$

из (1.9) следует

$$\int_A (h_c^2 - h_s^2)\,dA \leqslant 0. \tag{1.11}$$

Так как условие (1.10) не удовлетворяет уравнениям Эйлера для функционала объема, то этот проект дает верхнюю оценку наименьшего объема пластинки.

Следовательно, если спроектировать однослойную пластинку из идеально-пластического материала таким образом, чтобы в предельном состоянии для совместимых скоростей изменения кривизн во всей срединной плоскости пластинки удовлетворилось условие (1.10), то объем такой равнонзгибаемой пластинки будет верхней оценкой наименьшего объема.

Сравнивая (1.7) и (1.10), заключаем, что для такой идеально-пластической однослойной пластинки

$$D_0(\varkappa_{\alpha\beta}) \equiv \text{const} > 0. \tag{1.14}$$

Отметим, что условие (1.14) в случае изотропного материала равносильно постоянству интенсивности скоростей изменения кривизн, а в случае анизотропного материала—постоянству обобщенной интенсивности скоростей изменения кривизн пластинки.

2. Рассмотрим задачу определения толщины шарнирно опертой по контуру круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q. Пусть материал пластинки является идеально-пластическим с цилиндрической ортотропией.

Пользуясь дифференциальным уравнением равновесия, условиями текучести и (1.10), приходим к разрешающей системе

$$a_1 x^2 y''^3 + a_2 xyy' + a_3 y^2 - 1 = 0, \tag{2.1}$$

$$t' = -t\,\frac{a_1(3y' + xy'') + \dfrac{a_2 - a_3}{x}\,y + \dfrac{q\sqrt{a}}{4\sqrt{3}}\,\dfrac{x}{t^2}}{a_2 y + 2a_1 xy'},$$

где приняты обозначения:

$$r = xR,\ h = tR,\ \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{k}{\sqrt{a}}\,y,\ a = 2\sqrt{3}\sqrt{FG + GH + HF}, \tag{2.2}$$

$$a_1 = \frac{F+H}{a},\quad a_2 = \frac{2(F+2H)}{a},\quad a_3 = \frac{F+G+4H}{a}.$$

Здесь R—радиус, h—полутолщина, w—скорость прогиба пластинки, штрихом обозначено дифференцирование по x. Постоян-

ные F, G, H известным образом ([3]) выражаются через пределы текучести материала в главных направлениях σ_{sr}, $\sigma_{s\theta}$, σ_{sz}.

Не нарушая условия виртуальности скоростей, можно положить

$$y \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} = \text{const.} \tag{2.3}$$

Тогда второе уравнение системы (2.1) примет вид

$$t' + A\frac{t}{x} + B\frac{x}{t} = 0, \tag{2.4}$$

где

$$A = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2}, \quad B = \frac{q\sqrt{\alpha\alpha_3}}{4\sqrt{3}\,\alpha_2}. \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$t = x \cdot \sqrt{Cx^{-2(1+A)} - \frac{B}{1+A}}, \tag{2.6}$$

где C—постоянная интегрирования.

В случае $\alpha_3 > \alpha_2 = 0$, т. е. когда

$$\sigma_{s\theta} > \sigma_{sr}, \quad \sigma_{sz} = \frac{\sigma_{sr}\sigma_{s\theta}}{\sqrt{3\sigma_{sr}^2 + \sigma_{s\theta}^2}}, \tag{2.7}$$

постоянная A равняется минус бесконечности и независимо от значения C имеем

$$t = \sqrt{-\frac{B}{1+A}} \cdot x = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{q\sqrt{\alpha}}{\sqrt{3}\sqrt{\alpha_3}}}. \tag{2.8}$$

В этом специальном случае изгибающий момент M_r во всех сечениях равен нулю и нагрузка q воспринимается только изгибающим моментом M_θ.

Определяя постоянную C из условия шарнирного опирания, для полутолщины пластинки в остальных случаях находим

$$t = \sqrt{\frac{B}{1+A}}\sqrt{x^{-2A} - x^2}. \tag{2.9}$$

В зависимости от характера ортотропии толщина в центре пластинки может принимать как нулевые, так и бесконечно большое значения. При

$$\sigma_{sr} > \sqrt{2}\,\sigma_{sz}, \quad \sigma_{sr} > \sigma_{s\theta} \tag{2.10}$$

$A > 0$ и толщина в центре пластинки имеет особенность порядка x^{-A}. В остальных случаях толщина в центре равна нулю.

В случае изотропной пластинки

$$\alpha_1=\frac{1}{3},\quad \alpha_2=\alpha_3=1,\quad \alpha=\frac{3}{\sigma_s^2},\quad A=0,\quad B=\frac{q}{4\sigma_s} \tag{2.11}$$

и из (2.9) находим

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\sigma_s}}\sqrt{1-x^2}, \tag{2.12}$$

где σ_s—предел текучести материала.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Р. М. КИРАКОСЯН

Իդեալական պլաստիկական սալերի ամենափոքր ծավալի բավարար պայմանների մասին

Ապացուցվում է, որ եթե միաշերտ իդեալական պլաստիկական սալը նախագծված լինի այնպես, որ տված արտաքին ազդեցությունների դեպքում միջին հարթության միավոր մակերեսին ընկնող էներգիայի դիսիպացիայի արագության և սալի հաստության քառակուսու հարաբերությունը ամենուրեք ստանա դրական հաստատուն արժեք, ապա այդպիսի սալը կունենա ամենափոքր ծավալ։ Ցույց է տրվում, որ այս պայմանը համարժեք է սալի կորությունների փոփոխման արագությունների ինտենսիվության հաստատուն լինելուն։ Որպես կիրառություն, լուծված է օրթոտրոպ նյութից պատրաստած հոդակապորեն հենված կլոր սալի նախագծման խնդիրը հավասարաչափ բաշխված բեռի դեպքում։ Ստացված է փակ լուծում։ Ուսումնասիրված է նյութի անիզոտրոպիայի ազդեցությունը սալի հաստության վարքի վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Шилд*, Сб. Механика, т. 2, № 72 (1962). [2] *Z. Mroz*, Rozpr. Inżyn., 114, 1958. [3] *Р. Хилл*, Математическая теория пластичности, ГИТТЛ, М., 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 535.341

ФИЗИКА

Ф. П. Сафарян

Электрон-фононный безызлучательный переход энергии электронного возбуждения между примесными центрами Nd^{3+} в иттрий-алюминиевом гранате (ИАГ)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 20/VII 1980)

1. В работе ([1]) для вероятности безызлучательной передачи (БП) энергии электронного возбуждения между двумя примесными ионами в диэлектрических кристаллах получено выражение:

$$w^{(1)}_{\lambda\to\mu} = \frac{3}{2}\,\frac{(n_{\lambda'}-n_{\lambda})^2}{n_{\lambda'}n_{\mu'}}\,\frac{\omega_D^6}{\pi^5\rho^3 v_0^{15}}\left(\frac{8ze^2}{R_0^3}\right)^4\left(\frac{2\pi}{15}\right)^2\overline{\sin^6\delta_x}\cdot\overline{(\Phi_i^{(1)}\Phi_i^{(2)})^2}\times$$

$$\times|\langle\lambda|U|\mu\rangle\langle\lambda'|U|\mu'\rangle|^2\,\frac{\Delta^3}{\exp\left\{\dfrac{\hbar\Delta}{|kT|}\right\}-1}, \qquad (1)$$

где $|\lambda'\rangle$ и $|\lambda\rangle$ ($|\mu'\rangle$ и $|\mu\rangle$)—соответственно, волновая функция основного и возбужденного состояний донорного (акценторного) иона, $\Delta=(\varepsilon_\mu-\varepsilon_\lambda)/\hbar$—энергетический зазор между возбужденными уровнями акцентора и донора (ε_μ и ε_λ—собственные значения энергии этих состояний), $n_{\lambda'}$ и n_λ—соответственно, числа заполнения электронов донорных (акценторных) состояний λ' и λ ($n_\lambda=[\exp\{\varepsilon_\lambda/kT\}+1]^{-1}$), z и R_0—соответственно, эффективный заряд ионов и радиус первой координационной сферы вокруг примесных ионов в кристаллах типа граната, ρ—плотность кристалла, v_0—средняя скорость акустических волн в кристалле, ω_D—частота Дебая кристалла, δ_x—случайная фаза нормальных колебаний.

$$U = r^2[Y_{2,1}-Y_{2,-1}+i(Y_{2,2}-Y_{2,-2}-Y_{2,1}-Y_{2,-1})], \qquad (2)$$

где $Y_{m,n}$—сферические функции оптических электронов примесных ионов, r—радиус $4f$-оболочки примесного иона, $\Phi_i^{(1)}$ и $\Phi_i^{(2)}$—функции, зависящие от сферических координат (ϑ, φ) волнового вектора акустических волн $\vec{x}$ в кристалле ([2]):

$$\Phi_i^{(1)}=\frac{8}{9}f_i^{(1)};\qquad \Phi_i^{(2)}=\frac{5}{6}\,(f_i^{(2)}-f_i^{(1)}),\quad (i=1,2,3);$$

$$f_i^{(2)} = 2\,(f_i^{(1)} + f_j^{(1)} f_k^{(1)}), \quad j \neq k \quad (j,\ k = 1, 2, 3); \tag{3}$$
$$f_1^{(1)} = \sin 2\vartheta \cos\varphi, \quad f_2^{(1)} = \sin^2\vartheta \sin 2\varphi, \quad f_3^{(1)} = \sin 2\vartheta \sin\varphi.$$

2. Рассмотрим безызлучательный переход между примесными ионами одинакового сорта. Тогда, если уровни λ и μ являются штарковскими состояниями определенного терма, то БП приводит к миграции энергии электронного возбуждения по всем ионам донорной системы. Вычислим вероятность БП между штарковскими состояниями $\lambda = j_1$, $\mu = j_2$ уровней $^4F_{3/2}$ двух ионов Nd^{3+}, находящихся на расстоянии R друг от друга в иттрий-алюминиевом гранате (ИАГ) (рис. 1).

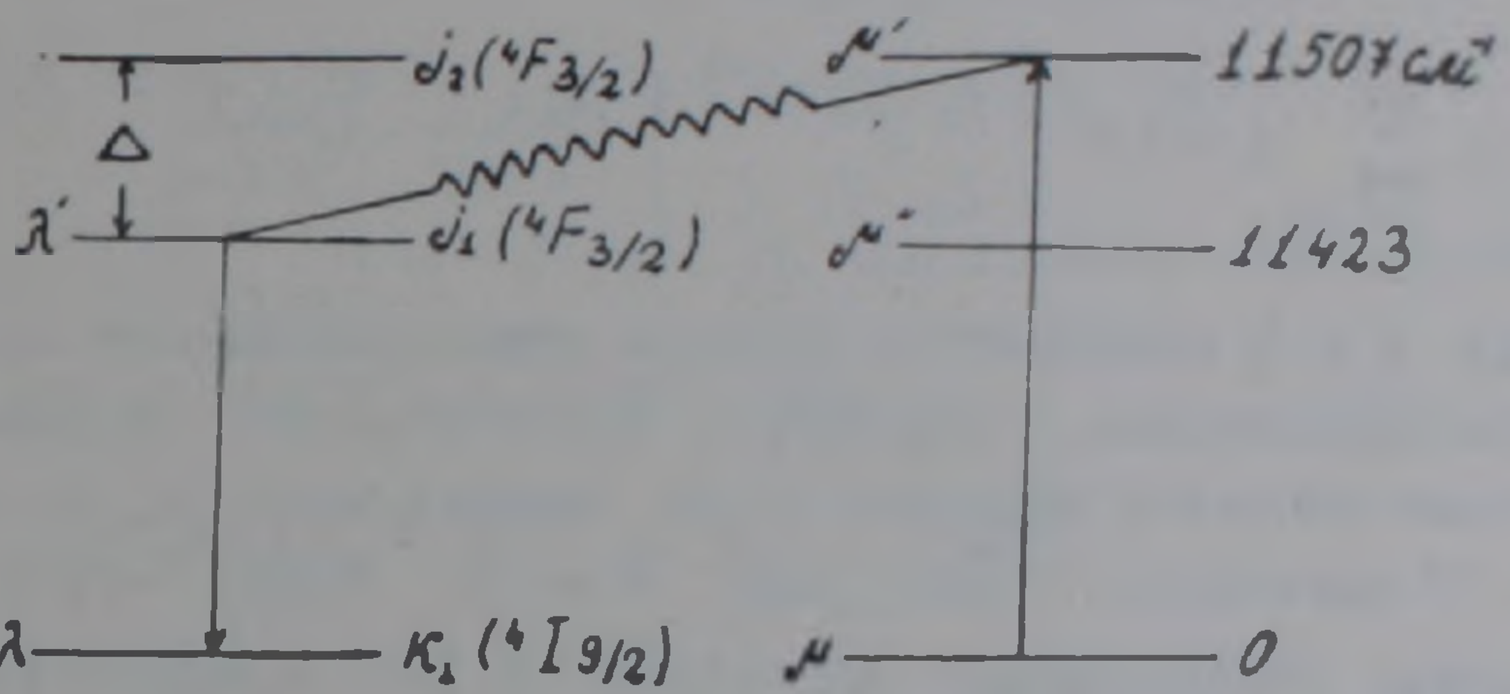


Рис. 1. Расположение уровней штарковских состояний возбужденного уровня $^4F_{3/2}$ и нижнего штарковского состояния основного уровня $^4I_{9/2}$ иона Nd^{3+} в ИАГ

Волновые функции штарковских состояний иона Nd^{3+} в ИАГ можно найти методом теории групп, так как они преобразуются по неприводимым представлениям точечной группы симметрии кристаллического поля, создаваемого остальными ионами решетки в точке, где находится ион Nd^{3+}. В гранатах симметрия кристаллического поля на ионах Nd^{3+} совпадает с симметрией первой координационной сферы, которая представляет собой слегка искаженный куб, в вершинах которого находятся ионы кислорода (O^{-2}) (точечная симметрия D_2). Эти волновые функции найдены в ([3]), их можно представить в виде суперпозиции волновых функций свободного иона Nd^{3+} $|L, S, I, M_I\rangle \equiv |M_I\rangle$. Для рассматриваемых здесь уровней эти волновые функции имеют вид:

$$|j_1(^4F_{3/2})\rangle = \pm|\pm 1/2\rangle, \quad |j_2(^4F_{3/2})\rangle = |\pm 3/2\rangle;$$
$$|k_1(^4I_{9/2})\rangle = 0{,}2580\,|\pm 3/2\rangle + 0{,}9686\,|\mp 5/2\rangle. \tag{4}$$

Задача вычисления входящих в формулу (1) матричных элементов $\langle\lambda|U|\mu\rangle$ и $\langle\lambda'|U|\mu'\rangle$, таким образом, сводится к вычислению матричных элементов неприводимых тензорных операторов (какими являются сферические функции Y_{mn}) на волновых функциях $|S,L,I,M_I\rangle$ свободного иона Nd^{3+}. Волновые функции свободного иона Nd^{3+} $|S, L, I, M_I\rangle$ в атомной спектроскопии находятся методом, предло-

женным Рака ([4]), суть которого заключается в том, что путем использования генеалогической схемы многоэлектронная волновая функция сводится к одноэлектронной. Обобщая формулу для матричных элементов неприводимых тензорных операторов, полученных в ([5]), для случая двух взаимодействующих центров получим

$$<(nf_1)^N\alpha_1 S_1 L_1 I_1 M_1|\sum_{i=1}^{N} r_i^2 Y_{lm}|(nf_2)^N\alpha_2 S_2 L_2 I_2 M_2>=$$

$$=\delta_{S_1S_2}(-1)^{L_1+L_2+M_1+S_1+I_1}\,N\sqrt{(2I_1+1)(2I_2+1)(2L_1+1)(2L_2+1)}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} I_1 & l & I_2 \\ -M_1 & m & M_2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} L_1 & I_1 & S_1 \\ I_2 & L_2 & l\end{Bmatrix}<f_1\|r^2Y_l\|f_2>\times$$

$$\times\sum_{\alpha',S',L'}(-1)^{L'}\begin{Bmatrix} f_1 & L_1 & L' \\ L_2 & f_1 & l\end{Bmatrix}G^{\alpha_1S_1L_1}_{\alpha'S'L'}\cdot G^{\alpha_2S_2L_2}_{\alpha'S'L'}, \qquad (5)$$

где индексы 1 и 2 отличают величины, принадлежащие двум центрам; S, L, I—соответственно, спиновый, орбитальный, полный моменты; M_I—проекция полного момента I на направление z; N—число эквивалентных ^4f-электронов (для Nd^{3+} $N=3$); $G^{\alpha SL}_{\alpha'S'L'}$—генеалогические коэффициенты, связывающие состояние $|L, S>$ конфигурации $(^nf)^N$ с состоянием $|L', S'>$ конфигурации $(^nf)^{N-2}$, $(:::)$ и $\{:::\}$—$3j$ и $6j$ символы.

Проведенный матричный элемент $<f_1\|r^2Y_l\|f_2>$, входящий в формулу (5), имеет вид

$$<f_1\|r^2Y_l\|f_2>=\frac{(-1)^l}{\begin{pmatrix} f_1 & l & f_2 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}<f_1\,0|r^2Y_{l0}|f_2 0>, \qquad (6)$$

где $|fm>=R_{nf}(r)Y_{fm}(\vartheta', \varphi')$—одноэлектронная волновая функция ^4f-электрона. Если начало координатной системы совместить с первым ионом, а ось z направить по направлению второго иона, то угловую часть волновой функции второго иона можно получить из соответствующей функции первого иона, совершая в ней параллельный перенос $\vec{r}_2(\vartheta_2', \varphi_2')=\vec{R}(\theta, \Phi)-\vec{r}_1(\vartheta_1', \varphi_1')$ ([6])

$$Y_{f_2m_2}(\vartheta_2', \varphi_2')=\sum_{k=0}^{f_2}(-1)^{f_2+k}\sqrt{\frac{4\pi(2f_2+1)}{(2k+1)(2f_2+2k+1)}}\cdot\left(\frac{R}{r_2}\right)^{f_2}\left(\frac{r_1}{R}\right)^{k}\times$$

$$\times Y_{km_2}(\vartheta_1', \varphi_1')\,Y_{f_2-k,m_2}(\theta, \Phi). \qquad (7)$$

Подставляя формулу (7) в (6) и учитывая, что ([4])

$$\iint Y_{f0}Y_{l0}Y_{k0}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi=\sqrt{\frac{1}{4\pi}(2f+1)(2l+1)(2k+1)}\cdot\begin{pmatrix} f & l & k \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2,$$

находим

$$<f_1\|r^2Y_l\|f_2> = \frac{(-1)^l}{\begin{pmatrix} f_1 & l & f_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \sum_{k=0}^{f_2} (-1)^{f_2+k} \begin{pmatrix} f & l & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \sqrt{\frac{(2f_2+1)(2f_1+1)(2l+1)}{2f_2-2k+1}}$$

$$\times Y_{f_2-k,0}(\theta, \Phi) \int_0^\infty R_{nf_1}(r_1) r_1^l R_{nf_2}(r_2) \left(\frac{R}{r_2}\right)^{f_2} \left(\frac{r_1}{R}\right)^k dr_1. \qquad (8)$$

Поскольку $\begin{pmatrix} f_1 & l & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ при четных значениях f_1+k+l, то в нашем случае ($f_1=f_2=3$, $l=2$) в сумме по k в формуле (8) остаются лишь два члена ($k=1, 3$). Учитывая также, что $\theta=0$, легко можно найти $Y_{00}(\theta, \Phi)=1/2\sqrt{\pi}$, $Y_{20}(\theta, \Phi)=\frac{1}{2}\sqrt{5/\pi}$. Кроме того $\begin{pmatrix} f_1 & l & f_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2/\sqrt{7 \cdot 15}$, $\begin{pmatrix} f_1 & l & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -3/\sqrt{3 \cdot 35}$. Подставляя эти значения в формулу (8), для $<f_1\|r^2Y_l\|f_2>$ получим

$$<f_1\|r^2Y_l\|f_2> = (-1)^l \sqrt{\frac{7}{3\pi}} <r^2>, \qquad (9)$$

где

$$<r^2> = <r^2>_1 + \frac{9}{4}<r^2>_2; \qquad (10)$$

$$<r^2>_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty R_{nf_1}(r_1) \frac{r_1^4}{r_2^3} R_{nf_2}(r_2) dr_1 \sin\vartheta_1 d\vartheta_1; \qquad (11)$$

$$<r^2>_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty R^2 R_{nf_1}(r_1) \frac{r_1^3}{r_2^3} R_{nf_2}(r_2) \sin\vartheta_1 dr_1 d\vartheta_1. \qquad (12)$$

Легко видеть, что формула (9), следовательно, также формула (5) совпадают с соответствующими формулами для одного центра ([5]), после подстановки $r_1=r_2$, $f_1=f_2$, $R=0$.

Из всех известных радиальных волновых функций наилучшими, без сомнения, являются хартри-фоковские функции. Для ^4f-оболочки они имеют вид ([7])

$$R_{nf}(r) = \sum_{i=1}^{4} C_i r^3 \exp\{-Z_i r\}, \qquad (13)$$

где C_i и Z_i—постоянные.

Подставляя формулу (13) в (11) и (12), для радиальных интегралов после проведения замены переменных ($r_1, \vartheta_1 \to r_1, r_2$) получим выражения:

$$<r^2>_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{R} C_i C_j \int_0^\infty r_1^6 e^{-Z_i r_1} dr_1 \int_{|R-r_1|}^{R+r_1} r_2 e^{-Z_j r_2} dr_2; \qquad (14)$$

$$\langle r^2\rangle_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} R\,C_i\,C_j \int_0^{\infty} r_1^7 e^{-z_i r_1} dr_1 \int_{|R-r_1|}^{R+r_1} r_2 e^{-z_j r_2} dr_2, \qquad (15)$$

допускающие аналитические решения.

После повторной замены переменных $\left(r_1 = \frac{R}{2}(x+y),\ r_2 = \frac{R}{2}(x-y)\right)$ интегралы (14) и (15) можно представить также в следующем виде:

$$\langle r^2\rangle_1 = \frac{R^{11}}{2^{12}}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_i\,C_j \int_1^{\infty} dx \int_{-1}^{+1} dy (x+y)^8 (x^2-y^2) e^{-(z_i+z_j)\frac{R}{2}x} e^{-(z_i-z_j)\frac{R}{2}y};$$

$$\langle r^2\rangle_2 = \frac{R^{11}}{2^{10}}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_i\,C_j \int_1^{\infty} dx \int_{-1}^{+1} dy (x+y)^6 (x^2-y^2) e^{-(z_i+z_j)\frac{R}{2}x} e^{-(z_i-z_j)\frac{R}{2}y}. \qquad (17)$$

Интегралы типа $\int_1^{\infty} x^n e^{ax} dx$ и $\int_{-1}^{+1} y^n e^{by} dy$, входящие в формулы (16), (17), табулированы в ([8])

3. Вычисления интересующих нас матричных элементов, производимые на основе применения формулы (5), привели к следующим значениям:

$$\langle L_1,\ S_1,\ 3/2,\ \pm 1/2 \,|\sum_{i=1}^{3} r_i^2 Y_2^{\mp 1}|\, L_2,\ S_2,\ 3/2,\ \pm 3/2\rangle =$$

$$= \langle L_1, S_1, 3/2, \pm 1/2|\sum_{i=1}^{3} r_i^2 Y_{\pm 2}^{2}|S_2, L_2, 3/2, \mp 3/2\rangle = -\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\langle r^2\rangle; \qquad (18)$$

$$\langle L_1,\ S_1,\ 9/2,\ \pm 3/2 \,|\sum_{i=1}^{3} r_i^7 Y_2^{\mp 1}|\, L_2, S_2,\ 9/2,\ \pm 5/2\rangle = \frac{5\cdot 7}{6\cdot 11^2}\sqrt{\frac{7}{10\pi}}\langle r^2\rangle, \qquad (19)$$

где $L_1 = L_2 = 6$, $S_1 = S_2 = 3/2$. Отметим, что входящие в формулу (5) $3j$ и $6j$-символы табулированы в ([6]), а генеалогические коэффициенты—в ([4]). Тогда для произведения квадратов матричных элементов, входящего в формулу (1), получим значение

$$|\langle\lambda|U|\mu\rangle|^2 |\langle\lambda'|U|\mu'\rangle|^2 = 1{,}686\cdot 10^{-7}\ g_\lambda g_{\mu'} \qquad (20)$$

где $g_\lambda = g_\mu = 2$ статвеса состояний λ и μ.

Подставляя в формулу (1) также следующие значения параметров, которые справедливы для кристалла ИАГ— Nd^{3+}: $\omega_D = 9{,}81\cdot 10^{13}$ *сек*$^{-1}$, $\Delta = 85$ *см*$^{-1} = 1{,}58\cdot 10^{13}$ *сек*$^{-1}$, $\rho = 4{,}56$ *гр/см*^{3}, $v_0 = 5{,}58\cdot 10^5$ *см/сек*, $z = 1$ *ат. ед.* и средние значения $\overline{\sin^2 \delta x} = 5/16$, $(\overline{\Phi_l^{(1)}\Phi_l^{(2)}})^2 = 0{,}1726$ (которые легко вычисляются), для вероятности электрон-фононной БП получаем

$$w^{(1)}_{\lambda\to\mu} = 1{,}4344 \cdot 10^6 \frac{(\langle r^2\rangle)^4}{\exp\left\{\left|\frac{121}{T}\right|\right\} - 1} \text{ сек}^{-1}. \qquad (21)$$

Численные значения $\langle r^2\rangle$, $\langle r^2\rangle_1$, $\langle r^2\rangle_2$, в зависимости от расстояния между ионами (R), приведены на графиках (рис. 2). Постоянные C_i и Z_i для иона Nd^{3+} имеют следующие численные значения ([7]): $C_1=1068{,}89$, $C_2=159{,}822$, $C_3=23{,}5767$, $C_4=0{,}645797$, $Z_1=10{,}727$, $Z_2=6{,}071$, $Z_3=4{,}047$, $Z_4=2{,}216$.

4. Графики зависимости $\lg w^{(1)}_{\lambda\to\mu}$ от расстояния R между ионами Nd^{3+} в ИАГ при различных температурах в интервале [6–1000° К] приведены на рис. 3. Видно, что электрон-фононные БП проявляются на расстояниях $R<6A°$. Горизонтальная линия на графике соответствует вероятности излучательных переходов из уровня $^4F_{3/2}$ иона Nd^{3+} в ИАГ ($w_{изл}=3{,}9\cdot 10^3$ *сек*$^{-1}$ ([5])). Видно, что эффективная миграция энергии наступает при следующих значениях расстояния R: $R\leqslant 4{,}15$A° (при T = 9,8° К), $R\leqslant 5{,}32°A$ ($T=300$° К), $R\leqslant 5{,}48$A° ($T=1000$°К). Так как минимальное расстояние между ионами Nd^{3+} в ИАГ, при

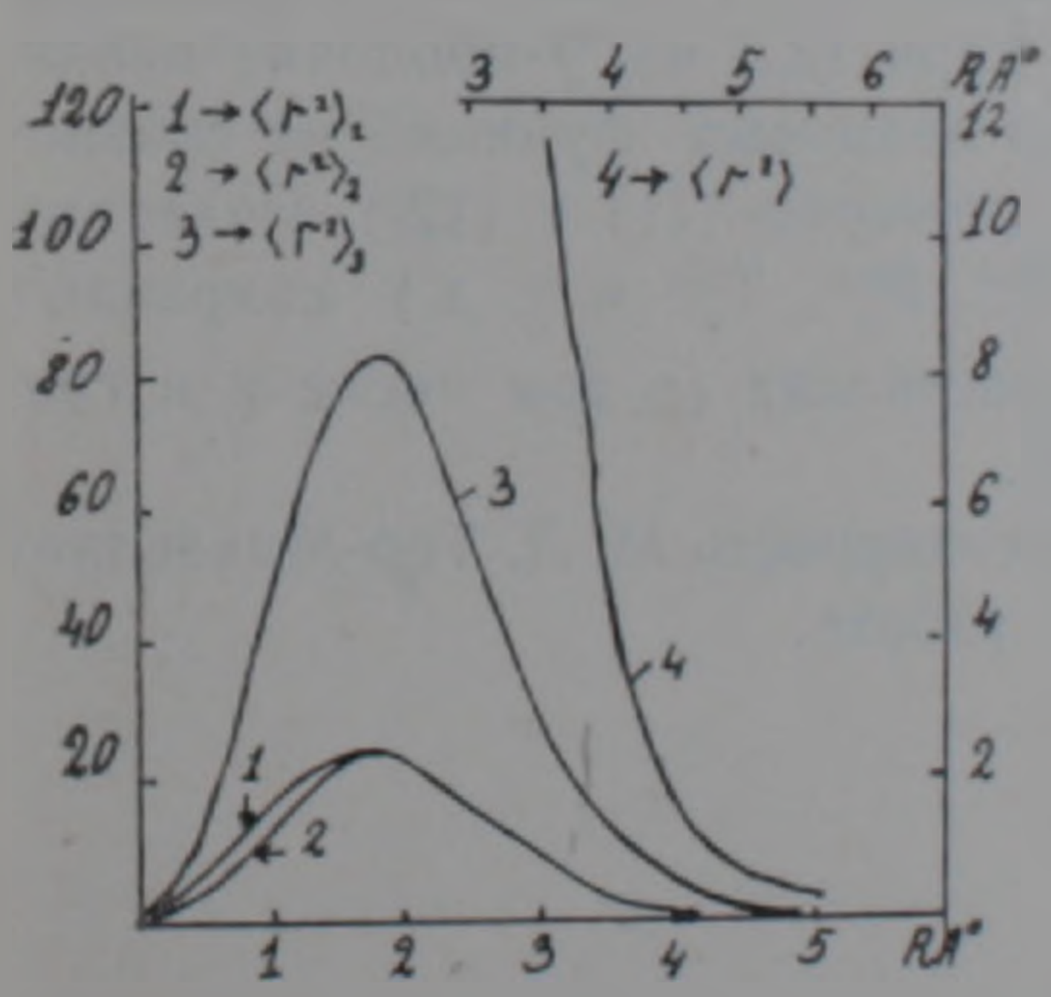


Рис. 2. Кривые зависимости интегралов перекрываний $\langle r^2\rangle_1$ (*1*), $\langle r^2\rangle_2$ (*2*) и $\langle r^2\rangle$ (3) от расстояния R. Отдельно приведена кривая зависимости $\langle r^2\rangle$ от R в более крупном масштабе (*4*)

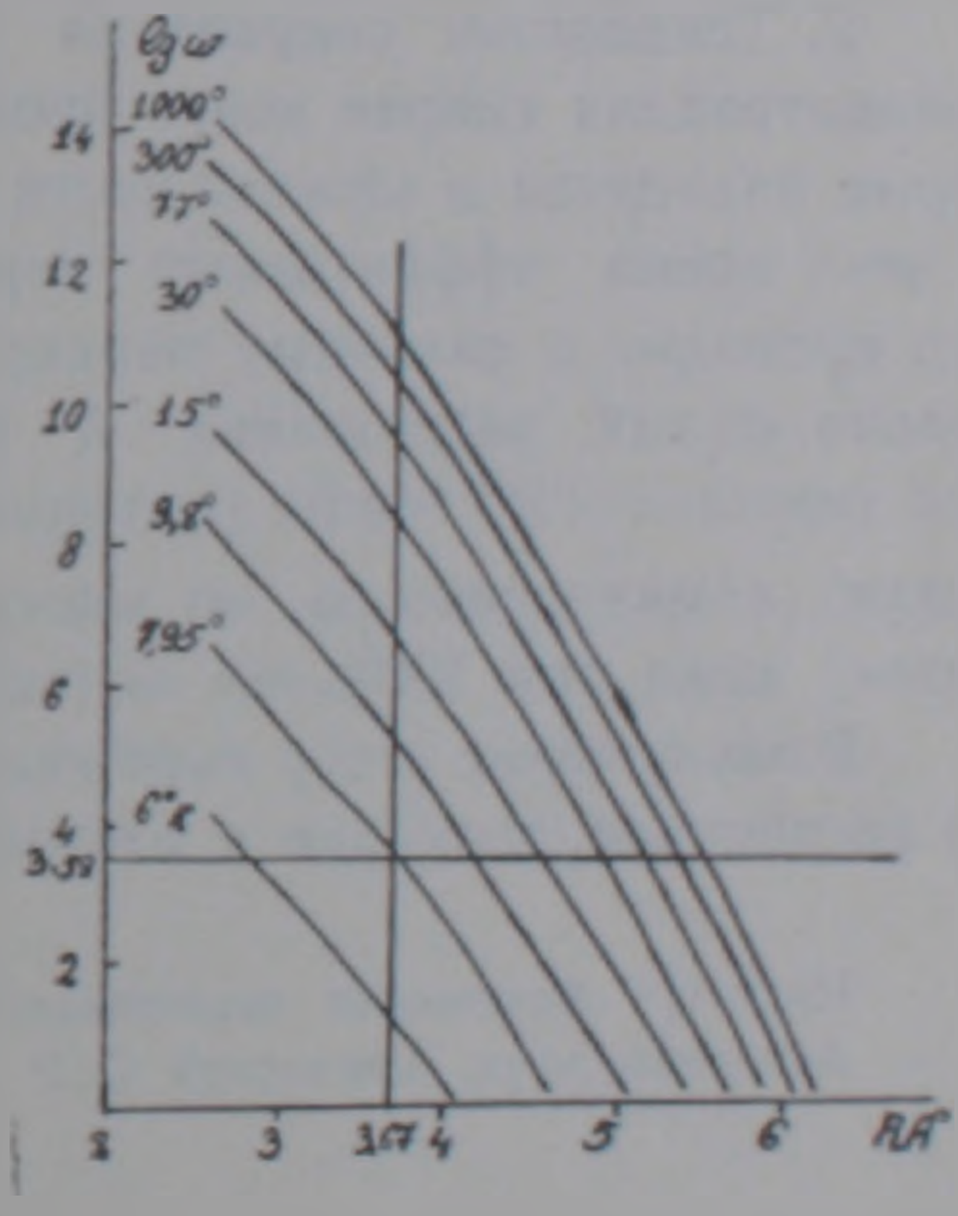


Рис. 3. Кривые зависимости вероятности БП (в логарифмическом масштабе) от расстояния R между примесными центрами при различных температурах в интервале [6÷1000° К]

100%-ой атомной концентрации, равно $R_m=4{,}15$ A°, то незатухающую люминесценцию ионов Nd^{3+} в ИАГ (при максимальной концентрации) можно получить при температурах $T<9{,}8$° К. Однако приведенные здесь рассуждения справедливы при равномерном распределении при-

месных центров в кристаллической матрице. В реальных кристаллах примесные ионы образуют отдельные ассоциатные группы близкорасположенных ионов (известно, например, что в ИАГ ионы Nd^{3+} могут сближаться на расстоянии $R_m = 3{,}7$ А°). При благоприятствующих расстояниях и температурах возбуждение может мигрировать по ионам внутри ассоциатной группы. Это, естественно, приводит к тушению люминесценции при еще меньших концентрациях, чем предсказывают приведенные здесь вычисления. Однако даже в этом случае подобные вычисления не теряют физического содержания, так как они позволяют найти те минимальные расстояния, при которых могут образоваться ассоциатные группы.

Полученные здесь формулы объясняют также хорошо известные экспериментальные факты:

1. Возможность получения люминесценции ионов Nd^{3+} при максимальных концентрациях в других кристаллических матрицах. Как следует из формулы (1), в таких кристаллах минимальные расстояния ионов Nd^{3+} при 100%-ом замещении, как правило, должны быть сравнительно великими. Такими являются, например, кристаллические структуры $K_3Nd(PO_4)_2$, $NdLiP_4O_{12}$, $KNdP_4O_{12}$, $NdAl_3(BO_4)_4$ и т. д. ([10]).

2. Тенденцию сохранения люминесценции при максимальных концентрациях скорее всего проявляют те редкоземельные ионы, которые находятся в нижней части периодической системы Менделеева. У этих ионов эффективный заряд ядра (Z_i) на ^4f-оболочке велик, что приводит к сильному перекрытию волновых функций на сравнительно малых расстояниях R (см. формулы (11) и (12)). Известно, что тяжелые TR^{3+}-ионы (например H_o^{3+}, E_r^{3+}, T_m^{3+} и т. д.) сохраняют яркую люминесценцию во многих кристаллах (в том числе и в гранатах) даже при 100%-ом замещении.

В заключение автор выражает благодарность М. Л. Тер-Микаеляну за постоянное внимание к настоящей работе.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Ե. Գ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի էլեկտրոն-ֆոնոնային ոչ ճառագայթային անցումը Nd^{3+}-իոնների միջև, որոնք գտնվում են ինտրիում-ալյումինիումի նռնաքարի բյուրեղում խառնուրդների ձևով

(*) աշխատանքում ստացված ընդհանուր բանաձևը այս աշխատանքում օգտագործվում է հաշվվելու համար էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի էլեկտրոն-ֆոնոնային ոչ ճառագայթային անցման հավանականությունը Nd^{3+}-իոնների միջև, որոնք գտնվում են իտրիում-ալյումինիումի նռնաքարում խառնուրդների ձևով։ Էքսպերիմենտալ փաստերի հետ համեմատությունը առիթ է տալիս մտածելու, որ բյուրեղներում խառնուրդների մեծ պարունակության դեպ-

քում, երբ խառնուրդային իոնների միջև եղած հեռավորությունը փոքր է ($R < 6$ Å), էլեկտրոն-ֆոնոնային ոչ ճառագայթային անցման մեխանիզմը հանդիսանում է հիմնական մեխանիզմներից մեկը, որը բերում է բյուրեղի լյումինեսցենցիայի մարման։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. П. Сафарян*, ДАН АрмССР, т. 71, № 2 (1980). [2] *Ф. П. Сафарян*, Известия АН АрмССР, физнка, т. 14, 16 (1979). [3] *Ф. П. Сафарян*, ФТТ, т. 20, 1550 (1978). [4] *И. И. Собельман*, Введение в теорин атомных спектров, Ф.—М., М., 1963. [5] *И. С. Андриеш, В. Я. Гамурарь, Л. К. Вылечжанин* и др., ФТТ, т. 14, 2967 (1972) [6] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский*, Квантовая теория углового момента, Наука, Л., 1975. [7] *A. J. Freeman, R. E. Watson*, Phys. Rev., vol. 127, 2058 (1962). [8] *J. Miller, J. M. Gerbauser, F. A. Matsen*, Quantum Chemistry Integrals anb Tables, Univ. Texass. Press, Austin, 1959. [9] *А. А. Каминский*, Лазерные кристаллы, Наука, М., 1975. [10] *H. Y—P. Hong, S. R. Chinn*, Materials Research Bulletin, vol. 11, 421 (1976).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXII 1981 5

УДК 616.127—005.8—073.97 : 612.171

МЕДИЦИНА

З. Л. Долабчян, Н. Г. Татинян, Р. С. Габриелян, С. А. Пирузян

К вопросу об информативности электрокардиологических методов в отношении сократительной активности сердца при остром инфаркте миокарда

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. С. Стамболцяном 2/XII 1980)

Роль электрокардиологических методов в диагностике острого инфаркта миокарда общеизвестна. Можно смело сказать, что эти методы играют очень важную роль не только в распознавании этого заболевания, но и в его лечении и профилактике. В этом имеется общее согласие в литературе. Но при всем этом их информативность ограничена.

В литературе господствует классическое мнение о том, что электрокардиологические методы не являются информативными по отношению к основной функции сердца—сократительной активности миокарда. Вопрос о роли и значении этих методов в изучении сократительной функции сердца фактически и не рассмотрен. Имеются лишь некоторые указания отдельных авторов ([1–4]). Между тем вопрос этот приобретает принципиальное значение и требует специального изучения, поскольку не ограничивается в пределах только проблемы инфаркта миокарда. Он фактически затрагивает один из фундаментальных аспектов современной теоретической и клинической кардиологии. Речь идет о взаимосвязи электрической и механической активности сердца и об информативности электрокардиологических методов в определении функционального состояния сердца—сократительной активности миокарда.

Под наблюдением находилось 250 больных с острым инфарктом миокарда, поступивших на лечение в инфарктное отделение Института кардиологии им. Л. А. Оганесяна Министерства здравоохранения Армянской ССР. Распределение больных осуществлялось согласно классификации острого инфаркта миокарда, предложенной З. Л. Долабчяном ([5]). Были выделены 2 основные группы в зависимости от трансмурального или нетрансмурального поражения миокарда. По объему инфарцированного очага группа больных с трансмуральным поражением была подразделена на 4 подгруппы: первая подгруппа—с минимальным объемом, четвертая подгруппа—с максимальным объемом, а вторая и третья подгруппы—с промежуточной градацией.

Все больные были подвергнуты детальному клиническому, лабораторному и инструментальному исследованиям. Электромеханическая активность сердца была изучена методами скалярной и ортогональной электрокардиографии, пространственной векторкардиографии, фонокардиографии и поликардиографии. Проведено подробное биохимическое исследование с определением электролитов сыворотки крови, компонентов свертывающей и антисвертывающей систем, ферментов. Центральная гемодинамика была изучена методом радиокардиографии. Были также проведены рентгенологическое и функциональное исследования.

Вышеуказанные методы исследования проводились динамически в процессе этапного лечения больных. В центре внимания находились 3 этапа: этап интенсивной терапии и наблюдения, промежуточный этап и этап начальной реабилитации. Применены принципы активной терапии, ранней активизации, мобилизации и реабилитации больных.

При определении электрической активности сердца мы основывались на разработанных нами следующих комплексных показателях: число патологических зубцов Q в 12 отведениях $-Q_n$, симптом $(Q_{пл})\times Q_n$, число зубцов R в 12 отведениях $-R_n$, симптом $(\Sigma R)\times(R_n)$, суммарный скалярный показатель $\sum R = avR + avL + avF + R(v_1 - v_6)$ и суммарный ортогональный показатель $\sum R = R_x + R_y + Q_z$ (последний показатель предложен Гофником и др. ([6])). У всех больных определялся тип сократимости на основе фазовых и гемодинамических показателей ([7]). Согласно данным наших комплексных исследований I тип встречается при умеренном ослаблении сократительной активности миокарда, III тип при выраженном его ослаблении, а II тип занимает промежуточное положение.

Как первый шаг в разработке вышеотмеченных задач нами были определены величины электрокардиографических показателей в разных группах больных, распределенных по объему инфаркта миокарда. Эти данные приведены в табл. 1. Как следует из таблицы, выявляется прямая взаимосвязь степени выраженности этих показателей с объемом поражения. Наиболее выраженные отрицательные отклонения показателей обнаруживаются в группе больных с трансмуральным поражением миокарда, охватывающим максимальный объем. Они выражаются в оптимальном увеличении Q_n, $(Q_{пл})\times(Q_n)$ и в оптимальном уменьшении R_n, $(\Sigma R)\times(R_n)$, $\Sigma R = avL + avF + R(v_1 - v_6)$ и $\Sigma R = R_x + R_y + Q_z$. Минимальные отклонения этих показателей встречаются в группе с нетрансмуральным инфарктом миокарда.

В последующем величины этих же электрокардиографических показателей были определены при различных типах сократимости миокарда. Полученные результаты представлены в табл. 2. Как видно из таблицы, обнаруживается закономерная картина. При I типе сократимости миокарда, т. е. при умеренном нарушении сократительной активности сердца, патологические отклонения изучаемых электрических показателей также выражены в умеренной степени. Выражен-

ность этих показателей максимальна у больных с III типом сократимости миокарда, у которых имеется выраженное ослабление сократительной активности сердца. Промежуточная степень выраженности патологических электрокардиографических показателей выявляется при II типе сократимости миокарда. Другими словами, выявляется прямое соотношение между выраженностью электрофизиологических признаков острого инфаркта миокарда и степенью ослабления сократительной активности сердца.

Нами изучена также динамичность электрофизиологических показателей в процессе этапного лечения больных с различными типами сократимости миокарда. На рис. 1 показана динамика двух пока-

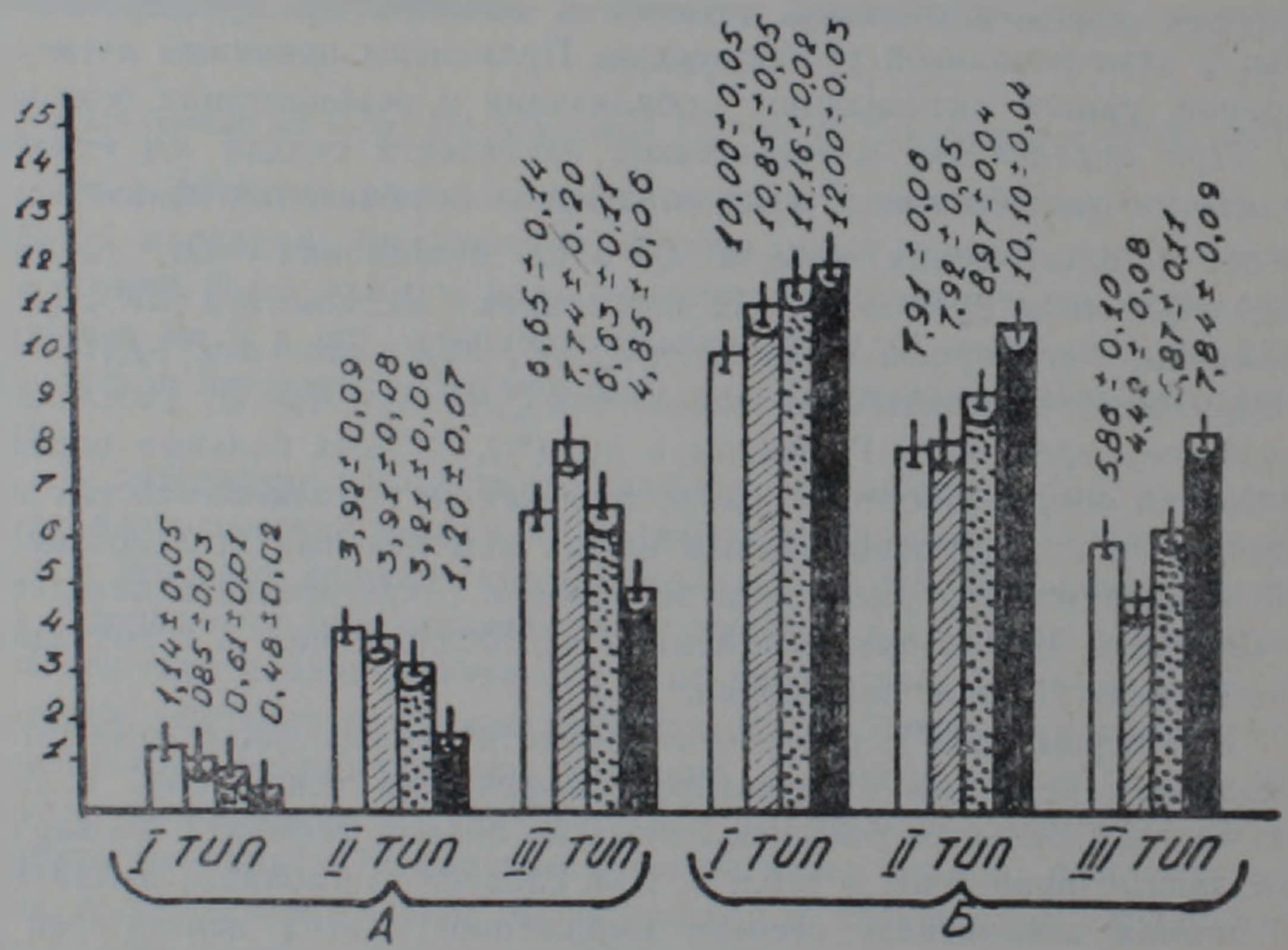


Рис. 1. Динамика показателей $Q_n(A)$ и $R_n(Б)$ в процессе этапного лечения больных с различными типами сократимости миокарда: белые столбики — 1-й день, заштрихованные столбики — 6-й день, столбики с пунктиром — 15-й день, черные столбики — 30-й день болезни. Приводятся $M \pm m$

зателей в различные сроки лечения: количества патологических зубцов $Q(Q_n)$ и количества зубцов $R(R_n)$. В процессе лечения уменьшается среднее количество патологических зубцов Q и, наоборот, увеличивается среднее количество зубцов R. При этом обнаруживается прямая зависимость от типов сократимости миокарда. Минимальная степень этих сдвигов наблюдается в группе больных с выраженным ослаблением сократительной активности сердца, т. е. при III типе сократимости миокарда. Максимальная степень, наоборот, наблюдается при умеренном нарушении сократимости миокарда, т. е. при I типе.

Таблица 1

Электрокардиологические показатели при различных объемах инфаркта миокарда.
Приводится M±m

Объем поражения		Q_n	$(Q_{пл})\times(Q_n)$	R_n	$(\Sigma R)\times(R_n)$	$\Sigma R = avz + avF + R(v_1+v_6)$	$\Sigma R = R_x + R_y + Q_z$
Нетрансмуральный инфаркт		0,80±0,09	0,042±0,09	10,71±0,07	163,4±1,16	41,42±0,14	14,33±0,16
Трансмуральный инфаркт	I подгруппа	0,72±0,05 P<0,001	0,49 ±0,05 P<0,001	8,24±0,09 P<0,001	115,64±1,85 P<0,001	38,04±0,21 P<0,01	13,52±0,19 P<0,001
	II "	5,21±0,13 P<0,001	25,66±0,94 P<0,001	7,55±0,07 P<0,001	77,36±1,14 P<0,001	25,68±0,32 P<0,001	9,84±0,24 P<0,001
	III "	6,25±0,15 P<0,001	47,72±1,52 P<0,001	7,05±0,08 P<0,001	69,00±1,11 P<0,001	24,51±0,25 P<0,001	8,56±0,27 P<0,001
	IV "	7,30±0,20 P<0,001	76,31±1,48 P<0,001	4,85±0,12 P<0,001	36,25±2,28 P<0,001	10,55±0,24 P<0,001	7,45±0,14 P<0,001

Таблица 2

Электрокардиологические показатели при различных типах сократимости миокарда. Приводится $M \pm m$

Типы сократимости	Q_n	$(Q_{n\lambda}) \times (Q_n)$	R_n	$(\Sigma R) \times (R_n)$	$\Sigma R = avR + avF + R(v_1 - v_6)$	$\Sigma R = R_x + R_y + Q_z$
I	1,14±0,05	0,09±0,00	10,00±0,05	160,35±1,21	40,23±0,15	14,13±0,17
II	3,92±0,09 P<0,001	18,45±0,96 P<0,001	7,91±0,06 P<0,001	97,42±1,12 P<0,001	31,76±0,20 P<0,001	11,85±0,21 P<0,001
III	6,65±0,14 P<0,001	62,41±1,24 P<0,001	5,86±0,10 P<0,001	54,56±1,48 P<0,001	18,11±0,22 P<0,001	8,12±0,19 P<0,001

Означенная закономерность обнаружена и в отношении остальных электрокардиографических показателей. На рис. 2 приводятся данные синдромов $(Q_{n\lambda}) \times (Q_n)$ и $(\sum R) \times (R_n)$. Ясно видна зависимость степени улучшения электрического состояния сердца от типа сократимости. На рис. 3 приводятся данные двух суммарных показателей $\sum R = Ravа + RavF + R(v_1 - v_0)$ и $\sum R = R_x + R_y + Q_z$. Эти данные свидетельствуют о прямой взаимосвязи между электрическим и механическим параметрами сокращения как в период возникновения заболевания, так и в процессе этапного лечения.

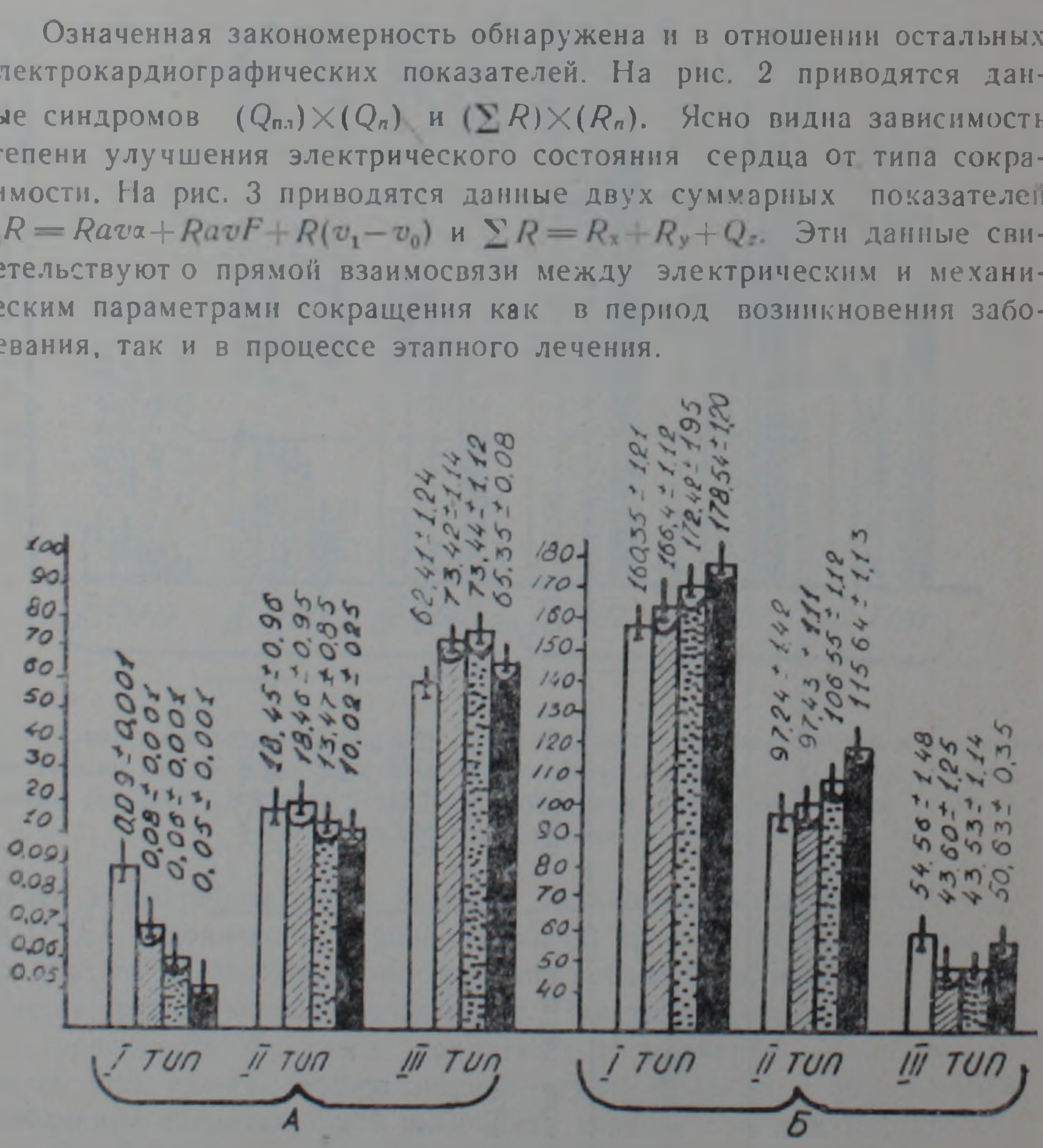


Рис. 2. Динамика синдромов роста (*А*) и коллапса (*Б*) в процессе этапного лечения больных с различными типами сократимости миокарда (обозначения столбиков те же). Приводятся $M \pm m$

Результаты наших исследований проливают свет на один из дискутабельных вопросов современной кардиологии. В обычной практике дифференцируют 2 группы феноменов, возникающих при сокращении сердца: электрических и механических. В соответствии с этим положением существуют методики, отдельно изучающие электриче-

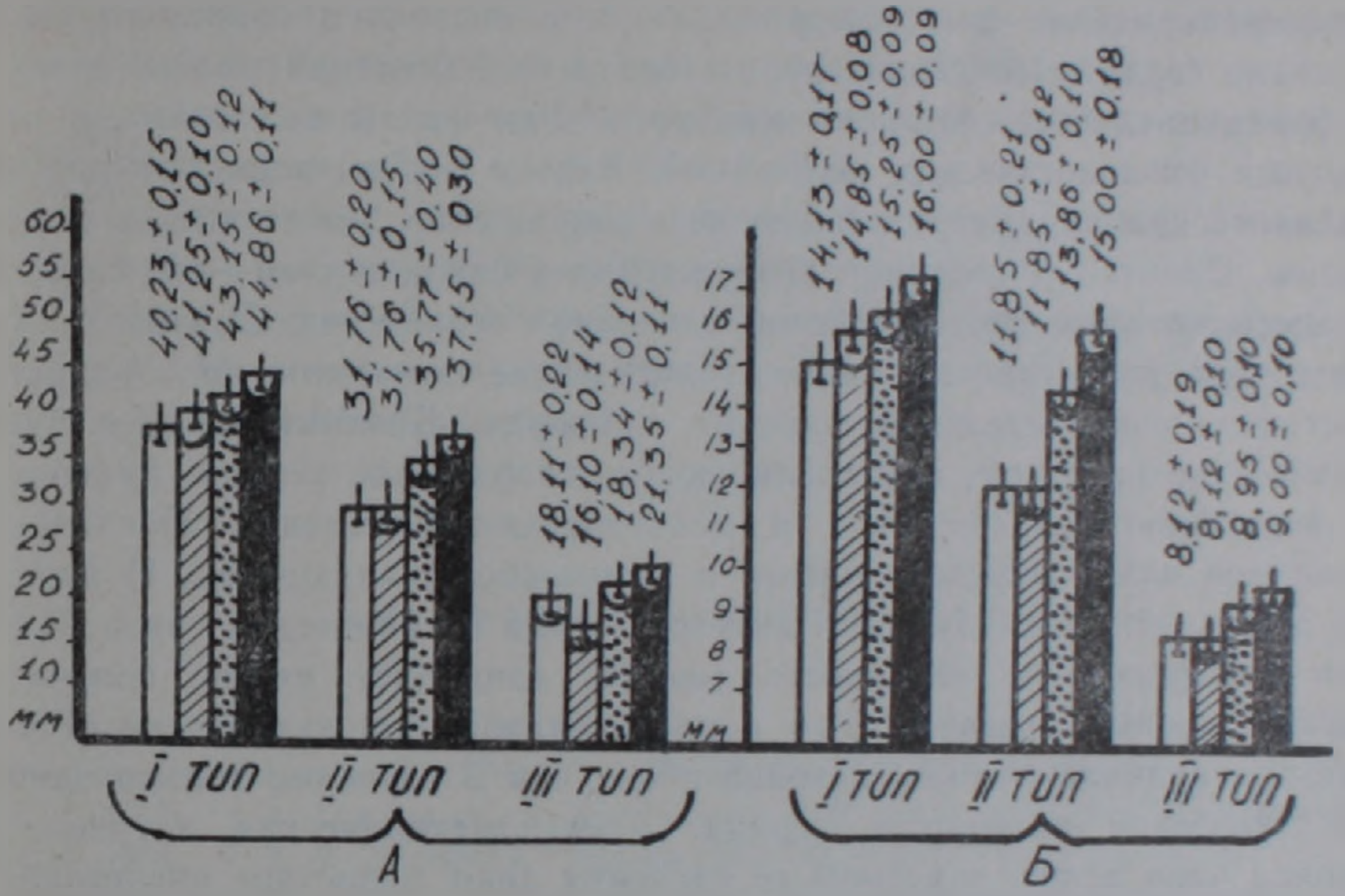


Рис. 3 Динамика суммарных показателей $\Sigma R = RavA + RavF + R(v_1 - v_6)$ (*А*) и $\Sigma R = R_x + R_y + Q_z$ (*Б*) в миллиметрах при различных типах сократимости миокарда (обозначения столбиков те же). Приводятся $M \pm m$

скую активность сердца, и методики, изучающие только сократительную активность сердца. Нами уже долгие годы развивается концепция о единстве электромеханической активности сердца и методики синтетической электромеханокардиологии ([8]). Накопленный опыт позволяет сделать предположение о том, что электрокардиологические методы содержат в себе информацию не только об электрической активности сердца, но и о его механической активности, о сократительной функции миокарда.

Другими словами, эти методы изучают все четыре функции сердца: автоматизм, возбудимость, проводимость, сократимость. В этом направлении было проведено и настоящее исследование.

При остром инфаркте миокарда электрические сдвиги обусловлены прежде всего динамикой событий в зонах некроза, повреждения и ишемии. Последние именно и определяют характер и степень сдвигов на электрофизиологической кривой, но при окончательном оформлении электрической картины сердца участвует и сократительная функция миокарда. Не случайно, что в наших наблюдениях определяется зависимость выраженности патологических отклонений электрокардиографических критериев от степени ослабления сократительной активности миокарда. Следует учесть, что рассматриваемые нами

электрические критерии весьма достоверные и довольно точно отражают состояние электрических процессов. Заслуживает внимания тот факт, что степень положительных сдвигов электрических показателей в процессе этапного лечения также зависит от степени нарушения сократительной активности миокарда.

Таким образом, мы приходим к убеждению, что электрофизиологические критерии дают информацию и о состоянии сократительной функции сердца. По характеру и степени их изменений можно судить о функциональном состоянии миокарда. Эти факты вытекают из известных физиологических положений. Ведь в основе электрических и механических параметров сердечного сокращения лежат общие механизмы. Процесс сопряжения возбуждения с сокращением—это единый процесс, который протекает с определенной этапностью. В этом смысле трудно представить, чтобы электрические феномены не отражали состояние сократительной функции миокарда. Биохимические и биофизические процессы, обусловливающие сокращение сердца, приводят к появлению электрических и механических феноменов. Последние являются взаимообусловленными и взаимообслуживающими. И поэтому между этими феноменами имеется тесная органическая связь. Изучая электрическую активность сердца, клиницист может получить весьма ценные сведения и о сократительной его активности. Роль электрокардиологических методов шире, чем в изучении только одной электрической активности сердца. Электромеханическая активность сердца одно целое, и методы ее изучения дают целостное представление о деятельности сердца.

Из изложенного можно сделать следующие выводы.

1. При остром инфаркте миокарда выявляется прямое соотношение между показателями электрической активности сердца и сократительной активности миокарда. Типы сократимости миокарда во многом предопределяют состояние электрической активности сердца и наоборот.

2. В процессе этапного лечения больных с острым инфарктом миокарда определяется параллелизм в динамике показателей электрической активности сердца и сократительной активности миокарда. Обнаруживается общая направленность изменений электрических параметров и типов сократимости миокарда.

3. Электрокардиологические методы и связанные с ним электрические критерии деятельности сердца отражают не только электрическую активность, но и сократительную активность миокарда. В практике они могут быть использованы для косвенного определения функционального состояния миокарда. С этой целью следует основываться на комплексных электрических показателях, отражающих многие стороны патологического процесса и дающих по мере возможности целостные представления о нем.

Институт кардиологии
им. Л. А. Оганесяна
Министерства здравоохранения
Армянской ССР

Ջ. Լ. ԴՈԼԱԲՉՅԱՆ, Ն. Գ. ՏԱՏԻՆՅԱՆ, Ռ. Ս. ԴԱՔՐԻԿԼՅԱՆ, Ս. Ա. ՓԻՐՈՒԶՅԱՆ

Սրտամկանի սուր ինֆարկտի ժամանակ էլեկտրաստատաբանական մեթոդների տեղատվությունը սրտի կծկողական ակտիվության նկատմամբ

Սրտամկանի սուր ինֆարկտով 250 հիվանդի մոտ կատարված ուսումնասիրման հիման վրա քննարկվում է էլեկտրաստատաբանական մեթոդների տեղեկատվությունը սրտի կծկողական ակտիվության նկատմամբ։

Հայտնաբերվում է ուղղակի հարաբերակցության սրտի էլեկտրական և կծկողական ակտիվության ցուցանիշների միջև։

Ուսումնասիրելով սրտի էլեկտրական ակտիվությունը, կարելի է ստանալ արժեքավոր տվյալներ նաև նրա կծկողական ուժի մասին։

Սրտի էլեկտրամեխանիկական ակտիվությունը մի ամբողջություն է, ուստի և էլեկտրաստատաբանական հետազոտությունը տալիս է պատկերացում սրտի ողջ գործունեության մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Bisteni et al.*, Advances in Gardiology, S. Karder, Basel., vol. 8 (1973). [2] *K. M.*, Eyer Am. Heart J., vol. 87 (1974). [3] *D. T. Miller, J. P. Gilmore*, J. Electrocardiology, vol. 5 (1972). [4] *A. Toyoma et al.*, Abstracts--I, VIII world Congress of Cardiology, Tokyo, 1978. [5] *З. Л. Долабчян*, Кардиология, № 1, 1975. [6] *Goffnik et al.*, Am. J. Cardiology, vol. 41, (1978.) [7] *З. Л. Долабчян, Р. С. Габриелян*, Кардиология, № 5, 1978. [8] *З. Л. Долабчян*, Основы клинической электрофизиологии и биофизики сердца, М., 1968.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ LXXII ՀԱՏՈՐԻ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Ս. Միմայելյան — *Սիլովյան բազաների և հոլյան ենթախմբերի Γ-համալուծությունը լոկալ վերջավոր խմբերի մի դասում* 3

Ս. Գ. Հովսեփյան — *Արտապատկերումների անընդհատ շարունակումը տարածությունների յայնացումների վրա* 6

Վ. Ա. Միրզոյան — *Կոմուտացվող նորմալ վեկտորական դաշտով ենթաբազմություններ* 14

Է. Վ. Ոդիազարյան — *Բուլյան հավասարումների սիստեմների մետրիկական բնութագրիչները* 67

Ա. Ն. Հայրապետյան — *Ֆատուի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին* 73

Ե. Գ. Ֆայնբերգ — *Ամբողջ ֆունկցիայի ինտեգրալի գնահատականի և ըստ ոչ ադիտիվ չափի ինտեգրալի մասին* 80

Ժ. Գ. Նիկողոսյան — *Գրաֆի մաքսիմալ ցիկլի մասին* 82

Ս. Ս. Ալոյան — *Վիլյամսոնի տիպի Ադամարի տարածական մատրիցայի մասին* . 131

Վ. Խ. Մուսոյան — *Դիրիխլեի լրիվ սիստեմով մոտարկվող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունը* 135

Ս. Մ. Վարդանյան — *Բազմությունների ճանաչման մեկ խնդիր* 141

Ա. Ա. Վաղարշակյան — *Միակության թեորեմն քվազիկոնֆորմ արտապատկերումների համար* 144

Ա. Գ. Թսուգևոսյան — *Սրագրերի մի դասի համար օրինակների լրիվ համակարգ կառուցելու պրոբլեմի լուծելիությունը* 151

Ս. Բ. Մկրտչյան — *Կարգային վիճակագրությունների համընկնող միջին արժեքներ ունեցող բաշխումների մոտիկության գնահատականը* 195

Ս. Ք. Հարությունյան — *RP^n պրոյեկտիվ տարածության գրո-գույգերի սիմետրիկ տարածության երկրաչափության մասին* 203

Է. Մ. Պողոսյան — *Կոմբինատոր օպտիմիզացման պարամետրերի և պատկերների ձևավորման պրոբլեմների համեմատական անալիզի մասին* 211

Գ. Գ. Գևորգյան — *Լրիվ օրթոնորմալ համակարգերի և Ֆուրյեի ինտեգրալների միակության բազմությունների մասին* 218

Վ. Կ. Բոսոյան — *Մարկովյան ղեկավարելի համակարգերի կանոնական վերլուծման մեթոդով օպտիմալ սինթեզման խնդրի վերաբերյալ* 224

Մ. Ա. Անդիկյան — *Աֆինական տարածության հագեցված մակերևույթին համաչափորեն կցված երեք-հյուսվածքների մասին* 231

Տ. Մ. Կոշելևա — *Կոշու խնդիրը սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում* 238

Ա. Ա. Վաղարշակյան — *Ոչ սիմետրիկ կշռային ֆունկցիայով բազմանդամներով մոտարկելու մասին* 259

Վ. Ա. Մանուկյան — *Կարլեմանի եզակիությունը մի դասի ֆունկցիաների համար* . 263

Է. Մ. Պողոսյան — *Շախմատային ալգորիթմների ինքնահամակերպման պրոբլեմի լուծելիության մասին* 269

Հ. Ս. Ասատրյան — *Նախամաթեմատիկական բազմության Π_3-աստիճանների բուլյան ենթահանրահաշիվների մասին* 275

Ա. Գ. Չերնյավսկի — *Հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ հատկությունների անալոգների մասին* 280

Ա. Ա. Ֆոնարև — *Անշարժ կետերի մասին* 286

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Դ. Հ. Ավետիսյան—*Ինֆորմատիկայի վիճակագրական տեսության հետ առնչվող չորս թեորեմների մասին* 157

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Հ. Բ. Աղալարյան, Ս. Ա. Նազարով—*Ոլորման ժամանակ պրիզմատիկ ձողում ինտենսիվության գործակիցների փոփոխումը երկայնական ճաքի գոդման դեպքում* . 18

Հ. Մ. Սապոնջյան, Վ. Ա. Արզումանյան—*Եզրագծով ազատ հենված կիսաշրջանային սալի ծռումը շրջանի մակերեսով ազդող բեռի դեպքում* 88

Ա. Ա. Վանցյան—*Մետաղներում բարակ մարմնի ներթափանցման խորությունների որոշումը* 95

Վ. Վ. Սիմոնյան—*Գլանային խոռոչով տարածության համար առանցքասիմետրիկ խնդիր* 244

Ռ. Մ. Կիրակոսյան—*Իդեալական պլաստիկական սալերի ամենափոքր ծավալի բավարար պայմանների մասին* 291

ՀԻԴՐՈՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ռ. Մ. Բարսեղյան—*Բազմաշափ ֆիլտրացիայի հիմնական հավասարումները դեֆորմացիայի ենթարկվող գրունտներում* 103

ՖԻԶԻԿԱ

Պ. Մ. Ավագյանց, Ս. Ա. Թաոումյան—*Մինչև 100 կէվ էներգիայով էլեկտրոնների կիսահաղորդչային սարքերի վրա գործող ազդեցության վերաբերյալ* 22

Է. Հ. Միրզաբեկյան, Յ. Ա. Աբրահամյան, Ռ. Հ. Սիմոնյան, Ն. Ս. Աոամյան—*Ինֆրակարմիր տիրույթի ճառագայթման ընդունիչներ անոմալ բարձր զգայնությամբ* . 28

Դ. Յու. Կրյուչկով—*Լույսի ռեզոնանսային ցրումը խոտորված ատոմային համակարգի կողմից* 109

Ֆ. Գ. Սաֆարյան—*Էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի էլեկտրոն-ֆոնոնային ոչ ճառագայթային անցումը Nd^{3+} իոնների միջև, որոնք գտնվում են ինտրիում-ալյումինիումի նռնաքարի բյուրեղում խառնուրդների ձևով* 296

ԹԱԹԻՈՖԻԶԻԿԱ

Կ. Ա. Բարսուկով, Գ. Ա. Գրիգորյան—*Պարբերաբար շարժվող սահմանով ծավալային ռեզոնատոր* 114

ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ

Ռ. Ա. Վարդանյան, Մ. Ս. Միրզոյան, Հ. Ա. Պողոսյան—*Նախնական քվային ֆիլտրացիայի կիրառումով աստղագիտական օբյեկտների պատկերների մշակումը* . 162

ՀԱՆՔԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Հ. Մաղալյան, Ռ. Ա. Թորոսյան, Ռ. Հ. Մարության, Գ. Մ. Անտոնյան—*Նոր տվյալներ Ջոդի հանքավայրի հանքաբանության մասին* 34

ՍՏՐԱՏԻԳՐԱՖԻԱ

Ա. Հ. Գաբրիելյան, Ս. Մ. Գրիգորյան—*Նոր տվյալներ* Nummulites gizehensis-*ի հորիզոնի հասակի մասին և Հայաստանի նումուլիտային գոտիները* 38

Ս. Մ. Գրիգորյան, Լ. Ն. Մարկոսյան—*Նոր տվյալներ Հայոցձորի սինկլինորիումի պալեոցենի մասին (Հայկական ՍՍՀ)* 169

ԲՈՏԱՆԻԿԱ

Ա. Մ. Աղաջանյան, Ն. Մ. Նավասարդյան—*Նեկրոզը* Lycopersicon esculentum *և* L. hirsutum f. glabratum-*ի խաչաձևումից ստացված հիբրիդների մոտ* . . . 42

Բ. Խ. Ազարյան, Ս. Մ. Սարգսյան, Գ. Գ. Խաչատրյան—*Սեռին չդիֆերենցված ռեցեպտիվ լեթալ խաղողի ողկույզների մոտ* 120

313

ԲԻՈՖԻԶԻԿԱ

Ս. Խ. Ավդալբեգյան, Մ. Ա. Բաջինյան—*Էրիթրոցիտների էլեկտրոկինետիկ պոտենցիալի փոփոխությունների մեխանիզմների մասին թոքերի ոչ սպեցիֆիկ հիվանդությունների ժամանակ* 175

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Ի. Մ. Զարաֆյան, Գ. Ֆ. Վագանյան, Ժ. Ի. Հակոբյան—*Լուկտատդնհիդրոգենազայի տվյալների բանկը* 47

Վ. Ս. Հովհաննիսյան, Լ. Լ. Բադալյան—*Առնետների երիկամների կեղևի γ գլոտամիլտրանսֆերազայի նոր ինհիբիտորը* 179

ԱԳՐՈՔԻՄԻԱ

Ա. Շ. Գալստյան, Զ. Վ. Անտոնյան—*Հողում ցիստեինի փոխարկման մասին* . 183

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Հ. Ղազարյան, Ա. Ա. Չիլինգարյան—*Լուիկի բույսերի ռեակցիան պտղաողկույզների հեռացման նկատմամբ* 52

Վ. Հ. Ղազարյան, Ա. Ա. Չիլինգարյան—*Լուիկի արմատների ֆունկցիոնալ գործունեության վրա դեֆլորացիայի ազդեցության հարցի մասին* 59

Վ. Հ. Ղազարյան, Է. Վ. Ավագյան—*Արմատային արտազատումների ազդեցությունը մեկուսացված տերևների կենսագործունեության հարցի շուրջ* 124

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ս. Ա. Ղասաբյան—*Պոչավոր եռարմատ կորիզով սինապտիկ հաղորդման էլեկտրաֆիզիոլոգիական բնութագրերը* 251

ԲԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Ն. Քարագյան, Լ. Ա. Հախվերդյան—*Մահացությունը սուր ինֆարկտ միոկարդի ժամանակ Երևան ք. պայմաններում, կախված երկրի մագնիսական դաշտի ակտիվությունից* 188

Զ. Լ. Դալաբշյան, Ն. Գ. Տատինյան, Ռ. Ս. Դաբրիելյան, Ս. Ա. Փիրուզյան—*Սրտամկանի սուր ինֆարկտի ժամանակ էլեկտրասրտաբանական մեթոդների տեղեկատվությունը սրտի կծկողական ակտիվության նկատմամբ* 304

Բովանդակություն LXXII *հատորի* 312

СОДЕРЖАНИЕ LXXII ТОМА

Стр.

МАТЕМАТИКА

Г. С. Микаелян—Г-сопряженность силовых баз и холловских подгрупп в одном классе локально конечных групп 3

С. Г. Овсепян—О продолжении отображений пространств до непрерывных отображений их расширений 6

В. А. Мирзоян—Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем 14

Э. В. Егиазарян—Метрические свойства систем булевых уравнений . . 67

А. Н. Айрапетян—Об одном обобщении теоремы Фату 73

Е. Д. Файнберг—Об оценке индикатора целой функции и интеграле по неаддитивной мере 78

Ж. Г. Никогосян—О максимальном цикле графа 82

С. С. Агаян—О пространственной матрице Адамара типа Вильямсона . 131

В. Х. Мусоян—Аналитическое продолжение функций, аппроксимируемых полной системой Дирихле 135

С. М. Вартанян—Об одной задаче распознавания множеств 141

А. А. Вагаршакян—Теорема единственности для квазиконформных отображений 144

А. Г. Тадевосян—О разрешимости проблемы построения полной системы примеров в одном классе программ 151

С. Т. Мкртчян—Оценка близости распределений, имеющих совпадающие средние значения порядковых статистик 195

С. Х. Арутюнян—О геометрии симметрического пространства нуль-пар проективного пространства RP^n 203

Э. М. Погосян—К параметрам комбинаторной оптимизации и сравнительному анализу проблем формирования образов 211

Г. Г. Геворкян—О множествах единственности для полных ортонормированных систем и интегралов Фурье 218

В. К. Брутян—К задаче синтеза оптимальных линейных марковских управляемых систем методом канонических разложений 224

М. А. Андикян—О три-тканях, симметрично присоединенных к нормализованной поверхности аффинного пространства 231

Т. М. Кошелева—Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в классе обобщенных функций 238

А. А. Вагаршакян—О приближении многочленами с несимметрической весовой функцией 259

В. М. Манукян—Особенность Карлемана для одного класса функций . 263

Э. М. Погосян—О разрешимости проблемы адаптации шахматных алгоритмов 269

О. С. Асатрян—О булевых подалгебрах m-степеней квазимаксимальных множеств 275

А. Г. Чернявский—О квазианалитических аналогах некоторых свойств гармонических функций 280

А. А. Фонарев—О неподвижных точках 286

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Д. О. Аветисян—О четырех теоремах, связанных со статистической теорией информатики 157

МЕХАНИКА

О. Б. Агаларян, С. А. Назаров—Об изменении коэффициентов интенсивности при запайке продольной трещины в призматическом стержне . . 18

О. М. Сапонджян, В. А. Арзуманян—Изгиб свободно опертой по контуру полукруглой плиты под действием нагрузки, распределенной по площади круга . 88

А. А. Ванцян—Определение глубин проникания тонкого тела в металлы . 95

В. В. Симонян—Осесимметричная задача для пространства с цилиндрической полостью 244

Р. М. Киракосян—О достаточных условиях наименьшего объема идеально-пластических пластинок 291

ГИДРОМЕХАНИКА

Р. М. Барсегян—Основные уравнения многомерной фильтрации в деформируемых грунтах 103

ФИЗИКА

Г. М. Авакьянц, С. А. Тарумян—О действии электронов с энергией до 100 кэв на полупроводниковые структуры 22

Э. Г. Мирзабекян, Ю. А. Абрамян, Р. Г. Симонян, Н. С. Арамян—Приемники ИК-излучения с аномально высокой чувствительностью 28

Г. Ю. Крючков—Резонансное рассеяние света возмущенной атомной системой 109

Ф. П. Сафарян—Электрон-фононный безызлучательный переход энергии электронного возбуждения между примесными центрами Nd^{3+} в иттрий-алюминиевом гранате (ИАГ) 296

РАДИОФИЗИКА

К. А. Барсуков, Г. Л. Григорян—Объемный резонатор с периодически движущейся границей 114

АСТРОФИЗИКА

Р. А. Вартанян, М. С. Мирзоян, Г. А. Погосян—Применение предварительной цифровой фильтрации для обработки изображений астрономических объектов 162

МИНЕРАЛОГИЯ

И. И. Магакян, Р. А. Торосян, Р. О. Марутян, Г. М. Антонян—Новое в минералогии Зодского месторождения 34

СТРАТИГРАФИЯ

А. А. Габриелян, С. М. Григорян—Новые данные о возрасте слоев с Nummulites gizehensis и нуммулитовые зоны Армении 38

С. М. Григорян, Л. Е. Маркосян—Новые данные о палеоцене Айоцдзорского синклинория (Армянской ССР) 169

ГЕНЕТИКА

А. М. Агаджанян, Е. М. Навасардян—Некроз у гибридов между Lycopersicon esculentum и L. Hirsutum f. glabratum 42

Г. Х. Азарян, С. М. Саркисян, Г. Г. Хачатрян—Сцепленная с полом рецессивная леталь у гроздевой листоверткн 120

БИОФИЗИКА

С. Х. Авдалбекян, С. А. Баджинян—О механизме изменения электрокинетического потенциала эритроцитов при хронических неспецифических заболеваниях легких 175

БИОХИМИЯ

И. М. Зарафян, Г. П. Казанчян, Ж. И. Акопян—Банк данных по лактатдегидрогеназе 47

В. С. Оганесян, Л. Л. Бадалян—Новый ингибитор гамма-глутамилтрансферазы коры почек крыс 179

АГРОХИМИЯ

А. Ш. Галстян, З. В. Антонян—О превращении цистеина в почве . . 183

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. О. Казарян, А. А. Чилингарян—О реакции растений томата на удаление плодовых кистей. 52

В. О. Казарян, А. А. Чилингарян—К вопросу о влиянии дефлорации на функциональную деятельность корней томата 59

В. О. Казарян, Э. В. Авакян—К вопросу о влиянии корневых выделений на жизнедеятельность изолированных листьев 124

ФИЗИОЛОГИЯ

С. А. Касабян—Электрофизиологические характеристики синаптической передачи через каудальное тройничное ядро 251

МЕДИЦИНА

Н. Н. Каразян, Л. А. Ахвердян—Смертность при остром инфаркте миокарда в зависимости от активности геомагнитного поля в условиях г. Еревана . 188

З. Л. Долабчян, Н. Г. Татинян, Р. С. Габриелян, С. А. Пирузян—К вопросу об информативности электрокардиологических методов в отношении сократительной активности сердца при остром инфаркте миокарда . . 304

CONTENTS OF LXII VOLUME

MATHEMATICS

G. S. Mikaelian—Γ-conjugation of the force bases and Hall subgroups in the class of local finite groups 3

S. G. Ovsepian—Extension of continous mappings of the spaces to the extensions of the spaces 6

V. A. Mirzoyan—Submanifolds with commutative normal vector field . 14

E. V. Eghiazarian—Metric qualities of the Boolean equation system . 67

A. N. Hairapetian—On one generalization of Fatou theorem 73

H. D. Feinberg—Entire function indicator estimate and integral by non-additive measure. 78

G. G. Nicoghossian—On maximal cycle of a graph 82

S. S. Agayan—On higher dimensional Williamson-type Hadamard matrices 131

V. Kch. Musoyan—Analytic continuation of the functions approximable by the complete set of Dirichlet 135

S. M. Vartanian—A problem of knowing of sets. 141

A. A. Vagarshakian—The theorem of uniqueness for quasiconformal mappings 144

A. G. Tathevosian—On solvability of a complete sample system construction problem for one class of programs. 151

S. T. Mkrtčian—An estimate of closeness of distributions having the sume expected values of order statistics 195

S. Ch. Harutjunian—On geometry of symmetric space of zero-patres of projektive space RP^n 203

E. M. Pogossian—On combinatorial optimization parameters and comparative analysis of pattern formation problems 211

G. G. Gevorkian—On sets of uniqueness for orthonormal complete systems and Fourier's integrals 218

V. K. Broutian—On the probleme of optimal linear markov design sistems by the method of canonical expansion 224

M. A. Andiklan—Tri-tissues symmetrically attached to normalized surface of affinity space 231

T. M. Cosheleva—Coshi's problem for ordinari differential equations in the class of generalized functions 278

A. A. Vagarshaklan—Approximation by polynomials with nonsymmetric weighted function 259

V. M. Manukyan—The Carleman singularity for one class of functions . 263

E. M. Pogossian—On solvbility of chess programms adabtation problem 269

H. S. Asatrian—On some boolean subalgebras of m-degrees of quasimaximal sets 275

A. G. Cherniavskii—Onthe quasi-analytical analoques of some properties of harmonic functions 280

A. A. Fonarev—On the fixed points 286

APPLIED MATHEMATICS

D. H. Avetisian—About four theorems, connected with the statistical theory of informatics 157

MECHANICS

H. B. Agalarian, S. A. Nazarov—The change of coefficient intensivity in torsion of the prismatical rod during welding of the longitudinal crack . . 18

O. M. Saponjian, V. A. Arzumanian—Bending of the semicircular plate freely supported along its contour under the action of the load distributed on the area of a circle 88

A. A. Vantoyan—The determination of depths of penetration of thin body in metals 95

V. V. Simonian—The axisymmetrical problem for the spase with cylindrical cavity. 244

R. M. Kirakosian—On the satisfating condintions for the smollest volume of ideal plastic plates 291

HYDROMECHANICS

R. M. Barsegian—The basic equations of the multi-measured filtration in the deforming grounds. 103

PHYSICS

G. M. Avakiants, S. A. Tarumian—On the action of electrons possessing energy up to 100 kev on semiconductor structures 22

E. H. Mirzabekian, Ju. A. Abramian, R. G. Simonian, N. S. Aramian—Infra-red receiver with anomaly-high sensitivity 28

G. Yu. Kruchkov—Resonance light scattering by perturbating atomic system 109

F. P. Safarian—Radiationless transition the electron exicitation energy between the impurity ions Nd^{3+} in ittrium-alluminum garnet 296

RADIOPHYSICS

K. A. Barsukov, G. A. Grigorian—Cavity resonator with periodically moving boundary 114

ASTROPHYSICS

R. A. Vardanian, M. S. Mirzoyan, H. A. Pogosian—Application of preliminary numerical filteration in treatment of pictures of celestial objects . . 162

MINERALOGY

N. I. Magakian, R. A. Torosian, R. A. Marutian, G. M. Antonian—New data about the mineralogy of Zods deposit 34

STRATIGRAPHY

A. H. Gabrielian, S. M. Grigorian—New data on the age of layers with the Nummulites gizehensis and the nummulitic zones of Armenia 38

S. M. Grigorian, L. E. Marcosian—New data on Paleocene of Hayocdzhor sinclinorium (Armenian SSR) 169

GENETICS

A. M. Agadjanian, E. M. Navasardian—The necrosis in hybrids between Lycopersicon esculentum and L. hirsutum f. glabratum 42

G. Kh. Azarian, S. M. Sarkissian, G. G. Khachatrian—Sex-linked recessive lethal in grape moths 120

BIOPHYSICS

S. Kh. Avdalbekian, S. A. Badjinian—On the mechanism of electrokinetics potential change under chronic nonspecified lung diseases 175

BIOCHEMISTRY

I. M. Zaraphian, G. P. Kazanchian, Zh. I. Akopian—The date bank of lactatedehydrogenase. 47

V. S. Hovhannisian, L. L. Badalian—The new inhibitor of rats kidney cortex gamma-glutamyl-transpherase 179

AGROCHEMISTRY

A. Sh. Galstian, Z. W. Antonian—On cysteine transformation in soil . 183

PLANT PHYSIOLOGY

V. O. Kazarian, A. A. Chilingarian—On the reaction of tomato plants to the removal of the fruit brushes 52

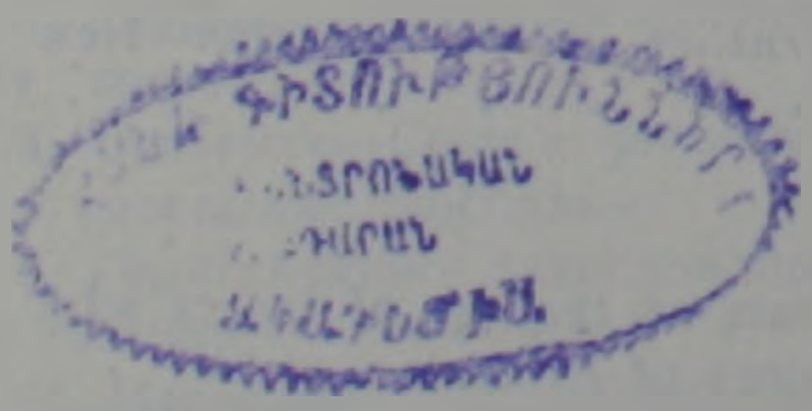
V. O. Kazarian, A. A. Chilingarian—On the problem of the effects of defloration on the functional activity of the roots of the tomato 59

B. O. Kazarian, E. B. Avakian—On the question of the root formation influence on the vital functions of the isolated leaves 124

PHYSIOLOGY

S. A. Kasabljan—Electrophysiological characteristics of synaptic transmission through the spinal trigeminal nucleus caudalis. 251

MEDICINE

N. N. Karazian, L. A. Akhverdian—Death rate from acute myocardial infarction depending upon the activity of the geomagnetic field in the conditions of Yerevan 188

Z. L. Dolabjian, N. G. Tatinian, R. S. Gabrielian, S. A. Piruzian—On the informativity of electrocardiological methods concerning contractile activity of the heart in acute myocardial infarction 304