ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXII

1981, № 2

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. քարտուղար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹՍՈՒԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԲՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год.
На русском языке

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ Էջ

Է. Վ. Եղիազարյան—*Բույլյան հավասարումների սիստեմների մետրիկական բնութագրիչները* 67

Ա. Ն. Հայրապետյան—*Ֆատուի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին* . 73

Ե. Դ. Ֆայնբերգ—*Ամբողջ ֆունկցիայի ինտեգրալի գնահատականի և ըստ ոչ ադիտիվ չափի ինտեգրալի մասին* 80

Ժ. Դ. Նիկողոսյան—*Գրաֆի մաքսիմալ ցիկլի մասին* 82

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Օ. Մ. Սապոնջյան, Վ. Ա. Աբզումանյան—*Եզրագծով ազատ հենված կիսաշրջանային սալի ծռումը շրջանի մակերևսով ազդող բեռի դեպքում* 88

Ա. Ա. Վանցյան—*Մետաղներում բարակ մարմնի ներթափանցման խորությունների որոշումը* 95

ՀԻԴՐՈՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ռ. Մ. Բաբսեղյան—*Բազմաշափ ֆիլտրացիայի հիմնական հավասարումները դեֆորմացիայի ենթարկվող գրունտներում* 103

ՖԻԶԻԿԱ

Դ. Յու. Կրյուչկով—*Լույսի ռեզոնանսային ցրումը խոտորված ատոմային համակարգի կողմից* 109

ՌԱԴԻՈՖԻԶԻԿԱ

Կ. Ա. Բարսուկով, Դ. Ա. Գրիգորյան—*Պարբերաբար շարժվող սահմանով ծավալային ռեզոնատոր* 114

ԳԵՆԵՏԻԿԱ

Դ. Խ. Ազարյան, Ս. Մ. Սարգսյան, Դ. Գ. Խաչատրյան—*Սերին շղթայակցված ռեցեսիվ լեթալ խաղողի ողկույզների մոտ* 120

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Հ. Ղազարյան, Է. Վ. Ավագյան—*Արմատային արտազատումների ազդեցությունը մեկուսացված տերևների կենսագործունեության հարցի շուրջ* . . . 124

© Издательство АН АрмССР. Доклады АН АрмССР. 1981.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА Стр.

Э. В. Егиазарян—Метрические свойства систем булевых уравнений . . 67
А. Н. Айрапетян—Об одном обобщении теоремы Фату 73
Е. Д. Файнберг—Об оценке индикатора целой функции и интеграле по неаддитивной мере 78
Ж. Г. Никогосян—О максимальном цикле графа 82

МЕХАНИКА

О. М. Сапонджян, В. А. Арзуманян—Изгиб свободно опертой по контуру полукруглой плиты под действием нагрузки, распределенной по площади круга 88
А. А. Ванцян—Определение глубин проникания тонкого тела в металлы 95

ГИДРОМЕХАНИКА

Р. М. Барсегян—Основные уравнения многомерной фильтрации в деформируемых грунтах 103

ФИЗИКА

Г. Ю. Крючков—Резонансное рассеяние света возмущенной атомной системой 109

РАДИОФИЗИКА

К. А. Барсуков, Г. А. Григорян—Объемный резонатор с периодически движущейся границей 114

ГЕНЕТИКА

Г. Х. Азарян, С. М. Саркисян, Г. Г. Хачатрян—Сцепленная с полом рецессивная леталь у гроздевой листовертки 120

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. О. Казарян, Э. В. Авакян—К вопросу о влиянии корневых выделений на жизнедеятельность изолированных листьев 124

Индекс 77730

CONTENTS

MATHEMATICS P.

E. V. Eghiazarian—Metric qualities of the Boolean equation system . 67
A. N. Hairapetian—On one generalization of Fatou theorem . . . 73
H. D. Feinberg—Entire function indicator estimate and integral by non-additive measure. 78
G. G. Nicoghossian—On maximal cycle of a graph 82

MECHANICS

O. M. Saponjian, V. A. Arzumanian—Bending of the semicircular plate freely supported along its contour under the action of the load distributed on the area of a circle 88
A. A. Vantoyan—The determination of depths of penetration of thin body in metals 95

HYDROMECHANICS

R. M. Barsegian—The basic equations of the multi-measured filtration in the deforming grounds. 103

PHYSICS

G. Yu. Kruchkov—Resonance light scattering by perturbating atomic system 109

RADIOPHYSICS

K. A. Bursukov, G. A. Grigorian—Cavity resonator with periodically moving boundary 114

GENETICS

G. Kh. Azarian, S. M. Sarkissian, G. G. Khachatrian—Sex-linked recessive lethal in grape moths 120

PLANT PHYSIOLOGY

B. O. Kazarian, E. B. Avakian—On the question of the root formation influence on the vital functions of the isolated leaves 124

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 5.04.1980. Подписано к печати 15.06.1981. ВФ 04874.
Бумага № 1, 70×108 1/16. Плоскопечать. Печ. лист. 4. Усл. печ. лист. 5,6.
Учет.-изд. 4,35. Тираж 500. Заказ 280. Издат. 5450.
375019, Ереван, Барекамутян, 24-г. II эт., 1 к.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 519.71

МАТЕМАТИКА

Э. В. Егиазарян

Метрические свойства систем булевых уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/IV 1980)

Известно, что многие вопросы функционирования дискретных управляющих систем сводятся к решению систем булевых уравнений с зависимыми или независимыми переменными либо к определению числа их решений. Таковы, например, некоторые задачи синтеза цифровых автоматов, нахождения внутренне и внешне устойчивых множеств в графе, вопросы теории тестов и др. Системы булевых уравнений являются удобной моделью для исследования поведения управляющей системы, в частности, ЦЭВМ. Постановки вопросов о поведении управляющих систем в «типичном» случае восходят к работам К. Шеннона и О. Б. Лупанова. В настоящей работе для типичного случая приводятся асимптотические оценки числа решений систем булевых уравнений и оценивается сложность описания множества всех решений системы посредством дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.), реализующих характеристические функции множества решений.

Всюду в статье под log понимается логарифм по основанию 2. Все не определяемые здесь понятия можно найти в ([1-3]).

1. Пусть $S_{n,l}$ — множество всех различных систем из l уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_l(x_1, \ldots, x_n) = 1 \end{cases}, \tag{1}$$

где $f_i \in P_n$, $f_i \neq f_j$ при $i \neq j (1 \leqslant i, j \leqslant l)$, а P_n обозначает множество всех булевых функций, зависящих от n переменных. Бинарный набор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется решением системы (1), если $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Относительно числа решений $t(S)$ почти всех систем S множества $S_{n,l}$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. 1. *Если $n-l \to \infty$ при $n \to \infty$, то для почти всех систем S множества $S_{n,l}$ имеет место $t(S) \sim 2^{n-l}$.*

2. *Если* $n-l\to-\infty$ *при* n, $l\to\infty$, *то почти все системы множества* $S_{n,l}$ *не имеют решений.*

3. *Если* $n-l$ *ограничено при* $n\to\infty$, *то для почти всех систем* S *множества* $S_{n,l}$ *число решений ограничено сверху произвольной функцией* $\varphi(n)$, *удовлетворяющей условию* $\varphi(n)\to\infty$ *при* $n\to\infty$.

2. Пусть $S_{l,m,n}$ — множество всех систем из l уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ f_l(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=1 \end{cases} \tag{2}$$

где $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ —булевые переменные, $y_j(1\leqslant j\leqslant m)$ —неизвестные булевые функции от n переменных; $f_i\neq f_j$ при $i\neq j$ $(1\leqslant i, j\leqslant l)$. Набор булевых функций $(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$ называется решением системы (2), если при подстановке в систему (2) вместо переменных y_j функций φ_j, $j=1,2, \ldots, m$, все уравнения обращаются в тождества. Для числа решений $t(S)$ систем S множества $S_{l,m,n}$ справедлива

Теорема 2. 1. *Если* $m-l-n\to\infty$ *при* n, $m\to\infty$, *то для почти всех систем* S *множества* $S_{l,m,n}$ $t(S)\sim 2^{(m-l)2^n}$.

2. *Если* $m-l-\log(n\ln 2)\gg-\log(1+2^{-l})+\dfrac{1}{\varphi(n)}$, $\varphi(n)\to\infty$ *при* $n\to\infty$ *и* $\varphi(n)=o(n)$, *то почти все системы множества* $S_{l,m,n}$ *имеют хотя бы одно решение.*

3. *Если* $m-l-\log(n\ln 2)\leqslant-\log(1+2^{-l})-\dfrac{1}{\psi(n)}$, *где* $\psi(n)\to\infty$ *и* $\psi(n)=o(n)$, *то почти все системы множества* $S_{l,m,n}$ *не имеют решений.*

3. Для описания множества M_S всех решений системы булевых уравнений S достаточно реализовать булевую функию f_S, равную единице на множестве M_S и нулю на $E^n\setminus M_S$, некоторой д. н. ф. (если $M_S\neq\varnothing$). Тогда каждая элементарная конъюнкция в д. н. ф., реализующей функцию f_S, будет задавать „семейство„ решений, а объединение всех семейств, соответствующих конъюнкциям в д. н. ф., даст множество M_S. Сложность описания множества решений системы S в большой мере характеризуется числом и рангом конъюнкций в д. н. ф., реализующей f_S. Поэтому вызывает интерес исследование длины сокращенной и кратчайшей д. н. ф., реализующих f_S, их „строение", число тупиковых д. н. ф. и т. д.

Будем называть вышеопределенную функцию f_S характеристической функцией системы S. Обозначим через $P_{n,l}$ „множество" всех булевых функций, зависящих от n переменных, такое, что каждая функция повторяется в нем столько раз, для скольких систем из множества $S_{n,l}$ она является характеристической. Очевидно, что $P_{n,l}=P_n$, а при $l>1$ существуют функции, которые не являются характеристическими ни для каких систем из $S_{n,l}$. Относительно функций множества $P_{n,l}$ справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. 1. *Если* $\log\frac{\log n}{l}\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то у почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *для длины сокращенной д. н. ф.* $s(f)$ *имеет место*

$$s(f)\sim\sum_{k=\mu}^{\mu+1}\frac{C_n^k 2^{n-k}}{2^{l2^k}}\left(1-\frac{1}{2^{l2^k}}\right)^{n-k},$$

где $\mu=\left[\log\frac{\log n}{l}\right]$.

2. *Если* $\log\frac{\log n}{l}\not\to\infty$, *а* $n-l\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то для почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *имеет место*

$$s(f)\sim\sum_{k=\mu_1}^{\mu_2}\frac{C_n^k 2^{n-k}}{2^{l2^k}}\left(1-\frac{1}{2^{l2^k}}\right)^{n-k},$$

где $\mu_1=\max\{0,\ \mu\}$, $\mu_2=\max\{0,\ \mu+2\}$.

Теорема 4. *Пусть* $n-l\to\infty$. *Тогда для почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *длина* $p(f)$ *кратчайшей д. н. ф. удовлетворяет неравенству*

$$p(f)\geqslant\begin{cases}\dfrac{l2^{n-l}(1-\delta)}{\log n\log\frac{\log n}{l}}\ (0<\delta<1)\ \textit{при}\ \dfrac{\log n}{l}\to\infty;\\[2ex] \dfrac{l2^{n-l-3}(1-\delta_{n,l})}{\log n\log\frac{\log n}{l}}\ (\delta_{n,l}\to 0)\ \textit{при}\ \dfrac{\log n}{l}>2\ \text{и}\ \dfrac{\log n}{l}\not\to\infty(n\to\infty);\\[2ex] \dfrac{l2^{n-l-3}(1-\delta_{n,l})}{\log n}\ (\delta_{n,l}\to 0)\ \textit{при}\ 1<\dfrac{\log n}{l}\leqslant 2;\\ 2^{n-l-3}(1-\delta_{n,l})(\delta_{n,l}\to 0)\ \textit{при}\ \log n\leqslant l.\end{cases}$$

Теорема 5. *При* $\frac{\log n}{l}\to\infty$ *для почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *длина* $p(f)$ *кратчайшей д. н. ф. удовлетворяет неравенству*

$$p(f)<\frac{l2^{n-l+1}(1+\delta'_{n,l})}{\log n\log e},\quad \delta'_{n,l}\to 0\ \textit{при}\ n\to\infty.$$

Теорема. 6. *Пусть* $n-l\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда для почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *число* $t(f)$ *тупиковых д. н. ф. удовлетворяет неравенствам:*

1. *Если* $\frac{\log n}{l}\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$t(f)<(2^{2^{n-l}})(1-\varepsilon_1(n))\log n(\log\log n-\log e),$$
$$\varepsilon_1(n)\to 0\ \textit{при}\ n\to\infty.$$

2. *Если* $2<\frac{\log n}{l}\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$t(f)<(2^{2^n-l})^{((1+\varepsilon_2(n))\log n\log\left(\frac{8\log n}{l}\log\frac{\log n}{l}\right)},$$

$$\varepsilon_2(n)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

3. *Если* $1<\frac{\log n}{l}\leqslant 2$, *то*

$$t(f)<(2^{2^n-l})^{5(1+\varepsilon_3(n))\log n},$$

$$\varepsilon_3(n)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

4. *Если* $\frac{\log n}{l}\leqslant 1$, *то*

$$t(f)<(2^{2^n-l})^{4(1+\varepsilon_4(n))\log n},$$

$$\varepsilon_4(n)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Перечисленные свойства почти всех булевых функций множества $P_{n,l}$ при $l=1$ исследовались в работах ([1,4]).

4. Пусть не всюду определенная (частичная) функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на множестве $M^f\subseteq E^n$ и принимает значения 0 и 1. Множество M^f разбивается на два подмножества M_0^f и M_1^f ($M^f = M_0^f\cup M_1^f$, $M_0^f\cap M_1^f=\varnothing$) такие, что

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\begin{cases}1 \text{ на } M_1^f,\\ 0 \text{ на } M_0^f,\\ \text{не определена на } E^n\setminus M^f.\end{cases}$$

Обозначим через Q_n множество всех частичных функций, зависящих от n переменных. Пусть $Q_{n,l}$—множество всех различных систем вида

$$\begin{cases}f_1(x_1, \ldots, x_n)=1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_l(x_1, \ldots, x_n)=1\end{cases}\tag{3}$$

где $f_i\in Q_n$, $f_i\neq f_j$ при $i\neq j (1\leqslant i, j\leqslant l)$.

Бинарный набор $\bar{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется решением системы (3), если $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1$, $i=1, 2, \ldots, l$. Относительно числа решений $t(Q)$ почти всех систем Q множества $Q_{n,l}$ в ([3]) приведено утверждение, аналогичное теореме 1.

Сопоставим каждой системе $Q\in Q_{n,l}$ характеристическую булевую функцию $f_Q(x_1, \ldots, x_n)$, равную единице на множестве решений M_Q системы Q и нулю на $E^n\setminus M_Q$. Пусть $Q_{n,l}$—множество булевых функций, зависящих от n переменных такое, что каждая функция встречается в нем столько раз, для скольких систем множества $Q_{n,l}$ она является характеристической функцией. Для почти всех функций множества $Q_{n,l}$ в ([3]) приведены оценки числа k-мерных интервалов

и асимптотика длины сокращенной д. н. ф., реализующей функцию из множества $Q_{n,l}$. В настоящей статье приводятся другие метрические характеристики.

Теорема 7. *Пусть* $n-l\log 3\to\infty$. *Тогда для почти всех функций* f *множества* $Q_{n,l}$ *длина* $p(f)$ *кратчайшей д. н. ф. удовлетворяет неравенству*

$$p(f)\geqslant\begin{cases}\dfrac{l2^n3^{-l}(1-\delta)}{\log_3 n\log\dfrac{\log_3 n}{l}}\ (0<\delta<1)\ \textit{при}\ \dfrac{\log_3 n}{l}\to\infty;\\[2ex] \dfrac{l2^{n-3}3^{-l}(1-\delta_{n,l})}{\log_3 n\log\dfrac{\log_3 n}{l}}\ (\delta_{n,l}\to 0)\ \textit{при}\ \dfrac{\log_3 n}{l}>2\ \text{и}\ \dfrac{\log_3 n}{l}\not\to\infty\ (n\to\infty);\\[2ex] \dfrac{l2^{n-3}3^{-l}(1-\delta_{n,l})}{\log_3 n}\ (\delta_{n,l}\to 0)\ \textit{при}\ 1<\dfrac{\log_3 n}{l}\leqslant 2;\\ 2^{n-3}3^{-l}(1-\delta_{n,l})(\delta_{n,l}\to 0)\ \textit{при}\ \log_3 n\leqslant l.\end{cases}$$

Теорема 8. *При* $\dfrac{\log_3 n}{l}\to\infty$ *для почти всех функций* f *множества* $Q_{n,l}$ *длина* $p(f)$ *кратчайшей д. н. ф. удовлетворяет неравенству*

$$p(f)<\frac{l2^n3^{-l+1}(1+\delta'_{n,l})}{\log n\log e},\ \delta'_{n,l}\to 0\ \textit{при}\ n\to\infty.$$

Теорема 9. *Пусть* $n-l\log 3\to\infty$ при $n\to\infty$. *Тогда для почти всех функций* f *множества* $Q_{n,l}$ *число* $t(f)$ *тупиковых д. н. ф. удовлетворяет неравенствам:*

1. *Если* $\dfrac{\log_3 n}{l}\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$t(f)<(2^{2n}3^{-l})^{(1+\varepsilon_n)\log n\log\frac{\log_3 n}{l}},\ \varepsilon_n\to 0$$

2. *Если* $2<\dfrac{\log_3 n}{l}\not\to\infty$ $(n\to\infty)$, *то*

$$t(f)<(2^{2n}3^{-l})^{(1+\varepsilon'_n)\log n\log\left(\frac{8\log_3 n}{l}\log\frac{\log_3 n}{l}\right)},\quad \varepsilon'_n\to 0$$

3. *Если* $1<\dfrac{\log n}{l}\leqslant 2$, *то*

$$t(f)<(2^{2n}3^{-l})^{5(1+\varepsilon''_n)\log n},\ \varepsilon''_n\to 0$$

4. *Если* $\dfrac{\log_3 n}{l}\leqslant 1$, *то*

$$t(f)<(2^{2n}3^{-l})^{4(1+\varepsilon'''_n)\log n},\ \varepsilon'''_n\to 0$$

Ереванский государственный
университет

Է. Վ. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ

Բուլյան հավասարումների սիստեմների մետրիկական բնութագրիչներ

Աշխատանքում դիտարկվում է n-փոփոխականից կախված բուլյան և մասնակի բուլյան ֆունկցիաներով | հավասարումներից կազմված սիստեմների բազմությունը։ | պարամետրի փոփոխման լրիվ սպեկտրում կամ գնահատվում է լուծումների քանակը, կամ արտածվում է նրանց ասիմպտոտիկան համարյա բոլոր սիստեմների համար։ Սիստեմի լուծումների բազմությունը նկարագրելու համար սահմանվում է բուլյան ֆունկցիա, որը սիստեմի լուծումների բազմության վրա ընդունում է մեկ արժեքը, և համարյա բոլոր սիստեմների համար գնահատվում է այդ ֆունկցիան իրացնող դ. Ն. Ա.-երի բարդությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Глаголев*, в сб.: Проблемы кибернетики, вып. 19 (1967) [2] *Э. В. Егиазарян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 2 (1979), [3] *Ю. И. Журавлев*, Труды МИАМ СССР, т. 51, (1958). *А. А. Сапоженко*, в сб.: Дискретный анализ, вып. 21, Новосибирск (1972).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Н. Айрапетян

Об одном обобщении теоремы Фату

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 4/VI 1980)

1. В статье ([1]) отмечалось, что голоморфная функция $f(z)$, определенная в круге $D:|z|<1$ на комплексной z-плоскости и удовлетворяющая условию

$$\iint_D |f'(z)|dxdy<+\infty,\ z=x+iy, \tag{1}$$

обязана принадлежать классу Харди H^1, и значит, в частности, она обладает конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках границы $\Gamma:|z|=1$. Замена условия (1) более слабым условием

$$\iint_D |f'(z)|[1+|f(z)|^2]^{-1}dxdy<+\infty \tag{2}$$

не сохраняет ни одного из названных выше свойств функции $f(z)$. Однако в этом случае можно утверждать, что на Γ существует такое множество M полной меры, $\operatorname{mes} M=2\pi$, в каждой точке которого почти каждая хорда круга D переходит при отображении $w=f(z)$ в спрямляемую кривую на сфере Римана Ω над w-плоскостью (см. ([2])). Более того, этим свойством обладает каждая мероморфная функция $f(z)$, определенная в D и удовлетворяющая условию (2).

Положим $\rho(f(z))=|f'(z)|[1+|f(z)|^2]^{-1}$ и для произвольной точки $\zeta\in\Gamma$ обозначим через $h(\zeta,\alpha)$ хорду круга D, оканчивающуюся в ζ и образующую с радиусом в этой точке угол раствора α; $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогда, как отмечалось выше, в каждой точке $\zeta\in M$ мероморфная в D функция $f(z)$, удовлетворяющая условию (2), обладает тем свойством, что интегралы

$$\int_{h(\zeta,\alpha)} \rho(f(z))|dz|<+\infty \tag{3}$$

конечны для почти всех значений $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Кроме того, можно утверждать, что кривые $f(h(\zeta, \alpha))$ для всех значений $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, для которых выполняется (3) оканчиваются в одной и той же точке на Ω.

Используя этот результат и общее утверждение из ([3]) (теорема 2), непосредственно получаем уточнение теоремы А. И. Плеснера для мероморфной (голоморфной) функции, удовлетворяющей условию (2). Именно, для такой функции $f(z)$ почти все точки границы Γ можно разбить на два непересекающихся множества—множество $F(f)$, в точках которого $f(z)$ имеет определенные угловые граничные значения, и множество $P(f)$, в точках которого каждая хорда содержит P-последовательность функции $f(z)$. Последнее означает, что каждая хорда $h(\zeta, \alpha)$, $\zeta\in P(f)$ содержит такую последовательность точек $\{z_n\}$, $n=1, 2, \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta$, каждая бесконечная подпоследовательность которой обладает следующим свойством: в объединении неэвклидовых кругов с неэвклидовыми центрами в $\{z_{n_k}\}$ $k=1,2, \ldots$, произвольного неэвклидова радиуса $\varepsilon>0$ функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение на Ω, за возможными не более двумя исключениями.

В статье ([4]) получен более сильный результат. Рассмотрим произвольную положительную, невозрастающую и непрерывную функцию $\mu(t)$, определенную на полуоси $[0, +\infty]$. Если голоморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\iint\limits_D \mu(|f(z)|)|f'(z)|dxdy<+\infty, \tag{4}$$

то $\Gamma=F(f)\cup P(f)\cup E$ mes $E=0$ (([4]), теорема 3).

2. Нами будет доказана

Теорема 1. *Если голоморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию* (4) *и функция $\mu(t)$ обладает дополнительно свойством*

$$\int\limits_0^\infty \mu(t)dt=+\infty, \tag{5}$$

то $\Gamma=F(f)\cup E$, mes $E=0$.

Заметим, что функция $\mu(t)=(1+t^2)^{-1}$, фигурирующая в условии (2) для голоморфной функции $f(z)$, не удовлетворяет условию (5).

3. Доказательство теоремы 1 разобьем на этапы, которые оформим в виде лемм. Первая из них доказана в (5), хотя в явном виде там не сформулирована (см. ([5]), стр. 121—122).

Лемма 1. *Если голоморфная в D функция $f(z)$ имеет в точке $\zeta\in\Gamma$ конечные пределы по почти всем хордам круга D, оканчи-*

вающимся в ζ, то точка ζ или принадлежит множеству $F(f)$, или в D существует жорданова кривая L_ζ, оканчивающаяся в ζ, по которой $f(z)$ стремится к значению ∞, когда $z\to\zeta$, $z\in L_\zeta$. В последнем случае точка ζ является точкой неопределенности (по Багемилу) функции $f(z)$.

Лемма 2 ([2], *теорема* 3). *Пусть неотрицательная действительнозначная функция $U(z)$ непрерывна в D и удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_D U(z)dxdy<+\infty. \tag{6}$$

Тогда на Γ существует множество M, $\operatorname{mes} M=2\pi$, в каждой точке ζ которого для почти всех хорд $h(\zeta, \alpha)$ выполняется свойство

$$\int\limits_{h(\zeta,\alpha)} U(z)|dz|<+\infty. \tag{7}$$

Лемма 3. *Пусть положительная, невозрастающая функция $\mu(t)$, определенная на $[0, +\infty]$, удовлетворяет условию* (5), *и пусть $f(z)$—произвольная голоморфная в D функция. Тогда для любой хорды $h(\zeta, \alpha)$ в точке $\zeta\in\Gamma$, по которой*

$$\int\limits_{h(\zeta,\alpha)} \mu(|f(z)|)|f'(z)||dz|<+\infty, \tag{8}$$

можно утверждать, что существует конечный $\lim\limits_{z\to\zeta} f(z)$, когда $z\to\zeta$, $z\in h(\zeta, \alpha)$.

Доказательство. Известно, что в этих условиях существует определенный $\lim\limits_{z\to\zeta} f(z)$, когда $z\to\zeta$, $z\in h(\zeta, \alpha)$ (см. ([4]), лемма). Если этот предел бесконечен, то на хорде $h(\zeta, \alpha)$ можно выбрать две последовательности точек $\{z_n\}$ и $\{z_n'\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n'=\zeta$, таким образом, чтобы $|f(z_n)|=n$ и $|f(z_n')|=n+1$, $n=1, 2, \ldots$, $n\leqslant|f(z)|\leqslant n+1$ для всех точек z, лежащих на отрезке Λ_n хорды $h(\zeta, \alpha)$ между точками z_n и z_n', и чтобы отрезки Λ_n для различных номеров n, $n=1, 2, \ldots$, не пересекались между собой. Далее

$$\int\limits_{h(\zeta,\alpha)} \mu(|f(z)|)|f'(z)||dz|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{z_n}^{z_n'} \mu(|f(z)|)|f'(z)||dz|\geqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{z_n}^{z_n'} \mu(n)|f'(z)||dz|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\left|\int\limits_{z_n}^{z_n'} f'(z)dz\right|=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)|f(z_n')-f(z_n)|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n).$$

Условие (5) эквивалентно условию $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) = +\infty$. Получим противоречие с условием (8), и лемма 3 доказана.

4. Сформулированная выше теорема 1 есть немедленное следствие леммы 2, примененной к функции $U(z) = \mu(|f(z)|)|f'(z)|$, лемм 3 и 1 и теоремы Багемила (см. ([6]), стр. 74, теорема 8), согласно которой множество неопределенности произвольной функции, определенной в D, не более чем счетно.

5. Рассмотрим на $(0, 1]$ произвольную положительную, невозрастающую и непрерывную функцию $H(t)$, для которой $\lim_{t\to 0} H(t) = \infty$, $\lim_{t\to 0} tH(t) = 0$ и $\int_0^1 \frac{dt}{tH(t)} < +\infty$. Положим $\lambda_n^H = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}$. Для произвольного борелевского множества E на Γ символом $\operatorname{cap}_H E$ обозначим его выпуклую емкость относительно последовательности λ_n^H (см. ([7]), стр. 364).

Теорема 2. *Пусть голоморфная в круге D функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\iint_D (1-|z|)H(1-|z|)[\mu(|f(z)|)|f'(z)|]^2 dx\,dy < +\infty, \tag{9}$$

в котором функция $H(t)$ обладает всеми названными выше свойствами, а функция $\mu(t)$ такая же, как и в теореме 1. Тогда

$$\Gamma = F(f) \cup E, \quad \operatorname{cap}_H E = 0.$$

Доказательство этой теоремы проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 1, только вместо леммы 2 используется

Лемма 4 (см. ([5]), стр. 116, основная лемма). Пусть неотрицательная действительная функция $U(z)$ непрерывна в D и удовлетворяет условию

$$\iint_D (1-|z|)H(1-|z|)[U(z)]^2 dx\,dy < +\infty.$$

Тогда на Γ существует множество M, $\operatorname{cap}_H(\Gamma \setminus M) = 0$, в каждой точке ζ которого для почти всех хорд $h(\zeta, \alpha)$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется свойство (7).

6. Мы заканчиваем эту статью замечанием, что любая голоморфная функция $f(z)$, удовлетворяющая условию (9), удовлетворяет также условию (4). Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность В. И. Гаврилову за постановку задачи и ценные замечания.

Ереванский институт
народного хозяйства

Ա. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ֆատուի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին

Դիցուք $f(z)$-ը միավոր շրջանում որոշված հոլոմորֆ ֆունկցիա է, իսկ $\mu(x)$-ը դրական կիսառանցքի վրա որոշված դրական, անընդհատ և չաճող ֆունկցիա է, որի համար

$$\int_0^\infty \mu(x)dx = +\infty$$

Հոդվածի հիմնական արդյունքը հետևյալն է. եթե

$$\iint_{|z|<1} \mu(|f(z)|)|f'(z)|dxdy < +\infty$$

ապա՝ միավոր շրջանագծի վրա, բացառությամբ զրո չափի բազմության, $f(z)$ ֆունկցիան ունի անկյունային եզրային արժեքներ։

Այնուհետև բերվում է համանման թեորեմ ուռուցիկ H-ունակության տերմիններով, որտեղ $H(t)$ ֆունկցիան բավարարում է որոշակի պայմանների։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. И. Гаврилов*, Мат. заметки, т. 15. № 6 (1974). [2] *В. И. Гаврилов*, Сибирский мат. журн., т. 14, № 5 (1973). [3] *В. И. Гаврилов*, ДАН СССР, т. 216, № 1 (1974). [4] *А. Н. Канатников*, Вестник Моск у-та, сер. матем., мех., № 4 (1976). [5] *В. И. Гаврилов, В. С. Захарян*, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. 11, № 2 (1976). [6] *К. Носиро*, Предельные множества, ИЛ, М., 1963. [7] *И. К. Бари*. Тригонометрические ряды, Мир, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 517.535.4

МАТЕМАТИКА

Е. Д. Файнберг

Об оценке индикатора целой функции и интеграле по неаддитивной мере

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/VI 1980)

Пусть $A(\rho)$—класс целых функций нецелого конечного порядка ρ и нормального типа, $h(\varphi, f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-\rho}\ln|f(re^{i\varphi})|$—индикатор функции $f(z)\in A(\rho)$.

Пусть E—множество точек на окружности $S_1=\{z:|z|=1\}$, $K_{r,\delta}=\{z=te^{i\varphi}:t\in[0, r],\ e^{i\varphi}\in E\}$—„сектор", опирающийся на E. Пусть, далее, $\overline{\Delta}(E, f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-\rho}n_f(K_{r,\delta})$—верхняя угловая плотность распределения нулей n_f функции $f(z)$.

Пусть $\delta(E)$, $E\subset S_1$—монотонная, неотрицательная функция множества E, а $\mathbf{X}_\delta$—некоторый класс множеств на S_1. Обозначим через $A(\delta, \mathbf{X}_\delta)$ класс целых функций, определенный соотношением

$$A(\delta, \mathbf{X}_\delta)=\{f\in A(\rho):\overline{\Delta}(E, f)\leqslant\delta(E),\ E\in\mathbf{X}_\delta\}.$$

Мы ищем решение задачи о точной оценке индикатора в классе $A(\delta, \mathbf{X}_\delta)$. Подробное обсуждение этого круга задач и известные результаты см. в ([1-6]).

Для формулировки основных результатов нашей работы введем понятие интеграла по неаддитивной мере.

Пусть $\mathbf{X}$—семейство борелевских множеств $X\subset\mathbf{C}$; $\delta(X)$—неотрицательная монотонная функция множества, конечная на ограниченных множествах (неаддитивная мера); $N(\delta, \mathbf{X})$—класс распределений масс μ, определенный соотношением $N(\delta, \mathbf{X})=\{\mu:\mu(X)\leqslant\delta(X),\ X\in\mathbf{X}\}$; $g(z)(\geqslant 0)$—борелевская неотрицательная функция в $\mathbf{C}$.

Величину

$$\mathbf{X}\text{—}\int\limits_{\mathbf{C}} g\,d\delta \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\int\limits_{\mathbf{C}} g\,d\mu:\mu\in N(\delta, \mathbf{X})\right\} \tag{1}$$

назовем $\mathbf{X}$-интегралом по неаддитивной мере δ.

Этот интеграл обладает рядом естественных свойств: монотонностью, полуаддитивностью, положительной однородностью по g и

по δ и другими. Если δ—распределение масс, а $\mathbf{X}$—„достаточно богатое" семейство множеств, то интеграл (1) переходит в интеграл Лебега-Стилтьеса.

Отметим также связь нашего интеграла с интегралом А. А. Гольдберга по полуаддитивной мере ([5], с. 290). Для этого обозначим через $\mathfrak{M}$ кольцо, натянутое на семейство множеств $\mathbf{X}$, а через $\delta^*(X) \overset{\text{def}}{=} \sup\{\mu(X) : \mu \in N(\delta, \mathbf{X})\}$, $X \in \mathfrak{M}$—полуаддитивное продолжение δ на $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Если g—непрерывная функция, а $\mathbf{X}$—семейство открытых множеств, то верно равенство*

$$\mathbf{X}-\int_{\mathbf{C}} g\,\mathrm{d}\delta(z) = (\mathfrak{M})\int_{\mathbf{C}} g\,\mathrm{d}\delta^*(z), \tag{2}$$

в котором справа стоит интеграл А. А. Гольдберга по полуаддитивной мере δ^*, заданной на кольце $\mathfrak{M}$, обобщенный на случай $\delta^*(\mathbf{C}) = \infty$.

Введем еще несколько обозначений. Пусть $\mathbf{X}_\theta$—семейство множеств на окружности, $\delta(E)$—неаддитивная мера, $\mathbf{X}_z = \{K_{r,\theta} : r \in (0, \infty);\ E \in \mathbf{X}_\theta\}$ (индексы θ, z показывают лишь, где расположены соответствующие семейства — на окружности или в плоскости). Пусть $\delta_z(X) \overset{\text{def}}{=} r^p \delta(E)$, $X \in \mathbf{X}_z$—неаддитивная мера на „секторах" из $\mathbf{X}_z$. Полагаем $H(u, p) \overset{\text{def}}{=} \ln|E(u, p)|$, где $E(u, p) = (1-u)\exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}\right)$—канонический множитель Вейерштрасса.

Сформулируем основную теорему об оценке индикатора.

Теорема 2. *Если $\mathbf{X}_\theta$—семейство открытых множеств на S_1 и $\delta(E)$ удовлетворяет условию*

$$\delta(E) = \inf\{\delta(E_1) : E_1 \supset \overline{E},\ E_1 \in \mathbf{X}_\theta\}, \tag{3}$$

где $\overline{E}$—замыкание E, то

$$\sup\{h(\varphi, f) : f \in A(\delta, \mathbf{X}_\theta)\} = \mathbf{X}_z-\int_{\mathbf{C}} H^+\left(\frac{e^{i\varphi}}{\zeta}, p\right)\mathrm{d}\delta_z(\zeta).$$

Существует функция $f(z) \in A(\delta, \mathbf{X}_\theta)$, для которой достигается равенство при всех φ.

Доказательство этой теоремы базируется на результатах статьи ([9]).

Таким образом, в терминах $\mathbf{X}$-интеграла получена точная оценка индикатора в классе функций $A(\delta, \mathbf{X}_\theta)$.

В. С. Азарин в ([8]) получил точные оценки, но в классах целых функций, задаваемых другими (неклассическими) характеристиками асимптотического поведения нулей.

В ([5]) были ранее получены точные оценки для классов функций, задаваемых ограничениями на верхнюю угловую плотность нулей, в

двух случаях: если $\delta(E)$—счетно-аддитивная мера и если $\delta(E)\equiv\Delta>0$ для любого $E\subset S_1$ (см. ([5]), с. 314, 328).

Легко проверить, что в этих случаях условие (3) выполняется, и из теоремы 2 получаются вышеуказанные оценки.

Кроме того, теорема 1 позволяет сформулировать точную оценку, полученную в теореме 2, в терминах интеграла А. А. Гольдберга, но не одномерного, как это было в ([5]), а двумерного по полуаддитивной мере δ^*.

В заключение сформулируем утверждение, которое показывает, что условие (3) «не слишком сильно» ограничивает выбор δ и $\mathbf{X}_0$, задающих класс функций $A(\delta, \mathbf{X}_0)$.

Пусть $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$—семейство всех открытых множеств на S_1. Будем говорить, что $\mathbf{X}$ плотно в $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, если для любого $E_0\in\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ и любого $\varepsilon>0$ найдется такое $E=E(\varepsilon, E_0)\in\mathbf{X}$, что $\overline{E_0\setminus E}\cup\overline{E\setminus E_0}\subset(\partial E_0)_\varepsilon$, где $(\partial E_0)_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \{e^{i\psi}: |e^{i\varphi}-e^{i\psi}|<\varepsilon,\ e^{i\varphi}\in\partial E_0\}$—$\varepsilon$-окрестность границы E_0.

Теорема 3. *Для любой неаддитивной меры $\delta(E)$, $E\in\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, найдется семейство $\mathbf{X}\subset\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, плотное в $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ (а значит, и в любом подмножестве $\mathbf{X}$) и такое, что соотношение* (3) *выполняется для всех $E\in\mathbf{X}$.*

Основные результаты работы переносятся на аналитические в полуплоскости функции нецелого конечного порядка.

Харьковский заочный
политехнический институт

Ն. Դ. ՖԱՆԲԵՐԳ

Ամբողջ ֆունկցիայի ինտեգրալի գնահատականի և ըստ ոչ ադիտիվ չափի ինտեգրալի մասին

Աշխատանքում մտցվում է ոչ ադիտիվ չափով ինտեգրալի գաղափար, դիտարկվում է նրա կապը Ա. Ա. Գոլդբերգի կիսաադիտիվ չափով ինտեգրալի հետ։

Ոչ ամբողջ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների բավականաչափ լայն դասի համար, որը սահմանվում է զրոների անկյունային խտության վրա դրվող սահմանափակումներով, տրվում են ինդիկատորի ճշգրիտ գնահատականներ այդ ինտեգրալի տերմիններով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956. [2] *М. І. Андрашко*, Доповіді АН УРСР, № 7 (1960). [3] *А. А. Гольдберг*, Сиб. мат. журн., т. 3 (1962). *Н. В. Говоров*, Доповіді АН УРСР, № 2 (1966). [5] *А. А. Гольдберг*, Мат. сб., т. 58, 289 (1962); т. 61, 334 (1963); т. 65, 414 (1964); т. 65, 412 (1965).

[6] *А. А. Кондратюк*, Литовский мат. сб., т. 7, № 1 (1967); т. 8, № 1 (1968). [7] *А. А. Кондратюк*, В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 10, 11, Харьков (1970). [8] *В. С. Азарин*, В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 18, Харьков (1973). [9] *В. С. Азарин*, Мат. сб., т. 108 (150), № 2 (1979).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Ж. Г. Никогосян

О максимальном цикле графа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 18/IX 1980)

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге Харари ([1]). Для любого подграфа L графа G через $V(L)$ и $X(L)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер подграфа L. Первый и последний элементы любой конечной последовательности l обозначаются через $F(l)$ и $L(l)$ соответственно. Пусть $\alpha(G)$ обозначает число вершинной независимости графа G, $\delta(G)$—минимальную степень, $k(G)$—вершинную связность, $h(G)$—максимальную длину простых циклов графа G и $N(v)$—множество вершин, смежных с вершиной $v \in V(G)$.

Дирак ([2]) доказал, что если в графе G имеет место $\delta(G) \geqslant v(G)/2$, где $v(G) = |V(G)|$, то G—гамильтонов, т. е. $h(G) = v(G)$. В работе ([3]) доказано также, что если $\delta(G) \leqslant v(G)/2$ и $k(G) \geqslant 2$, то $h(G) \geqslant 2\delta(G)$.

Нэш-Вильямс ([3]) доказал, что если 2-связный граф G удовлетворяет условиям $\delta(G) \geqslant (v(G)+2)/3$, $\delta(G) \geqslant \alpha(G)$, то $h(G) = v(G)$.

П. Эрдёш и В. Хватал ([4]) доказали гамильтоновость графа G при условии $\alpha(G) \leqslant k(G)$.

В настоящем сообщении приводятся следующие результаты.

Теорема 1. *Если 2-связный граф G удовлетворяет условию $\delta(G) \geqslant (v(G)+k(G))/3$, то $h(G) = v(G)$.*

Теорема 2. *Если 3-связный граф G удовлетворяет условию $\delta(G) \leqslant (v(G)+k(G))/3$, то $h(G) \geqslant 3\delta(G) - k(G)$.*

Рассмотрим произвольный 2-связный граф G, для которого $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ является некоторым разделяющим множеством вершин. Компоненты связности графа $G-S$ обозначим через $G_1, G_2, \ldots, G_l$.

Пару цепей Q, R графа G назовем S-допустимой, если

$$\{F(Q), L(R)\} \subseteq V(H_i), \ \{L(Q), F(R)\} \subseteq S, \ V(Q) \cap V(R) = \varnothing,$$

$$V^* \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \quad N(F(Q)) \cup N(L(R)) \subseteq V^* \cup S,$$

где

$$H_1 = \bigcup_{i=1}^{f} G_i, \quad H_2 = \bigcup_{i=f+1}^{t} G_i, \ f \in \{1, 2, \ldots, t-1\},$$

$$\varepsilon \in \{1, 2\}, \quad V^* = V(Q) \cup V(R).$$

Для S-допустимой пары Q, R введем обозначения

$$d_1 = |N(F(Q)) \cap V^*|, \quad d_2 = |N(L(R)) \cap V^*|.$$

Для произвольной простой цепи l и для произвольных вершин $u, v \in V(l)$ через $[u, v] \uparrow l$ будем обозначать подцепь цепи l, соединяющую вершины u и v.

Доказательства теорем 1 и 2 опираются на следующие леммы:

Лемма 1. *Если для S-допустимой пары цепей Q, R графа G имеет место $d_1 + d_2 \geqslant |V^*| + 1$, то существует цепь $P = l$, удовлетворяющая условию*

$$F(P) = L(Q), \ L(P) = F(R), \ V(P) = V^*. \tag{1}$$

Лемма 2. *Если для S-допустимой пары цепей Q, R графа G имеет место $|V^* \cap S| = \Delta \geqslant 3$, то либо существует цепь $P = l_1$, удовлетворяющая условию (1), либо существует цепь $P = l_2$, удовлетворяющая условию*

$$\left.\begin{array}{l} F(P) = L(Q), \ L(P) = F(R), \ V(P) \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \\ V(P) \cap S \subseteq V^* \cap S, \ |V(P)| \geqslant d_1 + d_2 - 1, \end{array}\right\} \tag{2}$$

либо существует цепь $P = l_3$, удовлетворяющая условию

$$\left.\begin{array}{l} F(P) \in S, \ L(P) \in S, \ V(P) \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \\ V(P) \cap S \subseteq V^* \cap S, \ |V(P)| \geqslant d_1 + d_2. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Если же для S-допустимой пары Q, R имеет место $\Delta = 2$, то либо существует цепь $P = l_4$, удовлетворяющая хотя бы одному из условий (1), (2), либо для любой вершины $z \in S$, отличной от $L(Q)$ и $F(R)$, существует цепь $P = l_5$, удовлетворяющая условию

$$\left.\begin{array}{l} F(P) \in S, \ L(P) \in S, \ V(P) \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \\ V(P) \cap S \subseteq \{L(Q), F(R), z\}, \ |V(P)| \geqslant d_1 + d_2 + 1. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Лемма 3. *Для S-допустимой пары цепей Q, R либо существует цепь $P = l_1$, удовлетворяющая хотя бы одному из условий (1), (2), либо существует цепь $P = l_2$, удовлетворяющая условию*

$$\left.\begin{array}{l} F(P) = L(Q), \ L(P) = F(R), \ V(P) \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \\ V(P) \cap S \subseteq V^* \cap S, \ |V(P)| \geqslant \min(d_1, d_2) + \Delta - 1. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Теорема 2 доказывается конструктивным путем в том предположении, что в графе G нам известно некоторое разделяющее множество $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Приводим лишь набросок доказательства теоремы 2.

Пусть $v(G) = v$, $\delta(G) = \delta$, $k(G) = k$, $h(G) = h$ и пусть $G_1, G_2, \ldots, G_t$ — компоненты связности графа $G - S$. Введем обозначения

$$H_1 = \bigcup_{i=1}^{t-1} G_i, \quad H_2 = G_t.$$

Без потери общности можем предполагать, что $|V(H_2)| \leqslant |V(H_1)|$.

Случай 1. $|V(H_1)| \geqslant 2\delta - k - 1$.

Пусть простая цепь $W = P_1$ удовлетворяет следующим условиям:

а1) $F(W) \in S$, $L(W) \in S$, $V(W) \subseteq V(H_1) \cup S$;

а2) если цепь $W = P$ удовлетворяет условию а1), то

$$|V(P) \cap S| \leqslant |V(P_1) \cap S|;$$

а3) если цепь $W = P$ удовлетворяет условиям а1), а2), то

$$|\{i / V(P) \cap V(G_i) \neq \varnothing\}| \leqslant |\{i / V(P_1) \cap V(G_i) \neq \varnothing\}|;$$

а4) если цепь $W = P$ удовлетворяет условиям а1)—а3), то

$$|V(P)| \leqslant |V(P_1)|.$$

Если для некоторого числа $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$ имеет место

$$V(P_1) \cap V(G_i) \neq \varnothing, \quad V(G_i) \setminus V(P_1) \neq \varnothing, \tag{6}$$

то существует S-допустимая пара цепей $(Y, Z) = (R_1, R_2)$, удовлетворяющая следующим условиям:

б1) $L(Y) = F(P_1)$, $F(Z) = L(P_1)$, $F(Y) \in V(H_1)$, $L(Z) \in V(H_1)$,

$$[F(P_1), u] \uparrow P_1 \subseteq Y, \quad [L(P_1,) \ v] \uparrow P_1 \subseteq Z,$$

$$|V_1^*| \geqslant |V(P_1)|, \quad V_1^* \subseteq V(H_1) \cup S,$$

где $V_1^* = V(Y) \cup V(Z)$, $uv \in X(P_1)$;

б2) если S-допустимая пара $(Y, Z) = (l_1, l_2)$ удовлетворяет условию б1), то

$$|(V(l_1) \cup V(l_2)) \cap S| \leqslant |V_1^* \cap S|;$$

б3) если S-допустимая пара $(Y, Z) = (l_1, l_2)$ удовлетворяет условиям б1), б2), то

$$|\{i / V(G_i) \cap (V(l_1) \cup V(l_2))\}| \leqslant |\{i / V(G_i) \cap V_1^* \neq \varnothing\}|;$$

б4) если S-допустимая пара $(Y, Z) = (l_1, l_2)$ удовлетворяет условиям б1)—б3), то

$$|V(l_1) \cup V(l_2)| \leqslant |V_1^*|.$$

Для R_1, R_2 существует цепь $P = P_2$, удовлетворяющая условиям леммы 2.

Если же условие (6) не имеет места, то будем предполагать, что $P_2 = P_1$, $V_1^* = V(P_1)$.

Пусть простая цепь $W = P_3$ удовлетворяет следующим условиям:

в1) $V(W) \subseteq V(H_2) \cup S$, $F(W) = F(P_2)$, $L(W) = L(P_2)$,

$$V(W) \cap V_1^* \subseteq \{F(P_2), L(P_2)\};$$

в2) если цепь $W = P$ удовлетворяет условию в1), то

$$|V(P) \cap S| \leqslant |V(P_3) \cap S|;$$

в3) если цепь $W=P$ удовлетворяет условиям в1), в2), то

$$|V(P)|\leqslant|V(P_3)|.$$

Если $V(G_t)\setminus V(P_3)\neq\varnothing$, то существует S-допустимая пара цепей $(Y,\ Z)=(R_3,\ R_4)$, удовлетворяющая следующим условиям:

г1) $L(Y)=F(P_3)$, $F(Z)=L(P_3)$, $F(Y)\in V(H_2)$, $L(Z)\in V(H_2)$,

$$[F(P_3),\ u]\uparrow P_3\subseteq Y,\ [L(P_3),\ v]\uparrow P_3\subseteq Z,\ V_2^*\subseteq V(H_2)\cup S,$$

$$V_2^*\cap V_1^*\subseteq\{F(P_2),\ L(P_2)\},\ |V_2^*|>|V(P_3)|,$$

где $V_2^*=V(Y)\cup V(Z)$, $uv\in X(P_3)$;

г2) если S-допустимая пара $(Y,\ Z)=(l_1,\ l_2)$ удовлетворяет условию г1), то

$$|(V(l_1)\cup V(l_2))\cap S|\leqslant|V_2^*\cap S|;$$

г3) если S-допустимая пара $(Y,\ Z)=(l_1,\ l_2)$ удовлетворяет условиям г1)—г2), то

$$|V(l_1)\cup V(l_2)|\leqslant|V_2^*|.$$

Для R_3, R_4 существует цепь $P=P_4$, удовлетворяющая условиям леммы 3.

Если же $V(G_t)\setminus V(P_3)=\varnothing$, то будем предполагать, что $P_4=P_3$, $V_2^*=V(P_3)$.

Исходя из построений цепей P_2 и P_4, можно показать, что простой цикл $P_2\cup P_4$ имеет не менее $3\delta-k$ вершин.

Случай 2. $|V(H_1)|\leqslant 2\delta-2k+1$.

Рассуждения здесь можно провести аналогично случаю 1.

Случай 3. $|V(H_1)|=2\delta-k-2-\beta$, $\beta\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ k-4\}$.

Пусть простая цепь $W=P_1$ удовлетворяет следующим условиям:

к1) $F(W)\in S$, $L(W)\in S$, $V(W)\subseteq V(H_2)\cup S$, $|V(W)\cap S|\leqslant\beta+3$;

к2) если цепь $W=P$ удовлетворяет условию к1), то

$$|V(P)\cap S|\leqslant|V(P_1)\cap S|;$$

к3) если цепь $W=P$ удовлетворяет условиям к1), к2), то

$$|V(P)|\leqslant|V(P_1)|.$$

Если $V(H_2)\setminus V(P_1)\neq\varnothing$, то существует S-допустимая пара $(Y,\ Z)=(R_1,\ R_2)$, удовлетворяющая следующим условиям:

л1) $L(Y)=F(P_1)$, $F(Z)=L(P_1)$, $F(Y)\in V(H_2)$, $L(Z)\in V(H_2)$,

$$[F(P_1),\ u]\uparrow P_1\subseteq Y,\ [L(P_1),\ v]\uparrow P_1\subseteq Z,$$

$$|V_1^*|>|V(P_1)|,\ V_1^*\subseteq V(H_2)\cup S,\ |V_1^*\cap S|\leqslant\beta+3,$$

где $V_1^*=V(Y)\cup V(Z)$, $uv\in X(P_1)$;

л2) если S-допустимая пара $(Y,\ Z)=(l_1,\ l_2)$ удовлетворяет условию л1), то

$$|(V(l_1)\cup V(l_2))\cap S|\leqslant|V_1^*\cap S|;$$

л3) если S-допустимая пара $(Y,\ Z)=(l_1,\ l_2)$ удовлетворяет условиям л1), л2), то

$$|V(l_1)\cup V(l_2)|\leqslant|V_1^*|.$$

Для R_1, R_2 существует цепь $P=P_2$, удовлетворяющая условиям леммы 3.

Если же $V(H_2)\setminus V(P_1)=\varnothing$, то будем предполагать, что $P_2=P_1$, $V_1^*=V(P_1)$.

Пусть простая цепь $W=P_3$ удовлетворяет следующим условиям:

м1) $F(W)=F(P_2)$, $L(W)=L(P_2)$, $V(W)\subseteq V(H_1)\cup S$,

$$V(W)\cap V_1^*=\{F(P_2),\ L(P_2)\};$$

м2) если цепь $W=P$ удовлетворяет условию м1), то

$$|V(P)\cap S|\leqslant|V(P_3)\cap S|;$$

м3) если цепь $W=P$ удовлетворяет условиям м1), м2), то

$$|\{i/V(P)\cap V(G_i)\neq\varnothing\}|\leqslant|\{i/V(P_3)\cap V(G_i)\neq\varnothing\}|;$$

м4) если цепь $W=P$ удовлетворяет условиям м1), м2), м3), то

$$|V(P)|\leqslant|V(P_3)|.$$

Цепь P_3 удовлетворяет условию $V(H_1)\setminus V(P_3)=\varnothing$.

Пусть тройка цепей $(W,\ Y,\ Z)=(P_4,\ R_5,\ R_6)$ удовлетворяет следующим условиям:

н1) $F(W)=F(P_3)$, $L(W)=L(P_3)$, $V(W)\subseteq V(H_2)\cup S$;

н2) пара Y, Z является S-допустимой и существует только тогда, когда $V(H_2)\setminus V(W)\neq\varnothing$,

н3) $L(Y)=F(P_3)$, $F(Z)=L(P_3)$, $F(Y)\in V(H_2)$, $L(Z)\in V(H_2)$,

$$|F(P_3),\ u|\uparrow W\subseteq Y,\ |L(P_3),\ v|\uparrow W\subseteq Z,\ |V_3^*|>|V(W)|,$$

где $V_3^*=V(Y)\cup V(Z)$, $uv\in X(W)$;

н4) если $V(H_2)\setminus V(W)=\varnothing$, то $V_3^*=V(W)$;

н5) $V_3^*\subseteq V(H_2)\cup S$, $V_3^*\cap V(P_3)=\{F(P_3),\ L(P_3)\}$, $V_1^*\cap S\subseteq V_3^*\cap S$;

н6) если тройка $(W,\ Y,\ Z)=(P,\ l_1\ l_2)$ удовлетворяет условиям н1)—н5), то

$$|(V(l_1)\cup V(l_2))\cap S|\leqslant|V_3^*\cap S|;$$

н7) если тройка $(W,\ Y,\ Z)=(P,\ l_1,\ l_2)$ удовлетворяет условиям н1)—н6), то

$$|V(l_1)\cup V(l_2)|\leqslant|V_3^*|.$$

Для R_5, R_6 существует цепь $P=P_5$, удовлетворяющая условиям леммы 3.

Если $V(H_2)\setminus V(P_4)=\varnothing$, то будем предполагать, что $P_5=P_4$.

Простой цикл $P_3\cup P_5$ либо является гамильтоновым циклом для графа G, либо содержит по меньшей мере $3\delta-k$ вершин.

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из доказательства теоремы 2.

Следствие 1. Если 2-связный граф G удовлетворяет условию $\delta(G)\geqslant(v(G)+\alpha(G)-1)/3$, то $h(G)=v(G)$.

Следствие 2. Если 3-связный граф удовлетворяет условию $\delta(G)\leqslant(v(G)+\alpha(G)-1)/3$, то $h(G)\geqslant3\delta(G)-\alpha(G)+1$.

Рассмотрим графы $G_1=K_{\delta-k}$, $G_2=\overline{K}_{\delta+\alpha}$, $G_3=K_k$, $G_4=K_{\delta-k+1}$ попарно без общих вершин, где $\alpha\geqslant0$. Граф, полученный из графа

$(G_1+G_2)\cup(G_3+G_4)$ посредством добавления всевозможных ребер xy, где $x\in V(G_2)$, $y\in V(G_3)$, обозначим через G_0. Так как удаление δ—вершинного подграфа $G_1\cup G_2$ из графа G_0 порождает $\delta+\alpha+1$ компонент связности, то $h(G_0)=3\delta(G_0)-k(G_0)$. Пример графа G_0 показывает, что утверждения теорем 1 и 2 не улучшаемы.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

Ժ. Դ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

Գրաֆի մաքսիմալ ցիկլի մասին

Դիցուք v-ն G գրաֆի գագաթների քանակն է, δ-ն՝ նվազագույն աստիճանը, h-ը՝ պարզ ցիկլերի մաքսիմալ երկարությունը, k-ն՝ գագաթային կապակցվածությունը և α-ն՝ գագաթային անկախության թիվը։

Ներկա աշխատանքում h-ի համար բերվում են հետևյալ գնահատականները.

Թեորեմ 1. Եթե 2-կապակցված G գրաֆում տեղի ունի $\delta\geqslant\frac{v+k}{3}$ պայմանը, ապա՝ $h=v$.

Թեորեմ 2. Եթե 3-կապակցված G գրաֆում տեղի ունի $\delta\leqslant\frac{v+k}{3}$ պայմանը, ապա՝ $h\geqslant 3\delta-k$:

Հետևանք 1. Եթե 2-կապակցված G գրաֆում տեղի ունի $\delta\geqslant\frac{v+\alpha-1}{3}$ պայմանը, ապա՝ $h=v$:

Հետևանք 2. Եթե 3-կապակցված G գրաֆում տեղի ունի $\delta\leqslant\frac{v+\alpha-1}{3}$ պայմանը, ապա՝ $h\geqslant 3\delta-\alpha+1$.

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *A. G. Dirac*, Math. Soc., Ser. 3, 2 (1952). [3] *C. St. J. A. Nash-Williams*, Studies in Pure Mathematics (L. Mirsky, ed.), Academic Press, London, 1971. [4] *V. Chvatal, P. Erdös*, Discrete math., 2 (1972).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР О. М. Сапонджян,
В. А. Арзуманян

Изгиб свободно опертой по контуру полукруглой плиты под действием нагрузки, распределенной по площади круга

(Представлено 16/VI 1980)

Задачи об изгибе полукруглой, свободно опертой по контуру плиты под действием распределенной поперечной нагрузки рассмотрены Б. Г. Галеркиным ([1]) как частный случай секториальной плиты.

Здесь рассматривается изгиб свободно опертой по контуру полукруглой плиты под действием нагрузки, равномерно распределенной по площади круга радиуса r_0, центр которого находится на оси симметрии полукруга (рис. 1). Насколько нам известно, этот случай изучается впервые.

Рассмотрим предварительно задачу об изгибе круглой плиты, свободно опертой по контуру, под действием нагрузки, равномерно распределенной по площади круга, радиуса r_0 (рис. 2).

Обозначим прогиб в замкнутой области нагруженного круга через w_0, а в замкнутой ненагруженной области плиты — w_1.

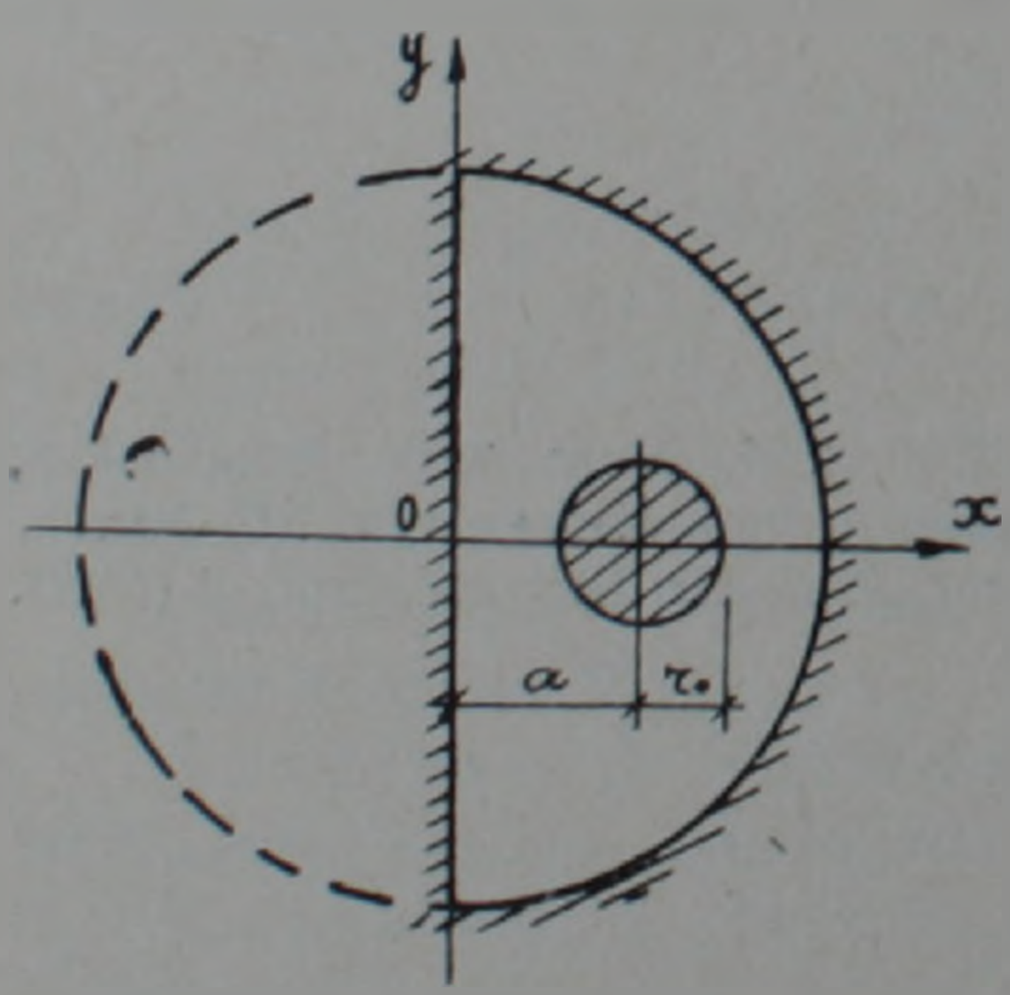


Рис. 1. Полукруглая плита под действием равномерно распределенной круговой нагрузки

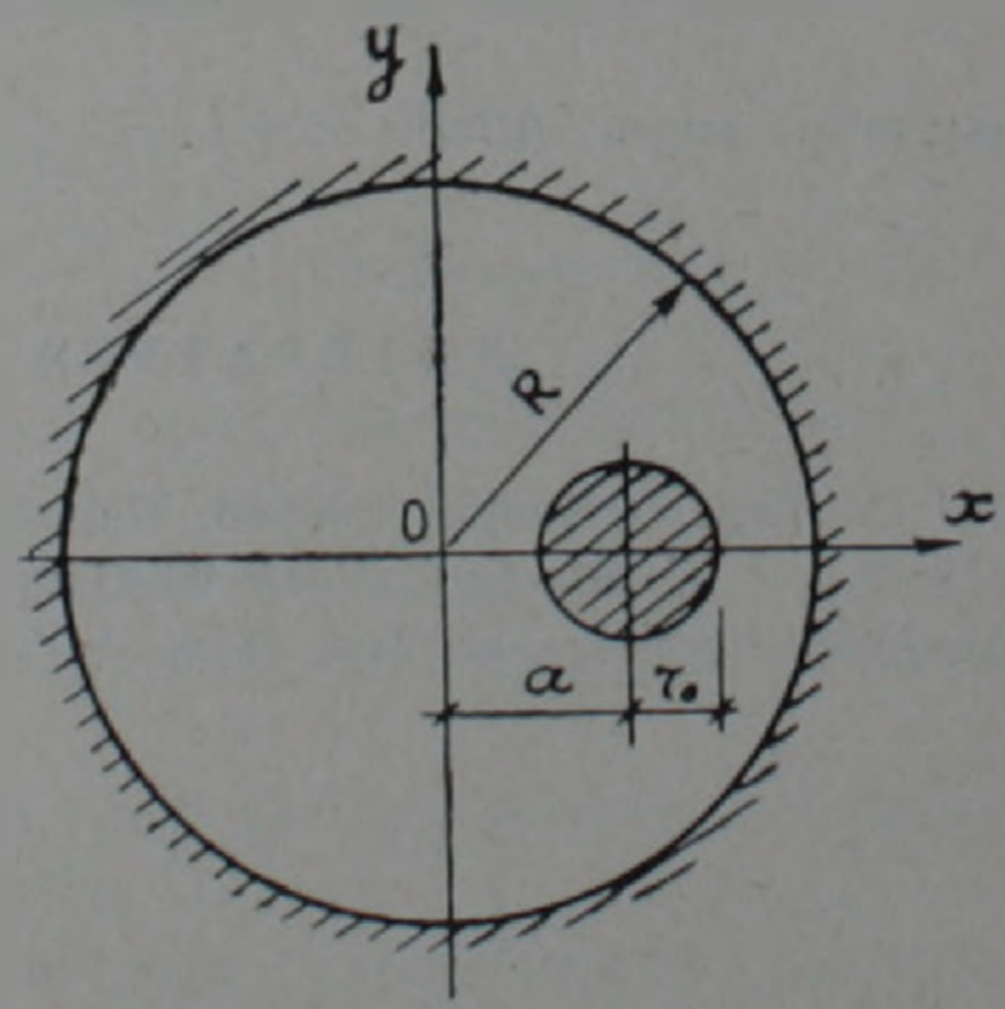


Рис. 2. Круглая плита под действием равномерно распределенной круговой нагрузки

Пользуясь известными формулами ([2]) для прогибов w_0 и w_1 будем иметь

$$w_0 = \frac{P}{64D}(z-a)^2(\bar{z}-a)^2 + \frac{P}{16\pi D}\left\{(z-a)(\bar{z}-a) - \frac{5}{4}r_0^2 - \left[(z-a)(\bar{z}-a) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{r_0^2}{2}\right] \ln \frac{(z-a)(\bar{z}-a)(1-\bar{\zeta}_0\zeta)(1-\zeta_0\bar{\zeta})}{r_0^2(\zeta-\zeta_0)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0)}\right\} + \phi, \qquad (1.1)$$

$$w_1 = \frac{P}{16\pi D}\left[(z-a)(\bar{z}-a) + \frac{r_0^2}{2}\right] \ln \frac{(\zeta-\zeta_0)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0)}{(1-\bar{\zeta}_0\zeta)(1-\zeta_0\bar{\zeta})} + \phi, \qquad (1.2)$$

где $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$ —комплексные переменные, а для случая круга радиуса R

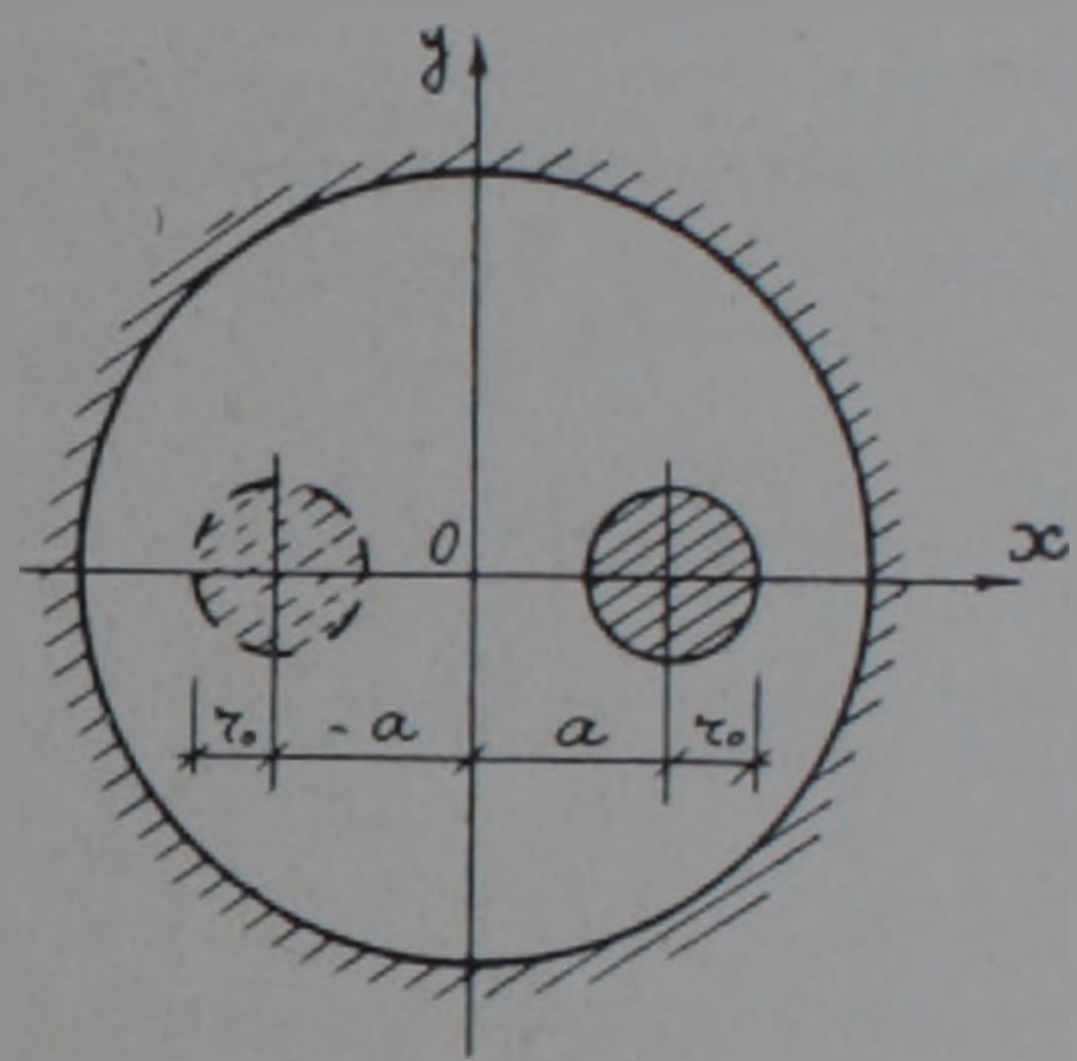


Рис. 3. Круглая плита под действием обратно-симметричных нагрузок

$$\zeta = \frac{z}{R}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\bar{z}}{R}, \quad \zeta_0 = \bar{\zeta}_0 = \frac{a}{R}. \qquad (1.3)$$

ϕ—бигармоническая функция, регулярная во всей области плиты и определяемая формулой Гурса

$$\phi = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}, \qquad (1,4)$$

где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$—аналитические функции, $\overline{\varphi(z)}$, $\overline{\chi(z)}$—сопряженные с ними функции.

Обозначим

$$\psi(z) = \chi'(z), \qquad (1.5)$$

здесь и в дальнейшем штрихи над буквами обозначают производные соответствующего порядка.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяем из контурных условий свободного опирания, представленных в комплексной форме ([2])

$$\varphi'(t)+\overline{\varphi'(t)}+\frac{1-\mu}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)[\bar{t}\varphi'(t)+\overline{\varphi(t)}+\psi(t)]=$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\bar{z}}\right)-\frac{1-\mu}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{1.6}$$

где t—значение переменной z на контуре, а f—частное решение, входящее в (1.2).

Учитывая (1.3), введем обозначения:

$$\varphi(z)=\varphi(R\zeta)=\varphi_1(\zeta),\quad \psi(z)=\psi(R\zeta)=\psi_1(\zeta).$$

Имея в виду также, что в полярных координатах $z=re^{i\theta}$, $z=re^{-i\theta}$, следовательно, $\zeta=\frac{r}{R}e^{i\theta}$, $\bar{\zeta}=\frac{r}{R}e^{-i\theta}$, контурное условие (1.6) приводим к следующему виду, предварительно разложив в степенные ряды входящие в это условие известные выражения:

$$\frac{1}{R}\varphi_1'(\sigma)+\frac{1}{R}\overline{\varphi_1'(\sigma)}-\frac{1-\mu}{2}\frac{\sigma}{R}[\bar{\sigma}\varphi_1'(\sigma)+\overline{\varphi_1(\sigma)}+\psi_1(\sigma)]=$$

$$=-\frac{P}{16\pi D}\left\{\left[\frac{R^2-a^2}{R^2}-\frac{r_0^2}{4R^2}(1-\mu)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^k\bar{\sigma}^k+\left[\frac{(R^2-a^2)(1+\mu)}{2R^2}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^k\sigma^k+\left[\frac{2R^2-2a^2-r_0^2}{4R^2}\right]\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^k\sigma^k\right\}, \tag{1.7}$$

где $\sigma=e^{i\theta}$.

Легко видеть, что ряды, входящие в выражение (1.7), быстро сходятся.

Аналитические функции $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$ разлагаются в области единичного круга $(0\leqslant|\zeta|\leqslant1)$ в ряды Тейлора

$$\varphi_1(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\zeta^k,\quad \psi_1(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\zeta^k. \tag{1.8}$$

Внеся значения функций (1.8) при $\zeta=\sigma$ в контурное условие (1.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях σ в обеих частях этого уравнения, определяем коэффициенты a_k и b_k

$$a_1=-\frac{P}{16\pi D}\left[\frac{(R^2-a^2)(3+\mu)}{2R(1+\mu)}-\frac{r_0^2}{4R}\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)}\right],$$

. . . . . .

$$a_k=-\frac{P}{16\pi D}\frac{1}{2k-1+\mu}\left[\frac{2(R^2-a^2)}{R}-\frac{r_0^2(1-\mu)}{2R}\right]\left(\frac{a}{R}\right)^{k-1}, \tag{1.9}$$

$$(k\geqslant2,\ 3\ldots).$$

$$b_k=\frac{P}{16\pi D}\frac{k+1}{2k+3+\mu}\left[\frac{2(R^2-a^2)}{R}-\frac{r_0^2}{2R}(1-\mu)\right]\left(\frac{a}{R}\right)^{k+1}. \tag{1.10}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2\ldots).$$

Внеся значения a_k и b_k из (1.9) и (1.10) в выражение (1.8) и переходя, согласно (1.3), к переменной z, получим значения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде:

$$\varphi(z)=-\frac{P}{16\pi D}\frac{z}{R}\left\{\left[\frac{(R^2-a^2)(3+\mu)}{2R(1+\mu)}-\frac{r_0^2}{4R}\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)}\right]+\left[\frac{2(R^2-a^2)}{R}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{r_0^2}{2R}(1-\mu)\right]\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k-1+\mu}\left(\frac{a}{R}\right)^{k-1}\left(\frac{z}{R}\right)^{k-1}\right\}, \tag{1.11}$$

$$\psi(z)=\frac{P}{16\pi D}\left\{\left[\frac{2a(R^2-a^2)}{R^2(3+\mu)}-\frac{r_0^2a(1-\mu)}{2R^2(3+\mu)}\right]+\left[\frac{2(R^2-a^2)}{R}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{r_0^2}{2R}(1-\mu)\right]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2k+3+\mu}\left(\frac{a}{R}\right)^{k+1}\left(\frac{z}{R}\right)^{k}\right\}. \tag{1.12}$$

Для определения, согласно (1.4), бигармонической функции ϕ следует еще иметь выражение для функции $\chi(z)$.

Согласно (1.5)

$$\chi(z)=\int\psi(z)\,dz+\frac{c_0}{2}, \tag{1.13}$$

где c_0—действительная постоянная, определяемая по формуле ([2])

$$c_0=-\Pi\left\{f(t,\bar t)+2\mathrm{Re}\left[\bar t\varphi(t)+\int^{t}\psi(t)dt\right]\right\}. \tag{1.14}$$

Здесь П—символ, обозначающий „постоянное слагаемое", $f(t,\bar t)$—значение частного решения на контуре, входящее в выражение (1.2).

Легко проверить, что это выражение на контуре равно нулю, кроме того, согласно (1.12), $\Pi\left|\int^{t}\psi(t)dt\right|$ также равно нулю. Поэтому

$$c_0=-\Pi\{2\mathrm{Re}[\bar t\varphi(t)]\}. \tag{1.15}$$

Внеся выражение (1.11) при $z=t$ в (1.14), получим

$$c_0=\frac{P}{8\pi D}\left[\frac{(R^2-a^2)(3+\mu)}{2(1+\mu)}-\frac{r_0^2}{4}\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)}\right]. \tag{1.16}$$

Подставляя (1.12) и (1.16) в (1.13), определяем функцию $\chi(z)$:

$$\chi(z)=\frac{P}{16\pi D}\left[\frac{2a(R^2-a^2)}{R^2(3+\mu)}-\frac{r_0^2a(1-\mu)}{2R^2(3+\mu)}\right]\bar z+\frac{P}{16\pi D}\left[\frac{2(R^2-a^2)}{R}-\right.$$

$$\left.-\frac{r_0^2}{2R}(1-\mu)\right]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+3+\mu}\left(\frac{a}{R}\right)^{k+1}\frac{z^{k+1}}{R^k}+$$

$$+\frac{P}{16\pi D}\left[\frac{(R^2-a^2)(3+\mu)}{2(1+\mu)}-\frac{r_0^2(1-\mu)}{4(1+\mu)}\right]. \tag{1.17}$$

Бигармоническую функцию определяем согласно (1.4), (1.11) и (1.17):

$$\phi=-\frac{P}{8\pi D}\left\{\left[\frac{(R^2-a^2)(3+\mu)}{2(1+\mu)}-\frac{r_0^2(1-\mu)}{4(1+\mu)}\right]\left(\frac{r^2}{R_2}-1\right)+r\left[\frac{2a(R^2-a^2)}{R^2(3+\mu)}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{r_0^2a(1-\mu)}{2R^2(3+\mu)}\right]\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\cos\theta+\left[2(R^2-a^2)-\frac{r_0^2}{2}(1-\mu)\right]\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+3+\mu}\left(\frac{a}{R}\right)^{k+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{k+1}\cos(k+1)\theta\right\}. \qquad (1.18)$$

Теперь, пользуясь (1.1) и (1.2), представим выражения для прогибов в окончательном виде:

в замкнутой области нагруженного круга

$$w_0=\frac{P}{64D}(r^2-2ar\cos\theta+a^2)^2+\frac{P}{16\pi D}\left[r^2-2ar\cos\theta+a^2-\frac{5}{4}r_0^2-\right.$$

$$\left.-\left(r^2-2ar\cos\theta+a^2+\frac{r_0^2}{2}\right)\right]\ln\frac{R^4-2R^2ar\cos\theta+a^2r^2}{R^2r_0^2}+\phi; \qquad (1.19)$$

в замкнутой ненагруженной области плиты

$$w_1=\frac{P}{16\pi D}\left(r^2-2ar\cos\theta+a^2+\frac{r_0^2}{2}\right)\ln\frac{R^2r^2-2R^2ar\cos\theta+R^2a^2}{R^4-2R^2ar\cos\theta+r^2a^2}+\phi, \qquad (1.20)$$

где ϕ определяется согласно (1.18).

Заметим, что решение вспомогательной задачи может представить самостоятельный интерес.

1. Для определения прогибов полукруглой плиты нагружаем круглую свободно опертую плиту двумя обратно-симметричными круговыми нагрузками (рис. 3).

В этом случае на оси y осуществляются условия свободного опирания. Пользуясь решениями (1.19) и (1.20) вспомогательной задачи и применяя закон независимости действия сил, выражения прогибов для правой части полукруглой плиты представим в окончательном виде:

в замкнутой области нагруженного круга

$$w_0=\frac{P}{D}\left\{\frac{1}{64\pi Dr_0^2}(r^2-2ar\cos\theta+a^2)^2+\frac{1}{16\pi}\left[r^2-2ar\cos\theta+a^2-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{5}{4}r_0^2-\left(r^2-2ar\cos\theta+a^2+\frac{r_0^2}{2}\right)\ln\frac{R^4-2R^2ar\cos\theta+a^2r^2}{R^2r_0^2}\right]-$$

$$-\frac{1}{16\pi}\left(r^2+2ar\cos\theta+a^2+\frac{r_0^2}{2}\right)\ln\frac{R^2r^2+2R^2ar\cos\theta+R^2a^2}{R^4+2R^2ar\cos\theta+r^2a^2}-$$

$$-\frac{r}{4\pi}\left[\frac{2a(R^2-a^2)}{R^2(3+\mu)}-\frac{r_0^2a(1-\mu)}{2R^2(3+\mu)}\right]\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\cos\theta-\frac{1}{8\pi}\left[2(R^2-a^2)-\frac{r_0^2}{2}(1-\mu)\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{4k+3+\mu}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{2k+1}\cos(2k+1)\theta\right\}; \qquad (2.1)$$

в замкнутой ненагруженной области плиты

$$w_1=\frac{P}{D}\left\{\frac{1}{16\pi}\left(r^2-2ar\cos\theta+a^2+\frac{r_0^2}{2}\right)\ln\frac{R^2r^2-2R^2ar\cos\theta+R^2a^2}{R^4-2R^2ar\cos\theta+r^2a^2}-\right.$$

$$-\frac{r}{4\pi}\left[\frac{2a(R^2-a^2)}{R^2(3+\mu)}-\frac{r_0^2a(1-\mu)}{2R^3(3+\mu)}\right]\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\cos\theta-\frac{1}{16\pi}\left(r^2+2ar\cos\theta+a^2+\right.$$

$$\left.+\frac{r_0^2}{2}\right)\ln\frac{R^2r^2+2R^2ar\cos\theta+R^2a^2}{R^4+2R^2ar\cos\theta+r^2a^2}-\frac{1}{8\pi}\left[2(R^2-a^2)-\frac{r_0^2}{2}(1-\mu)\right]\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{4k+3+\mu}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{2k+1}\cos(2k+1)\theta\right\}. \qquad (2.2)$$

Таким образом, формулами (2.1) и (2.2) завершается решение поставленной задачи.

На рис. 4, *а, б, в* изображены эпюры прогибов точек на оси симметрии полукруга при $\mu=0{,}3$; $r_0=0{,}25R$ и $a=0{,}25R$; $0{,}5R$; $0{,}75R$

2. Отметим, что из (2.1) и (2.2) легко получить значения прогибов полукруглой плиты в случае, когда на плиту действует сосредоточенная сила P, точка приложения которой находится на оси x и удалена от прямолинейного края на расстояние a. Для этого следует в (2.1) и (2.2) принять $r_0=R$. При этом получаем

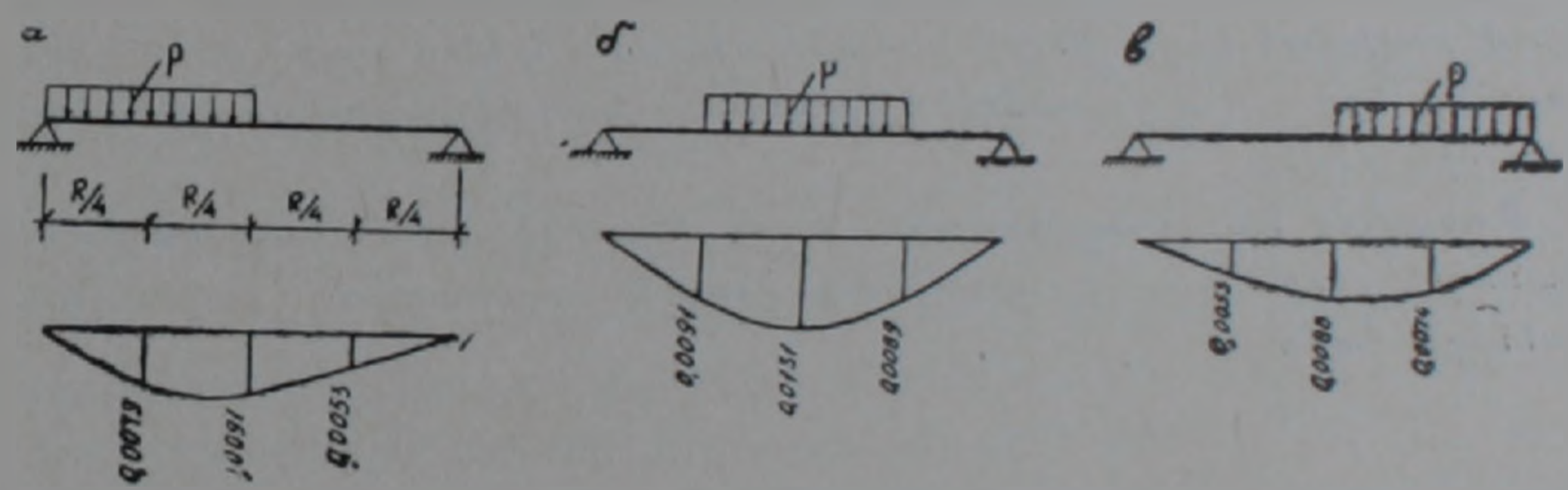


Рис. 4. Значения прогибов в долях $\frac{PR^2}{D}$ на оси симметрии полукруглой плиты:

а—при $a=R/4$; *б*—при $a=R/2$; *в*—при $a=3/4\ R$

$$w=\frac{P}{D}\left\{\frac{1}{16\pi}(r^2-2ar\cos\theta+a^2)\ln\frac{R^2r^2-2R^2ar\cos\theta+R^2a^2}{R^4-2R^2ar\cos\theta+r^2a^2}-\right.$$

$$-\frac{ra(R^2-a^2)}{2\pi R^2(3+\mu)}\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\cos\theta-\frac{1}{16\pi}(r^2+2ar\cos\theta+a^2)\ln\frac{R^2r^2+2R^2ar\cos\theta+R^2a^2}{R^4+2R^2ar\cos\theta+r^2a^2}-$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi}(R^2-a^2)\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{4k+3+\mu}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{2k+1}\cos(2k+1)\theta\right\}. \qquad (2.3)$$

На оси симметрии полукруга $(\theta=0)$ прогибы определяются по формуле

$$w=\frac{P}{D}\left\{\frac{1}{16\pi}(x^2-2ax+a^2)\ln\frac{R^2x^2-2R^2ax+R^2a^2}{R^4-2R^2ax+x^2a^2}-\right.$$

$$-\frac{xa(R^2-a^2)}{2\pi R^2(3+\mu)}\left(\frac{x^2}{R^2}-1\right)-\frac{1}{16\pi}(x^2+2ax+a^2)\ln\frac{R^2x^2+2R^2ax+R^2a^2}{R^4+2R^2ax+x^2a^2}-$$

$$-\frac{1}{4\pi}(R^2-a^2)\left(\frac{x^2}{R^2}-1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{4k+3+\mu}\left(\frac{x}{R}\right)^{2k+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{2k+1}\Bigg\}. \qquad (2.4)$$

В качестве примера приводим значение прогиба под сосредоточенной силой P, когда она приложена в середине оси симметрии полукруга ($\mu = 0{,}3$)

$$w = 0{,}0159\,\frac{PR^2}{D}.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Հայկական ԱՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ, Վ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ

Եզրագծով ազատ հենված կիսաշրջանային սալի ծռումը շրջանի մակերեսով ազդող բեռի դեպքում

Աշխատանքում լուծված է եզրագծով ազատ հենված կիսաշրջանային բարակ սալի ծռման խնդիրը, երբ սալին կիրառված է նրա համաչափության առանցքի նկատմամբ համաչափ դասավորված շրջանի մակերեսով հավասարաչափ բաշխված բեռ։ Խնդրի լուծումը ստացվել է կլոր սալի ծռման խնդրի լուծումից, երբ սալին կիրառված է շրջանի մակերեսով բաշխված երկու հակասիմետրիկ բեռեր։

Ստացված են կիսաշրջանային սալի ճկվածքի արտահայտությունները՝ շրջանային բեռի և որպես մասնավոր դեպք կենտրոնացված ուժի ազդեցությունների համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Г. Галеркин*, Собр. соч., т. 2, Изд-во АН СССР, М., 1953. [2] *О. М. Сапонджян*, Изгиб тонких упругих плит, Изд-во «Айастан», Ереван, 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 539.1

МЕХАНИКА

А. А. Ванцян

Определение глубин проникания тонкого тела в металлы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 7/VII 1980)

Рассматривается задача проникания тонкого твердого тела в металлы. Условия на поверхности тела T (рис. 1) состоят в равенстве нормальных скоростей среды и тела и касательных напряжений, выраженных по закону сухого трения. Уравнение поверхности тела можно взять в виде $r=r_k(x, t)$, t—время с начала проникания, x, r—осевая и радиальная координаты, r_k мало. На свободной поверхности среды $x=0$ имеются условия отсутствия напряжений. Решение упругой задачи получено в ([1,2]), где найдено, что вблизи поверхности тела следует учитывать неупругое поведение материала и ввести поверхность разрушения S, отделяющую область пластического течения от упругой области. Ввиду малости коэффициента трения для тонкого тела можно считать, что в основных порядках решение одномерно по r. Уравнение поверхности разрушения берется в виде $r=r_k\xi_0$, где $\xi_0\cong$ $=\text{const}$, причем предположено $\xi_0\gg 1$, но допускается, что $\xi_0 r_k$ мало, тогда можно для упругого решения вблизи S взять асимптотику для малых r, а для решения позади S пользоваться формулами, соответствующими переходу к большим значениям $\frac{r}{r_k}$, что соответствует линейной асимптотике. Удовлетворение условий $x=0$ соответствует отраженным волнам, для которых σ_{rr} имеет порядок 1. Поэтому для рассматриваемого одномерного решения условие при $x=0$ не удовлетворяется. Область между поверхностями S и T описывается уравнениями Мизеса ([3,4]). Уравнение несжимаемости и граничные условия на теле дают при $r<r_k\xi_0$

$$v_r=\frac{r_k}{r}\frac{\partial r_k}{\partial t}, \tag{1.1}$$

где v_r— радиальная скорость. Отсюда находятся компоненты тензора скоростей деформации. В упругой области, вне поверхности S, решение можно искать методом источников в виде ([1])

$$u_r = \frac{f(x,\ t)}{r}, \quad u_x \approx 0, \tag{1.2}$$

где $f(x, t)$—функция, определяемая из граничных условий на поверхности S. Для напряжения в упругой среде имеет место

$$\sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \text{и т. п. } \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x}; \tag{1.3}$$

тогда из (1.2) и (1.3) следует впереди S

$$\Delta \approx 0, \ \sigma_{rr} = -2\mu\frac{f(x,\ t)}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} \approx 2\mu\frac{f(x,\ t)}{r^2}, \quad \sigma_{xx} = 0. \tag{1.4}$$

Подставляя упругое решение (1.4) в условие текучести

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xr}^2 = 6\tau_s^2, \tag{1.5}$$

можно получить

$$\frac{2\mu f(x,\ t)}{r_k^2\xi_0^2} = \tau_s. \tag{1.6}$$

Для выбора единственного решения следует взять уравнение энергии на фронте $r = r_k\xi_0$ или уравнение ударной адиабаты [5]

$$e_1 - e_2 = -(v_{r_1} - v_{r_2})\frac{\sigma_{rr_1} + \sigma_{rr_2}}{2\rho_1\xi_0\dfrac{\partial r_k}{\partial t}}, \tag{1.7}$$

где e— энергия на единицу массы, индекс 1 дает величины впереди, а индекс 2 позади поверхности $r = r_k\xi_0$, значения $e_{1,2}$ имеют вид [5]

$$e_1 = e_0(T_1) + 2\mu\frac{f^2(x,\ t)}{r_k^2\xi_0^4}, \quad e_2 = e_0(T_2) + \varepsilon_s + \frac{\tau_s^2}{2\mu}. \tag{1.8}$$

Используя соотношения (1.4), (1.7), (1.8), $\sigma_{rr_1} \approx \sigma_{rr_2}$ и предполагая постоянство выражения $\varepsilon_s + cT_2 - cT_1 = e_1 - e_2$, можно найти

$$f(x,\ t) = \frac{ar_k^2}{2}, \qquad \xi_0^2 = \frac{\mu a}{\tau_s}, \qquad a = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu}{\tau_s^2}(\varepsilon_s + cT_2 - cT_1)}. \tag{1.9}$$

Для определения σ_{rr} в области течения можно использовать упрощенные уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \qquad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -2\tau_s, \tag{1.10}$$

откуда

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln r + \varphi(x,\ t), \tag{1.11}$$

где $\varphi(x, t)$ произвольная функция. Используя условие непрерывности σ_{rr} при $r = r_k\xi_0$ с учетом (1.4), (1.9), (1.11), получаем

$$\sigma_{rr}=\tau_s\left(2\ln\frac{r}{r_k\xi_0}-1\right), \tag{1.12}$$

причем на теле при $r=r_k$

$$\sigma_{rr}=-\tau_s\left(\ln\frac{\mu a}{\tau_s}+1\right). \tag{1.13}$$

Рассмотрим цилиндрическую часть тела, которая переходит в криволинейный конус с уравнением образующей (рис. 1)

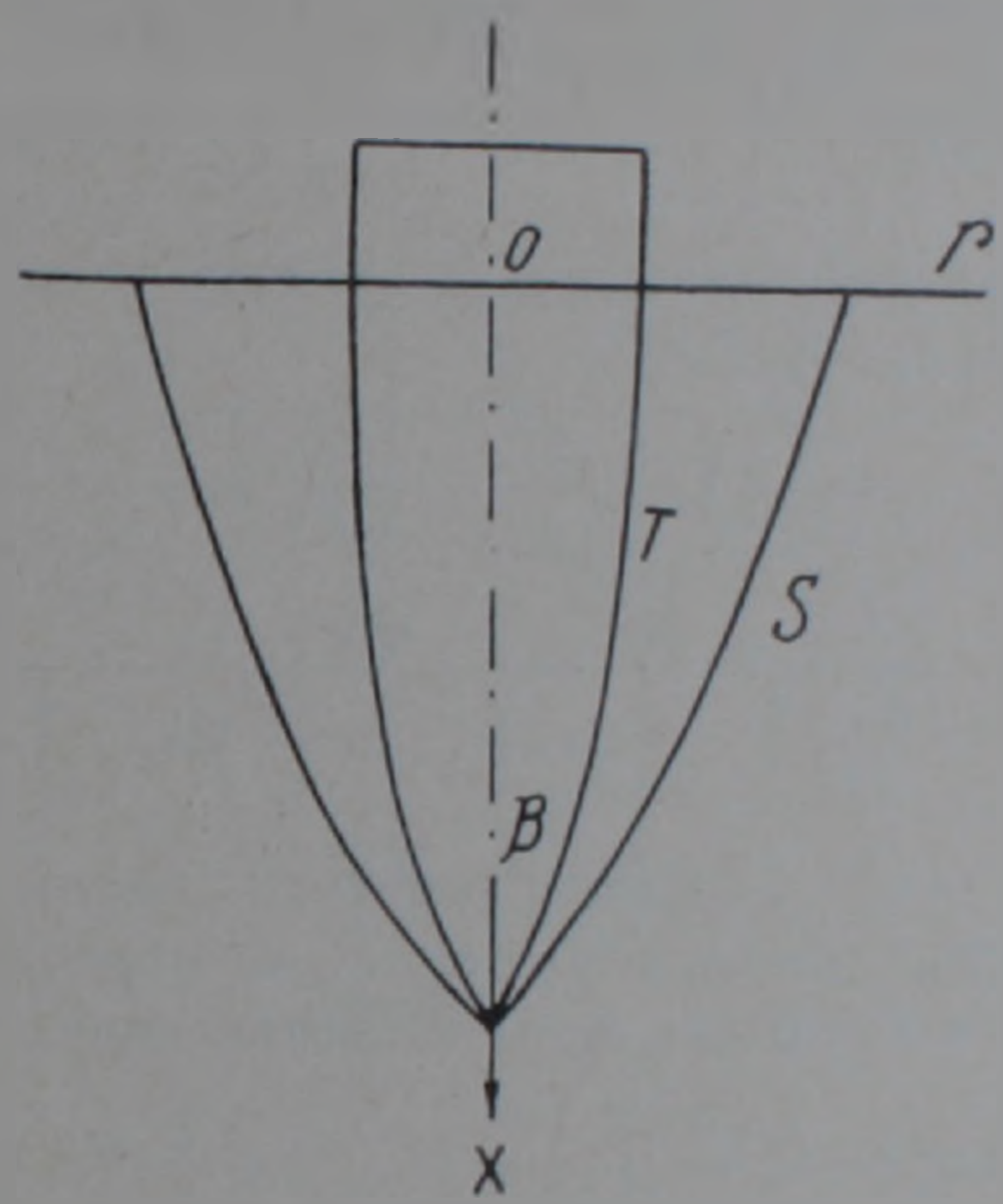


Рис. 1. Процесс проникания тонкого твердого тела в среду

$$r_k=r_0-\beta(\zeta-\eta)^\nu, \quad \eta=f-x. \tag{2.1}$$

Для определения глубины проникания предполагалось, что для некоторых материалов трение между цилиндрической частью тела и средой отсутствует, а для других существует. Для задачи с отсутствием трения на цилиндрической части ($k_1=0$) уравнение движения будет при $f<\zeta$

$$mf''=-2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left[\frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}+\beta\zeta^\nu k_1 f-\frac{\beta k_1}{\nu+1}\zeta^{\nu+1}-\right.$$

$$\left.-\beta^2\zeta^\nu(\zeta-f)^\nu+\frac{\beta^2}{2}(\zeta-f)^{2\nu}+\frac{\beta k_1}{\nu+1}(\zeta-f)^{\nu+1}\right]; \tag{2.2}$$

при $f>\zeta$

$$mf''=-2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left[\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}\right]. \tag{2.3}$$

Интегрируя уравнения (2.2) и (2.3) и складывая с учетом того, что при $f'=0$ $f=f_{max}$, для f_{max} получим

$$f_{\max}=\frac{1}{\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}}\left[\frac{mV^2}{4\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)}-\beta^2\frac{\nu^2\zeta^{2\nu+1}}{(2\nu+1)(\nu+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta k_1\zeta^{\nu+2}\,\nu}{2(\nu+2)}\right]+\zeta. \tag{2.4}$$

Вычислим $f_{\max}$ с учетом, что на цилиндрической части $k_1\neq 0$. Для силы сопротивления будем иметь

$$P=2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left[\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}+k_1r_0(f-\zeta)\right]. \tag{2.5}$$

Записав уравнения движения и проводя те же рассуждения, для $f_{\max}$ получим при $f_0>f_{\max}>\zeta$

$$f_{\max}=-\left(\frac{\beta\zeta^\nu}{2k_1}-\frac{\zeta}{\nu+1}\right)+\left[\left(\frac{\beta\zeta^\nu}{2k_1}-\frac{\zeta}{\nu+1}\right)^2+\frac{\beta}{k_1}\frac{3\nu+1}{(2\nu+1)(\nu+1)}\zeta^{\nu+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\zeta^2}{(\nu+1)(\nu+2)}+\frac{mV^2}{2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\beta k_1\zeta^\nu}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

где f_0—высота тела, ζ—высота конусной части, τ_s—динамический предел текучести, μ—модуль сдвига, a определяется по формуле (1.9). При $f>f_0$ и $k_1\neq 0$ для силы сопротивления получим

$$P=2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left[\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}+k_1r_0(f_0-\zeta)\right]. \tag{2.7}$$

Аналогичным способом для $f_{\max}$ можно получить

$$f_{\max}=f_0+$$

$$+\frac{\dfrac{mV^2}{4\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)}+\dfrac{(3\nu+1)\beta^2\zeta^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)(\nu+1)}-\dfrac{\beta k_1\zeta^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)}-\beta k_1\zeta^\nu\left[\dfrac{f_0^2}{2}+\left(\dfrac{\beta\zeta^\nu}{2k_1}-\dfrac{\zeta}{\nu+1}\right)f_0\right]}{\dfrac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\dfrac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}+k_1r_0(f-\zeta)}. \tag{2.8}$$

Формулы (2.4), (2.6), (2.8) можно применять только после того, как будет установлено, равно или не равно нулю k_1 на цилиндрической части, что можно сделать с помощью эксперимента. Формулы (2.4), (2.6), (2.8) получены совместно с А. Г. Багдоевым.

Для экспериментального исследования проникания тонкого твердого тела в разные металлы были использованы в качестве материалов для образцов алюминий, дюраль, латунь, бронза, медь и чугун. В качестве проникающего тела использовалось тонкое твердое тело массой 9,6 г, с начальной скоростью 800 м/сек.

Результаты экспериментального исследования показали, что разные материалы ведут себя качественно по-разному. В тех материалах, в которых при проникании тела имеется касание цилиндрической части тела, для определения максимальной глубины проникания хорошее соответствие с экспериментом дают формулы (2.5), (2.7), для тех материалов, в которых имеет место неполное касание вдоль цилиндрической части тела, хорошее соответствие дает формула (2.4).

Рассмотрим проникание тонкого тела формы прямолинейного конуса, переходящего в цилиндр, имеющего массу m, начальную скорость V_0, с полууглом вершины β, высотой конусной части ζ, радиусом цилиндрической части r_k (рис. 2).

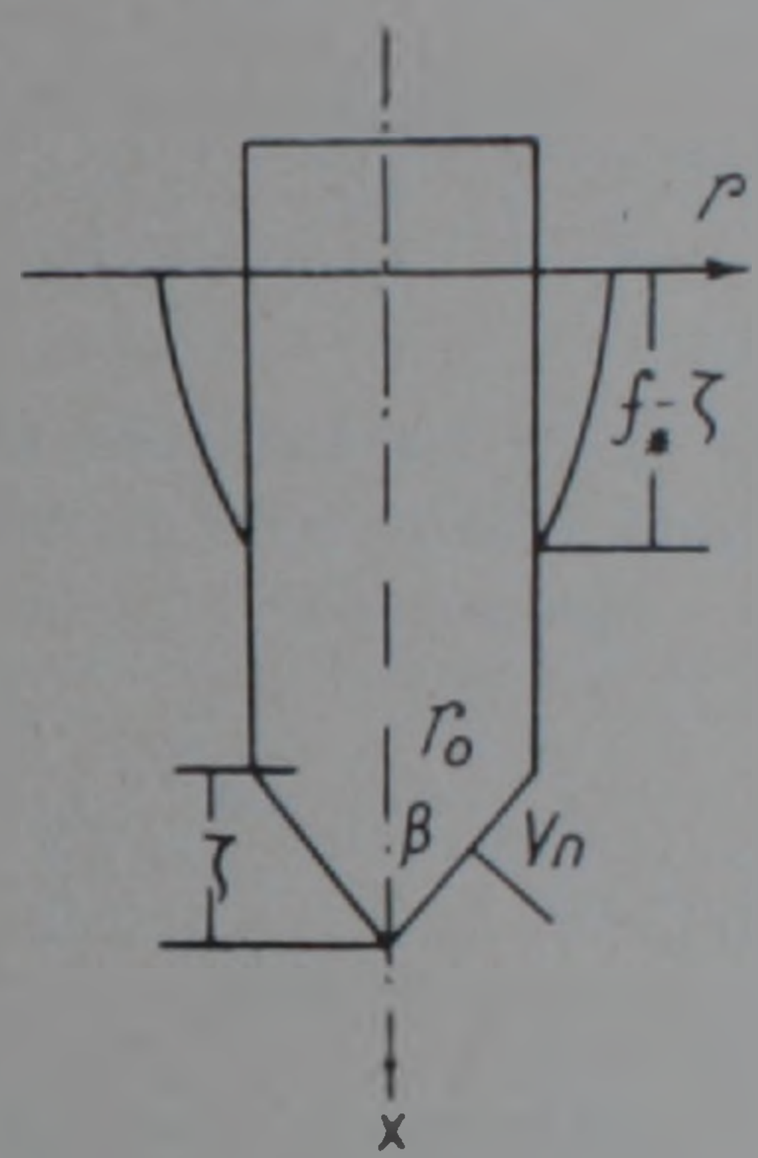


Рис. 2. Процесс прилегания среды к телу

При проникании тела частицы среды, прилегающие к поверхности конуса, движутся по нормали ([6]), следовательно, должны иметь скорость $V_n = V(t)\sin\beta$, где $V(t)$—осевая скорость, зависящая от глубины проникания. Импульс тела передается частицам, окружающим коническую часть тела.

Вводя понятие средней скорости, с которой проходит тело глубину ζ в данный момент, можно определить время, за которое на частицу действует сила со стороны тела

$$t_1 \approx \frac{r_k}{V(t)\mathrm{tg}\beta}. \tag{3.1}$$

Записывая уравнение импульса

$$F = m\frac{dV(t)}{dt} \approx m\frac{V^2(t)\mathrm{tg}\beta}{r_k} \tag{3.2}$$

и деля на площадь конической поверхности тела, для компоненты напряжения в радиальном направлении получаем:

$$P = \frac{m V^2(t) \sin\beta \cos\beta}{\pi r_k^2}. \tag{3.3}$$

Частицы среды будут двигаться в радиальном направлении до тех пор, пока будет выполняться условие $|P| > |\sigma_{rr}|$. Из условия $P = -\sigma_{rr}$ можно найти геометрическое место точек, где частицы будут находиться в уравновешенном состоянии, т. е.

$$\frac{m V^2(t) \sin\beta \cos\beta}{\pi r_k^2} = -\tau_s \left(2\ln \frac{r_*}{r_{k=0}} - 1 \right). \tag{3.4}$$

Из условия (3.4) можно определить радиус кратера

$$r_*^3 = \frac{m V^2(t) \sin^2\beta}{2\pi\tau_s \left(\ln \frac{r_{k=0}}{r_*} + \frac{1}{2} \right)}. \tag{3.5}$$

Если условие $P = -\sigma_{rr}$ будет выполняться на теле, т. е. при $r = r_k$, то среда начнет прилегать к телу. Из условия (3.4) можно определить ту скорость тела, при которой среда начинает прилипать к телу

$$V_*^2(t) = \frac{\pi r_k^3 \tau_s \left(\ln \frac{\mu a}{\tau_s} + 1 \right)}{m \sin^2\beta}. \tag{3.6}$$

Скорость тела в момент полного погружения конуса можно определить из формулы

$$V_1^2 = V_0^2 - \frac{4\pi\tau_s}{m} \left[\frac{\beta^2}{2} \zeta^{2\nu+1} + \beta \zeta^{\nu+2} k_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+1} \right) - \right.$$
$$\left. - \beta^2 \zeta^{2\nu+1} \frac{3\nu+1}{2(2\nu+1)(\nu+1)} + \frac{\nu\beta k_1 \zeta^{\nu+1}}{2(\nu+2)} \right]. \tag{3.7}$$

Если $V_* \geqslant V_1$, то за все время проникания будет существовать трение между цилиндрической частью тела и средой, а если $V_* < V_1$, то прилегание начнется на некоторой глубине.

При $f > \zeta$, $V_1 > V_*$ и из условия $f' = V_*$, $f = f_*$ будем иметь

$$\frac{V_*^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = -\frac{2\pi\tau_s}{m} \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left(\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} \right) (f_* - \zeta). \tag{3.8}$$

После достижения скорости V_* для силы сопротивления будем иметь

$$P' = 2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left[\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} + k_1 r_0 (f - f_*) \right]. \tag{3.9}$$

Записывая уравнение движения $P' = -mf''$ и интегрируя от f_* до f, получаем

$$\frac{f'^2}{2}-\frac{V_*^2}{2}=-\frac{2\pi\tau_s}{m}\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left[\left(\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\frac{1}{2}\beta^{2\nu}\zeta^{2\nu}\right)(f-f_*)+\right.$$

$$\left.+k_1 r_0\frac{(f-f_*)^2}{2}\right] \tag{3.10}$$

при $f'=0$ $f=f_{max}$; для f_{max} получим

$$f_{max}=f_*-\left(\frac{\nu}{\nu+1}\zeta+\frac{r_0}{2k_1}\right)+\left[\left(\frac{\nu}{\nu+1}\zeta+\frac{r_0}{2k_1}\right)^2+\frac{mV_*^2}{2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)k_1 r_0}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.11}$$

где f_* определяется из (3.8).

Таким образом, задача разлагается на две стадии: первая стадия—без трения на цилиндрической части до достижения скорости V_* и при глубине f_* и вторая — при наличии трения на цилиндрической части до полной остановки с глубиной $f_{max}-f_*$.

В таблице приведены значения характерных величин.

Теоретические и экспериментальные данные

Материал	f_{max} по (2.4)	f_{max} по (3.11)	f_{max} по (2.6)	f_{max} эксп., *см*	a	ξ эксп.	$\mu\times10^4$, $\frac{кг}{см^2}$	τ_s, $\frac{кг}{см^2}$	k_1	r_0, *см*
Дюраль	4,45	3,9	4,28	4,5	0,65	7	26	3000	0,15	0,46
Бронза	5,9	5,7	3,59	2,0	0,16	10	63	9705	0,30	0,60
Латунь	3,82	2,8	2,19	2,2	0,54	9	44	2912	0,25	0,45
Медь	3,14	3,1	2,72	3,0	0,48	9	44	2206	0,23	0,48
Алюминий	14,4	14	10,5	10	0,20	10	26	441	0,15	0,6
Чугун	2,90	1,9	1,89	2,1			28	9900	0,25	2,0

Формула (3.11) дает возможность определить глубину проникания теоретически.

Автор выражает свою благодарность А. Г. Багдоеву за постановку задачи и ценные советы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ

Մետաղներում բարակ մարմնի ներթափանցման խորությունների որոշումը

Դիտարկվում է բարակ պինդ մարմինների ներթափանցումը մետաղների մեջ։ Ենթադրելով, որ քայքայման ճակատի ետևում տեղի ունի պլաստիկ հոսունություն, անսեղմելիության հավասարումից, քայքայման ճակատի վրա

եղած պայմաններից, միացնելով հարվածային ազդարարի և միջավայրի շարժման հավասարումները, որոշված են մասնիկների արագությունները և լարումները մարմնի մոտ։

Դտնված է կոնից և գլանից բաղկացած մարմնի ներթափանցման առավելագույն խորության արժեքը։ Կատարված են փորձեր տարբեր մետաղներում ներթափանցման վերաբերյալ։ Ճշտված է առավելագույն խորության որոշման համար ստացված բանաձևերի կիրառման տիրույթը։ Ստացված է նոր բանաձև։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Багдоев*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 30, № 5 (1977). [2] *А. Г. Багдоев, А. Н. Мартиросян, Г. А. Саркисян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1978. [3] *А. А. Ильюшин*, Пластичность, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. [4] *В. Ольшак, З. Мрус, П. Пежина*, Современное состояние теории пластичности. Мир, М., 1964. [5] *С. С. Григорян*, ПММ, т. 31, № 4 (1964). [6] *А. Я. Сагомонян*, Проникание, Изд-во МГУ, 1974

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 532.546

ГИДРОМЕХАНИКА

Р. М. Барсегян

Основные уравнения многомерной фильтрации в деформируемых грунтах

(Представлено академиком АН СССР П. Я. Кочиной 10/VI 1980)

Дифференциальное уравнение двухмерной и трехмерной фильтрации в деформируемых грунтах выводим на основе учета изменений соотношений между фазами грунта в процессе фильтрации. Такой подход для одномерного движения впервые был изложен в работах ([1-3]).

Распространим идею об учете изменений соотношений между жидкой и твердой фазами грунта в процессе фильтрации на случай многомерной фильтрации. С этой целью вводим следующую гипотезу: деформация водонасыщенного грунта под действием внешней нагрузки происходит в основном по направлению действия силы и поэтому деформациями в других направлениях можно пренебречь.

Пусть направление действующей нагрузки совпадает с отрицательным направлением оси oz. Деформация грунта происходит только по оси oz.

Вывод основных уравнений фильтрации базируется на следующих зависимостях.

1. Закон Дарси—Горсеванова, учитывающий движение жидкости относительно движущегося скелета деформируемого грунта,

$$U_z - \varepsilon V_z = -K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{1}$$

где U_z и V_z—проекции скорости соответственно воды и скелета на ось oz, ε—коэффициент пористости, $K_z(H)$—коэффициент фильтрации по направлению z, H—напор.

2. Закон Дарси:

$$\begin{aligned} U_x &= -K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}; \\ U_y &= -K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2}$$

где U_x и U_y—компоненты скорости фильтрации по направлениям осей ox и oy, $K_x(H)$ и $K_y(H)$—коэффициенты фильтрации соответственно по осям ox и oy.

3. Уравнение неразрывности жидкой фазы, которое с учетом сжимаемости воды (по закону Гука) имеет вид

$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t}+\frac{\partial(\gamma U_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma U_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\gamma U_z)}{\partial z}=0, \tag{3}$$

где γ—объемный вес воды, n—пористость.

4. Уравнение неразрывности для твердой фазы

$$\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial m}{\partial t}=0; \qquad m+n=1. \tag{4}$$

5. Уравнение равновесия, учитывающее изменение соотношений между фазами грунта в любой момент времени ([3]),

$$q+r=q+\int\limits_{s(t)}^{z}\left(\gamma\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{\gamma_s}{1+\varepsilon}\right)dz=\sigma+p, \tag{5}$$

где q—внешняя нагрузка, γ_s—удельный вес скелета, $s(t)$—осадка слоя деформируемого грунта конечной мощности в момент времени t, σ—напряжение в скелете, p—давление в воде, $r=\int\limits_{s(t)}^{z}\left(\gamma\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{\gamma_s}{1+\varepsilon}\right)dz$ —вес водонасыщенного грунта в пределах призмы высотой z и с площадью основания, равной единице.

В теории фильтрационной консолидации грунтов Терцаги—Флорина ([4]) выражение r в (5) является постоянной величиной $r=\gamma_{нас}z$. Это обстоятельство не позволяет учитывать изменяемость характеристик грунта (пористость, мощность) в процессе фильтрации, тогда как рассмотрение величины r в интегральной форме в уравнении (5) учитывает изменение соотношений между фазами грунта в виде изменений параметров грунта в процессе фильтрации.

О необходимости рассмотрения величины r в интегральной форме свидетельствует следующая оценка:

$$\frac{r_n-r_k}{r_n}>\frac{s_\infty}{l}. \tag{6}$$

В (6) r_n и r_k—соответственно первоначальное и конечное значения веса r, s_∞—конечная осадка слоя грунта с мощностью l.

6. Компрессионная зависимость

$$\varepsilon=f(\sigma), \tag{7}$$

в частности для линейно-деформируемых сред

$$f(\sigma)=-a\sigma+\text{const},$$

где a—коэффициент уплотнения.

7. Зависимость напора и давления

$$H=\frac{1}{\gamma}p+z. \tag{8}$$

С помощью зависимостей (1)—(5), (7) и (8) обычным способом находим, что трехмерная фильтрация в деформируемом слое грунта под действием внешней нагрузки в общей постановке с учетом сжимаемости движущейся воды и переменной проницаемости слоя грунта описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=(1+\varepsilon)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}-$$

$$-\left[\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}-\gamma\left(\frac{\partial H}{\partial z}-1\right)\right]\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\int\limits_{s(t)}^{z}\frac{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}}{(1+\varepsilon)^2}dz+\frac{\varepsilon\gamma}{E_{\text{в}}}\frac{\partial H}{\partial t}; \tag{9}$$

$$q+\int\limits_{s(t)}^{z}\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}dz=\sigma+p;$$

$$\varepsilon=f(\sigma);\quad H=\frac{1}{\gamma}p+z;$$

$E_{\text{в}}$—модуль объемного сжатия воды.

Из системы (9), в частности, для линейно-деформируемых сред получим следующее уравнение фильтрации в деформируемых грунтах:

$$\left(\frac{\varepsilon}{E_{\text{в}}}+a\right)\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{a}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1+\varepsilon}{\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}+\frac{a(\gamma-\gamma_s)}{\gamma}\int\limits_{s(t)}^{z}\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]dz+ \tag{10}$$

$$+a\frac{s'(t)}{\gamma}\frac{\gamma\varepsilon[s(t);t]+\gamma_s}{1+\varepsilon[s(t);t]}.$$

При выводе уравнения (10) мы пренебрегли слагаемым $V_z(1+\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}$ по сравнению со слагаемым $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$, так как отношение этих членов для обычных случаев уплотнения грунтов равно 10^{-5}—10^{-8}, тогда как величины $\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}$ и $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ являются малыми величинами одного порядка ([4]).

Обычно коэффициент пористости ε в уравнениях фильтрационной консолидации осредняют. Вопрос о возможности такого осредне-

ния исследован в ([3]). Для осредненного $\varepsilon_{ср}$ из (10) получим основное уравнение фильтрации в деформируемых грунтах

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right] + \tag{11}$$

$$+ \eta_1 \frac{\partial q}{\partial t} + \eta_2 \left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\Bigg|_{s(t)}^{z} + \eta_3,$$

где

$$\eta^* = \frac{\gamma}{1+\varepsilon_{ср.}}\left(\frac{\varepsilon_{ср.}}{E_в} + a\right); \quad \eta_1 = \frac{a}{1+\varepsilon_{ср.}}; \quad \eta_2 = \frac{a(\gamma-\gamma_s)}{(1+\varepsilon_{ср.})^2}$$

$$\eta_3 = \frac{as'(t)(\gamma\varepsilon_{ср.} + \gamma_s)}{(1+\varepsilon_{ср.})^2}.$$

Осадка $s(t)$ в уравнениях (9)—(11) определяется как при одномерном движении с помощью известных формул механики грунтов.

При постоянном q и $K_x = K_y = K_z = K(H)$ из (11) следует уравнение

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right) + \eta_2\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)\Bigg|_{s(t)}^{z} + \eta_3. \tag{12}$$

Принимая в (12) $K = \text{const}$, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^*\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right) + \eta_2 a^* \frac{\partial H}{\partial z}\Bigg|_{s(t)}^{z} + \frac{\eta_3}{\eta^*}, \tag{13}$$

где a^*—коэффициент пьезопроводности $a^* = \dfrac{K}{\eta^*}$.

Пренебрегая изменением z по отношению к t функции $\varepsilon(z, t)$ в выражении для r (относительная ошибка при этом будет меньше 10 %), вместо основных дифференциальных уравнений (9)—(13) получим более простые уравнения. Так, например, система уравнений (9) в этом случае примет вид (при $K_x = K_y = K_z = K(H)$)

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{E_в \dfrac{d\varepsilon}{d\sigma}}\right)\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1+\varepsilon(H) - |z-s(t)|\dfrac{\gamma-\gamma_s}{1+\varepsilon(H)}\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma}}{\gamma\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma}}\frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right] - \tag{14}$$

$$-\frac{1+\varepsilon(H)}{\gamma\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right]\right\}.$$

Уравнение, соответствующее уравнению (10), будет иметь вид

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{E_{\text{в}}a}\right)\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1+\varepsilon(H)+|z-s(t)|\frac{\gamma-\gamma_s}{1+\varepsilon(H)}a}{\gamma a}\frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]+$$

$$+\frac{1+\varepsilon(H)}{\gamma a}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K\frac{\partial H}{\partial y}\right]\right\}. \tag{15}$$

Аналогичные относительно (11)—(13) уравнения соответственно имеют вид:

$$\eta^*\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right]+(1+\eta_4)\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]+$$

$$+\eta_1\frac{\partial q}{\partial t}; \tag{16}$$

$$\eta^*\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)(1+\eta_4);$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^*\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+a_0^*\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \tag{17}$$

где

$$\eta_4=\frac{|z-s(t)|(\gamma-\gamma_s)a}{(1+\varepsilon_{\text{ср.}})^2};\quad a_0^*=\frac{K\eta_4}{\eta^*}+a^*. \tag{18}$$

В зависимости от вида действующей внешней нагрузки движение жидкости может быть двухмерным (например, для равномерно распределенной по бесконечной полосе нагрузки). Двухмерные уравнения, соответствующие, например, уравнениям (17) и (18), будут соответственно иметь вид:

$$\eta^*\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+(1+\eta_4)\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right);$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^*\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+a_0^*\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}.$$

При осесимметричной фильтрации (например, случай действия местной нагрузки, равномерно распределенной по площади круга или по окружности) основные дифференциальные уравнения движения жидкости в деформируемых грунтах выводятся обычным способом.

Из полученных выше уравнений, в частности из (11)—(18), как частные случаи следуют уравнения фильтрационной консолидации грунтов и уравнения упругого режима фильтрации. В уравнении равновесия (5), принимая $r=\text{const}$, приходим к основным уравнениям

фильтрационной консолидации (считая воду несжимаемой). При $r=r(t)$, считая грунт линейно-деформируемой средой, приходим к уравнениям упругого режима фильтрации. Таким образом, полученные новые уравнения являются более общими, нежели известные в настоящее время уравнения фильтрации.

Начальное условие для уравнений (11)—(18) заключается в том, что задается первоначальное значение напора в области движения. Это значение при учете сжимаемости воды равно нулю. Если же вода принимается несжимаемой, первоначальное значение напора определяется как решение уравнения Лапласа о мгновенном распределении напора для рассмотренной области, а граничные условия обычные. При учете сжимаемости воды граничное условие на поверхности действия силы при наличии дренажа должно быть третьего рода. На водонепроницаемых грунтах $\frac{\partial H}{\partial n^0}=0$ (n_0—нормаль к границе области).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Բազմաչափ ֆիլտրացիայի հիմնական հավասարումները դեֆորմացիայի ենթարկվող գրունտներում

Աշխատանքում արտածվում են եռաչափ ֆիլտրացիայի հավասարումները դեֆորմացիայի ենթարկվող գրունտներում, հաշվի առնելով ֆիլտրացիայի ընթացքում հեղուկ և պինդ ֆազերի փոփոխությունը։ Ստացված հավասարումներից մասնավոր դեպքում հետևում են ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայի և առաձգական ռեժիմի ֆիլտրացիայի այժմ գործող հավասարումները։ Նման հավասարումներ միաչափ ֆիլտրացիայի դեպքում նույնպես առաջին անգամ առաջարկվել է մեր կողմից ավելի շուտ։

Ինչպես ցույց են տալիս համեմատությունները, դեֆորմացիայի հաշվառումը ֆիլտրացիայի ընթացքում առանձնապես կարևոր է, եթե գրունտները լավ սեղմելի են։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. М. Барсегян*, ДАН СССР, т. 214, № 4 (1974). [2] *Р. М. Барсегян*, Межвузовский сб. науч. трудов. Сер. XII, вып. V. Строительство и архитектура. Ереван (1978). [3] *Р. М. Барсегян*, Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах, Изд-во Ереванского гос. ун-та, Ереван, 1977. [4] *В. А. Флорин*, Основы механики грунтов. Т. 2, Госстройиздат, Л.—М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 539.1

ФИЗИКА

Г. Ю. Крючков

Резонансное рассеяние света возмущенной атомной системой

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 1/VII 1980)

1. В настоящей работе рассматривается взаимодействие атомной системы с двумя монохроматическими полями: сильного поля с частотой ω_0, резонансного переходу $a-b$ между двумя возбужденными уровнями, и слабого поля рассеиваемого света.

Рассматривается режим адиабатического включения сильного поля, при котором без учета радиационных эффектов образуются квазиэнергетические состояния (к. э. с.) системы «атом + поле» ([1-3]).

$$\psi_i(\vec{r}, t) = e^{-iE_i t} u_i(\vec{r}, t), \quad u_i\left(\vec{r}, t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = u_i(\vec{r}, t) \tag{1}$$

E_i —квазиэнергии (К. Э.).

Условие слабости второго поля $(\vec{d}\,\vec{E}/\hbar\gamma)^2 \ll 1$ (E —напряженность поля, d —дипольный момент перехода, γ —спонтанная ширина) позволяет рассматривать рассеяние как процесс поглощения и последующего переизлучения одного фотона.

Как известно, спектр рассеянного света содержит также характеристики системы $a-b$ в резонансном поле; в частности, в настоящей работе таким путем исследуется вопрос о его радиационном сдвиге ([4]) и естественной ширине.

2. Используется диаграммный метод, являющийся обобщением известного метода Лоу ([5]) на случай наличия монохроматического сильного поля. В указанном приближении амплитуда рассеяния света на атоме, возмущенном сильным полем, выражается через точную функцию Грина связанного электрона в присутствии сильного поля. В представлении Фарри эта величина удовлетворяет уравнению Дайсона ([6])

$$G(x, x') = S(x, x') + 2\pi i \int S(x, x_1) M(x_1, x_2) G(x_2, x') d^4x_1\, d^4x_2, \tag{2}$$

где величина

$$S(x, x') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \sum_n \frac{u_n(x)\bar{u}_n(x')}{\omega - E_n(1-i\delta)} \tag{3}$$

есть функция Грина (к. э. с.), а массовый оператор $M(x_1, x_2)$ описывает собственно-энергетические эффекты во внешнем поле.

3. Ход решения уравнения (2) следующий. Записываем его в матричных элементах по (к. э. с.) в энергетическом представлении, в частности,

$$M_{ij}(\omega, \omega') = \int d^4x d^4x' e^{i\omega t} e^{-i\omega' t'} \bar{u}_i(x) M(x, x') u_j(x'). \tag{4}$$

Пользуясь выражением для M в низшем порядке по радиационному (квантованному) полю, с функцией S (см. ([6])), получаем

$$M_{ij}(\omega, \omega') = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega' - q\omega_0) M^q_{ij}(\omega'); \tag{5}$$

$$M^q_{ij}(\omega) = \frac{\alpha}{4\pi^2}\int \frac{d^3k}{|\vec{k}|} \times$$

$$\times \sum_{n, q_1} \frac{\langle\langle \bar{u}_i | \gamma_\mu e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{iq_1\omega_0 t} | u_n \rangle\rangle \langle\langle u_n | \gamma_\mu e^{-i\vec{k}\vec{r}} e^{i(q-q_1)\omega_0 t} | u_j \rangle\rangle}{\omega - E_n(1-i\delta) - |\vec{k}| \cdot \frac{E_n}{|E_n|} - q_1\omega_0}, \tag{6}$$

где γ_μ—матрицы Дирака, $\alpha = e^2/4\pi$, двойные скобки означают интегрирование по объему и усреднение по периоду $2\pi/\omega$. Вводя таким же разложением (5) гриновские коэффициентные функции, для последних получаем:

$$G^q_{nm}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}[\omega - E_n(1-i\delta)]^{-1}\delta_{nm}\delta_{q_0} +$$

$$+ [\omega + q\omega_0 - E_n(1-i\delta)]^{-1} \sum_{q_1, p} M^{q-q_1}_{np}(\omega + q_1\omega_0) G^{q_1}_{pm}(\omega). \tag{7}$$

Пользуясь для решения (7) итерационной процедурой ([5]), для диагональных элементов с точностью до линейных по M членов получаем

$$(G^{(0)}_{nn}(\omega))^{-1} = 2\pi i(\omega - E_n - M^{(0)}_{nn}(\omega)). \tag{8}$$

Пренебрегая также недиагональными элементами $G^q_{nm}(q \neq 0, n \neq m)$, которые соответствуют безызлучательным переходам между различными (к. э. с.) через радиационное поле, получаем

$$G(x, x') \simeq \frac{1}{2\pi i}\sum_n u_n(x)\bar{u}_n(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\, e^{-i\omega(t-t')}}{\omega - E_n - M^0_{nn}(\omega)}. \tag{9}$$

4. В общем случае произвольного монохроматического поля амплитуда рассеяния фотона с частотой ν_1 атомной системой, при котором электрон переходит из состояния $\varphi_1(\vec{r}, t) = e^{-i\omega_1 t}\varphi_1(\vec{r})$ в $\varphi_2(\vec{r}, t) = e^{-i\omega_2 t}\varphi_2(\vec{r})$, равна

$$A_{12} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_2 + \nu_2 - \omega_1 - \nu_1 - q\omega_0) A_{12}^q \tag{10}$$

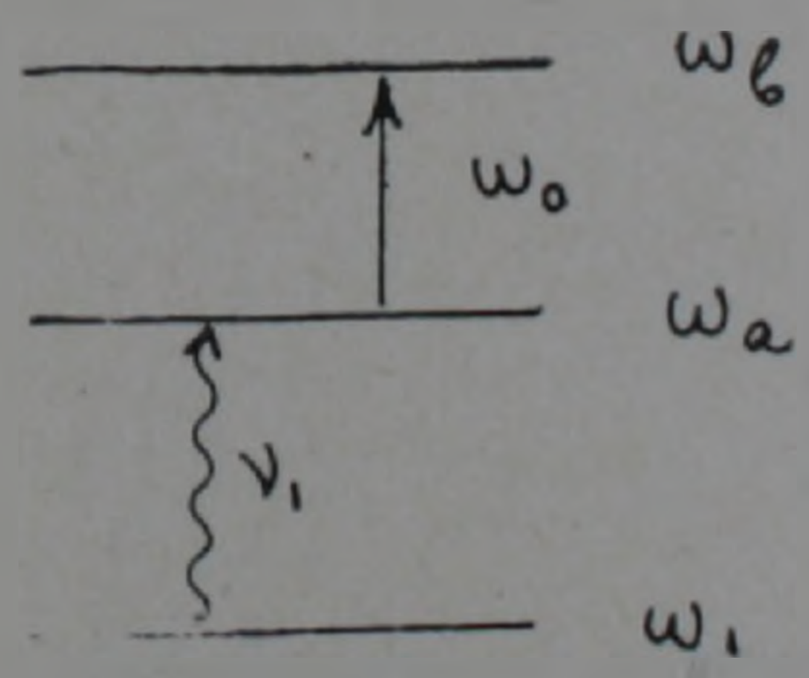
$$A_{12}^q = \sum_n \sum_{q_1} \left\{ \frac{\langle\langle \varphi_2 | \vec{d}\vec{e}_2^{\,*} e^{i(q-q_1)\omega_0 t} | u_n \rangle\rangle \langle\langle u_n | \vec{d}\vec{e}_1 e^{iq_1\omega_0 t} | \varphi_1 \rangle\rangle}{\omega_1 + \nu_1 - E_n + q_1\omega_0 - M_{nn}^{(0)}(\omega_1 + \nu_1 + q_1\omega_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\langle\langle \varphi_2 | \vec{d}\vec{e}_1 e^{iq_1\omega_0 t} | u_n \rangle\rangle \langle\langle u_n | \vec{d}\vec{e}_2^{\,*} e^{i(q-q_1)\omega_0 t} | \varphi_1 \rangle\rangle}{\omega_2 - \nu_1 - E_n - q_1\omega_0 - M_{nn}^{(0)}(\omega_2 - \nu_1 - q_1\omega_0)} \right\}. \tag{11}$$

Амплитуда приведена в дипольном приближении, причем считается, что начальное и конечное состояния атома не имеют ширин и не возмущены сильным полем.

Диагональные элементы $M_{nn}^{(0)}$ в (11) определяют радиационные смещения и ширины соответствующих уровней в сильном поле. Они содержат как эффект непосредственного влияния внешнего поля на радиационные сдвиги и ширины отдельных уровней, так и эффект их изменения вследствие перемешивания уровней.

5. Рассмотрим случай резонансного упругого рассеяния атомом в основном состоянии при $\nu_1 \approx \omega_a - \omega_1 \equiv \omega_{a1}$, предполагая наличие однофотонного резонанса по сильному полю между уровнями $a-b$,



$$\varepsilon = \omega_{ba} - \omega_0 \ll \omega_{ba}.$$

(См. рисунок, где изображены только резонансные уровни системы, остальные, нерезонансные, уровни учитываются только при вычислении величин $M_{nn}^{(0)}$).

Оставляя в (11) два резонансных члена со знаменателями $\nu_1 + \omega_1 - E_a - M_{aa}^{(0)}(E_a)$, $\nu_1 + \omega_1 - E_b + \omega_0 - M_{bb}^{(0)}(E_b)$ и воспользовавшись резонансными (к. э.) волновыми функциями [2,3], для сечения рассеяния получаем

$$d\sigma = \nu_1^4 d\Theta \sum |\langle \varphi_1 | \vec{d}\vec{e}_2^{\,*} | \varphi_a \rangle \langle \varphi_a | \vec{d}\vec{e}_1 | \varphi_1 \rangle|^2 \times \tag{12}$$

$$\times \left| \frac{n_a}{\omega_{a1} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{2\Omega}{|\varepsilon|}\right) + \Delta E_a - \nu_1 - \frac{i}{2}\Gamma_a} + \frac{n_b}{\omega_{a1} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{2\Omega}{|\varepsilon|}\right) + \Delta E_b - \nu_1 - \frac{i}{2}\Gamma_b} \right|^2,$$

где $2\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 + |\langle\varphi_a|V|\varphi_b\rangle|^2}$, $n_{a,b} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{|\varepsilon|}{2\Omega}\right)$, $\langle\varphi_a|V|\varphi_b\rangle$ — матричный элемент взаимодействия атомной системы с сильным полем.

Спектральное распределение рассеянного света представляет собой два пика. Ширины пиков

$$\Gamma_{a,b} = n_{a,b}\gamma_a + n_{b,a}\gamma_b \tag{13}$$

получены из (6) в резонансном приближении $(\Omega/\omega_{ab}) \ll 1$ и содержат лишь эффекты перемешивания уровней, $\gamma_{a,b}$ — бесполевые ширины уровней a и b. В случае точного резонанса $\varepsilon = 0$, $\Gamma_a = \Gamma_b = \frac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_b)$. Радиационные сдвиги $\Delta E_{a,b}$ определяются действительными частями $M^{(0)}_{aa}$ и получены в ([4]). Расстояние между пиками равно $2\Omega + |\varepsilon|(\delta_b - \delta_a)/2\Omega$, где $\delta_{a,b}$ — радиационные сдвиги уровней a и b при отсутствии поля.

Такое же спектральное распределение по частоте излученного фотона получается при вычислении вероятностей резонансного перехода в случае спонтанного комбинационного рассеяния.

Спектры излучения и поглощения на переходе, смежном с переходом, резонансным сильному полю, изучались во многих работах (см., например, ([7])). В работе ([8]) для режима мгновенного включения получен спектр, аналогичный (12), в котором, однако, ширины пиков не совпадают с выражениями (13), что обусловлено различием в подходах к вычислению радиационных сдвигов и ширин атомной системы в сильном поле.

Автор выражает благодарность М. Л. Тер-Микаеляну, Ю. П. Малакяну и А. О. Меликяну за обсуждения.

Институт физических
исследований Академии наук
Армянской ССР

Գ. ՅՈՒ. ԿՐՅՈՒՉԿՈՎ

Լույսի ռեզոնանսային ցրումը խոտորված ատոմային համակարգի կողմից

Ուսումնասիրված է լույսի ցրումը ատոմային համակարգի վրա, որը փոխազդում է ուժեղ դաշտի հետ։ Դիտարկումը հիմնված է ուժեղ դաշտում գրտնվող կապված էլեկտրոնի գրինի ֆունկցիայի հաշվարկման վրա, վերջինս հաշվի է առնում նաև գրգռված մակարդակների ճառագայթային շեղումների և լայնությունների փոփոխության էֆեկտները դաշտում։

Ցրված և ուժեղ դաշտերի հետ ռեզոնանսի դեպքում ստացված է առաձգական ցրման կտրվածք, որը ունի երկու մաքսիմում։ Մաքսիմումների լայնությունները արտահայտվում են մակարդակների ինքնակամ լայնությունների բնակեցվածությունների միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. N. Shirley*, Phys. Rev., vol. B138, 979 (1965); *В. И. Ритус*, ЖЭТФ, т. 51, 1544 (1966); *Я. Б. Зельдович*, ЖЭТФ, т. 51, 1492 (1966); УФН, т. 110, 139 (1973). [2] *М. Л. Тер-Микаелян*, Препринт ИФН 74—11, Ереван, 1974. [3] *Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов*, Атом в сильном световом поле, Атомиздат, М., 1978. [4] *Г. Ю. Крючков, Ю. П. Малакян*, ДАН АрмССР, т. 71, № 5 (1980). [5] *F. Low*, Phys. Rev., vol. 88, 53 (1952). [6] *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1969. [7] *И. М. Бетеров, Р. И. Соколовский*, УФН, т. 110, 169 (1973). [8] *Р. И. Соколовский*, Оптика и спектроскопия, т. 28, 824 (1970).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 621.372.45

РАДИОФИЗИКА

К. А. Барсуков, Г. А. Григорян

Объемный резонатор с периодически движущейся границей

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Мирзабекяном 25/VI 1980)

Одномерный резонатор с периодически движущейся границей был рассмотрен в ([1]), однако используемый там метод не позволяет исследовать случай резонанса, когда энергия колебаний стенки эффективно передается полю. Для трехмерного резонатора условие резонанса оказывается иным, и в рамках метода ([1]) уже возможно исследование резонансного взаимодействия поля и стенки.

Пусть резонатор представляет собой, как и в ([2]), отрезок волновода, один из торцов которого покоится, а другой совершает колебания по закону

$$x = \bar{a}(\tau) = a + b\cos\frac{\Omega\tau}{c}, \tag{1}$$

где $\tau = ct$, a—характерное расстояние между торцами, b—амплитуда колебаний правого торца, Ω—частота колебаний движущегося торца. Условие резонанса можно получить из следующих простых соображений. Очевидно, что элементарная работа, совершаемая частью стенки ds за время dt, есть

$$dA = \frac{1}{4\pi c} H_\tau^2\, b\Omega \sin\Omega t\, dt\, ds,$$

где H_τ—касательная к $x = a(\tau)$ и s—составляющая магнитного поля. Отсюда полная работа стенки за время Δt будет

$$A = \frac{b\Omega}{4\pi c}\int_t^{t+\Delta t}\int_s H_\tau^2\left(\left(a + b\cos\frac{\Omega\tau}{c}\right), \tau\right)\sin\Omega t\, dt\, ds. \tag{2}$$

Введем упрощающие предположения. Во-первых, будем считать колебания малыми, во-вторых, скорость колебаний нерелятивистской. Это означает, что

$$\frac{b}{a} \ll 1, \quad \frac{\Omega b}{c} \ll 1. \tag{3}$$

С точностью до величин первого порядка малости уравнение (2) запишется в виде

$$A = \frac{b\Omega}{4\pi c} \int_{t}^{t+\Delta t} \int_{s} H_z^2(a, \tau) \sin \Omega t \, dt \, ds. \tag{4}$$

Пусть собственная частота резонатора есть ω_{nm}, тогда квадрат магнитного поля осциллирует с частотой $2\omega_{nm}$. Интеграл (4), очевидно, растет со временем, если

$$\Omega = 2\omega_{nm}. \tag{5}$$

Последнее условие совпадает с условием резонанса ([3]). Частота резонатора ω_{nm} может быть записана соотношением ([4])

$$\omega_{nm} = c\sqrt{\lambda_n^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}. \tag{6}$$

Подстановка (6) в (5) дает условие резонанса в виде

$$\Omega = 2c\sqrt{\lambda_n^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}, \tag{7}$$

где λ_n—собственные числа поперечного сечения волновода. Отсюда видно, что если $\lambda_n \neq 0$, то $\Omega \neq \frac{2\pi mc}{a}$ и этот случай может быть рассмотрен методом ([1]).

Итак, рассмотрим для определенности колебания типа ТМ в указанном выше резонаторе, хотя метод позволяет исследовать также и колебания ТЕ типа. Функция $\tilde{E}_z$ в этом случае удовлетворяет уравнению ([2])

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \lambda_n G(\xi, \eta)\right] \tilde{E}_z = 0, \tag{8}$$

а для $G(\xi, \eta)$ из ([1]) имеем

$$G(\xi, \eta) = a^2 \left\{1 + 2\frac{b\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega a}{c}\xi\right)\cos\left(\frac{\Omega a}{c}\eta\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{b\Omega}{c}\right)^2 \left[\cos\left(\frac{2\Omega a}{c}\xi\right) + \cos\left(\frac{2\Omega a}{c}\eta\right)\right]\right\}.$$

Ищем решение указанного уравнения в виде

$$\tilde{E}_z = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\xi) \cos(\pi k \eta), \tag{9}$$

которое, очевидно, удовлетворяет граничным условиям ([2]) задачи

$\partial \bar{E}_z/\partial \eta = 0$ при $\eta = 0$ и $\eta = 1$. Разложим также $G(\xi, \eta)$ в уравнении (8) в ряд Фурье по той же системе функций

$$G(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\pi k \eta), \tag{10}$$

где

$$a_k = \frac{4b\Omega^2 a^3}{c^2} \cos\left(\frac{\Omega a}{c}\xi\right) \frac{(-1)^k \sin\frac{\Omega a}{c}}{\left(\frac{\Omega a}{c}\right)^2 - (\pi k)^2} - \frac{2b^2\Omega^2 a^3}{c^3} \frac{(-1)^k \sin\frac{\Omega a}{c}}{4\left(\frac{\Omega a}{c}\right)^2 - (\pi k)^2},$$

$$a_0 = 2a^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b\Omega}{c}\right)^2 \cos\left(\frac{2\Omega a}{c}\xi\right)\right] + 4ab\cos\left(\frac{\Omega a}{c}\xi\right)\sin\frac{\Omega a}{c} +$$

$$+\left(\frac{b\Omega}{c}\right)^2 \frac{ac}{2\Omega} \sin\frac{2\Omega a}{c}.$$

Если подставить (9) и (10) в (8) и использовать равенство $a_{-n} = a_n$, то получим

$$U_k'' + (\pi k)^2 U_k + \frac{1}{2}\lambda_n^2 \sum_{s=0}^{k} U_s a_{k-s}, \tag{11}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, задача сводится к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений для определения коэффициентов Фурье $U_k(\xi)$. Эта система весьма удобна для численного решения задачи на ЭВМ.

Заметим, что коэффициенты Фурье a_k убывают с ростом k как k^{-2}, ряд в (11) является знакопеременным. Если к тому же U_k достаточно быстро стремятся к нулю с ростом k, то можно рассмотреть приближение, в котором все $a_k = 0$ кроме a_0. Это фактически означает, что в (8) $G(\xi, \eta)$ заменяется его средним значением по переменной η на отрезке $[0,1]$. Кроме того, будем считать, что выполняется второе условие (3). Тогда (11) сведется к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 U_k}{d\xi^2} + \omega_1(1 + \varkappa\cos(\Omega_1\xi))U_k = 0, \tag{12}$$

$$\omega_1 = \frac{a\omega_{nk}}{c}, \quad \Omega_1 = \frac{a\Omega}{c}, \quad \varkappa = \frac{2b\lambda_n^2 c^2}{a\omega_{nk}^2} \sin\frac{\Omega a}{c}.$$

Уравнение (12) есть уравнение Матье, достаточно хорошо изученное в математической литературе (см., например, ([5,6])). Ниже для исследования решений (12) мы воспользуемся методом ([6]). Будем предполагать, что выполняется условие резонанса (5) и искать решение при $\Omega_1 = 2\omega_1$. По ([6]) представим искомое решение в виде

$$U_k = \alpha(\xi)\cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\xi + \theta(\xi)\right). \tag{13}$$

В свою очередь $\alpha(\xi)$ и $\theta(\xi)$ ищутся через новые переменные по следующим формулам:

$$u = \alpha \cos\theta, \quad v = \alpha \sin\theta. \tag{14}$$

В ([6]) показывается, что для u и v имеют место соотношения

$$v = c_1 \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda}\left[-\frac{\varkappa\omega_1^2}{2\Omega_1} + \left(\omega_1 - \frac{\Omega_1}{2}\right)\right] + C_2 \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda}\left[-\frac{\varkappa\omega_1^2}{2\Omega_1} - \left(\omega_1 - \frac{\Omega_1}{2}\right)\right],$$

$$u = C_1 e^{\lambda\xi} + C_2 e^{-\lambda\xi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\varkappa^2\omega_1^4}{4\Omega_1^2} - \left(\omega_1 - \frac{\Omega_1}{2}\right)^2}. \tag{15}$$

Переменные ξ и η ([1]) в нашей задаче при выполнении (3) связаны соотношениями

$$\eta = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\cos\frac{\Omega\tau}{c}\sin\frac{\Omega x}{c}, \quad \xi = \frac{\tau}{a} - \frac{b}{a}\sin\frac{\Omega\tau}{c}\cos\frac{\Omega x}{c}. \tag{16}$$

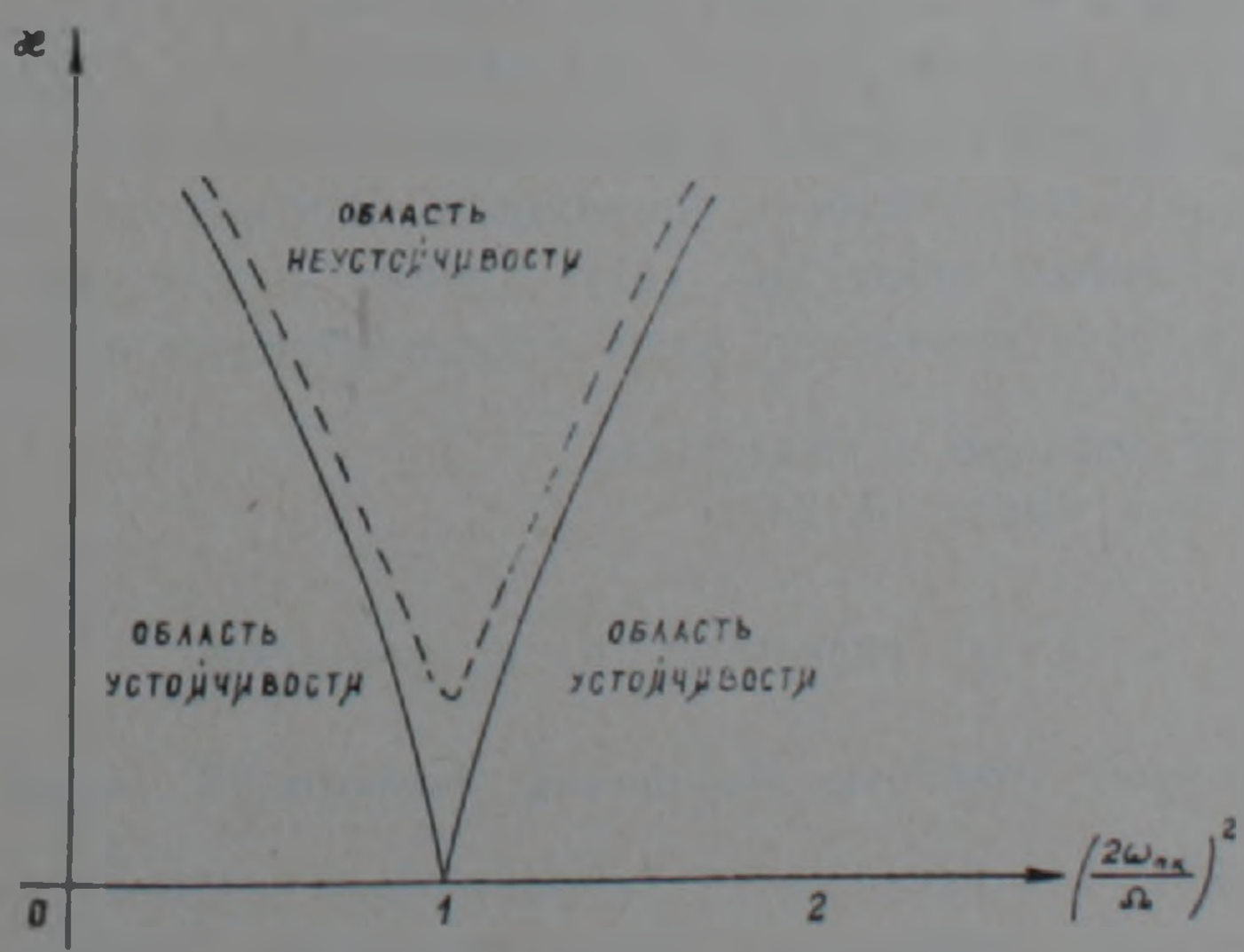
Если λ в (15) действительно, то с ростом ξ, а следовательно по (16) и τ, амплитуда $\alpha(\xi)$ будет возрастать по экспоненциальному закону. Действительные значения λ в (15) определяются соотношениями

$$2\omega_1\left(1 - \frac{\varkappa}{4}\right) < \Omega_1 < 2\omega_1\left(1 + \frac{\varkappa}{4}\right) \tag{17}$$

или с помощью (12)

$$2\omega_{nk} - \frac{b}{a}\frac{\lambda_n^2 c^2}{\omega_{nk}}\sin\frac{2a\omega_{nk}}{c} < \Omega < 2\omega_{nk} + \frac{b}{a}\frac{\lambda_n^2 c^2}{\omega_{nk}}\sin\frac{2a\omega_{nk}}{c}. \tag{18}$$

В этой области значений параметров амплитуда колебаний в резонаторе возрастает с течением времени экспоненциально (см. рисунок.



Области устойчивости колебаний резонатора

сплошная линия). Резонанс такого типа естественно называть параметрическим.

Заметим, что (18) есть одновременно условие самовозбуждения колебаний в резонаторе с периодически колеблющейся стенкой. При $\Omega = 2\omega_{nk}\left(1 \pm \frac{\varkappa}{4}\right)$ или

$$\Omega = 2\omega_{nk} \pm \frac{b}{a}\,\frac{\lambda_n^2 c^2}{\omega_{nk}}\sin\frac{2a\omega_{nk}}{c} \tag{19}$$

колебания в резонаторе становятся чисто периодическими с периодом для основного типа колебаний равным $4\pi/\Omega$. Условия (19) являются границами областей, в которых колебания резонатора либо устойчивы, либо неустойчивы. Эти области изображены на рисунке в переменных $\varkappa$, $2\omega_{nk}/\Omega$.

При учете потерь в стенках, так же как и в диссипативных параметрических системах, область неустойчивости колебаний резонатора несколько меняется. Это можно подтвердить следующими полукачественными соображениями. Пусть движущаяся граница обладает импедансом ζ_0. Тогда ([7]) затухание колебаний в стационарном резонаторе определяется фактором $\exp\left\{-\frac{\zeta_0 \tau}{a}\right\}$. Поскольку ζ связано с x, τ соотношением (16), то в первом приближении $\zeta = \frac{\tau}{a}$ и возможность нарастания колебаний в резонаторе определяется соотношением между ζ_0 и λ. Ясно, что неустойчивость колебаний будет иметь место, если $\lambda > \zeta_0$ или при

$$2\omega_1 - 2\sqrt{\frac{\varkappa^2\omega_1^2}{4} - \zeta_0^2} < \Omega < 2\omega_1 + 2\sqrt{\frac{\varkappa^2\omega_1^2}{4} - \zeta_0^2}.$$

Соответствующая область неустойчивости колебаний резонатора показана на рисунке пунктирной линией. Для создания режима возбуждения колебаний в этом случае необходима большая амплитуда колебаний резонатора. Естественно, что все приближение справедливо лишь для малых колебаний границы и при значительной величине импеданса стенки вопрос устойчивости колебаний необходимо решать с использованием точных уравнений (11), однако соответствующее исследование может быть проведено лишь с использованием ЭВМ.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ա. ԲԱԲՈՒԿՈՎ, Դ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Պարբերաբար շարժվող սահմանով ծավալային ռեզոնատոր

Տեսականորեն հետազոտվում է պարբերական օրենքով շարժվող պատով ալիքատարային ռեզոնատորը՝ պատի և դաշտի միջև ռեզոնանսային

փոխապպեցության դեպքում, երբ շարժվող պատի էներգիան էֆեկտիվորեն հաղորդվում է դաշտին։ Գտնվել են խնդրի լուծումները և հայտնաբերվել այդ լուծումների կայունության տիրույթները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. А. Барсуков, Г. А. Григорян,* Радиотехника и электроника, т. 21, вып. 1 (1976). [2] *Г. А. Григорян,* Изв. АН АрмССР, физика, т. 15, вып. 1, с. 59 (1980). [3] *Г. А. Аскарьян,* ЖЭТФ, т. 42, 1672 (1962). [4] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский,* Уравнения математической физики, «Наука», М., 1977. [5] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи,* Высшие трансцендентные функции, «Наука», М., 1965. [6] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский,* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, «Наука», М., 1974. [7] *Г. А. Григорян,* Изв. АН АрмССР, физика, т. 15, вып. 1, с. 29 (1980).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 575.113.7 : 595.782

ГЕНЕТИКА

Г. Х. Азарян, С. М. Саркисян, Г. Г. Хачатрян

Сцепленная с полом рецессивная леталь у гроздевой листовертки

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Казаряном 15/XII 1980)

В числе различных методов генетической борьбы с вредными насекомыми большой интерес представляет использование механизмов, приводящих к нарушению численного соотношения полов в популяции. Так как эффективный потенциал воспроизведения популяции определяется числом самок в ней, то численное уменьшение их может привести к снижению потенциала размножения ([1, 2]). Возможность использования различных факторов, регулирующих соотношение полов в потомстве в пользу самцов, показана у разных видов насекомых ([1–3]). В ряде случаев удалось «синтезировать» линии комнатной мухи, самцы которой при скрещивании с неродственными самками давали потомство, состоящее только из самцов ([3–5]).

Интересные результаты были получены в исследованиях, проведенных с тутовым шелкопрядом с использованием сцепленных с полом рецессивных леталей ([6]), которые, находясь в кариотипе самки в гемизиготном состоянии, вызывают ее гибель, так как генетически инертная W-хромосома самок не подавляет действия рецессивной летали, локализованной в Z-хромосоме. У тутового шелкопряда была создана линия, сбалансированная по Z-леталям посредством транслокации участка Z-хромосомы с нормальной аллелью на W-хромосому самки. Самцы-носители Z-леталей при спаривании со сбалансированными по леталям самками дают потомство обоих полов, в то время как при спаривании их с нормальными несбалансированными самками получается потомство, состоящее только из самцов (самки погибают на стадии эмбрионального развития).

Получение сбалансированных по сцепленным с полом рецессивным леталям линий представляет интересную задачу, решение которой может привести к созданию весьма эффективного способа генетической борьбы с вредителями ([7, 8]). Учитывая это, мы проводили опыты по получению сцепленных с полом рецессивных эмбриональных леталей у опасного вредителя винограда—гроздевой листовертки. Результаты этих опытов приводятся ниже.

Разработанная ранее методика лабораторного разведения гроздевой листовертки на искусственной питательной среде совершенствовалась в целях приспособления ее к выявлению индуцированных сцепленных с полом эмбриональных леталей.

Бабочек-самцов одного—трехдневного возрастов подвергали рентгеновскому облучению в дозах от 2 до 6 крад, затем спаривали с нормальными самками. Взятые из первого поколения самцы индивидуально спаривались с нормальными самками, и затем в яйцекладках, полученных от них, подсчитывалось число погибших эмбрионов. Ожидалось, что при возникновении сцепленной с полом рецессивной летали, проявляющейся на стадии эмбрионального развития, число погибших эмбрионов в потомстве самца-носителя летали будет заметно превышать этот показатель в контроле. Вследствие гибели на эмбриональной стадии самок, унаследовавших Z-леталь от отца, соотношение полов в стадии имаго должно быть сдвинуто в сторону преобладания числа самцов.

В одной кладке из общего числа изученных была выявлена 38,8%-ная гибель эмбрионов против 1—5% в контроле. Вылупившиеся из этой кладки гусеницы были вскормлены и из общего числа 57 полученных бабочек 36 оказались самцами (63,1%). Самцы этой линии изучались в последующих опытах.

В качестве контроля использовали интактные особи лабораторной популяции гроздевой листовертки.

Все 36 самцов, полученных в вышеуказанной семье, спаривались с нормальными самками, и было получено 25 кладок. В 14 из 25 кладок наблюдалась эмбриональная гибель, превышающая контроль. Отродившихся во всех кладках гусениц воспитывали до получения половозрелых особей и определяли численное их соотношение.

Приведенные в табл. 1 данные показывают, что в группе семей, условно отнесенных к гетерозиготным по сцепленной с полом рецессивной эмбриональной летали (семьи с высокой эмбриональной ги-

Таблица 1

Соотношение полов в потомстве самцов из исходной семьи, спаренных с нормальными самками

Группы семей	Число кладок	Средний процент эмбриональной гибели	Общее число полученных бабочек	Процент самок
Семьи с высокой эмбриональной гибелью	14	28,1	554	38,9
Семьи с низкой эмбриональной гибелью	11	5,4	420	49,9
Контрольные семьи	13	2,2	489	50,8

белью), процент самок значительно меньше, чем в другой группе этих же семей и в контроле.

Опыты по изучению соотношения полов в группах семей с повышенной эмбриональной гибелью по сравнению с семьями с эмбриональной гибелью в пределах показателя контроля повторяли с самцами, взятыми из семей, условно отнесенных к «летальным». Результаты этих опытов приведены в табл. 2. Они подтверждают заключение

Таблица 2

Соотношение полов в потомстве самцов из «летальных» семей, спаренных с нормальными самками

Группы семей	Число кладок	Средний процент эмбриональной гибели	Общее число полученных бабочек	Процент самок
Семьи с высокой эмбриональной гибелью	14	30,9	574	36,4
Семьи с низкой эмбриональной гибелью	12	2,3	528	50,4
Контрольные семьи	13	3,5	562	49,3

о том, что самцы из семей с повышенной эмбриональной гибелью и пониженным процентом самок относятся к двум группам, в одной из которых самцы дают потомство с повышенной эмбриональной гибелью и пониженным числом самок, а в другой—не отличаются от контроля по этим показателям. Такая картина вполне согласуется с ожидаемой при наличии в указанных семьях сцепленной с полом эмбриональной рецессивной летали.

Указанной картине соответствует также то, что в кладках, полученных от самок из летальных семей, спаренных с нормальными самцами, эмбриональная гибель не превышала этот показатель в контроле, а число самок в их потомстве было близко к 50%.

Армянский научно-исследовательский
институт защиты растений

Դ. Խ. ԱԶԱՐՅԱՆ, Ս. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Դ. Դ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Սեռին շղթայակցված ռեցեսիվ լեթալ խաղողի ողկույզների մոտ

Վնասատու միջատների դեմ ձեռնարկվող քիմիական պայքարի միջոցառումների կիրառման բացասական ներգործությունը կանխելու նպատակով խնդիր է դրվում մշակելու պայքարի սկզբունքորեն նոր՝ գենետիկական եղանակ։

Գենետիկական պայքարի իմաստը կայանում է նրանում, որ վնասատուի

բնական պոպուլյացիա է բաց թողնվում նույն տեսակին պատկանող, սակայն ժառանգականորեն արատավորված անհատները, որոնք զուգավորվելով բնության պայմաններում ունեցած անհատների հետ անկենսունակ սերունդ են թողնում, իջեցնելով կամ կանխելով դրանով իսկ պոպուլյացիայի թվաքանակը։

Գենետիկական պայքարի եղանակներից մեկը կարող է լինել բնական էգերի թվի կրճատումը, որից անմիջապես կախված է պոպուլյացիայի թվակազմը։ Նման նպատակին կարելի է հասնել, եթե բնական պոպուլյացիա բաց թողնվող անհատների սեռական քրոմոսոմներում լոկալիզացնել մեկ կամ երկու ոչ ալելիկ լեթալ գեն։

Այդ նկատառումով, նպատակ էր դրված խաղողի ողկույզակերի մոտ սեռին շղթայակցված ռեցեսիվ լեթալներ ստանալ նրա արու թիթեռները ռենտգեն ճառագայթներով մշակելու միջոցով.

Այդ եղանակով ստացված բազմաթիվ ընտանիքներից մեկում նկատվել է սեռերի հարաբերական քանակի խախտում ի վնաս էգերի, որը համընկնում էր այն պատկերին, ինչպիսին սպասվում էր սեռին շղթայակցված ռեցեսիվ լեթալի առկայության դեպքում։ Հետագա ուսումնասիրություններով պարզվեց (աղ. 1) որ, իրոք, հայտնաբերված ընտանիքում ստացված արուների կեսը կրում են սեռին շղթայակցված ռեցեսիվ լեթալ, որի պատճառով նրանց ու բնական էգերի զուգավորումից ստացված ընտանիքներում էգերի թիվը կիսով չափ պակաս է, քան սպասվում էր։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. F. Knipling, W. Klassen*, Technikal Bulletin, USA Department of Agriculture, No 1533 (1976). [2] *I. S. McDonald* Ann. Entomol. Soc. Amer., vol. 63 (1) (1970). [3] *G. B. Craing, W. A. Hickey, R. C. Vandelley*, Science, vol. 132 (1960). [4] *R. Milani*, Symposium on the Sterility Principle for Insect Controle of Eradiation, pp. 381—397, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1971. [5] *D. E. Wagoner*, Nature, vol. 223 (5202) (1969). [6] *В. А. Струнников*, ДАН СССР, т. 188, № 5 (1969). [7] *В. А. Струнников*, Генетика, т. 14, № 11 (1969). [8] *В. А. Струнников*, в сб.: Проблемы защиты растений от вредителей, болезней и сорняков, Колос, М., 1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXII 1981 2

УДК 581.1.035.23

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Академик АН Армянской ССР
В. О. Казарян, Э. В. Авакян

К вопросу о влиянии корневых выделений на жизнедеятельность изолированных листьев

(Представлено 9/XII 1980)

Корни благодаря своей метаболической роли снабжают листья разнообразными трофическими ([1]) и физиологически активными веществами ([2]), обеспечивающими нормальную жизнедеятельность: фотосинтез ([3]), образование белков ([4]), хлорофилла ([5]) и другие процессы. Однако, как показывают экспериментальные данные, синтезированные корнями метаболиты не полностью перемещаются к надземным органам. Определенная доля этих веществ выделяется в корнеобитающую среду и используется корневой микрофлорой ([6]) и другими растениями. Показано также, что корневые выделения способствуют синтезу хлорофилла альбиносных растений ([7]). Если одновременно учесть, что пасока другого вида по своей физиологической активности почти не уступает таковой собственного растения ([8]), то весьма вероятным окажется предположение, что в фитоценозах наряду с конкуренцией между отдельными индивидами за жизненное пространство, минеральные элементы, воду и свет существует и определенное влияние одного растения на другое, осуществляемое через корневые метаболиты, выделяемые в почву ([9]).

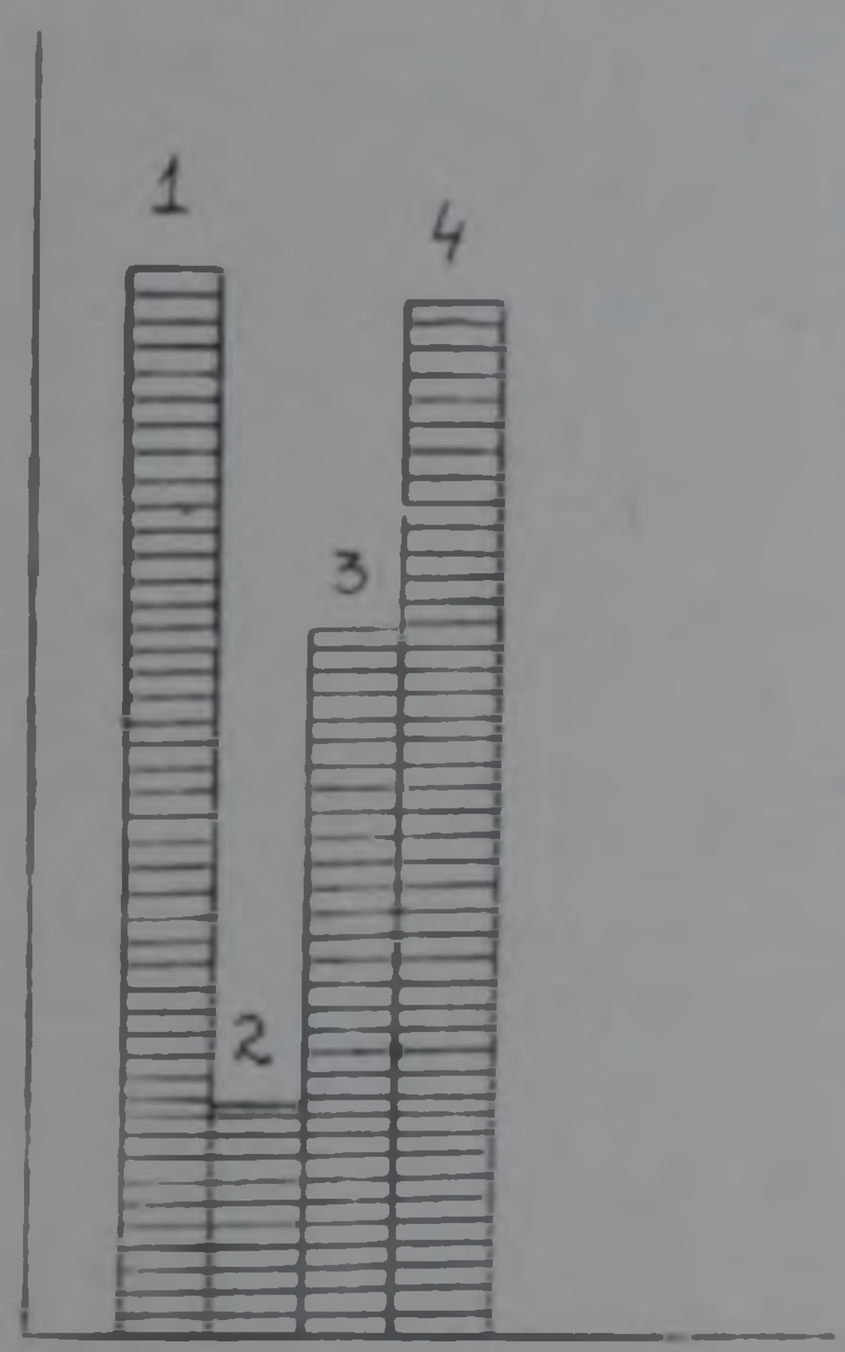
Достоверность этого предположения можно иллюстрировать модельными опытами с культурой ткани корней, т. е. показать положительное влияние выделенных последними метаболитов на функциональную активность изолированных листьев.

Объектом наших исследований были изолированные листья тополя пирамидального. Листья срезанными черешками погружали в дистиллированную воду, в питательный раствор для роста изолированных корней и в среду с корневыми выделениями—раствор, где росли изолированные корни тополя.

Корни очищали, тщательно промывали водой с мылом, помещали между листами стерильной бумаги и там же резали скальпелем на диски толщиной 1,5—2,0 мм. Последние затем переносили в колбы с

агаризованной питательной средой. После формирования развитой системы корней в питательную среду опускали кончики стерилизованных черешков изолированных листьев тополя и спустя 15 дней после погружения определяли в листьях: интенсивность фотосинтеза аппаратом И. Чатского и Б. Славика ([10]), азот по Кьельдалю ([11]), общий и органический фосфор по Лоури и Лопесу ([12]) и состав и содержание аминокислот с помощью бумажной хроматографии ([13]). Контролем служили свежеотрезанные одноярусные листья тополя.

Результаты опытов по определению интенсивности фотосинтеза примечательны тем, что иллюстрируют весьма положительное влияние корневых выделений на этот процесс (рисунок), что выражается оди-



Влияние корневых выделений на интенсивность фотосинтеза: *1*—контроль; *2*—дистиллированная вода; *3*—питательная среда; *4*—питательная среда с корневыми выделениями

наковой активностью с таковой контрольных листьев. Эти данные полностью согласуются с результатами опытов по влиянию пасоки на изолированные листья ([14]).

Примерно идентичные данные были получены по содержанию хлорофилла и прочности его связи с липопротеидным комплексом в опытных листьях (табл. 1).

Как мы видим, выявлена определенная разница как в общем содержании хлорофилла в листьях, погруженных в разные растворы, так и в количестве хлорофилла, извлеченного 60%-ным ацетоном. Содержание зеленых пигментов у контрольных листьев и листьев, погруженных в питательный раствор с корневыми выделениями, почти

одинаково, что указывает на стимулирующее влияние метаболитов на синтез зеленых пигментов.

Корневые метаболиты, выделенные в питательную среду, прини-

Таблица 1

Содержание хлорофилла в изолированных листьях тополя, погруженных в разные растворы (мг/г сухого вещества)

Варианты	Хлорофилл, извлеченный 85%-ным ацетоном				Хлорофилл, извлеченный 60%-ным ацетоном				Общая сумма				% слабого хлорофилла от общего
	а	б	а+б	а/б	а	б	а+б	а/б	а	б	а+б	а/б	
Контроль	1,77	0,43	2,20	4,1	0,98	0,52	1,50	1,9	2,75	0,95	3,70	2,9	40,0
Дистиллированная вода	1,67	0,28	1,95	5,9	0,48	0,24	0,72	2,0	2,15	0,52	2,77	4,1	25,9
Питательная среда	1,70	0,38	2,08	4,4	0,65	0,40	1,15	1,6	2,35	0,78	3,13	3,0	36,7
Питательная среда с корневыми выделениями	1,78	0,42	2,20	4,2	0,96	0,50	1,46	1,9	2,74	0,92	3,66	2,9	40,0

мают непосредственное участие и в синтезе белков, органического фосфора и аминокислот.

Данные по определению разных форм азота (табл. 2) выявляют полную идентичность листьев I и IV вариантов, т. е. содержание белкового азота в них оказалось равным. В результате однозначными были и проценты белкового азота от общего.

Таблица 2

Содержание форм азота в листьях тополя пирамидального, погруженных в разные среды (мг/г сухого вещества)

Варианты	Общий	Белковый	Небелковый	% белкового от общего
Контроль	3,24	2,25	0,99	69,4
Дистиллированная вода	2,00	1,35	0,65	67,5
Питательная среда	2,68	1,72	0,96	64,1
Питательная среда с корневыми выделениями	3,20	2,22	0,98	69,3

Весьма интересно, что эти листья оказались равноценными и в отношении содержания аминокислот (табл. 3).

В данном случае интенсивный синтез аминокислот привел к активации образования белков. Этот процесс наиболее слабо проявляется у листьев второго варианта, погруженных черешками в дистиллированную воду.

Примерно идентичными оказались и данные по содержанию разных форм фосфора (табл. 4).

Таблица 3

Содержание аминокислот в листьях тополя пирамидального, погруженных в разные среды (гамм на 1 г сухого вещества)*

Аминокислоты	Контроль	Дистиллированная вода	Питательная среда	Питательная среда с корневыми выделениями
Глутатион	Нет	Нет	Нет	Нет
Цистеин	17	8	12	20
Орнитин	Нет	Нет	Нет	Нет
Лизин	20	10	12	22
Аспарагин	48	21	28	51
Гистидин	45	25	28	50
Аспарагиновая кислота	58	30	34	72
Глутамин	45	28	40	49
Серин	26	12	22	35
Аргинин	38	12	31	39
Глутаминовая кислота	29	17	31	32
Треонин	Следы	Нет	Нет	Нет
Аланин	60	35	45	58
Пролин	Следы	Следы	Следы	Следы
ГАМК	Нет	Нет	Нет	Нет
Валин	21	6	18	24
Метионин	Нет	Нет	Нет	Нет
Лейцин	18	Следы	8	19
Сумма	447	202	309	471

* Растворитель бутанол: уксусная к-та: вода 4 : 1 : 5.

Таблица 4

Содержание форм фосфора в листьях тополя пирамидального, погруженных в разные среды (мг/г сухого вещества)

Варианты	Общий	Органический	Неорганический	% органического от общего
Контроль	1,65	1,20	0,45	72,8
Дистиллированная вода	1,15	0,95	0,20	82,6
Питательная среда	1,54	1,00	0,54	64,2
Питательная среда с корневыми выделениями	1,69	1,25	0,44	73,9

Приведенные данные прежде всего показывают, что разница в основном проявлялась в отношении органической формы фосфора, тогда как общее содержание фосфора оказалось одинаковым у всех вариантов. Положительное влияние корневых выделений на изолированные листья проявлялось в образовании разнообразных фосфорсодержащих соединений. Причем органическая форма фосфора у I и IV вариантов составляла соответственно 72,8 и 73,9% от общего.

Положительное влияние корневых выделений на изолированные листья, разумеется, определяется и их концентрацией в питательной среде. Ведь в нормальных условиях произрастания растений основная доля продуктов корневого обмена используется самим растением, тогда как у изолированных корней они все выделяются в среду и повышение их концентрации приводит к подавлению дальнейшего роста и

жизнедеятельности этих корней. Цель регулярного пересева изолированных корней заключается именно в том, чтобы избавиться от отрицательного влияния этих продуктов.

Результаты опытов одновременно дают основания заключить, что в фитоценозах кроме конкурирующего влияния налицо и положительное воздействие одного растения на другое через корневые выделения. Подобный эффект проявляется в отношении активации фотосинтеза, образования хлорофилла, белков и других компонентов живой клетки листа.

Ботанический институт
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Է. Վ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Արմատային արտազատումների ազդեցությունը մեկուսացված տերևների կենսագործունեության հարցի շուրջ

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է արմատների հյուսվածքային կուլտուրայից անջատված մետաբոլիտների ազդեցությունը մեկուսացված տերևների ֆունկցիոնալ ակտիվության վրա։ Փորձերը ցույց են տվել, որ արմատային արտազատումները ստիմուլացնում են կանաչ պիգմենտների, ինչպես նաև ամինաթթուների սինթեզը, որն իր հերթին բերում է սպիտակուցի գոյացման ակտիվացմանը։

Փորձերի արդյունքները հիմք են տալիս եզրակացնելու, որ ֆիտոցենոզներում, բացի հակազդող ազդեցությունից, առկա է նաև բույսերի միջև դրական ազդեցություն արմատային արտազատումների միջոցով։ Նման օրինաչափություն է արտահայտվում նաև ֆոտոսինթեզի ակտիվացման, քլորոֆիլի, սպիտակուցների և տերևի կենդանի բջիջների մյուս կոմպոնենտների առաջացման վերաբերյալ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. А. Сабинин*, Тимирязевские чтения, т. 9 (1949). [2] *П. И. Гупало*, Физиология растений, т. 7, вып. 1 (1960). [3] *А. М. Смирнов, К. Е. Овчаров*, Физиология растений, т. 7, вып. 4 (1967). [4] *A. Ch. Chibnal*, New. Haven, press London, 1939. [5] *K. Mothes*, Angew. Bot., № 30, H. 4/5 (1956). [6] *A. Sankaram*, Sci. and Culture, № 31 (1965). [7] *И. Ф. Лященко, И. И. Лященко*, Физиология растений, т. 4, вып. 6 (1957) [8] *В. О. Казарян, Ж. М. Акопова*, в сб.: Онтогенез высших растений, Тр. Бот. ин-та, 1972. [9] *А. М. Гродзинский*, в сб.: Физиолого-биохимические основы взаимного, влияния растений в фитоценозах, Наука, М., 1966. [10] *И. Чатский, Б. Славик* Biol Plantarum, т. 2, № 2 (1960). [11] *А. Н. Белозерский, Н. И. Проскуряков*, Практическое руководство по биохимии растений, М., 1951. [12] *O. H. Lowru, I. Lopez*, A. Jour. Chem., № 162 (1946). [13] *В. О. Казарян, Э. С. Авунджян, К. А. Карапетян*, ДАН АрмССР, т. 29, № 3 (1959). [14] *В. О. Казарян*, Старение высших растений, Наука, М., 1969.

ՀԱՅԿ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ԳՐԱԴԱՐԱՆ
ՀԱՍՏԱՏՄԱՆ