

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՈՇ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
 ДОКЛАДЫ

LXX, № 3

1980

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխ. գիտ. բեկնա-
 ծու (պատ. Բաղրուդար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ՐԱԲԱ-
 ՋԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
 ՅԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
 ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Վ. Մ. ԹՍՈՒՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-ան-
 դամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐԶՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
 Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
 (պատ. Խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹ-
 ՏԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագիր),
 Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Օ. Մ. ՈԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ
 ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
 АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
 мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
 демик АН АрмССР (зам отв. редактора),
 Н. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм.
 ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
 АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
 чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
 ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
 ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
 ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
 ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
 В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱՔԻՄԱՏԻԿԱ

61

Զ. Ա. Կարենյան, Կ. Մ. Մոսեսյան—Կոզմոնոմիկական գրաֆի համակարգի փակման թիվը	129
Ա. Ա. Գառնաշյան—Քաղաքացիական պատերազմների կիրառումը քաղաքականության հետա- գետության մեջ	133
Ա. Կ. Պոլոսյան—Մեր մակարդակով $E_{\alpha} G _{\alpha}$ համակարգի ետվթարային բևեռա- գրիչների մասին	142
Վ. Ս. Վիդենսկի—Քաղաքական պատասխան Ա. Ն. Քերեշտեյնի հարցին	145
Վ. Ա. Ներսեսյան— R^{∞} -ում երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպակտների գոտեպարզումը	151
Գ. Ցուլ. Թումանյան—Շտուրմ—Լիովիչի հավասարումը պարբերական պոտենցիալով	156
Բ. Գ. Խաչատրյան—Մի հակադարձ խնդրի մասին	160

ՄԱՏԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Գ. Նազարով—Մեկ ուղղանկյունի մոդուլի մասին	167
--	-----

ԲՆԱՆՈՂԵՐԻ ՄԱՏԵՄԱՏԻԿԱ

Թ. Պ. Մալախյան—Գերհատուկ քննադատի կոմպակտն սողորդ խոնավության գործունի հաշվառումով	170
---	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Գ. Պետրոսյան, Գ. Հ. Շիրինյան, Ա. Ս. Կուրոնյան—Ֆազառաջացման հոր տվյալ- ներ $Lu_2O_3-Al_2O_3$ համակարգում	175
---	-----

ՍՈՒՄԱՆԱՅԻՆ ԿՐԻՄԻԱ

Ա. Թ. Բարսյան, Գ. Հ. Թորոսյան, Գ. Հ. Գյուկչյան— π — χ հազանցած կետակետերի ստաց- ման հոր ուղի	179
--	-----

ԲԻՐԻՄԻԱ

Ռ. Մ. Սրապիանյան, Ս. Ա. Սահակյան, Ֆ. Ա. Մեղվեղեկ, Ֆ. Մ. Սահակյան, Ա. Ա. Դա- լյան—Հիպոթալամուսի կարգիտակալի պարամետրի տրիպտիկ ֆրագմենտի թմեական կառուցվածքի հարցի մասին	182
Ռ. Ս. Բաղդասարյան, Ա. Ա. Սիմոնյան, Ռ. Ա. Ստեփանյան—Տարբեր ԱՏՖազաների ակտի- վության փոփոխությունները մկանների էնթալպիային գոյացություններում հավերժ օքսի- դանքով	187

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Э. А. Карян, К. М. Мосесян — Число гамильтонова замыкания орграфа	129
А. Г. Гаспарян — Приложение многомерных матриц к исследованию много- членов	133
А. К. Погосян — О послеотказовых характеристиках системы $E_n G _r _\infty$ с уровнем $n \geq r$	142
В. С. Виденский — Отрицательный ответ на один вопрос С. Н. Бериштейна	145
В. А. Нерсисян — Классификация допустимых комплексов двумерных плос- костей в R^5	151
Г. Ю. Таманян — Уравнение Штурма — Лиувилля с периодическим потен- циалом	156
И. Г. Хачатрян — Об одной обратной задаче	160

МЕХАНИКА

А. Г. Назаров — Об одной реологической модели	167
---	-----

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

Р. П. Малакян — Компрессионная ползучесть просадочных грунтов с учетом фактора влажности	170
---	-----

ФИЗИКА

А. Г. Петросян, Г. О. Ширинян, А. С. Кузян — Новые данные по фазо- образованию в системе $Lu_2O_3-Al_2O_3$	175
---	-----

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Т. Бабилян, Г. О. Торосян, Г. Г. Геворкчян — Новый путь синтеза α -непре- дельных кетонов	179
--	-----

БИОХИМИЯ

Р. М. Срапионян, С. А. Саакян, Ф. А. Медведев, Ф. М. Саакян, А. А. Гало- ян — К вопросу о химической структуре триптического фрагмента кардиовктив- ного белка гипоталамуса	182
Р. Б. Бадалян, А. А. Симонян, Р. А. Степанян — Изменение активности раз- личных АТФаз в субклеточных образованиях мышц кур в онтогенезе	187

CONTENTS

MATHEMATICS

Z. A. Karoyan, K. M. Mosesian—The Hamiltonian completion number of digraph	121
A. S. Gasparian—An application of multi-dimensional matrices to the investigation of polynomials	133
A. K. Pigosian—On after rejection characteristics of $E_k(G, H)$ queue with level $n > r$	142
V. S. Videnski—Negative answer in one of Bernshlein's questions	145
V. A. Nersessian—The classification of permissible complexes of 2-dimensional planes in R^3	151
G. Yu. Tamenian—Sturm—Liouville's operator with periodic potential	156
I. G. Khachatrian—On one inverse problem	160

MECHANICS

A. G. Nazarov—About one rheological model	162
R. P. Malakian—Compression creep of slump soils with regard to molecular factor	170

PHYSICS

A. G. Petrossian, G. O. Shirinian, A. Z. Kizorov—Crystalline phase formation features in the $Lu_2O_3-Al_2O_3$ system	175
---	-----

ORGANIC CHEMISTRY

A. T. Babayan, G. H. Torossian, G. G. Georgislian—A new way of synthesis of α -unsaturated ketones	179
---	-----

BIOCHEMISTRY

R. M. Srapionian, S. A. Sahakian, F. A. Maderlov, F. M. Sahakian, A. I. Galoyan—The problem of triptic chemical structure of the fragment of hypothalamic cardioactive protein	182
R. B. Badalian, A. A. Simonian, R. A. Stepanian—The change in the activity of different ATPases in subcellular structures of hen's muscles in ontogenesis	187

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 03306 Подписано к печати 2 IV 80 Тираж 505. Изд. 5238 Заказ 207.

Формат бумаги 70x108¹/₁₆ Печ. л. 4,25 Бум. л. 2,12

Удк. печ. л. 59. Уч. изд. л. 45

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барсегянтин, 24

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

З. А. Кареян, К. М. Мосесян

Число гамильтонова замыкания орграфа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшавовым 10/XII 1979)

Пусть $L=(X, U)$ — произвольный конечный ориентированный граф*. Наименьшее число $r(L) \geq 0$ дуг, после добавления которых в полученном орграфе появляется гамильтонов эрцикл, назовем числом гамильтонова замыкания орграфа L . Это определение аналогично определению числа гамильтонова замыкания неориентированного графа, введенного в работе (1), где предлагается алгоритм нахождения $r(\bar{T})$ для произвольного дерева $\bar{T}$. В работе (2) дается алгоритм нахождения $r(\bar{H})$ в случае, если неориентированный граф $\bar{H}$ имеет единственный цикл или точку сочленения.

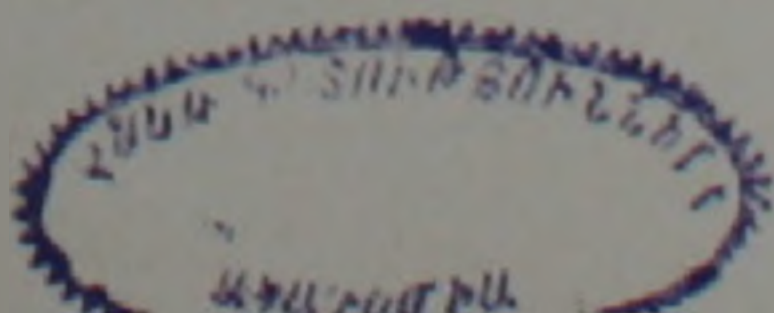
Через $C(L)$ обозначим наименьшее число попарно непересекающихся простых ориентированных цепей, покрывающих все вершины орграфа L .

В работе (4) изучается величина $c(\bar{H})$ для неориентированного графа $\bar{H}$ и указывается алгоритм нахождения $c(\bar{T})$ в случае, когда T — дерево.

В настоящей статье описывается алгоритм, который для всякого ациклического орграфа L выделяет $c(L)$ попарно непересекающихся простых ориентированных цепей, покрывающих все вершины L , и тем самым находит $r(L)$.

Суграф $T=(X, U')$ орграфа $L=(X, U)$ называется ориентированным лесом (орлесом) для L (см. (3)), если T не содержит эрциклов и полустепень захода для каждой вершины $x \in X$ в T не более 1.

* В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в книге (1), где можно найти все не определяемые здесь понятия.



Обозначим

$$o(L) = \min\{o(T)\},$$

где $o(T)$ — количество тупиковых (висячих) вершин орлеса T и минимум берется по всевозможным орлесам орграфа L .

Очевидно для любого ациклического орграфа L имеет место
Лемма 1. $r(L) = c(L) = o(L)$.

Пусть $L = (X, U)$ — произвольный конечный орграф, не содержащий ориентированных циклов (ациклический орграф). Определим разбиение множества его вершин X на подмножества $X_0, X_1, \dots, X_p$, где $p \geq 0$ следующим образом ((¹), стр. 370 или (⁶)):

X_0 — множество тупиковых вершин орграфа L , а X_k — множество тупиковых вершин подграфа $L(X \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} X_i)$ ориентированного графа $L = (X, U)$, при $k \in [1, p]$.

Очевидно при любом $i \in [0, p]$ подграф $L(X_i)$ не содержит дуг, и следовательно, при $i \in [0, p-1]$ подграф $L_i = L(X_i \cup X_{i+1})$ — двудольный орграф.

Описание алгоритма. Пусть $L = (X, U)$ — произвольный конечный ориентированный граф.

1°. Разбить множество вершин X на подмножества $X_0, X_1, \dots, X_p$.

2°. Для каждого $i \in [0, p-1]$ найти некоторое паросочетание Π_i подграфа L_i и образовать

$$\Pi = \bigcup_{i=0}^{p-1} \Pi_i = (Y, W).$$

3°. $X_0^+ := \{x \in X / \neg (\exists z \in X ((x, z) \in W))\}$.

4°. Если $X_0^+ \setminus X_0 = \emptyset$, то выделить орграф $H = (X, W)$ и алгоритм считать завершенным.

5°. Если $X_0^+ \setminus X_0 \neq \emptyset$, то выбрать произвольную вершину $y \in X_0^+ \setminus X_0$ и перейти к следующему шагу.

6°. $X_0^- := \{x \in X / \neg (\exists z \in X ((z, x) \in W))\}$.

7°. Если $\Gamma(y) \cap X_0^- = \emptyset$, то перейти к шагу 11°.

8°. Если $\Gamma(y) \cap X_0^- \neq \emptyset$, то выбрать произвольную вершину $x \in \Gamma(y) \cap X_0^-$, выбрать некоторую цепь $C(y, x)$ нечетной длины $2l+1$, где $l \geq 0$, состоящую поочередно из дуг $C(y, x, U \setminus W)$, принадлежащих $U \setminus W$, и при $l \neq 0$ из дуг $c(y, x, W)$, принадлежащих W .

9°. $W' := (W \setminus C(y, x, W)) \cup C(y, x, U \setminus W)$.

10°. $X_0^+ := X_0^+ \setminus \{y\}$ и перейти к шагу 4°.

11°. $Z := \{x \in X \setminus \Gamma(y) / \exists z \in \Gamma(y) ((x, z) \in W')\}$, $\Gamma(Z) := \Gamma(Z) \setminus (Z \cup \{y\})$.

12°. Если $\Gamma(Z) \setminus \Gamma(y) = \emptyset$, то $X_0^+ := X_0^+ \setminus \{y\}$, и перейти к шагу 4°.

13°. Если $\Gamma(Z) \setminus \Gamma(y) \neq \emptyset$, то $\Gamma(y) := \Gamma(Z)$ и перейти к шагу 7°.

Этим завершается описание алгоритма.

Так как оргграф L конечный, легко заметить, что после конечного числа шагов мощность множества X^+ уменьшится. В конце концов будет выполняться условие шага 4° и алгоритм завершит свою работу.

Легко заметить, что трудоемкость описанного алгоритма $O(n')$, где n — количество вершин рассматриваемого оргграфа.

Пусть $H = (X, W)$ получен из оргграфа L после применения над ним описанного алгоритма. Через $\bar{X}_0$ обозначим множество тупиковых вершин оргграфа H .

Замечание 1. Из описанного алгоритма легко заметить, что всякая нетривиальная компонента оргграфа $H = (X, W)$ — простая ориентированная цепь, т. е. H — орлес оргграфа L . Докажем, что имеет место следующая

Лемма 2. $O(L) = |\bar{X}_0|$.

Пусть $T = (X, V)$ — некоторый орлес ориентированного графа L , $X_0(T)$ — множество тупиковых вершин и $|X_0(T)| = O(L)$.

По замечанию 1, $|X_0(T)| \leq |\bar{X}_0|$. Остается показать, что имеет место неравенство

$$|X_0(T)| \geq |\bar{X}_0|. \quad (*)$$

Определим функцию φ , отображающую множество $\bar{X}_0$ в множество $X_0(T)$ следующим образом:

а) Пусть $x \in \bar{X}_0 \cap X_0(T)$.

Будем полагать $\varphi(x) = x$.

б) Пусть $x \in \bar{X}_0 \setminus X_0(T)$.

Ясно, что x — вершина, удаленная (в ходе работы алгоритма) из X_0^+ при шаге 12°. Очевидно существуют дуги $(x = x_1, y_1) \in V \setminus W$ и $(x_2, y_1) \in W \setminus V$. Если при $i \geq 2$ $x_i \in X_0(T)$, то полагаем $\varphi(x) = x_i$. Пусть $x_i \notin X_0(T)$. Тогда выберем дуги $(x_i, y_i) \in V \setminus W$ и $(x_{i+1}, y_i) \in W \setminus V$ и т. д. Если $j \geq 2$ — наименьшее число, для которого $x_j \in X_0(T)$, то положим $\varphi(x) = x_j$. Таким образом отображение φ определено для всех $x \in \bar{X}_0$.

Покажем, что при $x', x'' \in \bar{X}_0$ и $x' \neq x''$ имеет место $\varphi(x') \neq \varphi(x'')$.

Действительно, при $x' \in \bar{X}_0 \cap X_0(T)$ или $x'' \in \bar{X}_0 \cap X_0(T)$ утверждение очевидно. В случае $x', x'' \in \bar{X}_0 \setminus X_0(T)$, $x' \neq x''$ и $\varphi(x') = x'_j = x'_i = \varphi(x'')$ в W найдутся дуги (x'_i, y_{i-1}) и (x'_i, y_{i-1}) , что противоречит замечанию 1. Этим доказывается неравенство (*), а значит и лемма.

Теорема. Описанный выше алгоритм во всяком ациклическом оргграфе L выделяет $s(L)$ попарно непересекающихся простых ориентированных цепей, покрывающих все вершины L .

Действительно, достаточно воспользоваться леммами 1 и 2.

Замечание 2. С помощью приведенного алгоритма можно решить задачу минимизации числа параллельно идущих вдоль канала магистралей, возникающую при автоматизации проектирования электронных схем.

Авторы выражают глубокую благодарность Католин Пастер, обратившей их внимание на эту задачу.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Զ. Ա. ԿԱՐԵՅԱՆ, Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

Կոդմնորոշված գրաֆի համիլտոնյան փակման բիվր

Աղեղների նվազագույն քանակը, որոնք ավելացնելուց հետո L կոդմնորոշված գրաֆում առաջանում է համիլտոնյան ցիկլ, կոչվում է L գրաֆի համիլտոնյան փակման թիվ և նշանակվում է $r(L)$ -ով: $c(L)$ -ով նշանակենք գույգ առ գույգ չհասկող պարզ կոդմնորոշված շղթաների նվազագույն քանակը, որոնք ծածկում են L կոդմնորոշված գրաֆի բոլոր գագաթները:

(2-4) աշխատանքներում կամայական ոչ կոդմնորոշված H գրաֆի համար մտցվում են $r(H)$ և $c(H)$ թվերը և ստումնասիրվում են դրանք գրաֆների մի շարք պարզ դասերի համար:

Ներկա աշխատանքում տրվում է սլոգորիթմ, որը կամայական ցիկլազերծ L կոդմնորոշված գրաֆում առանձնացնում (անջատում) է $c(L)$ թվով գույգ առ գույգ չհասկող պարզ կոդմնորոշված շղթաներ, որոնք ծածկում են L գրաֆի բոլոր գագաթները և դրանով դառնում է $r(L)$ թիվը: Նշված սլոգորիթմի միջոցով կարելի է լուծել էլեկտրոնային սխեմաների նախագծման ավտոմատիզացիայի մեջ ծագող գույգահեռ լարերի քանակի մինիմիզացիայի խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Зыков, Теория конечных графов, 1, «Наука», Новосибирск, 1969.
² S. E. Goodman, S. T. Hedetniemi, Lect. Notes. Math., 406, 262—272 (1974). ³ S. E. Goodman, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, J. Assoc. Comput. Mach., 22, No. 3 (1975).
⁴ F. T. Boesch, S. Chen, J. A. M. McHugh, Lect. Notes. Math., 406, 201—212 (1974).
⁵ З. А. Карян, ДАН АрмССР, т. 67, № 3 (1978). ⁶ Л. М. Витавер, ДАН СССР, т. 147, № 4 (1962).

УДК 512.643.2

МАТЕМАТИКА

А. Г. Гаспарян

Приложение многомерных матриц к исследованию многочленов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 14/XII 1979)

В настоящей заметке применяется многомерно-матричный подход к исследованию корней алгебраических многочленов. Рассмотрены многомерные матрицы, определенным образом составленные из коэффициентов многочленов, и порождаемые ими детерминанты применены к вопросам о кратностях и о локализации корней. Попутно установлены неравенства, являющиеся многомерным аналогом неравенства Ньютона с взвешенными элементарными симметрическими функциями, а также получены некоторые необходимые условия знакоопределенности и знакопостоянства однородных форм высших степеней.

Вопрос о существовании корня заданной кратности был рассмотрен еще Д. Гильбертом в терминах инвариантных многочленов ⁽¹⁾ (более общий результат в том же направлении содержится в ⁽²⁾).

Для детерминантов рассматриваемых матриц получены выражения, позволяющие указать нижние границы для максимума модуля корней и максимума модуля разности корней многочленов, а также верхние границы для минимумов этих величин. Оценки верхних границ максимумов и нижних границ минимумов указанных величин хорошо известны (см., например, монографию ⁽³⁾).

п. 1. Гипердетерминанты многочленов

Каждому многочлену n -ой степени над полем комплексных чисел

$$a(z) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i z^{n-i} \quad (a_0 \neq 0)$$

поставим в соответствие систему (A_p) ($p = 2, \dots, n$) многомерных матриц ⁽¹⁾, определяемую следующим образом: $A_p = [a_{i_1 \dots i_p}], a_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1} + \dots + a_{i_p} (i_1, \dots, i_p = 0, 1)$. Для гипердетерминантов матриц A_p введем обозначение Δ_p .

Теорема 1. Для гипердетерминантов Δ_p , соответствующих алгебраическому многочлену $a(z) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i z^{n-i}$, справедливы следующие формулы представления:

$$\Delta_{2l} = \frac{(-1)^l a_0^2}{2(n)_l \binom{n}{2l}} \sum_1^n (z_{i_1} - z_{i_2})^2 \dots (z_{i_{2l-1}} - z_{i_{2l}})^2, \quad (1)$$

$$\Delta_{2l+1} = \frac{(-1)^{l+1} a_0^2}{(2l+1)(n)_l \binom{n}{2l+1}} \sum_1^n z_{i_1} (z_{i_2} - z_{i_3})^2 \dots (z_{i_{2l}} - z_{i_{2l+1}})^2, \quad (1')$$

где суммы берутся по таким всевозможным размещениям (без повторений) из числа $1, \dots, n$ по индексам $i_1, \dots, i_{2l}$ (соответственно по индексам $i_1, \dots, i_{2l+1}$), что порядок расположения скобок и индексов в самих скобках несуществен.

Следствие 1. Если многочлен $a(z)$ n -ой степени ($n > 1$) обладает корнем кратности m , причем $m > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, то имеет место ряд равенств:

$$\Delta_{2(n-m+1)} = 0; \Delta_{2(n-m+1)+1} = 0; \dots; \Delta_n = 0.$$

Следствие 2. Если все корни многочлена $a(z) = a_0 \prod_1^n (z - z_i)$ вещественны ($a_0 \neq 0$ и также вещественно), то $(-1)^l \Delta_{2l} \geq 0, l =$

$$1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Следствие 3 (признак существования комплексных корней). Если $a(z)$ — многочлен n -ой степени с действительными коэффициентами и при каком-либо $l = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ выполняется неравенство

$$(-1)^l \Delta_{2l} < 0,$$

то многочлен имеет комплексные корни.

Следствие 4. Пусть $a(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$ — многочлен с действительными коэффициентами. Тогда, если $\Delta_4 < 0$, то многочлен имеет ровно два действительных и два комплексных взаимно-сопряженных корня.

п. 2. Максимальная кратность корней.

Предложение 1. Пусть все корни и коэффициенты многочлена $a(x) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a_l x^{n-l}$ ($a_0 \neq 0, n > 2$) действительны.

Многочлен $a(x)$ имеет корень максимальной кратности m

$$\left(m > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right)$$

условия: $(-1)^{n-m} \Delta_{2(n-m)} > 0; \Delta_{2(n-m+1)} = 0.$

Следствие. В условиях предложения 1 максимальная кратность корней многочлена $a(x)$ равна $m \left(m > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right)$ в том и только в том случае, если выполняются условия:

$$(-1)^l \Delta_{2l} > 0 \text{ при любом } 1 \leq l \leq n-m \text{ и}$$

$$\Delta_{2l} = 0 \text{ при любом } n-m \leq l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Если задан многочлен $a(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i x^{n-i}$ с действительными

коэффициентами, о котором заранее известно, что все его корни действительны, то можно вычислить максимальную кратность его корней. Предложение 1 и следствие из него позволяют дать следующий алгоритм для решения такой задачи:

0-й шаг. Вычислить $\Delta_{2(n/2)}$. Если $\Delta_{2(n/2)} = 0$, то имеет место цепочка соотношений

$$\Delta_{2l} = 0 \text{ при всех } n-m < l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ и } (-1)^{n-m} \Delta_{2(n-m)} > 0,$$

из которой определяется m -максимальная кратность. Если же $(-1)^{n/2} \times \Delta_{2(n/2)} > 0$, перейти к следующему шагу.

i -й шаг ($i > 0$). Применить 0-й шаг к многочлену $a_i(x)$ -НОД многочлена $a_{i-1}(x)$ и его производной (полагаем $a_0(x) = a(x)$). Если при этом выяснится максимум кратности корней многочлена $a_i(x)$, равный некоторому m_i , то $m = m_i + i$. В противном случае перейти к $i+1$ -му шагу.

В последовательности шагов есть некоторый последний — k -й, на котором либо непосредственно выясняется искомый максимум $m = m_k + k$, либо $a_k(x) = 1$, и тогда $m_k = 0$, и, следовательно, $m = k$.

п. 3. Неравенства с взвешенными элементарными симметрическими функциями.

Пусть $x_i \in R (i = 1, \dots, n)$ и $p_k (k = 0, \dots, l)$ — взвешенные элементар-

ные симметрические функции чисел x_i : $p_k = \binom{n}{k}^{-1} \sum x_{i_1} \dots x_{i_k}$.

Известны классические неравенства Ньютона (*):

$$|p_{i+j}| \leq 0 \quad (i, j = 0, 1; 0 \leq r \leq n-r). \quad (2)$$

Неравенства (2) являются частным случаем более общего утверждения.

Теорема 2. Для произвольных $x_1, \dots, x_n \in R$ и фиксированных

l и $r \left(1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor; 0 \leq r \leq n-2l \right)$ имеет место неравенство:

$$(-1)^{|P|} |P_{i_1, \dots, i_{2l}}| \geq 0, \quad (i_1, \dots, i_{2l} = 0, 1). \quad (3)$$

п. 4. Необходимые условия знакоопределенности форм.

Рассмотрим однородную симметрическую форму 4-ой степени двух действительных переменных, с действительными коэффициентами $a(x, y) = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} a_i x^{4-i} y^i$. Гипердетерминант 4-мерной матрицы 2-го порядка $A = \|a_{k_1+k_2, k_3+k_4}\|$ ($k_1, k_2, k_3, k_4 = 0, 1$), называемой матрицей формы $a(x, y)$, равен: $|A| = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$.

Теорема 3. *Гипердетерминант формы $a(x, y) = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} a_i x^{4-i} y^i$ положителен, если форма знакоопределенная, и неотрицателен, если она знакопостоянная.*

Более обще, рассмотрим однородную симметрическую форму l -ой степени n действительных переменных, с действительными коэффициентами:

$$a(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}.$$

Детерминант той или иной сигнатуры минорной матрицы данной матрицы A принято называть минором когигнатурного детерминанта матрицы A (*).

Теорема 4. *Если однородная симметрическая форма 4-ой степени действительных переменных с действительными коэффициентами знакоопределенная (знакопостоянная), то все главные миноры 2-го порядка гипердетерминанта ее матрицы положительны (соответственно неотрицательны).*

Замечание. Утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4, несправедливы для однородных форм степени $k = 2(2l + 1)$ ($l \geq 1$). Достаточно рассмотреть следующие две бинарные формы:

$$Q_1(x, y) = (x^2 + y^2)^{2l+1};$$

$$Q_2(x, y) = \prod_{k=1}^{2l+1} [y - (a_k + \varepsilon i)x] [y - (a_k - \varepsilon i)x],$$

где $a_i \in R, a_i \neq a_j$ при $i \neq j, \varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Обе они положительно определенные формы, хотя их гипердетерминанты — отличные от нуля числа противоположных знаков.

п. 5. Детерминанты пары многочленов.

Пусть даны два многочлена n -ой степени над полем комплексных чисел:

$$a^{(0)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i^{(0)} x^{n-i}, \quad a^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i^{(1)} x^{n-i}.$$

Составим из их коэффициентов $n + 1$ -мерную матрицу $A(a^{(0)}, a^{(1)}) = \|a_{i_1, \dots, i_n}^{(j)}\|$ ($i_1, \dots, i_n = 0, 1$).

Рассмотрим детерминанты наинизшего и наивысшего родов (перманент $|A(a^{(0)}, a^{(1)})|$ и гипердетерминант $|A(a^{(0)}, a^{(1)})|$) матрицы $A(a^{(0)}, a^{(1)})$.

Лемма. Имеет место следующая формула представления:

$$|A(a^{(0)}, a^{(1)})| = \frac{(-1)^n a_0^{(0)} a_0^{(1)}}{n!} \operatorname{per} \{x_i^{(0)} + x_i^{(1)}\}_1^n. \quad (4)$$

Следствие. Для гипердетерминанта матрицы $A(a^{(0)}, a^{(1)})$ справедлива следующая формула:

$$|A(a^{(0)}, a^{(1)})| = \frac{a_0^{(0)} a_0^{(1)}}{n!} \operatorname{per} \{x_i^{(0)} - x_i^{(1)}\}_1^n. \quad (4')$$

Теорема 5. Пусть $a(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i x^{n-i}$ и $b(y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} b_i y^{n-i}$ — многочлены над C , x^0 — r -кратный корень многочлена $a(x)$ и y^0 — s -кратный корень многочлена $b(y)$.

Тогда имеет место неравенство $r+s \leq n$ в каждом из следующих случаев:

$$1) \ x^0 = y^0; \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \neq 0;$$

$$2) \ x^0 y^0 = 1; \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i b_i \neq 0;$$

$$3) \ x^0 = \bar{y}^0; \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i \bar{b}_{n-i} \neq 0;$$

$$4) \ x^0 \bar{y}^0 = 1; \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i \bar{b}_i \neq 0;$$

$$5) \ x^0 = -y^0; \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \neq 0;$$

$$6) \ x^0 y^0 = -1; \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_i \neq 0;$$

$$7) \ x^0 = -\bar{y}^0; \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i \bar{b}_{n-i} \neq 0;$$

$$8) \ x^0 \bar{y}^0 = -1; \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i \bar{b}_i \neq 0.$$

Следствие. Пусть $a(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i x^{n-i}$ — многочлен над C , α — его корень кратности r . Тогда выполняется неравенство $r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ во всех перечисленных ниже случаях.

1) α — любое комплексное число, n четно.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i a_{n-i} \neq 0;$$

2) α — любое действительное число и $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i \bar{a}_{n-i} \neq 0;$

3) $|\alpha| = 1; \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} |a_i|^2 \neq 0;$

4) $\alpha = \pm 1; \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i \neq 0;$

5) $\operatorname{Re} \alpha = 0; \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i \bar{a}_{n-i} \neq 0;$

6) $\alpha = \pm i; \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i \neq 0.$

п. 6. Локализация корней многочленов.

Пусть $z_1, \dots, z_n$ — корни многочлена $a(z) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i z^{n-i}$. Введем следующие обозначения:

$$D^{(k)} = \max_{1 \leq l, j \leq n-k} |z_l^{(k)} - z_j^{(k)}|, \quad d^{(k)} = \min_{1 \leq l, j \leq n-k} |z_l^{(k)} - z_j^{(k)}|,$$

$$R^{(k)} = \max_{1 \leq l \leq n-k} |z_l^{(k)}|, \quad r^{(k)} = \min_{1 \leq l \leq n-k} |z_l^{(k)}|,$$

где $z_1^{(k)}, \dots, z_{n-k}^{(k)}$ — корни k -ой производной многочлена $a(z)$ (при этом $a^{(0)}(z) \equiv a(z)$).

Исходя из формул (1) и (1') для гипердетерминантов можно получить некоторые оценки нижних границ для $D^{(k)}$ и $R^{(k)}$ и верхних границ для $d^{(k)}$ и $r^{(k)}$. Так, например, формула (1) применительно к многочлену $a^{(k)}(z)$ приводит к следующим оценкам для $D^{(k)}$ и $d^{(k)}$:

$$D^{(k)} \geq \max_{1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \left[\frac{2^{l+1} \binom{n-k}{l}}{\binom{2l}{l}} \left| \frac{\Delta_{2l}}{a_0^2} \right| \right]^{\frac{1}{2l}}; \quad (5)$$

$$d^{(k)} \leq \min_{1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \left[\frac{\binom{2l}{l}}{2^{l+1} \binom{n-k}{l}} \left| \frac{W^{(k)} a_0^2}{\Delta_{2l}} \right| \right]^{\frac{1}{\binom{n-k}{2} - l}}, \quad (6)$$

где Δ_{2l} — гипердетерминанты многочлена $a(z)$, $W^{(k)}$ — дискриминант многочлена $(a_0^{(k)})^{-1} a^{(k)}(z)$.

В частности, полагая в (5) и (6) $k=0$, получаем соответствующие оценки для D и d .

С помощью формулы (1') выявляется следующая связь между величинами $R^{(k)}$ и $D^{(k)}$:

$$R^{(k)} D^{(k)-2l} \geq \frac{2^l \binom{n-k}{l} |\Delta_{2l+1}|}{\binom{2l}{l} |a_0|^2} \quad (7)$$

$$\left(1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor \right).$$

Рассмотрим матрицы более общего вида по сравнению с матрицами A_p :

$$A_{r,p} = |a_{r+l_1+\dots+l_p}| \quad (l_1, \dots, l_p = 0, 1); \quad 0 \leq r \leq n-2, \quad p = 2, \dots, n-2.$$

Гипердетерминанты матриц $A_{r,p}$ обозначим через $\Delta_{r,p}$. В частности, $\Delta_{0,p} = \Delta_p$.

Замечая, что

$$\Delta_p((a^{(k)})'(z)) = \left(\frac{a_n^{(k)}}{a_0} \right)^2 \Delta_{n-k-p,p}(a(z)),$$

и применяя формулы (1) и (1') к многочлену $(a^{(k)})'(z)$, приходим к другим соотношениям, связывающим $R^{(k)}$ и $D^{(k)}$:

$$R^{(k)2(n-k-2l)} D^{(k)2l} \geq \frac{2^{l+1} \binom{n-k}{l}}{\binom{2l}{l}} \left| \frac{\Delta_{n-k-2l,2l}}{a_0^2} \right|; \quad (8)$$

$$R^{(k)2(n-k-2l)-1} D^{(k)} \geq \frac{2^l \binom{n-k}{l}}{\binom{2l}{l}} \left| \frac{\Delta_{n-k-2l-1,2l+1}}{a_0^2} \right|. \quad (8')$$

Зная верхнюю границу для какой-либо из величин $R^{(k)}$ и $D^{(k)}$, с помощью (7), (8) и (8') можно получить соответствующие нижние границы для другой. Например, если M — верхняя граница для D (некоторые оценки см. в (1)), то из (7) следует оценка для R :

$$R \geq \max_{1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{2^l \binom{n}{l} |\Delta_{2l+1}|}{\binom{2l}{l} |a_0|^2 M^{2l}}, \quad (9)$$

и обратно, если L — верхняя граница для R (оценки этой величины также см. в (3)), то

$$D \geq \sqrt[2l]{\frac{\binom{n}{l} |\Delta_{2l+1}|}{\binom{2l}{l} |a_0|^{2l} L}} \quad (10)$$

Применяя формулу (1) к многочлену $(a^{(k)})^l(z)$, приходим к следующему неравенству:

$$r^{(k)} \leq D^{(k)} \min_{1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \left[\frac{\binom{2l}{l} |a_{n-k}|^2}{2^{l+1} \binom{n-k}{l} |\Delta_{n-k-2l, 2l}|} \right]^{\frac{1}{2l}} \quad (11)$$

Заменяя в (11) $D^{(k)}$ на $M^{(k)}$, где $M^{(k)}$ — верхняя граница для $D^{(k)}$, можно получить соответствующую верхнюю границу для $r^{(k)}$.

Пусть $a(x)$ и $b(y)$ — многочлены n -ой степени над C , x_i — корни первого и y_i — корни второго многочлена ($i=1, \dots, n$). Введем обозначения:

$$D(a, b) = \max_{i,j} |x_i - y_j|, \quad d(a, b) = \min_{i,j} |x_i - y_j|.$$

Из (4') получаются следующие оценки для этих величин:

$$D(a, b) \geq \left| \frac{|A(a, b)|}{a_0 b_0} \right|^{\frac{1}{n}}, \quad (12)$$

$$d(a, b) \leq \left| \frac{a_0 b_0 K(a, b)}{|A(a, b)|} \right|^{\frac{1}{n(n-1)}}, \quad (13)$$

где $K(a, b)$ — коммутант многочленов $a_0^{-1}a(x)$ и $b_0^{-1}b(x)$.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

ԱՍ. ԿԱՊԱՐՅԱՆ

Քաղաքացիական մատրիցաների կիրառումը քաղաքացիական հետազոտության մեջ

Դիտարկված են քաղաքացիական հորձակիցներից կազմված քաղաքացիական մատրիցաներ, Այդ մատրիցաների դիտերմինանտների համար ստացված են բանաձևեր և ցույց են տրված այդ բանաձևերի տարրեր կիրառությունները քաղաքացիական արմատների քաղաքացիական կոթյանը և լոկալիզացիային վերաբերվող հարցերում:

Իլիազոր միներների տերմիններով ձևակերպված են 4-րդ աստիճանի համասեռ ձևերի նշանա-որոշակիություն անհրաժեշտ պայմանները: Քաղաքացի

դետերմինանտների համար ստացված են անհավասարություններ, որոնք մասնավոր դեպքում ներկայացնում են նյութոնի հայտնի անհավասարություններ. կշռյալ էլեմենտար սիմետրիկ ֆունկցիաների վերաբերյալ.

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր ՈՒՄ

¹ *D. Hilbert*, *Math. Annalen*, 42, 313—373 (1893). ² *Дж. Хаджисов*, *Вестник МГУ*, сер. математика, № 1, 1965. ³ *М. Пароди*, *Локализация характеристических чисел матриц и ее приложения*. Пер. с франц., ИЛ, М., 1960. ⁴ *Н. П. Соколов*, *Пространственные матрицы и их приложения*, Изд-во физ.-мат. лит., М., 1960. ⁵ *И. Маркус, Х. Милл*, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*, «Наука», М., 1972. ⁶ *Н. П. Соколов*, *Введение в теорию многомерных матриц*, «Научная думка», Киев, 1972.

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

А. К. Погосян

О послеотказовых характеристиках системы $E_k|G|r|\infty$ с уровнем $n \geq r$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 19/XII 1979)

Рассматривается r -канальная система массового обслуживания с ожиданием. Входящий поток — поток восстановления специальной структуры. Промежутки между соседними поступлениями вызовов одинаково распределены, представимы в виде суммы k независимых показательно распределенных случайных величин, у i -ой ($i = \overline{1, k}$) из которых параметр равен $\lambda_i > 0$.

Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и имеют функцию распределения $B(t)$, $B(+0) = 0$.

Первые $n-r$ места для ожидания образуют первый бункер. Состояния системы — число вызовов в системе, которые по числу вызовов перенумерованы числами $0, 1, 2, \dots$.

Переполнение первого бункера, т. е. переход из состояния n в $n+1$ ($n \rightarrow n+1$), называется отказом системы, обратный переход ($n+1 \rightarrow n$) — восстановлением. Моменты отказов и восстановлений системы отдельно друг от друга перенумерованы последовательно числами $0, 1, 2, 3, \dots$.

Процесс состояний системы как функция времени — регенерирующий. Моменты регенерации — моменты начал периодов занятости, т. е. моменты переходов $0 \rightarrow 1$. Период регенерации — промежуток между соседними моментами регенерации.

Введем в рассмотрение события:

A — (на отдельно взятом периоде регенерации произошел отказ системы);

D — (на отдельно взятом периоде регенерации осуществилась следующая цепочка последовательных переходов $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow n+1$ и после первого отказа до конца данного периода регенерации не наблюдалось поступление вызовов).

Введем в рассмотрение случайные величины:

v — число отказов за период регенерации, за который наблюдался отказ системы;

$\tau_m^-(m \geq 1)$ — время с момента m -го отказа до m -го восстановления;

$\tau_m^+(m \geq 0)$ — время с момента m -го восстановления до $(m+1)$ -го отказа;

$\tau_m(m \geq 1)$ — время с момента m -го отказа до конца текущего периода регенерации.

Пусть $(j \geq 1, t \geq 0)$

$$\lambda^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i^{-1}; \quad \Lambda = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta_i) = \int_0^{\infty} t^k dB(t); \quad \bar{B}(t) = 1 - B(t);$$

$$I = \int \int \dots \int_{x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 > x_0 = 0} \left(\prod_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^{k-1}}{(k-1)!} \right) \left(\prod_{i=0}^{r-1} \bar{B}(x_n - x_i) \right) dx_1 \dots dx_n$$

q — вероятность отказа системы на отдельно взятом периоде регенерации.

Основные результаты сообщения формулируются в теоремах 1–5.

Теорема 1. Пусть при фиксированных n, r и k

$$\chi = \beta_{n(k+1)} / \beta_1^{kn} \rightarrow 0.$$

Тогда

$$P\{\tau_m^- > x\} \rightarrow e^{-\chi}(x \geq 0)$$

равномерно по номеру m .

Пусть

$$T(x) = \int \int \dots \int_{x_n > \dots > x_1 > x_0 = 0} \left(\prod_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^{k-1} \right) \left(\prod_{i=0}^{r-1} \bar{B}(x_n - x_i + x) \right) dx_1 \dots dx_n;$$

заметим, что

$$I = \left\{ \frac{\Lambda}{(k-1)!} \right\}^n T(0).$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1

$$P\{\tau_m^- > x\} \sim \frac{T(x)}{T(0)}$$

равномерно по номеру m .

Теорема 3. Если $\chi \rightarrow 0$ и $\beta_{n+p} / \beta_{n+p-1} < \infty, (p \geq 1)$, то

$$M(\tau_m)^p < \infty,$$

где M — знак математического ожидания.

Теорема 4. В условиях теоремы 1

$$M\tau_m^- \sim M\tau_0^- \sim (\lambda q)^{-1}$$

равномерно по m ($m \geq 1$).

Теорема 5. В условиях теоремы 3

$$M(z_m)^p \sim \frac{P}{T(0)} \int_0^{\infty} x^{p-1} T(x) dx$$

равномерно по m ($m \geq 1$).

При доказательстве основных результатов существенно используются следующие вспомогательные утверждения

Лемма 1. В условиях теоремы 1 $P(A) \sim P(D)$.

Лемма 2. В условиях теоремы 1 $M \sim 1$.

Автор выражает благодарность А. Д. Соловьеву и Э. А. Даниеляну за постановку задач и помощь в процессе выполнения работы.

Вычислительный центр

Академии наук Армянской ССР и

Ереванского государственного университета

Ա. Կ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

$n \geq r$ մակարդակով $E_n|G|^\infty$ համակարգի ետվրարային
բնութագրիչների մասին

Դիտարկում է $n \geq r$ մակարդակով $E_n|G|^\infty$ զանգվածային ապասարկման համակարգը, հետազոտված է հաջորդական վթարների և վերականգնումների միջև ընկած ժամանակների ասիմպտոտիկ վարքը, ինչպես նաև ապացուցված է ետվրարային բնութագրիչների մոմենտների զուգամիտությունը:

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

В. С. Виденский

Отрицательный ответ на один вопрос С. Н. Бернштейна

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/1 1980)

1. В последние годы многочлены Бернштейна ⁽¹⁾

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad f \in C[0, 1] \quad (1)$$

были предметом многочисленных обобщений и исследований. Может быть, интерес к этой теме отчасти объясняется тем, что многочлены Бернштейна являются простейшим примером линейных положительных операторов, теория которых развивается с начала пятидесятих годов (см. ⁽²⁾ и ⁽³⁾). Кроме того, многочлены Бернштейна и их обобщения играют определенную роль в проблеме моментов (см. ⁽⁴⁻⁶⁾), а также встречаются во многих других вопросах теории функций.

В частной беседе со мной в 1948 г. С. Н. Бернштейн, ссылаясь на теоретико-вероятностную интуицию, поставил следующий вопрос, касающийся возможного обобщения многочленов ⁽¹⁾. Пусть $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ — полная в пространстве $C[0, 1]$ система Маркова такая, что при любом n по системе $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ можно построить линейно независимую систему многочленов $\{\varphi_{nk}\}_{k=0}^n$, удовлетворяющую условиям*

$$\varphi_{nk}(x) \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{nk}(x)}{\varphi_{n-1, k-1}(x)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{nk}(x)}{\varphi_{n-1, k-1}(x)} = \infty. \quad (2)$$

Нельзя ли утверждать, что существуют такие точки $\xi_{nk} \in [0, 1]$, что для любой $f \in C[0, 1]$ последовательность многочленов

$$A_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f(\xi_{nk}) \varphi_{nk}(x) \quad (3)$$

* Такая система $\{\varphi_{nk}\}_{k=0}^\infty$ называется D^* -базисом для $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$. Достаточные условия существования D^* -базиса указаны в ⁽¹⁾ (см. также ⁽⁵⁾) и ⁽⁶⁾. Если $\mu_0 = 1$, то нормирующим условием $\sum_{k=0}^n \varphi_{nk}(x) = 1$ D^* -базис определяется однозначно.

равномерно сходится к f ? С. Н. Бернштейн допускал, что в качестве τ_{nk} можно выбрать точки, в которых функции φ_{nk} достигают максимумов.

Многочлены типа (3) для системы $\{x^n | n^{1/k} x\}$ были впервые построены в классической работе Хаусдорфа⁽⁹⁾; тридцать лет спустя они были переоткрыты в⁽¹⁰⁾ и⁽¹¹⁾ (см. также⁽¹²⁾), где исследование проведено методами теории вероятностей). Для системы рациональных дробей

$$|1, (x - x_{n1})^{-1}|_{n=1}^{\infty}, n \in N, x_{n1} \in R \setminus [0, 1] \quad (4)$$

с фиксированной матрицей полюсов (x_{n1}) конструкция дана в заметках автора⁽¹³⁾,⁽¹⁴⁾.

Казалось, результаты всех этих работ были в пользу гипотезы С. Н. Бернштейна. Впрочем, теоремы о равномерной сходимости $A_n f$ к f в них доказывались при ограничениях более жестких, чем требования, обеспечивающие полноту системы. Так для системы $\{x^n | n^{1/k} x\}$, кроме условия $\sum x_n^{-1} = \infty$, которое является необходимым и достаточным для ее полноты, предполагалось дополнительно, что $\lim a_n = \infty$.

Следуя⁽¹⁴⁾, для системы (4) обозначим через ρ_{n1} расстояние от x_{n1} до отрезка $[0, 1]$; многочлены типа (3) при специальном выборе точек $\tau_{nk} = \tau_{n1}$ обозначим через $B_n f$. В⁽¹⁴⁾ доказано, что условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho_{nk} (1 + \rho_{nk})^{-1} = \infty \quad (5)$$

достаточно, чтобы

$$\forall f \in C[0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n f - f\|_{C[0, 1]} = 0. \quad (6)$$

Между тем, условие, необходимое и достаточное для полноты системы (4) в пространстве $C[0, 1]$, дается равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho_{nk}^{1/k} = \infty \quad (7)$$

(см. ⁽¹⁵⁾, Дополнение 16). Можно было предположить, что не вполне удачно выбраны точки $\tau_{nk} = \tau_{n1}$ или что оценка $\|B_n f - f\|$ допускает улучшение. Однако анализ конструкции привел к противоположному заключению: условие (5) является не только достаточным, но и необходимым для выполнения (6), и более того, никакой другой выбор точек τ_{nk} не может ослабить условия (5). Таким образом, мы получаем отрицательный ответ на поставленный С. Н. Бернштейном вопрос. По системе, удовлетворяющей условию (7) и не удовлетворяющей условию (5), нельзя построить аппроксимирующие многочлены вида (3).

2. Положим: $x \in [0, 1]$; $\omega(f, \frac{1}{n})$ — модуль непрерывности $f \in C[0, 1]$;

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n |x - x_{ni}| = \sum_{k=0}^n a_{nk} x^k (1-x)^{n-k},$$

$$p_{nk}(x) = a_{nk} x^k (1-x)^{n-k} P_n(x).$$

Все $a_{nk} > 0$, так как $|x - x_{ni}| = x|1 - x_{ni}| + |x_{ni}|(1-x)$. Функции p_{nk} удовлетворяют условию (2) и $\sum p_{nk}(x) = 1$, так что $\{p_{nk}\}_{k=0}^n$ является нормированным D^* -базисом системы (4). Если положить $h_{ni}(x) = x(1-x_{ni})(x-x_{ni})^{-1}$, то мы видим, что p_{nk} порождаются производящей функцией

$$g_n(x, y) = \prod_{i=1}^n (h_{ni}(x)y + 1 - h_{ni}(x)) = \sum_{k=0}^n p_{nk}(x) y^k. \quad (8)$$

Точки $\tau_{nk} \in [0, 1]$ определяются равенствами

$$\varphi_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n h_{ni}(x); \quad \varphi_n(\tau_{nk}) = kn^{-1} \quad (k=0, 1, \dots, n), \quad (9)$$

что возможно, так как $h'_{ni}(x) > 0$, и φ_n строго возрастает. Заметим, что определение τ_{nk} формулами (9) соответствует предположению С. Н. Бернштейна, так как

$$p'_{nk}(x) = n(\varphi_n(\tau_{nk}) - \varphi_n(x))p_{nk}(x)/x(1-x).$$

Положим далее

$$s_n = \sum_{i=1}^n p_{ni}(1 + p_{ni})^{-1};$$

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f(\tau_{nk}) p_{nk}(x);$$

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^n (\tau_{nk} - x)^2 p_{nk}(x), \quad d_n = [D_n]^{1/2}.$$

Кроме того, пусть $0 = \xi_{n0} < \xi_{n1} < \dots < \xi_{nn} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, — произвольная матрица,

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f(\xi_{nk}) p_{nk}(x);$$

$$\Delta_n(x) = \sum_{k=0}^n (\xi_{nk} - x)^2 p_{nk}(x), \quad \delta_n = [\Delta_n]^{1/2}.$$

В (14) доказано, что $d_n \leq s_n^{-1}$. Благодаря неравенству Поповичиу, для любой $f \in C[0, 1]$ имеем

$$\|B_n f - f\| \leq 2\omega(f, d_n^{1/2}) \leq 2\omega(f, s_n^{-1/2}),$$

а это и означает, что условие (5) влечет (6). Мы покажем теперь, что из (6) следует (5). Но в действительности, обратное утверждение не зависит от специального выбора точек ξ_{ni} . А именно, если

$$\forall f \in C[0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\| = 0, \quad (10)$$

то $\delta_n \rightarrow \infty$. Как известно (см. (3.3)), условие (10) эквивалентно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0. \quad (11)$$

Это легко видеть: (10) следует из (11) благодаря неравенству

$$\|L_n f - f\| \leq 2\omega(f, \delta_n^{1/2}), \quad (12)$$

а (11) из (10) вытекает из соотношений

$$\Delta_n(x) = \left(\sum_{k=0}^n \xi_{nk}^2 p_{nk}(x) - x^2 \right) - 2x \left(\sum_{k=0}^n \xi_{nk} p_{nk}(x) - x \right),$$

$$\delta_n \leq |L_n(t^2, x) - x^2| + 2|L_n(t, x) - x|.$$

Теорема. *Справедливо неравенство*

$$\max \left(\frac{1}{4n^2}, \frac{1}{16} e^{-3\delta_n} \right) = \delta_n.$$

В частности, для операторов $B_n f$ имеем двустороннюю оценку

$$\frac{1}{16} e^{-3\delta_n} \leq d_n \leq \delta_n^{-1}.$$

Допустим, что $x_{ni} < 0$ при $i \leq r$ и что $x_{ni} > 1$ при $i > r$. Учитывая (8), можем написать

$$p_{ni}(x) \geq h_{n1}(x) \dots h_{ni}(x)(1 - h_{n, i+1}(x)) \dots (1 - h_{nn}(x)).$$

При $i \leq r$ имеем $p_{ni} = |x_{ni}|$,

$$\frac{1}{h_{ni}(x)} = 1 + \frac{1-x}{x} \frac{p_{ni}}{1+p_{ni}} \leq 1 + 3 \frac{p_{ni}}{1+p_{ni}}, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4};$$

при $i > r$ имеем $p_{ni} = x_{ni} - 1$,

$$\frac{1}{1 - h_{ni}(x)} = 1 + \frac{x}{1-x} \frac{p_{ni}}{1+p_{ni}} \leq 1 + 3 \frac{p_{ni}}{1+p_{ni}}, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}.$$

Применяя неравенство $1+t \leq e^t$, находим

$$p_{ni}(x) \geq e^{-3\delta_n} \quad \text{при} \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}.$$

Выбирая точку τ_i по условиям

$$|\xi_{ni} - \tau_i| = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} \leq \tau_i \leq \frac{3}{4},$$

мы получаем окончательно

$$\delta_n \geq (\xi_{nh} - \eta)^2 p_{nh}(\eta) \geq \frac{1}{16} e^{-2\eta_n}$$

Что касается неравенства $\delta_n \geq 1/4n^2$, то это простое утверждение общего характера, которое никак не связано со структурой p_{nh} , а справедливо при любых p_{nh} таких, что $p_{nh}(x) \geq 0$, $\sum p_{nh}(x) = 1$.

Лемма. Справедливы неравенства

$$\frac{1}{n} \leq \max_{1 \leq l \leq n} (\xi_{nl} - \xi_{n, l-1}) \leq 2\delta_n^{1/2}$$

Первое из этих неравенств очевидно, так как $\sum \Delta \xi_{nl} = 1$. Обозначая $\text{Lip}_\mu 1 = \{f: |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|, x_1, x_2 \in [0, 1]\}$. Если $f \in \text{Lip}_\mu 1$, имеем

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq M \sum_{h=0}^n |\xi_{nh} - x| p_{nh}(x) \leq M\delta_n^{1/2}.$$

Положим

$$\max_{1 \leq l \leq n} (\xi_{nl} - \xi_{n, l-1}) = \xi_{nh} - \xi_{n, h-1} = 2\mu, \quad \xi_{nh} + \xi_{n, h-1} = 2\nu,$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [0, \xi_{n, h-1}] \cup [\xi_{nh}, 1], \\ \mu^{-1}(x - \xi_{n, h-1}) & \text{при } x \in [\xi_{n, h-1}, \nu], \\ \mu^{-1}(\xi_{nh} - x) & \text{при } x \in [\nu, \xi_{nh}]. \end{cases}$$

Так как $L_n f_n = 0$, $f_n \in \text{Lip}_{1/\mu} 1$, то имеем

$$1 = f_n(\nu) = \|L_n f_n - f_n\| \leq \mu^{-1} \delta_n^{1/2},$$

и теорема полностью доказана.

Замечая, что $\omega(f_n, \mu) = \omega(f_n, \gamma) = 1$, $\gamma \geq \mu$, мы можем написать

$$\omega(f_n, \delta_n^{1/2}) = \|L_n f_n - f_n\|,$$

что позволяет дополнить неравенство (12) неравенством

$$\sup_{f \in C[0, 1]} \frac{\|L_n f - f\|}{\omega(f, \delta_n^{1/2})} \geq 1.$$

В частности, имеем

$$\sup_{f \in C[0, 1]} \frac{\|B_n f - f\|}{\omega(f, d_n^{1/2})} \geq 1.$$

Для классических многочленов Бернштейна (1) это неравенство известно.

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Բացասական պատասխան Ս. Ն. Բերնշտեյնի հարցին

Դիտարկվում է ֆունկցիաների (4) սխառմը՝ ըստ-ով նշանակվում է հետադարձությունը X_n -ից $[0, 1]$ ։ Ապացուցվում է, որ եթե բավարարվում է (7) պայմանը, բայց չի բավարարվում (5)-ը, ապա Բերնշտեյնի տիպի գծային օպերատորների հաջորդականությունը չի կարող հավասարաչափ մոտարկել ցանկացած $f \in C[0, 1]$ ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Н. Бернштейн, Соч., т. 1, статья № 4, М., 1952 ² П. П. Коровкин, Линейные операторы в теории приближения, Физматгиз, М., 1959. ³ R. A. De Vore, The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, Berlin, 1972 ⁴ F. Hausdorff, Math. Ztschr., vol. 9 (1921). ⁵ М. М. Джрбошян, Р. А. Багиян, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 10, № 6 (1975). ⁶ Р. А. Багиян, ДАН Арм. ССР, т. 61, № 3 (1975). ⁷ С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1937. ⁸ В. С. Виденский, Учен. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена, т. 541 (1972); Современный анализ и геометрия, сб. трудов ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1972. ⁹ В. С. Виденский, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 11, № 4 (1976). ¹⁰ А. О. Гельфонд, Избр. труды, «Наука», М., 1973. ¹¹ I. I. Hirschman, D. V. Widder, Duke Math. Journ., v. 16 (1949) ¹² M. Arato, A. Renyi, Acta math. Acad. Sc. Hung. v. 8 (1957). ¹³ В. С. Виденский, Лит. матем. сб., т. 19, № 1, 1979. ¹⁴ В. С. Виденский, Изв. АН БССР, сер. физ.-мат., № 1, 1979. ¹⁵ Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, «Наука», М., 1965.

УДК 511.765.7

МАТЕМАТИКА

В. А. Нерсисян

Классификация допустимых комплексов двумерных плоскостей в R^n

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрином 17/1 1980)

1. Пусть K^n есть либо пространство R^n либо пространство S^n ; $H_{k,n}$ — многообразие всех ориентированных k -мерных плоскостей в K^n ; S — пространство бесконечно дифференцируемых функций в K^n , быстро убывающих вместе с производными до порядка $n - 1$ включительно. Пусть $Q \in K^n$ и $f \in S$, а $\varphi(h) = \int_n f(Q) dQ$, где $h \in H_{k,n}$. В работе

(¹) И. М. Гельфанд, М. И. Граев поставили новую задачу интегральной геометрии: восстановить $f(Q)$ по ограничению $\varphi(h)$ на некотором подмногообразии $K \subset H_{k,n}$ размерности n . Такие подмногообразия они называли допустимыми комплексами. Там же описаны все допустимые комплексы прямых „общего положения“ в S^n . Полное описание допустимых комплексов прямых в S^n дано К. Майусом (²), (³). В нашей работе рассматриваются допустимые комплексы (в том же смысле) двумерных плоскостей в R^5 и дается их геометрическая классификация.

2. В дальнейшем

$$i, j = \overline{1, n}; \quad \alpha, \beta = \overline{5, n}; \quad a, b = \overline{1, 2}; \quad N, L = \overline{1, 4}.$$

К каждой плоскости $h \in H_{2,n}$ присоединим семейство ортонормированных реперов $\{M; e_i\}$ так, чтобы векторы e_a лежали в h . Уравнения инфинитезимального перемещения репера примут вид

$$dM = \omega^a e_a, \quad de_N = \omega_N^i e_i, \quad de_a = \omega_a^i e_i. \quad (1)$$

Главными на этом расслоении реперов $F(R^n) \rightarrow H_{2,n}$ являются формы

$$\omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega_a^3, \omega_a^4, \omega_a^5. \quad (2)$$

Определение 1. Подмногообразие $K \subset H_{2,n}$ размерности n называется комплексом двумерных плоскостей в R^n , если через каждую точку $Q \in R^n$ проходит хотя бы одна плоскость $h \in K$.

Определение 2. Пусть $K \subset H_{2,n}$ комплекс двумерных плоскостей в R^n ; K_Q — четырехмерный конус, образованный двумерными плоскостями, проходящими через точку $Q \in R^n$; $\pi(Q; h)$ — касательная плоскость к конусу K_Q , проходящая через $h \in K_Q$. Комплекс K называется допустимым, если для почти всех $Q \in R^n$ и $h \in K_Q$ плоскость $\pi(Q; h)$ определена и зависит только от h (другие эквивалентные определения см. в (1—3)).

Пусть комплекс K допустим. В силу вложения $K \subset H_{2,n}$ формы (2) индуцируют на K некоторые формы, для которых мы сохраним прежние обозначения. Предположим, что среди форм из (2) линейно независимыми являются $\omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega_1^3, \omega_1^4$. Тогда

$$\omega_1^4 = A_{13}^4 \omega^3 + A_{14}^4 \omega^4 + A_{15}^4 \omega^5 + A_{11}^{41} \omega_1^3 + A_{11}^{42} \omega_1^4; \quad (3)$$

$$\omega_2^4 = A_{23}^4 \omega^3 + A_{24}^4 \omega^4 + A_{25}^4 \omega^5 + A_{21}^{41} \omega_1^3 + A_{21}^{42} \omega_1^4; \quad (4)$$

$$\omega_0^5 = A_{03}^5 \omega^3 + A_{04}^5 \omega^4 + A_{05}^5 \omega^5 + A_{01}^{51} \omega_1^3 + A_{01}^{52} \omega_1^4. \quad (5)$$

Зафиксируем плоскость $h \in K_Q$, точку Q и представим Q в виде $Q = M + x^a e_a$. Так как $dQ = 0$, то $\omega^a + dx^a + x^b \omega_b^a = 0$,

$$\omega^3 + x^a \omega_a^3 = 0, \quad \omega^4 + x^a \omega_a^4 = 0, \quad \omega^5 + x^a \omega_a^5 = 0. \quad (6)$$

Теперь возьмем произвольную точку $P \in h$ и представим ее в виде $P = M + y^a e_a$. Выделим в расслоении $F(R^n) \rightarrow H_{2,n}$ подрасслоение реперов так, чтобы $e_a \subset h$, а $e_A \subset \pi(Q; h)$. Так как $dP \in \pi(Q; h)$, то $\omega^a + y^b \omega_b^a = 0$ для любой точки $P \in h$ с учетом (6) или $\omega^a = \omega_a^a = 0$ в силу соотношений (6). По определению допустимого комплекса мы можем взять произвольные точки на h . Возьмем, скажем, точки $x^1 = x^2 = 0$ и $x^3 = 0, x^4 = 1$. Для них получим $A_{01}^{51} = A_{01}^{52} = A_{03}^{51} = A_{03}^{52} = 0$. Некоторые видоизменения будут и в соотношениях (3), (4), однако это в дальнейшем не существенно. Итак, если комплекс K допустим, то

$$\omega_0^5 = A_0^5 \omega^3. \quad (7)$$

3. Рассмотрим случай $n = 5$. Тогда (7) примет вид

$$\omega_0^5 = A_0 \omega^3, \quad (8)$$

где $A_0 = A_{03}^5$. Пролифференцировав (8) внешним образом, получим

$$\Delta A_0 \wedge \omega^3 + (\omega_0^3 - A_0 \omega^3) \wedge \omega_0^3 + (\omega_0^4 - A_0 \omega^4) \wedge \omega_1^3 = 0, \quad (9)$$

где $\Delta A_0 = -dA_0 + A_0 \omega_0^0 - A_0 A_0 \omega^0$.

а) Пусть формы $\omega^3, \omega_1^3, \omega_1^4$ линейно независимы. Раскрывая (9) по лемме Картана, получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_a &= l_a \omega^5 + l_a \omega_2^5 + n_a \omega_1^5 \\ \omega_a^5 - A_a \omega^5 &= l_a \omega^5 + h_a \omega_1^5 + q_a \omega_2^5 \\ \omega_a^4 - A_a \omega^4 &= n_a \omega^5 + q_a \omega_1^5 + g_a \omega_2^5. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

На многообразии гиперплоскостей в R^5 главными являются формы ω^5, ω_1^5 . В силу (8) имеем трехпараметрическое семейство гиперплоскостей. Пусть $|A_1| + |A_2| > 0$. Из (10) видно, что если $\omega^5 = \omega_1^5 = \omega_2^5 = 0$, то

$$\Delta A_a = 0, \quad \omega_a^5 = A_a \omega^5, \quad \omega_a^4 = A_a \omega^4,$$

а это значит, что в каждой гиперплоскости выделяется двухпараметрическое семейство двумерных плоскостей. Найдем характеристику семейства гиперплоскостей. Напомним, что характеристической плоскостью семейства k -мерных плоскостей P^k называется плоскость P^1 , через которую проходят все соседние с P^k плоскости P^k . Пусть $B = M + z^N e_N$ — произвольная точка на гиперплоскости. Из определения характеристики следует, что $\omega^5 + z^N \omega_N^5 = 0$ или

$$1 + z^N A_N = 0, \quad z^1 = 0, \quad z^2 = 0.$$

Итак, характеристикой нашего семейства гиперплоскостей является прямая, лежащая в $\pi(Q; h)$. Пусть теперь $A_a = 0$. Тогда $\omega_a^5 = 0$, а вместо (10) будем иметь

$$\omega_a^5 = h_a \omega_1^5 + q_a \omega_2^5, \quad \omega_a^4 = q_a \omega_1^5 + g_a \omega_2^5.$$

Если $\omega^5 = \omega_1^5 = \omega_2^5 = 0$, то $\omega_a^5 = \omega_a^4 = 0$. Тогда из (1) следует, что

$$dM = \omega^1 e_a, \quad de_a = \omega_a^2 e_b, \quad de_b = \omega_b^3 e_c, \quad de_c = \omega_c^4 e_d, \quad de_d = \omega_d^5 e_1.$$

Итак, в каждой гиперплоскости получили семейство параллельных двумерных плоскостей. Легко заметить, что в данном случае у нашего семейства гиперплоскостей нет характеристики.

б) Пусть формы $\omega^5, \omega_1^5, \omega_2^5$ линейно записимы. Скажем,

$$\omega_1^5 = \lambda \omega_2^5 + \mu \omega^5. \quad (11)$$

Если продифференцировать соотношения (8) и (11) внешним образом и раскрыть по лемме Картана, то получим

$$\Delta A_a = m_a \omega^5 + n_a \omega_1^5, \quad \lambda A_a \omega^1 + A_a \omega^1 - \lambda \omega_a^1 - \omega_a^1 = n_a \omega^5 + p_a \omega_1^5,$$

$$\Delta \mu = v \omega^5 + v_1 \omega_1^5, \quad \Delta \lambda = v_1 \omega^5 + v_2 \omega_1^5,$$

где

$$\Delta A_a = dA_a - A_a \omega_a^5 - \mu \omega_a^1 + A_a A_b \omega^b,$$

$$\Delta \mu = d\mu - \mu A_a \omega^a + (\mu)^2 \omega^1 + \lambda \mu \omega_1^1 - A_a \omega_a^2 - \lambda A_1 \omega_2^1,$$

$$\Delta \lambda = d\lambda + (\lambda)^2 \omega_1^1 + \lambda \mu \omega^2 + \mu \omega^1 - \omega_2^1.$$

Найдем характеристику нашего двухпараметрического семейства гиперплоскостей $\Gamma^2(K)$. Пусть $T = M + t^2 e_2$ — произвольная точка на $\gamma \in \Gamma^2(K)$. Из определения характеристики следует, что $\omega^3 + t^2 \omega_2^3 = 0$ или

$$1 + t^2 A_2 + t^3 r = 0, \quad t^3 \lambda + t^4 = 0. \quad (12)$$

Итак, характеристикой для $\Gamma^2(K)$ является двумерная плоскость (12), которая пересекается с каждой $h \in K_0$ по прямой. Обозначим через $\Pi^6(K)$ шестипараметрическое семейство всех двумерных плоскостей, лежащих в $\Gamma^2(K)$ и пересекающихся с характеристикой (12) по прямой. В качестве допустимого комплекса возьмем произвольное пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей в $\Pi^6(K)$.

в) Пусть $\Gamma^1(K)$ — семейство гиперплоскостей, зависящее от одного параметра. Тогда $\omega_\lambda^2 = A_\lambda \omega^5$, откуда видно, что уравнение $\omega^5 = 0$ вполне интегрируемо. Следовательно, R^5 расслаивается на однопараметрическое семейство гиперплоскостей. В качестве допустимого комплекса возьмем произвольное пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей, пересекающееся с каждой $\gamma \in \Gamma^1(K)$ по четырехпараметрическому семейству двумерных плоскостей.

Объединим полученные результаты в следующую теорему:

Т е о р е м а. Допустимый комплекс K двумерных плоскостей в R^5 имеет не более чем трехпараметрическое семейство касательных гиперплоскостей. Если семейство касательных гиперплоскостей зависит от трех параметров, то K образован либо двухпараметрическими семействами двумерных плоскостей, лежащих в касательных гиперплоскостях и проходящих через характеристические прямые семейства гиперплоскостей, либо параллельными между собой двумерными плоскостями (характеристики нет). Если семейство гиперплоскостей зависит от двух параметров, то допустимым комплексом будет произвольное пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей в шестипараметрическом семействе двумерных плоскостей, лежащих в касательных гиперплоскостях, которые пересекают характеристические плоскости семейства гиперплоскостей по прямой. Если семейство гиперплоскостей зависит от одного параметра, то имеем расслоение R^5 на это множество гиперплоскостей, а допустимый комплекс образуют пятипараметрические семейства двумерных плоскостей, пересекающихся с каждой нашей гиперплоскостью по четырехпараметрическому семейству двумерных плоскостей.

Автор выражает искреннюю признательность А. М. Васильеву за внимание к работе и полезные советы.

Ереванский государственный университет

R^n -ում երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների
դասակարգումը

Ինքույն $H_{2,n}$ -ը R^n -ում երկչափ հարթությունների բազմաձևությունն է, $K \subset H_{2,n}$ -ը n չափանի ենթաբազմաձևություն է $H_{2,n}$ -ում, K_Q -ը $Q \in R^n$ կետով անցնող երկչափ հարթություններով կազմված ցառաչափ կոն է, $\pi(Q, h)$ -ը K_Q կոնին $h \in K_Q$ կետում շոշափող հարթությունն է:

K կոմպլեքսը կոչվում է թույլատրելի, եթե համարյա բոլոր $Q \in R^n$ և $h \in K_Q$ համար $\pi(Q, h)$ հարթությունը որոշված է և կախված է միայն h -ից: Հոգվածում ապացուցվում է, որ եթե K -ն թույլատրելի կոմպլեքս է, ապա

$$\omega_a^a = A_{a\beta}^a \omega^\beta, \quad \alpha, \beta = \overline{1, n}, \quad a = 1, 2,$$

որտեղ՝ ω^a, ω_a^a -ն $H_{2,n}$ բազմաձևության գլխավոր ֆորմերն են:

Երբ $n=5$, արված է երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների լրիվ դասակարգումը R^n -ում և նրանց երկրաչափական մեկնաբանությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԻՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Функции анализа и его приложения, т. 2, вып. 3 (1968). ² К. Майс, Функции анализа и его приложения, т. 7, вып. 1 (1973). ³ К. Майс, Функции анализа и его приложения, т. 9, вып. 2 (1975)

УДК 517.942

МАТЕМАТИКА

Г. Ю. Таманян

Уравнение Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 21/1 1980)

В этой работе мы предлагаем новый метод определения ширины лакун в спектре оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом. Таким образом мы рассматриваем уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

с 1-периодической функцией $q(x)$. В дальнейшем станет ясно, каким еще условиям должен удовлетворять потенциал $q(x)$. Наш метод заключается в выписывании остатков в асимптотических рядах, в которые разлагаются два линейно независимых решения уравнения (1), рассматриваемого на интервале $[0, 1]$, с последующим определением остатка целой функции $\Delta(\lambda) \pm 2$, нулями которой и являются концы лакун. Мы показываем, что уравнения $\Delta(\lambda) \pm 2 = 0$ можно разрешить и получить для ширины лакуны формулу, из которой можно получить главный член асимптотики ширины лакуны в явной форме.

Итак мы рассматриваем два решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным данным Коши: $y^{(j)}(0, \lambda) = \delta_j^i$, которые мы обозначаем соответственно через $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ и которые (см. (1), (2)) можно разложить в асимптотические ряды:

$$C(x, \lambda) \sim e^{i\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x)}{\lambda^n} + e^{-i\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n(x)}{\lambda^n}; \quad (2)$$

$$S(x, \lambda) \sim e^{i\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n(x)}{\lambda^n} + e^{-i\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_n(x)}{\lambda^n}; \quad (3)$$

Соотношения (2) и (3) означают, что для любого натурального N существуют функции $F_{N1}(x, \lambda)$ и $F_{N2}(x, \lambda)$ такие, что

$$C(x, \lambda) = \sum_{n=0}^N e^{(-1)^n i \lambda x} \frac{c_{nN}(x)}{\lambda^n} + F_{N1}(x, \lambda); \quad (4)$$

$$S(x, i) = \sum_{n=0}^i e^{-n^2 x} \sum_{k=0}^n \frac{z_k(x)}{i^k} + F_{N1}(x, i).$$

Для коэффициентов $c_n(x)$ и $z_n(x)$ верны некоторые рекуррентные соотношения, и эти функции однозначно определяются исходя из начальных данных. Мы проведем все рассуждения для решения $C(x, \lambda)$, а для $S(x, i)$ — все аналогично. Равенство (4) мы коротко запишем так:

$$C(x, i) = I_N(x, i) + F_{N1}(x, i).$$

Несложный прямой подсчет приведет нас к факту: остаток $F_{N1}(x, i)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$F_{N1}'' + [\lambda^2 - q(x)]F_{N1} = \frac{e^{\lambda x} + (-1)^N e^{-\lambda x}}{2D_N} c'_{N+1}(x) \quad (5)$$

с начальными условиями

$$F_{N1}(0, i) = 0, \quad \frac{\partial F_{N1}(0, i)}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Построив функцию Грина $G(x, \xi, i)$ для оператора A , порожденного в $L_2(0,1)$ дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y - i^2 y$ и начальными условиями (6), мы сумеем представить остаток в виде

$$F_{N1}(x, i) = \int_0^1 G(x, \xi, i) f_{N1}(\xi, i) d\xi,$$

где $f_{N1}(x, i)$ есть правая часть уравнения (5).

Аналогичное представление справедливо и для $F_{N2}(x, i)$. Таким образом, коль скоро нам известна некая информация относительно поведения функции $G(x, \xi, i)$ по i , столь скоро мы сможем знать поведение остатков $F_{N1}(x, i)$ и $F_{N2}(x, i)$ по i , а как выяснится в дальнейшем, это является основной информацией, необходимой для получения ширины лакун. Итак дополнительные предположения относительно потенциала $q(x)$ в каждой конкретной ситуации вызваны необходимостью получения нужной информации относительно функции Грина $G(x, \xi, i)$. Целая функция $\Delta(\lambda)$, о которой мы уже упоминали, имеет вид

$$\Delta(\lambda) = C(1, \lambda) + S'(1, \lambda).$$

Поэтому, во-первых, ее можно разложить в асимптотический ряд

$$\Delta(i) \sim e^{i^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{i^n} + e^{-i^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{i^n}$$

и, во-вторых, остаток этого ряда можно представить, очевидно, в виде

$$\Phi_N(i) = F_{N1}(1, i) + F_{N2}(1, i).$$

Теперь нам надо решать следующие уравнения:

$$e^{i\lambda} \sum_{v=0}^N \frac{a_v}{\lambda^v} + e^{-i\lambda} \sum_{v=0}^N \frac{(-1)^v a_v}{\lambda^v} + \Phi_N(i) = \pm 2. \quad (7)$$

Оба они решаются одинаково, и мы будем решать, для определенности, уравнение со знаком плюс в правой части. Его можно переписать в эквивалентной форме так:

$$e^{2i\lambda} \sum_{v=0}^N \frac{a_v}{\lambda^v} + [\Phi_N(i) - 2] e^{i\lambda} + \sum_{v=0}^N \frac{(-1)^v a_v}{\lambda^v} = 0. \quad (8)$$

Для краткости введем обозначения:

$$a = \sum_{v=0}^N \frac{a_v}{\lambda^v}; \quad b = \Phi_N(i) - 2; \quad c = \sum_{v=0}^N \frac{(-1)^v a_v}{\lambda^v}.$$

Тогда, решая уравнение (8), получаем

$$e^{i\lambda} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = E_{\pm N}(\lambda). \quad (9)$$

Но известен факт (см. (3)), что две последовательности корней уравнений (9) обладают тем свойством, что каково бы ни было натуральное N , имеем разложения:

$$\lambda_{n1} = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_N}{n^N} + \frac{\gamma_N}{n^{N+1}};$$

$$\lambda_{n2} = -n - c_0 - \frac{c_1}{n} - \dots - \frac{c_N}{n^N} + \frac{\gamma'_N}{n^{N+1}}.$$

Это коротко запишем так:

$$\lambda_{n1} = a_{n,N} + d_{n,N}; \quad (10)$$

$$\lambda_{n2} = -a_{n,N} + d'_{n,N}. \quad (11)$$

Через Δ_n обозначим ширину лакуны, концами которой являются числа λ_{n1}^2 и λ_{n2}^2 .

Мы имеем

$$\Delta_n = |\lambda_{n1}^2 - \lambda_{n2}^2|$$

или, исходя из (9) и (10),

$$\Delta_n = |2a_{n,N}(d_{n,N} + d'_{n,N}) + (d_{n,N}^2 - d_{n,N}'^2)|. \quad (12)$$

Подставив теперь в (9) выражения (10) и (11), имеем:

$$e^{i d_{n,N}} = e^{-i a_{n,N}} E_{N+}^+(\lambda_{n1});$$

$$e^{i d'_{n,N}} = e^{i a_{n,N}} E_{N+}^-(\lambda_{n2}).$$

Следовательно:

$$d_{n,N} = -a_{n,N} - i \ln |E_N^+(\lambda_{n1})|;$$

$$d_{n,N} = a_{n,N} - i \ln |E_N^-(\lambda_{n2})|.$$

Подставляя эти выражения в (12), получаем окончательно

$$\Delta_n = |\ln^2 |E_N^-(\lambda_{n2})| - \ln^2 |E_N^+(\lambda_{n1})||. \quad (13)$$

Аналогичную формулу получим и при решении уравнения (7) с минусом в правой части. Формула (13) — точная. Мы очевидно получим главный член асимптотики, если вместо λ_{n1} и λ_{n2} подставим в (13) их главные части. Обозначив через L оператор, порожденный (1) в $L_2(-\infty, \infty)$, мы можем сформулировать окончательно теорему:

Теорема. *Главный член асимптотики ширины n -ой лакуны в спектре оператора L дается формулой*

$$\Delta_n \simeq |\ln^2 |E_N^-(n)| - \ln^2 |E_N^+(n)||.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Г. Костюченко за постановку задач, внимание и помощь в работе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

ՉՈՒՆՔԱՆԱԼՆԵՐ

Շառուրմ—Լիուվիլի հավասարումը պարբերական պոտենցիալով

Դիտարկվում է L օպերատորը, որը առաջանում է $L_2(-\infty, \infty)$ տարածության մեջ հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարման հետևանքով՝

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad -\infty < x < \infty,$$

որտեղ՝ $q(x)$ —պարբերական ֆունկցիա է:

Առաջարկվում է նոր մեթոդ L օպերատորի սպեկտրում լակունայի երկարությունը որոշելու համար: Մեթոդի լուծյունը կայանում է ասիմպտոտիկ շարքերի մնացորդների որոշման մեջ: Պարզված է Գրինի ֆունկցիայի դերը այդ հարցում: Հոդվածում մենք ստանում ենք n -րդ լակունայի երկարության համար բանաձև, որը կարելի է կիրառել լակունայի ասիմպտոտիկան որոշելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Я. Д. Тамаркин. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. ² Х. М. Мкоян, ДАН АрмССР, т. 60, № 1 (1975).

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

И. Г. Хачатрян

Об одной обратной задаче

(Представлено в редакцию АН Армянской ССР Р. А. Александрином 24.1.1980)

В настоящей заметке приводятся результаты, которые относятся к спектральным свойствам действующего в пространстве $L_2(0, \infty)$ оператора L , порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[p_{n-1-k}(x) y^{(k)} \right]^{(k)}, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$y^{(v)}(0) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Для оператора L решается обратная задача, аналогичная обратной задаче теории рассеяния (см. (1)).

Лемма 1. Если коэффициенты дифференциального выражения (1) вещественнозначны и удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 x^{k+1} |p_k(x)| dx < \infty, \quad \int_1^\infty |p_k(x)| dx < c, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

то оператор L является самосопряженным (см. (2)).

Ниже на коэффициенты $p_k(x)$ накладываются более ограничительные условия, чем условия (3). А именно, предполагается, что коэффициенты вещественнозначны на полуоси $0 < x < \infty$, аналитичес-

ки продолжаются в сектор $D = \left\{ z; |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right\}$ и удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty x^{v+k+1} \left\{ \sup_{|z|=x} |p_k(z)| \right\} dx < \infty, \quad v, k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

В работе автора (3) доказано, что при условиях (4) уравнение

$$l(y) = \lambda^n y \quad (5)$$

для всех значений параметра λ из полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ имеет решение $y(x, \lambda)$, представимое в виде

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty e^{i\lambda t} K(x, t) dt, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (6)$$

при этом ядро $K(x, t)$ ($0 \leq x \leq t < \infty$) вещественнозначно и $K(x, t) = K_0(x, t - x)$, где функция $K_0(z, \xi)$ ($z \in D; 0 \leq \xi < \infty$) при каждом $\xi \geq 0$ регулярна по z в секторе D и удовлетворяет неравенству

$$|K_0(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} h(\text{Re } z + \frac{\xi}{2}) \exp \left| h_1(\text{Re } z) - h_1\left(\text{Re } z + \frac{\xi}{2}\right) \right|, \quad (7)$$

а монотонно убывающие функции $h(x)$ и $h_1(x)$ определяются по формулам

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-1)2^{k+1}}{(k+1)n \left(\sin \frac{\pi}{2n} \right)^{k+1}} \int_x^\infty (u-x)^{k+1} \left\{ \sup_{\text{Re } z = u} |p_k(z)| \right\} du,$$

$$h_1(x) = \int_x^\infty h(u) du.$$

Очевидно, что $h_1(0) < \infty$. В силу неравенства (7) из формулы (6) следует, что имеет место также формула

$$e^{i\lambda x} = y(x, \lambda) + \int_x^\infty y(t, \lambda) H(x, t) dt, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (8)$$

где ядро $H(x, t)$ ($0 \leq x \leq t < \infty$) удовлетворяет интегральному уравнению

$$H(x, t) + K(x, t) + \int_x^t H(x, u) K(u, t) du = 0.$$

Из этого уравнения следует, что $H(x, t) = H_0(x, t - x)$, где функции $H_0(z, \xi)$ ($z \in D; 0 \leq \xi < \infty$) при каждом $\xi \geq 0$ регулярна по z в секторе D и удовлетворяет неравенству

$$|H_0(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} h\left(\text{Re } z + \frac{\xi}{2}\right) \exp \left| 2h_1(\text{Re } z) - 2h_1\left(\text{Re } z + \frac{\xi}{2}\right) \right|.$$

Обозначим $\omega_k = \exp \left(i\pi \frac{k}{n} \right)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$) и при помощи

функции $y(x, \lambda)$ для значений $\lambda > 0$ введем следующие линейно независимые решения уравнения (5):

$$y_k(x, \lambda) = y(x, \lambda \omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

При каждом $x > 0$ функции $y_k^{(\nu)}(x, \lambda)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$; $k = 1, 2, \dots, n-1$) регулярны по λ в секторе $-\frac{\pi}{n} \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{n}$, а функции $y_0^{(\nu)}(x, \lambda)$ и $y_n^{(\nu)}(x, \lambda)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) регулярны в верхней и нижней полуплоскостях, соответственно. При $\lambda > 0$ составим матрицу $[y_k^{(\nu)}(0, \lambda)]$, содержащую n строк ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) и $n+1$ столбец ($k = 0, 1, \dots, n$). Обозначим через $\Delta_k(\lambda)$ ($0 \leq k \leq n$) минор порядка n этой матрицы, не содержащий ее $(k+1)$ -ый столбец. Определители $\Delta_0(\lambda)$ и $\Delta_n(\lambda)$ регулярны в секторах $-\frac{\pi}{n} \leq \arg \lambda \leq 0$ и $0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{n}$, соответственно.

Лемма 2. Число $\lambda_0^{2\pi/n}$ ($\lambda_0 \neq 0, 0 \leq \arg \lambda_0 \leq \frac{\pi}{n}$) является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $\Delta_n(\lambda_0) = 0$.

Положим

$$S_k(\lambda) = (-1)^{n+k} \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Очевидно, что $S_n(\lambda) \equiv 1$.

Лемма 3. Функции $S_k(\lambda)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) и $S_0(\lambda)$ непрерывны во всех точках* $\lambda > 0$.

Имеют место соотношения

$$S_{n-k}(\lambda) = S_0(\lambda) \bar{S}_k(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

и, в частности, $|S_0(\lambda)| \equiv 1$. Существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_k(\lambda) = S_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

причем числа S_k^0 могут быть построены по аналогии с $S_k(\lambda)$, исходя из уравнения $(-1)^n y^{(2n)} = \lambda^{2n} y$.

Введем следующее решение краевой задачи (5), (2):

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) y_k(x, \lambda), \quad \lambda > 0. \quad (9)$$

Теорема 1. Непрерывная часть спектра оператора L заполняет всю положительную полуось $\mu \geq 0$, а на отрицательной полуоси $\mu < 0$ могут находиться лишь собственные значения оператора L . Множество собственных значений ограничено и может иметь точкой сгущения только $\mu = 0$, причем $\mu = 0$ не является собственным значением. Кратность отрицательных собственных значений

* Аналогичное утверждение доказано в монографии И. М. Рапопорта (*) при условиях $p_k(x) \in L_1(0, \infty)$, однако нам удалось значительно упростить это доказательство и избежать громоздких вычислений.

не превосходит n , а кратность положительных собственных значений не превосходит $n-1$, кроме того, число отрицательных собственных значений кратности n и положительных собственных значений кратности $n-1$ конечно.

Пусть число λ_0^{2n} ($\lambda_0 > 0$ или $\arg \lambda_0 = \frac{\pi}{2n}$) является собственным значением кратности r оператора L , а $\{\varphi_k(x, \lambda_0)\}_{k=1}^r$ — соответствующая система ортонормированных собственных функций. Тогда функция

$$\Phi(x, t, \lambda_0) = \sum_{k=1}^r \varphi_k(x, \lambda_0) \bar{\varphi}_k(t, \lambda_0), \quad 0 \leq x, t < \infty,$$

не зависит от выбора системы $\{\varphi_k(x, \lambda_0)\}$ и представляется в виде

$$\Phi(x, t, \lambda_0) = \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\lambda_0) y_k(x, \lambda_0) \bar{y}_j(t, \lambda_0), \quad (10)$$

где матрица $[N_{kj}]$ является эрмитовой неотрицательной матрицей, ранг которой совпадает с кратностью r собственного значения λ_0^{2n} , причем в случае $\lambda_0 > 0$ имеют место соотношения

$$N_{k0} = N_{0k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$N_{k,n-1-j} = N_{j,n-1-k}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n-1,$$

а при $\arg \lambda_0 = \frac{\pi}{2n}$

$$N_{k,n-1-j} = N_{j,n-1-k}, \quad k, j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Функция $\Phi(x, t, \lambda_0)$ вещественнозначна и симметрична, при этом интегральный оператор с ядром $\Phi(x, t, \lambda_0)$ является ортогональным проектором на собственное подпространство оператора L , соответствующее собственному значению λ_0^{2n} .

Обозначим через $\{\mu_v\}_{v=1}^m$ и $\{\bar{\mu}_s\}_{s=1}^s$ соответственно, последовательности положительных и отрицательных собственных значений оператора L , пронумерованных в порядке убывания модулей (не исключаются случаи $m=0$, $m=\infty$, $s=0$, $s=\infty$). Положим

$$\mu_v = \lambda_v^{2n}, \quad \lambda_v > 0, \quad v = 1, 2, \dots, m,$$

$$\bar{\mu}_s = \rho_s^{2n}, \quad \arg \rho_s = \frac{\pi}{2n}, \quad s = 1, 2, \dots, s.$$

Обозначим

$$R(x, t, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u(x, \lambda) \bar{u}(t, \lambda) d\lambda, \quad \mu > 0,$$

и введем функцию

$$E_n(x, t) = \begin{cases} \sum_{\substack{\rho < 0 \\ \rho_0 < \rho}} \Phi(x, t, \rho, \rho_0), & \rho < 0, \\ \sum_{\substack{\rho > 0 \\ \rho_0 < \rho}} \Phi(x, t, \rho, \rho_0) + R(x, t, \rho^{\frac{1}{1+\alpha}}) + E_0(x, t), & \rho > 0. \end{cases}$$

Теорема 2. Функция $E_n(x, t)$ непрерывна в области $0 \leq x, t < \infty$, вещественнозначна, симметрична и при каждом $x > 0$ по переменной t принадлежит классу $L_2(0, \infty)$. Кроме того, семейство интегральных операторов E_n ($-\infty < \rho < \infty$) с ядрами $E_n(x, t)$ является разложением единицы оператора L .

Если для функции $g(x) \in L_2(0, \infty)$ положить

$$G_k(\lambda) = \int_0^\infty g(x) y_k(x, \lambda) dx, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

(интеграл сходится в смысле метрики в $L_2(0, \infty)$) и учесть формулы (9), (10), то, согласно теореме 2, имеет место равенство. Парсеваля

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |g(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) G_k(\lambda) \right|^2 d\lambda + \\ &+ \sum_{j=1}^m \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) G_k(\rho_j) \bar{G}_j(\rho_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) G_k(\rho_j) \bar{G}_j(\rho_j). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь следующую обратную задачу: восстановить оператор L по набору данных

$$\{S_k(\lambda)\}_{k=0}^{n-1}, \quad \{\rho_j, |N_{kj}(\rho_j)|_{k,j=0}^{n-1}\}_{j=1}^m, \quad \{\rho_j, |N_{kj}(\rho_j)|_{k,j=0}^{n-1}\}_{j=1}^m. \quad (11)$$

Эта задача при $n=1$ совпадает с обратной задачей теории рассеяния.

Введем функцию

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) e^{i\rho_j x} e^{-i\rho_j t} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) e^{-i\rho_j x} e^{i\rho_j t} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{k,j=0}^n \left[S_k(\lambda) \bar{S}_j(\lambda) - S_k^0 \bar{S}_j^0 \right] e^{i\rho_k x} e^{-i\rho_j t} \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Функция $F(x, t)$ ($0 \leq x, t < \infty$) вещественнозначна и симметрична.

Лемма 4. Имеет место формула (см. (8))

$$F(x, t) = H(x, t) + \int_0^\infty H(x, u) H(t, u) du, \quad 0 \leq x \leq t < \infty.$$

Из этой формулы следует, что при каждом $u \geq 0$ и $t \geq 0$ функ-

ция $F(z+u, z+t)$ по переменной z из полуоси $0 < z < \infty$ аналитически продолжается в сектор D и удовлетворяет неравенству

$$|F(z+u, z+t)| \leq \frac{1}{2} h \left(\operatorname{Re} z + \frac{u+t}{2} \right) \exp \left[2h_1(\operatorname{Re} z + u) + \right. \\ \left. + 2h_1(\operatorname{Re} z + t) \right].$$

Используя полученное неравенство, нетрудно убедиться, что при каждом $z \in D$ интегральный оператор с ядром $F(z+u, z+t)$ ($0 \leq u, t < \infty$) является вполне непрерывным в пространстве $L_p(0, \infty)$ при любом p ($1 \leq p < \infty$).

Сформулируем теперь основные результаты настоящей заметки.

Теорема 3. При каждом $x \geq 0$ функция $K(x, t)$ ($x \leq t < \infty$) (см. (6)) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_x^\infty K(x, u)F(u, t)du = 0,$$

причем это уравнение при каждом $x \geq 0$ имеет единственное решение в классе $L_1(x, \infty)$.

Последнее утверждение теоремы 3 доказывается при помощи следующей леммы (см. (3)).

Лемма 5. Пусть $g(x) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ и

$$T_k(\rho) = \int_0^\infty g(x)e^{i\rho x}dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

тогда, если

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) T_k(\rho_j) \bar{T}_j(\rho_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{k,j=1}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) T_k(\lambda_j) \bar{T}_j(\rho_j) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) T_k(\lambda) \right|^2 d\lambda = 0,$$

то $g(x) = 0$ почти всюду.

Теорема 4. Коэффициенты дифференциального выражения (1), удовлетворяющие условиям (4), по набору данных (11) определяются однозначно.

Действительно, решение (6) однозначно определяет уравнение (5), и поскольку функция $F(x, t)$ непосредственно строится при помощи данных (11), то утверждение теоремы 4 следует из теоремы 3.

Մի ճակատագրած խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [p_{n-1-k}(x) y^{(k)}]^{(k)} = \mu y, \quad 0 < x < \infty,$$

$$y^{(v)}(0) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1,$$

որտեղ՝ $p_k(x)$ գործակիցները իրական են $0 < x < \infty$ կիսաոսանցքի վրա. անալիտիկ շարունակվում են $|\arg z| < \pi/2 - \pi/2n$ անկյան մեջ և բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$\int_0^\infty x^{v+k+1} \left| \sup_{\operatorname{Re} z = x} |p_k(z)| \right| dx < \infty, \quad v, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Այդ եզրային խնդրի համար լուծվում է մի ճակատագրած խնդիր, որն իր դրվածքով նման է ցրման տեսության ճակատագրած խնդրին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Марченко, Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, «Научова думка», Киев, 1977. ² М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», М., 1969. ³ И. Г. Хачатрян, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., т. 14, № 6 (1979). ⁴ И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, Киев, 1954. ⁵ И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, № 4 (1951).

УДК 532.135

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР А. Г. Назаров

Об одной реологической модели

(Представлено 24/1 1980)

Рассмотрим следующую зависимость между напряжением, деформацией и скоростью деформации в комплексной форме:

$$\sigma^* = E^* \epsilon^* + \tau^* \frac{d\epsilon^*}{dt}. \quad (1)$$

Здесь

σ^* — комплексное напряжение;

ϵ^* — комплексная деформация;

E^* — комплексный модуль упругости;

τ^* — комплексный коэффициент ньютоновской вязкости.

Положим, что комплексная деформация меняется во времени по гармоническому закону

$$\epsilon^* = \epsilon_0 e^{i\omega t} = \epsilon_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad (2)$$

где ϵ_0 — амплитуда деформации; ω — круговая частота колебаний.

Скорость деформации определится так:

$$\frac{d\epsilon^*}{dt} = \epsilon_0 i \omega e^{i\omega t} = \epsilon_0 (\omega \cos \omega t - \omega \sin \omega t). \quad (3)$$

Комплексный модуль упругости E^* и комплексный коэффициент τ^* ньютоновской вязкости представим в следующих видах:

$$E^* = E_0 e^{i\alpha} = E_0 (\cos \alpha + i \sin \alpha); \quad (4)$$

$$\tau^* = \tau_0 e^{i\beta} = \tau_0 (\cos \beta + i \sin \beta). \quad (5)$$

Подставляя значения (2), (3), (4) и (5) в (1), получим:

$$\begin{aligned} \sigma^* = & E_0 \epsilon_0 [(\cos \alpha \cos \omega t - \sin \alpha \sin \omega t) + i(\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t)] - \\ & - \tau_0 \epsilon_0 \omega [(\cos \beta \sin \omega t + \sin \beta \cos \omega t) + i(-\sin \beta \sin \omega t + \cos \beta \cos \omega t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть вещественная часть от σ^* будет

$$\text{Re} \sigma^* = \sigma.$$

Тогда

$$\varepsilon = E_0 \varepsilon_0 [(\cos \alpha - \mu \omega \sin \beta) \cos \omega t - (\sin \alpha + \mu \omega \cos \beta) \sin \omega t], \quad (7)$$

где $\mu = \frac{\tau_0}{E_0}$. (8)

Правую часть (7) разделим и помножим на множитель

$$k = \sqrt{(\cos \alpha - \mu \omega \sin \beta)^2 + (\sin \alpha + \mu \omega \cos \beta)^2} = \\ = \sqrt{1 + 2\mu \omega \sin(\alpha - \beta) + \mu^2 \omega^2}. \quad (9)$$

Тогда можно записать:

$$\frac{\cos \alpha - \mu \omega \sin \beta}{\sqrt{(\cos \alpha - \mu \omega \sin \beta)^2 + (\sin \alpha + \mu \omega \cos \beta)^2}} = \cos \gamma; \quad (10)$$

$$\frac{\sin \alpha + \mu \omega \cos \beta}{\sqrt{(\cos \alpha - \mu \omega \sin \beta)^2 + (\sin \alpha + \mu \omega \cos \beta)^2}} = \sin \gamma. \quad (11)$$

Подставляя (9), (10) и (11) в (7), получим:

$$\varepsilon = k E_0 \varepsilon_0 \cos(\omega t + \gamma). \quad (12)$$

Левая часть выражения (12) есть внешнее напряжение. Правая часть выражения (12) представляет собой внутреннее напряжение, обусловленное упругими силами и реологическим сопротивлением.

Известно, что фазовый угол γ выражения (4) представляет собой меру рассеяния энергии в гипотезе Е. С. Сорокина. Полнее γ есть поглощение энергии, отнесенное к единице объема материала, к единице потенциальной энергии и к единице дуги полного цикла монохроматического колебания. Для обычных материалов фазовый угол γ достаточно мал, поэтому с достаточной точностью можно принять в выражении (12) ⁽¹⁾

$$\varepsilon_0 = E_0 \sigma_0. \quad (13)$$

где σ_0 — амплитуда упругого напряжения.

В результате из (9) следует, что

$$|\sigma|_{\max} = k \sigma_0. \quad (14)$$

где k является функцией $\mu \omega$ и $(\alpha - \beta)$

$$k = \sqrt{1 + 2\mu \omega \sin(\alpha - \beta) + \mu^2 \omega^2}. \quad (9)$$

Интерес представляют случаи, когда $k > 1$, т. е. $|\sigma_{\max}| > \sigma_0$. Это означает, что максимальное значение внешних сил уравнивается не только максимальным значением упругого сопротивления σ_0 , но и максимальным реологическим сопротивлением, определяемым множителем $k > 1$.

Иначе, при $k > 1$ динамическое сопротивление внешнему воздействию возрастает, и, наоборот, при $k < 1$ динамическое сопротивление внешнему воздействию убывает.

Если фазовые углы α и β совпадают, то

$$k = \sqrt{1 + \mu^2 \omega^2} > 1.$$

При малых фазовых углах также

$$k > 1.$$

Если $\mu\omega$ достаточно велико, то

$$k \approx \mu\omega.$$

Не исключена возможность, что рассматриваемая реологическая модель может быть принята за гипотезу для объяснения повышения динамического сопротивления конструкций, в частности, при сейсмических нагрузках.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

ՈՒՆԻԴԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄՈԴԵԼԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկելով լարումների և դեֆորմացիաների միջև եղած կապը, կոմպլեքս տեսքով ցույց է տրվում, որ ուժերի դինամիկական ազդեցության դեպքում արտաքին լարումների մաքսիսում արժեքն առաձգական դիմադրության մաքսիսումի միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\sigma_{max} = k\sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{1 + 2\mu \omega \sin(\alpha - \beta) + \mu^2 \omega^2}.$$

Կախված k գործակցի արժեքից, սխտեմի դինամիկական դիմադրողականությունը կարող է մեծանալ կամ փոքրանալ: Դիտարկված ունիդանական մոդելը կարելի է ընդունել որպես հիպոթեզ կոնստրուկցիաների դինամիկական դիմադրողականության բարձրացման երևույթը բացատրելու համար, որը մասնավորապես կիրառելի է նաև սեյսմիկ ազդեցությունների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. А. Г. Назаров. Метод инженерного анализа сейсмических сил. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1959.

УДК 624.131

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

Р. П. Малакян

Компрессионная ползучесть просадочных грунтов с учетом фактора влажности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. И. Тер-Степаняном 11/XI 1979)

Имеется ряд работ (1-4), посвященных экспериментальному исследованию компрессионной ползучести просадочных грунтов с учетом фактора влажности, где рассматривается также возможная форма описания этого процесса.

В данной работе для более подробного изучения указанного вопроса и проверки применимости практического метода (5) для просадочных грунтов (позволяющего определить параметры и закономерности ползучести глинистого грунта испытанием двух образцов-близнецов) приведены результаты испытания грунта с ненарушенной структурой (№ 1-79). Грунт имеет следующие физические свойства: объемный вес $\gamma = 1,40 \text{ г/см}^3$; влажность $w = 2,16\%$; удельный вес $\gamma_s = 2,71 \text{ г/см}^3$. Грунт испытан при естественной (начальной) влажности $w_0 = 2,16\%$, полном замачивании $w_d = 26,81\%$ и промежуточном значении влажности $w_s = 18,11\%$. При начальной влажности (w_0) были испытаны четыре пары образцов-близнецов под действием $\sigma = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20 \text{ МПа}$ (сплошные линии в правой части рис. 1, а), а при $w = w_s$ и $w = w_d$ испытаны три пары образцов-близнецов под действием $\sigma = 0,05; 0,10; 0,20 \text{ МПа}$ (рис. 1, б, в). Образцы, находящиеся под действием нормального напряжения $\sigma = 0,05 \text{ МПа}$ в разных значениях влажности, ступенчато (по $0,05 \text{ МПа}$) нагружались до $\sigma = 0,20 \text{ МПа}$.

Уравнение компрессионной ползучести просадочного грунта в наиболее общем случае при учете изменяемости влажности можно (для постоянных напряжений) записать в следующем виде (4):

$$\epsilon_{\sigma}(t) = C_{\sigma}(t, w) \cdot F(\sigma, w), \quad (1)$$

где $C_{\sigma}(t, w)$ — зависящая от влажности грунта мера компрессионной ползучести ($\sigma = 0,10 \text{ МПа}$); $F(\sigma, w)$ — функция напряжения, зависящая от влажности грунта.

Для выражения $C_{\sigma}(t, w)$, определяемого из семейства кривых

мер ползучести (рис. 2), можно воспользоваться следующим соотношением (1):

$$C_A(t, w) = C_0(t, w = 1\%) \cdot F_1(w), \quad (2)$$

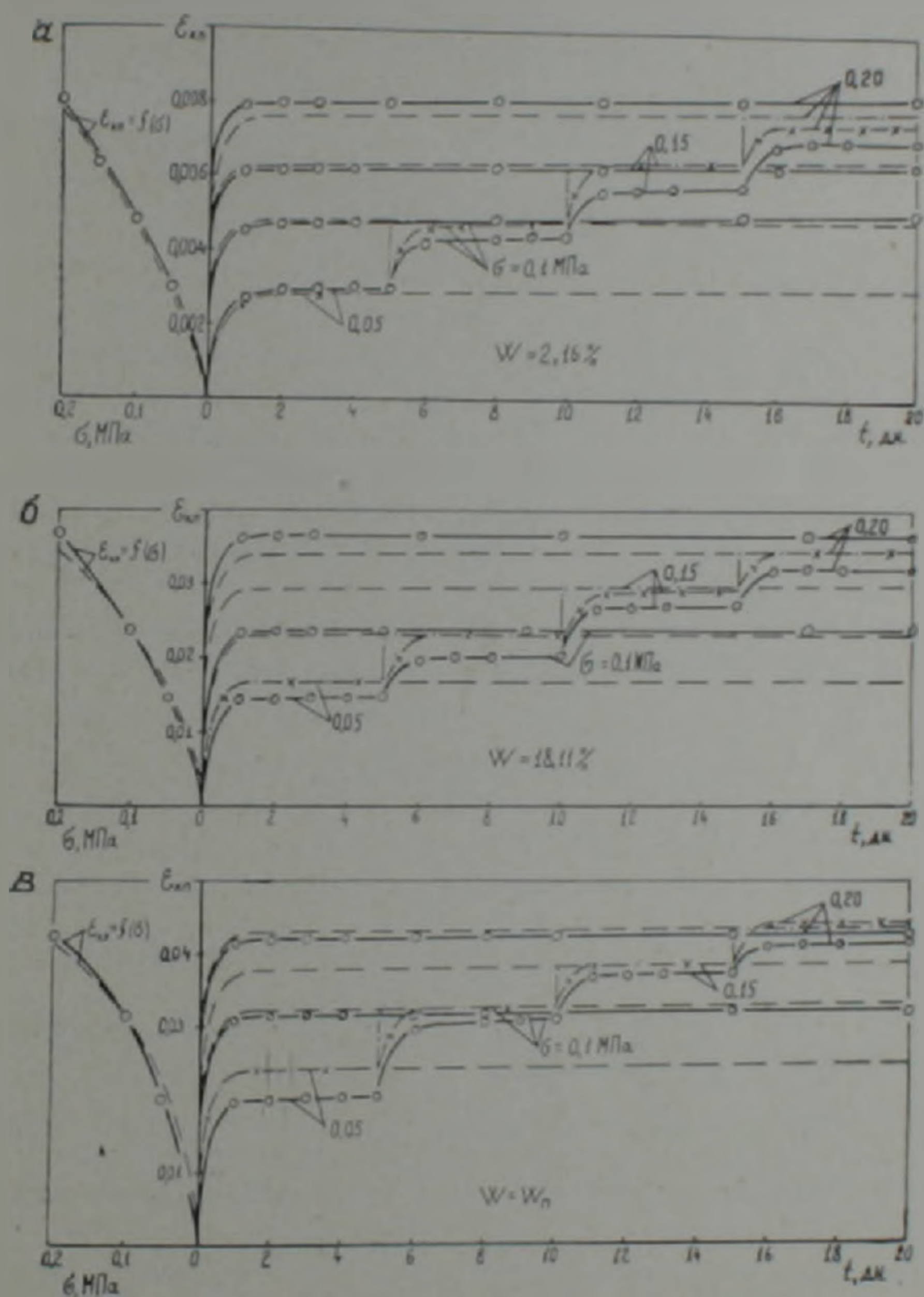


Рис. 1. Кривые компрессионной ползучести при разных значениях влажности: а — $W = 2.16\%$; б — $W = 18.11\%$; в — $W = W_n$.

где $C_0(t, w = 1\%)$ — мера ползучести грунта при влажности $w = 1\%$; $F_1(w)$ — функция влажности, учитывающая влияние влажности на меру ползучести грунта, удовлетворяющая условию $F_1(w = 1\%) = 1$.

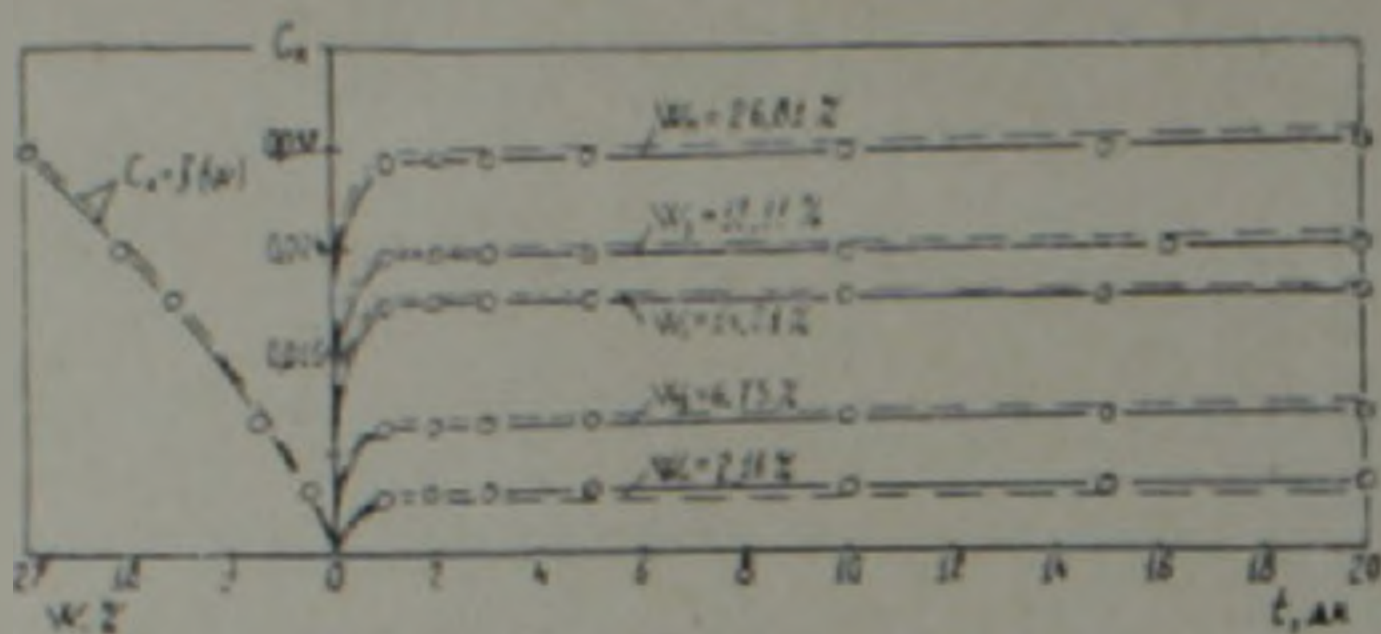


Рис. 2. Кривые мер ползучести

Для установления функции влажности $F_1(w)$ испытаны на ползучесть пять пар образцов-близнецов под действием единичного напряжения при пяти значениях начальной влажности: $w_0 = 2.16$; $w_1 = 6.75$; $w_2 = 14.21$; $w_3 = 18.11$ и $w_4 = 26.81\%$ (сплошные линии в правой части рис. 2). Разброс влажности между параллельно испытанными образцами не превышал 3% от заданных значений, а разброс их деформаций — 7% .

Зависимость $C_k - w$ аппроксимирована (штриховые линии в левой части рис. 2) степенной функцией (для $t = 20$ дней) следующего вида:

$$C_k = A_1 \cdot w^{0.76} = 0.0027 \cdot w^{0.76}, \quad (3)$$

и определена функция влажности:

$$F_1(w) = w^{0.76} = w^{0.76}. \quad (4)$$

При аппроксимации кривой $C_k - w$ условно принимается, что при $w = 0$ $C_k = 0$.

Выражение меры ползучести $C_k(t, w = 1\%)$ представлено степенной функцией следующего вида:

$$C_k(t, w = 1\%) = A \cdot t^{0.014} = 0.00259 \cdot t^{0.014}. \quad (5)$$

Выражение (2) с учетом (4) и (5) будет иметь следующий вид:

$$C_k(t, w) = 0.00259 \cdot t^{0.014} \cdot w^{0.76}. \quad (6)$$

Аппроксимация кривых мер ползучести по выражению (6) показана в правой части рис. 2 (штриховые линии).

Для определения функции напряжения $F_2(\sigma, w)$ аппроксимирована зависимость $\epsilon_{11} - \sigma$ для образцов разных значений влажности (штриховые линии в левой части рис. 1, а—в) степенной функцией следующего вида (для $t = 5$ дн.):

$$\epsilon_{22} = B(\sigma) (10 \cdot \sigma)^{n(\sigma)}, \quad (7)$$

и получена функция напряжения следующего вида:

$$F(\sigma, w) = (10 \cdot \sigma)^{n(w)}, \quad (8)$$

где

$$n(w) = n_0 - (w - w_0)K. \quad (9)$$

Значения параметров B , n , n_0 и K выражений (7) и (9) приведены в таблице.

Параметры	B	n_0	n	K
$w = 2,16 \%$	0.0048	0.0	0.70	0.01217
$w = 18,11 \%$	0.0240		0.51	
$w = 26,81 \%$	0.0315		0.40	

Окончательное выражение деформации компрессионной ползучести просадочного грунта для постоянных напряжений (1) с учетом (6) и (8) запишется в виде:

$$\epsilon_{22}(t, \sigma, w) = 0,00259 t^{0,014} w^{0,25} (10 \cdot \sigma)^{0,70 - 0,01217(w - 2,16)}, \quad (10)$$

где t — время в днях; w — влажность в процентах; σ — напряжения в МПа (1 МПа = 10 кгс/см²).

Аппроксимацию семейств кривых ползучести для постоянных напряжений, выполненную по выражению (10) и показанную на рис. 1, а — в штриховыми линиями, можно считать вполне удовлетворительной.

Опыты показали, что деформации компрессионной ползучести, полученные при ступенчато-возрастающем напряжении, достаточно близки к деформациям, определенным под действием постоянных напряжений, и удовлетворительно аппроксимируются (графическим методом) (6) теориями наследственной ползучести (штрихкрестики на рис. 1, а — в) и старения (штрихпунктирные линии). То есть практический метод определения характеристик ползучести (3) применим и для просадочных грунтов.

Следует также отметить, что основная часть деформации (примерно 90%) независимо от значений влажности происходит в течение первых суток.

Գերնատող բնահողերի կոմպլեքսիոն սողեր խոնավության զործոնի հաշվառումով

Հողվածում բննարկվում են գերնատող բնահողերի միաչափ խտացման սողերի փորձառական հետազոտության արդյունքները խոնավության և լարման տարբեր արժեքների դեպքում, ինչպես նաև ստուգվում է պրակտիկ մեթոդի տարածումը նշված սպեցիֆիկ բնահողերի վրա:

Բերված են գերնատող բնահողի միաչափ խտացման տեական ձևափոխության կորերի բնտանիքները խոնավության հրեք վիճակներում, որոնց պրանցման միջոցով ստացված է նշված բնահողերի միաչափ խտացման ձևափոխության ուղղագիսական առնչությունը: Տրված են ստացված առնչությունով կառուցված սողերի կորերի բնտանիքները, որոնք շատ չեն տարբերվում փորձառական կորերի բնտանիքներից:

Փորձարկված են գերնատող բնահողի նմուշներն աստիճաններով աճող նորմալ լարումների ներքո և սողերի ծերացման, ժառանգականության տեսությունների գրանցումով ցույց է տրված սողերի պարամետրերի որոշման պրակտիկ մեթոդի տարածումը նշված բնահողերի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Р. Месчян, Изв. АН АрмССР, т. 7, № 6 (1954). ² С. Р. Месчян, в сб: Труды первого всесоюзного симпозиума по реологии грунтов, Изд-во ЕГУ, Ереван, 1973. ³ С. Р. Месчян, Р. Г. Бадалян, Р. П. Малакян, в сб: Труды второго всесоюзного симпозиума по реологии грунтов, Изд-во ЕГУ, Ереван, 1976. ⁴ А. А. Мустафаев и др., Основания, фундаменты и механика грунтов, № 5, 1974. ⁵ С. Р. Месчян, Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения, «Недра», М., 1974. ⁶ Ю. Н. Работнов, Ползучесть элементов конструкций, «Наука», М., 1966.

УДК 548.73

ФИЗИКА

А. Г. Петросян, Г. О. Ширинян, А. С. Кузаний

Новые данные по фазообразованию в системе $\text{Lu}_2\text{O}_3\text{—Al}_2\text{O}_3$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 20/II 1980)

1. Исследование условий образования в проблеме роста неорганических материалов относится к задачам, имеющим важный практический аспект. Настоящая работа продолжает наши исследования (¹⁻⁵) соединений, образующихся в системе $\text{Lu}_2\text{O}_3\text{—Al}_2\text{O}_3$. Изучение образцов, полученных охлаждением расплавов, соответствующих по композиции $\text{Lu}_2\text{O}_3:\text{Al}_2\text{O}_3$ и $3\text{Lu}_2\text{O}_3:5\text{Al}_2\text{O}_3$ обнаружило зависимость их структурного состава от условий затвердевания. При охлаждении расплава $\text{Lu}_2\text{O}_3:\text{Al}_2\text{O}_3$ в ряде случаев образуется ортоалюминат лютеция LuAlO_3 со структурой перовскита, в других — гранат $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ плюс окись лютеция. Расплавы с составом $3\text{Lu}_2\text{O}_3:5\text{Al}_2\text{O}_3$ образуют при затвердевании гранат $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ либо двухфазную смесь $\text{LuAlO}_3/\text{Al}_2\text{O}_3$. Краткому изложению результатов исследований, устанавливающих условия образования кристаллических фаз в системе $\text{Lu}_2\text{O}_3\text{—Al}_2\text{O}_3$, и посвящено настоящее сообщение. Для сравнения аналогичные данные приведены для соединений, принадлежащих системе $\text{Y}_2\text{O}_3\text{—Al}_2\text{O}_3$.

2. В качестве исходных компонент для приготовления расплавов использовали окись лютеция (ЛюО—1), окись иттрия (ИтО—МГР) и кристаллический сапфир (99,999%), которые смешивали в стехиометрических количествах, соответствующих известным кристаллическим соединениям в системах $\text{Y}_2\text{O}_3\text{—Al}_2\text{O}_3$ (⁶) и $\text{Lu}_2\text{O}_3:\text{Al}_2\text{O}_3$ (⁷⁻⁹), и помещали в молибденовые тигли. Опыты проводили в атмосфере $\text{N}_2(\text{Ar})/20$ об.% H_2 на аппаратуре, близкой к описанной в (⁹). Тигли устанавливали в позиции А—изотермическое поле и В—поле температурного градиента (рис. 1, а). Геометрия тиглей (рис. 1, б) позволяла создавать различную степень отвода тепла от дна тиглей, а также проводить охлаждение расплава в контакте с затравочным кристаллом. Снижение температуры, после полного плавления вещества и двухчасовой выдержки при несколько более высокой температуре, проводили при визуальном наблюдении за процессом затвердевания; температуры плавления, выдержки и затвердевания измеряли оптическим пирометром, сфокусированным на поверхность расплава. •

Структурный состав образцов определяли рентгеновскими методами на аппаратуре ДРФ-2.0 и УРС-60 при 300°K.

3. При изучении структурного состава образцов, полученных охлаждением ($4,3^\circ\text{C}/\text{мин}$) расплавов, соответствующих по композиции $\text{Lu}_2\text{O}_3:\text{Al}_2\text{O}_3$ (1:1), было обнаружено, что кристаллическая фаза ортоалюмината лутеция LuAlO_3 со структурой перовскита образуется при спонтанном затвердевании либо медленной кристаллизации переохлажденных расплавов (рис. 2, а). В отсутствие переохлаждения продуктами затвердевания расплава являются лутеций-алюминиевый гранат и окись лутеция (рис. 2; таблица). Аналогичные опыты с расплавами $\text{Y}_2\text{O}_3:\text{Al}_2\text{O}_3$ этого явления не обнаружили. В последнем случае независимо от условий затвердевания образуется кристаллическая фаза ортоалюмината иттрия — YAlO_3 . То же самое, по-видимому, относится и к другим редкоземельным ортоалюминатам, поскольку о получении этих кристаллов из переохлажденных расплавов сведений нет.

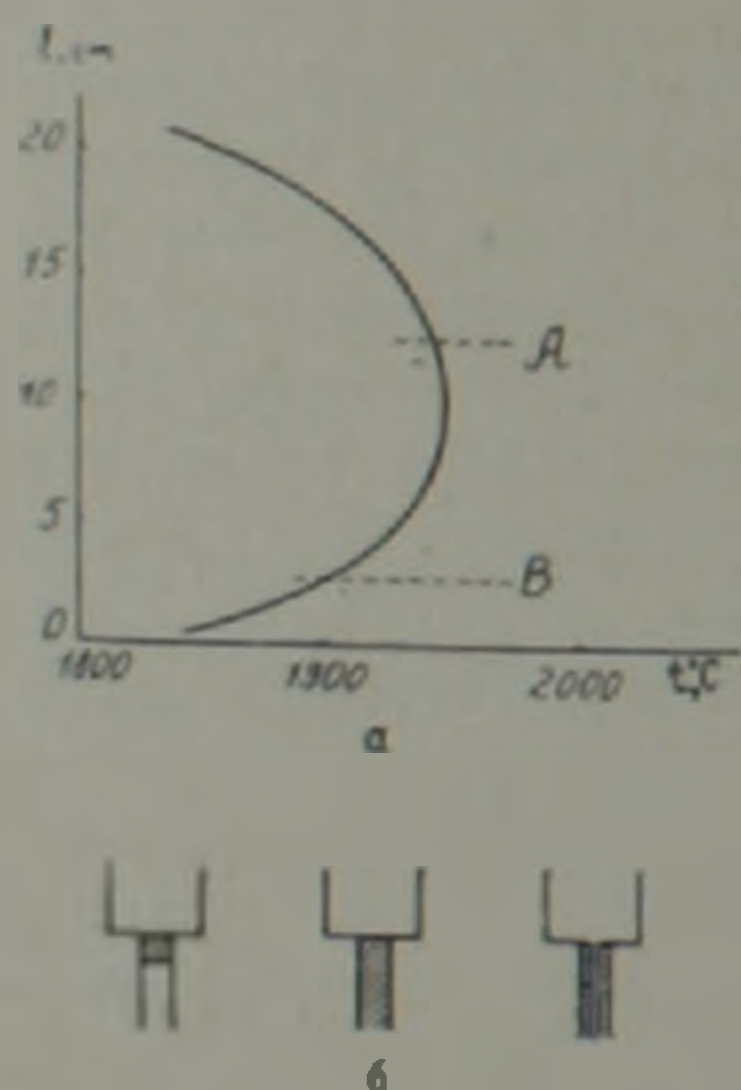


Рис. 1. Распределение температуры (нескорректированные показания пирометра) (а), геометрия тиглей (б)

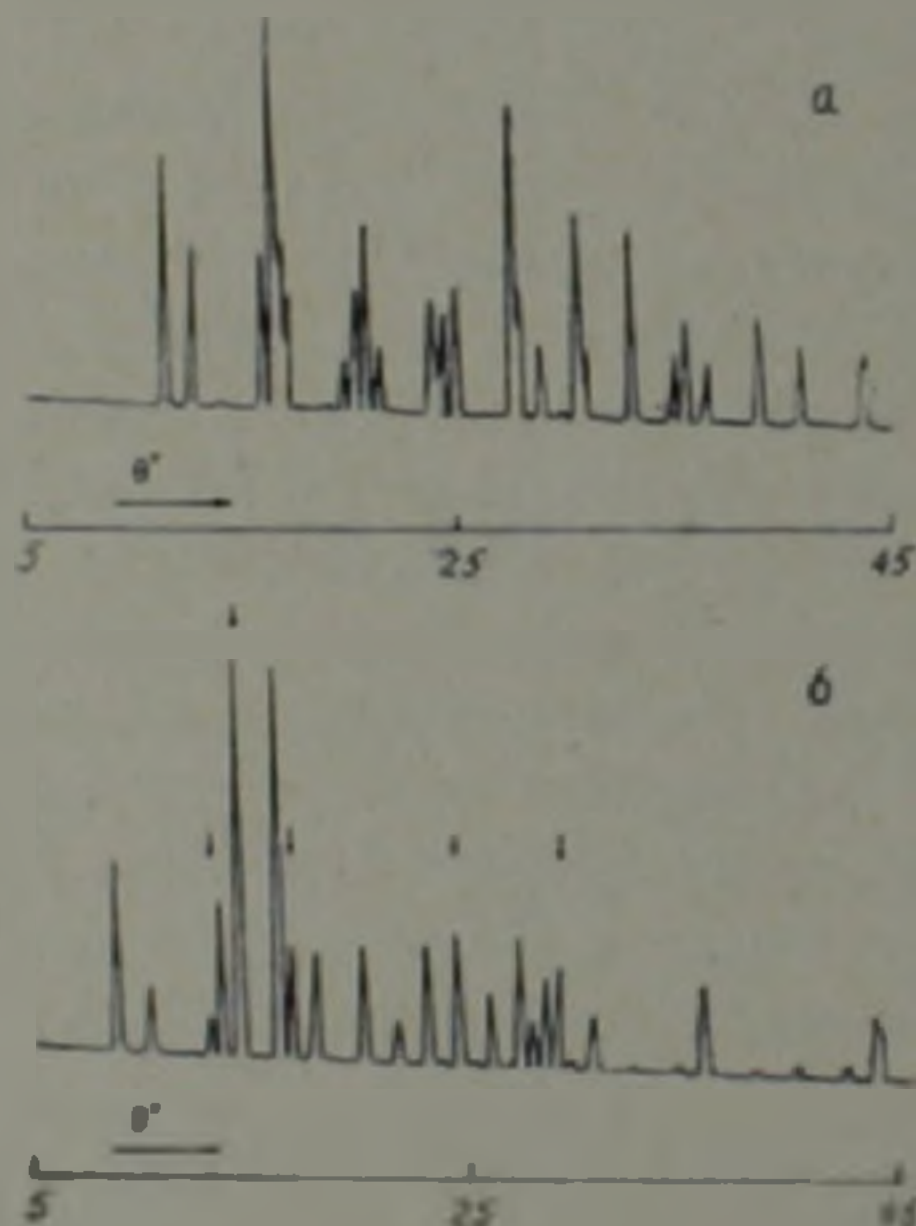


Рис. 2. Диффракционные рентгеновские картины от порошковых образцов, полученных затвердеванием расплавов $\text{Lu}_2\text{O}_3-\text{Al}_2\text{O}_3$: а — при переохлаждениях 40—100°С (LuAlO_3); б — в отсутствие переохлаждения ($\text{Lu}_2\text{Al}_4\text{O}_{12} + \text{Lu}_2\text{O}_3$). Стрелками отмечены линии, соответствующие окиси лутеция

Расплавы с составом $3\text{Lu}_2\text{O}_3:5\text{Al}_2\text{O}_3$ в изотермическом поле переохлаждаются до температур на 200—240°С ниже температуры плавления и при спонтанном затвердевании образуют двухфазную смесь $\text{LuAlO}_3/\text{Al}_2\text{O}_3$ по аналогии с расплавами $3\text{Y}_2\text{O}_3:5\text{Al}_2\text{O}_3$, образующими в идентичных условиях $\text{YAlO}_3/\text{Al}_2\text{O}_3$ (^{10,11}). При охлаждении расплавов $3\text{Lu}_2\text{O}_3:5\text{Al}_2\text{O}_3$ и $3\text{Y}_2\text{O}_3:5\text{Al}_2\text{O}_3$ в поле температурного градиента с отводом тепла через дно тиглей образуется кристаллическая фаза граната (рис. 3).

Расплавы с составом $2\text{Lu}_2\text{O}_3:\text{Al}_2\text{O}_3$ независимо от условий затвердевания образуют при охлаждении моноклинную фазу. Однофазные порошки LuAlO_3 и $\text{Lu}_4\text{Al}_2\text{O}_9$ при температурах порядка 1600°C в течение двух часов полностью распадаются на лутеций-алюминиевый гранат и окись лутеция.

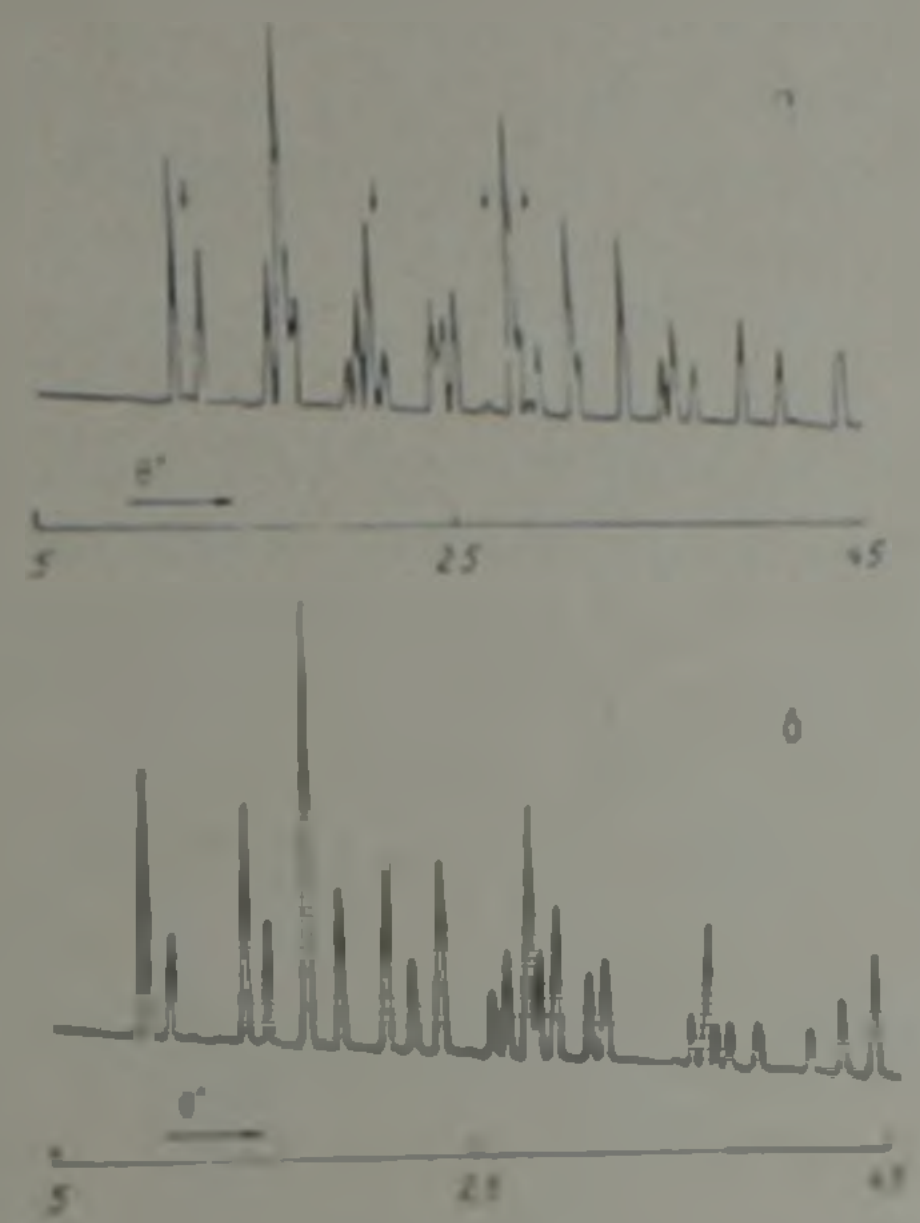


Рис. 3 Диффракционные рентгеновские картины от порошковых образцов, полученных затвердеванием расплавов $3\text{Lu}_2\text{O}_3:5\text{Al}_2\text{O}_3$: а—при переохлаждениях $200-240^\circ\text{C}$ ($\text{LuAlO}_3/\text{Al}_2\text{O}_3$); б—в отсутствие переохлаждения ($\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{13}$). Стрелками отмечены линии, соответствующие окиси алюминия

Условия затвердевания и структурный состав материалов

Состав расплава	Позиция	Степень переохлаждения, $^\circ\text{C}$	Структурный состав при 300°K
$\text{Lu}_2\text{O}_3 + \text{Al}_2\text{O}_3$	A	40 - 100	LuAlO_3
	B	~25	LuAlO_3
	B	~0	$\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{13} + \text{Lu}_2\text{O}_3$
$3\text{Lu}_2\text{O}_3 + 5\text{Al}_2\text{O}_3$	A	200 - 240	$\text{LuAlO}_3, \text{Al}_2\text{O}_3$
	B	~0	$\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{13}$
$2\text{Lu}_2\text{O}_3 + \text{Al}_2\text{O}_3$	A	~30	$\text{Lu}_4\text{Al}_2\text{O}_9$
	B	~0	$\text{Lu}_4\text{Al}_2\text{O}_9$
$\text{Y}_2\text{O}_3 + \text{Al}_2\text{O}_3$	A	30 - 80	YAlO_3
	B	~0	YAlO_3
$3\text{Y}_2\text{O}_3 + 5\text{Al}_2\text{O}_3$	A	~230	$\text{YAlO}_3, \text{Al}_2\text{O}_3$
	B	~0	$\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{13}$
$2\text{Y}_2\text{O}_3 + 5\text{Al}_2\text{O}_3$	A	~30	$\text{Y}_4\text{Al}_2\text{O}_9$
	B	~0	$\text{Y}_4\text{Al}_2\text{O}_9$

Особые условия, необходимые для образования ортоалюмината лютеция из расплава, и его неустойчивость при высоких температурах следует отнести к сравнительно малому ионному радиусу лютеция — 0.97 Å, для которого более приемлема восьмерная кислородная координация по структурному типу граната. Образование структуры перовскита с двенадцатикратным кислородным окружением при затвердевании переохлажденных расплавов может происходить благодаря тепловому упорядочению при низких температурах. В этих условиях формирование зародышей ортоалюмината с меньшей энергией образования может оказаться выгоднее даже в расплавах гранатовых составов (¹⁰).

В заключение отметим, что в отсутствие переохлаждения расплава $\text{Lu}_2\text{O}_3 \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ при высоких скоростях охлаждения или при охлаждении расплава в контакте с затравочным кристаллом YAlO_3 либо поликристаллическим LuAlO_3 при затвердевании образуются $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ и $\text{Lu}_4\text{Al}_2\text{O}_9$. Причиной этому может служить наличие сходных структурных радикалов в соединениях LuAlO_3 и $\text{Lu}_4\text{Al}_2\text{O}_9$.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Գ. Հ. ԵՐԻՆՅԱՆ, Ա. Ս. ԿՈՒԶՆԵՑԱՆ

Ֆազառաջացման նոր տվյալները $\text{Lu}_2\text{O}_3 - \text{Al}_2\text{O}_3$ համակարգում

Հայտնաբերված է, որ պերովսկիտի կառուցվածքով լյուտեցիումի օրթոալյումինատի LuAlO_3 քյուրեդալկան ֆազան առաջանում է ինքնին պնդացման, կամ գերսառը հալույթների դանդաղ քյուրեդացման ժամանակ, (նկ. 2, a)։ Գերսառեցման բացակայությամբ դեպքում հալույթի պնդացման արդյունքը հանդիսանում են լյուտեցիում-ալյումինային նոնաքարը և լյուտեցիումի օքսիդը (նկ. 2, b)։ $\text{Y}_2\text{O}_3 - \text{Al}_2\text{O}_3$ հալույթների հետ կատարված նույնատիպ փորձերն այդ երևույթները չեն հայտնաբերել։ Գերսառը հալույթների պնդացման ժամանակ պերովսկիտի կառուցվածքի առաջացումը կարող է տեղի ունենալ շնորհիվ ցածր ջերմաստիճաններում ջերմային կարգավորվածությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ X. C. Bagdasarov, A. G. Petrosyan, ДАН АрмССР, т. 58, № 3 (1974).
- ² A. G. Petrossian, Kh. S. Bagdasarov, T. I. Butarva, N. G. Ovanessian, G. O. Shtrinyan, Kristall u. Technik, vol. 10, № 5 (1975).
- ³ Т. И. Бутарева, А. А. Каминский, А. Г. Петросян, X. C. Багдасаров, ДАН АрмССР, т. 63, № 4 (1976).
- ⁴ A. G. Petrossian, Kh. S. Bagdasarov, J. Crystal Growth, vol. 34, № 1 (1976).
- ⁵ А. А. Каминский, А. Г. Петросян, ДАН СССР, т. 246, № 1 (1979).
- ⁶ M. Mizuno, T. Noguchi, Rep. Gov. Ind. Res. Inst. of Nagoya, vol. 16, 171 (1967).
- ⁷ А. К. Шуваникин, В. Ф. Попова, ДАН СССР, т. 233, № 6 (1977).
- ⁸ А. О. Иванов, Л. Г. Морозова, И. В. Мочалов, И. П. Феофилов, Оптика и спектроскопия, т. 38, № 2 (1975).
- ⁹ X. C. Bagdasarov, С. Б. Духовицкий, В. С. Папков, И. В. Смоленцев, ИТЭ, № 4, 1966.
- ¹⁰ B. Cockayne, B. Lent, J. Crystal Growth, vol. 46, № 3 (1979).
- ¹¹ J. Caslavsky, D. Vlachnicki, Forth Amer. Conf. Crystal Growth (Nat. Bur. Stand., Gaithersburg, Maryland, 1976).

УДК 542.951.8, 547.12, 547.384

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабалян, Г. О. Торосян,
Г. Г. Геокчян

Новый путь синтеза α -непредельных кетонов

(Представлено 22/II 1980)

Способность четвертичных аммониевых солей алкилировать элемент-Н и С-Н кислоты известна давно. Еще в 1911 году Порай-Кошицем была открыта особенно ярко выраженная бензилирующая способность у хлористого диметилбензилфениламмония (лейкотроп) (1).

Имеются многочисленные примеры внутримолекулярного алкилирования в четвертичных аммониевых основаниях, строения которых допускают такую возможность. Яркими примерами внутримолекулярного С-алкилирования являются давно открытые, исключительно интересные и широко изучаемые до настоящего времени перегруппировки Стивенса (2) и Соммеле (3).

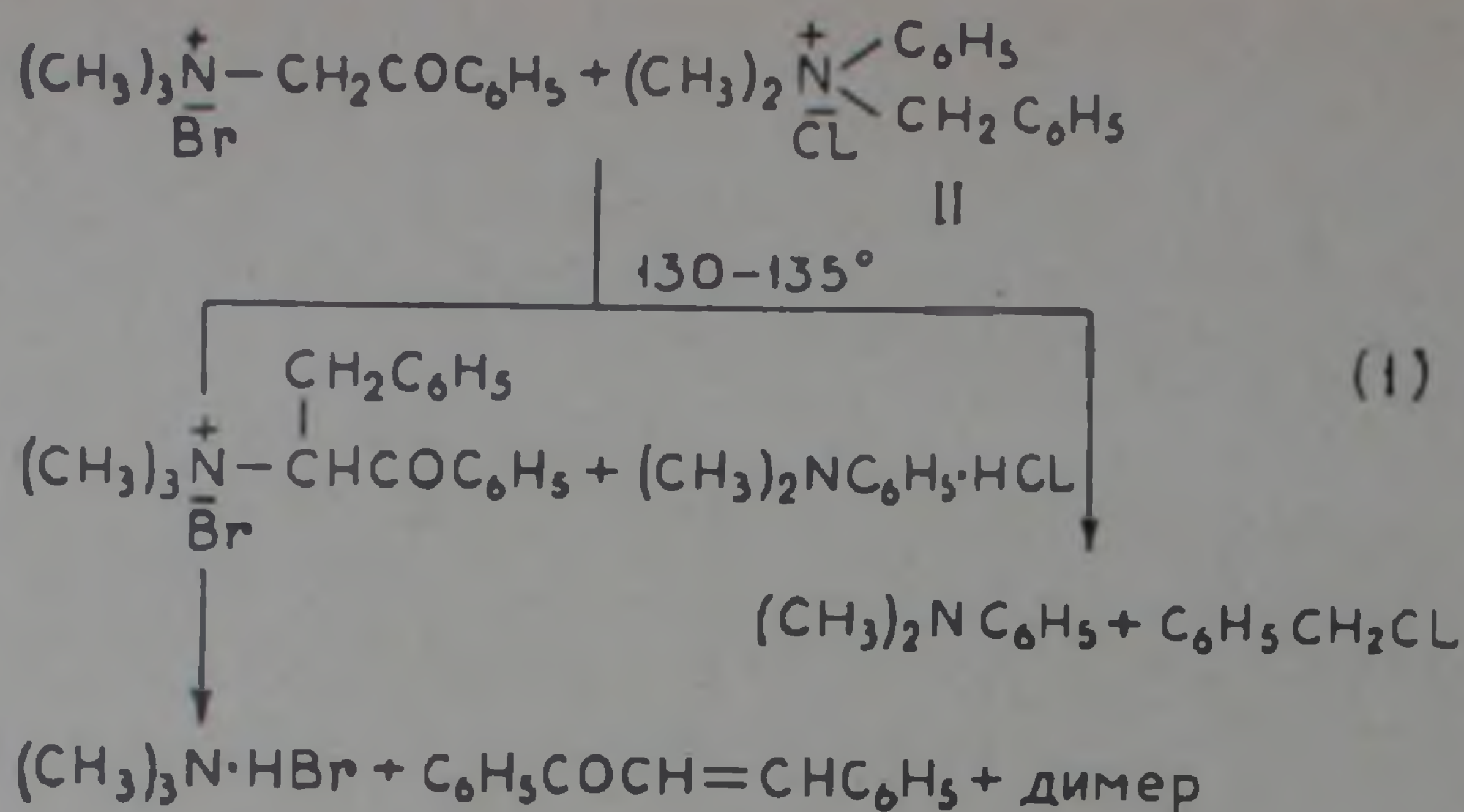
Настоящее исследование посвящено выяснению возможности осуществления межмолекулярного С-алкилирования четвертичной аммониевой соли алкиламмониевой же солью.

В качестве алкилируемой соли избран бромистый триметилфениламмоний (I), а в качестве алкилирующих солей — хлористые диметилфенилбензил-(II), диметилфенил(3-хлор-2-бутенил)-(III) и бензил-аммоний (IV).

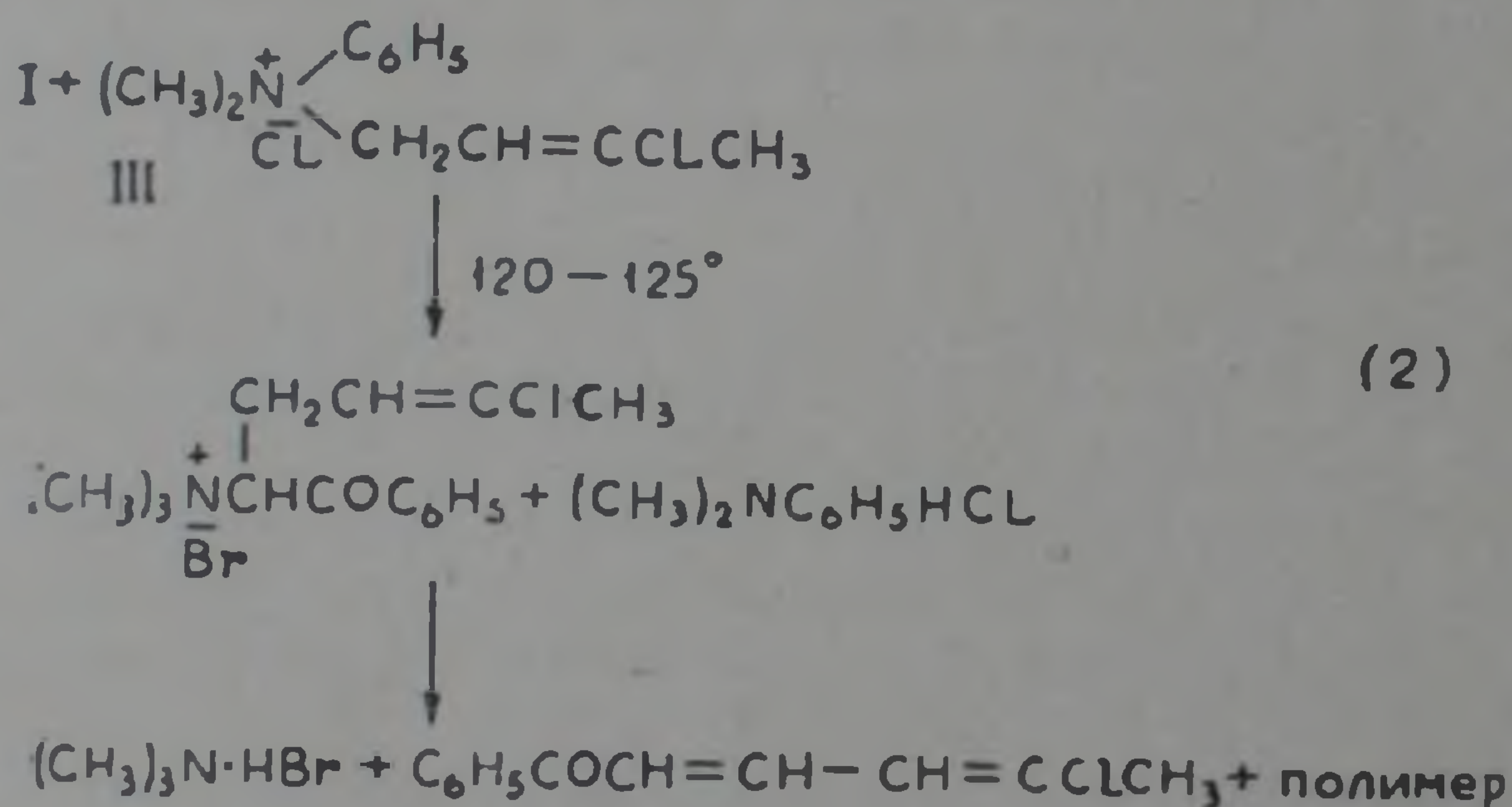
В результате 3-часового нагревания при 130—135° эквимольной смеси солей I и II после обработки водой и экстрагирования эфиром были получены: из эфирного экстракта — бензильденацетофенон (халкон), с 40% выходом, т. кип. 185—186°/2 мм. т. пл. 62°, т. пл. динитрофенилгидразона 112—113°, т. пл. оксима 115—116° (4), димер халкона (12%), т. пл. 225—226° (4), хлористый бензил (14%) и диметиланилин (17%). Из водного слоя подщелачиванием выделены триметиламин (48%), диметиланилин (50%), т. пл. пикрата 162—163° (4), не дает депрессии т. пл. с заведомым образцом.

Подкислением водного слоя, выпариванием досуха и экстрагированием абсолютным спиртом обратно получено около 40% смеси исходных солей I и II.

Образование продуктов реакции представляется схемой 1.

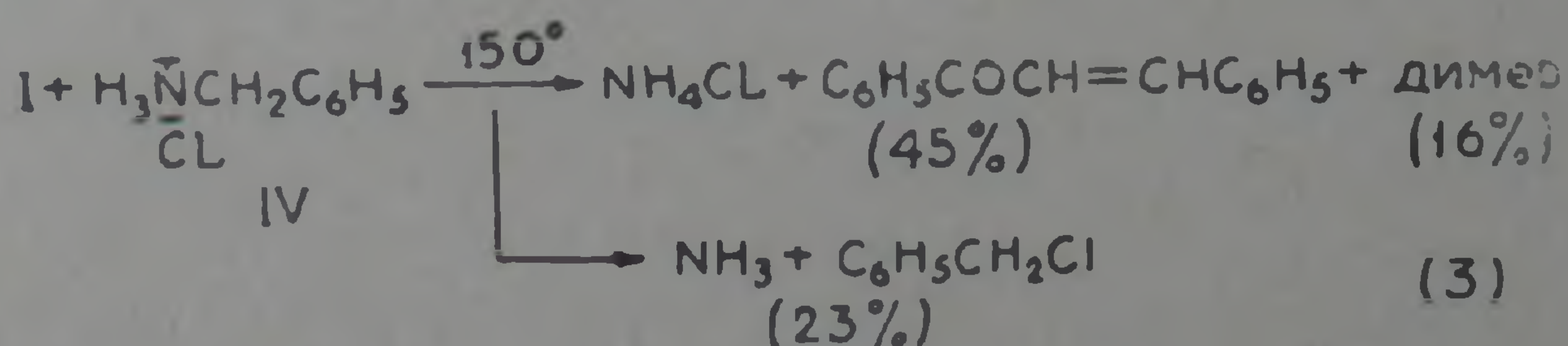


Аналогичным образом из смеси солей I и III в результате 3-часового нагревания при 120—125° были получены 3-хлоркротилиденацетофенон (37%), т. кип. 135—140°/2 мм. Найдено %: С 69,5; Н 5,95; $\text{C}_{12}\text{H}_{12}\text{OCl}$. Вычислено %: С 69,39; Н 5,78; т. пл. динитрофенилгидразона 58—60°, полимер этого кетона (17%), 1,3-дихлор-2-бутен (4%), диметиланилин (5%). И из водного слоя выделены триметиламин (43%), диметиланилин (50%) и смесь исходных солей (около 40%) (схема 2).



Таким образом продукт алкилирования как в первом случае, так и во втором в условиях реакции подвергается β-отщеплению с образованием α-непредельного кетона.

Для алкилирования соли I солью IV требуется несколько более высокая температура (150°).



Таким образом показана возможность межмолекулярного С-алкилирования четвертичной аммониевой соли аммониевыми солями, которое в случае изученных солей приводит в результате дальнейшего β -отщепления к образованию α -непредельного кетона.

Институт органической химии
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Բ. ԲԱԲԱՅԱՆ, Գ. Հ. ԹՈՐՈՍՅԱՆ, Գ. Հ. ԳՅՈՎԶՅԱՆ

α — չհագեցած կետոնների ստացման նոր ուղի

Ներկա աշխատանքը նվիրված է շորրորդային ամոնիումային աղերի միջմոլեկուլյար С-ալկիլացման հնարավորության բացահայտմանը: Որպես ալկիլացվող աղ ընտրված է տրիմեթիլֆենալամոնիում բրոմիդը (I), իսկ որպես ալկիլացնող աղեր՝ դիմեթիլֆենիլբենզիլ—(II), դիմեթիլֆենիլ(3—բոր-2-բուտենիլ)—(III) և բենզիլամոնիում բորիդները (IV):

Հաստատվել է շորրորդային ամոնիումային աղի ալկիլացման հնարավորությունը ամոնիումային աղով: Ուսումնասիրված աղերի դեպքում ալկիլացված աղի հետագա β —ճեղքման հետևանքով ստացվում են α —չհագեցած կետոններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Е. Порай-Кошиц, студ. А. Ф. Максимов, ЖРХО, т. 43, 673 (1911). ² T. S. Stevens, B. M. Grelghton, Q. B. Gordon, M. Mac. Nicol, J. Chem. Soc., 1928, 3193.
³ M. Sommelet, Compt. rend., 205, 56 (1937). ⁴ Словарь органических соединений, т. 1, ИЛ, М., 1949.

УДК 577.175.52

БИОХИМИЯ

Р. М. Срапионян, С. А. Саакян, Ф. А. Медведев, Ф. М. Саакян
член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Галоян

К вопросу о химической структуре триптического фрагмента кардиоактивного белка гипоталамуса

(Представлено 26/XII 1979)

На протяжении многих лет нами изучаются специфические белки-носители кардиоактивных нейрогормонов гипоталамуса крупного рогатого скота (¹⁻²). Было высказано предположение о том, что эти белки могут быть также предшественниками кардиоактивных начал (³). Для экспериментального доказательства этого предположения возникла необходимость разработки ряда методов, позволяющих выявить активные начала, если таковые имеются, из структуры указанных белков. Из проведенных многочисленных экспериментов интерес представляет протеолиз этих белков под действием трипсина (⁴). После диссоциации коронарорасширяющих соединений от своих белковых носителей (путем длительного диализа против разведенных растворов уксусной кислоты) последние оказались полностью лишенными биологической активности, которая не восстанавливалась ни денатурацией 6—8 М мочевиной, ни температурным воздействием до 90—100°C. Однако под воздействием трипсина удавалось выявить из первичной структуры белка кардиоактивное начало, сходное по многим параметрам с нейрогормоном «С».

Возникла необходимость разработки препаративного метода получения кардиоактивного фрагмента в гомогенном виде и проведения его идентификации, что явилось целью настоящего исследования.

В работе использованы следующие препараты: ссфадексы G-100, G-25, G-10 — фирмы «Pharmacia», ДЕАЕ-целлюлоза — «Whatman», амфолины — «LKB», трипсин — «Warthington». Остальные реактивы фирмы «Reanal» и отечественного производства.

Свежие гипоталамусы крупного рогатого скота очищали от кровеносных сосудов и пленки, промывали в холодной дистиллированной воде и готовили ацетоновые порошки следующим образом. 10 г гипоталамической ткани размельчали и гомогенизировали в 100 мл холодного ацетона в течение 90 сек при —20°C. Ацетон удаляли отсасыва-

нием на воронке Бюхнера. Осадок суспендировали в том же количестве ацетона и процедуру повторяли. Материал высушивали под вакуумом. Полученный ацетоновый порошок суспендировали в 0,15 М фосфатном буфере (pH 7,36) из расчета 1 г/10 мл и после 18-часовой экстракции на мешалке при -4°C суспензию центрифугировали при 5000 г в течение 30 мин. Прозрачный супернатант фракционировали с помощью сульфата аммония. В качестве источника коронароактивного белка использовали фракцию, выделенную в пределах насыщения 75—100%.

Дальнейшую очистку коронароактивного белка осуществляли по схеме, описанной в наших предыдущих исследованиях (^{2,4}) и включающей в себя гель-фильтрацию через сефадекс G-100, ионообменную хроматографию на ДЕАЕ-целлюлозе, изoeлектрофокусирование в градиенте амфолинов, pH 5—7.

Диссоциацию комплекса белок — гормон осуществляли путем диализа против 0,1 н. раствора уксусной кислоты на мешалке в течение 48 час.

Водный раствор отдиссоциированного белка денатурировали кипячением в течение 5 мин либо инкубировали с 6 М мочевиной. После охлаждения до 37°C к раствору белка добавляли дважды перекристаллизованный трипсин в борно-боратном буфере, pH 7,8. Соотношение фермент — субстрат поддерживали 1:80 (по весу). Ферментативную реакцию приостанавливали после 18-часовой инкубации и гидролизат лиофилизировали. Продукты триптического гидролизата дифференцировали гелевой фильтрацией через сефадекс G-25 (колонка размерами 3×56 см), уравновешенный борно-боратным буфером, pH 7,8. Элюцию вели тем же буфером или дистиллированной водой со скоростью 20 мл/30 мин. В качестве маркера использовали 0,01%-ный водный раствор голубого декстрана. Активный элюат высушивали лиофильно и подвергали хроматографии на бумаге FN-11 в системе растворителей бутанол — уксусная кислота — вода (4:1:5). После высушивания хроматограмм активную зону вырезали, элюировали дистиллированной водой и рехроматографировали при тех же условиях. Активные элюаты доочищали гель-фильтрацией через сефадекс G-10, упакованный в колонку размерами 1×50 см и обработанный глицинамидированием по методу Крэга (⁵) с нашими модификациями (⁶). Элюцию вели в дистиллированной водой со скоростью 10 мл/час. Активный элюат лиофильно высушивали.

По ходу очистки тестирование активных начал проводили двумя способами: а) измерением коронарного кровотока в условиях *in situ* по известной методике (⁷) и б) определением фосфоэстеразной активности в мозгу крыс способом, описанным ранее (⁸).

Спектральный анализ проводили на спектрофотометре Unicam SP-800 и СФ 26. Изoeлектрическую точку определяли изoeлектрофокусированием в 3%-ном растворе амфолина с интервалом pH 5—7 в 110 мл колонке фирмы «LKB».

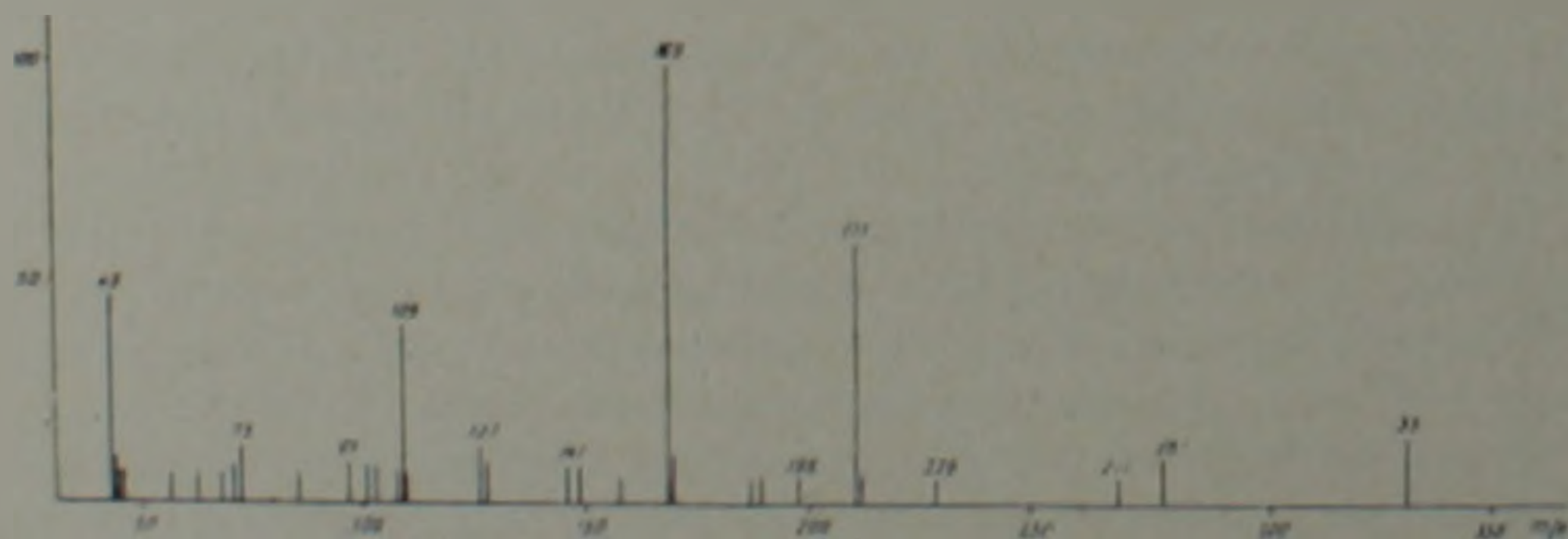
Для проведения масс-спектрального анализа кардиоактивных пре-

паратов последние были предварительно метилированы и ацетилированы по методу, описанному ранее (⁹). После упаривания растворителей образцы анализировали методом газо-жидкостной хроматографии. Работу проводили на квадрупольном хромото-масс-спектрометре фирмы «Finnigan» (США) с автоматической системой обработки данных и стеклянной капиллярной колонкой 0,25 мм × 25 м с фазой Е-30. Температурный режим — 150—290°C, по 6° в минуту: изотерма в течение 30 мин при 290°C, инжектор и переходные линии — 280°C. Газ-носитель — гелий с потоком 1,5 мл в минуту. Масс-спектры получали методом электронного удара при энергии ионизации 70 электрон-вольт в диапазоне массовых чисел 41—420.

В результате применения разработанного нами способа очистки, включающего в себя гелевую фильтрацию на сефадексе G-25, глицинамидированном сефадексе G-10, хроматографию и электрофорез на бумаге, был получен высокоочищенный препарат триптического кардиоактивного фрагмента (условно обозначенного как «С₄» по профилю элюции через сефадекс).

Изоэлектрическая точка «С₄», определяемая методом изоэлектрофокусировки, оказалась близкой к рН 5,7.

Кардиоактивный фрагмент в нативном состоянии характеризуется очень слабой нингидрин-положительной реакцией. Однако после кислотного гидролиза бн. HCl и последующего окрашивания продуктов гидролизата на хроматограмме выявлялись три нингидринположительных соединения, причем реакция окрашивания проходила гораздо интенсивнее. Поскольку результаты этих исследований были воспроизведены неоднократно, то правомочным кажется предположение о том, что при ферментативном гидролизе из первичной структуры специфического белка отщепляется кардиоактивное начало в виде пептидно-гликозидного комплекса. Не исключена возможность, что аминокислоты, входящие в пептидную часть указанного комплекса, циклизованы в гликозидной, и высвобождаются только после кислотного гидролиза при высоких температурных воздействиях; по этой же причине в данном случае усиливается положительная реакция на нингидрин.



Масс-спектр ацетилированного производного кардиоактивного триптического фрагмента «С₄» на оси абсцисс — масса фрагментов вещества (m/e), на оси ординат — относительная интенсивность в %

При высоковольтном электрофорезе на бумаге «С₄» слабо мигрировал при pH 6,2 единственной зоной к аноду.

О гомогенности препарата свидетельствовали также результаты, полученные при газожидкостной хроматографии (ГЖХ) кардиоактивного фрагмента. На рисунке показан масс-спектр фрагмента «С₄». С помощью реконструкции по максимальному в спектре иону с m/e 169 выявлен пик аналога нейрого르몬а «С» со временем удерживания 34,15. Как видно из рисунка, интенсивные пики m/e 109, 127, 169, 211, 229, 271, 331 указывают на наличие в веществе гексапиранозильного остатка (9).

При прямом вводе образца непосредственно в источник ионов и прогрева до 300°C относительные соотношения по m/e S_{331}/S_{169} и S_{211}/S_{169} сохраняются (таблица), но абсолютные количества не совпадают. Возможно потому, что при прямом вводе концентрация образца увеличивается почти в три раза.

Выше мы говорили о том, что триптический кардиоактивный фрагмент после кислотного гидролиза выявил три нингидринположительных соединения. При ГЖХ того же фрагмента гидролизованного препарата «С₄» основная масса вещества с m/e 169 была сосредоточена в зоне со временем удерживания 34,83 мин. Кроме пиков, характерных для полностью ацетилированного гексапиранозильного остатка, в масс-спектре отмечены маленькие пики с m/e 94, 168, 191, 266, 288, по-видимому, относящиеся к гидролизованным продуктам.

Масс-спектрометрическая характеристика нативного и гидролизованного препаратов «С₄», полученная при прямом вводе проб

Название фракции	Время удерживания, мин	Величина площадей условных единиц по m/e			Отношение величин площадей, %	
		S_{331}	S_{169}	S_{211}	S_{211}/S_{169}	S_{331}/S_{169}
Нативный «С ₄ »	34.15	9558	63400	37000	15.2	58.6
Гидролизованный «С ₄ »	34.83	13400	107000	78000	12.5	72.9

При прямом вводе образца появляется новый пик с m/e 407. Отмечается в этом случае увеличенное соотношение S_{211}/S_{169} (таблица), обусловленное наличием макрокомпонента с m/e 210.

Так как при одинаковых условиях анализа площадь под этими кривыми можно считать мерой концентрации данного вещества, следовательно, сопоставление величин измеряемых площадей нативного и гидролизованного препаратов «С₄» свидетельствует об относительном максимальном содержании кардиоактивного соединения в гидролизованном препарате.

В результате проведенных нами исследований получены экспериментальные доказательства о том, что по ряду физико-химических

свойств указанное соединение проявляет большое сходство с нейрогормоном «С» (⁹).

Таким образом, основной вывод заключается в следующем: качественное сходство масс-спектров нейрогормона «С» и коронароактивного триптического фрагмента «С₄», одинаковое время удерживания основного вещества может свидетельствовать о наличии в составе белкового носителя структурного изомера нейрогормона «С».

Институт биохимии

Академии наук Армянской ССР

Ռ. Մ. ՍՐԱՊԻՈՆՅԱՆ, Ո. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Յ. Ա. ՄԻՆՎԵՐԵՎ, Յ. Մ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ,

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ բժշկական-առողջապահության ԳԱԼՈՅԱՆ

Հիպոթալամիկ կադրիոսկոպիկ սպիտակուցի տրիպտիկ ֆրագմենտի հիմնական կառուցվածքի հաբցի մասին

Հիպոթալամիկ սպիտակուցի տրիպտիկ հիդրոլիզատից անջատված է սրտի պսակաձև անոթները լայնացնող ֆրագմենտ, որն իր ֆիզիկա-քիմիական որոշ հատկություններով զգալիորեն նման է նեյրոհորմոն «С»-ին: Այս նմանությունը հաստատվել է նաև մասն-սպիտակ անալիզի տվյալներով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ռ. Մ. Տրափոնյան, Դ. Յ. Ժամբաջյան, Ա. Ա. Գալոյան, Вопросы биохимии мозга. Изд-во АН АрмССР, Ереван, вып. 6 (1970).² Ռ. Մ. Տրափոնյան, Տ. Ա. Տափոնյան, Ա. Ա. Գալոյան, Вопросы биохимии мозга, Изд-во АН АрмССР, Ереван, вып. 11 (1976).³ Ա. Ա. Գալոյան, в кн «Некоторые проблемы биохимии гипоталамической регуляции», Изд-во «Айастан», Ереван, 1965.⁴ Ռ. Մ. Տրափոնյան, Փ. Մ. Տափոնյան, Տ. Ա. Տափոնյան, Ա. Ա. Գալոյան, Вопросы биохимии мозга, Изд-во АН АрмССР, Ереван, вып. 13 (1978).⁵ С. Hao-Chia, С. Lyman, Creig, S. Stoner, Biochemistry, 11, 19 (1972).⁶ Ա. Ա. Գալոյան, Ռ. Մ. Տրափոնյան, Ք. Օ. Կարապետյան և օր., ДАН АрмССР, т. 67, № 3 (1978).⁷ P. Z. Marawitz, A. Zahn, Deutsch. Arch. Klin. Med., 116, 364 (1914).⁸ Ա. Ա. Գալոյան, Բ. Ե. Գուրաշ, Մ. Ա. Սոգոսյան, Вопросы биохимии мозга, Изд-во АН АрмССР, Ереван, вып. 11 (1976).⁹ Ա. Ա. Գալոյան, Ռ. Մ. Տրափոնյան, Փ. Մ. Մեծաբեկ, ДАН АрмССР, т. 66, № 5 (1978).

УДК 577.3

БИОХИМИЯ

Р. Б. Бадалян, А. А. Симонян, Р. А. Степанян

Изменение активности различных АТФаз в субклеточных образованиях мышц кур в онтогенезе

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 8/1 1979)

В наших предыдущих исследованиях (1-4) было показано, что в эмбриогенезе кур активность АТФазы в изолированных митохондриях мозга, печени и миокарда возрастает с плодного периода (с 13-го дня) эмбрионального развития и до вылупления цыпленка. Полученные результаты позволяют заключить, что начиная с плодной стадии эмбрионального развития кур окислительно-восстановительные процессы в вышеотмеченных органах усиливаются, доходя до своего максимума в конце эмбриогенеза и в раннем постэмбриональном периоде. В эволюционно-сравнительном аспекте представляет несомненный интерес исследование становления и развития энергетических процессов в других тканях развивающегося организма. Мы изучали становление и развитие активности АТФазы в субклеточных образованиях скелетных мышц кур в различные периоды онтогенетического развития. В наших экспериментах для солюбилизации мембран и выделения локализованной на них АТФазы использовали тритон X-100. Известно, что благодаря своим свойствам детергенты могут воздействовать на гидрофобные связи в мембране, что способствует освобождению липопротеиновых компонентов, сохраняющих в определенной степени свои первоначальные энзиматические свойства. В отдельных опытах изучали также действие п-хлормеркурибензоата (п-ХМБ), 2,4-динитрофенола (ДНФ) и температурного фактора на энзиматическую активность.

Опыты проводили на 15- и 20-дневных эмбрионах, 5-дневных цыплятах и годовалых курах белой русской породы. Пожные мышцы измельчали специальной мясорубкой и в течение 30—40 сек гомогенизировали в гомогенизаторе Поттера в растворе 0.44 М сахарозы — 1 мМ ЭДТА. Ядра осаждали при 2000 g (7 мин), митохондрии — 12000 g (15 мин). Супернатант использовали в опыте как надмитохондриальную жидкость. Осадок митохондрий суспендировали в растворе 0.25 М сахарозы — 0.02 М трис-HCl буфере (pH 7.4). Чистоту выделенной фракции контролировали электронным микроскопом.

При изучении Ca^{2+} , Mg^{2+} , а также Mg^{2+} , Na^+ , K^+ -АТФазы ионы добавляли в количестве 20, 10, 100 и 120 мМ соответственно. ДНФ применяли в концентрации $4 \cdot 10^{-4}$ М, тритон X-100 и п-ХМБ — 0,9 и 4,7 мкг (или 12,5 мМ) соответственно в пробу.

Активность АТФазы устанавливали по нарастанию неорганического фосфата в следующей инкубационной смеси: 0,25 М сахарозы — 0,02 М трис-НСI буфер, 2 мкг АТФ (в пробу) и соответствующие катионы или ДНФ. Гомогенат, митохондрии или надмитохондриальную фракцию добавляли в количестве 2—4 мкг белка. Объем смеси 1 мл. Время инкубации 30 мин при 37°C . Неорганический фосфат и белок определяли по Лоури и сотр. (⁵⁻⁶). Количество свободного фосфата выражали в мкатомах/мг белка. Полученные данные статистически обработаны (⁷).

Результаты опытов (рис. 1, а) показали, что в контрольных опы-

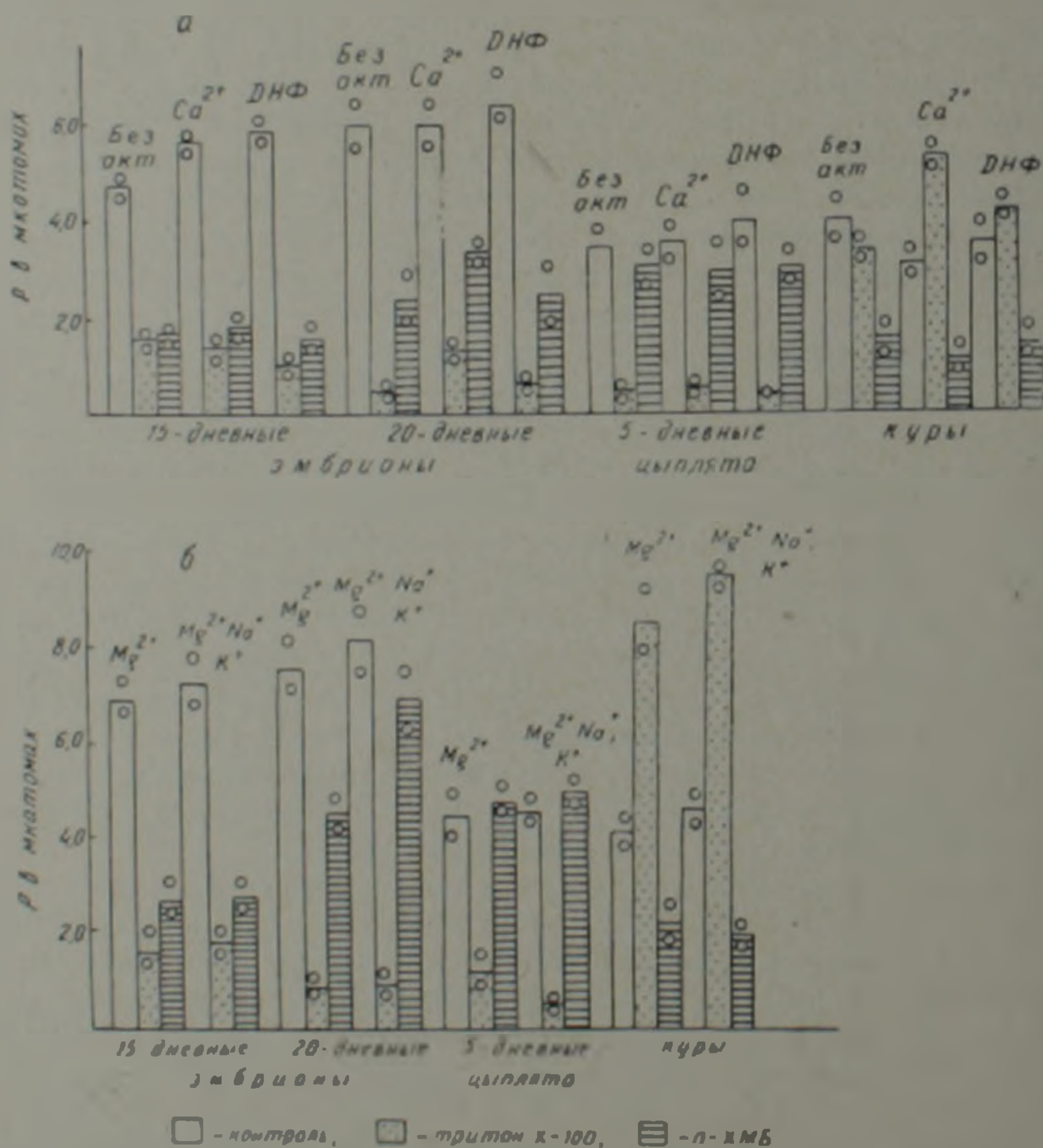


Рис. 1. Влияние тритона X-100 и п-ХМБ на активность Ca^{2+} , ДНФ (а), Mg^{2+} и Mg^{2+} , Na^+ , K^+ -АТФаз (б) в митохондриях мышц кур и онтогенезе

тах (без добавления ионов и ДНФ) активность АТФазы в изолированных митохондриях мышц 20-дневных эмбрионов по сравнению с 15-дневными несколько повышается. Однако активность фермента заметно и достоверно снижается у 5-дневных цыплят. В митохондриях годовалых кур по сравнению с 5-дневными цыплятами энзиматическая активность несколько повышается. У 15-дневных эмбрионов прибавление ионов Са несколько повышает активность фермента. Аналогичное действие ионов кальция отмечается в митохондриях годовалых кур. Добавление ДНФ также приводит к активированию АТФазы в митохондриях 15-дневных эмбрионов. Изучение влияния разобщителей окислительного фосфорилирования на митохондриальную растворимую АТФазу представляет определенный интерес. По данным ряда авторов (⁸⁻⁹) разобщители типа ДНФ катализируют гидролитический распад нефосфорилированного предшественника АТФ (вызывая тем самым стимуляцию дыхания в отсутствие акцепторов энергии), снижают коэффициент Р/О, тормозят эндэргонические реакции и стимулируют активность латентной АТФазы митохондрий. Виноградовым и сотр. (¹⁰) было показано, что между действием разобщителей на интактные митохондрии и растворимую АТФазу нет корреляции, а стимуляция фермента ДНФ обусловлена его побочным действием торможения реакции продуктом. Полученные нами данные показывают, что в присутствии добавленного ДНФ активирование АТФазы более ощутимо в раннем эмбриональном периоде, с возрастом действие ДНФ ослабевает, а у годовалых кур отмечается даже некоторое подавление энзиматической активности.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при онтогенетическом развитии энзиматический белок подвергается определенным изменениям в отношении активирования ДНФ и ионами кальция.

Интересно отметить (рис. 1, а), что при добавлении тритона X-100, а также п-ХМБ, по сравнению с контрольными опытами, активность фермента в эмбриогенезе и постэмбриональном периоде заметно подавляется как в присутствии Са²⁺, так и ДНФ. В этих условиях небольшое увеличение активности фермента наблюдается в митохондриях годовалых кур в присутствии Са²⁺ и ДНФ.

Аналогичным изменениям активность фермента в присутствии тритона X-100 и п-ХМБ подвергается также при добавлении ионов Mg, а также Mg, Na, K (рис. 1, б). В эмбриональном периоде по сравнению с пробами без активаторов ионы Mg достоверно ($p < 0,001$) повышают активность фермента, тогда как у годовалых кур она остается неизменной.

Результаты наших исследований показали, что в контрольных опытах в гомогенате мышц (рис. 2, а) и надмитохондриальной жидкости (рис. 2, б) активность АТФазы у 5-дневных цыплят понижается по сравнению с 20-дневными эмбрионами. Такая же закономерность в развитии активности фермента наблюдается при добавлении ионов Mg, Na, K, Са, а также ДНФ. Наблюдается достоверное повышение активности

фермента в присутствии вышеприведенных активаторов по сравнению с контролем.

Мы изучали влияние термообработки на АТФазную активность в мышечных митохондриях. С этой целью в течение 10 мин митохондрии инкубировали при 37, 45, 50, 60, 70 и 80°C. Дальнейшее инкубирование в течение 30 мин при 37° проводили непосредственно после добавления АТФ. Данные, приведенные на рис. 3, а и б, показывают, что как в эмбриональной, раннем постэмбриональном периодах, так и у годовалых кур сильное угнетение активности Mg^{2+} - и Ca^{2+} -АТФаз наблюдается при обработке митохондрий при 60°. Некоторое подавление активности Mg -АТФазы отмечается еще при 50°. Однако при 60° количество неорганического фосфата по сравнению с 37° уменьшается у 15-дневных эмбрионов более чем в 5,7, у 20-дневных — 3,5, а у кур — 13 раз. Дальнейшее нагревание митохондрий приводит почти к полному прекращению ферментативной активности. Аналогичным изменениям при термообработке митохондрий подвергается также активность Ca^{2+} -АТФазы.

Как уже показали, активность различных АТФаз как в гомогенате, так и в субклеточных образованиях скелетных мышц в постнатальном периоде развития кур заметно подавляется. Известно, что одним из важных свойств актомиозинового белка мышечной ткани является АТФазная активность, обеспечивающая сократительную функцию и использование энергии АТФ при выполнении мышечной работы. Имеются данные (¹¹) о наличии природного ингибитора митохондриальной АТФазы. Этот ингибитор оказался белковым веществом с молекулярным весом около 11 000. Было установлено, что этот митохондриальный ингибитор сильно угнетает Ca -АТФазу актомиозина (¹²). Подавление АТФазной активности в наших опытах в постэмбриональном периоде в мышечной ткани кур, по-видимому, можно объяснить появлением этого ингибитора в определенный период развития цыпленка. Какова его физиологическая роль в период постэмбрионального развития кур? Можно допустить, что во взаимодействии с актомиозиновым компонентом этот ингибитор имеет регулирующее влияние на уровень сократительной функции скелетной мышцы, в частности, в направлении ограничения использования энергии АТФ при выполнении мышечной работы.

В наших опытах добавление тритона X-100 почти во всех стадиях онтогенетического развития кур сопровождается заметным подавлением активности различных АТФаз как в митохондриальной фракции, так и надмитохондриальной жидкости. Имеются данные, свидетельствующие о том, что характер влияния детергентов на активность АТФаз зависит от их концентрации (¹³⁻¹⁵). Малые концентрации детергентов заметно повышают энзиматическую активность (¹⁶⁻¹⁸), что связано с выявлением латентных активных центров фермента в препаратах (¹⁹). Более высокие концентрации детергентов подавляют активность фермента (^{20,21}). В предыдущих наших работах при использовании тритона X-100 в качестве детергента в количестве 0,9 мг на 2—3 мг белка наблюда-

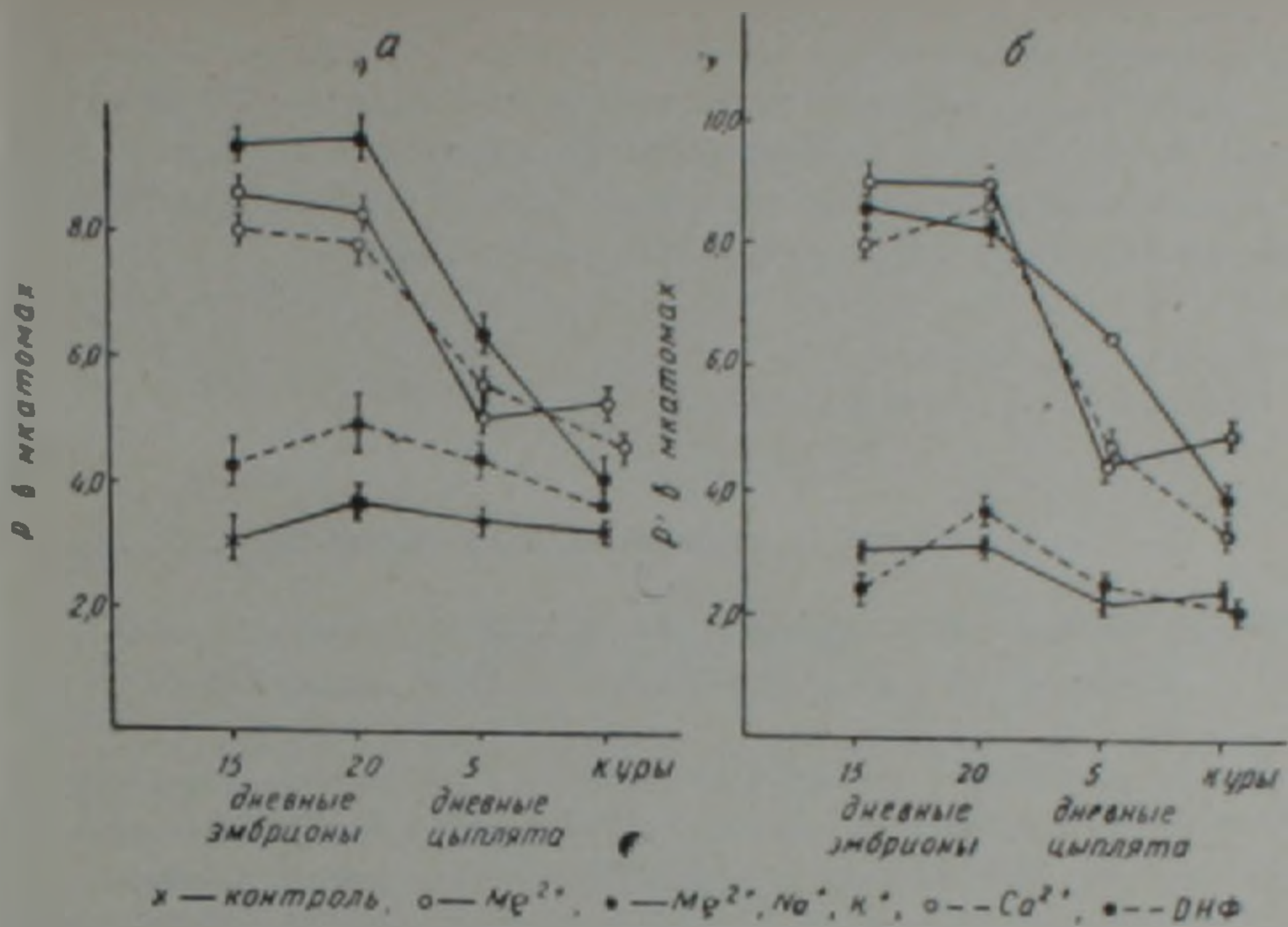


Рис. 2 Активность различных АТФаз в гомогенате (а) и надмитохондриальной жидкости (б) мышц кур в онтогенезе

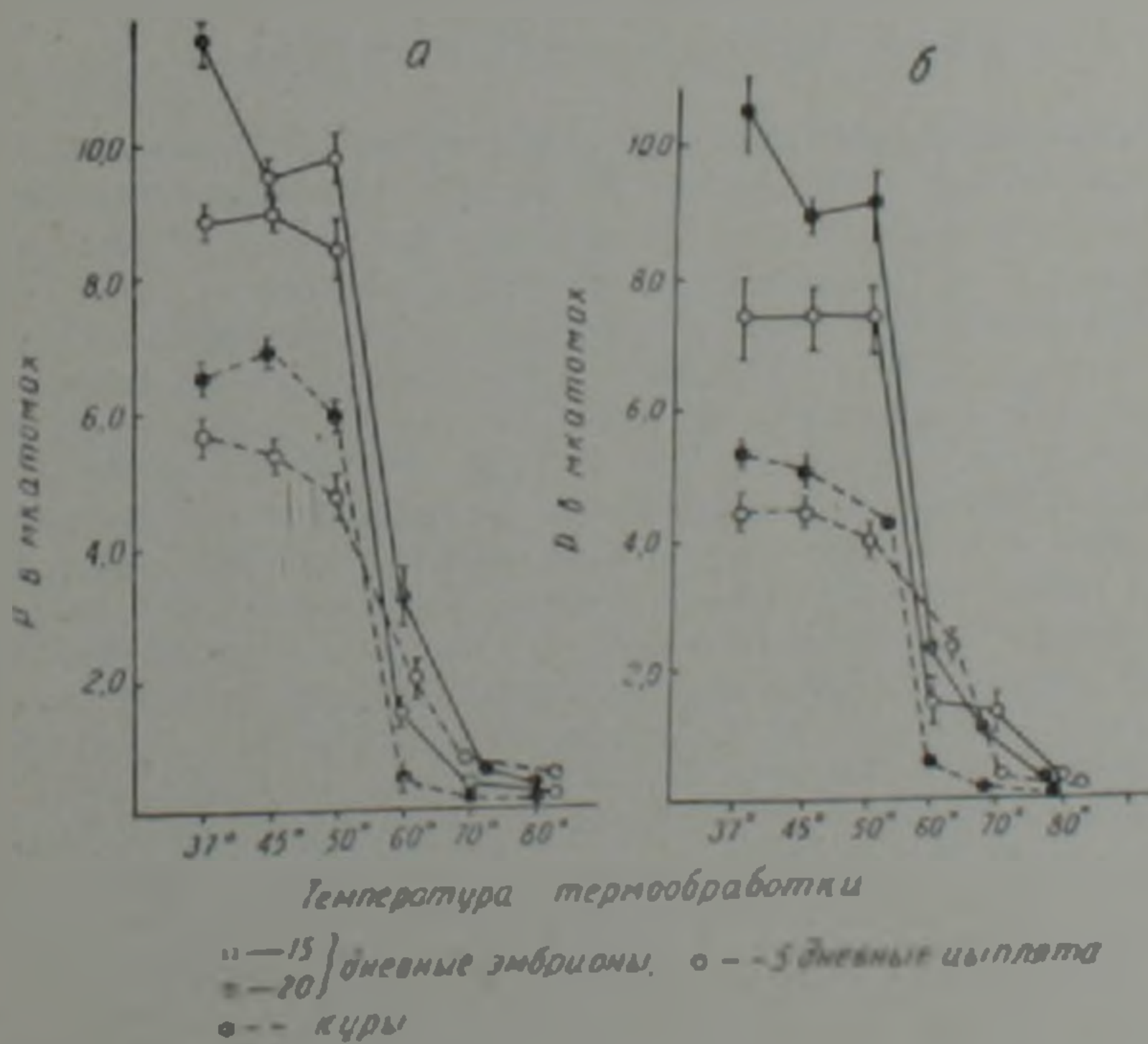


Рис. 3 Влияние температурного фактора на Mg (а) и Ca-АТФазную (б) активность в митохондриях мышц кур в онтогенезе

лось заметное, а в некоторых случаях достоверное повышение активности в митохондриях печени кур в онтогенезе (²²). Однако в аналогичных условиях, как показали наши эксперименты, такое же количество тритона X-100 является подавляющим фактором для АТФазной активности как митохондриальной фракции, так и надмитохондриальной жидкости скелетных мышц развивающегося эмбриона.

Институт биохимии
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Բ. ՔԱԴՐՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ռ. Ա. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Տարբեր ԱՏՖազաների ակտիվության փոփոխությունները մկանների ենթաբջջային զոլացություններում հավերի օնոգենեզում

Հավերի սաղմնային զարգացման շրջանում կմախքային մկանների օնոգենեզում, մեկուսացված միտոքոնդրիաներում և վերմիտոքոնդրիալ հեղուկում տարբեր ԱՏՖազաների ակտիվությունն որոշ չափով բարձրանում է: Վաղ հետսաղմնային շրջանում (5 օրական ճտերի մկաններում) ֆերմենտի ակտիվությունը հավանական չափով ճնշվում է: Ֆերմենտի ակտիվության ճնշումն այդ շրջանում, ըստ երևույթին, կապված է մկաններում բնական ինհիբիտորի երևան գալու հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Симонян, Автореф. докт. дис., Ереван, 1973. ² А. А. Симонян, Р. А. Степанян, Вопросы биохимии мозга, Изд-во АН АрмССР, Ереван, вып. 6 (1970). ³ А. А. Simonian, Abstr. Commun. 7 th Meet. Eur. Biochem. Soc., Varna, 20—25 th Sept., 1971.
- ⁴ А. А. Симонян, Г. А. Геворкян, Р. А. Степанян, Укр. биохим. журн., т. 50, № 3 (1978).
- ⁵ O. H. Lowry, J. A. Lopez, J. Biol. Chem., vol. 162 (1946).
- ⁶ O. H. Lowry, N. J. Rosebrough, A. L. Farr, R. Randall, J. Biol. Chem., vol. 193 (1951).
- ⁷ Д. И. Закутинский, Л. И. Селиванова, Биологическая оценка препаратов для профилактики и лечения лучевой болезни, Медгиз, М., 1960.
- ⁸ J. H. Wang, Science, vol. 167 (1970).
- ⁹ E. C. Слейтер, V международный биохимический конгресс, Изд-во АН СССР, М., 1961.
- ¹⁰ В. К. Акименко, И. Б. Минкова, А. Д. Виноградов, Биохимия, т. 36, вып. 3 (1971).
- ¹¹ М. Пульмен, Е. Гарбер, V Международный биохимический конгресс. Рефераты секционных сообщений II, Изд-во АН СССР, М., 1961.
- ¹² S. Yamazaki, H. Hasebe, H. Takikawa, Y. Tamaura, Y. Inada, Biochem. biophys. Res. Commun., vol. 75 (1977).
- ¹³ А. В. Крацов, Укр. биохим. журн., т. 48, № 6 (1976).
- ¹⁴ О. В. Курсенко, Г. Л. Вавилова, Укр. биохим. журн., т. 44, № 1 (1972).
- ¹⁵ О. В. Курсенко, Л. Д. Демченко, Г. Л. Вавилова, Н. А. Ярошенко, А. В. Крацова, Укр. биохим. журн., т. 46, № 3 (1974).
- ¹⁶ S. Uesugi, N. C. Dulak, J. F. Dixon, J. L. Dahl, J. Biol. Chem., vol. 246 (1971).
- ¹⁷ B. Formby, Brain Res., vol. 52 (1973).
- ¹⁸ P. L. Jorgensen, Biochim. et biophys. acta, vol. 356 (1974).
- ¹⁹ P. L. Jorgensen, J. C. Skou, Biochim. et biophys. acta, vol. 233 (1971).
- ²⁰ J. Philippot, M. N. Luthier, Biochim. et biophys. acta, vol. 294 (1973).
- ²¹ О. В. Курсенко, Г. Л. Вавилова, Укр. биохим. журн., т. 43, № 1 (1971).
- ²² А. А. Симонян, Р. Б. Бадалиян, А. П. Акоян, ДАН АрмССР, т. 62, № 1 (1976).

