ISSN 0321—1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
# ДОКЛАДЫ

LXX, № 5

1980

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. քարտուղար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹՍՈՒՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱՖՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), Н. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

Основан в 1944 г
Периодичность—10 номеров в год
На русском языке

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ռ. Հ. Նազարյան—Որոշ պարզ Լիի խմբերի վերլուծությունները . .. . 257
Ա. Ի. Պետրոսյան—$C^2$ տարածության մեջ գտնվող իրական իմաստով ոչ էլիպտիկ հենքով վեկտորի հատուկ բազմանիստների վրա հավասարաչափ մոտարկում բազմանդամներով 261
Ա. Տու. Շանվերդյան—Ա. Լ. Շահինյանի թեորեմների տիպի գնահատականներ մերոմորֆ ֆունկցիաների սահմանային եզրագիծ համար . . . . . 272
Վ. Վ. Սարգսյան, Ռ. Գ. Սաֆարյան—Դիֆուզիոն պրոցեսներ միգրեացումով և կոնցենտրացիոն ալիքների տարածում . . . . . 274
Վ. Ա. Ներսեսյան—$R^n$-ում երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների մի դասի մասին . . . . . 280
Գ. Ն. Հովհաննիսյան—$B_p$ դասի ֆունկցիաների մի հատկության մասին . 286
Գ. Զ. Մկրտչյան—Երկրորդ կարգի վերածվող քվազիգծային էլիպտիկ հավասարումների բնգհանրացված լուծումների որոշ հատկությունների մասին . . 292
Հ. Ս. Սուքիասյան—Շրջանների պատահական գաղտնիքը հատող ուղիղների վրա առաջացող լարերի պրոցեսների մասին . . . . . 297
Գ. Տ. Խաչիկյան—Երկու $M_r|G|1|\infty$ տիպի նախապատվությամբ համակարգերում սպասման ժամանակի բաշխման բացահայտ արտահայտությունների մասին . 301
Ի. Ա. Կարապետյան—Ագնգային գրաֆների Լերկման մասին . . 306
Բովանդակություն LXX հատորի . . . . . 311

©Издательство АН Арм. ССР
Доклады АН Арм ССР 1980

## СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр

*Р. О. Назарян*—Разложение некоторых простых групп Ли . . . . 257

*А. И. Петросян*—Равномерное приближение полиномами на специальных полиэдрах Вейля с вещественно невырожденным остовом в пространстве $C^1$ 261

*А. Ю. Шахвердян*—К теоремам А. Л. Шагиняна о предельном убывании мероморфных функций . . . . . 266

*В. В. Сарафян, Р. Г. Сафарян*—Диффузионные процессы с усреднением и распространение концентрационных волн . . . . . 274

*В. А. Нерсесян*—Об одном классе допустимых комплексов двумерных плоскостей в $R^4$ . . . . . 280

*Г. К. Оганесян*—Об одном свойстве функций класса $B_p$ . . . . 286

*П. З. Мкртычян*—О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка . . . 292

*Г. С. Сукиасян*—О процессах хорд на прямых, пересекающих случайные поля кругов на плоскости . . . . . 297

*П. Т. Хостикян*—О явных выражениях для распределения времени ожидания в двух приоритетных системах $\vec{M}\,|G|1|\infty$ . . . . . 301

*И. А. Карапетян*—О раскраске дуговых графов . . . . . 306

Содержание LXX тома . . . . . 311

Индекс 77730

CONTENTS

MATHEMATICS

*R. C. Nazarian*—Decompositions of some simple group Lie. . . . . 257

*A. I. Petrosyan*—Uniform polinomial approximation on the special Weil polyhedra with real nondegenerate distinquished boundari in $C^2$ . . . . . 261

*A. Yu. Shahverdian*—On the theorems of A. I. Shaginian on the asymptotic growth of meromorpic functions . . . . . 266

*V. V. Saraffian, R. G. Safarian*—Diffusion processes with averaging and the extension of concentrated waves. . . . . 274

*V. A. Nersessian*—About one class of Permissible Complexes of 2-Dimensional planes in $R^4$. . . . . 280

*G. K. Oganesjan*—On a property of functions of the class $H_p$ . . . . 286

*P. Z. Mkrtchian*—On some properties of generalized solutions of second order's duasilinear elliptic degenerate equations. . . . . 292

*H. S. Sukiasian*—On processes of Cords on Lines Intersecting Random Circlefields on Plane . . . . . 297

*P. T. Khostikian*—On avowed expressions for the waiting time distribution in two priority systems of $M_r|G_r|1|$ type . . . . . 301

*I. A. Karapetian*—On the coloring of circular arc Graphs . . . . . 305

Contents of volume LXX . . . . . 311

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 03373 Подписано к печати 16.9.80 г. Тираж 505 Изд. 5300 Заказ 569

Формат бумаги 70×108 1/16 Печ. л. 4,0 Бум. л. 2,0
Усл. печ. л. 5,6 Уч. изд. л. 4,52

Издательство АН Армянской ССР. Ереван, Барекамутян, 24г.
Типография Издательства АН Армянской ССР г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Р. О. Назарян

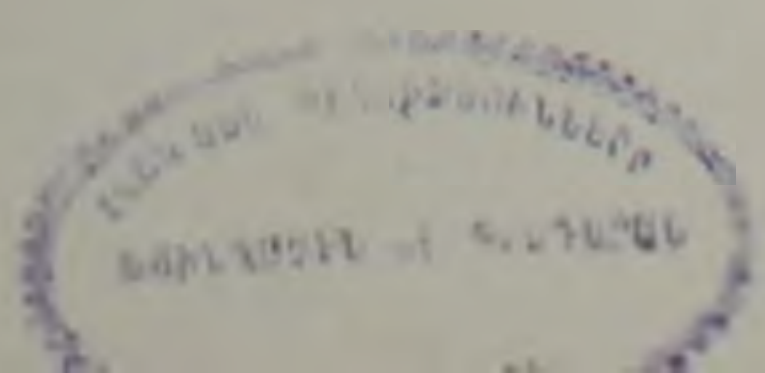
## Разложение некоторых простых групп Ли

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30.I 1980)

В работе рассматривается следующая задача: пусть $G$—простая некомпактная вещественная группа Ли; нужно найти все такие пары $G'$, $G''$ ее собственных связных подгрупп Ли, чтобы $G=G'\cdot G''$, т. е. чтобы каждый $a\in G$ представлялся в виде $a=a'\cdot a''$, где $a'\in G'$, $a''\in G''$. Тройка $(G, G', G'')$ с указанным свойством называется разложением. Случай, когда $G'$, $G''$ либо обе редуктивны в $G$, либо обе максимальны в $G$, был до конца изучен в работе [1]. В работе [2] изучались минимальные разложения $(G, G', G'')$, т. е. такие, что не существует разложений вида $(G, G'_0, G''_0)$, где $G'_0\subset G'$, $G''_0\subset G''$ и $G'_0\neq G'$, $G''_0\neq G''_0$. Именно, были найдены в явном виде все минимальные разложения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$, обладающие тем свойством, что полупростые части групп $G'$ и $G''$ некомпактны. В настоящей работе мы продолжаем изучение разложений простых групп Ли. Мы находим в явном виде все некомпактные разложения групп $SL(2n, \mathbf{R})$, $Sp(n, \mathbf{R})$, $SO^*(4n)$, $SL(2n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$, т. е. такие разложения, у которых $G'$, $G''$ некомпактны в $G$. Как показано в [3], единственной простой группой, кроме перечисленных групп и $SO(p, q)$, $SU(p, q)$ $Sp(p, q)$, допускающей некомпактные разложения, является $E_6^{III}$.

Пусть $G=G'\cdot G''$ разложение. Обозначим соответственно $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ алгебры Ли, отвечающие группам $G$, $G'$, $G''$. Тогда $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'+\mathfrak{g}''$ [1]. Опишем разложения групп Ли при помощи соответствующих разложений алгебр Ли. Приведем некоторые обозначения из [1], которые мы используем.

Пусть $\mathfrak{g}$—полупростая вещественная алгебра Ли; $\Pi$—система простых корней этой алгебры Ли, построенная по картановской подалгебре с максимальной некомпактной частью $\mathfrak{h}$; $\Pi_1\subset\Pi$ подсистема корней, не равных нулю на $\mathfrak{h}$; $\mathfrak{u}_1$—параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$.



соответствующая подсистеме $\Gamma \subset \Pi_1$, инвариантной относительно естественной инволюции. $u_\Gamma = s_\Gamma + c_\Gamma + n_\Gamma$, где $s_\Gamma$ — полупростая часть, $c_\Gamma$ — центр максимальной редуктивной подалгебры $s_\Gamma + c_\Gamma$, $n_\Gamma$ — нильпотентный радикал алгебры $u_\Gamma$.

Теорема. 1 *Пусть $G$ — группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна одной из следующих алгебр: $sl(n+1, \boldsymbol{R})$, $sp(n, \boldsymbol{R})$, $so^*(4p)$ и пусть $G = G' \cdot G''$ — ее собственное некомпактное разложение. Тогда всевозможные значения $g'$ и $g''$ перечислены в табл. 1.*

*Таблица 1*

| $g$ | $g'$ | $g''$ |
|---|---|---|
| $sl(2p, \boldsymbol{R})$ | $sl(2p-1, \boldsymbol{R})$ или $sl(2, p-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma$ или $sl(2p-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$ $(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ | $sp(p, \boldsymbol{R})$ |
| | $sl(2p-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$ $sl(2p-1, \boldsymbol{R}) + n_\Gamma$ $(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ | $sl(p, \boldsymbol{C}) \times u(1)$ или $sl(p, \boldsymbol{C})$ или $sp(p, \boldsymbol{R})$ |
| $sl(4m, \boldsymbol{R})$ | $sl(4m-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$ или $sl(4m-1, \boldsymbol{R}) + n_\Gamma$ $(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ | $sp(m, \boldsymbol{C}) \times u(1)$ или $sp(m, \boldsymbol{C})$ или $su^*(2m) \times sp(1)$ или $su^*(2m) \times u(1)$ или $su^*(2m)$ |
| $sp(2n, \boldsymbol{R})$ | $sp(2n-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$ или $sp(2n-1, \boldsymbol{R}) + n_\Gamma$ $(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ | $sp(n, \boldsymbol{C}) \times u(1)$ или $sp(n, \boldsymbol{C})$ |
| $so^*(4p)$ | $su^*(2p) + c_\Gamma + n_\Gamma$ или $su^*(2p) + n_\Gamma$ $(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\})$ | $so^*(4p-2) \times so(2)$ или $so(4p-2)$ или $u(1, 2p-1)$ |

Теорема 2. *Пусть $G$ — группа Ли, алгебра Ли которой $g$ изоморфна одной из следующих алгебр: $sl(2n, \boldsymbol{C})$, $so(7, \boldsymbol{C})$, $so(2n, \boldsymbol{C})$, и пусть $G = G' \cdot G''$ — ее собственное некомпактное разложение. Тогда всевозможные значения подалгебр $g'$ и $g''$ указаны в табл. 2.*

*Таблица 2*

| $K$ | $K'$ | $K''$ |
|---|---|---|
| $sl(2n,C)$ | $sl(2n-1,C)+m+n_1$<br>или<br>$sl(2n-1,C)+m$<br>$(m\subset c_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_1,\alpha_1'\})$ | $sp(n,C)$ |
| | $sl(2n-1,C)+m+n_r$<br>$(m\subset c_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_1,\alpha_1'\})$ | $su^*(2n)$ |
| $so(7,C)$ | $so(6,C)$<br>или<br>$so(5,C)$<br>или<br>$so(5,C)+m$<br>или<br>$so(5,C)+m+n_r$<br>$(m\subset c_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_1,\alpha_1'\})$ | $g_2^C$ |
| $so(2n,C)$ | $sl(n,C)+m$<br>или<br>$sl(n,C)+m+n_1$<br>$(m\subset c_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_n,\alpha_n'\})$ | $so(2n-1,C)$ |
| | $sl(n,C)+m+n_r$<br>$(m\subset c_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_n,\alpha_n'\})$ | $so(1,2n-1)$ |
| $so(8,C)$ | $so(7,C)$<br>или<br>$so(6,C)$<br>или<br>$so(5,C)$<br>или<br>$so(5,C)+m+n_r\subset so(7,C)$<br>или<br>$so(5,C)+b,\ b\subset so(3,C)$ | $spin(7,C)$ |
| $so(16,C)$ | $so(15,C)$ | $spin(9,C)$ |

Метод нахождения всех некомпактных разложений состоит в следующем. Пусть $G=G'\cdot G''$ — собственное некомпактное разложение группы $G$. Обозначим через $K$, $K'$, $K''$ максимальные полупростые компактные подгруппы в $G$, $G'$, $G''$, соответственно такие, что $K=K'\cdot K''$. Включим наше разложение в максимальное собственное некомпактное разложение $\tilde{G}=\tilde{G}'\cdot\tilde{G}''$. Пусть $\tilde{K}'$, $\tilde{K}''$ — максимальные полупростые компактные подгруппы в $\tilde{G}'$, $\tilde{G}''$ соответственно. Все разложения компактных групп Ли подробно изучены в ([4]). Результаты этой работы позволяют явно найти все разложения $\tilde{K}=\tilde{K}'\cdot\tilde{K}''$, где $K'\subset\tilde{K}'$, $K''\subset\tilde{K}''$. Ищем все подгруппы $G'\subset\tilde{G}'$ и $G''\subset\tilde{G}''$, которые содержат соответственно $K'$, $K''$, и из этих подгрупп выбираем те, которые дают разложение.

В заключение выражаю благодарность А. Л. Онищику за внимание к настоящей работе.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Ռ. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

## Որոշ պարզ Լիի խմբերի վերլուծություններ

Հոդվածում դիտարկվում են $SL(2n, R)$, $Sp(n, R)$, $SO^*(4n)$ $SL(2n, C)$, $SO(n, C)$ խմբերը։ Գտնված են այդ խմբերի բոլոր այն ոչ կոմպակտ ենթախմբերը, որոնք պարունակում են տված կոմպակտ ենթախումբը։

Բացահայտ տեսքով գտնված են այդ խմբերի բոլոր ոչ կոմպակտ վերլուծությունները, այսինքն այդ խմբերի ներկայացումը երկու ենթախմբերի արտադրյալի տեսքով, որտեղ ենթախմբերը հանդիսանում են տված խմբում ոչ կոմպակտ ենթախմբեր։ Այնուհետև դասակարգված են բոլոր այդպիսի վերլուծությունները։

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Онищик*, Мат. сб., т. 80 (122), № 4 (1969). [2] *Р. О. Назарян*, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат., т. 10, № 5 (1975). [3] *А. Л. Онищик*, Мат. сб., т. 74 (116), № 3 (1967). [4] *А. Л. Онищик*, Труды ММО, вып. 11, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

# Равномерное приближение полиномами на специальных полиэдрах Вейля с вещественно невырожденным остовом в пространстве $C^2$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15.11.1980)

В работе ([1]) доказано, что в вещественно невырожденном полиэдре Вейля $D$ в пространстве $C^2$ $\bar{\partial}$-уравнение имеет решение, допускающее равномерную оценку. Из этого факта, а также из возможности локального голоморфного приближения на вещественно невырожденных полиэдрах с помощью более или менее стандартных рассуждений (см., например, ([2])) следует, что пространство $A(D)$ функций, голоморфных в области $D$ и непрерывных на $\bar{D}$, совпадает с равномерным замыканием на $\bar{D}$ полиномов $P(D)$.

В настоящей статье доказывается, что $P(D)=A(D)$ при менее обременительных в отношении невырожденности условиях на $D$, а именно: $D$ имеет вещественно невырожденный остов; однако от полиэдра требуется, чтобы он был специальный, т. е. число определяющих его функций было равно двум (размерности пространства $C^2$). Отметим, что класс специальных полиэдров в пространстве $C^2$ достаточно широк в том смысле, что любой полиэдр по теореме Бишопа (см. ([2])) можно аппроксимировать специальными.

Теорема. *Пусть $D=\{z\in C^2:|\rho_i(z)|<1,\ i=1,2\}$ — полиномиальный полиэдр Вейля с вещественно невырожденным остовом. Тогда $P(D)=A(D)$.*

Доказательство. Напомним, что остов $D$ — это его двумерная грань $\Gamma=\{z\in D:|\rho_1(z)|=|\rho_2(z)|=1\}$, а его вещественная невырожденность означает, что $d|\rho_1|^2\wedge d|\rho_2|^2\neq 0$ на $\Gamma$. Из этого условия теоремы следует, что можно подобрать столь малое число $\delta>0$, чтобы полиэдр

$$G=\{z\in C^2:1-\delta<|\rho_i(z)|<1,\ i=1,2\},$$

который как бы „пристроен" к $\Gamma$, являлся вещественно невырожденным (в дальнейших рассуждениях число $\delta$ фиксировано). Как

было отмечено выше, любая функция из $A(G)$ равномерно на $\overline{G}$ приближается функциями, голоморфными в окрестности $\overline{G}$. Поэтому для любой $f$, $f\in A(D)\subset A(G)$, и $\varepsilon>0$ найдется функция $F_\varepsilon$, голоморфная в некоторой окрестности $\overline{G}$ и такая, что

$$\max_{z\in\overline{G}}|f(z)-F_\varepsilon(z)|<\varepsilon. \tag{1}$$

Далее, возьмем $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ таким, чтобы замыкание полиэдра

$$G_\varepsilon=\{z\in C^2: 1-\delta<|\chi_i(z)|<1+\eta(\varepsilon),\ i=1,\ 2\}$$

принадлежало упомянутой окрестности. Тогда $F_\varepsilon$ будет голоморфной на $\overline{G}_\varepsilon$. Обозначим

$$\gamma_1=\{z\in\overline{G}_\varepsilon: |\chi_1(z)|=|\chi_2(z)|=1+\eta(\varepsilon)\};$$

$$\gamma_2=\{z\in\overline{G}_\varepsilon: |\chi_1(z)|=|\chi_2(z)|=1-\delta\};$$

$$\gamma_3=\{z\in\overline{G}_\varepsilon: |\chi_1(z)|=1-\delta,\ |\chi_2(z)|=1+\eta(\varepsilon)\};$$

$$\gamma_4=\{z\in\overline{G}_\varepsilon: |\chi_1(z)|=1+\eta(\varepsilon),\ |\chi_2(z)|=1-\delta\}.$$

Остов полиэдра $G_\varepsilon$ является объединением соответствующим образом ориентированных $\gamma_1-\gamma_4$. Согласно интегральной формуле Вейля, для $z\in G_\varepsilon$ имеем

$$F_\varepsilon(z)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_k}F_\varepsilon(\zeta)\frac{J(\zeta,z)d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)][\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)]}=\sum_{k=1}^{4}I_k(z), \tag{2}$$

где $J(\zeta,z)=\begin{vmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{vmatrix}$; $P_{k1}$ и $P_{k2}$ — коэффициенты Гефера полинома $\chi_k$, определяемые из разложения

$$\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)=(\zeta_1-z_1)P_{k1}(\zeta,z)+(\zeta_2-z_2)P_{k2}(\zeta,z),\ k=1,\ 2.$$

Функция $I_1(z)$ из правой части (2) голоморфна в окрестности $\overline{D}$, так как при $\zeta\in\gamma_1$ и $z\in\overline{D}$ знаменатель $[\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)][\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)]$ под знаком интеграла $I_1(z)$ в нуль не обращается. Как это следует из доказываемой ниже леммы, имеет место неравенство $\max\limits_{z\in\Gamma}|F_\varepsilon(z)-I_1(z)|<c_1\varepsilon$, где число $c_1$ от $\varepsilon$ не зависит. Вместе с (1) это дает $\max\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)-I_1(z)|$ (по принципу максимума) $=\max\limits_{z\in\Gamma}|f(z)-I_1(z)|<(1+c_1)\varepsilon$, т. е. $f$ равномерно на $\overline{D}$ приближается функциями, голоморфными в окрестности $\overline{D}$, а в силу того, что $D$ — полиномиальный полиэдр, то и полиномами. Итак, $f\in P(D)$, а поскольку $f$ — произвольная функция из $A(D)$, то $P(D)=A(D)$.

Лемма. *Для интегралов $I_2(z)-I_4(z)$ в (2) имеет место оценка*

$$\max_{z\in\Gamma}|I_k(z)|<c\varepsilon,\ k=2,\ 3,\ 4,$$

*где константа $c$ от $\varepsilon$ не зависит.*

Доказательство. Рассматривая $\gamma_{12}$ как остов полиэдра $\{z\in C^2 : |\chi_l(z)|<1-\delta,\ l=1,2\}$, на замыкании которого функция $f$, по условию, голоморфна, по формуле Вейля при $z\in\Gamma$ имеем

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_{12}} f(\zeta)\,\frac{J(\zeta,z)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)|\,|\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)|}=0.$$

Поэтому

$$I_2(z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_{12}} F_2(\zeta)\,\frac{J(\zeta,z)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)|\,|\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)|}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_{12}} |F_2(\zeta)-f(\zeta)|\,\frac{J(\zeta,z)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)|\,|\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)|}.$$

Так как $\gamma_{12}\subset\overline{G}$, то из (1) для $z\in\Gamma$ получаем

$$|I_2(z)|\leqslant\frac{c}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_{12}}\left|\frac{J(\zeta,z)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)|\,|\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)|}\right|. \tag{3}$$

Далее, $|\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)|\geqslant\big||\chi_k(\zeta)|-|\chi_k(z)|\big|=\delta$ $(k=1,2)$ при $z\in\Gamma$ и $\zeta\in\gamma_{12}$. Отсюда и из (3) следует

$$\max_{z\in\Gamma}|I_2(z)|<c\cdot\varepsilon. \tag{4}$$

Интеграл $I_3$ (и аналогичный ему $I_4$) оценивается несколько сложнее. Рассмотрим вещественно трехмерную грань полиэдра $G$,

$$\sigma=\{\zeta\in G_\varepsilon : |\chi_1(\zeta)|=1-\delta,\ 1-\delta<|\chi_2(\zeta)|<1+\eta(\varepsilon)\}.$$

Эта грань ограничена циклами $\gamma_{12}$ и $\gamma_{13}$. При фиксированном $z_0\in\Gamma$ форма

$$\omega=F_2(\zeta)\,\frac{J(\zeta,z_0)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)|\,|\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)|}$$

имеет особенностями на $\sigma$ кривую

$$P_{z_0}=\{\zeta\in\sigma : |\chi_1(\zeta)|=1-\delta_1,\ \chi_2(\zeta)=\chi_2(z_0)\},$$

а на $\sigma\setminus P_{z_0}$ эта форма замкнута. По формуле Стокса

$$\int\limits_{\gamma_{12}}\omega-\int\limits_{\gamma_{13}}\omega=\int\limits_{\sigma}d\omega+\int\limits_{P_{z_0}}\operatorname{res}\omega,$$

или $I_3(z_0)-I_4(z_0)=\int\limits_{P_{z_0}}\operatorname{res}\omega$. Отсюда и из (4) следует, что для оценки $I_3$ достаточно оценить $\int\limits_{P_{z_0}}\operatorname{res}\omega$. Здесь

$$\operatorname{res}\omega = F_1(\zeta)\,\frac{J(\zeta, z_0)d\zeta_1}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}} = -F_1(\zeta)\,\frac{J(\zeta, z_0)d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}}$$

$\left(\text{так как на } P_{z_0} \text{ имеем } \chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0),\ \text{то } d\chi_2 = 0,\ \text{т. е. } \dfrac{d\zeta_1}{\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}} = -\dfrac{d\zeta_2}{\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}}\right)$.

Если в выражении для $\operatorname{res}\omega$ функцию $F_1$ заменить на $f$, то полученная форма

$$\Omega = f(\zeta)\,\frac{J(\zeta, z_0)d\zeta_1}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}} = -f(\zeta)\,\frac{J(\zeta, z_0)d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}}$$

на аналитической поверхности

$$T_{z_0} = \{\zeta : |\chi_1(\zeta)| < 1-\delta,\ \chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0)\}$$

голоморфна, за исключением особенностей $M \cap T_{z_0}$, где $M = \{\zeta \in C^2 : \operatorname{grad}\chi_2(\zeta) = 0\}$. Но каждая связная компонента множества $M$ — либо точка, либо уровень функции $\chi_2$ (очевидно, отличный от уровня $\chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0)$). Таким образом, на $T_{z_0}$ могут быть только одноточечные компоненты $M$, поэтому для всех $z$ из некоторой выколотой окрестности точки $z_0$ на поверхности $T_z$ форма $\Omega$ особенностей не имеет. Заметив, что $\partial T_z = P_z$, по формуле Стокса

$$\int_{P_z}\Omega = \int_{T_z} d\Omega = 0.$$

Интеграл $\int_{P_z}\Omega$, очевидно, от $z$ зависит непрерывно (по крайней мере, в окрестности $z_0$). Поэтому $\int_{P_{z_0}}\Omega = 0$. Отсюда, с учетом того, что $|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)| \geqslant \delta$ при $\zeta \in P_{z_0}$, имеем

$$\left|\int_{P_{z_0}}\operatorname{res}\omega\right| = \left|\int_{P_{z_0}}\operatorname{res}\omega - \int_{P_{z_0}}\Omega\right| = \left|\int_{P_{z_0}}|F_1(\zeta)-f(\zeta)|\,\frac{J(\zeta, z_0)d\zeta_1}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}}\right| < c\delta$$

$\left(\text{если } \dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2} \text{ обращается в нуль в некоторых точках на } P_{z_0},\ \text{то в этих точках } \dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1} \neq 0 \text{ и мы заменяем } \dfrac{d\zeta_1}{\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}} \text{ на } -\dfrac{d\zeta_2}{\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}}\right)$.

Оценка интеграла $I_4(z)$ проводится аналогично.

В заключение автор выражает благодарность Г. М. Хенкину за интерес к работе и полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

$C^n$ տարածության մեջ գտնվող իրական իմաստով ոչ էապոխվող հենքով Վեյլի հատուկ բազմանիստերի վրա հավասարաչափ մոտարկում բազմանդամներով

*Դիցուք $D$-ն երկչափ կոմպլեքս տարածության մեջ գտնվող Վեյլի հատուկ բազմանիստ է, որի հենքը իրական իմաստով ոչ էապոխվող է։ Բազմանիստը կոչվում է հատուկ, եթե նրան որոշող բազմանդամների քանակը համընկնում է տարածության չափողականության հետ։ Նշենք, որ հատուկ բազմանիստերի բնտանիքը բավականին լայն է այն իմաստով, որ ըստ Բիշոպի թեորեմի, կամայական բազմանիստ կարելի է մոտարկել հատուկներով։*

*Հոդվածում ապացուցվում է, որ կամայական ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է $D$-ում և անընդհատ է $\bar{D}$-ում, մոտարկվում է բազմանդամներով հավասարաչափ $\bar{D}$-ի վրա։ Ապացուցման եղանակը օգտագործում է [1]-ում ստացված $\bar{\partial}$ հավասարման հավասարաչափ գնահատականով լուծումը։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Петросян, Г. М. Хенкин*, «Известия АН АрмССР», Матем., т. 13, № 5–6 (1978). [2] *J. Lieb*, Math. Ann., vol. 184, № 1 (1969). [3] *Р. Ганнинг, Х. Росси*, Аналитические функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Ю. Шахвердян

# К теоремам А. Л. Шагиняна о предельном убывании мероморфных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 21/II 1980)

В [1-3] академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном был поставлен и систематически исследовался следующий общий вопрос, в идейном отношении примыкающий к принципу Фрагмена—Линделёфа [4,5]: как сильно может убывать вдоль заданного множества $E$, сгущающегося к границе области $|z|<R\leq\infty$, мероморфная в этой области функция $f$, имеющая заданный рост неванлинновской характеристики $T_f(r)$. В [6] этот вопрос рассматривался для функций, мероморфных в единичном круге $D$; здесь дополняются результаты из [6] и приводятся соответствующие предложения для случая конечной комплексной плоскости $C$.

Введем необходимые определения. Для мероморфной в $C$ функции* $f$ через $\Omega_f$ сбозначим класс всех монотонных функций $\omega(r)>0$, $\omega(+\infty)=0$, определенных на $(1,+\infty)$, таких, что

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\ \omega(r)T_f(r)=s_\omega<\infty,\qquad \sum_{z\in Z_f}\omega(|z|)<\infty;$$

для мероморфной в $D$ функции $f$ $\Omega_f$ означает класс всех монотонных $\omega(r)>0$, $\omega(1-0)=0$, определенных на $(0,1)$, таких, что

$$\overline{\lim_{r\to1-0}}\ \omega(r)\frac{T_f(r)}{1-r}=s_\omega<\infty,\qquad \sum_{z\in Z_f}\omega(|z|)<\infty.$$

Если $0<\tau<1$ есть невозрастающая функция, заданная на $(1,+\infty)$ (на $(0,1)$), такая, что

* Везде дальше предполагается, что $f$ не является рациональной функцией (и в частности, если это не оговорено, $f\neq$ const.); если $|f|<1$ в $D$, то полагаем $T_f(r)=1$ для $0<r<1$, $Z_f$ означает последовательность всех нулей $f$; $\alpha>0$, $k>1$, $0<\mu<1$ каждый раз есть произвольные фиксированные числа.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\tau(r)}{r}\,dr<\infty \quad \left(\int_0^1 \frac{\tau(r)}{1-r}\,dr<\infty\right), \tag{1}$$

то $\tau(r)(T_f(kr))^{-1}\in\Omega_f$ ($\tau(r)(1-r)(T_f(r+b(1-r)))^{-1}\in\Omega_f$)*. Конечную вполне аддитивную функцию множества $\mu\geq 0$, определенную на борелевских подмножествах $C$, называем распределением массы в $e\subset C$, если $\operatorname{supp}(\mu)\subseteq e$ и $\mu(e)=1$. Для ядер

$$l(z,\zeta)=|1-z/\zeta| \ (z,\zeta\in C,\ \zeta\neq 0),\quad h(z,\zeta)=|z-\zeta|/|1-\bar{z}\zeta| \ (z,\zeta\in D)$$

рассмотрим потенциалы распределений массы в компакте $e$

$$u_\mu^{(l)}(z)=\int_e \log\frac{1}{l(z,\zeta)}\,d\mu(\zeta),\qquad u_\mu^{(h)}(z)=\int_e \log\frac{1}{h(z,\zeta)}\,d\mu(\zeta)$$

и так же как и для логарифмического потенциала введем постоянные Робэна

$$R^{(l)}(e)=\inf_\mu \sup_{z\in e^*} u_\mu^{(l)}(z),\quad R^{(h)}(e)=\inf_\mu \sup_{z\in e^*} u_\mu^{(h)}(z)$$

и соответствующие емкости компактных множеств:

$\operatorname{cap}l(e)=\exp[-R^{(l)}(e)]$ ($e\subset C$, $0\notin e$), $\operatorname{cap}h(e)=\exp[-R^{(h)}(e)]$ ($e\subset D$). Относительно $\operatorname{cap}h$ см. ([9,10]); емкость $\operatorname{cap}l$ тесно связана с функцией Грина (см. замечание 1) и имеет сходство с $\operatorname{cap}h$ — обе эти величины $\leq 1$ и обращаются в 0 одновременно с логарифмической емкостью $\operatorname{cap}(e)$. Для $0<\rho<1$ $C_{z,\rho}$ есть эвклидовый круг с центром $0\neq z\in C$ радиуса $\rho|z|$, $D_{z,\rho}=\{\zeta\in D: h(z,\zeta)\leq\rho\}$ есть гиперболический круг с центром $z\in D$ радиуса $\rho$ и справедливы равенства $\operatorname{cap}l(C_{z,\rho})=\rho=\operatorname{cap}h(D_{z,\rho})$. Скажем, что множество из $C$ (из $D$) имеет конечный обзор, если его можно покрыть системой кругов $\{C_{z_n,\rho_n}\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{D_{z_n,\rho_n}\}_{n=1}^{\infty}$) так, что ряд, составленный из чисел $\rho_n$, $n=1,2,\ldots$, сходится. Предполагается, что непустое $E\subset C$ ($E\subset D$) лежит вне некоторой окрестности точки $z=0$, имеет точки, сходящиеся к $\infty\in\partial C$ (к $\partial D$), и каждая порция $E$ есть компакт. Введем такие определения диаметров: если $e\subset C$ расположено в углу раствора $<\pi$ с вершиной в $z=0$, то $d^{(l)}(e)=\inf\{\rho: e\subset C_{z,\rho},\ z\in C\}$ (и в остальных случаях полагаем $d^{(l)}(e)=1$); если $e\subset D$, то $d^{(h)}(e)=\sup\{h(z,\zeta): z,\zeta\in e\}$; множество $e\subset D$ не ограничено, если $d^{(h)}(e)=1$; $h(z,e)=\inf\{h(z,\zeta):\zeta\in e\}$. Для краткости формулировок условимся: $\omega(k,r)=\omega(kr)$, $\omega(b,r)=\omega(r+b(1-r))$, $e^*=\{|z|: z\in e\}$, $e_*=\{e^{\log z}: z\in e\}$, для функции $g$, заданной на $e$, $\|g\|_e=\sup\{|g(z)|: z\in e\}$.

Теорема 1. *Для каждой мероморфной в $C$ функции $f$ и произвольного $\omega\in\Omega_f$ существует множество $E_{\omega,k}$ со следующими свойствами:*

1. *$E_{\omega,k}$ является объединением компактов $L_n\subset C$ ($n\geq 1$) таких, что для некоторого $n_0\geq 1$ и всех $n\geq n_0$*

---

* См. также ([1,8]) и соотношение (1) в ([4]).

$$d^{l+1}(L_n) \leqslant \mathrm{const} < 1, \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} |\log \mathrm{capl}\,(L_n)|^{-1} < \infty \tag{2}$$

2. *Каждое $L_n$ состоит из конечного числа континуумов $L_{n,i}$, $1 \leqslant i \leqslant p_n$, таких, что существуют точки $\zeta_{n,i} \in L_{n,i}$, так, что $\forall \omega^* \in \Omega_f$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \omega^*(|\zeta_{n,i}|) < \infty .$$

3. *Для некоторой не зависящей от $z$ конечной постоянной $c = c(\omega) > 0$ и всех $z \in C \setminus E_\omega$ выполнено неравенство*

$$|f(z)| \geqslant \exp\{-c\,\overline{\omega}(k, |z|)\}.$$

*Утверждение останется в силе, если заменить $C$ на $D$, $l$ на $h$, $k$ на $\mathfrak{h}$.*

Каждое множество из $C_l(|z|<1)$ (из $D_h$), которое может быть покрыто системой компактов* $L_n$, удовлетворяющих (2) (в случае $D$ — (2) с заменой $l$ на $h$), называем $L$-множеством. Неограниченный континуум из $C$ (или из $D$) не является $L$-множеством. Используя оценку А. Картана для модуля полинома ([4]), нетрудно показать, что каждое $L$-множество имеет конечный обзор; если $\alpha$, $\beta$ — const, $\beta > 1$, $0 \leqslant \varphi_n < 2\pi$, то множества

$$\bigcup_{n=1} C_{\alpha n^\beta e^{i\varphi_n}},\ n^{-\beta} \quad (\alpha > 1), \qquad \bigcup_{n=2} D_{(1-\alpha^n)e^{i\varphi_n}},\ n^{-\beta} \quad (0 < \alpha < 1)$$

имеют конечный обзор, но не являются $L$-множествами. Продолжая исследования У. Хеймана ([11]), Н. В. Ушакова получила ([7,8]) оценки снизу разности субгармонических функций вне множеств с конечным обзором; оценки для модуля мероморфных функций см. ([4,12]). Можно утверждать, что для случая мероморфных функций теорема 1 значительно точнее соответствующих результатов из ([7,8]). Следствие 1 можно рассматривать как распространение одной из первоначальных теорем А. Л. Шагиняна ([1]).

Следствие 1. *Пусть $E \subset C$ есть произвольный континуум с предельной точкой на $\partial C$. Если для мероморфной в $C$ функции $f$ и некоторого $\omega \in \Omega_f$ выполнено*

$$\varliminf_{\substack{z \to \zeta \\ \zeta \in E}} \overline{\omega}(k, |z|) \log |f(z)| = -\infty,$$

*то $f \equiv 0$. Утверждение останется в силе, если заменить $C$ на $D$, $k$ на $\mathfrak{h}$.*

Для мероморфной в $C$ или $D$ $f$ (и заданного $k$ или $\mathfrak{h}$) опреде-

---

* Не обязательно состоящих из конечного числа континуумов.

лим функцию $H_{\cdot}$ наподобие обобщенной индикатрисы Фрагмена — Линделефа для целой функции ([1,2])*: если $\omega \in \Omega_f$, то

$$H_{f,\omega}(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}}\, \omega(k, r) \log |f(re^{i\varphi})|; \quad H_{f,\omega}(\varphi) = \overline{\lim_{r \to 1-0}}\, \omega(b, r) \log |f(re^{i\varphi})|.$$

В случае круга $D$ теорему 2 можно рассматривать как граничную теорему единственности (ср. ([13]), теор. 3).

Теорема 2. *Для каждой мероморфной в $C$ (или в $D$) функции $f$ и произвольного $\omega \in \Omega_f$ выполнено равенство*

$$\operatorname{cap}(\{\varphi \in [0, 2\pi] : H_{f,\omega}(\varphi) = -\infty\}) = 0.$$

Теорема 3 характеризует допустимый асимптотический рост нетождественной функции на исключительном множестве $E_{\omega,k}$; в формулировке теоремы для случая $C$ величины $\operatorname{capl}(E \cap L_n)$ в (3) можно также заменить на $\operatorname{cap}((E \cap L_n)_\varepsilon)$ $(n \geq n_0)$, если только эти числа отличны от нуля.

Теорема 3. *Пусть для мероморфной в $C$ функции $f$ последовательность $Z_f$ бесконечна и $E_{\omega,k}$ есть множество, определенное в теореме 1. Если $E \subseteq E_{\omega,k}$ и каждая порция $E$ имеет положительную емкость, то с произвольными $z_n \in L_n$ и $\forall \omega^* \in \Omega_f$ выполняется условие*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\log |f(z_n)|}{\log \operatorname{capl}(E \cap L_n)}\, \omega^*(k, |z_n|) < \infty \tag{3}$$

*Утверждение останется в силе, если заменить $C$ на $D$, $l$ на $h$, $k$ на $b$.*

Теорема 4 усиливает теорему единственности Бляшке. Уточнение внутренних теорем единственности см. ([14]); ср. также ([13]), теор. 3, ([1]).

Теорема 4. *Пусть счетное $E \subset D$ не имеет предельных точек в $D$ и*

$$\sum_{z \in E} (1 - |z|) = \infty.$$

*Если для мероморфной в $D$ функции $f$ с $T_f(r) = O(1)$ $(r \to 1-0)$ и всех $z \in E$ выполнено неравенство*

$$|f(z)| < \exp\left\{-\frac{p(z) + c \log 1/h(z, E \setminus z)}{1 - |z|}\right\},$$

*где $c > 0$ есть произвольная конечная постоянная, $p(z) > 0$,*

$$\lim_{\substack{z \to B \\ z \in E}} p(z) = +\infty, \text{ то } f \equiv 0.$$

---

* Нетрудно показать, что если $\frac{1}{f}$ есть целая функция конечного порядка, то для нее можно подобрать уточненный порядок $\rho(r) = r\rho'(r)$ так, что для некоторого $\omega \in \Omega_f$ функция $-H_{f,\omega}(\varphi)$ кратна обобщенной (относительно $\rho(r)$) индикатрисе $H_{\frac{1}{f}}(\varphi)$.

Теорема 5 есть общее предложение типа теорем А. Л. Шагиняна ([2]) относительно поведения мероморфных функций вдоль заданного $E$. Она применима к достаточно широкому классу множеств положительной емкости — это можно показать, пользуясь одной леммой О. Фростмана ([10]).

Теорема 5. *Если для некоторого распределения $\mu$ массы в $E\subset C$ с произвольным достаточно малым $0<\rho<1$ выполнено условие*

$$\sup_{z\in C}\left\|\int_{E\cap C_{z,\rho}}\log\frac{1}{l(z,\zeta)}\,d\mu(\zeta)\right\|_{E\cap C_{z,\rho}}<\infty, \tag{4}$$

*то для каждой мероморфной в $C$ функции $f$ и $\forall\omega\in\Omega_f$*

$$\int_E \bar{\omega}(k,|z|)\log^+|f(z)|^{-1}d\mu(z)<\infty \tag{5}$$

*Требование* (4) *не может быть опущено без нарушения справедливости* (5). *Утверждение останется в силе, если заменить $C$ на $D$, $C$ на $D$, $l$ на $h$, $k$ на $\mathfrak{h}$.*

Приведем одно метрическое* следствие из теоремы 5, основываясь на следующем ([10,16]): мера Хаусдорфа $\Lambda^*$ определяет некоторую внешнюю меру Каратеодори для ограниченных $e\subset C$ и тогда согласно теореме С. Сакса $\Lambda^*$ есть вполне аддитивная функция множества на ограниченных борелевских подмножествах $C$; выбирая в (4) в качестве $\mu$ меру, абсолютно непрерывную относительно $\Lambda^*_s$, получим следствие 2. Присутствие $i$ в (7) характеризует „протяженность" $E$, а (6) при $s=1$ является условием, по своему значению сходным с требованием А. Л. Шагиняна ([2]), чтобы $E$ располагалось на спрямляемой кривой. Когда $s=2$, (6) выполнено и становится излишним; при $s=1,2$ следствие 2 близко подходит к теоремам А. Л. Шагиняна ([2]).

Следствие 2. *Пусть $E\subset C$ имеет размерность $\leqslant s$ и*

$$\int_0^\infty |z|^{-1}\Lambda^*_s(E\cap C_{z,\rho})\rho^{-1}d\rho<\infty \tag{6}$$

*Если $i\geqslant 0$ есть произвольная функция, заданная на $E$, такая, что*

$$\int_E i(z)d\Lambda^*_s(z)<\infty,\quad i(z)=O(|z|^{-1})\quad(z\to\partial C), \tag{7}$$

*то для каждой мероморфной в $C$ функции $f$ и $\forall\omega\in\Omega_f$*

---

* Если функция $0<\Lambda(r)<1$ непрерывна на $(0,1)$ и $\Lambda(+0)=0$, то $\Lambda^*(e)$ означает $\Lambda$—меру Хаусдорфа ограниченного $e\subset C$, говорим, что $E$ имеет размерность (по Хаусдорфу) $\leqslant s$, если для числа $0<s\leqslant 2$ и $\forall e\subset E$ $\Lambda^*_s(e)<\infty$, где $\Lambda_s(r)=r^s$.

$$\int_E \lambda(z)\bar{\omega}(k, |z|)\log^+ |f(z)|^{-1} d\Lambda_2(z) < \infty$$

*Утверждение останется в силе, если заменить* $\boldsymbol{C}$ *на* $\boldsymbol{D}$, $k$ *на* $\vartheta$ *и в* (6), (7.2) $|z|$ *на* $1-|z|$.

Лемма А. Пуанкаре ([11]) утверждает, что для произвольной функции $\psi(x)>0$, $x\in(-\infty, +\infty)$, которая может неограниченно приближаться к 0 лишь в точках $\pm\infty$, существует целая функция $f\neq 0$ такая, что $|f(x)|=O(\psi(x))$, $|x|\to+\infty$; в ([10]) доказана теорема, близкая к гиперболическому варианту этой леммы. Каждый раз, когда для $f$ будет указан вид функции из $\Omega_f$ (например, (1)), теорема 6 даст достаточно точную оценку роста $T_f(r)$ через $\psi$.

Теорема 6. *Пусть* $E\subset\boldsymbol{C}$ $(E\subset\boldsymbol{D})$ *имеет предельные точки на* $\partial\boldsymbol{C}$ *(на* $\partial\boldsymbol{D}$*) и невозрастающая функция* $0<\lambda<1$ *такова, что*

$$\int_{E^*} \frac{\lambda(r)}{r}\, dr < \infty \quad \left(\int_{E^*} \frac{\lambda(r)}{1-r}\, dr < \infty\right).$$

*Если мероморфная в* $\boldsymbol{C}$ *(в* $\boldsymbol{D}$*)* $f$ *такова, что для заданной на* $[1, +\infty)$ *(на* $(0, 1)$*) функции* $\psi>0$ *выполнено* $|f(z)|\leqslant\psi(|z|)$, $z\in E$, *то* $\forall\omega\in\Omega_f$

$$\int_{E^*} \frac{\lambda(r)}{r}\,\bar{\omega}(k, r)\log^+ \frac{1}{\psi(r)}\, dr < \infty \quad \left(\int_{E^*} \frac{\lambda(r)}{1-r}\,\bar{\omega}(\vartheta, r)\log^+ \frac{1}{\psi(r)}\, dr < \infty\right). \tag{8}$$

Из теоремы 1 вытекает также следующее (в условиях теоремы 6): существует $L$-множество $F\subset(1, +\infty)$ $(F\subset(0, 1))$ так, что при $r\in E^*\setminus F$, $r\to+\infty$ $(r\to 1-0)$ выполнено

$$\bar{\omega}(k, r)\log^+ 1/\psi(r) = O(1) \quad (\bar{\omega}(\vartheta, r)\log^+ 1/\psi(r) = O(1)). \tag{9}$$

Если для заданной $f$ выбрать $E=\{z : |f(z)|^{-1} = \inf_{|\zeta|=|z|}\{|f(\zeta)|^{-1}\}\}$, то из (8), (9) можно сразу получить утверждения о взаимном росте $M_f(r)(=\sup_{0\leqslant\theta<2\pi}|f(re^{i\theta})|)$ и $T_f(kr)$ для мероморфной функции (см. ([8])). Например, из (8) вытекает, что для каждой $f$, мероморфной в $\boldsymbol{C}$, и произвольного $\alpha$, удовлетворяющего (1),

$$\int_1^\infty \frac{\bar{\omega}^\alpha(r)}{r}\,\frac{\log^+ M_f(r)}{T_f(kr)}\, dr < \infty,$$

что несколько отличается от теоремы Р. Неванлинны ([10]):

$$(rT_f(kr))^{-1}\int_1^r \log^+ M_f(t)\, dt = O_k(1), \quad r\to+\infty.$$

Замечание 1. Пусть $e_-$ есть связная компонента $e^c$, содержа-

щая точку $z=\infty$, $g_e(z)$ — функция Грина области $e_\infty$ с полюсом в $z=\infty$; можно показать, что если для компакта $e$ $0\in e_\infty$, то $\operatorname{capl}(e)=\exp\{-g_e(0)\}$. Приведем следующие равенства: если $0\notin\Delta$ есть прямолинейный отрезок с концами $z_1, z_2\in\mathbf{C}$, $\gamma$ есть дуга окружности с центром в $z=0$ раствора $\varphi$, $0<\varphi\leq 2\pi$, то

$$\operatorname{capl}(\Delta)=\left|\frac{1-\sqrt{z_1/z_2}}{1+\sqrt{z_1/z_2}}\right|,\quad \operatorname{capl}(\gamma)=\sin\frac{\varphi}{4}\quad (\text{для } r=0 \text{ и } r>0).$$

Замечание 2. В п. 3 теоремы 1 (для плоскости и круга) в качестве постоянной $c$ можно выбрать

$$c_{\infty,1+\theta}=40(\varepsilon_\infty+\varepsilon)\frac{1}{\eta}\log\frac{54}{\eta}=c_{\infty,\theta}.$$

Замечание 3. Пусть $f$ есть целая функция конечного порядка, $v(r)$—ее уточненный порядок; если $f$ такова, что $(v(r))^{-1}\in\Omega_f$, то в следствии 1 указана точная предельная скорость убывания. Это можно заметить из теоремы Суньера-и-Балагера (см. ([20]), стр. 34): если $E\subset\mathbf{C}$ есть неограниченная жорданова кривая и для целой $f(z)$ конечного порядка выполнено

$$(v(|z|))^{-1}\log|f(z)|\leq -c_f,\quad z\in E,\quad 0<c_f<\infty,$$

то 0 есть дефектное значение для $f$. Например, если $f$ есть произведение Вейерштрасса порядка $0<\rho<\infty$ и $Z_f$ принадлежит классу сходимости, то нетрудно видеть, что $(v(r))^{-1}=r^{-\rho}\in\Omega_f$.

Научно-исследовательский институт
физики конденсированных сред
Ереванского государственного университета

Ա. Յու. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

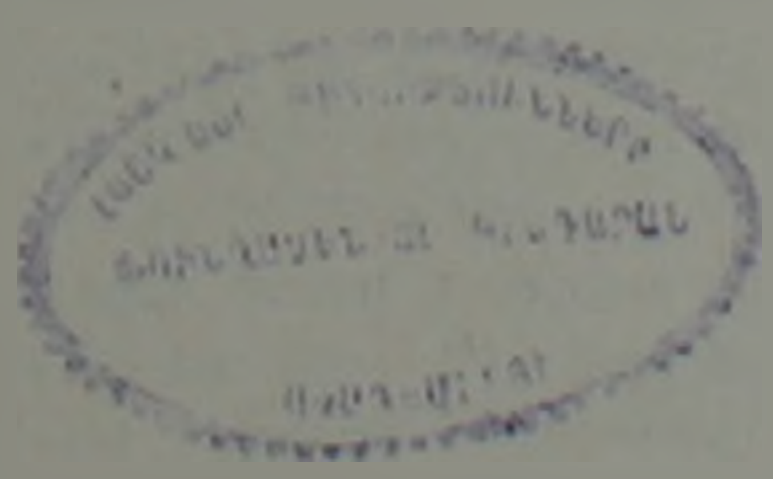
## Ա. Լ. Շահինյանի թեորեմների տիպի գնահատականներ մերոմորֆ ֆունկցիաների սահմանային նվազելու համար

*Շարադրվում է ակադեմիկոս Ա. Լ. Շահինյանի կողմից ([1-4]) աշխատություններում դրված հետևյալ բնդհանուր հարցի ուսումնասիրությունը։ Դիցուք $E$-ն բնկած է $G:|z|<R\leq\infty$ տիրույթում և ունի կիսաուղիղ ինչքան ասել է տիրույթի $\partial G$ եզրին (եթե $R=\infty$, ապա $\partial G$ — անվերջ հեռու կետն է)։ Ենթադրվում կատարում է հետևյալը. որքան արագ կարող է մոտենալ $E$-ի վրայով դրա սահմանին $G$-ում մերոմորֆ $f\neq\text{const}$ ֆունկցիան, անենայով $M$. Նեևանլիննայի $T_f(r)$ խարակտերիստիկ ֆունկցիայի նախապես տրված աճ։*

*Ներկա հոդվածում մերոմորֆ $f$-ի համար մտցվում է $\Omega_f=\{\omega\}$ դրական մոնոտոն ֆունկցիաների դաս, որոնց միջոցով էլ գնահատվում է $f$-ի նշված կարգը։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Шагинян*, ДАН АрмССР, т. 27, № 5 (1958). [2] *А. Л. Шагинян*, ДАН СССР, т. 129, № 2 (1959). [3] *А. Л. Шагинян*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. н., т. 12, № 1 (1959). [4] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956. [5] *М. А. Евграфов*, Асимптотические оценки и целые функции, «Наука», М., 1979. [6] *А. Ю. Шахвердян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 2 (1979). [7] *И. В. Ушакова*, Зап. мех.-мат. факультета Харьковского ун-та, Харьковского мат. о-ва, т. 29, сер. 4 (1963). [8] *И. В. Ушакова*, Вестн. Харьковского ун-та, сер. мех.-мат., вып. 34 (1970). *Н. С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала, «Наука», М., 1966. [10] *M. Tsuji*, Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959. [11] *W. K. Hayman*, Journ. Math. pures et appl., vol. 35, 2 (1956). [12] *П. П. Мейман*, ДАН СССР, т. 204, № 1 (1972). [13] *Э. М. Кегеян*, ДАН АрмССР, т. 37, № 5 (1963). [14] *М. М. Лаврентьев*, ДАН СССР, т. 110, № 5 (1956). [15] *E. Nagemihl*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Sat. A1, № 299 (1961). [16] *С. Сикс*, Теория интеграла, ИЛ, М., 1949. [17] *Ж. Вилирон*, Аналитические функции, ИЛ, М., 1957. *F. Schnitzer, W. Seidel*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 57, 4 (1967). [19] *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций, «Наука», М., 1970. [20] *А. А. Гольдберг*, Мероморфные функции, в сб. Мат. анализ, т. 10, 1973 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР), М., 1973.



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ ԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

В. В. Сарафян, Р. Г. Сафарян

# Диффузионные процессы с усреднением и распространение концентрационных волн

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 25/II 1980)

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon}f(x,y,u^\varepsilon),\ t>0$$

$$x\in(-1,1),\ -\infty<y<\infty;\ \left.\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=\pm1}=0,\ u^\varepsilon(0,x,y)=g(x,y)\geqslant0 \quad (1)$$

$$\varepsilon>0$$

Здесь $\varepsilon$ — малый параметр; $b(x,y)$, $f(x,y,u)$ — ограниченные по модулю, удовлетворяющие условию Липшица функции. Начальная функция $g(x,y)$ предполагается непрерывной всюду, кроме, быть может, конечного числа гладких кривых в плоскости $(x,y)$; носитель функции $g(x,y)$ обозначим $G$ и будем считать, что $G$ непустое множество, совпадающее с замыканием множества своих внутренних точек. Мы предполагаем, что функция $f(x,y,u)$ при любых $x\in[-1,1]$, $y\in(-\infty,\infty)$ удовлетворяет следующим условиям: $f(x,y,0)=f(x,y,1)=0$, $f(x,y,u)>0$ при $u\in(0,1)$ и $f(x,y,u)<0$ при $u\notin[0,1]$.

Кроме того, предполагается, что

$$c(x,y)=\left.\frac{\partial f(x,y,u)}{\partial u}\right|_{u=0}=\max_u u^{-1}f(x,y,u). \quad (2)$$

Мы приведем некоторые результаты относительно поведения решения задачи (1) при малых $\varepsilon$. Как и следовало ожидать из физических соображений, функция $u^\varepsilon(t,x,y)$ при малых $\varepsilon$ близка к ступеньке-функции, зависящей только от $y$ и принимающей два значения 0 и 1. С ростом $t$ область $G_t$, где $u^\varepsilon(t,x,y)$ близка к 1, изменяется и решение задачи (1) при малых $\varepsilon$ носит характер волны. Наша задача тесно связана с работой [1], где рассматривается задача о распространении концентрационной волны с такой же нелинейностью, как у нас, когда случайное движение — обычная диффузия. В нашем

случае соответствующий случайный процесс по оси $y$ имеет конечную скорость и носит характер броуновского движения с инерцией.

Сначала рассмотрим случай $b(x, y) = b(x)$, $f(x, y, u) = f(u)$, $G = \sup g(x, y) = \{y < 0\}$. Обозначим $\bar{b} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} b(x)\,dx$. Для любого $\beta \in (-\infty, \infty)$ определим $\nu(\beta)$ как наименьшее собственное значение краевой задачи

$$\frac{1}{2}u''(x) + \beta(b(x) - \bar{b})u(x) = \nu(\beta)u(x), \quad x \in (-1, 1),$$
$$u'(1) = u'(-1) = 0. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что функция $\nu(\beta)$ выпукла вниз. Обозначим $L(z)$ преобразование Лежандра от $\nu(\beta)$: $L(z) = \sup(z\beta - \nu(\beta))$.

Теорема 1. *Пусть $b(x, y) = b(x)$, $f(x, y, u) = f(u)$, $G = \{y < 0\}$. Обозначим $\bar{z}$ единственный положительный корень уравнения $L(z) = f'(0)$, $z^* = \bar{z} - \bar{b}$. Тогда*

$$\lim_{t \to 0} u^\varepsilon(t, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y < z^* t \\ 0 & \text{при } y > z^* t \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 введем в рассмотрение диффузионный процесс $(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)$ в полосе $|x| \leq 1$, $-\infty < y < \infty$, который внутри этой полосы управляется оператором $L^\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$, а при $x = \pm 1$ претерпевает отражение по нормали к границе. Из формулы Каца — Фейнмана [2] следует, что решение задачи (1), если оно существует, удовлетворяет уравнению

$$u^\varepsilon(t, x, y) = M_{x,y} g(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(u^\varepsilon(t - s, x_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon))\,ds\right\}, \tag{4}$$

где $c(u) = u^{-1}f(u)$, $M_{x,y}$ — математическое ожидание в предположении, что $x_0 = x$, $y_0 = y$. Если $c(u)$ удовлетворяет условию Липшица, то легко доказать, что существует единственное решение уравнения (4), которое естественно считать обобщенным решением задачи (1). Если данные задачи достаточно гладкие, то нетрудно доказать, что это обобщенное решение будет классическим.

Так как по условию $c = f'(0) \geq u^{-1}f(u)$, то из (4) вытекает неравенство

$$0 < u^\varepsilon(t, x, y) \leq M_{x,y} g(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) e^{\frac{ct}{\varepsilon}}. \tag{5}$$

Далее, применяя результаты работ [3,4], получим, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \ln M_{x,y} g(y_t^\varepsilon) = -\ln \inf_{\varphi \in C_{[0,t]}:\varphi_0=y} \left\{ \int_0^t L(\dot\varphi_s + b)\,ds \right\} \tag{6}$$

Нижняя грань в правой части равенства (6), как легко видеть, достигается при $\varphi_s = \frac{y}{t}$. Отсюда следует, что $M_{x,y} g(y_t^\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ логарифмически эквивалентно $\exp\left\{-\frac{t}{\varepsilon} L\left(\frac{y}{t} + \bar b\right)\right\}$. Из (5) и (6) заключаем, что при малых $\varepsilon > 0$

$$0 \le u^\varepsilon(t, x, y) \le \exp\left\{\frac{t}{\varepsilon}\left(c - L\left(\frac{y}{t} + \bar b\right)\right)\right\}$$

и, следовательно, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = 0$, если $L\left(\frac{y}{t} + \bar b\right) > C$. Так как $L(\alpha)$ возрастающая функция, то последнее неравенство выполняется только при $\frac{y}{t} > \bar\alpha - \bar b$, где $\bar\alpha$ — положительный корень уравнения $L(\alpha) = c - f'(0)$. Таким образом, если $y > \alpha^* t$, то $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = 0$

Поясним теперь, как доказывается, что $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = 1$ при $y < \alpha^* t$. Это доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из ([8]). Из оценки (6), с учетом того, что $u^\varepsilon \to 0$ при $y > \alpha^* t$, можно вывести, что для любого $\delta > 0$ найдется столь малое $h > 0$, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \ln u^\varepsilon(t, x, (\alpha^* + h)t) > -\delta. \tag{7}$$

Далее, используя строго марковское свойство „теплового" процесса $(t-s, x_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon) = Z_s^\varepsilon$, можно для любого марковского момента $\tau^\varepsilon$ записать соотношение

$$u^\varepsilon(t, x, y) = M_{x,y} u^\varepsilon(t - \tau^\varepsilon, x_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon, y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau^\varepsilon} c(u^\varepsilon(t-s, x_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon))\,ds}.$$

Выбирая в этом соотношении в качестве $\tau^\varepsilon$ первый момент достижения процессом $z_t^\varepsilon$ множества $t = 0$ или множества $\{(s, x, y) : u^\varepsilon(s, x, y) > 1 - \varepsilon\}$, с учетом оценки (7) и того, что $c(u) > c_1 > 0$ при $u \in [0, 1-\varepsilon]$, нетрудно доказать, что $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = 1$ при $y < \alpha^* t$.

Замечание. Нетрудно освободиться от предположения о том, что $G = \{y < 0\}$. Если $g(x, y)$ — произвольная неотрицательная непрерывная функция, то положим $\bar G = \{y : g(x, y) > 0$ при каком-нибудь $x \in [-1, 1]\}$. Если $\bar G = \{y < a < \infty\}$, то утверждение теоремы сохраняется без существенных изменений — фронт волны будет передвигаться со скоростью $\alpha^* = \bar a - \bar b$. Если множество $\bar G$ состоит из ограниченных интервалов, то нужны небольшие уточнения. А именно все правые концы компонент множества $\bar G$ будут двигаться со скоростью $\alpha^* =$

$\bar{z}-\bar{b}$. Левые концы будут двигаться со скоростью $\bar{z}-\bar{b}$. В частности, если $\bar{b}=0$, то полосы, из которых $u^\varepsilon(t, x, y)$ близко к 1, будут расширяться со временем в обе стороны со скоростью, по абсолютной величине равной $\bar{z}$. Если $\bar{b}=0$, но $|\bar{b}|<\bar{z}$, то эти полосы тоже будут со временем расширяться в обе стороны, но с различными скоростями.

Теперь мы рассмотрим случай неоднородных по $y$ коэффициентов. Здесь скорость распространении фронта уже меняется от точки к точке и возможны некоторые новые эффекты, такие, как, например, зажигание новых индуцированных центров ([8]). Для краткости будем считать, что начальная функция зависит только от $y$: $g=g(y)$ и что $\bar{b}(y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} b(x, y)dx=0$ при всех $y$.

Пусть $\nu=\nu(y, \beta)$ наибольшее собственное значение задачи

$$\frac{1}{2}u''(x)+\beta b(x, y)u(x)=\nu(y, \beta)u(x),\ x\in(-1, 1),\ u'(1)=u'(-1)=0.$$

Здесь $\beta\in(-\infty,\infty)$ и $y\in(-\infty,\infty)$ параметры. Обозначим $L(y, z)$—преобразование Лежандра функции $\nu(y, \beta)$ по $\beta$. Введем в рассмотрение функционал

$$R_\alpha(\varphi)=\int_0^t |c(\varphi_s)-L(\varphi_s, \varphi_s)|ds.$$

Этой формулой определим функционал $R_\alpha(\varphi)$ для абсолютно непрерывных функций $\varphi_s$, $s\in[0, t]$; для остальных непрерывных $\varphi_s$, $s\in[0, t]$ положим $R_\alpha(\varphi)=-\infty$. Функционал $R_\alpha(\varphi)$ полунепрерывен сверху. Функцию $V_0(t, y)$ определим равенством

$$V_0(t, y)=\sup\{R_\alpha(\varphi): \varphi\in C_\alpha,\ \varphi_0=y,\ \varphi_t\in G\},$$

где $G=\{y: g(y)>0\}$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x, y, u)=f(y, u)$, $g=g(y)$, $\bar{b}(y)=0$. *Предположим, что для любой точки* $(t, y)$ *такой, что* $V_0(t, y)\leq 0$

$$V_0(t, y)=\sup\{R_\alpha(\varphi): \varphi\in C_\alpha,\ \varphi_0=y,$$
$$\varphi_t\in G,\ V(t-s, \varphi_s)<0 \text{ при } s\in(0, t)\}.$$

*Тогда* $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y)=0$, *если* $V_0(t, y)<0$, $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y)=1$, *если* $V_0(t, y)>0$.

Таким образом, уравнение $V(t, y)=0$ задает фронт волны в момент $t$; экстремали функционала $R_\alpha(\varphi)$ играют роль лучей.

Доказательство этой теоремы близко к доказательству теоремы 1. Как следует из ([3,4]),

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\ln M_{t,y}R(y_t^\varepsilon)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(y_s^\varepsilon)\,ds\right\}=V_0(t, y).$$

Пользуясь этим соотношением, доказательство теоремы 2 можно провести аналогично тому, как доказывается теорема 1 из ([2]).

Теперь обратимся к случаю, когда нелинейный член зависит от быстрой переменной $x$. Будем для краткости считать, что от $y$ коэффициенты не зависят и $G=\{y<0\}$.

Теорема 3. *Предположим, что* $h=b(x)$, $f(x, y, u)=f(x, u)$, $G=\{y<0\}$. *Пусть* $\lambda(\xi_1, \xi_2)$, $(\xi_1, \xi_2\in(-\infty, \infty))$, *наименьшее собственное значение задачи*

$$\frac{1}{2}u''(x)+(\xi_1 b(x)+\xi_2 c(x))u(x)=\lambda(\xi_1, \xi_2)u, \quad x\in(-1,1)$$

$$u(-1)=u(1)=0,$$

$L(z_1, z_2)$ — *преобразование Лежандра функции* $\lambda(\xi_1, \xi_2)$. *Обозначим* $z^*$ *единственный положительный корень уравнения* $\sup|c-L(z, c)|=0$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y)=\begin{cases}1 & \text{при } y<z^* t,\\ 0 & \text{при } y>z^* t.\end{cases}$$

Доказательство этой теоремы проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 1. Следует только воспользоваться тем, что при $\varepsilon\downarrow 0$

$$\ln M_{t,y} g(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(x_s^\varepsilon)ds}\sim\frac{1}{\varepsilon}\sup\left\{-\int_0^t L(\varphi_s^1, \varphi_s^2)ds+\varphi_t^2:\right.$$

$$\left.:\varphi^1, \varphi^2\in C_{0t}, \varphi_0^1=y, \varphi_t^1<0, \varphi_0^2=0\right\}.$$

Эта эквивалентность вытекает из ([3]), ([4]), гл. 7).

Ереванский государственный
университет,
Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Վ. Վ. ՍԱՐԱՅՅԱՆ Ռ. Դ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

## Դիֆուզիոն պրոցեսներ միջինացումով և կոնցենտրացիոն ալիքների տարածում

*Դիտարկենք հետևյալ խառը եզրային խնդիրը.*

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}+b(x, y)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon}f(x, y, u^\varepsilon), \quad x\in(-1, 1)$$

$$-\infty<y<\infty, \ t>0; \ u^\varepsilon(0, x, y)=g(x, y)\geqslant 0; \ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(t, x, y)\Big|_{x=\pm 1}=0$$

Ցույց է տրված որոշ ենթադրությունների դեպքում փոքր ε-ի համար, որ նշված խնդրի $u^{\varepsilon}(t, x)$ լուծումը ունի սահմանային արժեքի բնույթ, որը տարածվում է y առանցքի ուղղությամբ։

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


[1] *А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов*, Бюллетень МГУ, Серия А, т. I 1937. [2] *М. И. Фрейдлин*, ДАН СССР, т. 246, № 3 (1979). [3] *В. В. Сирифян, Р. Г. Сифарян, М. И. Фрейдлин*, УМН, т. 33, № 6 (1978). [4] *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин*, Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, «Наука», М., 1979.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 514.765.7

МАТЕМАТИКА

В. А. Нерсесян

# Об одном классе допустимых комплексов двумерных плоскостей в $R^n$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 27/II 1980)

1. Пусть $H_{2,n}$ — многообразие двумерных плоскостей в $R^n$, $K\subset H_{2,n}$ — комплекс двумерных плоскостей в $H_{2,n}$, $K_Q$ — четырехмерный конус, образованный двумерными плоскостями, проходящими через точку $Q\in R^n$, $\pi(Q;h)$ — касательная плоскость к конусу $K_Q$, проходящая через $h\in K_Q$.

Определение. Комплекс $K$ называется допустимым, если для почти всех $Q\in R^n$ и $h\in K_Q$ плоскость $\pi(Q;h)$ определена и зависит только от $h$.

Такие подмногообразия введены И. М. Гельфандом и М. И. Граевым в связи с задачей интегральной геометрии ([1]). В настоящей работе изучается один важный класс допустимых комплексов двумерных плоскостей в $R^n$. Классификация допустимых комплексов двумерных плоскостей в $R^5$ дана в работе ([2]).

2. К каждой плоскости $h\in H_{2,n}$ присоединим семейство ортонормированных реперов $\{M;e_i\}$ $i=\overline{1,n}$ так, чтобы $e_a\subset h$ $a,b=1,2$, а $e_A\subset\pi(Q;h)$ $A,B,C,D=\overline{1,4}$. Главными на многообразии $H_{2,n}$ являются формы

$$\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^\alpha_a,\ \omega^A_a,\ \omega^\alpha_A\quad \alpha,\beta=\overline{5,n},$$

а на семействе четырехмерных плоскостей $\pi(Q;h)$

$$\omega^a,\ \omega^A_a,\ \omega^A_3,\ \omega^A_4.$$

В работе ([2]) показано, что если комплекс $K$ допустим, то

$$\omega^\alpha_a=A^\alpha_{a\beta}\omega^\beta. \tag{1}$$

Рассмотрим случай, когда $n=6$, а плоскости $\pi(Q;h)$ являются касательными к некоторой четырехмерной поверхности $V^4\subset R^n$ в точках $M\in V^4$. Тогда уравнения (1) можно привести к виду

$$\omega^6_1=A_1\omega^5,\quad \omega^6_2=A^6_{2\beta}\omega^\beta \tag{2}$$

Действительно, пусть $h \in K_0$. Представим точку $P \in h$ в виде $P = M + x^1 e_1$, направляя для этого первый вектор $e_1$ из семейства реперов $\{M; e_i\}$, присоединенного к двумерным плоскостям $h$, по $\overrightarrow{MP}$. Так как $dP \in \pi(Q; h)$, то

$$dP = \left(\omega^1 + \frac{dA_1}{(A_1)^2}\right)e_1 + \left(\omega^2 - \frac{\omega_1^2}{A_1}\right)e_2 + \left(\omega^3 - \frac{\omega_1^3}{A_1}\right)e_3 + \left(\omega^4 - \frac{\omega_1^4}{A_1}\right)e_4,$$

$$\omega_1^a = A_1\omega^a, \text{ где } A_1 = -\frac{1}{x^1}.$$

Легко заметить, что мы находимся в следующей ситуации. Известно, что если в $R^6$ задана некоторая поверхность $S^4 \subset R^6$, то, присоединяя семейство реперов $\{M; e_i\}$ к каждой точке поверхности $S^4$ таким образом, чтобы $e_N \subset \pi(Q; h)$, уравнения инфинитезимального перемещения репера можно писать в виде

$$dM = \theta^N e_N, \quad de_N = \theta_N^i e_i, \quad de_a = \theta_a^i e_i.$$

Система $\theta^a = 0$ задает уравнения поверхности $S^4$. Если продифференцировать $\theta^a = 0$ внешним образом и применить лемму Картана, то получим

$$\theta_N^a = h_{NL}^a \theta^L, \quad h_{NL}^a = h_{LN}^a, \tag{3}$$

где $h_{NL}^a$ — тензор второй квадратичной формы поверхности. Для удобства записи вместо буквы $\theta$ будем писать $\omega$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $K$ — шестимерный комплекс двумерных плоскостей, образованный касательными к некоторой четырехмерной поверхности $V^4 \subset R^6$. Комплекс $K$ допустим тогда и только тогда, когда в касательной плоскости $\pi(Q; h)$ для любого $h \in K_0$ существует двумерная плоскость одномерных направлений, сопряженных любым направлениям плоскости $h$.*

Доказательство. Пусть $Q$ — произвольная фиксированная точка на $h$. Тогда $Q = M + x^N e_N$. В силу равенства $dQ = 0$ имеем $\omega^N + dx^N + x^L \omega_L^N = 0$, $x^N \omega_N^a = 0$. Возьмем произвольную точку $P \in h$. Пусть $P = M + y^N e_N$. Требуется, чтобы для любой точки $P \in h$ при фиксации произвольной точки $Q \in h$ касательная плоскость $\pi(Q; h)$ совпадала с касательной плоскостью к поверхности $V^4$ в точке $M \in V^4$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $y^N \omega_N^a = 0$ (в силу соотношений $x^N \omega_N^a = 0$). Подставляя сюда значения (3), получим $h_{NL}^a y^N \omega^L = 0$ (в силу соотношений $h_{NL}^a x^N \omega^L = 0$). Как известно, направления $T = \{t^N\}$ и $R = \{r^N\}$ называются сопряженными относительно квадратичной формы $h_{NL}^a \omega^N \omega^L$, если $h_{NL}^a t^N r^L = 0$. Так как из системы уравнений $h_{NL}^a x^N \omega^L = 0$ следует, что $h_{NL}^a y^N \omega^L = 0$ для любой точки $P \in h$ и любой фиксированной точки $Q \in h$, то $\operatorname{rang}(A) = 2$, где

$$A=\begin{pmatrix} h^5_{N1}x^1 & h^5_{N2}x^2 & h^5_{N3}x^3 & h^5_{N4}x^4 \\ h^6_{N1}x^1 & h^6_{N2}x^2 & h^6_{N3}x^3 & h^6_{N4}x^4 \\ h^5_{N1}y^1 & h^5_{N2}y^2 & h^5_{N3}y^3 & h^5_{N4}y^4 \\ h^6_{N1}y^1 & h^6_{N2}y^2 & h^6_{N3}y^3 & h^6_{N4}y^4 \end{pmatrix}$$

Это значит, что одномерные направления, сопряженные к любым направлениям плоскости $h$, образуют двумерную плоскость.

Достаточность доказывается обратным рассуждением.

Известно, что пару билинейных форм $\varphi^\alpha(x;y)=H^\alpha_{Nl}x^N y^l$ с симметричными коэффициентами можно одновременно привести к одному из видов, указанных в ([3]). Применим эту теорему к квадратичным формам $h^\alpha_{Nl}\omega^N\omega^l$. Из теоремы Ю. Б. Ермолаева ([3]) следует, что $\operatorname{rang}(A)=2$ для следующих матриц:

I
$$(h^5_{Nl})=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad (h^6_{Nl})=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

II
$$(h^5_{Nl})=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad (h^6_{Nl})=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

III
$$(h^5_{Nl})=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad (h^6_{Nl})=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

I. Основные уравнения поверхности $V^4$: $\omega^3=0$, $\omega^4=0$,

$$\omega^5_1=\omega^1,\ \omega^5_2=\omega^2,\ \omega^5_3=0,\ \omega^5_4=0,\ \omega^6_1=0,\ \omega^6_2=0,\ \omega^6_3=\omega^3,\ \omega^6_4=\omega^4. \qquad (4)$$

Если продифференцировать уравнения (4) внешним образом, то станет ясно, что системы уравнений $\omega^1=\omega^2=0$ и $\omega^3=\omega^4=0$ вполне интегрируемы. Следовательно $V^4$ расслаивается на произведение двумерных поверхностей $V^2_1$ и $V^2_2$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера на этих поверхностях показывают, что $V^2_1\subset E^5_1$, $V^2_2\subset E^5_2$, где $E^5_1$, $E^5_2$ — пятимерные плоскости, натянутые соответственно на векторы $e_N$, $e_6$ и $e_N$, $e_5$. После канонизации репера легко обнаружить, что $V^4_1\subset E^3_1$ и $V^2_2\subset E^3_2$, где $E^3_1$, $E^3_2$ — пересекающиеся в точке трехмерные плоскости, натянутые соответственно на векторы $e_3$, $e_4$, $e_6$ и $e_1$, $e_2$, $e_5$. Легко доказать, что они являются характеристиками для семейства плоскостей $E^5_\alpha$.

II. Основные уравнения поверхности $V^4$: $\omega^3=0$, $\omega^4=0$,

$$\omega^5_1=\omega^2,\ \omega^5_2=\omega^1,\ \omega^5_3=\omega^4,\ \omega^5_4=\omega^3,\ \omega^6_1=0,\ \omega^6_2=\omega^2,\ \omega^6_3=0,\ \omega^6_4=\omega^4. \qquad (5)$$

Дифференцируя уравнения (5) внешним образом, мы заметим, что система уравнений $\omega^7 = \omega^8 = 0$ вполне интегрируема. Значит $V^4$ расслаивается на двумерные поверхности $V^2$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера на поверхности $V^2$ показывают, что $V^2$—плоскость, натянутая на векторы $e_1$, $e_3$, причем касательная плоскость к $V^4$ в точках плоскости $V^2$ принадлежит гиперплоскости $E^3 = \{e_1, e_3\}$. Найдем фокальные образы нашего двухпараметрического семейства двумерных плоскостей $V^2$. Точку $P \in V^2$ представим в виде $P = M + x^1 e_1 + x^3 e_3$. Так как $dP \in V^2$, то, учитывая результаты дифференцирования уравнений (5), получим, что наше семейство двумерных плоскостей $V^2$ имеет три фокуса.

III. Основные уравнения поверхности $V^4$: $\omega^3 = 0$, $\omega^8 = 0$,

$$\omega_1^2 = \omega^2,\ \omega_2^5 = -\omega^8,\ \omega_2^3 = \omega^3,\ \omega_1^5 = -\omega^4,\ \omega_1^6 = \omega^2,\ \omega_2^6 = \omega^1,\ \omega_2^7 = \omega^4,\ \omega_1^7 = \omega^3. \tag{6}$$

Покажем, что наша поверхность $V^4$ несет некоторую определенную комплексную структуру. Для этого введем на $V^4$ почти комплексную структуру, порожденную полем аффиноров $f = (f_B^A)$ следующим образом:

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = -e_1,\ f(e_3) = e_4,\ f(e_4) = -e_3, \tag{7}$$

т. е. положим $e_2 = ie_1$, $e_4 = ie_3$. Известно, что оператор $f$ почти комплексной структуры удовлетворяет уравнениям

$$f_C^A f_D^C = -\delta_D^A,\ df_D^A - f_C^A \omega_D^C + f_D^C \omega_C^A = f_D^A \omega^C.$$

В силу (7) $f_1^2 = -f_2^1 = 1$, $f_3^4 = -f_4^3 = 1$, а остальные $f_C^A = 0$. Вычислим тензор Нейенхейса

$$N_{CD}^A = f_C^B (f_{BD}^A - f_{DB}^A) - f_D^B (f_{BC}^A - f_{CB}^A)$$

для почти комплексной структуры. Оказывается, что $N_{CD}^A = 0$. Это и означает, что наша поверхность несет комплексную структуру. Выясним ее геометрический смысл. Пусть $e = \omega^a e_a$ — вектор на поверхности $V^4$ с координатами $\{\omega^a\}$. В каждой точке поверхности $V^4$ рассмотрим нормальное пространство $R^6/_{(V^4, M)}$ и оператор $F$, действующий по закону $F(e_3) = e_4$, $F(e_4) = -e_3$, т. е. положим $e_4 = ie_3$. Пусть $\{M; E_1, E_2, E_3\}$ — семейство комплексных реперов, присоединенных к каждой точке $M$ поверхности $V^4$ так, что $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2$, $E_3 = e_3$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера имеют вид:

$$dM = \Omega^a E_a;\ dE_a = \Omega_a^b E_b + \Omega_a^3 E_3,\ dE_3 = \Omega_3^a E_a + \Omega_3^3 E_3,$$

где $\Omega^1 = \omega^1 + i\omega^2$, $\Omega^2 = \omega^3 + i\omega^4$, $\Omega^3 = \omega^5 + i\omega^6 = 0$. Тогда вектор $e = \{\omega^a\}$ можно представить в комплексном виде $e = \Omega^a E_a$. Известно, что вторая квадратичная форма поверхности принимает значения в нормальном расслоении $R^6/_{(V^4)}$. Оказывается, в нашем случае ее можно рассматривать как форму с комплексными численными значениями. Действительно, в силу (6)

$$\varphi(e) = h^*_{NL}\omega^N\omega^L e_s = [(\omega^1 + i\omega^2)^2 + (\omega^3 + i\omega^4)^2]e_3 = [(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2]E_3.$$

Однако $V^4$, вообще говоря, не является двумерной комплексной поверхностью. Действительно, в противном случае из (6) мы имели бы $\Omega^3 = 0$, $\Omega^3_1 = \Omega^1$, $\Omega^3_2 = \Omega^2$, где $\Omega^3_1 = \omega^3_1 + i\omega^4_1$, $\Omega^1_2 = \omega^3_2 + i\omega^4_2$. Тогда формы $\Omega^1$ и $\Omega^2$ удовлетворяют уравнениям $d\Omega^1 = \Omega^1_1 \wedge \Omega^1 + \Omega^1_2 \wedge \Omega^2$, $d\Omega^2 = \Omega^2_1 \wedge \Omega^1 + \Omega^2_2 \wedge \Omega^2$, где $\Omega^1_1 = \omega^1_1 - i\omega^2_1$, $\Omega^2_1 = \omega^3_1 - i\omega^4_1$, $\Omega^1_2 = \omega^1_2 + i\omega^2_2$, $\Omega^2_2 = \omega^3_2 + i\omega^4_2$. Из соотношений $e_2 = ie_1$, $e_4 = ie_3$ следует, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{array}{llll} \omega^1_1 = \omega^2_2, & \omega^1_2 = \omega^2_1, & \omega^2_1 + \omega^1_2 = 0, & \omega^1_2 + \omega^1_1 = 0, \\ \omega^3_3 = \omega^4_4, & \omega^3_4 = \omega^4_3, & \omega^4_3 + \omega^3_4 = 0, & \omega^3_3 + \omega^3_4 = 0. \end{array}\right| \qquad (8)$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 2. *Пусть $K$ — допустимый комплекс двумерных плоскостей в $R^6$, образованный касательными плоскостями к некоторой четырехмерной поверхности $V^4 \subset R^6$. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

I. *$R^6$ расслаивается на произведение двумерных поверхностей. В каждой точке $V^4$ эти поверхности лежат на пересекающихся в точке трехмерных плоскостях, которые образуют двухпараметрическое семейство и являются характеристиками для двухпараметрического семейства гиперплоскостей.*

II. *$V^4$ — это двухпараметрическое семейство двумерных плоскостей $V^2$ в $R^6$ с тремя фокусами, причем касательные плоскости к $V^4$ в точках $V^2$ принадлежат $R^3$.*

III. *$V^4$ — поверхность, несущая комплексную структуру, определяемую полем аффиноров $f$ на касательном расслоении к $V^4$ и полем аффиноров $F$ на нормальном расслоении к $V^4$, превращающих касательные плоскости к $V^4$ в двумерные комплексные пространства, а нормальные плоскости — в комплексную прямую, причем вторая квадратичная форма поверхности представляется в виде формы со значениями в комплексной прямой. $V^4$ является двумерной комплексной поверхностью в $C^3$ тогда и только тогда, когда в структурных уравнениях* (6) *поверхности $V^4$ соблюдаются условия* (8).

Автор выражает свою благодарность проф. А. М. Васильеву за полезные советы и за внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Ա. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

## $R^n$-ում երկչափ հարթությունների բուլյատորեյի կոմպլեքսների մի դասի մասին

*Դիցուք $H_{2,n}$-ը $R^n$-ում երկչափ հարթությունների բազմաձևություն է (կոմպլեքս), $K$-ն $n$-չափանի ենթաբազմաձևություն է $H_{2,n}$-ում, $K_0$-ն բա-*

ռաչափ կոն է՝ կազմված $Q \in R^n$ կետով անցնող երկչափ հարթություններով, $\pi(Q; h)$-ը այդ կոնին $h \in K_Q$ կետում շոշափող հարթությունն է։

$K$ կոմպլեքսը կոչվում է թույլատրելի, եթե համարյա բոլոր $Q \in R^n$ և $h \in K_Q$ համար $\pi(Q; h)$ հարթություն որոշված է և կախված չէ $h$-ից։

Հոդվածում ուսումնասիրվում է երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների մի դաս $R^n$-ում, երբ $\pi(Q, h)$ հարթությունները պարուրում են $R^n$-ում ինչ որ քառաչափ մակերևույթ։ Տրվում է այդպիսի կոմպլեքսների լրիվ դասակարգումը $R^n$-ում։

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Гельфанд, М. И. Грасев.* Функциональный анализ и его прил-я, т. 2, вып. 3 (1968). [2] *В. А. Нерсесян,* ДАН Арм. ССР, т. 70, № 3 (1980). [3] *Ю. Б. Ермолаев,* ДАН СССР, т. 132, № 2 (1960).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 517.522.6

МАТЕМАТИКА

Г. К. Оганесян

# Об одном свойстве функций класса $B_p$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 3/III 1980)

В настоящей работе доказана одна теорема об одном свойстве функций класса $B_p$. Для ее формулировки и доказательства мы напомним некоторые свойства пространств Безиковича ([1]). Функция $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ принадлежит классу $B_p$, $p\geqslant 1$, если $f(x)\in L_p(-T, T)$ для любого $T$ и если для всякого $\varepsilon>0$ найдется тригонометрический полином $P(x)=\sum_{\lambda\in Q} a_\lambda e^{i\lambda x}$ ($Q$—конечное подмножество действительной оси) такой, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)-P(x)|^p dx<\varepsilon.$$

Из определения следует, что если $f(x)\in B_p$ и $g(x)\in B_p$, то для любых комплексных чисел $\alpha$, $\beta$ и действительного $\lambda$ функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$, $e^{i\lambda x}$ также принадлежат $B_p$. Для любой функции из $B_p$ существует предел

$$\|f(x)\|_{B_p}\overset{\text{def}}{=}\overline{M}_p f(x)=\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Норма в $B_p$ определяется формулой (1). Положим $m_p=\{f(x)\in B_p, \overline{M}_p f(x)=0\}$. Тогда фактор-пространство $B_p/m_p$, которое мы обозначим также через $B_p$, есть банахово пространство. Для любых $f(x)$ и $g(x)\in B_2$ существует предел

$$(f, g)\overset{\text{def}}{=}M(f, \overline{g})=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cdot\overline{g}(x)dx. \tag{2}$$

Пространство $B_2$ становится гильбертовым (несепарабельным),

если определить скалярное произведение формулой (2). Пусть дана последовательность действительных, отличных друг от друга чисел $\lambda_n$ и пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}. \tag{3}$$

Система $\{e^{i\lambda_n t}\}_1^{\infty}$ ортонормальна в $B_2$.

По теореме Рисса — Фишера ряд (3) является рядом Фурье некоторой функции $f(t) \in B_2$ и

$$f(t) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}.$$

В работе Е. М. Никишина ([2]) доказана следующая теорема.

Теорема (Е. М. Никишин). *В $B_2$ найдется функция $\varphi(t)$ такая, что ряд* (3) *является ее рядом Фурье и для некоторого $p>0$*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{p|\varphi(t)|} dt < +\infty.$$

В настоящей работе доказано, что в $B_2$ существуют функции, для которых ряд (3) является их рядом Фурье и которые удовлетворяют другим ограничениям на рост. Точнее, имеет место следующее.

Теорема 1. *Пусть $A(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ положительная, стремящаяся к $+\infty$, монотонно возрастающая функция. Тогда в $B_2$ можно найти функцию $\varphi_A(t)$ такую, что ряд* (3) *является ее рядом Фурье и*

$$|\varphi_A(t)| \leq A(|t|) \quad \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

В работе доказано, что аналогичное утверждение справедливо для любой функции пространства $B_p$, $p \geq 1$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $A(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ — положительная, стремящаяся к $+\infty$, монотонно-возрастающая функция. Для любой функции $f(x) \in B_p$ существует функция $\varphi_A(t, f) \in B_p$, которая эквивалентна $f(t)$ по норме $B_p$ и*

$$|\varphi_A(t, f)| \leq A(|t|), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Доказательство теоремы 2. Так как $f(t) \in B_p$, то существует последовательность полиномов

$$P_j(t) = \sum_{k=1}^{k_j} a_k^{(k)} e^{i\lambda_k^{(k)} t},$$

так что $\lim_{j\to\infty}\|f(t)-P_j(t)\|_{B_p}=0$.

Мы будем считать, что $\|P_{j+1}(t)-P_j(t)\|_\infty\to 0$ при $j\to\infty$.

Убедимся в возможности такого подбора последовательности. Пусть $\{P_j(t)\}_1^\infty$ произвольная последовательность полиномов, стремящаяся к функции $f(t)$ по норме $B_p$. Определим последовательность $Q_j(t)$ следующим образом.

$$P_1(t),\ P_1(t)+\frac{P_2(t)-P_1(t)}{n_1},\ P_1(t)+2\,\frac{P_2(t)-P_1(t)}{n_1},\ldots,$$

$$P_1(t)+(n_1-1)\frac{P_2(t)-P_1(t)}{n_1},\ P_2(t),\ P_2(t)+\frac{P_3(t)-P_2(t)}{n_2},\ldots,$$

где $n_k>k\|P_{k+1}(t)-P_k(t)\|_\infty$ $(k=1,2,\ldots)$.

Разность двух соседних членов последовательности $Q_j(t)$ равна

$$|Q_{j+1}(t)-Q_j(t)|=\left|(s+1)\frac{P_{k+1}(t)-P_k(t)}{n_k}-s\,\frac{P_{k+1}(t)-P_k(t)}{n_k}\right|=$$

$$=\left|\frac{P_{k+1}(t)-P_k(t)}{n_k}\right|\leqslant\frac{1}{k}\quad(0\leqslant s\leqslant n_k-1).$$

Значит $\|Q_{j+1}(t)-Q_j(t)\|_\infty\to 0$ при $j\to\infty(k\to\infty)$. Имеем также

$$\|Q_j(t)-f(t)\|_{B_p}\leqslant\|P_k(t)-f(t)\|_{B_p}+\frac{s}{n_k}\|P_{k+1}(t)-P_k(t)\|_{B_p}\ (0\leqslant s<n_k).$$

Отсюда следует, что при $j\to\infty(k\to\infty)$ последовательность полиномов $Q_j(t)$ сходится к функции $f(t)$ по норме $B_p$.

Теперь построим по индукции возрастающую последовательность положительных чисел $T_j(j\geqslant 0)$ следующим образом. Существует число $T_0$ такое, что

$$A(T_0)>\|P_1(t)\|_\infty.$$

Предположим, что числа $T_0, T_1, \ldots, T_j$ построены. Определим функции $\psi_j(t)$ $(j\geqslant 1)$

$$\psi_j(t)=\begin{cases}P_j(t) \text{ при } t\in(T_{j-1},T_j]\cup[-T_j,-T_{j-1})\\ 0 \text{ при остальных } t\end{cases}$$

Через $T_{j+1}$ обозначим такое число, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $T_{j+1}\geqslant(j+1)T_j\sup\limits_{-T_j\leqslant t\leqslant T_j}\left|\sum\limits_{k=1}^{j}\psi_k(t)-P_{j+1}(t)\right|$;

2) когда $T>T_{j+1}$, то

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|P_{j+1}(t)-P_s(t)|^p dt-\|P_{j+1}(t)-P_s(t)\|_{B_p}\right|<\sup_t|P_j(t)-P_s(t)|_{B_p};$$

3) $A(T_{j+1}) \leqslant \|P_{j+1}\|_\infty$.

Функция $\psi_A(t, f)$ определяется следующим образом:

$$\psi_A(t, f) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t).$$

Этот ряд сходится при всех $t$, так как носители функций $\psi_j(t)$ не пересекаются.

Докажем, что $\psi_A(t, f)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Действительно, при $T \in [T_j, T_{j+1})$ и $s < j$ имеем

$$\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f)-P_s(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|P_j(t)-P_s(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \tag{4}$$

$$+\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f)-P_j(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначим соответственно $A_1$ и $A_2$ первое и второе слагаемые правой части неравенства (4). В силу свойства 2) последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ получим

$$A_1 = \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f)-P_j(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\sup_j \|P_j(t)-P_s(t)\|_{B_p},\ 1 \leqslant s < j). \tag{5}$$

В силу свойства 1) последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ получим

$$A_2 = \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f)-P_j(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{2T}\int_{-T_{j-1}}^{T_{j-1}}|\psi_A(t, f)-P_j(t)|^p dt + \right.$$

$$\left. + \frac{T-T_{j-1}}{T}\|P_{j+1}(t)-P_j(t)\|_\infty\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{T_{j-1}}{T_j}\sup_{-T_{j-1}\leqslant t\leqslant T_{j-1}}\left|\sum_{k=1}^{j-1}\psi_k(t)-P_j(t)\right|^p + \right.$$

$$\left. + \|P_{j+1}(t)-P_j(t)\|_\infty\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{j} + \|P_{j+1}(t)-P_j(t)\|_\infty\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует, что $A_2 \to 0$ при $T \to \infty (j \to \infty)$. Из неравенств (4), (5) и того, что $A_1 \to 0$ при $T \to \infty$ $(j \to \infty)$, имеем

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f)-P_s(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\sup_j \|P_j(t)-P_s(t)\|_{B_p}.$$

Следовательно,

$$\lim_{s\to\infty}\|\psi_A(t, f)-P_s(t)\|_{B_p} = 0.$$

Отсюда следует, что $f(t)$ и $\psi_A(t, f)$ эквивалентны по норме $B_p$. Наконец, в силу свойства 3) последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ получим

$|\varphi_A(t, f)| \leq A(|t|)$, $-\infty < t < +\infty$, и теорема 2 доказана. Доказательство теоремы 1 можно провести в полной аналогии с доказательством теоремы 2.

В этом случае функция $\varphi_A(t)$ и последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ определяются следующим образом:

1) $T_j \geq jT_{j-1}\left(\sum_{n=1}^{j} |a_n|^2\right)$;

2) когда $T > T_j$, то

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{n=s+1}^{j} a_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt - \sum_{n=s+1}^{j} |a_n|^2\right| < \sum_{n>j} |a_n|^2$$

при $1 \leq s < j$;

3) $$A(T_j) \geq \sum_{n=1}^{j} |a_n|$$

$$\varphi_A(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{j} a_n e^{i\lambda_n t}, & \text{при } t \in (T_{j-1}, T_j] \cup ET_j, -T_{j-1}) \\ 0, & \text{при } t \in ET_0, T_0]. \end{cases}$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю профессору Е. М. Никишину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

Գ. Կ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

## $B_p$ դասի ֆունկցիաների մի հատկության մասին

*Դիցուք $B_p (p \geq 1)$ Բեզիկովիչի տարածությունն է։ Տված է*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t} \tag{1}$$

*շարքը, որտեղ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$*

*Ինչպես Ֆիշերի թեորեմի համաձայն գոյություն ունի այնպիսի $f(t) \in B_2$ ֆունկցիա, որ*

$$f(t) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t},$$

*ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։*

*Թեորեմ 1. Դիցուք $A(t)$-ն $(0 \leq t < \infty)$ դրական, $+\infty$ աճող, մոնո-*

տոն անող ֆունկցիա է: Ապա $B_2$-ում գոյություն ունի այնպիսի $\psi_A(t)$ ֆունկցիա, որ (1) շարքը համարվում է նրա համար Ֆուրյեի շարք և

$$|\psi_A(t)| \leq A(|t|) \quad \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

*Ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքն է հետևյալ թեորեմը։*

*Թեորեմ 2.* Դիցուք $A(t)$-ն $(0 \leq t < +\infty)$ դրական, $+\infty$ ձգտող, մոնոտոն անող ֆունկցիա է: Այդ դեպքում ցանկացած $f(t) \in B_p$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\psi_A(t, f)$ ֆունկցիա, որն էկվիվալենտ է $f(t)$-ին $B_p$ նորմայով և

$$|\psi_A(t, f)| \leq A(|t|), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. Besicovitch*, Almost periodic functions. Cambridge, 1932. [2] *Е. М. Никитин*, Матем. сб., т. 96 (138), № 1 (1975).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

П. З. Мартычян

# О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 22/III 1980)

В работе ([1]) были доказаны теоремы существования обобщенных решений первой краевой задачи для вырождающихся уравнений эллиптического типа, характер вырождения которых определяется некоторой матрицей.

В настоящей заметке приведены (без доказательств) теоремы о суммируемости, ограниченности, непрерывности по Гёльдеру, а также о неравенстве Гарнака для таких решений.

Теоремы доказаны методами, предложенными Ю. Мозером (см. ([2,3])) и развитыми впоследствии в работах Д. Серрина ([4]), Н. Трудингера ([5]), С. Н. Кружкова ([6]), А. В. Иванова (для параболических уравнений) ([7,8]), И. М. Колодия ([9-11]) и др.

В невырожденном случае аналогичные вопросы рассматривались в работах О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой (см. ([12])).

Наиболее близкие к данной работе результаты получены в работах ([9-11]).

1°. Пусть $\Omega$ —ограниченная область в $R^n$ с кусочно-гладкой границей. Обозначим через $W^1_m(A, \Omega)$ ($W'^1_m(A, \Omega)$) линеал функций $u$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$ ($W'^1_1(\Omega)$), для которых конечна норма

$$\|u\|_0 = \sum_{(i)}^{n} \|A_i u_x\|_{m_i,\Omega} \quad (\|u\| = \|u\|_0 + \|u\|_{1,\Omega})^*,$$

где $m_i > 1$, $A_i u_x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_j}$, $i = 1, \ldots, n$; $\|a_{ij}\| = A$ — некоторая матрица, такая, что

$$a_{ij} \in L_{s_i}(\Omega), \; s_i \geq m_i, \; i, j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

и, кроме того, для почти всех (п. в.) $x \in \Omega$ существует матрица $\|b_{ij}\| = B = A^{-1}$, причем

* Здесь и всюду ниже $\|\cdot\|_{\sigma,\Omega} \equiv \|\cdot\|_{L_\sigma(\Omega)}$ для любого $\sigma > 0$.

$$b_{ij}\in L_{r_{ij}}(\Omega),\ r_{ij}\geqslant 1,\ i,\ j=1,\ldots,n. \tag{2}$$

Совершенно так же, как и в работе ([8]) (стр. 302, 303), можно показать, что $\overset{\circ}{W}{}^1_{\overline{m}}(A,\Omega)$ и $W^1_{\overline{m}}(A,\Omega)$ — рефлексивные банаховы пространства.

Лемма 1. *Пусть*

$$1/\beta_i=\max_j(1/m_j+1/r_{ij})\leqslant 1,\ i=1,\ldots,n, \tag{3}$$

$$1/l=(1/n)\left(\sum_{i=1}^{n}1/\beta_i-1\right)>0. \tag{4}$$

*Тогда для любых функций* $v\in\overset{\circ}{W}{}^1_{\overline{m}}(A,\Omega)$, $u\in W^1_{\overline{m}}(A,\Omega)$ *справедливы неравенства*

$$\|v\|_{l,\Omega}\leqslant c_1\sum_{i=1}^{n}\|v_{x_i}\|_{\beta_i,\Omega}\leqslant c_2\|v\|_{0},$$

$$\|u\|_{l,\Omega}\leqslant c_3\left(\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{\beta_i,\Omega}+\|u\|_{1,\Omega}\right)\leqslant c_4\|u\|,$$

*где* $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4=\mathrm{const}>0$.

Рассмотрим в области $\Omega$ уравнение

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}L_i(x,u,u_x)+L_0(x,u,u_x)=0, \tag{5}$$

где $u_x=(u_{x_1},\ldots,u_{x_n})$, *обобщенным решением* которого назовем функцию $u\in W^1_{\overline{m}}(A,\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega}\left|\sum_{i=1}^{n}L_i(x,u,u_x)\eta_{x_i}+L_0(x,u,u_x)\eta\right|dx=0, \tag{6}$$

выполняющемуся для любой функции $\eta\in\overset{\circ}{W}{}^1_{\overline{m}}(A,\Omega)$.

Относительно функций $L_i(x,u,p)$, $i=0,1,\ldots,n$ предполагаются выполненными для *п. в.* $x\in\Omega$ и произвольных $u\in R$, $p=(p_1,\ldots,p_n)\in R^n$ неравенства

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}L_i(x,u,p)p_i\geqslant d_1\sum_{i=1}^{n}|A_ip|^{m_i}-g_1(x)|u|^{k}-f_1(x)\\
&|B_i^{\circ}L(x,u,p)|\leqslant d_2\sum_{j=1}^{n}|A_jp|^{m_j(m_i-1)/m_i}+e_i(x)|u|^{k-1}+h_i(x),\ i=1,\ldots,n\\
&|L_0(x,u,p)|\leqslant d_3(x)\sum_{j=1}^{n}|A_jp|^{m_j(k-1)/k}+g_2(x)|u|^{k-1}+f_2(x)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $d_1,\ d_2=\mathrm{const}>0$, $B_i^{\circ}L=\sum_{j=1}^{n}b_{ji}L_j$; $d_3,\ f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2,\ e_i,\ h_i>0$,

$$d_3^{\alpha},\ f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2,\ e_i^{\alpha/(\alpha-1)},\ h_i^{\alpha/(\alpha-1)}\in L_{\alpha}(\Omega), \tag{8}$$

$\alpha = \min_i (s_i/m_i)$, причем будем предполагать, что

$$m_i/s_i + k/l < 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где $k = \max\{\delta, m_1, \ldots, m_n\}$, а $l$ определяется соотношением (4).

Из условий (7) и леммы 1 вытекает конечность интеграла в левой части тождества (6).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3), (4), (7)—(9). *Тогда обобщенное решение* $u(x)$ *уравнения* (5) *суммируемо с любой степенью* $q > 0$ *в шаре* $K_R$ *радиуса* $R$ *таком, что концентрический с ним шар* $K_{2R}$ *содержится в* $\Omega$, *причем имеет место оценка*

$$\|u\|_{q, K_R} \leqslant [c_1(\|u\|_{\gamma, K_{2R}})^{\theta} + c_2]^{\varkappa(\nu)},$$

*где* $\gamma = k\alpha'$, $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$, $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1)$,

$$\theta = k(l - M\alpha')M^{-1}(l - k\alpha')^{-1},$$

$$\varkappa(\nu) = (M/m)^{\nu}[1 + lM^{-1}(k - M)(l - k\alpha')^{-1}(l/\alpha' M)^{-\nu}]^{-1},$$

$\nu$ — *такое целое число, что*

$$\alpha' k\theta^{-1}(l/\alpha' M)^{\nu} + (k - M)(l - M\alpha')^{-1} l\alpha' \geqslant q,$$

$$M = \max_i m_i, \quad m = \min_i m_i.$$

*Если* $M = m$, *то имеет место оценка*

$$\operatorname{vrai\,max}_{x \in K_R} |u| \leqslant c_1(\|u\|_{\gamma, K_{2R}})^{\theta} + c_2. \tag{10}$$

2°. Пусть теперь матрица $A$ 0 диагональна: $a_{ii} = a_i \in L_{r_i}(\Omega)$, $s_i \geqslant m_i$, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Очевидно, что матрица $B$ при этом будет также диагональной и $b_{ii} = a_i^{-1}$, $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Положим $r_{ii} = r_i$, тогда $a_i^{-1} \in L_{r_i}(\Omega)$. Заметим, что в условиях (7) теперь $A_i p = a_i p_i$, $B_i^* \bar{L} = a_i^{-1} L_i$.

Пусть теперь показатели $\beta_i$ и $l$ определены соотношениями

$$1/\beta_i = 1/m_i + 1/r_i, \quad 1/l = (1/n)\left(\sum_{i=1}^{n} 1/\beta_i - 1\right) \tag{11}$$

и удовлетворяют условиям

$$1/\beta_i < 1, \quad 1/l > 0. \tag{12}$$

При диагональной матрице $A$ утверждение леммы 1 справедливо при показателях $\beta_i$ и $l$, определенных соотношениями (11) и удовлетворяющих условиям (12).

Теорема 2. *Пусть выполнены: условия* (7) *с диагональной матрицей* $A$, *условия* (8), *а также условия* (9), *в которых показатель* $l$ *определяется соотношениями* (11) *и удовлетворяет условиям* (12). *Тогда для обобщенного решения* $u(x)$ *уравнения* (5) *выполняется оценка* (10), *где показатель* $\gamma$ *и шары* $K_R$ *и* $K_{2R}$ *та-*

*кие же, как в теореме* 1, $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$, $\eta = k(l - \tau'\bar{m})\bar{m}^{-1}(l - k\tau')^{-1}$, *где* $\bar{m} = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/m_i\right)^{-1}$.

3°. Пусть матрица $A$ вновь произвольна.

Положим $s = \min_i s_i$, $r_i = \min_j r_{ij}$, $m = \min_i m_i$, $\tau = s/m$, $\iota = m - n/\tau - m\sum_{i=1}^{n} 1/r_i$,

$$H(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n} (\rho^{-n/r_i} b_{ij}^2 / r_i, K_\rho)^m \sum_{i,j=1}^{n} (\rho^{-n/s} a_{ij}^2 / s, K_\rho)^m,$$

$$\varkappa(\rho) = (\rho^{\iota} \| f_1^+ \|_{K_\rho})^{1/m} + (\rho^{\iota} \| f_2^+ \|_{K_\rho})^{1/(m-1)} + \left(\rho^{\iota} \sum_{i=1}^{n} \| h_i^{m/(m-1)} \|_{K_\rho}\right)^{1/m}.$$

Теорема 3 (неравенство Гарнака). *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *причем в неравенствах* (7) $m_i = \delta = m$, *кроме того,* $1/r_i - 1/r_j \leq 1/n$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$. *Пусть* $u(x)$ — *неотрицательное обобщенное решение уравнения* (5) *в шаре* $K_{6R} \subset \Omega$ *и* $H(\rho) \leq \varkappa_1 = \mathrm{const} > 0$ *для любого* $\rho \in (0, 5R)$. *Тогда* $\operatorname{vraimax}_{x \in K_R} u \leq C(\operatorname{vraimin}_{x \in K_R} u + \varkappa(5R))$, $c = c(n, m, s, r_i, d_1, d_2, \varkappa_1) > 0$.

Из теоремы 3 как следствие (см., например, [4], [7]) вытекает

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *причем в неравенствах* (7) $m_i = \delta = m$, *кроме того,* $1/r_i - 1/r_j \leq 1/n$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$. *Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение уравнения* (5) *в шаре* $K_R \subset \Omega$ *и* $H(\rho) \leq \varkappa_1 = \mathrm{const} > 0$ *для всех* $\rho \in (0, R]$. *Тогда существуют* $\gamma \in (0, 1)$ *и* $c > 0$, *зависящие только от* $n, m, s, r_i, d_1, d_2, \varkappa_1$, *такие, что для всех* $\rho \in (0, R)$ $\operatorname{osc}(u, K_\rho) \leq c(\rho/R)^\gamma$.

Автор выражает благодарность О. А. Ладыженской и А. В. Иванову за постановку задачи, внимание и существенную помощь в процессе работы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

## Երկրորդ կարգի վերածվող քվազիգծային էլիպտիկ հավասարումների ընդհանրացված լուծումների որոշ հատկությունների մասին

*Հոդվածում դիտարկվում է n-չափանի էվկլիդյան տարածության Ω տիրույթում երկրորդ կարգի քվազիգծային էլիպտիկ հավասարում, որի վերածումը բնութագրվում է որոշակի մատրիցով։ Վերածումը բնութագրող մատրիցը, որի էլեմենտները հանդիսանում են x-ից (x∈Ω) կախված հանրագումարելի ֆունկցիաներ, ենթադրվում է շրջելի համարյա ամենուրեք Ω տիրույթում (այսպես կոչված թույլ վերածում)։*

*Տրված է հավասարման ընդհանրացված լուծումների սահմանումը։ Բեր-*

*ված են թեորեմներ ընդհանրացված լուծումների հանրագումարելիության, սահմանափակության, ըստ Հյոլդերի անընդհատության, ինչպես նաև Հարնակի անհավասարությանը բավարարելու մասին։*

*Թեորեմները ապացուցված են ինտերացիաների մեթոդով, որը առաջարկվել է Յ. Մոզերի կողմից և զարգացվել է հետագայում Ջ. Սերրինի, Ն. Թրուդինգերի, Ս. Ն. Կրուժկովի, Ա. Վ. Իվանովի, Ի. Մ. Կոլոդիի և այլ հեղինակների աշխատանքներում։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


[1] *А. В. Иванов, П. З. Мкртычян*, Труды МИАН, т. 147 (1980). [2] *J. Moser*, Comm. Pure, Appl. Math., vol. 14, № 3 (1961). [3] *J. Moser*, Comm. Pure, Appl. Math., vol. 14, № 3 (1961). [4] *J. Serrin*, Acta Math., vol. 111, № 3—4 (1964). [5] *N. Trudinger*, Ann. Scuola norm. super., Pisa, vol., 27, № 11 (1973). [6] *С. Н. Кружков*, Мат. сб., т. 77, № 3 (1968). [7] *А. В. Иванов*, Труды МИАН, т. 102, вып. 5 (1967). [8] *А. В. Иванов*, Труды МИАН, т. 116, вып. 7 (1971). [9] *И. М. Колодий*, Вестн. МГУ, № 5, 1970. [10] *И. М. Колодий*, ДАН СССР, т. 197, № 2 (1971). [11] *И. М. Колодий*, «Украинский мат. журн.», т. 27, № 3 (1975). [12] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», М., 1973. [13] *Лу Вень-Туан*, Вестн. ЛГУ, № 7, 1961. [14] *Ю. А. Дубинский*, Мат. сб., т. 64, № 3 (1964).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 519.212.3

МАТЕМАТИКА

Г. С. Сукиасян

# О процессах хорд на прямых, пересекающих случайные поля кругов на плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 31/III 1980)

В настоящей заметке рассматриваются случайные процессы интервалов на прямой. Эти процессы возникают на прямых, пересекающих однородные и изотропные поля кругов постоянного радиуса; интервалы представляют собой хорды, по которым прямая пересекается с кругами поля. Случайное поле $M$ кругов постоянного радиуса полностью описывается точечным полем центров кругов. Поле центров предполагается однородным и изотропным, т. е. его распределение $P$ инвариантно относительно группы евклидовых движений плоскости.

В основе работы лежит методика, предложенная Р. В. Амбарцумяном в ([1]). Аналогичными методами в ([2]) исследовались однородные и изотропные поля отрезков на плоскости.

В работе изучается случайная величина $\eta(x)$, равная числу интервалов (хорд), целиком лежащих внутри отрезка $x$. Распределение $P_n(x)=P(\eta(x)=n)$, $n=0, 1, 2\ldots$ не зависит от расположения отрезка на плоскости. Помимо свойств однородности и изотропности на вероятность $P$ накладывается условие локальной абсолютной непрерывности относительно стандартного пуассоновского поля.

Основным результатом работы (теорема 1) является уравнение, связывающее распределение $P_n(x)$ с некоторыми условными распределениями случайной величины $\eta(x)$ и напоминающее известную формулу Пальма ([3]). Из теоремы 1 следует одно достаточное условие того, чтобы распределение $P_n(x)$ было пуассоновским.

Рассмотрим реализацию $m$ поля $M$ кругов на плоскости. Обозначим через $N$ число кругов из $m$, границы которых пересекают круг $K_x$, построенный на отрезке $x$ как на диаметре. Ниже всегда предполагается, что $EN^2<\infty$, где $E$ — знак математического ожидания относительно $P$. В силу сделанных предположений существуют следующие условные вероятности.

$\Pi_n^l(x, z)$ есть условная вероятность события $\{\eta(x)=n\}$ при ус-

ловии, что один из кругов реализации $m$ касается отрезка $x$ в точке, удаленной от конца отрезка на расстояние $z$.

$\Pi^{\pi}_{n}(x)$ есть условная вероятность события $\{\eta(x)=n\}$ при условии, что один круг из $m$ проходит через оба конца отрезка $x$.

$\Pi^{I}_{n}(x, z_1, z_2, i)$ есть вероятность события $\{\eta(x)=n\}$ при условии, что два круга из $m$ касаются отрезка $x$ в точках с координатами $z_1$ и $z_2$ и лежат в одной $(i=1)$ или в разных $(i=2)$ полуплоскостях относительно прямой $g(x)$. Прямая $g(x)$ есть продолжение отрезка $x$.

$\Pi^{\pi}_{n}(x, z, \alpha, i)$ есть условная вероятность события $\{\eta(x)=n\}$ при условии, что один круг из $m$ касается отрезка $x$ в точке $z$, а граница другого проходит через конец отрезка $x$ под углом $\alpha$. Центры кругов лежат в одной $(i=1)$ или в разных $(i=2)$ полуплоскостях относительно прямой $g(x)$.

$\Pi^{\pi}_{n}(x, \alpha_1, \alpha_2, i)$ есть условная вероятность события $\{\eta(x)=n\}$ при условии, что границы двух кругов из $m$ проходят через разные концы отрезка $x$, образуя с $g(x)$ углы $\alpha_1$ и $\alpha_2$, а их центры лежат в одной $(i=1)$ или в разных $(i=2)$ полуплоскостях относительно прямой $g(x)$.

Обозначим через $f_2$ плотность распределения пары кругов, задевающих круг $K_x$. Рассмотрим следующие суммы:

$$e^{I}_{n}(x, z_1, z_2)=\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i} f_2 \Pi^{I}_{n}(x, z_1, z_2, i);$$

$$e^{\pi}_{n}(x, z, \alpha)=\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i} f_2 \Pi^{\pi}_{n}(x, z, \alpha, i);$$

$$e^{\pi}_{n}(x, \alpha_1, \alpha_2)=\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i} f_2 \Pi^{\pi}_{n}(x, \alpha_1, \alpha_2, i).$$

Введем следующие обозначения: $\lambda$—интенсивность поля $M$; $\Delta\pi_n$—разность $\Pi_n-\pi_{n-1}$; $\Delta^2 e_n$—вторая разность $e_n-2e_{n-1}+e_{n-2}$; $l(2a>x)$—индикатор, равный единице, если $2a>x$, и нулю— в противном случае. Через $\varphi$ обозначим следующий угол:

$$\varphi=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{2a}, & \text{если } x<2a,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x\geqslant 2a.\end{cases}$$

Имеет место следующее утверждение (ниже отрезки и их длины обозначаются одинаково).

Теорема 1. *Пусть $P$ есть распределение однородного изотропного локально абсолютно непрерывного случайного поля $M$ кругов радиуса $a$ и пусть $EN^2<\infty$. Для любого отрезка $x$ и любого целого $n$ имеет место следующее уравнение:*

$$x\frac{dP_n(x)}{dx} = -2\nu a\int_0^x \Delta\pi_n^T(x, z)dz +$$

$$+\frac{1}{2}E[N(N-1)]\int_0^x dz_2\int_0^{z_2} dz_1(z_1-z_2)^2\Delta^2 e_n^T(x, z_1, z_2) -$$

$$-aE[N(N-1)]\int_0^x z^2dz\int_0^{\pi}\cos\alpha\Delta^2 e_n^r(x, z, \alpha)d\alpha + \qquad (1)$$

$$+\frac{1}{2}E[N(N-1)]a^2x^2\int_0^{\pi}d\alpha_1\int_0^{\pi}d\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\Delta^2 e_n^{\pi}(x, \alpha_1, \alpha_2) +$$

$$+\chi(2a>x)\sqrt{4a^2-x^2}\,\Delta\pi_n^{\pi}(x).$$

Укажем некоторые случаи, когда равенство (1) принимает особенно простой вид. Обозначим через $L_1(x)$ множество кругов, касающихся отрезка $x$, через $L_2(x)$ — множество кругов, границы которых проходят через один из концов отрезка $x$. Через $K^*$ обозначим круг, симметричный кругу $K$ относительно прямой $g(x)$. Будем говорить, что распределение $P$ обладает свойством $(\bullet)$—независимости, если для любой пары кругов $K_1, K_2 \in L_1(x)\cup L_2(x)$ имеет место

$$f_2(K_1, K_2)\cdot\Pi_n(x, K_1, K_2) = f_2(K_1, K_2^*)\cdot\Pi_n(x, K_1, K_2^*),\quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\Pi_n(x, K_1, K_2)$ есть условная вероятность события $\{\eta(x) = n\}$ при условии, что два случайных круга реализуются как $K_1$ и $K_2$.

Укажем одно достаточное условие $(\bullet)$—независимости. Рассмотрим направленную прямую $g$; поле $M$ порождает на $g$ маркированный точечный процесс $\{Y_i, \varepsilon_i\}$, $i = \ldots -1, 0, 1, \ldots$, где $Y_i$ — проекция на $g$ центра круга $K_i$, пересекаемого прямой $g$; $\varepsilon_i$—снабженное знаком расстояние от центра круга $K_i$ до прямой $g$, причем $\varepsilon_i < 0$, если центр круга $K_i$ лежит в левой полуплоскости относительно прямой $g$.

Лемма. *Для того, чтобы распределение $P$ обладало свойством $(\bullet)$—независимости, достаточно, чтобы знаки марок $\varepsilon_i$ процесса $\{Y_i, \varepsilon_i\}$ были независимыми.*

В случае наличия $(\bullet)$—независимости функции $e_n(x, \ldots)$ тождественно равны нулю, что на основании теоремы 1 приводит к следующим утверждениям.

Следствие 1. *Пусть поле $M$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Если распределение $P$ обладает свойством $(\bullet)$—независимости, то для любого отрезка $x$ и любого целого $n$ имеет место равенство*

$$x\frac{dP_n(x)}{dx}=-2\nu a\int_0^x \Delta\pi_n^T(x,z)dz+$$

$$+\nu x I(a>x)\sqrt{4a^2-x^2}\,\Delta\pi_n^{=}(x).$$

Следствие 2. *Пусть обладающее свойством* (•)—*независимости распределение* $P$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Для того, чтобы распределение* $P_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ *было пуассоновским* $P_n(x)=\frac{S^n}{n!}e^{-s}$, *достаточно, чтобы условные вероятности* $\pi_n^{=}(x)$ *и* $\pi_n^T(x,z)$, $z\in[0,x)$ *совпадали с безусловной вероятностью* $P_n(x)$. *Параметр* $S$ *имеет вид*

$$S=4\nu\left(a\frac{x}{2}-\int_0^{\tau}\sqrt{a^2-t^2}\,dt\right),$$

где

$$\tau=\begin{cases}\frac{x}{2}, & \text{если } 2a>x,\\ a, & \text{если } 2a\leqslant x.\end{cases}$$

Всесоюзный научно-исследовательский
институт комплексного электрооборудования

Հ. Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

## Շրջանների պատահական դաշտեր հատող ուղիղների վրա առաջացող լարերի պրոցեսների մասին

*Հարթության վրա դիտարկվում են հաստատուն շառավիղով շրջանների համասեռ և իզոտրոպ պատահական դաշտերը։ Այդ դաշտերը հատող ուղիղների վրա առաջանում են լարերի պատահական պրոցեսներ։ Ուսումնասիրվում է այն լարերի քանակը* $\eta(x)$ *որոնք ամբողջովին ընկած են* $x$ *հատվածի մեջ։ Աշխատանքի հիմնական արդյունքն է հանդիսանում* $\eta(x)$ *պատահական մեծության բաշխումը նույն մեծության որոշ պայմանական բաշխումների հետ կապող հավասարումը։ Ստացված է* $\eta(x)$ *մեծության բաշխումը Պուասոնյան լինելու մի բավարար պայման։*

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. V. Ambartzumian.* Adv. Appl. Prob., vol. 9 (1977). [2] *В. К. Оганян,* ДАН Арм. ССР, т. 68, №3 (1979). [3] *А. Я. Хинчин.* Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 49, Изд-во АН СССР, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXX 1980 5

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

П. Т. Хостикян

# О явных выражениях для распределения времени ожидания в двух приоритетных системах $\vec{M}_r|G|1|\infty$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 9/IV 1980)

1°. Хотя к настоящему времени приоритетные системы типа $\vec{M}_r|G|1|\infty$ достаточно полно изучены, но явные выражения для функций распределения (ф. р.) основных характеристик получены лишь для периодов занятости систем $\vec{M}_r|G|1|\infty$ с относительным и абсолютным приоритетами ([1,2]).

Ю. В. Малинковский ([3]) предложил способ вычисления стационарной ф. р. времени ожидания, представляемого в виде сходящегося ряда, в системе $\vec{M}_r|M|1|\infty$ с относительным приоритетом при дисциплине *FIFO*, принятой для вызовов внутри каждого приоритетного класса.

Цель настоящего сообщения заключается в изложении очень простых соображений, приводящих к нахождению в виде сходящегося ряда ф. р. стационарного времени ожидания в системах $\vec{M}_r|G|1|\infty$ с относительным (схема А) и абсолютным с дообслуживанием прерванного вызова (схема BI) приоритетами при дисциплинах *FIFO* и *LIFO*, принятых для вызовов каждого приоритетного класса. В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают $r$ независимых пуассоновских потоков 1-вызовов, ..., $r$-вызовов с интенсивностями $a_1>0$, $a_2>0$, ..., $a_r>0$. Длительности обслуживания всех вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и имеют ф. р. $B(t)$, $B(+0)=0$.

Рассматриваются схемы А и BI. Внутри каждого потока приняты либо дисциплина *FIFO*—„первым пришел—первым обслужен", либо дисциплина *LIFO*—„последним пришел—первым обслужен".

Обозначим $(k=\overline{1,r})$

$$\alpha_k = a_1 + \ldots + a_k,\ \alpha_0 = 0,\ \beta_1 = \int_0^\infty t\,dB(t),\ \rho_{k1} = \alpha_k\beta_1 -$$

загрузка системы 1-вызовами, ..., $k$-вызовами, $\rho_k = 1-\rho_{k1}$,

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st}dB(t),\ (s \geqslant 0).$$

Пусть $C_k(t)$ — ф. р. периода занятости системы $M_r|G|1|\infty$ с интенсивностью $\alpha_k$ поступлений и с ф. р. $B(t)$ длительностей обслуживания. Тогда преобразование Лапласа — Стильтьеса (п. Л. — С.) $c_k(s)$ от ф. р. $C_k(t)$ служит решением функционального уравнения

$$c_k(s) = \beta(s + a - ac_k(s)). \tag{1}$$

Ф. р. $C_k(t)$ соответствует периоду занятости, инициированному одним вызовом. Период занятости, инициированный $n$ штук вызовами, имеет ф. р. $C_k^{n*}(t)$, где $C_k^{n*}(t)$ есть $n$-кратная свертка $C_k(t)$ с собой, и на основе ([4]) представима в виде сходящегося ряда:

$$d_tC_k^{n*}(t) = e^{-\alpha_k t}\sum_{m \geqslant n} \frac{n}{m}\frac{(\alpha_k t)^{m-n}}{(m-n)!} \cdot d_tB^{m*}(t). \tag{2}$$

Известно, что для дисциплины $FIFO$ при $\rho_{k1} < 1$ и для дисциплины $LIFO$ при $\rho_{k1} \leqslant 1$ существует стационарная ф. р. $W_k(t)$ времени ожидания $k$-вызова ($k = 1, r$), которая выписывается в п. Л. — С. ([5])

$$w_k(s) = \int_0^\infty e^{-st}dW_k(t) \quad (s \geqslant 0).$$

Напоследок заметим, что условия $\rho_{k1} < 1 (= 1)$ и $-a_kc'_{k-1}(0) < 1$ эквивалентны, в чем просто убедиться на основе уравнения (1).

Без ограничения общности полагаем $a_k = 1$.

2°. Схема BI ($FIFO$)

$$w_k(s) = \frac{\rho_k(s + \alpha_{k-1} - \alpha_{k-1}c_{k-1}(s))}{s - 1 + c_{k-1}(s)} = \frac{\rho_k + \rho_k\alpha_{k-1}\dfrac{1 - c_{k-1}(s)}{s}}{1 + c'_{k-1}(0)\dfrac{1 - c_{k-1}(s)}{-sc'_{k-1}(0)}}. \tag{3}$$

Функция $(-sc'_{k-1}(0))^{-1}\{1 - c_{k-1}(s)\}$ представляет собой п. Л. — С. от ф. р.

$$\frac{1}{-c'_{k-1}(0)}\int_0^\infty |1 - C_{k-1}(u)|du,$$

следовательно, не превосходит единицы. Тогда в силу существования стационарного распределения $-c'_{k-1}(0) < 1$ второе слагаемое знамена-

теля правой части (3) строго меньше единицы при $s>0$ и справедливо разложение (использовали ([6]), стр. 19)

$$\omega_k(s)=\left\{\rho_k+\rho_k\sigma_{k-1}\frac{1-c_{k-1}(s)}{s}\right\}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1-c_{k-1}(s)}{s}\right)^n=\rho_k+$$

$$+\rho_k\sigma_k\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-c_{k-1}(s)}{s}\right)^n=\rho_k+\rho_k\sigma_k\sum_{n\geq 1}s^{-n}\sum_{m=0}^{n}C_n^m(-1)^m c_{k-1}^m(s)=$$

$$=\rho_k+\rho_k\sigma_k\sum_{n\geq 1}s^{-n}+\rho_k\sigma_k\sum_{m\geq 1}(-1)^m c_{k-1}^m(s)\sum_{n\geq m}c_n^m s^{-n}=$$

$$=\rho_k+\rho_k\sigma_k\frac{1}{s-1}+\rho_k\sigma_k\sum_{m\geq 1}(-1)^m c_{k-1}^m(s)\frac{s}{(s-1)^{m+1}}$$

Итак, п. Л. — С. $\omega_k(s)$ от плотности $p_k(t)$ ф. р. $W'_k(t)$ имеет вид

$$\omega_k(s)=\rho_k\sigma_k\left\{\sum_{m\geq 0}(-1)^m c_{k-1}^m(s)\frac{1}{(s-1)^{m+1}}+\sum_{m\geq 1}(-1)^m c_{k-1}^m(s)\frac{1}{(s-1)^m}\right\}+\rho_k \tag{4}$$

Обозначим

$$A_{k-1}(t)=\sum_{m\geq 0}(-1)^m(C_{k-1}^{m*}(t))\cdot\frac{t^m}{m!}e^t+\sum_{m\geq 1}(-1)^m(C_{k-1}^{m*}(t))'\cdot\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^t.$$

Используя формулу (4) и формулу (21. 162) из ([6]), выводим следующее утверждение.

Теорема 1. *Для системы* $\ddot{M}_r|(i)|1|\infty$ *в случае схемы BI при дисциплине FIFO и* $\rho_{k1}<1$ *стационарное время ожидания k-вызова имеет плотность*

$$p_k(t)=\rho_k\sigma_k A_{k-1}(t)+\rho_k\chi_t(0), \tag{5}$$

*где*

$$\chi_t(0)=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\neq 0.\end{cases}$$

Используя формулу (5) и формулу (3. 383) из ([6]), получаем

Следствие 1. В условиях теоремы 1 в частном случае

$$B'(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-t},\ \alpha>0, \tag{6}$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция, плотность $p_k(t)$ принимает вид

$$p_k(t)=\rho_k\sigma_k e^t\sum_{m\geq 0}(-1)^m(T_{k-1}^1(m,t)+T_{k-1}^2(m,t))+\rho_k\chi_t(0),$$

где

$$T_{k-1}^1(m,t)=\sum_{l\geq m}\frac{\sigma_{k-1}^{l-m}}{l!(l-m)!(m-1)!\Gamma(l\alpha)}\cdot B(m+1,l(\alpha+1)-m)t^{l(\alpha+1)}\times$$

$$\times{}_1F_1(l(\alpha+1)-m,\ l(\alpha+1)+1,-(\sigma_{k-1}+2)t). \tag{7}$$

$$T^2_{k-1}(m, t) = \sum_{l \geq m} \frac{m s_{k-1}^{l-m}}{l(l-m)!\Gamma(l\alpha)(m-1)!} B(m, l(\alpha+1)-m) t^{l(\alpha+1)-1} \times$$

$$\times {}_1F_1(l(\alpha+1)-m, l(\alpha+1), -(s_{k-1}+2)t). \tag{8}$$

$${}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+k-1).$$

$B(x, y)$ — бета-функция.

3°. Аналогично доказательству теоремы 1 на основе формул для $\omega_k(s)$ в случае схем A и BI при дисциплинах *FIFO* и *LIFO* устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 2. *Для системы* $\bar{M}_r|G|1|\infty$ *в случае схемы BI, при дисциплине LIFO и* $\rho_{k1}<1$ *стационарное время ожидания k-вызова имеет плотность*

$$p_k(t) = \rho_{k-1}\sigma_{k-1}\bar{A}_k(t) + \rho_{k-1}\psi_t(0), \tag{9}$$

*где*

$$\bar{A}_k(t) = \sum_{m \geq 0} (C_k^m(t))' \cdot \frac{t^m}{m!} e^{-t} - \sum_{m \geq 1} (C_k^m(t))' \cdot \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-t}$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2 в частном случае (6) плотность $p_k(t)$ (9) принимает вид

$$p_k(t) = \rho_{k-1}\sigma_{k-1}e^{-t} \sum_{m \geq 0} (T_k^1(m, t) + T_k^2(m, t)) + \rho_{k-1}\psi_t(0).$$

Теорема 3. *Для системы* $\bar{M}_r|G|1|\infty$ *в случае схемы A при дисциплине FIFO и* $\rho_{k1}<1$ *стационарное время ожидания k-вызова имеет плотность*

$$p_k(t) = (D_{k-1}-1)A_{k-1}(t) + |\rho_r|^+\psi_t(0), \tag{10}$$

*где*

$$D_{k-1} = \frac{1-(\beta_1\sigma_{k-1})^2}{\beta_1} - \sigma_{k-1}\beta_1$$

$$|\rho_r|^+ = \max(0, \rho_r).$$

Следствие 3. В условиях теоремы 3 в частном случае (6) плотность $p_k(t)$ (10) принимает вид

$$p_k(t) = (D_{k-1}-1)e^t \sum_{m \geq 0} (-1)^m (T_{k-1}^1(m, t) + T_{k-1}^2(m, t)) + |\rho_r|^+\psi_t(0).$$

Теорема 4. *Для системы* $\bar{M}_r|G|1|\infty$ *в случае схемы A при дисциплине LIFO и* $\rho_{k1}<1$ *стационарное время ожидания k-вызова имеет плотность*

$$p_k(t) = (2|\rho_r|^+ - D_{k-1} - 1)\bar{A}_k(t) + |\rho_r|^+\psi_t(0). \tag{11}$$

Следствие 4. В условиях теоремы 4 в частном случае (6) плотность $p_k(t)$ (11) принимает вид

$$p_k(t) = (2|\varphi_r|^{+} - D_{k-1} - 1)e^{-t} \sum_{m=1}^{\infty} (T_k^1(m, t) + T_k^2(m, t)) + |\varphi_r|^{+} \varepsilon_t(0).$$

Приношу благодарность Э. А. Даниеляну за постановки задач и ценные указания.

Ереванский институт
народного хозяйства

Գ. Տ. ԽՈՍՏԻԿՅԱՆ

## Երկու $\vec{M}_r|G|1|\infty$ տիպի նախապատվությամբ համակարգերում սպասման ժամանակի բաշխման բացահայտ արտահայտությունների մասին

*Դիտարկվում են $\vec{M}_r|G|1|\infty$ տիպի դանդաղաձգին սպասարկման համակարգեր հարաբերական և բացարձակ նախապատվությամբ սպասարկման դիսցիպլինների դեպքում։*

*Ամեն մի հոսքի ներսում (հոսքերի քանակը հավասար է $r$-ի) պահանջները սպասարկվում են համաձայն, «առաջինը եկավ՝ առաջինը սպասարկվեց» կամ «վերջինը եկավ՝ առաջինը սպասարկվեց» դիսցիպլինների։*

*$i$-րդ ($i = \overline{1, r}$) հոսքի պահանջները կոչվում են $i$-պահանջներ։*

*Աշխատանքում գուդամիտոդ շարքի տեսքով բոլոր դիտարկվող դեպքերի համար ստացված է $i$-պահանջի ($i = \overline{1, r}$) ստացիոնար սպասման ժամանակի բաշխման իստությունը։ Այն մասնավոր, բայց կարևոր դեպքում, երբ սպասարկման ժամանակները ունեն $L$—բաշխում, ստացված արտահայտություններում սպասման ժամանակի իստության դեպքում հնարավոր է լինում ազատվել փաթեթի գործողություններից։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Даниелян*, ДАН АрмССР, т. 66, № 1 (1978). [2] *Э. А. Даниелян*, ДАН АрмССР, т. 67, № 1 (1978). [3] *Ю. М. Малинковский*, Стационарное функционирование приоритетных систем массового обслуживания, канд. дис., Минск, 1980. [4] *Н. У. Прабху*, Методы теории массового обслуживания и управления запасами, изд-во «Машиностроение», М., 1969. [5] *Э. А. Даниелян*, ДАН УзССР, № 6, 1980. [6] *Дж. Риордон*, Введение в комбинаторный анализ, Изд-во иностранной лит., М., 1963. [7] *В. А. Диткин, А. П. Прудников*, Справочник по операционному исчислению, «Высшая школа», М., 1965. [8] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

И. А. Карапетян

# О раскраске дуговых графов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 15/IV 1980)

Граф пересечения семейства дуг окружности называется дуговым. Дуговые графы впервые были рассмотрены в ([1]). Таккером ([2]) была приведена характеризация дуговых графов при помощи их матриц смежности, в ([3]) дан алгоритм полиномиальной сложности их распознавания. Алгоритмы полиномиальной сложности нахождения наибольшей клики, минимального покрытия кликами и наибольшего внутренне устойчивого множества дуговых графов приведены в ([4]). Задача минимальной раскраски дуговых графов $NP$—полна ([5]). В настоящей работе доказана гипотеза Таккера ([6]): хроматическое число любого конечного семейства дуг $F$ окружности не превосходит $\left|\frac{3}{2}\varphi(F)\right|$*, где $\varphi(F)$—наибольшее число попарно-пересекающихся дуг этого семейства.

Мы будем рассматривать конечные семейства дуг $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ окружности $L$. Под дугой $f=|a, b|$ понимаем дугу, исходящую из точки $a$ и продолжающуюся до $b$ по направлению часовой стрелки. $a$ называется левым концом, а $b$—правым концом дуги $f$. Не нарушая общности, можно предположить, что все дуги замкнуты (содержат оба конца) и ни одна из дуг не совпадает с окружностью. Хроматическим числом $\chi(F)$ семейства $F$ называется наименьшее число цветов, которыми можно окрасить все дуги семейства $F$ так, чтобы пересекающиеся дуги имели разные цвета. В качестве цветов мы будем использовать начальный отрезок натурального ряда. И наконец, обозначим через $d(x)$ (где $x\in L$) число всех дуг семейства $F$, содержащих точку $x$. Пусть $R(F)=\max\limits_{x\in L} d(x)$. Очевидно, что $R(F)\leq\varphi(F)\leq$ $\leq 2R(F)-1$.

Рассмотрим следующий алгоритм раскраски семейства дуг окружности. Пусть задано семейство дуг $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Далее

* $|a|$—наибольшее целое число, не превосходящее $a$.

всегда будем предполагать, что дуги $f_1=[a_1, b_1]$, $f_2=[a_2, b_2]$, ..., $f_{R(F)}=[a_{R(F)}, b_{R(F)}]$ имеют общую точку и $b_i\in[p, b_j]$, если $i<j$, $i, j\in\overline{1, R(F)}$, где $p$ некоторая точка, принадлежащая всем дугам $f_1, f_2, \ldots, f_{R(F)}$. Скажем, что точка $a$ находится левее точки $b$, если $a\in[p, b]$.

Первый этап алгоритма. Из семейства дуг $F_1=F\setminus\{f_1, f_2, \ldots, f_R\}$ выбираются множества $A_1, A_2, \ldots, A_{\lfloor\frac{1}{2}R\rfloor}$ следующим образом. Если $A_1, A_2, \ldots, A_i$, $i<\left\lfloor\frac{1}{2}R\right\rfloor$ уже выбраны, то $A_{i+1}$ будет выбираться так. Пусть $f_1^{i+1}$ является той дугой семейства $F_1\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k\right)$, левый конец которой является самым левым (всегда, если таких дуг несколько, выбирается любая из них). Если $f_1^{i+1}, f_2^{i+1}, \ldots, f_j^{i+1}$ уже выбраны, то в качестве $f_{j+1}^{i+1}$ будет выбрана та дуга семейства $F_1\setminus\left[\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k\right)\cup\{f_1^{i+1}, f_2^{i+1}, \ldots, f_j^{i+1}\}\right]$, которая не пересекается ни с одной из дуг $f_1^{i+1}, f_2^{i+1}, \ldots, f_j^{i+1}$ и левый конец которой является самым близким к правому концу дуги $f_j^{i+1}$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока это возможно. Предположим, что в конце процесса были выбраны дуги $f_1^{i+1}, f_2^{i+1}, \ldots, f_m^{i+1}$. Обозначим через $A_{i+1}$ множество $\{f_1^{i+1}, f_2^{i+1}, \ldots, f_m^{i+1}\}$. Очевидно, что для любого $i\in\overline{1, \left\lfloor\frac{1}{2}R\right\rfloor}$ дуги множества $A_i$ не пересекаются. Дугам множества $A_i$ присвоим цвет $R+i$.

Второй этап алгоритма. Из семейства дуг $F_2=F\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{\lfloor\frac{1}{2}R\rfloor} A_i\right)$ выбирают множества $B_R, B_{R-1}, \ldots, B_1$ следующим образом. Если $B_R, B_{R-1}, \ldots, B_i$, $i>1$ уже выбраны, то $B_{i-1}$ будет выбираться так. Пусть дуга $f_{i-1,1}=f_{i-1,1}\in B_{i-1}$. Если $f_{i-1,1}, \ldots, f_{i-1,k}\in B_{i-1}$, то пусть $f_{i-1,k+1}$ является той дугой семейства $F_2\setminus\left[\left(\bigcup_{j=i}^{R} B_j\right)\cup\{f_{i-1,1}, \ldots, f_{i-1,k}\}\right]$, которая не пересекается ни с одной из дуг $f_{i-1,1}, \ldots, f_{i-1,k}$ и правый конец которой является самым близким к левому концу дуги $f_{i-1,k}$. Предполагается, что $f_{i-1,k+1}\in B_{i-1}$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока это возможно. Из выбора $B_i$, $i\in\overline{1, R}$ видно, что дуги множества $B_i$ попарно не пересекаются. Дуги множества $B_i$ окрасим в цвет $i$.

Теорема. *Для любого семейства дуг $F$ имеет место* $\tau(F)\leq\left\lceil\frac{3}{2}\varphi(F)\right\rceil$.

Для доказательства теоремы докажем две леммы. Пусть над семейством $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ применен описанный алгоритм.

Лемма 1. *Для любого $f\in F_2\setminus\{f_1, f_2, \ldots, f_R\}$ существуют дуги*

$f_1 \in A_1$, $f_2 \in A_2$, ..., $f_{[\frac{1}{2}R]} \in A_{[\frac{1}{2}R]}$, *содержащие левый конец дуги* $f$.

Справедливость леммы 1 непосредственно следует из выбора множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{[\frac{1}{2}R]}$.

Лемма 2. *Если* $f=[a, b]$ *произвольная дуга семейства* $F=\left[\left(\bigcup_{i=1}^{R} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{[\frac{1}{2}R]} A_i\right)\right]$, $a \in [p, b_l]$ и $a \notin [p, b_{l-1}]$, *то левый конец каждой дуги семейства* $\left(\bigcup_{i=1}^{R} B_i\right) \setminus \{f_1, \ldots, f_R\}$ *находится левее правого конца дуги* $f=[a, b]$.

Доказательство леммы 2. Поскольку $a \in [p, b_R]$, ..., $a \in [p, b_l]$ и $a \notin [p, b_{l-1}]$, ..., $a \notin [p, b_1]$, то по лемме 1 $l-1 > \left[\frac{1}{2}R\right]$. Следовательно, $l > R - \left[\frac{1}{2}R\right]$. Для удобства обозначим $R-l+1$ через $m$ и пусть $l-1=\left[\frac{1}{2}R\right]+k$, где $k>0$. Ясно, что $m+k=R-\left[\frac{1}{2}R\right]$. Покажем, что левый конец любой дуги семейства $\left(\bigcup_{i=1}^{R} B_i\right) \setminus \{f_1, \ldots, f_R\}$ находится левее правого конца дуги $f=[a, b]$. Допустим, что это не так. Тогда существуют дуги этого семейства, левые концы которых находятся правее правого конца дуги $f=[a, b]$. Пусть $f'=[a', b']$ одна из этих дуг, левый конец которой является самым близким к правому концу дуги $f=[a, b]$. Поскольку $a \in [p, b_l]$, то по выбору $B_i$, $1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{1}{2}R\right]+k$ существует $f_i \in B_i$, содержащая правый конец дуги $f=[a, b]$.

Обозначим через $B$ семейство $\left\{f_i / a' \in f_i \text{ и } 1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{1}{2}R\right]+k\right\}$. Исходя из леммы 1 нетрудно доказать, что $|B| \leqslant \left[\frac{1}{2}R\right]$. Предположим, что $|B|=\left[\frac{1}{2}R\right]-k_1$, $k_1 \geqslant 0$. Покажем, что $k_1 < m$. Действительно, это так, иначе та дуга семейства $B'=\{f_1, f_2, \ldots, f_{[\frac{1}{2}R]+k}\} \setminus B \cup \{f\}$, левый конец которой является самым правым, левым концом пересекалась бы со всеми дугами семейства $B'$ и согласно лемме 1 еще с $\left[\frac{1}{2}R\right]$ дугами, т. е. эта точка принадлежала бы по крайней мере $k+k_1+1+\left[\frac{1}{2}R\right] \geqslant k+m-1+\left[\frac{1}{2}R\right]=R+1$ дугам, что невозможно.

Пусть дуга $f'=[a', b']$ окрашена в цвет $j$. Обозначим $I=\{i / i \geqslant l, i \neq j$, существует $f_{i,a_i} \in B_i$ и $a' \in f_{i,a_i}\}$ и $J=[l, \ldots, R-1, R] \setminus I$. Исходя из леммы 1 легко доказать, что $|I| \leqslant k_1$. Следовательно, $|J| \geqslant m-k_1$.

Рассмотрим следующие два возможных случая.

а) Для каждого $i \in J$ существует дуга $f_{i,b_i}$, содержащая праный конец дуги $f = [a, b]$. Так как все дуги семейства $B'' = \{f_{i,b_i} / i \in J\} \cup B'$ содержат точку $b$, то та дуга семейства $B'' \setminus \{f_i / i \in J\}$, левый конец которой является самым правым, левым концом пересеклась бы со всеми дугами $B''$ и по лемме 1 еще с $\left\lfloor \frac{1}{2} R \right\rfloor$ дугами, т. е. по крайней мере с $|B''| + \left\lfloor \frac{1}{2} R \right\rfloor = m - k_1 + k + k_1 + 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} R \right\rfloor = R + 1$ дугами, что противоречит определению $R$.

б) Существует $i_0 \in J$ такое, что ни одна дуга множества $B_{i_0}$ не содержит правый конец дуги $f = [a, b]$. Можно считать, что $i_0$ — наименьшее среди таких чисел. Рассмотрим множества $J' = \{i / i \in J, i < i_0\}$. Пусть $J' = \{i_1, i_2, \ldots, i_u\}$. Тогда существуют дуги $f'_{i_1} \in B_{i_1}$, $f'_{i_2} \in B_{i_2}$, ..., $f'_{i_u} \in B_{i_u}$, содержащие точку $b$. Так как $b_{i_j} \in [p, b_{i_0}]$, $j \in \overline{1, u}$, то все дуги $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_u}$ принадлежат семейству $\left(\bigcup_{j=1}^{u} B_{i_j}\right) \setminus \{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_u}\}$. Пусть $f'' = [a'', b'']$ — та дуга семейства $B' \cup \{f'_{i_1}, f'_{i_2}, \ldots, f'_{i_u}\}$, левый конец которой является самым правым. Тогда по выбору $B_{i_u}, \ldots, B_{i_2}, B_{i_1}$ и дуги $f' = [a', b']$, точка $a''$ будет принадлежать всем дугам семейства $B' \cup \{f'_{i_1}, f'_{i_2}, \ldots f'_{i_u}\} \cup \{f_{i_0}, f_{i_0+1}, \ldots f_k\}$ и по лемме 1 еще $\left\lfloor \frac{1}{2} R \right\rfloor$ дугам, т. е. $k + k_1 + 1 + u + R - i_0 + 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} R \right\rfloor$ дугам. Поскольку $|J| \geq m - k_1$, то $u + R - i_0 + 1 \geq m - k_1$. Следовательно $k + k_1 + 1 + u + R - i_0 + 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} R \right\rfloor \geq R + 1$, что невозможно. Все возможные случаи исчерпаны. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Предположим, что $R(F) = \varphi(F)$ и пусть над семейством $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ применен описанный алгоритм. Если $F_3 = F \setminus \left| \left(\bigcup_{j=1}^{\nu} B_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{|K|} A_j\right) \right| = \varnothing$, т. е. все дуги семейства $F$ окрашены, то, очевидно, $\gamma(F) \leq \left\lfloor \frac{3}{2} R(F) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \varphi(F) \right\rfloor$. Допустим $F_3 \neq \varnothing$ и пусть $f = [a, b]$ — произвольная дуга семейства $F_3$. Существует $l_0 \in \overline{1, R}$ такое, что $a \in [p, b_{l_0}]$. В противном случае по выбору $B_R, B_{R-1}, \ldots, B_1$ для любого $i \in \overline{1, R}$ существовала бы дуга $f_{i,a_j} \in B_i$, содержащая праный конец дуги $f = [a, b]$, т. е. точка $b$ принадлежала бы по крайней мере $R + 1$ дугам, что невозможно. Пусть $a \in [p, b_R], \ldots, a \in [p, b_l] \cup a \in [p, b_{l-1}], \ldots, a \in [p, b_1]$. Из леммы 1 следует, что $l - 1 > \left\lfloor \frac{1}{2} R \right\rfloor$. Так как $a \in [p, b_i]$, $1 \leq i \leq l-1$, то по

выбору $B_{l-1}, \ldots, B_2, B_1$ существуют дуги $f_1 \in B_1, f_2 \in B_2, \ldots, f_{l-1} \in B_{l-1}$, содержащие правый конец дуги $f = [a, b]$.

Построим семейства $H_{l-1}, H_l, \ldots, H_R$ следующим образом. Пусть $H_{l-1} = \{f_1, f_2, \ldots, f_{l-1}\} \cup \{f\}$. Если $H_{l-1}, \ldots, H_i$, $l-1 \leq i < R$, уже построены, то $H_{i+1} = H_i \cup \{f_i\}$, если $f_i$ пересекается со всеми дугами $H_i$ и $H_{i+1} = H_i \cup \{f_{i,2}\}$ в противном случае. Покажем, что все дуги семейства $H_i$ попарно пересекаются, где $l-1 \leq i \leq R$. Допустим, что это не так, и пусть $m$ — наименьшее число такое, что не все дуги семейства $H_m$ попарно пересекаются. Ясно, что $m > l-1$ и $H_m = H_{m-1} \cup \{f_{m,2}\}$. По выбору числа $m$ все дуги семейства $H_{m-1}$ попарно пересекаются. Следовательно, существует дуга $f' \in H_{m-1}$, не пересекающаяся с другой $f_{m,2}$. Покажем, что $f' \in H_{m-1} \cap \{f_l, \ldots, f_{m-1}\}$. Для этого достаточно показать, что дуги семейства $H = H_m \cap \{f_{l2}, \ldots, f_{m2}\}$ содержат правый конец дуги $f = [a, b]$. Пусть $H = \{f_{i_1 \cdot 2}, f_{i_2 \cdot 2}, \ldots, f_{i_k \cdot 2}\}$. Предположим, что дуги $f_{i_1 \cdot 2}, \ldots, f_{i_j \cdot 2}, j < k$ содержат точку $b$, покажем, что дуга $f_{i_{j+1} \cdot 2}$ тоже содержит точку $b$. Поскольку $f_{i_{j+1} \cdot 2} \in H_m$, то $H_{i_{j+1}} = H_{i_{j+1}-1} \cup \{f_{i_{j+1} \cdot 2}\}$. Следовательно, существует дуга $f'' \in H_{i_{j+1}-1} \cup \{f_{i_1 \cdot 2}, \ldots, f_{i_j \cdot 2}\}$, не пересекающаяся с дугой $f_{i_{j+1}}$. По выбору множества $B_{i_{j+1}}$ правый конец дуги $f''$ не находится правее правого конца дуги $f_{i_{j+1} \cdot 2}$. И по лемме 2 левый конец дуги $f_{i_{j+1} \cdot 2}$ находится левее правого конца дуги $f = [a, b]$. Так как $b \in f''$, то $b \in f_{i_{j+1} \cdot 2}$. Этим доказано, что дуги семейства $H$ содержат точку $b$. Следовательно, $f' \in H_{m-1} \cap \{f_l, \ldots, f_{m-1}\}$. С другой стороны, поскольку $H_m = H_{m-1} \cup \{f_{m2}\}$, то существует дуга $f^0 \in H_{m-1} \setminus \{f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\}$, не пересекающаяся с дугой $f_m$. По выбору $B_m$ правый конец дуги $f^0$ не находится правее правого конца $f_{m,2}$. Так как правый конец дуги $f'$ принадлежит дуге $f_m$, то дуга $f^0$ не пересекается с дугой $f'$. Это невозможно, поскольку $f^0, f' \in H_{m-1}$. Следовательно, для любого $i$, $l-1 \leq i \leq R$, дуги семейства $H_i$ попарно пересекаются. Очевидно, $|H_R| = R + 1$, что противоречит предположению $R(F) = \varphi(F)$. Значит, $F_3 = \varnothing$, т. е. все дуги окрашены.

Если $R(F) < \varphi(F)$, то можно добавить к семейству $F$ дуги $f^1, f^2, \ldots, f^{\varphi - R}$ так, чтобы для семейства $F' = F \cup \{f^1, f^2, \ldots, f^{\varphi - R}\}$ имело место $R(F') = \varphi(F') = \varphi(F)$. Согласно только что доказанному $\gamma(F') \leq \left[\frac{3}{2} R(F')\right] = \left[\frac{3}{2} \varphi(F')\right] = \left[\frac{3}{2} \varphi(F)\right]$. Так как $\gamma(F) \leq \gamma(F')$, то $\gamma(F) \leq \left[\frac{3}{2} \varphi(F)\right]$, что полностью завершает доказательство теоремы.

Следствие (*). *Если семейство дуг $F$ не содержит три попарно пересекающиеся дуги, покрывающие все точки окружности, то* $\gamma(F) \leq \frac{3}{2} R(F)$.

Заметим, что оценка, приведенная в теореме, точная.

В заключение приношу благодарность С. Е. Маркосяну за внимание к работе.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Ի. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

## Աղեղային գրաֆների ներկման մասին

*Շրջանագծի աղեղների ընտանիքի հատումների գրաֆը կոչվում է աղեղային։ Աղեղային գրաֆները առաջին անգամ դիտարկվել են ([1])-ում։ Կցության մատրիցների միջոցով աղեղային գրաֆների բնութագրումը տրված է ([2])-ում։ ([3,4])-ում բերված են աղեղային գրաֆների հանաչման, մեծագույն կլիկա, կլիկաներով փոքրագույն ծածկույթ և մեծագույն ներքին կայուն բազմություն գտնելու բազմանդամային բարդությամբ ալգորիթմներ։ ([5])-ում ապացուցված է աղեղային գրաֆների մինիմալ ներկման խնդրի $NP$-լրիվությունը։ Ներկա աշխատանքում ապացուցված է Տակկերի հիպոթեզը, շրջանագծի յուրաքանչյուր $F$ վերջավոր աղեղների ընտանիքի քրոմատիկ թիվը չի գերազանցում $\left|\frac{3}{2}\tau(F)\right|$-ին, որտեղ $\tau(F)$-ը այդ ընտանիքի աղեղային գրաֆի մեծագույն կլիկայի գագաթների քանակն է։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee*, Combinatorial Geometry in the plane, New York, 1964. [2] *A. Tucker*, Pacific J. Math., vol. 38 (1971). [3] *A. Tucker*, Lect. Notes Math. vol. 642, 1978. [4] *F. Gavril*, Networks, vol. 4, N 4, (1974). [5] *M. R. Garey, D. R. Johnson*, Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness, 1980. [6] *A. Tucker*, SIAM J. Appl. Math. vol. 29, N 3 (1975).

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ LXX ՀԱՏՈՐԻ

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ


Էջ

Է. Ա. Դանիելյան, Ն. Ս. Զևժլյանոյ—Որոշ $\bar{M}_r|\bar{G}_r||_\infty$ համակարգերում սպասման ժամանակների համատեղ բաշխման սահմանային բաշխումների դասը կրիտիկական ժամանակների դեպքում . . . 3

Է. Ա. Դանիելյան, Գ. Ա. Գոլով—Մեկ սահմանային թեորեմի մասին նախապատվությամբ համակարգերում միավոր ծանրաբեռնվածության դեպքում . . . 11

Ն. Ա. Թալալյան—Համասեռ տարածությունների վրա տրված ինվարիանտ չափերի մասին 16

Գ. Հ. Մուրադյան, Տ. Է. Փիլիպոսյան—Ուղղանկյուն ցանցի գագաթների մինիմալ համարակալումներ . . . 21

Ա. Գ. Ռաֆայելյան—Վերջավոր աճի ամբողջ ֆունկցիաների մի դասի մասին . 65

Է. Մ. Գաղոյան—Կամբինատոր նկարագրությունների մոտավոր դեկոդավորման և բարդության գնահատման մասին . . . 72

Գ. Ս. Հակոբյան—Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածությունում դիֆերենցիալ օպերատորների փնջի սպեկտրալ հատկությունների մասին . . . 80

Ա. Հ. Հովհաննիսյան—Մի դասի երկրորդ կարգի հավասարումների լոկալ լուծելիության և հիպոէլիպտիկության մասին . . . 85

Վ. Գ. Գնատենկո, Կ. Նիշմա—Ամբողջ կորերի մի դասի մասին 92

Գ. Տու. Թամանյան—Լակունաները երի օպերատորի սպեկտրում 96

Զ. Ա. Կարեյան, Կ. Մ. Մուսեյան—Կազմնորոշված գրաֆի համիլտոնյան փակման թիվը 129

Ա. Ս. Գասպարյան—Բազմաչափ մասրիցների կիրառումը բազմանդամների հետազոտության մեջ . . . 133

Ա. Կ. Գազոյան—$n>r$ մակարգակով $E_n|G|r\infty$ համակարգի նավթարային բնութագրիչների մասին . . . 142

Վ. Ա. Վիսենկի—Բացասական պատասխան Ս. Ն. Բերնշտեյնի հարցին . . . 145

Վ. Ա. Նազարյան—$R^3$-ում երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների դասակարգումը . . . 151

Գ. Տու. Թամանյան—Շտուրմ—Լիուվիլի հավասարումը պարբերական պոտենցիալով 156

Ի. Գ. Խաչատրյան—Մի հակադարձ խնդրի մասին . . . 160

Ի. Ս. Մուսայելյան—Բացասական կորության չափերում որոշ ոչ կոմպակտ տիրույթների իզոմետրիկ ընկղմելիությունը $E^3$ . . . 193

Ա. Գ. Ռաֆայելյան—Ամբողջ ֆունկցիաների որոշ սիստեմների բազիսության մասին 199

Ի. Գ. Հայրապետյան—Հիպերբոլական սիստեմների համար խառը խնդրի թույլ $L^2$—կոռեկտության մասին . . . 205

Լ. Զ. Գևորգյան—Որոշ դասի ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների ֆունկցիոնալ մոդելը 212

Գ. Ն. Գևորգյան, Ա. Հ. Մխիթարյան—Եզակի մեծ ոչսիմետրիկ սխալներ ուղղոգ կոդերի դաս . . . 216

Ռ. Հ. Նազարյան—Որոշ պարզ ԼԻՄ խմբերի վերլուծությունները . . . 257

Ա. Ի. Պետրոսյան—$C^2$ տարածության մեջ գտնվող իրական խմաստով ոչ լափոխվող ենթով վերլի հատուկ բազմանիստների վրա հավասարալափ մոտարկում բազմանդամներով 261

Ա. Տու. Շահվերդյան—Ա. Լ. Շահինյանի թեորեմների տիպի գնահատականներ մերոմորֆ ֆունկցիաների սահմանային նվազելու համար . . . 272

Վ. Վ. Սարգսյան, Ռ. Գ. Սաֆարյան—Դիֆուզիոն պրոցեսներ միջինացումով և կոնցենտրացիոն ալիքների տարածում . . . 274

Վ. Ա. Մուսայելյան—$R^3$-ում երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների մի դասի մասին . . . 280

Գ. Կ. Հովհաննիսյան—Որ դասի ֆունկցիաների մի հատկության մասին . . . 286

Գ. Զ. Մկրտչյան — Երկրորդ կարգի վերջավոր բվագիծային էլիպտիկ հավասարումների բեգմանբացված լուծումների որոշ հատկությունների մասին . . . 291
Հ. Ս. Սարիբեկյան — Շրջանների պատահական դաշտերը հատող ուղիների վրա առաջացող լարերի պրոցեսների մասին . . . . . 297
Գ. Տ. Խոստիկյան — Երկու $\hat{M}_r|G|1|\infty$ տիպի նախապատավությամբ համակարգերում սպասման ժամանակի բաշխման բացահայտ արտահայտությունների մասին . . . 301
Ի. Ա. Կարապետյան — Ազնգային գրաֆների ներկման մասին . . . 305

## ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Ա. Խաչատրյան — Տարամոդուլ առաձգականության տեսության վարիացիոն բանաձևերի մասին . . . . . 100
Ա. Գ. Նազարով — Մեկ ռեոլոգիական մոդելի մասին . . . . . 167
Մ. Վ. Ինգարեանյան — Էլեկտրամագնիսական իմպուլսի միջոցով առաձգական ալիքների գրգռման մասին . . . . . 219
Ի. Մ. Կիրակոսյան — Առաձգա-պլաստիկական սալերի հկվածքների և լարումների վերին գնահատականների մասին . . . . . 225

## ԲՅՈՒՐՈՂՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ի. Գ. Մալոյան — Գերնոսազ բնաբնոգների կոմպրեսիան սոցը խառավության գործոնի հաշվառումով . . . . . 170

## ՖԻԶԻԿԱ

Դ. Մ. Սեդրակյան, Կ. Մ. Շահնազարյան — Գրաֆենների հատակը նեյտրոնային սաստկերի «ոիբ»-ֆազում . . . . . 28
Ա. Հ. Մելիքյան, Ս. Հ. Սահակյան — Ռնգռանանային պայմաններում գեներացված երբորդ հարմոնիկի իմպուլսների ժամանակային կառուցվածքը . . . . 33
Բ. Վ. Կրիժանովսկի — Ռնգռանանային ֆլուորեսցենցիան այլասերված ժակարդակների վրա . . . . . 37
Ա. Գ. Գևորգյան, Գ. Հ. Շիրինյան, Ա. Ս. Կուզանյան — Ֆազատարացման նոր ավյալներ $La_2O_3-Al_2O_3$ համակարգում . . . . . 173
Լ. Հ. Հովհաննիսյան — Խրթուժ-այլումինային նոնաբարների բյուրեղների աճեցումը վակուումում . . . . . 231

## ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ

Հ. Ա. Հարությունյան — Սպեկտրալ գծերի առաջացումը էքսպոնենցիալ բաշխվածությամբ աղբյուրներով մթնոլորտում . . . . . 41
Ս. Գ. Իսկուդարյան — Mg—Mt չափանիշը . . . . . 50

## ՍԻՆԱՄՈԼՈԳԻԱ

Ա. Գ. Նազարով — Շենքերի վնասվածքների սանդղակ երկրաշարժերի ժամանակ . . . 238

## ԻՆԺԵՆԵՐԱՅԻՆ ՍԵՅՍՄՈԼՈԳԻԱ

Ի. Հ. Համասյան, Դ. Դ. Տոնոյան — Մեխանիկական ժեծությունների վիճակագրական նմանության որոշման մեթոդներ ինժեներային սեյսմոլոգիայի խնդիրներում . . . 103

## ԱՆԱԼԻՏԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Վ. Մ. Թառայան, Ֆ. Վ. Միրզոյան, Ժ. Վ. Սարգսյան, Ժ. Մ. Առաքելյան — Հիմնային ներկանյութի հնա խոնավան ասոցիատի ձևով էքստրագվող յոդբիալա իոնի բազագրության մասին . . . . . 56

## ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ա. Թ. Բալբայան, Դ. Հ. Թորոսյան, Դ. Հ. Դյոկչյան — π-չհագեցած կետոնների սոսնձման նոր ուղի . . . . . 179

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Ի. Ռ. Սահակյան — *Սուկցինատի օքսիդացման արագության համեմատական գ-ֆեռոցիանաթթուով օրթի և լյարդի միտոքոնդրիաներում* . . . . . 110

Ռ. Մ. Սրապիոնյան, Ս. Ա. Սահակյան, Ն. Ա. Մնդվնդով, Ն. Մ. Սահակյան, Ա. Ա. Խալոյան — *Հիպոթալամուսի կարգավորիչ սպիտակուցի տրիպտին ֆրագմենտի հիմնական կառուցվածքի հարցի մասին* . . . . . 187

Ռ. Բ. Բաղալյան, Ա. Ա. Սիմոնյան, Ռ. Ա. Ստեփանյան — *Տարբեր ԱՍՆ-ազատների ակտիվության փոփոխությունները մկանների ձնթարբյային գոյացություններում հավերի օնտոգենեզում* . . . . . 187

Լ. Լ. Խանիլովա, Վ. Վ. Օրգյան, Ս. Ս. Հովակիմյան, Գ. Օ. Բաղալյան, Կ. Գ. Ղազարյան — *Ամբրոզյական արյան և լիմֆոցիտների ֆոսֆոլիպիդների դինամիկան սուր տարածուն ինֆարկտի ժամանակ* . . . . . 241

Ժ. Ա. Գևորգյան — *L-ամինաթթուների գնամինացման պրոցեսների դարձելի արգելակումը երիկամների կեղևային շերտում արյան շիճուկի ազդեցության տակ* . . . 250

ԱԳՐՈՔԻՄԻԱ

Ա. Շ. Խալաթյան, Ս. Ա. Ակրտանջյան, Ե. Ն. Բաղալյան — *Հումուսային նյութերի ֆերմենտային ակտիվության ուսումնասիրությունը* . . . . . 61

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՏԻՊԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Հ. Ղազարյան, Ռ. Ա. Շահազիզյան — *Թփերի տարբեր հասակի առանցքների արժասների զարգացման և մահացման մորֆո-ֆիզիոլոգիական առանձնահատկությունների հարցի մասին* . . . . . 112

ՄԻՋԱՏԵՍԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Ա. Տարյանով-Եենոերյան — *Երկարակնճիթ կարծրաթևերի նոր տեսակ Կովկասից* (Coleoptera, Curculionidae) . . . . . 124

ԴԵՂԱՖԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Հ. Միրզոյան, Ա. Բ. Բաղինյան, Դ. Ա. Դևորգյան — *Ախտաբանության պայմաններում նյարդատիպիկ ամինաթթուների և ուղեղում նրանց վերափոխման նյութերի նպատակությունը հիպոթալամուսում և սաստիկ լարվածքում* $C^{14}$*-լեյցինի սպիտակուցների մեջ ներառման խթանումը* . . . . . 253

## СОДЕРЖАНИЕ LXX ТОМА

### МАТЕМАТИКА


Стр

*Э. А. Даниелян, И. С. Земляной*—Класс предельных распределений совместного стационарного распределения времен ожидания некоторых систем $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ в условиях критической загрузки . . . . . 3

*Э. А. Даниелян, Г. А. Попов*—Об одной предельной теореме для приоритетных систем при единичной загрузке . . . . . 11

*Ф. А. Талалян*—Об инвариантных мерах на однородных пространствах . 16

*Д. О. Мурадян, Т. Э. Пилипосян*—Минимальные нумерации вершин прямоугольной решетки . . . . . 21

*С. Г. Рафаелян*—Об одном классе целых функции конечного роста 65

*Э. М. Погосян*—К оценке сложности и приближенной расшифровке комбинированных описаний

*Г. С. Акопян*—О спектральных свойствах пучка дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций . . . . . 80

*А. О. Оганесян*—О локальной разрешимости и гипоэллиптичности для одного класса уравнений второго порядка . . . . . 85

*В. П. Петренко, Я. Шимша*—Об одном классе целых кривых . . . 92

*Г. Ю. Таманян*—Лакуны в спектре оператора Хилла . 96

*З. А. Карян, К. М. Мосесян*—Число гамильтонова замыкания орграфа . 129

*Л. С. Гаспарян*—Приложение многомерных матриц к исследованию многочленов . . . . . 133

*А. К. Погосян*—О послеотказовых характеристиках системы $E_n|G|r|\infty$ с уровнем $n \geq r$ . . . . . 142

*В. С. Виденский*—Отрицательный ответ на один вопрос С. Н. Бернштейна 145

*В. А. Нерсесян*—Классификация допустимых комплексов двумерных плоскостей в $R^5$ . . . . . 151

*Г. Ю. Таманян*—Уравнение Штурма—Лиувилля с периодическим потенциалом . . . . . 156

*И. Г. Хачатрян*—Об одной обратной задаче . . . . . 160

*Р. Ц. Мусиелян*—Изометрические погружения в $L^n$ некоторых некомпактных областей в метриках отрицательной кривизны . . . . . 193

*С. Г. Рафаелян*—О базисности некоторых систем целых функций 198

*Р. Г. Айрапетян*—О слабой $L^1$ корректности смешанных задач для гиперболических систем . . . . . 203

*Л. З. Геворкян*—Функциональная модель для некоторого класса несамосопряженных операторов . . . . . 212

*Д. И. Геворкян, А. Г. Мхитарян*—Класс кодов, исправляющих большие одиночные несимметрические ошибки . . . . . 216

*Р. О. Назарян*—Разложение некоторых простых групп Ли . . . . 257

*А. И. Петросян*—Равномерное приближение полиномами на специальных полиэдрах Вейля с вещественно невырожденным остовом в пространстве $C^n$ 261

*А. Ю. Шахвердян*—К теоремам А. Л. Шагиняна о предельном убывании мероморфных функций . . . . . 266

*В. В. Сарифян, Р. Г. Сафарян*—Диффузионные процессы с усреднением и распространением концентрационных волн . . . . . 274

*В. А. Нерсесян*—Об одном классе допустимых комплексов двумерных плоскостей в $R^6$ . . . . . 280

*Г. К. Оганесян*—Об одном свойстве функций класса $B_p$ . . . 286
*П. З. Мкртчян*—О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка . . . 292
*Г. С. Сукиасян*—О процессах хорд на прямых, пересекающих случайные поля кругов на плоскости . . . 297
*П. Т. Хостикян*—О явных выражениях для распределения времени ожидания в двух приоритетных системах $M_k|G|r|\infty$ . . . 301
*Н. А. Карапетян*—О раскраске луговых графов . . . 306

## МЕХАНИКА

*А. А. Хачатрян*—О вариационном принципе в разномодульной теории упругости . . . 100
*А. Г. Назаров*—Об одной реологической модели . . . 167
*М. В. Белубекян*—О возбуждении упругих волн электромагнитным импульсом . . . 219
*Р. М. Киракосян*—О верхних оценках прогибов и напряжений упруго-пластических пластин . . . 225

## МЕХАНИКА ГРУНТОВ

*Р. П. Малакян*—Компрессионная ползучесть просадочных грунтов с учетом фактора влажности . . . 170

## ФИЗИКА

*Д. М. Седракян, К. М. Шахбасян*—Протонный ток в «пре»-фазе нейтронных звезд . . . 28
*А. О. Меликян, С. Г. Саакян*—Временная структура резонансно генерированных импульсов третьей гармоники . . . 33
*Б. В. Крыжановский*—Резонансная флуоресценция на вырожденных уровнях 37
*А. Г. Петросян, Г. О. Ширинян, А. С. Кузанян*—Новые данные по фазообразованию в системе $Lu_2O_3$—$Al_2O_3$ . . . 175
*Л. А. Оганесян*—Выращивание кристаллов иттрий-алюминиевого граната (ИАГ) в вакууме . . . 231

## АСТРОФИЗИКА

*Г. А. Арутюнян*—Образование спектральных линий в атмосфере с экспоненциальным распределением источников . . . 41
*Г. Т. Петров*—Содержание ионов и химический состав в ядрах сейфертовских галактик типа 2 и радиогалактик с узкими линиями . . . 46
*С. Г. Искударян*—Критерий $M_я - M_I$ . . . 50

## СЕЙСМОЛОГИЯ

*А. Г. Назаров*—Шкала повреждений зданий при землетрясениях 238

## ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

*Р. О. Амосян, Г. Г. Тоноян*—Методы установления статистического подобия механических величин в задачах инженерной сейсмологии . . . 103

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

*В. М. Тараян, Ф. В. Мирзоян, Ж. В. Саркисян, Ж. М. Арстамян*—К особенностям экстракции хлорталлат аниона . . . 56

## ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

*А. Т. Бабаян, Г. О. Торосян, Г. Г. Геосчян*—Новый путь системы α-непредельных кетонов . . . . . 179

## БИОХИМИЯ

*И. Р. Саакян*—Ограничение α-кетоглутаратом скорости окисления сукцината в митохондриях сердца и печени . . . . . 110

*Р. М. Срапионян, С. А. Саакян, Ф. А. Медведев, Ф. М. Саакян, А. А. Галоян*—К вопросу о химической структуре триптического фрагмента кардиоактивного белка гипоталамуса . . . . . 182

*Р. Б. Бадалян, А. А. Симонян, Р. А. Степанян*—Изменение активности различных АТФаз в субклеточных образованиях мышц кур в онтогенезе 187

*Л. Л. Данилова, В. В. Ордян, С. С. Овакимян, Г. О. Бадалян, К. Г. Караганян*—Динамика фосфолипидов цельной крови и эритроцитов при остром обширном инфаркте миокарда . . . . . 241

*Ж. С. Геворкян*—Обратимое ингибирование процессов деаминирования L-аминокислот в корковом слое почек под действием сыворотки крови 250

## АГРОХИМИЯ

*А. Ш. Галстян, С. А. Абрамян, Е. Н. Бадалян*—Изучение ферментативной активности гумусовых веществ . . . . . 61

## ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

*В. О. Казарян, Р. С. Шахазизян*—К вопросу о морфо-физиологических особенностях развития и отмирания корней различных по возрасту осей кустарников 117

## ЭНТОМОЛОГИЯ

*С. М. Яблоков-Хнзорян*—Новый вид жесткокрылых-долгоносиков с Кавказа (Coleoptera, Curculionidae) . . . . . 124

## ФАРМАКОЛОГИЯ

*С. А. Мирзоян, А. Т. Татевосян, Г. А. Геворкян*—О способности нейроактивных аминокислот и продуктов их превращения в мозге стимулировать включения $C^{14}$-лейцина в белки слизистой желудка и гипоталамуса в условиях патологии . . . . . 253

CONTENTS

MATHEMATICS p

*E. A. Danielian, N. S. Zemliancy*—The class of limiting distributions for the joint stationary distribution of waiting times for some $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ queues in heavy traffic . . . . . 3

*E. A. Danielian, G. A. Popov*—On one limit theorem of priority queues in heavy traffic . . . . . 11

*F. A. Talalian*—On invariant measures on homogeneous spaces . . . 16

*D. H. Muradian, T. E. Piliposian*—Minimal numberings of a rectangular lattice . . . . . 21

*S. G. Rafaelian*—On one of the classes of entire functions of finite growth 65

*E. M. Pogossian*—On complexity estimation and approximative decoding of combinatorial descriptions . . . . . 72

*G. S. Akopian*—On the spectral properties of the bundle of differential operators in the space of vector functions . . . . . 80

*A. O. Oganessian*—On local solvability and hypoellipticity for the class of second order equations . . . . . 85

*V. P. Petrenko, . Shimsha*—On the class of entire curves . . . . 92

*G. Yu. Tamanian*—The forbidden bands in the spectrum of Hill's operator 96

*A. A. Khachatrian*—On the variational principle in the different modulus elasticity theory . . . . . .

*Z. A. Kareyan, K. M. Mosesian*—The Hamiltonian completion number of digraph . . . . . 129

*A. S. Gasparian*—An application of multy-dimensional matrixes to the investigation of polynomials . . . . . 133

*A. K. Pogosian*—On after rejection characteristics of $E_k|G|R|\infty$ queue with level $n>r$ . . . . . 142

*V. S. Videnski*—Negative answer to one of Bernshtein's questions . . 145

*V. A. Nersessian*—The classification of permissible complexes of 2-dimensional planes in $R^5$ . . . . . 151

*G. Yu. Tamanian*—Sturm—Liouvill's operator with periodic potential . 156

*I. G. Khachatrian*—On one inverse problem . . . . . 160

*R. Ts. Musaelian*—Isometric immersion on $E^3$ of some noncompact domains in metrics of negative curvature. . . . . 193

*S. G. Rafaelian*—On basicity of some systems of entire functions. . 198

*R. G. Hairapetian*—On weak $L^2$-well-posedness of mixed problems for hyperbolic systems. . . . . 205

*L. Z. Gevorkian*—On the functional model of a certain class of non self-adjoint operators . . . . . 212

*D. N. Gevorkian, A. H. Mkhitarian*—Single great asymmetric error-correcting codes. . . . . 216

*R. O. Nazarian*—Decompositions of some simple group Lie . . . 257

*A. I. Petrosyan*—Uniform polinomial approximation on the special Weil polyhedra with real nondegenerate distinguished boundart in $C^2$ . . . . 261

*A. Yn. Shahverdian*—On the theorems of A. L. Shaginian on the asymptotic growth of meromorphic functions . . . . . 266

*V. V. Sarafjan, R. G. Safarian*—Diffusion processes with averaging and the extension of concentrated waves . . . . . 274

*V. A. Nersessian*—About one class of permissible complexes of 2—dimensional planes in $R^n$ . . . . . 280
*G. K. Oganesjan*—On a property of functions of the class $B_p$ . . . 286
*P. Z. Mkrtchian*—On some properties of generalized solutions of second order's quasilinear elliptic degenerate equations . . . . . 292
*H. S. Suklasian*—On processes of Cords on Lines Intersecting Random Circlefields on Plane . . . . . 297
*P. T. Khostikian*—On avowed expressions for the waiting time distribution in two priority systems of $M_r|G_r|1|$ type . . . . . 301
*I. A. Karapetian*—On the coloring of circular ARC graphs . . . . 306

MECHANICS

*A. A. Khachatrian*—In variational principle in the differentmodulus elasticity theory. . . . . 100
*A. G. Nazarov*—About one reological model . . . . . 167
*R. P. Malakian*—Compression creep of slump soils with regard to moistur elactor . . . . . 170
*M. V. Belubekian*—On the excitement of elastic waves by electromagnetic momentum. . . . . 219
*R. M. Kirakosian*—On the upper estimations of flexure and strain of an elastic-plastic plate. . . . . 225

PHYSICS

*D. M. Sedrakian, K. M. Shahabasian*—The protons current in the „npe"-phase of the neutron stars . . . . . 28
*A. O. Melikian, S. H. Sahakian*—The temporal structure of resonantly generated third harmonic pulses . . . . . 33
*B. V. Kryzhanovsky*—Resonance fluorescence from degenerate levels . 37
*A. G. Petrosslan, G. O. Shirinian, A. Z. Kuzanian*—Crystalline phase formation features in the $Lu_2O_3-Al_2O_3$ system . . . . . 175
*L. H. Hovhunessian*—The crystal growth of ittrium-aluminum garnet in vacuum. . . . . 231

ASTROPHYSICS

*H. A. Harutlyunian*—The formation of spectral lines in an atmosphere with sources distributed by exponential law . . . . . 41
*G. T. Petrov*—The content of ions and chemical composition in the nuclei of II type Seyfert galaxies and narrow line radio galaxies . . . . . 46
*S. G. Iskudarian*—The criterion $M_n-M_g$ . . . . . 50

SEISMOLOGY

*A. G. Nazarov*—The scale of damages of buildings by earthquakes. . 238

ENGINEERING SEISMOLOGY

*R. H. Hamaslan, G. G. Tonoyan*—The method of statement of statistical similarity of the mechanical gradients in engineering seismological problems . 103

ANALYTICAL CHEMISTRY

*V. M. Tarayan, F. V. Mirzoyan, Zh. V. Sarkissian, Zh. M. Arstamian*—On the extraction of chlorthallate anion . . . . . 56

ORGANIC CHEMISTRY

*A. T. Babayan, G. H. Torossian, G. G. Geogchian*—A new way of synthesis of α-unsaturated ketones . . . . . 179

BIOCHEMISTRY

*I. R. Sahakian*—Succinate oxidation rate by α-ketoglutarate limitation in mitochondria of the heart and liver . . . . . 110

BIOCHEMISTRY

*R. M. Srapionian, S. A. Sahakian, F. A. Medvedev, F. M. Sahakian, A. A. Galoyan*—The problem of triptic chemical structure of the fragment of hypothalamic cardioactive protein . . . . . 182

*R. B. Badalian, A. A. Simonian, R. A. Stepanian*—The change in the activity of different ATPhases in subcellular structurea of hen's muscles in oniogenesis . . . . . 187

BIOCHEMISTRY

*L. L. Danilova, V. V. Ordian, S. S. Ovakimian, G. O. Badalian, K. G. Karageosian*—Phospholipids of total blood and erythrocites in the acute myocardial infarction . . . . . 211

*J. S. Gevorkian*—Reversible inhibition of deamination of L-amino acids in the rat renal cortex under the action of blood serum . . . . . 250

AGROCHEMISTRY

*A. Sh. Galstian, S. A. Abrahamian, E. N. Badalian*—Enzymatic activity investigations of humus substances . . . . . 61

PLANT PHYSIOLOGY

*V. O. Kazarian, R. S. Shahazizian*—About the question of morphophysiological pecularities of development and dying of the root-systems of axis of shrubs . . . . . 117

ENTOMOLOGY

*S. M. Iablokoff-Khnzorian*—A new species of curculionid beetles from the caucasus (Coleoptera, Curculionidae) . . . . . 124

PHARMOCOLOGY

*S. A. Mirzoyan, A. T. Tatevossian, G. A. Gevorkian*—On the capacity of stimulation of neuroactive aminoacids and products of their transformation in the brain $C^{14}$-leucines inclusion into the protein of the gastric mucosa and hypothalamus in pathological cases . . . . . 253