ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXII, № 4
1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ — ЕРЕВАН

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1981, т. 72, № 4, с. 193—255.

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год.
На русском языке

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

СОДЕРЖАНИЕ

Индекс 77730

CONTENTS

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 22.06.1981 г. Подписано к печати 6.08.1981 г. ВФ 06742.
Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Плоскопечать. Печ. лист. 4,0. Усл. печ. лист. 5,6.
Учет.-изд. 4,44. Тираж 500. Заказ 5/8, Издат. 5488.
375019, Ереван, Барекамутян, 24-г. II эт., 1 к.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

С. Т. Мкртчян

Оценка близости распределений, имеющих совпадающие средние значения порядковых статистик

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/VII 1980)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения (ф. р.) $F(x)$, а $X_{1;n} \leqslant X_{2;n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n;n}$ — соответствующие порядковые статистики. Допустим, что $\{k(l): l = 1,2, \ldots\}$ — последовательность целых чисел, для которой $1 \leqslant k(l) \leqslant l$. В работах [1-6] исследован вопрос о восстановлении ф. р. по последовательности чисел

$$\{E(X_{k(n):n}): n = m, m+1, \ldots\} \tag{1}$$

при некоторых предположениях относительно вида последовательности $\{k(l): l = 1, 2 \ldots\}$. В статьях [1,2] доказано, что при $k(n) = 1$ или $k(n) = n$ и $E|X_1| < \infty$ ф. р. $F(x)$ восстанавливается по последовательности (1) при $m = 1$ единственным образом. В работе [3] аналогичный результат доказан для случая $k(n) = k = \text{const}$. Наиболее общий результат получен в работах [5,6]. Для того, чтобы сформулировать его, нам понадобится

Определение (см. [5]). Скажем, что последовательность $\{k(l)\}$ удовлетворяет $(A-m)$-условию, если

$$k(m) \leqslant k(l) \leqslant k(m) + l - m$$

при всех $l \geqslant m$.

По определению любая последовательность $\{k(l)\}$ удовлетворяет $(A-1)$-условию.

Основной результат работы [5] состоит в том, что если последовательность $\{k(l)\}$ удовлетворяет $(A-m)$-условию и $E|X_{k(m):m}| < \infty$, то ф. р. $F(x)$ восстанавливается по последовательности (1) средних значений порядковых статистик единственным образом. В работе [6] при дополнительном условии $E|X_1| < \infty$ несколько ослаблено $(A-m)$-условие.

Ниже мы изучим вопрос о том, насколько конечный отрезок

$$\{E(X_{k(n):n}): n=m,\ m+1, \ldots, m+s\}$$

последовательности (1) определяет ф. р. $F(x)$. Точнее, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две ф. р., для которых соответствующие средние значения порядковых статистик $X_{k(n):n}$ совпадают, т. е.

$$E_1(X_{k(n):n}) = E_2(X_{k(n):n})$$

при $n=m,\ m+1, \ldots, m+s$, то нас интересует, насколько $F_1(x)$ отличается (в некоторой метрике) от $F_2(x)$.

Пусть $\{k(l)\}$—некоторая фиксированная последовательность, удовлетворяющая $(A-m)$-условию. Для каждой ф. р. F определим обратную функцию F^{-1}, положив

$$F^{-1}(y) = \inf\{x: F(x) \geqslant y\},\ 0<y<1$$

(см., например, ([7])). Введем класс $\mathbf{F}$ функций распределения, удовлетворяющих условиям:

1) для любой ф. р. $F \in \mathbf{F}$, любого $\varepsilon>0$ и любого $t \in (0,1)$

$$\sup_{|x|\leqslant\varepsilon} |F^{-1}(x+t) - F^{-1}(t)| \leqslant \rho_1(t;\varepsilon),$$

где $\rho_1(t;\varepsilon) \geqslant 0$—некоторая заданная (фиксированная для $\mathbf{F}$) функция;

2) для любой ф. р. $F \in \mathbf{F}$ конечна величина

$$\gamma(m;F) = E|X_{k(m):m}|;$$

3) для любой ф.р. $F \in \mathbf{F}$ при всех $t \in (0,1)$ справедливо

$$|F^{-1}(t)| \leqslant L(t),$$

где $L(t)$ заданная и фиксированная для $\mathbf{F}$ функция.

Положим

$$\rho(t;\ \varepsilon;\ m) = \rho_1(t;\ \varepsilon) + (m-1)\ L(t).$$

Теорема. *Пусть последовательность $\{k(l)\}$ удовлетворяет $(A-m)$-условию. Если $F_1 \in \mathbf{F}$ и $F_2 \in \mathbf{F}$—две ф. р., для которых*

$$E_1(X_{k(n):n}) = E_2(X_{k(n):n}) \tag{2}$$

при $n=m,\ m+1, \ldots, m+s$ $(s \geqslant 1)$, то для любого $\delta \in (0,1)$ и любого $y \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$y^{k(m)-1}(1-y)^{m-k(m)}|F_1^{-1}(y) - F_2^{-1}(y)| \leqslant$$
$$\leqslant C\left[\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\frac{1}{\delta^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} + \rho(y;\delta;m)\right], \tag{3}$$

где C—абсолютная постоянная.

Доказательство. Легко убедиться, что (2) эквивалентно соотношению

$$\int_0^1 F_1^{-1}(y)y^{k(n)-1}(1-y)^{n-k(n)}dy = \int_0^1 F_2^{-1}(y)y^{k(n)-1}(1-y)^{n-k(n)} \tag{4}$$

при $n = m, m+1, \ldots, m+s$.

Положим

$$g_r(y) = F_r^{-1}(y) y^{k(m)} (1-y)^{m-k(m)}, \quad r=1, 2,$$

$$p_j(y) = y^{k(m+j)-k(m)} (1-y)^{j-k(m+j)+k(m)}, \quad j=0, 1, \ldots.$$

Тогда (4) принимает вид

$$\int_0^1 g_1(y) p_j(y) dy = \int_0^1 g_2(y) p_j(y) dy, \quad j=0, 1, \ldots, s.$$

Так как последовательность $\{k(n)\}$ удовлетворяет $(A-m)$-условию, то $p_j(y)$—полином от y степени j, а это значит, что предыдущее соотношение может быть записано в виде

$$\int_0^1 g_1(y) y^j dy = \int_0^1 g_2(y) y^j dy, \quad j=0, 1, \ldots, s. \tag{5}$$

Положим

$$\varphi_r(t) = \int_0^1 g_r(y) e^{ity} dy, \quad r = 1, 2.$$

Тогда условия (5) означают, что

$$\varphi_1^{(j)}(0) = \varphi_2^{(j)}(0), \quad j=0, 1, \ldots, s. \tag{6}$$

Так как

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \sum_{j=0}^{s} \frac{\varphi_1^{(j)}(0) - \varphi_2^{(j)}(0)}{j!} \cdot t^j + \frac{\varphi_1^{(s+1)}(\tau) - \varphi_2^{(s+1)}(\tau)}{(s+1)!} \cdot t^{s+1},$$

где $|\tau| \leqslant |t|$, то, учитывая (6), получим:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant \frac{|\varphi_1^{(s+1)}(\tau)| + \varphi_2^{(s+1)}(\tau)|}{(s+1)!} |t|^{s+1}. \tag{7}$$

Но

$$|\varphi_r^{(s+1)}(\tau)| = \left| \int_0^1 g_r(y) e^{i\tau y} (iy)^{s+1} dy \right| \leqslant \int_0^1 |g_r(y)| dy =$$

$$= \int_0^1 |F_r^{-1}(y)| y^{k(m)-1} (1-y)^{m-k(m)} dy =$$

$$= \frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!} \cdot \gamma(m; F_r), \quad r=1, 2.$$

поэтому из (7) находим:

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|\leqslant\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}[\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2)]\cdot\frac{|t|^{s+1}}{(s+1)!}. \qquad (8)$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к неравенству

$$|\varphi_1'(t)-\varphi_2'(t)|\leqslant\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}[\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2)]\cdot\frac{|t|^{s}}{s!}. \qquad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$\omega_\delta(z)=\begin{cases}\dfrac{c}{\delta}\exp[(z/\delta)^2/[(z/\delta)^2-1]] & \text{при } |z|<\delta,\\ 0 & \text{при } |z|\geqslant\delta,\end{cases}$$

где $c=1/\int\limits_{-1}^{1}\exp[z^2/(z^2-1)]\,dz.$

Ясно, что $\omega_\delta(z)\geqslant 0$, $\omega_\delta(z)=0$ при $|z|\geqslant\delta$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta(z)dz=1$ и $\omega_\delta(z)$—бесконечно дифференцируемая функция.

Доопределим $g_r(z)$ $(r=1, 2)$ на всю вещественную ось, положив $g_r(z)=0$ при $z\notin[0, 1]$, и положим

$$g_r(z;\delta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_r(y)\omega_\delta(y-z)dy,\quad r=1, 2.$$

Ясно, что $g_r(z;\delta)$—бесконечно дифференцируема по z, причем

$$|g_r(z;\delta)-g_r(z)|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g_r(y)-g_r(z)|\omega_\delta(y-z)dy=$$

$$=\int\limits_{-\delta}^{\delta}|g_r(z+\zeta)-g_r(\zeta)|\omega_\delta(\zeta)d\zeta\leqslant\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g_r(z+\zeta)-g_r(z)|. \qquad (10)$$

Положим теперь

$$\varphi_r(t;\delta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_r(z;\delta)e^{itz}dz=\varphi_r(t)\cdot\chi_\delta(t), \qquad (11)$$

где

$$\chi_\delta(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta(z)e^{itz}dz.$$

Пусть $A(z)$ — функция ограниченной вариации на вещественной прямой и

$$a(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}dA(z).$$

Хорошо известно (см., например, [6], стр. 26), что если $a(t)$ абсолютно непрерывна на R^1 и $a(t)$, $a'(t)$ интегрируемы с квадратом, то

$$\operatorname{Var}(A)\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|a(t)|^2dt+\int_{-\infty}^{\infty}|a'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Положим

$$A(z)=g_1(z;\ \delta)-g_2(z;\ \delta).$$

Тогда

$$a(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\frac{d}{dz}(g_1(z;\ \delta)-g_2(z;\ \delta)dz=t(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))\chi_\delta(t). \tag{13}$$

Отсюда и из соотношений (8) и (11) ясно, что

$$|a(t)|\leqslant\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}[\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2)]\cdot\frac{|t|^{s+2}}{(s+1)!}\cdot|\chi_\delta(t)|. \tag{14}$$

Кроме того, из (9) и (11) находим:

$$|a'(t)|\leqslant\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}[\gamma(m;\ F_1)+\gamma(m;\ F_2)]\times$$

$$\times\left[2\frac{|t|^{s+1}}{s!}|\chi_\delta(t)|+\frac{|t|^{s+2}}{(s+1)!}|\chi_\delta'(t)|\right] \tag{15}$$

С другой стороны,

$$|\varphi_1(t;\delta)-\varphi_2(t,\delta)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|g_1(z;\delta)-g_2(z;\delta)|dz\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g_r(y)|\omega_\delta(y-z)dydz=\sum_{r=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}|g_r(y)|dy= \tag{16}$$

$$=\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}[\gamma(m;\ F_1)+\gamma(m;\ F_2)]$$

и аналогично

$$\left|\frac{d}{dt}(\varphi_1(t;\delta)-\varphi_2(t;\delta)\right|\leqslant\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\times$$

$$\times[\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2)]\cdot\frac{C}{\delta}. \tag{17}$$

Здесь и ниже через C будут обозначаться абсолютные постоянные (не обязательно одни и те же). Легко видеть, что для функции $\chi_\delta(t)$ справедливы неравенства

$$|\chi_\delta(t)|\leqslant\frac{C}{\delta^3\max(1,|t|^2)},\quad |\chi_\delta'(t)|\leqslant\frac{C}{\delta^2\max(1,|t|^2)}. \tag{18}$$

Оценим теперь $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|a(t)|^2dt$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|a'(t)|^2dt$.

Для любого $T>1$ с учетом (13), (14), (16) и (18) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|a(t)|^2dt=\int\limits_{-T}^{T}|a(t)|^2dt+\int\limits_{|t|\geqslant T}|a(t)|^2dt\leqslant\left[\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}(\gamma(m;F_1)+\right.$$

$$\left.+\gamma(m;F_2))\right]^2\cdot\left\{\left(\frac{1}{(s+1)!}\right)^2\cdot\int\limits_{-T}^{T}|t|^{2s+2}dt+2\int\limits_{T}^{\infty}|t\chi_\delta(t)|^2dt\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\cdot(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\right]^2\cdot \tag{19}$$

$$\cdot\left\{\left(\frac{1}{(s+1)!}\right)^2\frac{T^{2s+5}}{2s+5}+\frac{C}{\delta^6T}\right\}.$$

Аналогичным образом с учетом (13), (15), (17) и (18) найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|a'(t)|^2dt\leqslant\left[\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\right]^2\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\frac{1}{s!}\right)^2\frac{T^{2s+3}}{2s+3}+\frac{1}{\delta^2((s+1)!)^2}\cdot\frac{T^{2s+5}}{2s+5}+\frac{C}{\delta^6T}\right\}. \tag{20}$$

Оценки (19) и (20) с учетом неравенства (12) приводят нас к

$$|g_1(z;\delta)-g_2(z;\delta)|\leqslant\operatorname{Var}A(z)\leqslant C\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\times$$

$$\times(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\cdot\frac{1}{\delta}\left[\left(\frac{1}{s!}\right)^2\frac{T^{2s+5}}{2s+5}+\frac{1}{\delta^4 T}\right]^2 \tag{21}$$

Выбирая $T=C\delta^{-\frac{2}{s+3}}(s!)^{\frac{1}{s+3}}$, из (21) легко найдем

$$|g_1(z;\delta)-g_2(z;\delta)|\leqslant C\cdot\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\times \tag{22}$$

$$\times(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\frac{1}{\delta^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Неравенства (22) и (10) показывают, что

$$|g_1(z)-g_2(z)|\leqslant C\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\times \tag{23}$$

$$\times\frac{1}{\delta^3\sqrt{s}}+\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g_1(z+\zeta)-g_1(z)|+\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g_2(z+\zeta)-g_2(z)|.$$

Без особого труда можно убедиться, что

$$\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g_r(z+\zeta)-g_r(z)|\leqslant\rho(z;\delta,m),\quad r=1,2.$$

Подставив последнее неравенство в (23), получим требуемое неравенство (3).

Ереванский институт
народного хозяйства

Ս. Թ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Կարգային վիճակագրությունների համընկնող միջին արժեքներ ունեցող բաշխումների մոտիկության գնահատական

Դիցուք ունենք F_1 և F_2 բաշխումները, որոնց համար միջին արժեքների համապատասխան հաջորդականությունների վերջավոր հատվածները համընկնում են։ Աշխատանքում տրված է այդպիսի բաշխումների մոտիկության գնահատական։ Այս գնահատականից՝ սահմանում, ստացվում է Խուանգի արդյունքը։ Մյուս կողմից այդ գնահատականով կարելի է հետազոտել F_1-ի F_2-ին ձգտելու արագությունը։ Հետևաբար գնահատականը կարող է կիրառվել բնութագրական խնդիրներում կայունություն հետազոտելիս։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. K. Chan*, Amer. Math Monthly, vol. 74, 950—951 (1967). [2] *A. G. Konheim*, Amer. Math. Monthly, vol. 78, 524 (1971). [3] *Y. H. Wang*, Tech. Report No 71—10, Division of Statistics, The Ohio State Univ., 1971. [4] *M. Pollak*, Ann. of Statist., vol. 1, 180—182 (1973). [5] *J. S. Huang*, Ann. Inst. Statist. Math., vol. 27, 87—93 (1975). [6] *J. S. Huang, J. S. Hwang*, Statistical Distribution in Scientific Work, Dordrecht, Holland. 1975. [7] *Я. Гаек, З. Шидак*, Теория ранговых критериев, Наука, М., 1971. [8] *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник*, Независимые и стационарно связанные величины, Наука, М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 513.013; 513.82

МАТЕМАТИКА

С. Х. Арутюнян

О геометрии симметрического пространства нуль-пар проективного пространства RP^n

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 22/VIII 1980)

В работе [1] методами, изложенными в [2, 3], изучалась дифференциально-геометрическая структура, определяемая n-кратным интегралом, зависящим от n параметров, на многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M. Было установлено, что такой интеграл индуцирует на многообразии M псевдориманову связность специального типа, которая оказывается соответствующей псевдоримановой метрике Рашевского [4]. Здесь естественно возникает задача о выделении классов интегралов, определяющих на многообразии двойного расслоения переменных и параметров заданные геометрии Рашевского. Эта задача была решена для псевдоевклидовых пространств Рашевского (кривизна связности равна нулю). Оказалось, что соответствующие интегралы обнаруживают формальное сходство с классическими интегралами Лапласа—Фурье.

В настоящей работе последняя задача решается для некоторого класса простейших пространств—симметрических пространств Рашевского нуль-пар n-мерного вещественного проективного пространства RP^n. Отметим, что симметрические пространства Рашевского с простыми группами движений (к ним относится и упомянутое выше пространство) найдены А. С. Феденко [5]. Одним из преимуществ этого пространства пар точек и гиперплоскостей в RP^n является то, что в отличие от обычного проективного пространства оно является метрическим. Более того, в пространства нуль-пар можно ввести проективно-инвариантную метрику, относительно которой они являются симметрическими пространствами (тензор кривизны ковариантно постоянен). Подробное изучение геометрии этих пространств было проведено Б. А. Розенфельдом [6, 7].

Рассмотрим структурные уравнения псевдориманова пространства Рашевского M [1]:

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k \\ d\omega_i = -\omega^k_i \wedge \omega_k \\ d\omega^i_k = \omega^i_p \wedge \omega^p_k + K^{ir}_{kp} \omega^p \wedge \omega_r \end{cases} \tag{1}$$

где величины K^{ir}_{kp} в совокупности (латинские индексы принимают значения $1, \ldots, n$) образуют тензор кривизны пространства двойного расслоения M. Метрика на M задается однозначно определяемой n-кратным интегралом, зависящим от n параметров, билинейной невырожденной формой $d\varphi = \omega^i \wedge \omega_i$. Определим компоненты тензора кривизны формулой

$$K^{ir}_{pq} = K(\delta^i_p \delta^r_q + \delta^i_q \delta^r_p), \tag{2}$$

где δ^r_s — символ Кронекера, а K — некоторая гладкая функция. Дифференцированием последнего уравнения системы (1) с условием (2) легко можно доказать, что при $n > 1$

$$K = \text{const}.$$

Тензор Риччи при этом равен

$$K^i_p = (n+1) K \delta^i_p.$$

Будем интерпретировать структурные уравнения (1) с условием (2) в некотором проективном пространстве. Для этого нужно установить соответствие между базисными формами в соответствующих системах структурных уравнений. Более точно это означает следующее. Говорят [8], что два пространства аффинной связности изоморфны, если между ними можно установить точечное соответствие, при котором каждому выбору систем отнесения, связанных с точками первого пространства, можно сопоставить такой выбор систем отнесения, связанных с точками второго пространства, что главные и вторичные структурные формы первого пространства равны соответствующим формам второго пространства. Таким образом, ближайшая цель состоит в отыскании пространства, изоморфного пространству, определяемому структурными уравнениями (1) с условием (2).

Рассмотрим структурные уравнения n-мерного вещественного проективного пространства RP^n [8]:

$$\begin{cases} d\theta^i_0 = \theta^i_k \wedge \theta^k_0 + \theta^i_0 \wedge \theta^0_0 \\ d\theta^0_i = \theta^0_k \wedge \theta^k_i + \theta^0_0 \wedge \theta^0_i \\ d\theta^i_k = \theta^i_p \wedge \theta^p_k + \theta^i_0 \wedge \theta^0_k \\ d\theta^0_0 = \theta^0_k \wedge \theta^k_0 \\ \theta^0_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \theta^i_i = 0 \end{cases} \quad . \tag{3}$$

Сравнивая системы структурных уравнений (1) и (3), нетрудно заметить, что искомое соответствие базисных форм можно определить формулами

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\omega^i = \mu\theta_0^i \\
&\omega_i = \nu\theta_i^0 \\
&\omega_k^i = \theta_k^i - \delta_k^i\theta_0^0
\end{aligned}
\right. \tag{4}
$$

где величины μ и ν суть некоторые постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\mu\nu K = 1 \tag{5}$$

Уравнения инфинитезимального перемещения репера $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ в проективном пространстве RP^n можно записать в виде

$$
\left\{
\begin{aligned}
&de_0 = -\theta_0^k e_k - \theta_0^0 e_0 \\
&de_i = -\theta_i^k e_k - \theta_i^0 e_0 .
\end{aligned}
\right. \tag{6}
$$

Рассмотрим в изучаемом проективном пространстве RP^n совокупность пар элементов: первым элементом пары является точка проективного пространства RP^n, а вторым элементом—гиперплоскость. Из соотношений (4) видно, что вполне интегрируемой системе пфаффовых уравнений $\omega^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ отвечает система $\theta_0^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, также вполне интегрируемая. Эта система определяет точку RP^n (соответствующую вектору e_0). Аналогично вполне интегрируема система уравнений $\theta_i^0 = 0$, $i = 1, \ldots, n$, которая определяет в RP^n гиперплоскость (натянутую на векторы $e_1, \ldots, e_n$). Таким образом, структурные уравнения (3) соответствуют пространству нуль-пар проективного пространства RP^n.

В ([1]) было показано, что n-кратный интеграл полубазовой формы

$$\Omega = \lambda\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n,$$

зависящий от n параметров, задает на многообразии двойного расслоения переменных и параметров M структуру псевдориманова пространства Рашевского, если имеет место уравнение

$$d\ln\lambda + \sum_{i=0}^{n} \omega_i^i = \lambda^i\omega_i + \lambda_i\omega^i, \tag{*}$$

причем выполнено условие

$$d(\lambda^i\omega_i) = \omega^i \wedge \omega_i .$$

Нетрудно проверить, что эти соотношения будут выполнены, если величины λ^i и λ_i определить из дифференциальных уравнений

$$
\left\{
\begin{aligned}
&d\lambda^i - \lambda^k\omega_k^i = p\omega^i - \frac{K}{p}\lambda^i\lambda^k\omega_k \\
&d\lambda_i + \lambda_k\omega_i^k = -\frac{K}{q}\lambda_i\lambda_k\omega^k + q\omega_i ,
\end{aligned}
\right. \tag{7}
$$

где величины p и q являются постоянными, удовлетворяющими условию

$$p-q=K(n+1).$$

Тем самым система дифференциальных форм ω^i, ω_i, ω^i_k, удовлетворяющих структурным уравнениям (1) с условием (2), и функций λ^i, λ_i $(i, k=1, \ldots, n)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (7), замкнута. Таким образом, система уравнений (7) определяет семейство n-кратных интегралов, зависящих от n параметров и задающих на многообразии M структуру псевдориманова пространства Рашевского (1)—(2). Это семейство зависит от $2n+1$ произвольных констант (начальных значений) $(\lambda^1)_0, \ldots, (\lambda^n)_0$, $(\lambda_1)_0, \ldots, (\lambda_n)_0$, p.

Перейдем теперь к геометрической интерпретации. Зафиксируем в рассматриваемом пространстве нуль-пар некоторый элемент, т. е. точку и гиперплоскость исходного проективного пространства RP^n. Условие фиксации произвольной точки

$$e=x^i e_i+x^0 e_0 \tag{8}$$

проективного пространства можно представить в виде

$$de=\alpha e. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) легко можно получить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $x^1, \ldots, x^n$:

$$dx^i-x^k(\theta^i_k-\delta^i_k\theta^0_0)=\theta^i_0-x^i x^k\theta^0_k.$$

Эти уравнения, равно как и нижеследующие дифференциальные уравнения инвариантности гиперплоскости пространства RP^n, впервые были указаны Г. Ф. Лаптевым [9].

Рассмотрим теперь в RP^n гиперплоскость

$$u_i x^i+u_0 x^0=0, \tag{10}$$

где через $u_1, \ldots, u_n, u_0$ обозначены тангенциальные координаты этой гиперплоскости. Условие фиксации ее имеет вид

$$d(u_i x^i+u_0 x^0)=\beta(u_i x^i+u_0 x^0). \tag{11}$$

Отсюда нетрудно получить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $u_1, \ldots, u_n$ (координата u_0, как и x^0, используется при нормировке репера). Вместе с уравнениями для $x^1, \ldots, x^n$ получаем систему

$$\begin{cases} dx^i-x^k(\theta^i_k-\delta^i_k\theta^0_0)=\theta^i_0-x^i x^k\theta^0_k \\ du_i+u_k(\theta^k_i-\delta^k_i\theta^0_0)=u_i u_k\theta^k_0-\theta^0_i. \end{cases} \tag{12}$$

Сравнение систем уравнений (12) и (7) показывает, что величины $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ можно связать с $x^1, \ldots, x^n$, $u_1, \ldots, u_n$ соотношениями

$$\begin{cases} \lambda^i = \mu p x^i \\ \lambda_i = -\nu q u_i \\ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Всякий интеграл, определяемый системой (7), задается числами p, q, $p-q=K(n+1)$, точкой и гиперплоскостью в RP^n. В частности, точка и гиперплоскость могут быть инцидентны. Учитывая произвол, с которым интеграл присоединяется к невырожденной билинейной форме $d\varphi = \omega^i \wedge \omega_i$ (подынтегральная форма Ω определяется формой $d\varphi$ с точностью до замены вида $\Omega \to P(x^1, \ldots, x^n)Q(y_1, \ldots, y_n)\Omega$, где $x^1, \ldots, x_n$—переменные интегрирования, $y_1, \ldots, y_n$—параметры ([10])), определяющей на многообразии двойного расслоения M псевдориманову метрику Рашевского, получаем следующий результат.

Теорема. *Каждое решение системы* (7) *задает интеграл, определяющий на многообразии двойного расслоения переменных и параметров M геометрию многообразия нуль-пар n-мерного проективного пространства RP^n. При данных постоянных p, q, удовлетворяющих условию $p-q=K(n+1)$, множество решений системы* (7) *находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством пар „точка-гиперплоскость" в RP^n. В частности, условие*

$$\lambda^i \lambda_i = \frac{pq}{K}$$

выделяет решения, соответствующие которым точки и гиперплоскости инцидентны.

Чтобы установить справедливость последнего утверждения теоремы, достаточно выразить x^i и u_i через λ^i и λ_i и подставить в уравнение гиперплоскости.

Будем теперь искать явные выражения для интегралов, принадлежащих этим классам. Предварительно рассмотрим одномерный случай. Покажем, что семейство интегралов, порождающих геометрию многообразия пар совпадающих точек проективной прямой, определяется интегралом формы вида

$$\Omega = \frac{dx}{(x-y)^\gamma}, \qquad \gamma = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Иначе говоря, любой интеграл семейства отличается от интеграла формы (13) только множителем вида $f(x)g(y)$.

При $n=1$ основные структурные уравнения (1) в предположении (2) принимают вид

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega^1_1 \wedge \omega^1 \\ d\omega_1 = -\omega^1_1 \wedge \omega_1 \\ d\omega^1_1 = 2K\omega^1 \wedge \omega_1. \end{cases} \tag{1'}$$

Заметим, что здесь величина K не обязана быть постоянной. Поэтому потребуем выполнения условия $K=\mathrm{const}$. Нетрудно проверить, что формы ω^1, ω_1, ω^1_1 можно определить соотношениями

$$\left|\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{ae^\alpha}{x-y}\,dx \\ \omega_1 &= \frac{be^{-\alpha}}{x-y}\,dy \\ \omega_1^1 &= d\alpha + \frac{dx+dy}{x-y} \end{aligned}\right. ,$$

т. е. таким образом определенные формы удовлетворяют структурным уравнениям (1′). При этом имеет место равенство

$$abK = -1.$$

Основные уравнения (7) принимают вид:

$$d\lambda^1 - \lambda^1\left(d\alpha + \frac{dx+dy}{x-y}\right) = ap\,\frac{e^\alpha dx}{x-y} - \frac{bK}{p}(\lambda^1)^2\,\frac{e^{-\alpha}dy}{x-y};$$

$$d\lambda_1 + \lambda_1\left(d\alpha + \frac{dx+dy}{x-y}\right) = -\frac{aK}{q}(\lambda_1)^2\,\frac{e^\alpha dx}{x-y} + bq\,\frac{e^{-\alpha}dy}{x-y}.$$

Подставляя решение этой системы

$$\lambda^1 = -ape^\alpha\,\frac{x-c_1}{y-c_1};$$

$$\lambda_1 = bqe^{-\alpha}\,\frac{y-c}{x-c}$$

в уравнение (*), которому удовлетворяет подынтегральная функция λ, после простейших преобразований получим

$$d\ln\lambda + d\alpha = \gamma\,\frac{dy}{y-c_1} + (\gamma-2)\,\frac{dx}{x-c} - (\gamma-1)\,\frac{dx}{x-y} - (\gamma-1)\,\frac{dy}{x-y},$$

где постоянная величина γ определена равенством

$$\gamma = 2-abq.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\lambda = Ae^{-\alpha}\,\frac{(y-c_1)^\gamma(x-c)^{\gamma-2}}{(x-y)^{\gamma-2}}, \quad A=\text{const}.$$

Таким образом, форма Ω определяется соотношением

$$\Omega = \bar{A}\,\frac{(y-c_1)^\gamma(x-c)^{\gamma-2}}{(x-y)^{\gamma-2}}\,dx, \quad \bar{A} = aA.$$

Интегралы, соответствующие парам совпадающих точек, получаются при условии $c_1 = c$. Выберем в качестве $\bar{A}$ величину $\bar{A} = c^{2-2\gamma}$ и устремим $c\to\infty$. Тогда, как легко видеть,

$$\Omega = \frac{dx}{(x-y)^\gamma}.$$

Таким образом, ядра интегралов, определяемых системой (7), обнаруживают формальное сходство с ядрами интегралов Коши.

Перейдем теперь к n-мерному случаю. Покажем, что геометрия пространства пар „точка-гиперплоскость" (точка и гиперплоскость инцидентны) проективного пространства RP^n $(n>1)$ порождается на многообразии двойного расслоения M интегралом формы

$$\Omega = \frac{c\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n}{(x^0 y_0 + x^1 y_1 + \ldots + x^n y_n)^\gamma}, \qquad \gamma = \mathrm{const}, \quad c = \mathrm{const}, \tag{14}$$

причем $x^0 = 1$, $y_n = 1$. Для этого достаточно показать, что компоненты тензора кривизны и метрического тензора расслоенного пространства Рашевского, соответствующего интегралу формы (14), связаны друг с другом зависимостью вида (2) (где в роли части компонент метрического тензора выступают символы Кронекера).

Пусть впредь латинские индексы пробегают значения $1, \ldots, n$, а греческие—$0, 1, \ldots, n-1$. Нетрудно показать ([9]), что часть компонент метрического тензора пространства Рашевского, соответствующего интегралу формы $\Omega = \bar{K} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, связана с коэффициентом $\bar{K}$ соотношением вида

$$g_i^\alpha = \frac{\partial^2 \ln \bar{K}}{\partial x^i \partial y_\alpha}.$$

В случае формы (14) получаем

$$g_i^\alpha = \frac{\gamma (x^\alpha y_i - s\delta_i^\alpha)}{s^2},$$

где обозначено

$$S = x^0 y_0 + x^1 y_1 + \cdots + x^n y_n, \; x^0 = 1, \; y_n = 1.$$

Отсюда нетрудно получить ненулевые компоненты тензора кривизны

$$R_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{g_i^\alpha g_k^\beta + g_i^\beta g_k^\alpha}{\gamma}.$$

Легко проверить, что ковариантная производная этого тензора равна нулю. Наконец, можно показать, что интеграл формы (14) принадлежит семейству, указанному в теореме, и соответствует случаю пар, в которых точка инцидентна гиперплоскости.

Выражаю глубокую благодарность профессору А. М. Васильеву за постановку задачи и внимательное отношение к работе.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Ս. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

RP^n պրոյեկտիվ տարածության զրո-զույգերի սիմետրիկ տարածության երկրաչափության մասին

Հայտնի է, որ n պարամետրերից կախված n-պատիկ ինտեգրալին կարելի է ինվարիանտ ձևով, այսինքն՝ լոկալ կոորդինատական համակարգի ընտրությունից անկախ, միացնել հատուկ տեսքի աֆինական կապակցություն ինտեգրման փոփոխականների և պարամետրերի բազմաձևության վրա, այն է, Ռաշևսկու տարածության պսևդոռիմանյան կապակցություն։ Այստեղ բնականաբար առաջ է գալիս Ռաշևսկու տվյալ տարածության ստրուկտուրան առաջացնող ինտեգրալների դասի առանձնացման խնդիրը։ Պսևդոէվկլիդյան տարածության դեպքում համապատասխան դասի ինտեգրալները ձևականորեն նման են Ֆուրյե-Լապլասի ինտեգրալներին։ Սույն աշխատանքում վերը նշված խնդիրը լուծված է դրոյից տարբեր կորություն ունեցող տարածությունների պարզագույն դասերից մեկի՝ RP^n պրոյեկտիվ տարածության «կետ-հիպերհարթություն» զույգերի սիմետրիկ տարածության համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Х. Арутюнян*, ДАН АрмССР, т. 61, № 1 (1975). [2] *А. М. Васильев*, Мат. сб., т. 70 (112), № 4 (1966). [3] *А. М. Васильев*, Дифференциальная алгебра как аппарат дифференциальной геометрии, Труды геометрического семинара, ВИНИТИ, 1966. [4] *А. С. Феденко*, УМН, т. 12, № 3 (75) (1957). [5] *Б. А. Розенфельд*, Мат. сб., т. 24 (66), № 3 (1949). [6] *Б. А. Розенфельд*, Об унитарных и расслоенных пространствах, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 7 (1949). [7] *Э. Картан*, Пространства аффинной, проективной и конформной связности, Казань, 1962. [8] *Г. Ф. Лаптев*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. мат. о-ва, т. 2 (1953). [9] *С. Х. Арутюнян*, О геометрии n-кратных интегралов, зависящих от параметров, дис., Минск, 1977. [10] *П. К. Рашевский*, Скалярное поле в расслоенном пространстве, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 6 (1948).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 51:621.391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

К параметрам комбинаторной оптимизации и сравнительному анализу проблем формирования образов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 3/X 1980)

1. Сложность заданной проблемы, вообще говоря, зависит от выбранного в рамках класса эквивалентности конкретного представления этой проблемы, что порождает необходимость введения понятия оптимального представления. При выбранных критериях сложности и эквивалентности оптимальным представлением проблемы естественно считать такое, при котором сложность проблемы минимальна относительно всех проблем класса эквивалентности.

С оптимизацией представлений проблем, в частности их адаптацией, тесно связаны вопросы оптимизации разрешающих алгоритмов этих проблем, поскольку конструкции оптимальных алгоритмов могут быть основаны на использовании закономерностей, полученных как в рамках заданного представления, так и в процессе выявления структуры оптимального представления.

При поиске перспективных путей решения вышеуказанных вопросов возникает необходимость в выявлении связей между сложностью проблемы и параметрами, определяющими их конкретное представление. В нижеследующей теореме 1 при определенных допущениях указывается на такую связь между параметрами инициально пустых комбинаторных проблем в форме проблем расшифровки описаний (ПРО) и нижними оценками пиковой (π) или средней (σ) сложностями этих проблем. Как следствие теоремы 1 получены сравнительные характеристики $\pi(\sigma)$-сложностей проблем формирования образов ситуаций (ФОС), эквивалентных по множеству искомых решений, но имеющих либо традиционную постановку, либо порожденную нами из проблемы оптимального комбинаторного управления (ПОУ). Некоторые достаточные условия эквивалентности указанного типа для тех же ФОС приведены в теореме 2.

2.1. В дальнейшем изложении определения и обозначения, введенные в [1] и [2], предполагаются известными.

Теорема 1. *Для произвольной ПРО1* $\langle M, T', \varphi, U, C_0, C_1\rangle$ *и* $u \in U$, *если* $|M|=n$, *мощности* φ*-образов* $|\varphi(u)|$ *и множества возможных решений* $|T'_u|$ *не зависят от* u *и равны* r *и* $\alpha|T'|$ *при* $0<\alpha\leqslant 1$, *соответственно, то* $\pi(\sigma)$*-сложность этой ПРО1 больше*
$$\log \frac{1}{1-\frac{\alpha|T'|-r-1}{2^n}}.$$

2.2. Исходя из *предположения* о том, что упорядочение $\pi(\sigma)$-сложностей проблем типа ПРО1 аналогично упорядочению соответствующим им оценкам теоремы 1, можно сформулировать следующее

Следствие 1.1. *При прочих фиксированных параметрах* $\pi(\sigma)$*-сложность ПРО1 уменьшается с уменьшением числа допустимых решений* $\alpha|T'|$ *или с ростом числа эквивалентных решений* r *и не возрастает с ростом числа элементарных описаний* n.

Последнее утверждение сравнительно неожиданно. Оно следует из неравенства $\alpha|T'|\geqslant r+1$ и может интерпретироваться как невозрастание $\pi(\sigma)$-сложности с ростом мощности описательных средств и неизменной области поиска в множестве решений.

При одновременном изменении параметров ПРО1 справедливо следующее

Следствие 2.1. $\pi(\sigma)$*-сложность ПРО1 уменьшается, если отношение числа недопустимых решений* $(\alpha|T'|-r-1)$ *к общему числу всех решений* 2^n *уменьшается.*

2.3. В ([1]) говорилось о возможности использования в качестве нижних оценок $\pi(\sigma)$-сложностей инициально пустых ПРО минимальных тестов соответствующих этим проблемам таблиц. Развивая это предположение, представляется правдоподобным расширить утверждение теоремы 1 с некоторыми изменениями на ПРО произвольного типа. А именно, полагая, что при переходе от некоторой инициально пустой ПРО к эквивалентной ей инициально полной, отличной от исходной только множеством входных записей, при каждой входной записи происходит лишь дополнительное сужение областей возможных решений, предлагается учесть это сужение посредством введения в оценку сложности теоремы 1 коэффициента γ, $0<\gamma\leqslant 1$, роль и место которого в оценке аналогичны α.

3.1. Используем выводы следствия 2.1 для сравнения (в рамках предположения) $\pi(\sigma)$-сложностей конкретных эквивалентных проблем, имеющих различные представления, а именно, ФОС типов 1—3.

Предварительно определим ряд понятий, конкретизированных в целях наглядности для ПОУ в шахматах (ПОУ^{ш}).

3.2. Произвольные комбинаторные проблемы L_1 и L_2 (в частности, в форме ПРО) назовем *эквивалентными*, если для множеств входных — X_1, выходных — Y_1 записей и отношения φ_1, $\varphi_1 \subseteq X_1 \times Y_1$, в L_1, и соответственно, X_2, Y_2, φ_2 в L_2, заданы операторы кодирования $\xi_1: X_1 \to X_2$, $\xi_2: Y_1 \to Y_2$ и декодирования $\xi_1': X_2 \to X_1$, $\xi_2': Y_2 \to Y_1$ такие, что ξ_1 и ξ_1' определяют взаимно-однозначное соответствие между классами входных записей с одинаковыми φ-образами (классами синонимов в X_1 и X_2) и $\forall x_1 x_2 y_1 y_2$ $(x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ y_1 \in Y_1,\ y_2 \in Y_2)(x_1 \varphi_1 y_1 \leftrightarrow \leftrightarrow \xi_1(x_1)\varphi_2 \xi_2(y_1))\&(x_2 \varphi_2 y_2 \leftrightarrow \xi_1'(x_2)\varphi_1 \xi_2'(y_2))$.

При постановке ФОС 1—3 нами используются формулы языка первого порядка **L** с конечным числом функциональных и предикатных символов. Структура **A*** для **L** определяется естественным образом для конечного универсума **A**, что позволяет каждую формулу языка **L(A*)**, полученного добавлением к **L** имен всех индивидов из **A**, представить в эквивалентной конъюнктивной нормальной форме (к. н. ф.).

В множестве индивидов различаются простые (пешка, клетка) и составные (позиция, стратегия). Для последних вводится понятие разложения на простые. *Полное описание* заданного *индивида* a понимается как множество всех неэквивалентных истинных на разложении a к. н. ф. с хотя бы одним вхождением в них имени из разложения a. Частичное описание a или просто *описание* a есть произвольное подмножество полного. Формула E языка **L(A*)** называется *описанием* в **A***, если E применимо к хотя бы одному индивиду из универсума, а множество всех индивидов, к которым E применимо, называется *E-классом*. Бинарное отношение *выигрышности* θ_1 на множестве всех описаний отражает объективно существующий порядок на множестве индивидов, в частности, ситуаций, относительно их возможностей и связей с целевыми ситуациями ПОУ^{ш}, а также наше наличное знание этого порядка и способность к его конкретному использованию. *$\langle P, F, l\rangle$ стратегии* определяют P-стратегии, концевые вершины которых имеют описания не хуже F относительно упорядочения θ_1, и одновременно это свойство в каждой такой вершине x сохраняется до глубины не менее l посредством навешивания в них дополнительных x-стратегий. $\langle P, F, l\rangle$ стратегии и их объединения описывают знания типа комбинация, форсированный вариант, эндшпильная стратегия и др.

«Знания» типа цели понимаются нами как описания ситуаций, определенным образом связанных с достижением целевых ситуаций исследуемой проблемы. Сами же процедуры, определяющие связь рассматриваемых ситуаций с другими—известной полезности, как описания некоторого смысла этих ситуаций. Произвольное описание E целевых позиций ПОУ^{ш} одного и того же типа называется $\langle E, l^*\rangle$ *целью* или *глобальной целью*, где l^*—константа порядка глубины дерева игры. Пусть F—$\langle F_1, l_1\rangle$ цель, где F—описание ситуаций, а $l_1 \leqslant l^*$; произвольное описание E называется $\langle F, l\rangle$ *целью* или *локальной целью*, если при мощности E-класса m можно указать натуральные числа n и l такие, что $n \leqslant m$ и для каждой позиции P E-класса с частотой n/m существует некоторая $\langle P, F, l\rangle$ стратегия.

Данное определение целей одновременно является некоторой гипотезой о способе их порождения.

Произвольная $\langle F, l\rangle$ цель E называется $\langle F, l\rangle$ *образом позиций*, если описание E является тупиковым, т. е. никакое подмножество дизъюнктов к. н. ф. E или частей этих дизъюнктов свойством быть $\langle F, l\rangle$ целью не обладает.

Определение $\langle F, l\rangle$ образа позиций характеризует шахматные понятия через цели, «в улучшенном» представлении. Данная гипотеза хорошо согласуется с результатами нашего анализа более 200 шахматных понятий и позволяет взглянуть на проблему синтеза образов с позиций, отличных от традиционных.

Исходя из гипотезы о том, что оптимальный алгоритм решения ПОУ^{ш} основан на подпрограммах поиска по каждой заданной позиции оптимальных управлений из тезауруса, содержащего все такие управления (проблема НОПТ в ([4]), в определении *оптимального* $\langle F, l\rangle$ *образа* E^* хотелось бы учесть три не всегда совместимых требования: максимальные мощность и частоту существования $\langle F, l\rangle$ стратегий для E^*-класса позиций при одновременно минимальном времени распознавания принадлежности позиций к этому классу. Поэтому E^* понимается как $\langle F, l\rangle$ образ с максимальной частотой существования $\langle F, l\rangle$ стратегий и такой, что при минимальной длине записи E^*-класс достигает наибольшей мощности.

Отметим, что вышеуказанные типы «знаний» являются либо компонентами, либо характеристиками процесса порождения *закономерностей*—текстов вида $F_1 \Rightarrow F_2$, где F_1, F_2—формулы в определенном расширении языка L такие, что F_1 распознает множество ситуаций, из которых с некоторой частотой достижима цель F_2.

3.3. Пусть теперь M_1 и M_2—заданные множества неэквивалентных к. н. ф. языка **L(A*)**, M—множество описаний ситуаций (в ПОУ^{ш}-позиций), полученных применением к ним M_1. ФОС1 определим как ПРО1 из ([1]) с параметрами $\langle M, Y_1, \varphi_1, U_1, C_0, C_0\rangle$, где Y_1—некоторое подмножество абсолютных пар множеств (ПМ) в M, U_1—инициально пустое множество входных записей, $\varphi \subseteq U_1 \times Y_1$, C_1—элементарные вычисления, а C_0—вопросы к оракулу.

ФОС2 аналогична ФОС1, однако параметр M заменяется на M_2. По существу ФОС2 эквивалентна проблеме расшифровки булевых функций на основе вопросов к оракулу о том, являются ли элементы из M «единицами» или «нулями» искомых функций.

В свою очередь ФОС3 может иметь такие же параметры, как ФОС2, однако множеством входных записей должно быть заданное конечное множество $\langle F, l\rangle$ целей, а отношение φ по каждой цели $\langle F, l\rangle$ должно определять непустое множество оптимальных $\langle F, l\rangle$ образов.

ФОС3 инициально полно ([1]) и по существу является проблемой синтеза закономерностей специального типа. Если в ФОС1—2 основной информацией об искомых образах являются указания о принадлежности или нет отдельных заданных описаний ситуаций к образу, то в ФОС3 в исходную информацию дополнительно включается прицип, по которому ситуации объединяются в один и тот же образ. А именно, их общий смысл, или процедура перехода от ситуаций образа к целевым.

Ниже принимается, что $M_2=M_1$, а выбор M_1 заранее произведен.

3.4. Пусть эквивалентные проблемы ФОС1, 2 и 3 заданы, соответственно, параметрами $\langle M, Y_1, \varphi_1, U_1, C_1, C_0\rangle$, $\langle M_1, Y_2, \varphi_2, U_2, C_1, C_0\rangle$ и $\langle M_1, Y_2, \varphi_3, U_3, C_0, C_1\rangle$, где M получено применением M_1 к множеству позиций **P**, $|M_1|=k$, $|M|=2^k$, при произвольном $u\in U_i$, $i=1, 2, 3$, мощности φ_i-образов и множества возможных решений $|T^{i}_{u}|$ равны r_i и $\alpha_i|Y_i|$, соответственно. При вышеуказанных ограничениях из следствия 2.1 получаем следующее

Следствие 3.1. *При переходе от ФОС1 к эквивалентной ей ФОС2 $\pi(\sigma)$-сложность уменьшится, если отношение числа недопустимых решений для ФОС2 к числу недопустимых решений для ФОС1 будет меньше чем* $2^k/2^{2^k}$.

Можно также утверждать об уменьшении $\pi(\sigma)$-сложности при переходе от ФОС2 к эквивалентной и отличной только инициальной полнотой ФОС3, если принять высказанные выше допущения о возможности расширения теоремы 1 на инициально полные ПРО.

4.1. При поиске оптимальных представлений некоторой проблемы проверка условий эквивалентности может оказаться весьма трудной задачей, во многих случаях обусловленной универсальным характером задания этих условий. Представляет интерес выделение более специфических достаточных условий эквивалентности проблем конкретных типов. Ниже формулируется одно из таких условий для ФОС.

4.2. К. н. ф. E_1, E_2—решения в ФОС2, 3 назовем эквивалентными, если множества ситуаций, выделяемых E_1 и E_2, совпадают. Ниже предполагается, что известны критерии выбора из множеств эквивалентных к. н. ф. тех, которые являются решениями в рассматриваемой проблеме, в частности, оптимальными образами.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Для эквивалентности* $ФОС'_i\langle M', Y', \varphi', U, C_0, C_1\rangle$ *и* $ФОС''_j\langle M'', Y'', \varphi'', U, C_0, C_1\rangle$, $i=1, 2$, *достаточно, чтобы (1) произвольный φ-образ в множестве решений—к. н. ф. вместе с каждой к. н. ф. содержал все ему эквивалентные и (2) для произвольного $u\in U$ множества классов ситуаций, выделяемых φ-образами $\varphi'(u)$ и $\varphi''(u)$, совпадали.*

Теорема 2 сформулирована для случая совпадающих множеств входных записей исследуемых проблем. Однако ее нетрудно обобщить для произвольных множеств входных записей при дополнительном условии, что существует взаимно-однозначное соответствие между классами синонимов $ФОС'_i$ и $ФОС''_j$ и оно известно. Ясно, что при этом предположении теорема 2 будет справедлива и для ФОС3.

5.1. В ([3]) высказано предположение о том, что исчисление инвариантов $\bar{И}$ для исходного исчисления И „может оказаться" по существу „гораздо мощнее чем И, но иметь меньшую неопределенность“. Распознавание выводимости в исчислениях можно рассматривать, в частности, как процесс синтеза закономерностей вида „$F_1 \Rightarrow F_2$“, где F_1—доказуемая, а F_2—ранее доказанная формулы. В свою очередь ФОСЗ, как это уже отмечалось выше, по существу также совпадает с проблемой синтеза закономерностей. Исходя из этой связи, а также принимая, что „усиление“ в исчислениях соответствует уменьшению $\pi(\vartheta)$-сложности в ФОСЗ, интересно обнаружить вышеуказанный эффект „усиления“ при переходе от исходного исчисления к исчислению инвариантов посредством перехода от исходной ФОСЗ к некоторой другой ФОСЗ, удовлетворяющей требованиям, аналогичным требованиям к исчислению инвариантов.

Пусть $L_1 = \langle M_1^1, Y_2^1, \varphi_3^1, U_3^1, C_0, C_1 \rangle$ и $L_2 = \langle M_1^2, Y_2^2, \varphi_3^2, U_3^2, C_0, C_1 \rangle$ —проблемы типа ФОСЗ со следующими дополнительными к рассмотренным в п. 3. 4 ограничениями: $|M_1^1| = |M_1^2|$, $U_3^1 = U_3^2 = U_3$, $r_3^1 = r_3^2 = r$, $\alpha_3^1 = \alpha_3^2 = \alpha$. Пусть также φ_3^1 и φ_3^2 определяют некоторые разбиения множеств входных и выходных записей, при которых все элементы произвольного φ-образа выделяют одно и то же для этого образа множество позиций; произвольный класс синонимов A в L_1 разбивается на $m > 1$ классов синонимов $a_1, \ldots, a_m$ в L_2, а соответствующий A класс позиций B—на классы $b_1, \ldots, b_m$ в L_2. Тем самым, если $u \in A$, а соответствующее u решение в L_1 выделяет множество позиций B, то это же множество позиций может быть выделено посредством решения L_2 для входных записей $u_1, \ldots, u_m$, соответственно из $a_1, \ldots, a_m$. Можно сказать, что каждый исследуемый класс позиций кодируется в L_2 посредством m кодов, вместо одного в L_1. Именно в этом смысле отношение L_1 к L_2 можно считать аналогом отношения исчисления инвариантов к исходному.

Из указанных ограничений на L_1 и L_2 следует, что $|Y_2^2| = m|Y_2^1|$, откуда, допуская распространение оценки теоремы 1 на инициально полные ПРО, получаем, что $\pi(\vartheta)$-сложность L_1 меньше $\pi(\vartheta)$-сложности L_2. Представляется естественным отнести это уменьшение за счет использования в L_1 знаний о том, что классы решений в L_2 в определенном смысле эквивалентны и потому могут рассматриваться совместно или что единичные решения в L_1 могут быть инвариантами для классов решений в L_2. В то же время этот факт сам по себе не обеспечивает уменьшение $\pi(\vartheta)$-сложности. Используя ту же оценку теоремы 1, легко усмотреть возможность и противоположного эффекта при тех же условиях кодирования, но измененных параметрах $|M_1^2|$, r_3^2, α_3^2.

Автор признателен Г. Б. Маранджяну за полезные замечания по работе.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Կոմբինատոր օպտիմիզացման պարամետրերի և պատկերների ձևավորման պրոբլեմների համեմատական անալիզի մասին

Հաստատված է որոշակի կապ նկարագրությունների դեկոդավորման ինիցիալ դատարկ մուտքերով ենթադասի պրոբլեմների պարամետրերի և ժամանակային բարդության ներքին գնահատականների միջև։ Որպես հետևանք ստացված են համեմատական բնութագրեր տրադիցիոն և օպտիմալ կոմբինատոր ղեկավարման խնդրից բխած պատկերների ձևավորման պրոբլեմների համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. М. Погосян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 1 (1979). [2] *Э. М. Погосян*, ДАН АрмССР, т. 70, № 2 (1980). [3] *С. Ю. Маслов*, Кибернетика, № 2, 1979. [4] *Э. М. Погосян*, Тезисы Всесоюзной конференции «Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта», Паланга, 3—5 сентября, 1980.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О множествах единственности для полных ортонормированных систем и интегралов Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 27/XI 1980)

В настоящей работе исследуется вопрос о существовании множеств единственности, имеющих сколь угодно малую положительную меру, как для любых полных ортонормированных систем, так и для некоторых интегральных преобразований.

Следуя работам ([1,2]), введем следующее

Определение 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полная в $L_2[0, 1]$ ортонормированная система. Множество $E\subset[0, 1]$ называется множеством единственности системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если из условий $f(x)=0$ при $x\in E$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\int f\varphi_n|^p<+\infty$ для некоторого $0<p<2$ следует, что $f(x)$ обращается в нуль почти всюду на $[0,1]$.

Аналогично можно ввести определение множеств единственности и для интегральных преобразований.

Определение 2. Пусть ядро $K(x, t)$, $0\leqslant x$, $t<+\infty$, такое, что для любой функции

$$\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l{\cdot}i{\cdot}m}}\int\limits_0^{\sigma}K(x, t)f(t)dt=\hat{f}(x)^*, \text{ где } \hat{f}(x)\in L_2(0, +\infty), \tag{1}$$

$$\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2^{**} \tag{2}$$

множество E, $E\subset(0, +\infty)$ называется множеством единственности для ядра $K(x, t)$, если из условий $f(x)=0$ при $x\in E$ и $\hat{f}(x)\in L_p(0,+\infty)$ для некоторого $1\leqslant p<2$ следует, что $f(x)=0$ почти всюду на $[0, +\infty)$.

Верны следующие теоремы.

---

* $\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l{\cdot}i{\cdot}m}}$ обозначает предел в смысле сходимости в $L_2(0, +\infty)$ при $\sigma\to\infty$.

** $\|f\|_p=\left(\int\limits_0^{\infty}|f(x)|^pdx\right)^{1/p}$.

Теорема 1. *Для любой полной ортонормированной в $L_2[0,1]$ системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset[0,1]$, $\mu E<\varepsilon$, которое является множеством единственности для $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.*

Теорема 2. *Пусть ядро $K(x,t)$ удовлетворяет условиям* (1), (2) *и, кроме того, ограничено в любой полосе* $(0,+\infty)\times(0,a)$, т. е. *для любого $a>0$ существует $M(a)$ такое, что*

$$|K(x,t)|<M(a)<\infty, \quad \text{когда} \quad 0\leqslant t\leqslant a, \quad 0\leqslant x<+\infty. \tag{3}$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset(0,+\infty)$, $\mu E<\varepsilon$, которое является множеством единственности для ядра $K(x,t)$.

Теорема 1 является обобщением теоремы Голзани ([1]), который аналогичный результат установил в том частном случае, когда функции системы $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно ограничены.

Из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset(-\infty,+\infty)$, $\mu E<\varepsilon$, которое обладает следующими свойствами:*

1) *если* $f\in L_2(-\infty,+\infty)$, $f(x)=0$ *при* $x\in E$ *и* $\hat{f}(x)=$ $=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt\in L_p(-\infty,+\infty)$ *для некоторого* p, $1\leqslant p<2$, *то* $f(x)=0$ *почти всюду на* $(-\infty,+\infty)$;

2) *если* $f(x)\in L_p(-\infty,+\infty)\cap L_2(-\infty,+\infty)$ *для некоторого* p, $1\leqslant p<2$ *и* $\hat{f}(x)=0$ *при* $x\in E$, *то* $f(x)=0$ *почти всюду на* $(-\infty,+\infty)$.

Теоремы 1 и 2 доказываются, соответственно, при помощи следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ произвольная полная в $L_2(0,1)$ ортонормированная система. Тогда для любых $\varepsilon>0$, $q>2$ и $(0,a)\subset\subset(0,1)$ существуют измеримое множество $E_1\subset(0,a)$ и ограниченная функция $f(x)$ такие, что:*

1) $f(x)=0$, *когда* $x\in(a,1)$;

2) $f(x)=1$, *когда* $x\in(0,a)\setminus E_1$, $\mu E_1<\varepsilon$;

3) $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx\right|^q\right\}^{1/q}<\varepsilon.$

Лемма 2. *Пусть $K(x,t)$ ядро, удовлетворяющее условиям* (1), (2), (3). *Тогда для любых $a\in(0,+\infty)$, $a>\varepsilon>0$ и $q>2$ существуют функция $f(x)\in L_2(0,+\infty)$ и множество $E_1\subset(0,a)$ такие, что:*

1) $f(x)=0$, $x\in(a,+\infty)$;

2) $f(x)=1, \quad x\in(0, a)\setminus E_1, \quad \mu E_1<\varepsilon$;

3) $\|\hat{f}(x)\|_q<\varepsilon$.

Эти леммы доказываются путем использования лемм А. А. Талаляна, установленных в работах ([3,4]) (см. ([3]), лемма 2, а также ([4]), лемма 1 и ([5]), леммы 2.11.3, 2.11.4). Здесь приводится доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 1, а также леммы 1 аналогично нижеприведенным доказательствам теоремы 2 и леммы 2.

Лемма 2 доказывается при помощи следующей леммы, доказательство которой фактически приведено в ([4]) (см. лемму 1).

Лемма 3. *Пусть* $K(x, t)$ *ядро, удовлетворяющее условиям* (1), (2), $[a, b]\subset(0, +\infty)$ и $A\subset(0, +\infty)$ *измеримые множества конечной меры. Тогда для любых* $1>\varepsilon>0$, $\alpha>0$ и $\beta>0$ *существует множество* $E\subset[a, b]$, $\mu E=\varepsilon(b-a)$, *такое, что* $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)-\frac{1}{\varepsilon}\chi_E(x)$ *удовлетворяет следующему условию:*

$$\mu\{x\in A:|\hat{f}(x)|>\alpha\}<\beta.$$

Доказательство леммы 2. Интервал $(0, a)$ разделим на n равных частей $I_1, I_2, \ldots, I_n$ (n будет выбрано несколько позже). Из леммы 3 вытекает существование функции $f(x)$ такой, что:

$$f_1(x)=0, \quad x\notin I_1; \tag{4}$$

$$f_1(x)=1, \quad x\in I_1\setminus E_1, \ \mu E_1=\frac{\varepsilon}{n}; \tag{5}$$

$$\mu\left\{x\in[0, 1]:|\hat{f}_1(x)|>\frac{\gamma}{2}\right\}<\frac{\varepsilon_1}{2}; \tag{6}$$

$$\|f_1\|_2^2=\|\hat{f}_1\|_2^2<\frac{2a^2}{\varepsilon n}. \tag{7}$$

Произвольные постоянные $\gamma>0$ и $\varepsilon_1>0$ будут выбраны позже.

Допустим, что функции $f_1, \ldots, f_{\nu-1}$ и множества $B_1=[0, 1]\subset\subset B_2\subset\ldots\subset B_{\nu-1}$, $(\nu<n)$ уже построены. Существует множество B_ν такое, что

$$\left|\sum_{l=1}^{\nu-1}\hat{f}_l(x)\right|<\frac{\gamma}{2^\nu}, \quad x\in B_\nu, \quad \mu B_\nu<+\infty. \tag{8}$$

Из леммы 3 и (8) следует существование функции $f_\nu(x)$ такой, что:

$$f_\nu(x)=0, \quad x\notin I_\nu; \tag{9}$$

$$f_\nu(x)=1, \quad x\in I_\nu\setminus E_\nu, \ \mu E_\nu=\frac{\varepsilon}{n}; \tag{10}$$

$$\mu\left\{x\in B_\nu:|\hat{f}_\nu(x)|>\frac{\gamma}{2^\nu}\right\}<\frac{\varepsilon_1}{2^\nu}; \tag{11}$$

$$\|\hat{f}_\nu\|_2^2 < \frac{2a^2}{\varepsilon n}. \tag{12}$$

Положим $f(x)=\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)$. Из (4), (5), (9), (10) следует 1) и 2) леммы. Покажем, что числа n, γ и ε можно выбрать такими, что $\|\hat{f}\|_q < \varepsilon$.

Очевидно, что (см. (1), (3))

$$|\hat{f}_\nu(x)| < \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} \quad \textit{для любых} \quad x \in (0, +\infty),\ 1 \leqslant \nu < n. \tag{13}$$

Поэтому (см. (8))

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)\right| < \frac{\gamma}{2^n} + \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n}, \quad x \in B_n. \tag{14}$$

Обозначим через $A_\nu = \left\{x \in B_\nu : |\hat{f}_\nu(x)| > \frac{\gamma}{2^\nu}\right\}$. Пусть $x \in (B_\nu \setminus B_{\nu-1}) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ $1 < \nu \leqslant n$. Тогда из (8), (11) и (13) вытекает

$$|\hat{f}(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i(x)\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{\nu-2} \hat{f}_i(x)\right| + |\hat{f}_{\nu-1}(x)| + \sum_{i=\nu}^{n} |f_i(x)| <$$
$$< \frac{\gamma}{2^{\nu-1}} + \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \sum_{i=\nu}^{n} \frac{\gamma}{2^i} < \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \gamma. \tag{15}$$

Когда $x \in B_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, имеем

$$|\hat{f}(x)| \leqslant |\hat{f}_1(x)| + \sum_{i=2}^{n} \left|\hat{f}_i(x)\right| < \frac{\gamma}{2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\gamma}{2^i} < \gamma. \tag{16}$$

Из (14), (15), (16) вытекает

$$|\hat{f}(x)| < \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \gamma \quad \text{при} \quad x \notin \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu, \tag{17}$$

причем

$$\mu \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu < \varepsilon_1. \tag{18}$$

Имеем (см. 13), (17), (18) и (12))

$$\int_0^{+\infty} |\hat{f}(x)|^q dx = \int_{\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu} |\hat{f}(x)|^q dx + \int_{\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\right)^c} |\hat{f}(x)|^2 \cdot |\hat{f}(x)|^{q-2} dx \leqslant \left(\frac{M(a)a^2}{\varepsilon}\right)^q \cdot \varepsilon_1 +$$
$$+ \left(\frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \gamma\right)^{q-2} \int_{\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\right)^c} |\hat{f}(x)|^2 dx \leqslant \left(\frac{M(a)a^2}{\varepsilon}\right)^q \varepsilon_1 + \left(\frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \gamma\right)^{q-2} \frac{2a^2}{\varepsilon}. \tag{19}$$

Из того, что $q > 2$, следует, что n можно выбрать настолько большим, а γ и ε_1 настолько малыми, чтобы последнее выражение было меньше, чем ε^q. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{x_k\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно в $(0, +\infty)$, $p_n \uparrow 2$, $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = 1$ и $\varepsilon_k^n > 0$ такие, что $\sum_{n,k=1}^{\infty} \varepsilon_k^n < \varepsilon$. Тогда из леммы 2 вытекает существование функций $\varphi_k^n(x) \in L_2(0, +\infty)$ таких, что:

1) $\varphi_k^n(x) = 0, \quad x \notin (0, x_k)$;

2) $\varphi_k^n(x) = 1, \quad x \in (0, x_k) \setminus E_k^n, \quad \mu E_k^n \leqslant \varepsilon_k^n$;

3) $\|\hat{\varphi}_k^n\|_{q_n} < \varepsilon_k^n$.

Покажем, что $E = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} E_k^n$ — множество единственности (ясно, что $\mu E < \varepsilon$).

Пусть $f(x) = 0$ на E и $\hat{f}(x) \in L_p(0, +\infty)$ для некоторого $1 \leqslant p < 2$. Для достаточно больших n (когда $p_n > p$) имеем

$$\left| \int_0^{x_k} f(x) dx \right| = \left| \int_0^{+\infty} f(x) \varphi_k^n(x) dx \right| = \left| \int_0^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{\varphi}_k^n(x) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\hat{f}\|_{p_n} \cdot \|\hat{\varphi}_k^n\|_{q_n} < (\|\hat{f}\|_p^p + \|\hat{f}\|_2^2)^{1/p_n} \varepsilon_k^n.$$

Из того, что $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_k^n = 0$, следует:

$$\left| \int_0^{x_k} f(x) dx \right| = 0.$$

Отсюда следует, что $f(x) = 0$. Теорема 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Լրիվ օրթոնորմալ համակարգերի և Ֆուրյեի ինտեգրալների միակության բազմությունների մասին

Աշխատանքում ապացուցված են.

Թեորեմ 1. Կամայական $\{\varphi_n\}$ լրիվ օրթոնորմալ համակարգի և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի չափելի բազմություն E, $\mu E < \varepsilon$, այնպիսին, որ $f(x)=0$ E-ի վրա և $\sum_{n=1}^{\infty}|\int f\varphi_n|^p<+\infty$ որևէ $p<2$ համար պայմաններից հետևում է, որ $f(x)=0$ հ. ա.:

Թեորեմ 2. Դիցուք $K(x, t)$-ն այնպիսի կորիզ է, որ կամայական $f(x)\in L_2(0, +\infty)$ ֆունկցիայի և կամայական $a>0$ թվի համար

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a K(x, t)f(t)dt=\hat{f}(x)$$

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_0^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2dx$$

$$|K(x, t)|<M(a)<+\infty \text{ երբ } 0\leqslant x<+\infty,\ 0\leqslant t\leqslant a.$$

Այդ դեպքում կամայական $\varepsilon>0$ համար գոյություն ունի $E\subset(0, +\infty)$ $\mu E<\varepsilon$, որն օժտված է հետևյալ հատկությամբ. եթե $f(x)=0$ E-ի վրա և $f(x)\in L_p(0, +\infty)$ որևէ $p<2$ համար, ապա՝ $f(x)=0$ հ. ա.:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. Golzani*, Bolletino U.M.I. vol. 5, 16—B(1979). [2] *Y. Katznelson*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 70 (1964). [3] *А. А. Талалян*, УМН, т. 15. № 5 (95) (1960). [4] *А. А. Талалян*, Мат. сб., т. 53 (95), № 3 (1961). [5] *Г. Алексич*, Проблемы сходимости ортогональных рядов, ИЛ, М., 1963

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 62—501 : 519.217

МАТЕМАТИКА

В. К. Брутян

К задаче синтеза оптимальных линейных марковских управляемых систем методом канонических разложений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 2/XII 1980)

Рассматривается линейная марковская управляемая система (МУС), поведение которой описывается на интервале времени $I_t \triangleq [t_0, T]$ векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)u(t) + G(t)\xi(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

с линейным наблюдением

$$y(t) = H(t)x(t) + \eta(t),$$

где x, u и y—векторы состояния, управления и наблюдения размерами n, m и k соответственно, $\xi(t)$ и $\eta(t)$—случайные процессы типа нормального белого шума с математическими ожиданиями $m_\xi(t)$ и $m_\eta(t)$ и корреляционными функциями

$$K_{\xi\xi}(t, \tau) = S_{\xi\xi}(t)\delta(t-\tau), \quad K_{\eta\eta}(t, \tau) = S_{\eta\eta}(t)\delta(t-\tau),$$

где $S_{\xi\xi}(t)$ и $S_{\eta\eta}(t)$—положительно определенные непрерывные для всех $t \in I_t$ матрицы интенсивности нормальных белых шумов, $\delta(\cdot)$—дельта-функция Дирака. A, D, G и H—ограниченные и непрерывные на интервале I_t матрицы соответствующих размеров, причем элементы этих матриц не зависят от x и u. Предполагается, что процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются независимыми друг от друга шумами, а начальное состояние x_0 системы (1) есть вектор, компоненты которого распределены по нормальному закону с числовыми характеристиками $m_0 = M\{x(t_0)\}$, $\Gamma_0 = M\{(x_0 - m_0)'(x_0 - m_0)\}$, где M—символ математического ожидания, „′“ знак транспонирования.

Пусть в МУС (1) синтез закона управления, который, разумеется, является функцией наблюдения $u = u(t, y(\tau) : \tau \in [t_0, t))$, предусматривает задание критерия качества в виде следующего функционала:

$$J(x, u, t) = x_T'\Gamma_T x_T + \int_{t_0}^{T} \{[x'B(t)x + u'E(t)u]/y(\tau), \quad \tau \leqslant t\} dt, \tag{2}$$

что подлежит минимизации. Здесь Γ_T и $B(t)$ положительно полуопределенные матрицы, $E(t)$—положительно определенная матрица. Кроме того, матрицы $B(t)$ и $E(t)$ непрерывные на интервале I_t.

В отличие от работ [1-3], в данной статье функционал (2) рассматривается как случайная величина и числовые характеристики этой случайной величины исследуются с точки зрения задачи синтеза МУС. Показывается, что эта задача получает значительное упрощение с применением метода канонических разложений, разработанного В. С. Пугачевым [4], идея которого состоит в представлении случайной функции в виде суммы элементарных функций $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i(t)$, $t \in I_t$. Здесь скалярные случайные величины x_i являются коэффициентами канонического разложения, неслучайные вектор-функции $z_i(t)$—координатными функциями разложения. Они удовлетворяют соотношению

$$x'_T \Gamma_T z_{Ti} + \int_{t_0}^{T} x'(t) B(t) z_i(t) dt = x_i \tag{4}$$

и условию ортогональности

$$z'_{Ti} \Gamma_T z_{Tj} + \int_{t_0}^{T} z'_i(t) B(t) z_j(t) dt = \delta_{ij} \tag{5}$$

для всех i, $j \in [1, 2, \ldots]$. Предполагается также, что коэффициенты канонического разложения x_i взаимно дельта-коррелированы

$$M\{(x_i - m_i)(x_j - m_j)/y\} = s_i \delta_{ij}. \tag{6}$$

Здесь s_i—дисперсия случайной величины x_i, а условное математическое ожидание для x_i определяется соотношением

$$m_i = \hat{x}'_T \Gamma_T z_{Ti} + \int_{t_0}^{T} \hat{x}'(t) B(t) z_i(t) dt, \tag{7}$$

где

$$\hat{x}(t) = M\{x(t)/y(\tau), \quad \tau \leqslant t\}. \tag{8}$$

Заметим, что

а) Поскольку начальное значение x_0 нормально распределено, решение системы (1) является марковским процессом, условное математическое ожидание и корреляционная функция которого удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям [1-3,5]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + D(t)u(t) + K(t)[y(t) - H(t)\hat{x}(t)], \quad K(t) \triangleq R(t)H'(t)S_{\eta\eta}^{-1}(t), \tag{9}$$

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t) + R(t)A'(t) + G'(t)S_{\xi\xi}(t)G(t) - K'(t)S_{\eta\eta}(t)K(t) \tag{10}$$

при начальных условиях $\hat{x}(t_0)=\hat{x}_0$, $R(t_0)=R_0$ соответственно.

б) Решение уравнения (10) может быть представлено в виде [6]

$$R(t)=W(t)\left[R_0+\int_{t_0}^{t}(W^{-1}(s))'H'(s)S_{\eta\eta}(s)H(s)(W^{-1}(s))ds\right]W'(t),$$

где $W(t)$—матрица фундаментальных решений однородного уравнения

$$\dot{\hat{x}}(t)=[A(t)-D(t)C(t)]\hat{x}(t).$$

Необходимым и достаточным условием выполнения равенства (6) является условие

$$s_i z_i(t)=R(t,T)\Gamma_T z_{Ti}+\int_{t_0}^{T}R(t,\tau)B(\tau)z_i(\tau)d\tau,\quad t\in I_t, \tag{11}$$

где

$$R(t,\tau)=M\{[x(t)-\hat{x}(t)]'[x(\tau)-\hat{x}(\tau)]/y(\tau),\ \tau\leqslant t\},\quad t,\ \tau\in I_t.$$

При сделанных допущениях случайная величина J почти всюду ограничена. Из этого следует, что ряд (4) сходится в интегрально квадратичном смысле (т. е. ряд сходится в метрике пространства L_2— пространства функций с суммируемым квадратом [7]):

$$J=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2+\int_{t_0}^{T}u'(t)E(t)u(t)dt.$$

Условные характеристические функции для каждого члена $\dot{x}_i^2$ имеют вид [8,9]

$$\varphi_{\hat{x}_i^2}(j\omega)=M\{\exp(j\omega x^2)\}=\frac{1}{\sqrt{1-2j\omega S_i}}\exp\left(\frac{j\omega m_i^2}{1-2j\omega S_i}\right).$$

Тогда условная характеристическая функция для функционала J будет

$$\varphi_J(j\omega)=M\{\exp(j\omega J)\}=\left(\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\infty}\sqrt{1-2j\omega S_i}}\right)\times$$

$$\times\left\{\exp\left\{j\omega\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{m_i^2}{1-2j\omega S_i}+\int_{t_0}^{T}u'(t)E(t)u(t)dt\right]\right\}\right\}. \tag{12}$$

Здесь целесообразно рассмотреть условные семиинварианты $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$, ..., $\hat{C}_k$, определяемые разложением [9–12]

$$\hat{\varkappa}_J(\lambda) \triangleq \ln \varphi_J(j\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{(j\omega)^k}{k!}, \qquad \omega = \exp \lambda,$$

где k-й условный семиинвариант случайной величины J есть k-ая производная функции $\hat{\varkappa}_J(\lambda)$, вычисленная в точке $\lambda=0$

$$C_k = \frac{d^k \hat{\varkappa}_J(\lambda)}{d\lambda^k} / \lambda = 0.$$

Покажем, что числовые характеристики случайной функции J могут быть выражены через семиинварианты. Используя формулу (12), получим, что первые два условных семиинварианта функционала J имеют вид

$$\hat{C}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (s_i + m_i^2) + \int_{t_0}^{T} u'(t) E(t) u(t) dt,$$

$$\hat{C}_2 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} s_i (s_i + 2m_i^2).$$

Следует заметить, что при синтезе МУС на первый взгляд не очень удобно пользоваться семиинвариантами, поскольку они не выражаются через переменные системы. Чтобы преодолеть эту трудность, введем вспомогательную функцию $\bar{R}(t, \tau)$, определяемую следующим образом:

$$\bar{R}(t, \tau) \triangleq R(t, T) \Gamma_T R(T, \tau) + \int_{t_0}^{T} R(t, \sigma) B(\sigma) R(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Используя формулы (5) и (11), получим

$$\bar{R}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 z_i(t) z_i(\tau).$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 = \text{След} \left[\Gamma_T \bar{R}_T + \int_{t_0}^{T} B(t)\, \bar{R}(t, t)\, dt \right]. \tag{13}$$

Из выражений (7), (8) и (13) получим соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_i^2 s_i = \hat{x}'_T \Gamma_T R_T \Gamma_T \hat{x}_T + \hat{x}'_T \Gamma_T \Phi_T + \Phi'_T \Gamma_T \hat{x}_T + \int_{t_0}^{T} \hat{x}'(t) B(t) \Phi(t) dt,$$

где

$$\Phi(t) \triangleq \int\limits_{t_0}^{T} R(t,\tau) B(\tau) \hat{x}(\tau) d\tau, \qquad (14)$$

причем $\Phi(t_0)=0$.

Условные семиинварианты запишем в виде

$$\hat{C}_1 = \hat{x}'_T \Gamma_T \hat{x} + \int\limits_{t_0}^{T} [\hat{x}'(t) B(t) \hat{x}(t) + u'(t) E(t) u(t)] dt +$$

$$+ \text{След} \left[\Gamma_T R_T + \int\limits_{t_0}^{T} B(t) R(t, t) dt \right],$$

$$\hat{C}_2 = 4 \left[\hat{x}'_T \Gamma_T R_T \Gamma_T \hat{x}_T + 2 \hat{x}'_T \Gamma_T \Phi_T + \int\limits_{t_0}^{T} \hat{x}'(t) B(t) \Phi(t) dt \right] +$$

$$+ 2\,\text{След} \left[\Gamma_T \tilde{R}_T + \int\limits_{t_0}^{T} B(t) \tilde{R}(t, t) dt \right]. \qquad (15)$$

Таким образом, условные семиинварианты выражаются через оценки марковского процесса $\hat{x}(t)$ и вспомогательную функцию $\tilde{R}(t, \tau)$. Условные семиинварианты и условные моменты случайной величины J связаны между собой соотношениями ([10–12])

$$C_1 = \hat{C}_1, \quad C_2 = \hat{C}_2 - \hat{C}_1^2. \qquad (16)$$

Выбранное число первых семиинвариантов несет в себе столько же информации, сколько и первые два момента, необходимые для описания МУС.

Полученные результаты в поставленной задаче линейного синтеза МУС можно применить следующим образом. С учетом соотношений (16) имеем критерий

$$\min \{\hat{C}_1 + \alpha(\hat{C}_2 - \hat{C}_1^2)\}, \qquad (17)$$

где α—весовой коэффициент. При $\alpha=0$ функционал (17) становится традиционным. При $\alpha \neq 0$ получается новый класс задач синтеза МУС, структура и решение которого, как показано ниже, сводится к известному классу ([1–3,6]). В (17), подставляя $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ из формул (15), учитывая уравнения (9), (10) и опуская $\hat{C}_1^2$, получим расширенный функционал

$$\min_u \left\{ \hat{x}'_T \Gamma_T \hat{x}_T + \int_{t_0}^{T} [\hat{x}'(t)B(t)\hat{x}(t) + u'(t)E(t)u(t)]dt + \right.$$

$$\left. + 4\alpha\hat{x}'_T\Gamma_T(R_T\Gamma_T\hat{x}_T + \hat{l}_T) + 4\alpha \int_{t_0}^{T} \hat{x}'(t)B(t)\hat{l}(t)dt \right\}, \tag{18}$$

где

$$\dot{l}(t) = [A(t) - K(t)H(t)]\hat{l} + R(t)B(t)\hat{x}, \quad \hat{l}(t_0) = 0.$$

После введения расширенных векторов и матриц

$$\bar{x}(t) \triangleq \begin{vmatrix} \hat{x}(t) \\ l(t) \end{vmatrix}, \; \bar{B}(t) \triangleq \begin{vmatrix} B(t) & 2\alpha B(t) \\ 2\alpha B(t) & 0 \end{vmatrix}, \; \bar{D}(t) \triangleq \begin{vmatrix} D(t) \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\bar{u}(t) \triangleq [u(t) \;\; 0]', \; \bar{E}(t) \triangleq [E(t) \;\; 0]',$$

$$\bar{A}(t) \triangleq \begin{vmatrix} A(t) & 0 \\ R(t)B(t) & A(t) - K(t)H(t) \end{vmatrix}, \; \bar{\Gamma}_T \triangleq \begin{vmatrix} \Gamma_T + 4\alpha\Gamma'_T R_T \Gamma_T & 4\alpha\Gamma \\ 4\alpha\Gamma_T & 0 \end{vmatrix}$$

критерий (18) примет вид

$$\min_u \left\{ \bar{x}'_T \bar{\Gamma}_T \bar{x}_T + \int_{t_0}^{T} [\bar{x}'(t)\bar{B}(t)\bar{x}(t) + \bar{u}'(t)\bar{E}(t)\bar{u}(t)]dt \right\},$$

который относится к расширенной системе

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{D}(t)\bar{u}(t), \quad \bar{x}(t_0) \triangleq [x_0 \;\; 0]'.$$

Решение расширенной задачи сводится к известному закону управления

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = -\bar{E}^{-1}(t)\bar{D}'(t)\bar{\Gamma}(t)\bar{x}(t),$$

где коэффициент усиления $\bar{\Gamma}(t)$ есть матрица размера $2n \times 2n$ и является на интервале времени I_t решением уравнения Риккати

$$\dot{\bar{\Gamma}} = -\bar{\Gamma}\bar{A} - \bar{A}'\bar{\Gamma} - \bar{B} + \bar{\Gamma}\bar{D}\bar{E}^{-1}\bar{D}'\bar{\Gamma}$$

с граничным условием $\bar{\Gamma}(T) = \bar{\Gamma}_T$.

Ереванский институт
народного хозяйства

Վ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ

Մարկովյան ղեկավարելի համակարգերի կանոնական վերլուծման մեթոդով օպտիմալ սինթեզման խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկվում է մարկովյան ղեկավարելի համակարգի գծային սինթեզման խնդիրը։ Ի տարբերություն գոյություն ունեցող աշխատանքների, այստեղ ենթադրվում է, որ քառակուսային ֆունկցիոնալը իրենից ներկայացնում է պատահական մեծություն և հետազոտվում է այդ մեծության թվային բնութագրերը մարկովյան ղեկավարելի համակարգերի գծային սինթեզման խնդրի տեսանկյունից։ Ապացուցված է, որ սինթեզման խնդրի լուծումը զգալիորեն պարզեցվում է կանոնական վերլուծման մեթոդի կիրառմամբ։ Ղեկավարելի համակարգի փոփոխականները և պատահական ֆունկցիոնալի բնութագրերը արտահայտվում են սեմիինվարիանտների միջոցով, իսկ հետո հիմնավորվում է ղեկավարման օրենքը, որ մինիմիզացնում է պատահական ֆունկցիոնալի մաթեմատիկական սպասման և ֆունկցիոնալի կշռային գումարը։ Ստացվում է մարկովյան ղեկավարելի համակարգի սինթեզման խնդրի նոր դաս, որի կառուցվածքը և լուծումը բերվում է հայտնի արդյունքների։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. К. Брутян,* Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 1, 1975. [2] *В. К. Брутян,* Учен. зап. ЕрГУ, сер естественных наук, № 1, 1977. [3] *В. К. Брутян,* Автоматика и телемеханика, № 7, 1980. [4] Основы автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева, Изд. ФМГ, М., 1963. [5] *В. К. Брутян,* Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 6, 1980. [6] *Я. Н. Ройтенберг,* Автоматическое управление, Наука, М., 1978. [7] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин,* Элементы теории функции и функционального анализа. Наука, М, 1977. [8] *П. Леви,* Стохастические процессы и броуновское движение. Наука, М., 1972. [9] *Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов,* Теория вероятностей. Наука, М., 1967. [10] *В. С. Пугачев,* Изв. АН СССР, ОТН. Энергетика и автоматика, № 3, 1961. [11] *Б. В. Гнеденко,* Курс теории вероятностей, Наука, М., 1965. [12] *А. Б. Куржанский,* Управление и наблюдение в условиях неопределенности, Наука, М., 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXII 1981 4

УДК 514.763

МАТЕМАТИКА

М. А. Андикян

О три-тканях, симметрично присоединенных к нормализованной поверхности аффинного пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/XII 1980)

1. М. А. Акивис ([1]) построил общую теорию три-тканей, образованных тремя расслоениями коразмерности r, на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии M^{2r}. В работе ([2]) было введено понятие три-ткани на касательном расслоении $T(V^r)$ дифференцируемого многообразия V^r размерности r, одно расслоение которой совпадает с касательным расслоением $T(V^r)$, а два других образованы семействами касательных к многообразию V^r векторных полей.

В настоящей работе вводится понятие три-ткани, симметрично присоединенной к оснащенной поверхности V^r аффинного пространства A^{2r}. Изучаются свойства этой три-ткани.

2. Рассмотрим $2r$-мерное аффинное пространство A^{2r}, отнесенное к подвижному реперу (x, e_I). Тогда дифференциальные уравнения движения этого репера имеют вид:

$$dx=\omega^I e_I,\ de_I=\omega_I^J e_J,\ (I, J, \ldots = 1, 2, \ldots, 2r). \tag{1}$$

Компоненты инфинитезимального перемещения репера удовлетворяют уравнениям структуры ([3]):

$$d\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I, \qquad d\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I. \tag{2}$$

Пусть V^r подмногообразие пространства A^{2r}, x—ее точка, а T_x касательная плоскость V^r в точке x. Присоединим к многообразию V^r подвижный репер так, чтобы его векторы e_i $(i, j \ldots =1, 2, \ldots, r)$ составляли базис в T_x. Тогда уравнения, определяющие поверхность V^r, запишутся так:

$$\omega^\alpha=0, \quad (\alpha, \beta, \ldots = r+1, r+2, \ldots, 2r). \tag{3}$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения и применяя лемму Картана ([3]), получаем

$$\omega_i^\alpha=h_{ij}^\alpha\omega^j, \tag{4}$$

где $h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}$. Продолжая эти уравнения, находим, что

$$\nabla h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ijk}\omega^k, \tag{5}$$

где h^α_{ijk} симметричны по всем нижним индексам, а ∇ — дифференциальный оператор, определяемый формулой $\nabla h^\alpha_{ij}=dh^\alpha_{ij}-h^\alpha_{lj}\omega^l_i-h^\alpha_{il}\omega^l_j+h^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta$. Уравнения (5) показывают, что h^α_{ij} образуют пучок тензоров на поверхности V^r.

Рассмотрим касательное расслоение $T(V^r)$ поверхности V^r. Его элементом является пара (x, ξ), где $x\in V^r$, $\xi\in T_x$. Пусть $\bar{D}$ такая область касательного расслоения $T(V^r)$, что естественное отображение $\varphi:\bar{D}\to A^{2r}$, определяемое формулой $y=x+\xi$, где $(x, \xi)\in\bar{D}$, устанавливает биективное соответствие между $\bar{D}$ и некоторой областью D аффинного пространства A^{2r}. Тогда формы ω^i и $\theta^i=d\xi^i+\xi^j\omega^i_j+\omega^i$ будут базисными формами касательного расслоения $T(V^r)$, а его структурные уравнения имеют вид:

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,\quad d\theta^i=\theta^j\wedge\omega^i_j+\omega^j\wedge\theta^i_j, \tag{6}$$

где

$$\theta^i_j=\xi^l h^\alpha_{lj}\omega^i_\alpha. \tag{7}$$

Так как точка $y=x+\xi$ описывает $2r$-мерную область D аффинного пространства A^{2r}, то в этой области выполняется условие $\det\|\xi^l h^\alpha_{lj}\|\neq 0$. Это условие исключает из рассмотрения в каждом T_x алгебраическую коническую поверхность порядка r, которая является фокусной поверхностью плоскости T_x.

3. В области $\bar{D}$ касательного расслоения $T(V^r)$ рассмотрим три-ткань $W(3, r; T(V^r))$, одно расслоение которой совпадает с касательным расслоением $T(V^r)$. Два других расслоения коразмерности r образованы семействами касательных к многообразию V^r векторных полей. Слои F_α расслоения λ_α три-ткани $W(3, r; T(V^r))$ определяются вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа $\sigma^i_\alpha=0$, $(\alpha=1, 2, 3)$, где

$$\sigma^i_1=\theta^i-\lambda^i_j\omega^j,\quad \sigma^i_2=-\theta^i-\mu^i_j\omega^j,\quad \sigma^i_3=2g^i_j\omega^j, \tag{8}$$

а величины

$$g^i_j=\frac{1}{2}(\lambda^i_j+\mu^i_j) \tag{9}$$

образуют невырожденную матрицу. Векторы e^α_i, касательные к слоям F_α, проходящие через точку $y=x+\xi$, определяются с помощью величин, связанных с поверхностью V^r, причем $e^3_i=-(e^1_i+e^2_i)$. Введем еще следующие векторы, инвариантно связанные с точкой $y=x+\xi$

$$e_i^* = e_i^1 - e_i^2 = \frac{1}{2} f_i^l(\lambda_l^j - \mu_l^j) e_j + \xi^* f_i^l h_{lk}^{\alpha} e_{\alpha}, \tag{10}$$

где f_i^l — матрица, обратная к g_l^j. Обозначим через Δ^{α} ($\alpha=1, 2, 3$) r-вектор, касательный к слою F_{α} слоения λ_{α}. Тогда r-вектор $\Delta^* = e_1^* \wedge e_2^* \wedge \ldots \wedge e_r^*$ будет изоклинным (4) по отношению к r-векторам Δ^{α}, и образует вместе с ними гармоническую четверку. Инвариантное распределение Δ^* будет горизонтальным распределением касательного расслоения $T(V^r)$. При этом Δ^* зависит как от точки $x \in V^r$, так и от вектора ξ, определяющих точку $y = x + \xi$.

Можно провести канонизацию репера так, чтобы $g_j^l = \lambda_j^l = \mu_j^l$. Тогда формы θ_j^i и ∇g_j^l являются главными на касательном расслоении $T(V^r)$ (2), и их разложения по базисным формам запишутся в виде:

$$\nabla g_j^l = (U_{jk}^l - \bar{Z}_{jk}^l)\omega^k + (V_{jl}^i - Z_{jl}^i) f_k^l \theta^k, \tag{11}$$

$$\theta_j^i = Z_{jk}^i \omega^k + \bar{Z}_{jl}^i f_k^l \theta^k, \tag{12}$$

где

$$U_{[jk]}^i = 0, \quad V_{[jk]}^i = 0. \tag{13}$$

При этом на касательном расслоении $T(V^r)$ определяется аффинная связность γ с формой связности $\sigma_J^I = \begin{Vmatrix} \sigma_j^i & 0 \\ 0 & \sigma_j^i \end{Vmatrix}$, тензором кручения a_{jk}^i и тензором кривизны b_{jkl}^i, где

$$\sigma_j^i = \omega_j^i + \frac{1}{2} f_k^l f_j^m [(V_{lm}^i - Z_{lm}^i)(\sigma_2^k - \sigma_1^k) + \bar{Z}_{lm}^i(\sigma_2^k + \sigma_1^k)], \tag{14}$$

$$a_{jk}^i = f_j^l f_k^m Z_{[lm]}^i. \tag{15}$$

4. Пусть теперь поверхность V^r снабжена оснащением $N(V^r)$ (5). Оснащение $N(V^r)$ представляет собой расслоенное пространство. Его называют нормальным расслоением, присоединенным к поверхности V^r (6). Поместим векторы e_{α} подвижного репера, присоединенного к поверхности V^r, в нормальной плоскости N_x. Формы ω_{α}^i становятся главными на поверхности V^r, и их разложение по базисным формам можно записать в виде:

$$\omega_{\alpha}^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega^j. \tag{16}$$

Отсюда и из уравнений (2), (3) и (4) следует, что

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \tag{17}$$

$$d\omega_{\beta}^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\alpha} + R_{\beta kl}^{\alpha} \omega^k \wedge \omega^l, \tag{18}$$

где

$$R_{jkl}^i = h_{j[k}^{\alpha} \lambda_{|\alpha|l]}^i, \tag{19}$$

$$R_{\beta kl}^{\alpha} = -h_{i[k}^{\alpha} \lambda_{|\beta|l]}^i. \tag{20}$$

Из этих уравнений в силу теоремы Картана—Лаптева ([7]) следует, что формы ω_j^i определяют аффинную связность на поверхности V^r, а формы ω_β^α определяют аффинную связность в нормальном расслоении $N(V^r)$ ([5]). Из уравнений (7) и (16) находим, что

$$\theta_j^i = \xi^l h_{lj}^\alpha \lambda_{\alpha k}^i \omega^k. \tag{21}$$

Отсюда и из (6) получаем, что структурные уравнения касательного расслоения запишутся в виде:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i + \xi^l R_{ljk}^i \omega^j \wedge \omega^k. \tag{22}$$

Уравнения (22) вместе с (17) показывают, что формы $\omega_J^I = \begin{Vmatrix} \omega_j^i, & 0 \\ 0, & \omega_j^i \end{Vmatrix}$ определяют аффинную связность на многообразии $T(V^r)$. Эта связность является горизонтальным поднятием аффинной связности с поверхности V^r в касательное расслоение $T(V^r)$ ([8]).

5. Три-ткань $W(3, r; T(V^r))$ назовем симметрично присоединенной к оснащенной поверхности V^r, если инвариантный r-вектор $\Delta^*(x, \xi)$ этой ткани не зависит от ξ и параллелен нормали N_x поверхности V^r, определяемой в ее точке x.

Если три-ткань $W(3, r; T(V^r))$ симметрично присоединена к оснащенной поверхности V^r, то из уравнений (12) и (16) следует, что $Z_{jk}^i = 0$. Из этих соотношений, а также из (21), (12), (19) и (11) следует, что разложения главных форм ∇g_j^i принимают вид

$$\nabla g_j^i = U_{jk}^i \omega^k + (V_{jl}^i - \xi^m R_{mjl}^i) f_k^l \theta^k. \tag{23}$$

Форма связности и тензор кручения симметрично присоединенной три-ткани имеют вид:

$$\sigma_j^i = \omega_j^i + f_l^i U_{jk}^l \omega^k - 2a_{jk}^i \theta^k, \tag{24}$$

$$a_{jk}^i = f_m^i \xi^l R_{ljk}^m. \tag{25}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы к касательному расслоению $T(V^r)$ оснащенной поверхности V^r аффинного пространства A^{2r} можно было симметрично присоединить три-ткань, необходимо и достаточно, чтобы на касательном расслоении $T(V^r)$ существовало тензорное поле g_j^i, ковариантный дифференциал которого имеет вид* (23). *Тогда форма связности три-ткани, а также ее тензор кручения определяются соотношениями* (24) *и* (25).

Пусть теперь на касательном расслоении $T(V^r)$ задано произвольное расслоение Δ_1 коразмерности r так, что любой слой этого расслоения пересекает касательную плоскость T_x в одной точке. Тогда с помощью распределений Δ^1, $\Delta^3 = T_x$ и Δ^* строится распределение Δ^2, симметрично с Δ^1 по отношению к распределениям Δ^3 и Δ^*. Возникает вопрос: когда оно вместе с Δ^1 и Δ^3 определяет симметрично присоединенную три-ткань в касательном расслоении $T(V^r)$?

Теорема 2. *Для того, чтобы к касательному расслоению* *оснащенной поверхности V^r аффинного пространства A^{2r} можно было симметрично присоединить три-ткань так, чтобы одно из расслоений λ_α совпадало с данным, необходимо и достаточно, чтобы для этого слоения выполнялось одно из следующих условий: а) $U^l_{[jk]}=0$, б) $V^l_{[jk]}=0$.*

Теорема 3. *К нормализованной поверхности V^r аффинного пространства A^{2r} можно симметрично присоединить шестиугольную три-ткань с произволом $2r$ функций r аргументов.*

6. Так как базисные векторы распределений Δ^3, Δ^* связаны соотношениями $e^3_i=-(e^1_i+e^2_i)$ и $e^*_i=e^1_i-e^2_i$, то векторы e^3_i и e^*_i лежат в одной двумерной плоскости, определяемой бивектором $e^1_i\wedge e^2_i$. Тем самым между подпространствами Δ^3_y и Δ^*_y устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Например, для Δ^3_y и Δ^*_y это соответствие устанавливается отображением

$$\varphi : \eta = \eta^i e^3_i \in \Delta^3_y \to \bar{\eta} = \eta^i e^*_i \in \Delta^*. \qquad (26)$$

Отображение φ позволяет провести канонизацию векторов $e_\alpha (\alpha=r+1, r+2, \ldots, 2r)$, образующих базис распределения Δ^*_y. А именно: положим $\varphi(e_i)=e_{i+r}$, тогда $e_{i+r}=e^*_i$ и из соотношений (10) следует, что

$$\xi^k f^l_j h^{i+r}_{kl} = \delta^i_j. \qquad (27)$$

Так как f^l_j — матрица, обратная к g^l_j, то эти соотношения можно записать в виде

$$\xi^l h^i_{lj} = g^i_j, \qquad (28)$$

где здесь и далее $h^i_{lj}=h^{i+r}_{lj}$. После проведенной канонизации величины h^i_{lj} образуют тензор на касательном расслоении $T(V^r)$.

Дифференцируя (28) и используя (5), (11) и (12), получаем, что формы ω^i_j и ω^{i+r}_{j+r} связаны соотношениями

$$\omega^i_j-\omega^{i+r}_{j+r}=(U^i_{lk}-\bar{Z}^i_{lk}-\xi^m h^i_{mlk}+h^i_{lk}) f^l_j \omega^k+(V^i_{lm}-Z^i_{lm}-h^i_{ls} g^s_m) f^l_j f^m_k \theta^k. \qquad (29)$$

Последние уравнения показывают, что формы ω^{i+r}_{j+r} так же, как и ω^i_j, определяют аффинную связность на $T(V^r)$ ([5]).

Теорема 4. *Для того, чтобы форма Пфаффа ω^{i+r}_{j+r} определяла аффинную связность на поверхности V^r, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий: а) h^i_{jk} — тензор на поверхности V^r, б) a^i_{jk} — тензор на поверхности V^r, в) слои F_3 расслоения λ_3 три-ткани $W(3, r; T(V^r))$ несут групповую структуру (см. ([9])).*

7. При отображении φ точке $y \in T_x$ соответствует точка $z \in N_x$, определяемая уравнением $z=x+\xi^i e_{i+r}$. При этом отображении векторные поля, определяющие расслоения три-ткани, переходят в векторные поля на нормальном расслоении, так что на нормальном рас-

слоении естественным образом определяется три-ткань $W(3, r; N(V^r))$ с основными формами (8). При этом инвариантному горизонтальному распределению, образующему гармоническую четверку с распределениями, касательными к слоям три-ткани $W(3, r; T(V^r))$, соответствует некоторое распределение Δ^*_z, где z точка нормали N_x. Это распределение будет изоклинным по отношению к распределениям, касательным к слоям три-ткани $W(3, r; N(V^r))$, и образует вместе с ними гармоническую четверку. При этом Δ^*_z, вообще говоря, не параллельно к распределению Δ^3_y.

8. Рассмотрим теперь изоклинные, симметрично присоединенные к поверхности V^r три-ткани. При $r>2$ характеристические условия изоклинности три-ткани имеют вид $a^i_{[jk]} = a_{[j}\delta^i_{k]}$ ([4]).

Теорема 5. *Для того, чтобы симметрично присоединенная к нормализованной поверхности аффинного пространства три-ткань была изоклинной, необходимо и достаточно, чтобы ее тензор кривизны имел строение* $R^i_{jkl} = -h^i_{j[k} a_{l]}$.

Назовем оснащение $N(V^r)$ специальным, если тензор λ^i_{jk} имеет строение $\lambda^i_{jk} = -\delta^i_j a_k$. Отсюда и из (28), (17)—(20) следует, что $R^i_{jkl} = -R^{i+r}_{j+rkl}$.

Теорема 6. *Для того, чтобы симметрично присоединенная к нормализованной поверхности три-ткань была изоклинной при* $r>3$, *необходимо и достаточно, чтобы поверхность обладала специальным оснащением. При* $r \leqslant 3$ *это условие является только достаточным. В этом случае тензор кривизны нормальной связности совпадает, с точностью до знака, с тензором кривизны* R^i_{jkl}.

Следующая теорема дает геометрическую характеристику специального оснащения.

Теорема 7. *Для того, чтобы поверхность* V^r *обладала специальным оснащением, необходимо и достаточно, чтобы фокусные поверхности* F_x *распадались на* $(r-1)$*-кратную бесконечно удаленную гиперплоскость и собственную гиперплоскость* F. *При этом существует* $(r-1)$*-мерное, касательное к поверхности распределение, вдоль интегральных линий которого нормальная плоскость* N_x *остается параллельной, в то время как вдоль любой кривой, не являющейся интегральной для этого распределения, нормальные плоскости пересекаются в соответствующей точке гиперплоскости* F.

Выражаю искреннюю благодарность проф. М. А. Акивису за постановку задачи и внимание к работе.

Московский институт стали и сплавов

Մ. Ա. ԱՆԴԻԿՅԱՆ

Աֆինական տարածության հագեցված մակերևույթին համաչափորեն կցված երեք-հյուսվածքների մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է 2r-չափանի աֆինական տարածության r-չափանի մակերևույթին կցված երեք-հյուսվածքների մի հատուկ ընտանիք։ Ենթադրվում է, որ այդ հյուսվածքների Δ բաշխումը կախված է մակերևույթի կետից, և կախված չի շոշափող շերտավորման էլեմենտից։ Ցույց է տրվում, որ այդպիսի հյուսվածքը մակածում է մակերևույթի հագեցում, և այն անվանվում է այդ մակերևույթին համաչափորեն կցված։*

Գտնված են հյուսվածքը հագեցված մակերևույթին համաչափորեն կցված լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։ Ապացուցված է նաև, որ այդ երեք-հյուսվածքը շոշափող շերտավորման մեջ մակածում է աֆինական կապակցություն, որը հանդիսանում է աֆինական կապակցության հորիզոնական բարձրացում՝ մակերևույթից-շոշափող շերտավորում։ Ցույց է տրված, որ հագեցված մակերևույթին կարելի է համաչափորեն կցել վեցանկյուն երեք-հյուսվածք r փոփոխականների 2r-ֆունկցիաների ազատությամբ։

Համաչափորեն կցված երեք-հյուսվածքը մակածում է փոխմիարժեք համապատասխանություն շոշափող և նորմալ շերտավորումների միջև։ Այդ համապատասխանության միջոցով, նորմալ շերտավորման մեջ կառուցվում է երեք-հյուսվածք, որի մի շերտավորումը համընկնում է նորմալ շերտավորման հետ։

Այնուհետև դիտարկվում են համաչափորեն կցված իզոկլին երեք-հյուսվածքները։ Գտնված են համաչափորեն կցված երեք-հյուսվածքի իզոկլին լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։ Ապացուցված է, որ այս դեպքում գոյություն ունի մակերևույթին շոշափող (r—1) չափանի բաշխում, որի ինտեգրալային գծերի ուղղությամբ նորմալ հարթությունը տեղափոխվում է զուգահեռ, իսկ ցանկացած գծի ուղղությամբ, որը ինտեգրալային չէ այդ բաշխման համար, նորմալ հարթությունները հատվում են մի կետում, որը պատկանում է նորմալ հարթությունների ընտանիքի կիզող մակերևույթին։ Այդ կետերի բազմությունը նորմալ հարթությունների ընտանիքի կիզող մակերևույթներով որոշված հիպերհարթություն է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Акивис,* Труды геом. сем. ВИНИТИ, т. 2 (1969). [2] *М. А. Андикян,* Тезисы докл. 7-ой Всес. конф. по совр. проблемам геометрии, Минск, 1979. [3] *С. П. Фиников,* Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948. [4] *М. А. Акивис,* Сибирский мат. журн., т. 15, № 1 (1974). [5] *А. П. Норден,* Пространство аффинной связности, М., 1976. [6] *М. А. Акивис, А. В. Чакмазян,* ДАН АрмССР, т. 62, № 2 (1976). [7] *Н. М. Остиану, В. В. Рыжков, П. И. Швейкин,* Труды геом. сем. ВИНИТИ, т. 4 (1973). [8] *K. Yano, S. Ishihara,* Tangent and cotangent bundles. N.—Y., 1973. [9] *А. М. Шелехов,* Тезисы докл. 7-ой Всес. конф. по совр. проблемам геометрии, Минск, 1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 517.926.4

МАТЕМАТИКА

Т. М. Кошелева

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в классе обобщенных функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/XII 1980)

Пусть S—класс бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций одного переменного, а S'—класс непрерывных функционалов на S. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{d^m U}{dt^m} + P_1(x)\frac{d^{m-1}U}{dt^{m-1}} + \ldots + P_m(x)U = 0, \quad t>0, \tag{1}$$

где $P_1(x), \ldots, P_m(x)$—заданные полиномы действительного переменного x, а $U(t)$, при фиксированном $t>0$, функционал из S'.

Будем говорить, что функционал $U(t)$ принадлежит классу M_l, если для него существуют постоянная C, натуральные числа k и n, такие, что имеют место оценки

$$\left|\frac{d^l U(t, \varphi)}{dt^l}\right| \leqslant C(1+t^k)\sup_{-\infty<x<\infty}|(1+|x|^n)(|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|+\cdots+|\varphi^{(j)}(x)|| \tag{2}$$

при $\varphi\in S$, $t\geqslant 0$, $l=0, \ldots, q-1$, где $U(t, \varphi)$—значение функционала $U(t)$ на функции $\varphi(x)$. Обозначим объединение классов M_l через $M (M=S')$.

Уравнение относительно λ

$$\lambda^m + P_1(x)\lambda^{m-1} + \cdots + P_m(x) = 0 \tag{3}$$

называется характеристическим уравнением уравнения (1).

Пусть $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$—корни характеристического уравнения (3). Предполагается, что всюду

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k(x)\leqslant 0, \quad k=1, 2, \ldots, q, \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k(x)\geqslant 0, \quad k=q+1, \ldots, m, \tag{5}$$

причем $\mathrm{Re}\,\lambda_k(x)=0$ при $k\geqslant q+1$ в конечном числе точек, где q—постоянное целое число, не зависящее от x.

Задача Коши для уравнения (1) исследуется в следующей постановке: найти решение уравнения (1), принадлежащее классу M_j и удовлетворяющее граничным условиям

$$U(0)=l_0,\ U'(0)=l_1,\ \ldots,\ U^{(q-1)}(0)=l_{q-1}, \tag{6}$$

где $l_0, \ldots, l_{q-1}$—заданные функционалы из класса M_j, не зависящие от t.

В случае, когда в (5) имеет место строгое неравенство, эта задача в классе M исследована в работе ([1]), а в классах H_α^β в работе ([2]). При нарушении в (5) строгого неравенства в конечном числе точек исследование этой задачи в классах M, M_j и H_α^β существенно усложняется, и, как указывается ниже, однородная задача в классе M имеет бесконечное число линейно-независимых решений. В данной работе доказывается, что однородная задача в классе M_j имеет конечное число линейно-независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима. Отметим, что формулы решения, полученные в работах ([1]) и ([2]), в данном случае не всегда имеют смысл и вид решения полученной нами формулы существенно отличается от формул, полученных в ([1]) и ([2]).

2. Решение однородной задачи (1), (6) в классе M_j. Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ те точки, в которых хотя бы для одного из корней $\lambda_k(x)$ с индексом $k\geqslant q+1$ $\operatorname{Re}\lambda_k(x)=0$. Обозначим через r_p число тех корней $\lambda_{q+1}(x), \ldots, \lambda_m(x)$, для которых реальные части в точке x_p равны нулю $(1\leqslant p\leqslant n)$.

В работе ([1]) доказано, что решение однородной задачи (1), (6) имеет вид

$$U(t,\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=0}^{j}c_{ir}(t)\varphi^{(r)}(x_i),\quad \varphi\in S, \tag{7}$$

где $c_{ir}(t)$ вместе со своими производными до $m-1$ порядка при $t\to\infty$ растут не быстрее полинома.

Подставляя $U(t,\varphi)$ из (7) в уравнение (1) и однородные граничные условия (6) $(l_j=0,\ j=0, \ldots, q-1)$ и приравнивая к нулю коэффициенты $\varphi^{(r)}(x_i)$, для определения $c_{ir}(t)$ при любом фиксированном $i(i=1, \ldots, n)$ получим следующую задачу:

$$c_{ij}^{(m)}(t)+P_1(x_i)c_{ij}^{(m-1)}(t)+\cdots+c_{ij}(t)P_m(x_i)=0,\quad t>0; \tag{8}$$

$$c_{ir}^{(m)}(t)+P_1(x_i)c_{ir}^{(m-1)}(t)+\cdots+P_m(x_i)c_{ir}(t)+\sum_{k=r+1}^{j}\sum_{l=0}^{m-1}\alpha_{irkl}c_{ik}^{(l)}(t)=0,$$

$$t>0;\quad (r=0,1,\ldots,j-1) \tag{9}$$

$$c_{ir}^{(k)}(0)=0\quad (r=0,\ldots,j;\ \ k=0,\ldots,q-1), \tag{10}$$

где α_{irkl}—некоторые вполне определенные постоянные.

Корнями характеристического уравнения, соответствующего системам (8)—(9), будут $\lambda_1(x_i), \ldots, \lambda_m(x_i)$. В работе ([3]) (см. стр. 234) показано, что задача (8)—(10) имеет относительно $c_{i0}(t)$, $c_{i1}(t), \ldots,$

$c_{ij}(t)$, в классе функций, стремящихся к бесконечности вместе со своими производными не быстрее полинома, ровно $r_i(j+1)$ линейно-независимых решений. Подставляя эти решения в формулу (7), получим следующую теорему.

Теорема 1. *Однородная задача* (1), (6) *в классе* M_j *имеет* $(j+1)(r_1+\cdots+r_n)$ *линейно-независимых решений, а в классе* M *имеет бесконечное число линейно-независимых решений.*

3. Решение неоднородной задачи (1), (6) в классе M_j. Для решения неоднородной задачи (1), (6) доказаны следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$—*действительная непрерывная вектор-функция в интервале* (α, β) *и в каждой точке* $x\in(\alpha, \beta)$ *вектор* $f(x)$ *имеет ровно* r *положительных компонент, где* r *не зависит от точки интервала. Пусть далее в некоторой фиксированной точке* $x_0\in(\alpha, \beta)$ *первые* r *компоненты вектора* $f(x_0)$ *положительны. Тогда* $f_1(x)>0, \ldots, f_r(x)>0$, $f_{r+1}(x)\leqslant 0, \ldots, f_m(x)\leqslant 0$, $x\in(\alpha, \beta)$.

Утверждение леммы 1 очевидно.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (4) *и* (5). *Тогда корни* $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$, *удовлетворяющие этим условиям, можно выбрать так, чтобы они в некоторой* ε *окрестности точки* $x_i (i=1, \ldots, n)$ *представились в виде*

$$\lambda_j(x)=\begin{cases}\varphi_j((x-x_i)^{1/r_j}) \text{ при } x_i<x<x_i+\varepsilon,\\ \psi_j((x-x_j)^{1/q_j}) \text{ при } x_i-\varepsilon<x<x_i,\end{cases} \tag{11}$$

где $\varphi_j(x)$ *и* $\psi_j(x)$—*аналитические функции относительно переменной* x *в* ε *окрестности нуля, а* r_j *и* q_j—*некоторые целые положительные числа.*

Напомним, что $x_1, \ldots, x_n$ те точки, где нарушается строгое неравенство в (5), хотя бы для одного корня $\lambda_k(x)$ с индексом $k\geqslant q+1$.

Доказательство леммы 2. В книге ([4]) (стр. 50—55) доказано, что корни $\beta_1(x), \ldots, \beta_m(x)$ уравнения (3) всегда можно выбрать так, чтобы они в окрестности фиксированной точки x_i представились в виде

$$\beta_j(x)=\mu_j((x-x_i)^{1/p_j}), \quad -\varepsilon<x-x_i<\varepsilon, \tag{12}$$

где $\mu_j(x)$—аналитическая функция относительно переменной x в достаточно малой ε окрестности нуля. Пусть x_0—фиксированная точка в интервале $(x_i, x_i+\varepsilon)$. Согласно условиям (4) и (5) корни $\beta_j(x)$ можно перенумеровать так, чтобы имело место неравенство

$$\operatorname{Re}\beta_1(x_0)\leqslant 0, \ldots, \operatorname{Re}\beta_q(x_0)\leqslant 0, \operatorname{Re}\beta_{q+1}(x_0)>0, \ldots, \operatorname{Re}\beta_m(x_0)>0.$$

Ясно, что при условии (4) и (5) вектор

$$f(x)=(\operatorname{Re}\beta_{q+1}(x), \ldots, \operatorname{Re}\beta_m(x), \operatorname{Re}\beta_1(x), \ldots, \operatorname{Re}\beta_q(x))$$

в интервале $(x_l, x_l+\varepsilon)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому

$$\operatorname{Re}\beta_1(x)\leqslant 0, \ldots, \operatorname{Re}\beta_q(x)\leqslant 0, \quad \operatorname{Re}\beta_{q+1}(x)>0, \ldots, \operatorname{Re}\beta_m(x)>0 \text{ при } x_l< <x<x_l+\varepsilon.$$

Следовательно в интервале $(x_l, x_l+\varepsilon)$ в качестве $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ можно взять $\beta_1(x), \ldots, \beta_m(x)$. Отсюда следует справедливость представления (11) в этом интервале. Аналогично доказывается представление (11) в интервале $(x_l-\varepsilon, x_l)$. Пусть

$$\lambda^q+a_1(x)\lambda^{q-1}+\cdots+a_q(x)\equiv(\lambda-\lambda_1(x))\ldots(\lambda-\lambda_q(x)). \tag{12}$$

Рассcмотрим уравнение

$$y^{(q)}+a_1(x)y^{(q-1)}+\cdots+a_q(x)y=0, \ t>0, \tag{13}$$

где производные берутся по t, а x входит как параметр. Решение ищется в классе обычных функций.

Обозначим через $\omega_0(x, t), \ldots, \omega_{q-1}(x, t)$ фундаментальную систему решений уравнения (13) с граничными условиями

$$\frac{\partial^k\omega_i(x, 0)}{\partial t^k}=\begin{cases}0 \text{ при } i\neq k, \ i, \ k=0, \ldots, m-1,\\ 1 \text{ при } i=k, \ k=0, \ldots, m-1.\end{cases} \tag{14}$$

Так как корни $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_q(x)$ при $x\neq x_k (k=1, \ldots, n)$ разделены от корней $\lambda_{q+1}(x), \ldots, \lambda_m(x)$, то коэффициенты $a_1(x), \ldots, a_q(x)$ и функции $\omega_i(x, t)$ аналогичны относительно действительной переменной t и x при $x\neq x_1, \ldots, x_n$, $t\geqslant 0$ ([2]). Для функций $\omega_i(x, t)$ $(i=0, 1, \ldots, q-1)$ имеет место следующая

Теорема 2. *Функции* $\omega_i(x, t) (i=0, \ldots, q-1)$ *удовлетворяют оценкам*

$$\left|\frac{\partial^k\omega_i(x, t)}{\partial t^k}\right|\leqslant c_k(1+t^r)(1+|x|^{n_1}), \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial^{l+k}\omega_i(x, t)}{\partial x^l\partial t^k}\right|\leqslant c_{lk}\frac{(1+t^r)(1+|x|^{n_1})}{|x-x_1|^{l-\alpha}\ldots|x-x_n|^{l-\alpha}}, \tag{16}$$

где r, n_1, α, c_k, c_{lk}—*некоторые положительные постоянные.*

Доказательство. Докажем теорему 2 для функции $\omega_0(x, t)$. Обозначим

$$w_k(x, t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_{k+1}(x)E\right)\ldots\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_q(x)E\right)\omega_0(x, t), \quad k=1,\ldots, q-1,$$

где E—единичный оператор. Пусть $w_q(x, t)\equiv\omega_0(x, t)$.

Так как $\omega_0(x, t)$ удовлетворяет уравнению (13) и граничному условию (14), то согласно разложению (12) функции $w_1(x, t), \ldots, w_q(x, t)$ являются решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}-\lambda_1(x)w_1=0, \quad \frac{\partial w_k}{\partial t}-\lambda_k(x)w_k=w_{k-1}, \quad k=2, 3, \ldots, q, \quad t>0,$$

$$w_k(x, 0)=(-1)^{q-k}\lambda_{k+1}(x)\ldots\lambda_q(x), \quad k=1, \ldots, q-1, \quad w_q(x, 0)=1.$$

Ясно, что функции $w_1(x, t), \ldots, w_q(x, t)$ можно найти в явном виде. Используя представление (11), можно показать, что они в окрестности точек $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют оценкам (15) и (16). Оценки (15) и (16) для функции $\omega_j(x, t)$ в окрестности бесконечности доказаны в ([3]).

Теперь, используя теорему 2, покажем, что задача (1) и (6) в классе M_j всегда разрешима.

Обозначим через S^j класс функций $\varphi(x)$, которые j раз непрерывно дифференцируемы всюду, кроме, быть может, точек $x_1, \ldots, x_n$, и удовлетворяют оценке

$$(1+|x|^r)|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant c_{rn}, \; r=0, 1, \ldots, \quad n=0, 1, \ldots, j, \tag{17}$$

где c_{rn}—постоянные.

Так как начальные условия $l_k\in M_j(k=0, \ldots, q-1)$, то их можно непрерывно продолжить в классе функций S^j.

Пусть $\alpha(x)\in C_0^\infty$ и в окрестности $x_1, \ldots, x_n$ равна 1, $\varphi(x)\in S$, а $P(x)$—полином порядка $nj-1$, удовлетворяющий условиям

$$P^{(k)}(x_i)=\varphi^{(k)}(x_i), \quad (k=0, \ldots, j-1; \; i=1, \ldots, n).$$

Полином $P(x)$ определяется единственным образом и имеет вид

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\varphi^{(k)}(x_i)P_{ik}(x), \tag{18}$$

где $P_{ik}(x)$—вполне определенные полиномы порядка не выше чем $nj-1$, не зависящие от $\varphi(x)$.

Частное решение задачи (11), (6) будем искать в виде

$$U(t, \varphi)=U_0(t, \varphi)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{j}c_{ik}(t)\varphi^{(k)}(x_i), \tag{19}$$

где

$$U_0(t, \varphi)=\sum_{k=0}^{q-1}l_k(\omega_k(t, x))(\varphi(x)-\alpha(x)P(x)),$$

$\omega_k(t, x)(k=0, \ldots, q-1)$—вышеуказанная фундаментальная система решений уравнения (13), а $c_{ik}(t)$—искомые функции, которые вместе со своими производными до $m-1$ порядка растут не быстрее полинома.

Согласно теореме 2 функционал $U_0(t, \varphi)$ принадлежит классу M_j.

Подставляя $U(t, \varphi)$ из (19) в уравнение (1) и граничное условие (6), для определения функций $c_{ik}(t)$ получим неоднородную задачу (8)—(10), разрешимость которой показана в работе [3] (стр. 234).

Таким образом мы получили

Теорему 3. *Неоднородная задача* (1), (6) *в классе* M_j *всегда разрешима.*

В заключение выражаю благодарность Н. Е. Товмасяну, под руководством которого выполнена данная работа.

Курский политехнический
институт

Տ. Մ. ԿՈՇԼԵՎԱ

Կոշու խնդիր սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում

Աշխատանքում դիտարկված է Կոշու խնդիրը m-րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար, ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում, որոնք ունեն վերջավոր սինգուլյարություն։ Ապացուցված է, որ դիտարկված խնդիրը միշտ լուծելի է, իսկ համասեռ խնդիրը ունի վերջավոր թվով գծորեն անկախ լուծումներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. В. Дикополов*, Мат. сб., т. 59 (101) (1962). [2] *А. Л. Павлов*, Мат. сб., т. 103 (145), № 3 (7) (1977). [3] *Г. Е. Шилов*, Математический анализ. Второй спец курс, Наука, М., 1965. [4] *B. L. van der Warden*, Einfuhrung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 539.3

МЕХАНИКА

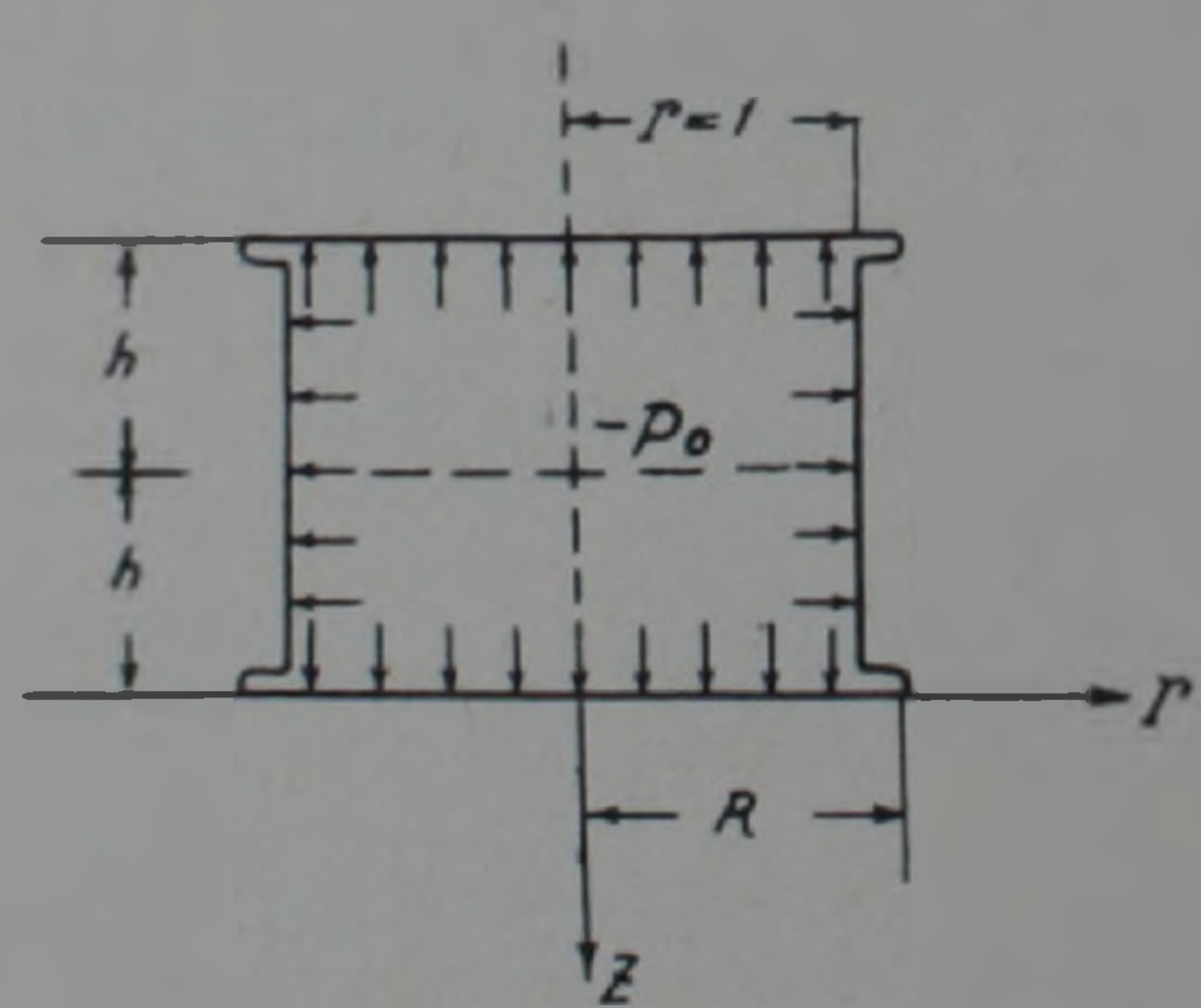
В. В. Симонян

Осесимметричная задача для пространства с цилиндрической полостью

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 18/VI 1980)

Пусть упругое пространство содержит в себе цилиндрическую полость $(r=1,\ -2h\leqslant z\leqslant 0)$. Пусть, далее, на боковой поверхности $(r=1)$ и на основаниях $(z=-2h,\ 0)$ цилиндрической полости действует нормальное давление постоянной интенсивности $-p_0$. При этом предполагается, что на плоскостях $(z=-2h,\ 0)$ имеются одинаковые кольцевые трещины $(1<r<R)$, выходящие на боковую поверхность полости (рисунок). Отметим, что близкие по постановке задачи ранее рассмотрены в работах [1-3].

В силу симметрии будем рассматривать полупространство с вер-



тикальной цилиндрической выработкой глубины h. Отнесем индекс 1 к слою $(0\geqslant z\geqslant -h)$ и индекс 2 к полупространству $(z\geqslant 0)$, тогда граничные условия задачи можно записать в виде:

$$u_z^{(1)}(r,-h)=0,\quad \tau_{rz}^{(1)}(r,-h)=0\quad (1<\eta<\infty); \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(1,\ z)=0,\quad \sigma_r^{(1)}(1,\ z)=-p_0\quad (-h<z<0); \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r,\ 0)=0,\quad \sigma_z^{(2)}(r,\ 0)=-p_0\quad (0\leqslant r<R); \tag{1.3}$$

$$\sigma_z^{(1)}(r,0)=\sigma_z^{(2)}(r,0)=p(r),\ \tau_{rz}^{(1)}(r,0)=\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=\tau(r)\ \ (R<r<\infty); \qquad (1.4)$$

$$u_z^{(1)}(r,0)=u_z^{(2)}(r,0),\ u_r^{(1)}(r,0)=u_r^{(2)}(r,0)\ \ (R<r<\infty). \qquad (1.5)$$

Здесь $p(r)$ и $\tau(r)$ неизвестные нормальное и касательное напряжения, действующие на плоскости $z=0$ и подлежащие определению.

Бигармоническую функцию А. Лява для области (1) представим в виде суммы интеграла Вебера и ряда Фурье

$$\Phi_1(r,z)=\int_0^\infty [A(\lambda)\operatorname{sh}\lambda z+B(\lambda)\operatorname{ch}\lambda z+C(\lambda)\lambda z\operatorname{sh}\lambda z+D(\lambda)\lambda z\operatorname{ch}\lambda z]\,W_0(\lambda r)d\lambda+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[A_kK_0(\lambda_kr)+B_k\lambda_krK_1(\lambda_kr)]\sin\lambda_kz+A_z^3,\ (1<r<\infty),\ (-h<z<0) \quad (2.1)$$

а для области (11) в виде интеграла Ханкеля

$$\Phi_2(r,z)=\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)[E(\lambda)+\lambda zF(\lambda)]d\lambda. \qquad (2.2)$$

Здесь и далее $J_n(x)$ функции Бесселя первого рода от действительного аргумента, $K_n(x)$ функции Бесселя второго рода от мнимого аргумента, $W_n(x)=J_n(x)Y_1(\lambda)-Y_n(x)J_1(\lambda)$, $Y_n(x)$ функции Бесселя второго рода от действительного аргумента, $\lambda_k=\pi k/h$, $W_1(\lambda)=0$, $W_0(\lambda)=-2/\pi\cdot\lambda$.

Пользуясь известными формулами, выражающими компоненты напряжений и перемещений через функцию А. Лява, а также следующими обозначениями:

$$\varphi_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\int_R^\infty r\tau(r)J_1(\lambda r)dr,\quad \varphi_2(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\int_R^\infty rp(r)J_0(\lambda r)dr;$$

$$(2.3)$$

$$\varphi_3(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2\Delta_1(\lambda)}\int_R^\infty rp(r)W_0(\lambda r)dr,\quad \varphi_4(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2\Delta_1(\lambda)}\int_R^\infty r\tau(r)W_1(\lambda r)dr;$$

$$\Delta_1(\lambda)=J_1^2(\lambda)+Y_1^2(\lambda),\quad B_k^*=\lambda_k^2K_1(\lambda_kr)B_k;$$

$$\Delta_2(\lambda)=\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h+\lambda h,\quad \Phi(\lambda)=\frac{2W_0(\lambda)}{\Delta_1(\lambda)}\sum_{k=1}^\infty\frac{\lambda_k^2B_k^*}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2},$$

после удовлетворения условиям (1.1—1.5) неизвестные коэффициенты A, A_k, B_k, $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$, $E(\lambda)$ и $F(\lambda)$ либо определяются непосредственно $\left(A=-\frac{p_0}{6\nu}\right)$, либо выражаются через введенные обозначения (2.3), а для определения неизвестных функций $p(r)$, $\tau(r)$ и коэффициента B_k^* получим следующую систему уравнений:

$$M(\lambda_k)B_k^* = \int_0^\infty \frac{\lambda^4 W_0(\lambda)\varphi_4(\lambda)[(\lambda^2+\lambda_k^2)\Delta_2(\lambda)+\lambda_k^2 \operatorname{sh}2\lambda h]d\lambda}{\Delta_2(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2} +$$

$$+2\lambda_k^2 \int_0^\infty \frac{\lambda^4 W_0(\lambda)\operatorname{sh}^2\lambda h\varphi_3(\lambda)d\lambda}{\Delta_2(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2} + 2\lambda_k^2 \int_0^\infty \frac{\lambda^4 W_0(\lambda)\operatorname{sh}^2\lambda h\Phi(\lambda)d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Delta_2(\lambda)}, \tag{2.4}$$

где

$$M(\lambda_k) = \frac{\lambda_k^2 h}{2}\left[1 + \frac{2(1-\nu)}{\lambda_k^2} - \frac{K_0^2(\lambda_k)}{K_1^2(\lambda_k)}\right]; \tag{2.5}$$

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^2[(1-2\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h-\lambda h]W_0(\lambda r)\varphi_4(\lambda)d\lambda}{\Delta_2(\lambda)} + 2(1-$$

$$-\nu)\int_0^\infty \frac{\lambda^2\operatorname{sh}^2\lambda h[\varphi_3(\lambda)+\Phi(\lambda)]W_0(\lambda r)d\lambda}{\Delta_2(\lambda)} =$$

$$= -2(1-\nu)\int_0^\infty \lambda^2 J_0(\lambda r)\varphi_2(\lambda)d\lambda + (1-2\nu)\int_0^\infty \lambda^2 J_0(\lambda r)\varphi_1(\lambda)d\lambda +$$

$$+2(1-\nu)p_0 R\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)J_1(\lambda R)d\lambda}{\lambda}; \tag{2.6}$$

$$2(1-\nu)\int_0^\infty \frac{\lambda^2 W_1(\lambda r)\operatorname{ch}^2\lambda h\varphi_4(\lambda)d\lambda}{\Delta_2(\lambda)} +$$

$$+\int_0^\infty \frac{\lambda^2 W_1(\lambda r)[(1-2\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h-\lambda h][\varphi_3(\lambda)+\Phi(\lambda)]d\lambda}{\Delta_2(\lambda)} +$$

$$+\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2[A_k K_1(\lambda_k r)+B_k\lambda_k r K_0(\lambda_k r)] = (1-2\nu)\int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda r)\varphi_2(\lambda)d\lambda -$$

$$-2(1-\nu)\int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda r)\varphi_1(\lambda)d\lambda - (1-2\nu)P_0 R\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda R)J_1(\lambda r)d\lambda}{\lambda}. \tag{2.7}$$

Следуя работам ([4–7]), введем преобразования:

$$\int_R^\infty tp(t)J_0(\lambda t)dt = \int_R^\infty H(x)\sin\lambda x dx; \int_R^\infty t\tau(t)J_1(\lambda t)dt = \int_R^\infty S(x)\cos\lambda x dx,$$

где

$$H(x)=\frac{2}{\pi}\int_R^{\infty}\frac{tp(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}};\qquad S(x)=-\frac{2x}{\pi}\int_R^{\infty}\frac{\tau(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}.$$

Далее, применяя к уравнению (2.6) оператор $I_1(f)=\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}\frac{rf(r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}$,

а к уравнению (2.7) оператор $I_1(f)=\frac{d}{dy}\left[y\int_y^{\infty}\frac{f(r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]$ и учитывая следующие известные соотношения и обозначения:

$$\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}\frac{rW_0(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}=S_1(\lambda y)=-[\sin\lambda yY_1(\lambda)+\cos\lambda yJ_1(\lambda)];$$

$$\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}y\frac{rJ_0(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}=-\sin\lambda y,$$

$$\frac{d}{dy}\left[y\int_y^{\infty}\frac{W_1(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]=S_2(\lambda y)=\cos\lambda yY_1(\lambda)-\sin\lambda yJ_1(\lambda);$$

$$\frac{d}{dy}\left[y\int_y^{\infty}\frac{J_1(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]=\cos\lambda y,$$

после некоторых преобразований получим следующую систему интегральных уравнений:

$$H(y)=\int_R^{\infty}K_1(x,y)H(x)dx+\int_R^{x}K_2(x,y)S(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(1)}(y)B_k^*+f_1(y);$$

$$S(y)=\int_R^{\infty}K_3(x,y)S(x)dx+\int_R^{\infty}K_4(x,y)H(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}B_k^*X_k^{(2)}(y),$$

где использованы обозначения:

$$K_1(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{\frac{I_1(\lambda)e^{-(x+y)\lambda}}{K_1(\lambda)}+\frac{(e^{-2h\lambda}-1-2\lambda h)S_1(\lambda y)S_1(\lambda x)}{\pi\Delta_1(\lambda)\cdot\Delta_2(\lambda)}\right\}dx;$$

$$K_2(x,y)=-\frac{h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda S_1(\lambda y)S_2(\lambda x)d\lambda}{\Delta_1(\lambda)\cdot\Delta_2(\lambda)};\quad K_4(x,y)=\frac{h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda S_2(\lambda y)S_1(\lambda x)d\lambda}{\Delta_1(\lambda)\cdot\Delta_2(\lambda)};$$

$$K_3(x, y)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left\{\frac{I_1(\lambda)e^{-(x+y)\lambda}}{K_1(\lambda)}-\frac{S_2(\lambda x)[\lambda(e^{-2\lambda h}+1-2\lambda h)S_2(\lambda y)-2\Delta_2(\lambda)]}{\lambda\pi\Delta_1(\lambda)\cdot\Delta_2(\lambda)}\right\}d\lambda;$$

$$K_k^{(1)}(y)=-\frac{2\lambda_k^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda^2\mathrm{sh}^2\lambda h\, W_0(\lambda)S_1(\lambda y)d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Delta_1(\lambda)\cdot\Delta_2(\lambda)};$$

$$K_k^{(2)}(y)=-\frac{\lambda_k^2}{\pi(1-\nu)}\int_0^\infty\frac{\lambda^2S_2(\lambda y)[(1-2\nu)\mathrm{sh}\lambda h\mathrm{ch}\lambda h-\lambda h]\,W_0(\lambda)d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Delta_1(\lambda)\cdot\Delta_2(\lambda)}+$$

$$+\frac{e^{-\lambda_k y}}{2K_1(\lambda_k)(1-\nu)}\left[1-2\nu+\lambda_k y+\frac{\lambda_k K_0(\lambda_k)}{K_1(\lambda_k)}\right];$$

$$f_1(y)=P_0(\sqrt{y^2-1}-y)/2\pi.$$

Из уравнения (2.4) получим

$$B_k^*=\sum_{p=1}^\infty B_p^* a_{kp}+\int_R^\infty K_k^{(3)}(x)S(x)dx+\int_R^\infty K_k^{(4)}(x)H(x)dx; \qquad (2.9)$$

$$K_k^{(3)}(x)=\frac{1}{M(\lambda_k)}\int_0^\infty\frac{\lambda^2W_0(\lambda)S_2(\lambda x)[(\lambda^2+\lambda_k^2)\Delta_2(\lambda)+\lambda_k^2\mathrm{sh}2\lambda h]\,d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Delta_1(\lambda)\Delta_2(\lambda)};$$

$$K_k^{(4)}(x)=\frac{2\lambda_k^2}{M(\lambda_k)}\int_0^\infty\frac{\lambda^2W_0(\lambda)\mathrm{sh}^2\lambda hS_1(\lambda x)d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Delta_1(\lambda)\Delta_2(\lambda)};$$

$$a_{kp}=\frac{4\lambda_p^2\lambda_k^2}{M(\lambda_k)}\int_0^\infty\frac{\lambda^4W_0(\lambda)\mathrm{sh}^2\lambda h d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2(\lambda^2+\lambda_p^2)^2\Delta_2(\lambda)}.$$

Произведя замену переменных x и y на $\frac{R}{x}$ и $\frac{R}{y}$, функции $\overline{S}(x)=$ $=S\left(\frac{R}{x}\right)/x$, $\overline{H}(x)=H\left(\frac{R}{x}\right)/x$ представим в виде рядов по многочленам Лежандра $\overline{H}(x)=\sum_{k=1}^\infty(4n+1)Y_nP_{2n}(x)$, $\overline{S}(x)=\sum_{k=1}^\infty(4n-1)X_nP_{2n-1}(x)$, после чего по обычной процедуре ортогональных многочленов вместо уравнений (2.8) и (2.9) будем иметь следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_m = \sum_{n=1}^{\infty} A^{(1)}_{mn} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} B^{(1)}_{mn} Y_n + \sum_{k=1}^{\infty} C^{(1)}_{nk} B^*_k;$$

$$Y_m = \sum_{n=1}^{\infty} A^{(2)}_{mn} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} B^{(2)}_{mn} X_n + \sum_{k=1}^{\infty} C^{(2)}_{nk} B^*_k;$$

$$B^*_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} B^*_p + \sum_{n=1}^{\infty} A^{(1)}_{nk} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} B^{(1)}_{nk} Y_n, \tag{2.10}$$

где

$$A^{(1)}_{mn} = R(4n-1)\int_0^1 P_{2m-1}(y)\,dy \int_0^1 P_{2n-1}(x) K_3\left(\frac{R}{x}, \frac{R}{y}\right)(xy)^{-1} dx;$$

$$B^{(1)}_{mn} = R(4n+1)\int_0^1 P_{2m-1}(y)\,dy \int_0^1 P_{2n}(x) K_4\left(\frac{R}{x}, \frac{R}{y}\right)\cdot (xy)^{-1} dx;$$

$$A^{(2)}_{mn} = R(4n+1)\int_0^1 P_{2m}(y)\,dy \int_0^1 P_{2n}(x) K_1\left(\frac{R}{x}, \frac{R}{y}\right)(xy)^{-1} dx;$$

$$B^{(2)}_{mn} = R(4n-1)\int_0^1 P_{2m}(y)\,dy \int_0^1 P_{2n-1}(x) k_2\left(\frac{R}{x}, \frac{R}{y}\right)(xy)^{-1} dx;$$

$$C^{(1)}_{mk} = \int_0^1 X^{(1)}_k\left(\frac{R}{y}\right) P_{2m}(y) y^{-1} dy, \quad C^{(2)}_{mk} = \int_0^1 X^{(2)}_k\left(\frac{R}{y}\right) P_{2m-1}(y) y^{-1} dy;$$

$$A^{(1)}_{nk} = R(4n-1)\int_0^1 X^{(3)}_k\left(\frac{R}{x}\right) P_{2n-1}(x) x^{-1} dx,$$

$$B^{(1)}_{nk} = R(4n+1)\int_0^1 X^{(4)}_k\left(\frac{R}{x}\right) P_{2n}(x) x^{-1} dx;$$

$$d_m = \int_0^1 f_1\left(\frac{R}{y}\right) P_{2m}(y) y^{-1} dy.$$

Пользуясь асимптотическими представлениями для многочленов Лежандра [8], можно показать квазиполную регулярность полученных систем (2.10) [9]. Автор выражает благодарность В. С. Макаряну за внимание к работе.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Վ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Գլանային խոռոչով տարածության համար առանցքասիմետրիկ խնդիր

Դիտարկվում է գլանային խոռոչով տարածության առանցքասիմետրիկ խնդիրը, երբ գլանային խոռոչի մակերևույթի վրա ազդում է հավասարաչափ բաշխված հաստատուն բեռ։

Հանկելի և Վեբեր-Օրի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ, խնդրի լուծումը հագեցվում է ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը։

Օգտագործելով Լեժանդրի բազմանդամները, վերջինիս լուծումը բերվում է անվերջ գծային հանրահաշվական հավասարումների քվազիլիովին ռեգուլյար համակարգի լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. З. Васильев*, ПМ, АН УССР, т. 3, № 7 (1967). [2] *Б. Л. Абрамян*, ДАН АрмССР, т. 26, № 2 (1958). [3] *Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 22, № 2 (1969). [4] *В. С. Макарян, С. О. Папоян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 33, № 1 (1980). [5] *P. Srivastav, Narain Prem.* Int. J. Engng Sci., vol. 4, №6 (1966). [6] *Б. Л. Абрамян, В. С. Макарян*, Изв. АН АрмССР, т. 29, № 5 (1976). [7] *Г. Я. Попов*, ПММ, т. 37, вып. 6 (1977). [8] *Г. Бейтман, А. Эрдейн.* Высшие трансцендентные функции, Наука, М., т. 2, 1966. [9] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 36, вып. 5 (1972).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 612.813+611.831

ФИЗИОЛОГИЯ

С. А. Касабян

Электрофизиологические характеристики синаптической передачи через каудальное тройничное ядро

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 12/VI 1980)

Морфологическими исследованиями установлено, что аксоны нейронов каудального ядра спинального тракта тройничного нерва (каудальное тройничное ядро—КТЯ) оканчиваются в пределах ядра лицевого нерва (ЯЛН) ([1-5]). Показано также, что электрическая стимуляция КТЯ приводит к возникновению у мотонейронов ЯЛН моносинаптических возбудительных реакций со сложным временным течением ([6, 7]). Такие ВПСП часто наблюдались у мотонейронов, генерирующих групповые потенциалы действия (ПД) в ответ на стимуляцию КТЯ ([7]). Имеются основания полагать, что одним из факторов, способствующих возникновению группового разряда мотонейронов ЯЛН, являются повторные разряды нейронов КТЯ, выявляющиеся при стимуляции коры головного мозга, пирамидного тракта и афферентных нервов лица ([8-12]). Приведенные данные свидетельствуют о важной роли КТЯ в осуществлении рефлексов лицевой мускулатуры. Однако отсутствуют прямые доказательства участия эфферентных нейронов КТЯ в проведении кортикофугальной и афферентной импульсации к ЯЛН, а также их роли в организации группового разряда мотонейронов ЯЛН. Этому вопросу посвящено настоящее исследование.

Опыты проведены на взрослых кошках весом от 2,5 до 3,5 кг под нембуталовым наркозом, обездвиженных дитилином. Экстра- и внутриклеточное отведение из области КТЯ осуществлялось с помощью стеклянных микроэлектродов, заполненных 2М раствором цитрата калия. У части нейронов регистрация производилась квазивнутриклеточно. Для антидромной идентификации эфферентных нейронов КТЯ биполярными металлическими электродами стимулировалось ЯЛН на стороне отведения. Прямое раздражение КТЯ производилось также на стороне отведения в непосредственной близости от отводящего электрода. Пирамидный тракт раздражался контралатерально на уровне ножек мозга. Для возбуждения афферентных волокон, идущих в составе лицевого нерва, стимулировались его периферические ветви: заднеушная, дорсальная и вентральная. Местоположение отводящих и стимулирующих электродов верифицировалось на гистологических срезах мозга. Помимо этого, локализация стимулирующих электродов в ЯЛН контролировалась электрофизиологически, по наибольшей выраженности антидромного фокального потенциала, возникающего в ответ на стимуляцию ветвей лицевого нерва ([13]).

Из области КТЯ было зарегистрировано 73 нейрона, отвечающих антидромными ПД со скрытым периодом в среднем 0,3±0,08 мс (от 0.2 до 0,6 мс; n=73, рис. 1, *Д*), амплитуда которых достигала 50,0 мв. Критериями антидромной активации служили: 1) короткий и фиксированный скрытый период при строго пороговой и надпороговой ин-

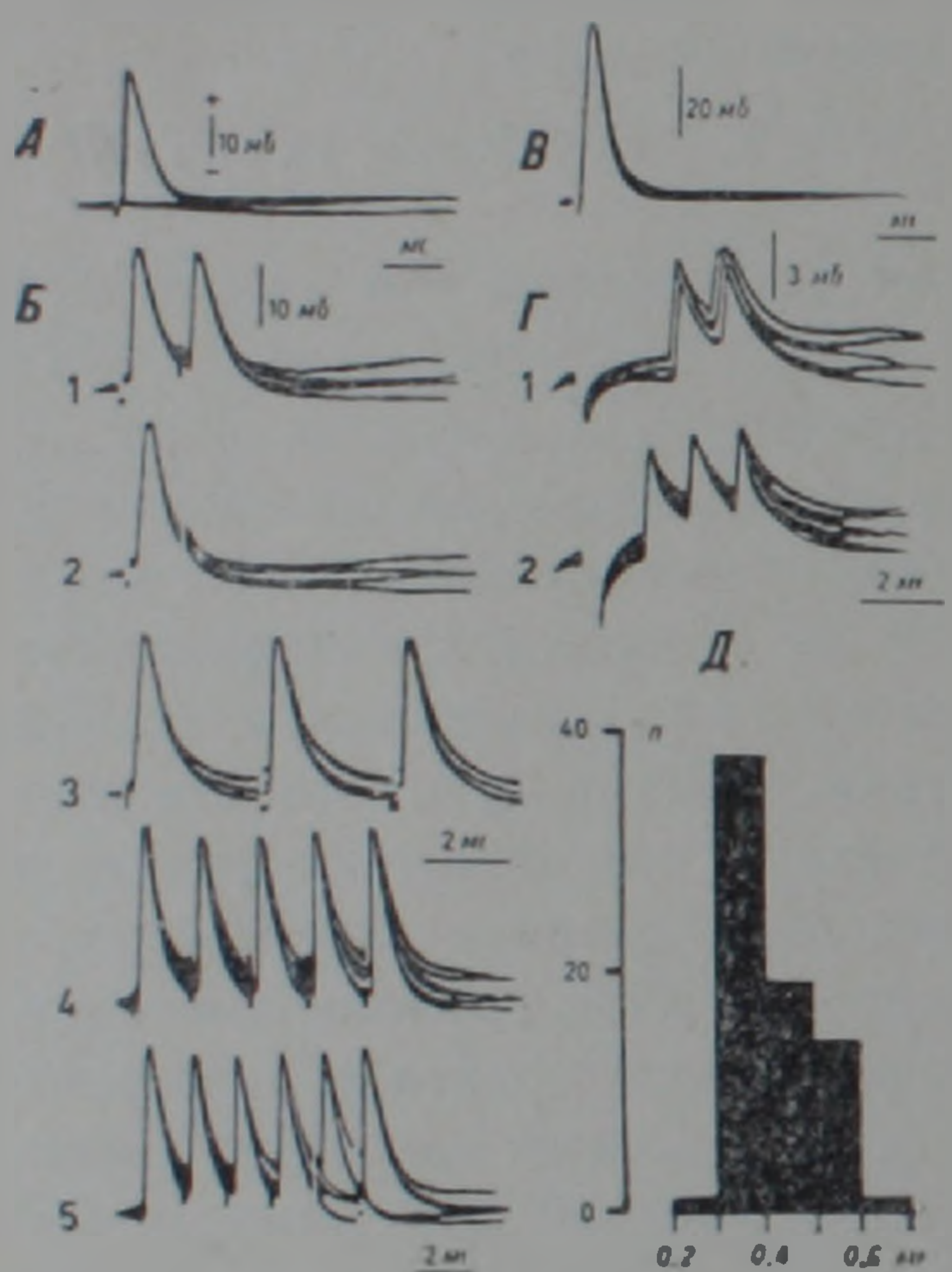


Рис. 1. Антидромная идентификация и ответы нейронов каудального тройничного ядра при стимуляции ядра лицевого нерва и каудального тройничного ядра. *А*—антидромный потенциал действия (ПД) при строго пороговой интенсивности стимуляции; *Б*—другой нейрон: *1*, *2*—парное раздражение ядра лицевого нерва с разными межстимульными интервалами; *3*—*5*—антидромные ПД при частоте стимуляции 320 в сек *(3)*, 500 в сек *(4)* и 670 в сек *(5)*; *В*, *Г*—ответы двух идентифицированных нейронов на прямое раздражение каудального тройничного ядра; *Г*$_{1,2}$—увеличение интенсивности стимуляции; *Д*—гистограмма распределения скрытых периодов антидромных ПД; по оси абсцисс время, мс; по оси ординат количество нейронов, n

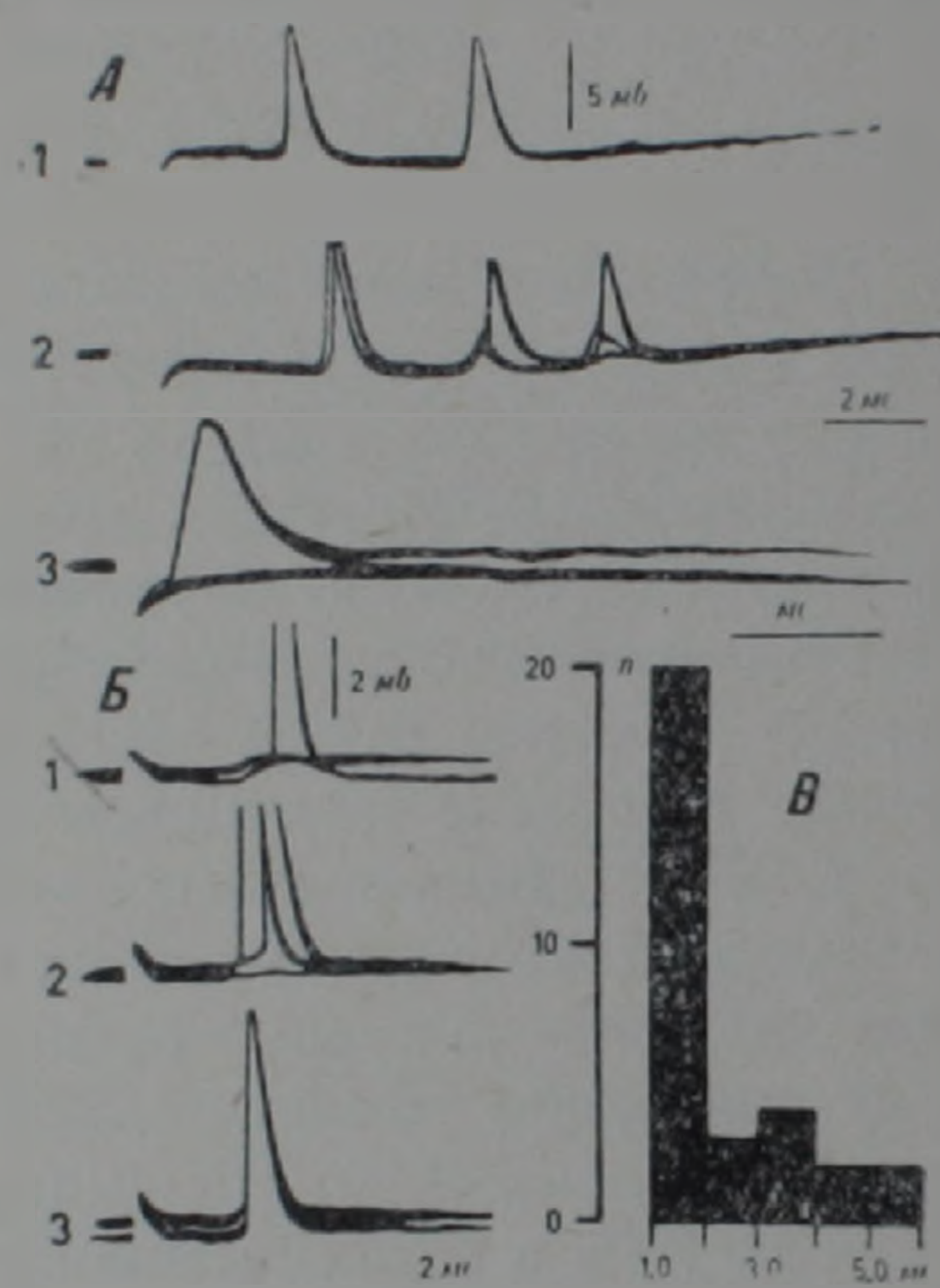


Рис. 2. Ответы эфферентных нейронов каудального тройничного ядра на стимуляцию пирамидного тракта. *А*—групповые потенциалы действия (ПД) при стимуляции пирамидного тракта: *1*, *2*—увеличение интенсивности стимуляции; *3*—антидромная идентификация нейрона; *Б*—ВПСП и одиночные ПД другого нейрона: *1*—*3*—увеличение интенсивности стимуляции; *В*—гистограмма распределения скрытых периодов ортодромных ПД, вызванных стимуляцией пирамидного тракта; по оси абсцисс время, мс; по оси ординат количество нейронов, n

тенсивности стимуляции; 2) возникновение ПД по принципу «все или ничего» (рис. 1, *А*); 3) малая длительность рефрактерного периода (рис. 1, *Б*$_{1,\ 2}$); 4) способность к воспроизведению ритма стимуляции вплоть до 900 имп/сек (рис. 1, *Б*$_{3-5}$).

Прямое раздражение КТЯ у большинства антидромно идентифицированных нейронов приводило к возникновению ПД без заметного скрытого периода (рис. 1, *В*). В ряде случаев ПД возникали с большим скрытым периодом (до 5,6 мс). Как правило, увеличение интенсивности раздражения уменьшало величину скрытого периода и вызывало появление повторных ПД (рис. 1, *Г*$_{1,\ 2}$). Частота импульсации в таком разряде достигала 1000 имп/сек.

Повторные разряды эфферентных нейронов КТЯ регистрировались и при стимуляции пирамидного тракта со скрытым периодом от 1,2 до 4,7 мс (в среднем $2{,}1 \pm 0{,}9$ мс; $n=30$, рис. 2, *А*$_{1,\ 2}$, *Б*, *В*). Тетаническое раздражение пирамидного тракта в пределах 100 имп/сек выявило высокую ответоспособность исследованных нейронов. Учитывая время проведения импульса от области стимуляции до КТЯ (равное 0,4—1,7 мс)*, а также возникновение ВПСП в нейронах КТЯ со скрытым периодом от 1,1 до 2,9 мс, можно предположить, что зарегистрированные ПД со скрытым периодом от 1.2 до 2,0 мс являются результатом моносинаптической активации эфферентных нейронов КТЯ.

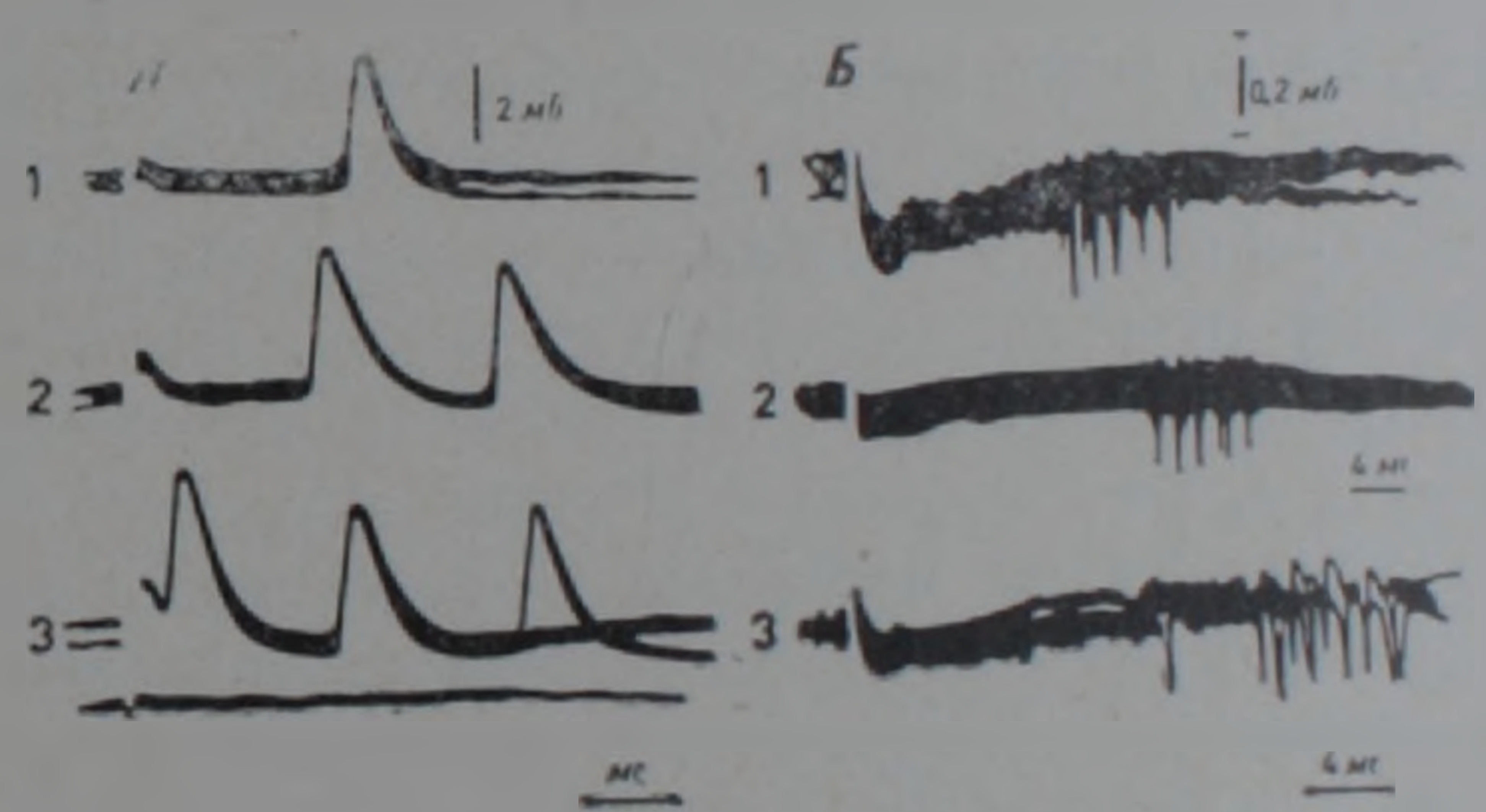


Рис. 3. Повторные разряды эфферентных нейронов каудального тройничного ядра при стимуляции ядра лицевого нерва и периферических ветвей лицевого нерва. *А*—стимуляция ядра лицевого нерва: *1—3*—увеличение интенсивности стимуляции. Первый ПД на *3*—антидромный, нижняя запись—внеклеточный потенциал после выхода микроэлектрода из клетки; *Б*—стимуляция периферических ветвей лицевого нерва, другой нейрон, внеклеточная регистрация: *1*—стимуляция дорсальной ветви; *2*—стимуляция заднеушной ветви; *3*—стимуляция вентральной ветви

---

* Указанное время высчитано с учетом средних скоростей проведения возбуждения по аксонам «медленных» и «быстрых» нейронов пирамидного тракта (соответственно 14 и 60 м/сек) ([14]) и расстояния между областью раздражения (ножки мозга) и местом регистрации ПД, равного 24 мм.

Высокочастотная импульсация в эфферентных нейронах КТЯ выявлялась при активации их аксонов благодаря возвратному коллатеральному возбуждению (рис. 3, *А*), а также при стимуляции периферических ветвей лицевого нерва (рис. 3, *Б*).

Полученные данные представляют прямое доказательство участия эфферентных нейронов КТЯ в проведении афферентной импульсации к мотонейронам ЯЛН. Скрытые периоды антидромных ответов эфферентных нейронов КТЯ (0,2—0,6 мс) совпадают с временем выявления пресинаптического фокального потенциала в ЯЛН на раздражение КТЯ (0,32—0,63 мс) и при времени одной синаптической задержки, равном 0,5 мс, укладываются в скрытые периоды моносинаптических ВПСП мотонейронов ЯЛН (0,5—1,0 мс), возникающих на стимуляцию КТЯ ([6–7]).

В проведенных экспериментах наряду с прямыми ответами нейронов КТЯ при его стимуляции наблюдалась и транссинаптическая их активация со значительным скрытым периодом. Это свидетельствует о том, что поступление афферентного импульса в определенную часть ядра сопровождается задержанной возбудительной реакцией нейрональных элементов другого отдела КТЯ. Так как указанные реакции регистрировались у эфферентных клеток, вероятно, что к нейронам КТЯ проводится импульсация со значительной временной дисперсией. Групповые ПД, также наблюдаемые при прямом раздражении, значительно осложняют структуру импульсного разряда, проводящегося по аксонам эфферентных нейронов КТЯ. Определяя состояние синаптической мембраны мотонейронов ЯЛН, такой разряд, повидимому, обусловливает разнообразие типов возбудительных реакций двигательных нейронов мимических мышц. Показано, что при стимуляции КТЯ возникновение одиночных ПД у мотонейронов ЯЛН более характерно для их моносинаптической активации. Градуальные деполяризационные сдвиги мембранного потенциала с групповыми ПД выявляются с более длительным скрытым периодом и при увеличении интенсивности стимуляции ([7]). Возможно, что высокочастотная импульсация в пресинаптическом волокне создает условия для эффективной суммации индивидуальных ВПСП, создаваемых каждым ПД в разряде, что приводит к созданию на соме мотонейронов ЯЛН длительной деполяризации значительной амплитуды ([15]).

Как было показано выше, стимуляция пирамидного тракта может привести к моносинаптической активации эфферентных нейронов КТЯ. Если учесть, что моносинаптические ПД в них выявлялись со скрытым периодом от 1,2 до 2,0 мс, скрытый период их антидромной активации колебался от 0,2 до 0,6 мс, время одной синаптической задержки—0,5 мс, то дисинаптические ВПСП в мотонейронах ЯЛН при стимуляции пирамидного тракта должны выявляться с латенцией от 1,9 до 3,1 мс. Эти величины соответствуют скрытым периодам ВПСП, зарегистрированных в мотонейронах ЯЛН на раздражение пирамидного тракта в области ножек мозга: 1,7—3,7 мс ([10]). Участие эфферентных нейронов КТЯ в проведении кортикофугальной и периферической импульсации, вероятно, ответственно и за ступенчатые изменения амплитуды ВПСП, наблюдаемые у мотонейронов ЯЛН при стимуляции пирамидного тракта и афферентных нервов лица ([10, 11]).

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՂԱՍԱԲՅԱՆ

Պոչավոր եռարմատ կորիզով սինապտիկ հաղորդման էլեկտրաֆիզիոլոգիական բնութագրերը.

Սուր փորձի պայմաններում ներբջջային միկրոէլեկտրոդային գրանցման միջոցով կատարվել է կատվի դիմային ներվի կորիզի վրա պրոյեկտվող պոչավոր եռարմատ կորիզի նեյրոնների հակընթաց իդենտիֆիկացիան։

Ցույց է տրվել, որ նրանց աքսոնների, պիրամիդային համակարգի, դիմային ներվի պերիֆերիկ ճյուղերի և պոչավոր եռարմատ կորիզի գրանցվող շրջաններին հարակից կետերի գրգռման ժամանակ այդ նեյրոններում նկատվում են կրկնակի գործողության պոտենցիալներ. Ներկայացվել են ուղղակի ապացույցներ դիմային ներվի կորիզի շարժիչ նեյրոններին գնացող պիրամիդային իմպուլսացիայի երկսինապտիկ հաղորդման և նրանց սոմատիկ թաղանթների վրա խմբային գործողության պոտենցիալներով դեպոլյարիզացիոն շեղումների ստեղծման գործում գրանցվող նեյրոնների մասնակցության վերաբերյալ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. B. Carpenter, G. R. Hanna*, J. Comp. Neurol., vol. 117, 117 (1961). [2] *J. D. Dunn, H. A. Matzke*, J. Comp. Neurol., vol. 133, 429 (1968). [3] *R. S. Erzurumlu, H. P. Killackey*, J. Comp. Neurol., vol. 188, 75 (1979). [4] *W. A. Stewart, R. B. King*, J. Comp. Neurol., vol. 123, 271 (1963). [5] *R. K. Tiwari, R. B. King*, J. Comp. Neurol., vol. 158, 191 (1974). [6] *C. Christensen, N. Iwata, S. T. Kitai*, Anat. Rec., vol. 172, 289 (1972). [7] *В. В. Фанарджян, С. А. Касабян, Л. Р. Манвелян*, Нейрофизиология, т. 12, № 3, (1980). [8] *I. Darian-Smith*. In: International review of Neurobiology. Ed. by C. C. Pfeiffer and J. R. Smithies. Academic Press, New-York and London, vol. 29, 301 (1966). [9] *N. Iwata, S. T. Kitai, S. Olson*, Brain Res., vol. 43, 662 (1972). [10] *T. Tanaka*, Brain Res., vol. 103, 389 (1976). [11] *T. Tanaka*, Brain Res., vol. 123, 378 (1977). [12] *T. Tanaka, H. Yu, S. T. Kitai*, Brain Res., vol. 33, 504 (1971). [13] *А. И. Пилявский, Ю. П. Лиманский, Е. В. Гура*, Нейрофизиология, т. 4, № 3 (1972). [14] *K. Takahashi, K. Kubota, M. Uno*, J. Neurophysiol., vol. 30, 22 (1967). [15] *W. H. Calvin*, Brain Res. vol. 84, 1 (1975).