

ՀԱՅԿՍՏԱՆԻ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
 Д О К Л А Д Ы

LXX, № 2

1980

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՉՈՒՄԱՆՅԱՆ, անհն. գիտ. բեկնա-
 ծու (պատ. Բարսեղյան), Է. Գ. ԱՆՐԻՎՅԱՆ,
 ՆՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱ-
 ՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
 ՅՍԹՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
 ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ,
 Վ. Մ. ԹՍՈՒՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-ան-
 դամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
 Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
 (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԲ-
 ՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
 ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր),
 Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ,
 Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՆՍՍՀ
 ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ,
 ՆՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
 АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
 мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
 демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),
 И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм-
 ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
 АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
 чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
 ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
 ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
 ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
 ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
 В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ս Ա Ք Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

Վ. Գ. Իսախանյան—Վերջավոր աճի ամբողջ ֆունկցիաների մի դասի մասին	65
Լ. Մ. Պոզոսյան—Կամբիոնատի եկարագրությունների մատավոր դեկոզավորման և բարդություն գնահատման մասին	72
Ի. Ա. Հակոբյան—Վիկտոր ֆունկցիաների տարածությունում գիֆերենցիալ ուղեբաժանների փնջի սպեկտրայի հատկությունների մասին	80
Ա. Հ. Հովհաննիսյան—Մի դասի երկրորդ կարգի հավասարումների լուծայ լուծելիության և ինպոզիտիվության մասին	85
Վ. Գ. Պետրենկո, Կ. Նիմայտ—Ամբողջ կորերի մի դասի մասին	92
Ի. Յու. Քամունյան—Լակուանները երկր ուղեբաժանի սպեկտրում	96

Ը Ն Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա

Ա. Ա. Խաչատրյան—Տարածողու առանձնականության տեսության վարիացիոն սկզբունքի մասին	100
--	-----

Ի Ն Ժ Ե Ն Ե Ն Ր Ա Տ Ի Ն Ս Ե Ց Ս Մ Ո Ւ Ո Գ Ի Ա

Ի. Հ. Համասյան, Ի. Գ. Տոնոյան—Մեխանիկական մեծությունների վիճակագրական նմանության որոշման մեթոդներն ինժեներային սեյսմոլոգիայի խնդիրներում	103
--	-----

Ի Ր Ո Ւ Մ Ի Մ Ի Ա

Ի. Ի. Սահակյան—Ուղեցիլատի օբսիդացման արագության սահմանափակումը ռ-կետոգլատարատով սրած և լյարդի միտոքոնդրիաններում	110
--	-----

Բ Ո Ւ Ց Ս Ա Ն Ի Ն Ի Ղ Ի Ո Ւ Ո Գ Ի Ա

Վ. Հ. Ղազարյան, Բ. Ա. Շահազիզյան—Քփերի տարրեր հասակի առանցքների արմատների զարգացման և մահացման մորֆո-ֆիզիոլոգիական առանձնահատկությունների հարցի մասին	117
---	-----

Մ Ի Ճ Ա Տ Ա Ր Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ա. Ա. Տարլուկով-Խենտոյան—Երկարակենիթ կարծրաթևերի նոր տեսակ Կովկասից (Coleoptera Curculionidae)	124
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- С. Г. Рафвелян* — Об одном классе полых функций экспоненциального роста 12
- Э. М. Погосян* — К оценке сложности и приближенной сложности итерированных отображений 17
- Г. С. Акопян* — О спектральных свойствах пучка дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций 23
- А. О. Ованисян* — О локальной разрешимости и гильбертовости для одного класса уравнений второго порядка 29
- В. П. Петренко, Я. Шимша* — Об одном классе полых функций 33
- Г. Ю. Тамазян* — Лакуны в спектре оператора Хилда 38

МЕХАНИКА

- А. А. Хачатрян* — О вариационном принципе в релятивистской теории гравитации 46

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

- Р. О. Адамян, Г. Г. Тоноян* — Методы установления статистических моделей механических величин в задачах инженерной сейсмологии 51

БИОХИМИЯ

- И. Р. Саакян* — Ограничение в пентоглутаратом скорости окисления сульфата в митохондриях сердца и печени 110

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- В. О. Казарян, Р. С. Шаламзян* — К вопросу о широте физиологических возможностей развития и отмирания корней различных по возрасту осей кукурузы 117

ЭНТОМОЛОГИЯ

- С. М. Яблоков Хизорян* — Новая вид жесткокрылых долгоносиков с Кавказа (*Coleoptera, Curculionidae*) 124

CONTENTS

MATHEMATICS

	P.
<i>S. Q. Rafailian</i> —On one of the classes of entire functions of finite growth	65
<i>E. M. Pogossian</i> —On complexity estimation and approximative decoding of combinatorial descriptions	72
<i>G. S. Akopian</i> —On the spectral properties of the bundle of differential operators in the space of vector functions	80
<i>A. O. Oganesian</i> —On local solvability and hypoellipticity for the class of second order equations	85
<i>V. P. Petrenko, J. Shimsha</i> —On the class of entire curves	92
<i>G. Yu. Tamarian</i> —The forbidden bands in the spectrum of Hill's operator	96
<i>A. A. Khachatryan</i> —On the variational principle in the different modulus elasticity theory	

ENGINEERING SEISMOLOGY

<i>R. H. Hamaslan, G. G. Tonoyan</i> —The method of statement of statistical similarity of the mechanical gradients in engineering seismological problems .	103
---	-----

BIOCHEMISTRY

<i>I. R. Sahakian</i> —Succinate oxidation rate by α -ketoglutarate limitation in mitochondria of the heart and liver	110
--	-----

PLANT PHYSIOLOGY

<i>V. O. Kazarian, R. S. Shakhazizian</i> —About the question of morphophysiological peculiarities of development and dying of the root-systems of axis of shrubs	117
---	-----

ENTOMOLOGY

<i>S. M. Iablokoff Khnzorian</i> —A new species of curculionid beetles from the caucasus (Coleoptera, Curculionidae)	124
--	-----

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 01198 Подписано к печати 3.IV 80. Тираж 505. Изд. 5212. Заказ 221

Формат бумаги 70X108_{1/16}. Печ. л. 4. Бум. л. 2.

Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. л. 4,43

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Бареканутян, 24

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. Г. Рафасян

Об одном классе целых функций конечного роста

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6 VII 1979)

1. В настоящей статье приводятся некоторые свойства одного специального класса целых функций конечного порядка и нормального типа. Эти свойства служат основой для решения интерпретационных задач и построения некоторых базисных систем в соответствующих классах целых функций.

Введем сначала некоторые предварительные обозначения:

Для любого $\rho (1 < \rho < +\infty)$ и $\omega (-1 < \omega < \rho - 1)$ обозначим через $W_{\rho, \omega}^{z, \theta}$ класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho (1 < \rho < 2)$ и типа $z (0 < z < +\infty)$, для которых

$$\|f\|_{W_{\rho, \omega}^{z, \theta}} = \max_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\theta})|^{\rho} r^{\omega} dr \right\}^{1/\rho} < \infty, \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1,2} &= \pm \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \\ \theta_{3,4} &= \pm \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

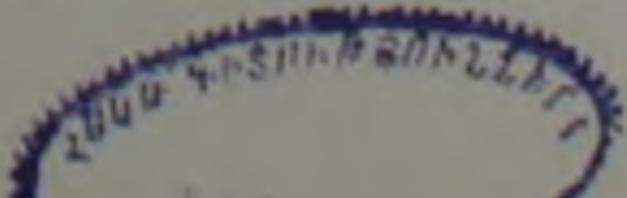
Пространство $W_{\rho, \omega}^{z, \theta}$ было введено М. М. Джрбашяном в работе (1) (см. также (2)).

Обозначим через $H_{\rho, \omega}^{z, \theta}[\Delta(z, \theta)]$ ($1 < \rho < +\infty, -1 < \omega < \rho - 1$) класс функций $F(z)$, голоморфных в угловой области

$$\Delta(z, \theta) = \left\{ z : |\text{Arg} z - \theta| < \frac{\pi}{2}, 0 < |z| < +\infty \right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{H_{\rho, \omega}^{z, \theta}} = \sup_{\theta_1 - \theta < \varphi < \theta_2 + \theta} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^{\rho} r^{\omega} dr \right\}^{1/\rho} < +\infty, \quad (3)$$



Известно (3), что пространство $H_p^{(\omega)}[\Delta(z, 0)]$ является банаховым пространством с нормой (3).

В работе (1) была установлена следующая теорема о параметрическом представлении класса $W_{\rho, \omega}^{(\omega)}$ (см. также (2), теорему 6.13).

Теорема (М. М. Джрбашян). Класс $W_{\rho, \omega}^{(\omega)}$ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, допускающих представление вида:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(izv; \rho) \psi(v) v^{\rho-1} dv, \quad (4)$$

где

$$\rho = \frac{\omega + \rho + 1}{2\omega} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(v)|^2 |v|^{\rho-1} dv < +\infty.$$

В той же работе было установлено обращение формулы (4).

2. В этом пункте мы даем краткое доказательство того, что класс $W_{\rho, \omega}^{(\omega)}$ является банаховым пространством. Сначала приведем следующие две леммы.

Лемма 1. Если $f(z) \in W_{\rho, \omega}^{(\omega)}$, то:

1. $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(z, 0)]$ и $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(z, \pi)]$, где $\alpha = \frac{\rho}{\rho-1}$;
2. $f(z)e^{-\alpha(-iz)^\omega} \in H_p^{(\omega)}\left[\Delta\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right)\right]$ и $f(z)e^{-\alpha(iz)^\omega} \in H_p^{(\omega)}\left[\Delta\left(\rho, -\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Наметим основные моменты доказательства. Положив

$$g_a(z) = \int_{a^{-1}}^a |f(rz)|^p r^{-a} dr \quad (a > 0),$$

нетрудно установить, что $\log g_a(z)$ является субгармонической функцией (см., напр. (4)). При этом в области $\Delta(z, 0) \cup \Delta(z, \pi)$ функция $\log g_a(z)$ оценивается следующим образом:

$$\log g_a(z) \leq \log \int_{a^{-1}}^a e^{c\omega |z|^\omega} r^{-a} dr \leq c(a) |z|^\omega.$$

Так как $\alpha = \frac{\rho}{\rho-1}$ ($1 < \rho < 2$), то

$$|z|^{-\alpha} \log g_a(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow +\infty.$$

Кроме того, функция $g_a(z)$ ограничена на лучах $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\omega}$.

Из принципа Фрагмена — Линделефа для субгармонических функций (см., напр. (*), стр. 206–207) следует, что $g_n(z)$ ограниченная функция во всей области $\Delta(\rho; 0) \cup \Delta(\rho; \pi)$. Устремляя ρ к бесконечности при $z = e^{i\theta} \left(\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \geq \varphi > \frac{\pi}{2\rho} \right)$, получаем

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^p r^{-\rho} dr \leq M_f < +\infty,$$

откуда следует утверждение 1.

Для доказательства утверждения 2 введем вспомогательную функцию

$$\varphi(w) = f(w) \omega^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \quad (5)$$

Эта функция аналитична в правой полуплоскости и имеет там рост, равный $(1, \rho)$, причем справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} |\varphi(\pm iy)|^p dy = \rho \int_0^{\infty} |f(re^{\pm i\frac{\pi}{2}})|^p r^{-\rho} dr \leq M_f < +\infty.$$

Отсюда следует включение $\varphi(iy) \in L^p(-\infty, \infty)$.

Из сказанного заключаем, что $\varphi(\kappa) e^{-\rho\kappa} \in L^p$ (см. (*)). Но это утверждение эквивалентно следующему^o:

$$\sup_{|\theta| < \pi/2} \left\{ \int_0^{\infty} |\varphi(re^{i\theta})|^p |e^{-\rho r e^{i\theta}}| dr < +\infty. \right.$$

т. е.

$$\sup_{|\theta| < \pi/2\rho} \left\{ \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^p |e^{-\rho r e^{i\theta}}| r^{-\rho} dr < +\infty. \right.$$

Иначе говоря,

$$f(z) e^{-\rho z} \in H_p^{(\rho)}[\Delta(\rho; 0)].$$

Возвращаясь к первоначальной угловой области $\Delta(\rho; \pi/2)$, заключаем, что

$$f(z) e^{-\rho z} \in H_p^{(\rho)}[\Delta(\rho; \pi/2)],$$

и аналогично

$$f(z) e^{-\rho z} \in H_p^{(\rho)} \left[\Delta\left(\rho, -\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Следующая лемма непосредственно следует из леммы 1.

Лемма 2. Если $f(z) \in W_{\rho, \infty}^p$, то

^o Отметим, что при $\rho=2$ оно впервые было установлено М. М. Джрбашяном и А. Е. Апетисяном (см., напр., (*)). При любом $0 < \rho < +\infty$ оно в одну сторону было доказано С. А. Аколином (**), а в другую — А. М. Седлецким (***).

$$1. |f(z)| \leq c_1 \|f\|_{W_{p, \rho}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}}, \quad \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| \geq \varphi_0 > \frac{\pi}{2}$$

$$2. |f(z)| \leq c_2 \|f\|_{W_{p, \rho}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}} e^{i\alpha \arg z}, \quad \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$$

$$3. |f(z)| \leq c_3 \|f\|_{W_{p, \rho}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}} e^{i\alpha \arg z}, \quad \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$$

Справедлива следующая основная теорема, доказательство которой мы наметим.

Теорема 1. *Пространство $W_{p, \rho}$ является банаховым пространством относительно естественной нормы*

$$\|f\|_{W_{p, \rho}} = \max_{1 \leq s \leq 4} \left\{ \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta_s})|^p r \cdot dr \right\}^{1/p}.$$

Действительно, пусть $\{f_k\}_k^{\infty}$ фундаментальная последовательность функций из класса $W_{p, \rho}$. Так как $f_k(re^{i\theta_s}) \in L^{p^*}(0, +\infty)$ ($1 \leq s \leq 4$) и $L^{p^*}(0, +\infty)$ полное пространство, то существуют функции $f^s(re^{i\theta_s})$ из класса $L^{p^*}(0, +\infty)$ такие, что

$$f_k(re^{i\theta_s}) \xrightarrow{L^{p^*}} f^s(re^{i\theta_s}) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, как следует из леммы 1, $f_k(z) \in H_p^{(s)}[\Delta(z, 0)]$ и $f_k(z) \in H_p^{(s)}[\Delta(z, \pi)]$. Но $H_p^{(s)}[\Delta(z, \theta)]$ является банаховым пространством, следовательно, существует функция $f(z)$ такая, что $f(z) \in H_p^{(s)}[\Delta(z, 0)]$.

$$f(z) \in H_p^{(s)}[\Delta(z, \pi)] \text{ и } f_k(z) \xrightarrow{H_p^{(s)}} f(z).$$

Из утверждений 2 и 3 леммы 2 следует, что

$$|f_k(z) - f_l(z)| \leq c_1 \|f_k - f_l\|_{W_{p, \rho}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}} e^{i\alpha \arg z}, \quad \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$$

$$|f_k(z) - f_l(z)| \leq c_2 \|f_k - f_l\|_{W_{p, \rho}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}} e^{i\alpha \arg z}, \quad \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$$

Откуда получаем, что последовательность $\{f_k\}_k^{\infty}$ равномерно сходится на любых компактах, лежащих внутри областей $\Delta(\rho; \pi/2)$ и $\Delta(\rho; -\pi/2)$.

Наконец, можно установить, что предельные функции последовательности $\{f_k\}_k^{\infty}$ являются аналитическими продолжениями друг друга, образуя при этом некоторую целую функцию, совпадающую с функциями $f^s(re^{i\theta_s})$ на лучах $\arg z = \theta_s$, ($1 \leq s \leq 4$).

3. Существенно опираясь на лемму 2, в силу теоремы 1, устанавливается

Лемма 3. Пусть $f(z) \in W_{p, \rho}$ и по определению

$$P_k(m, c) = \{z : \operatorname{Re}(ze^{-i\theta_s}) > c > 0, |\operatorname{Im}(ze^{-i\theta_s})| < m\}.$$

Тогда

$$\left(\int_{|z| \leq r} |f(z)|^p |z|^q dA(z) \right)^{1/p} \leq M_{p,q}(r) \Lambda_{p,q}^{\sigma} \quad (6)$$

Поведение функции $f(z) \in W_{p,q}^{\sigma}$ на лучах $\arg z = \theta_j$ дает следующая

Лемма 4. Если $f(z) \in W_{p,q}^{\sigma}$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(re^{i\theta_j}) r^{-\sigma} = 0 \quad (1 \leq j \leq k).$$

Проведем схему доказательства этой леммы. Пусть $\zeta = re^{i\theta_j}$ и $D_{r,\delta}$ ($\delta > 0$) — круг с центром ζ и радиусом δ . Из субгармоничности функции $|f(z)|^p |z|^q$ следует, что

$$|f(\zeta)|^p |\zeta|^q \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{D_{r,\delta}} |f(z)|^p |z|^q dA(z). \quad (7)$$

Положив $\zeta = re^{i\theta_j}$, ввиду того, что

$$D_{r,\delta} \subset \Pi_r(r-\delta, r+\delta),$$

имеем

$$|f(\zeta)|^p |\zeta|^q \leq (\pi \delta^2)^{-1} \int_{\Pi_r} |f(z)|^p |z|^q dA(z),$$

откуда по лемме 3 следует наше утверждение.

Имеет место

Теорема 2. Пусть $f(z) \in W_{p,q}^{\sigma}$ и $z_{k,j} = r^k e^{i\theta_j}$ ($1 \leq j \leq k$, $k=1, 2, 3, \dots$).

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |f(z_{k,j})|^p |z_{k,j}|^q \leq c \|f\|_{p,q}^p, \quad (8)$$

где $c > 0$ не зависит от f .

Действительно, пусть $\zeta_k = \frac{1}{2}(|z_{k+1}| - |z_k|)$ и D_{k,ζ_k} круг с центром $z_{k,1}$ и радиусом ζ_k . Записав неравенство (7) в виде

$$|f(z_{k,1})|^p |z_{k,1}|^q \leq (\pi \zeta_k^2)^{-1} \int_{D_{k,\zeta_k}} |f(z)|^p |z|^q dA(z),$$

получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_{k,1})|^p |z_{k,1}|^q \leq \pi^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_{k,\zeta_k}} |f(z)|^p |z|^q dA(z).$$

Ввиду того, что кружки D_{k,ζ_k} ($k=1, 2, \dots$) не пересекаются и при больших значениях k $\zeta_k \sim \frac{1}{2} r^{k-1}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_{k,1})|^p k^{\frac{2k\omega}{r}-2} \leq c \int \int_{\sigma_{1,1}(\omega)} |f(z)|^p |z|^{-\omega} dz \leq c_1 \|f\|_{W_{p,\omega}^{\sigma_{1,1}}}^p$$

Поскольку аналогичные неравенства, очевидно, справедливы для каждой из последовательностей $\{z_{k,j}\}$, то неравенство (8) справедливо.

Отметим одно следствие, вытекающее из теоремы 2.

Следствие. Пусть $f(z)$ целая функция экспоненциального типа $\leq \pi$, для которой

$$\|f\|_{p,\omega}^p = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^{-\omega} dx < +\infty, \quad (\omega \in (-1, p-1)).$$

Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^p |k|^{-\omega} \leq c \|f\|_{p,\omega}^p.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2, при $\rho=1$.

В заключение приведем теорему, в которой устанавливается ограниченность операторов сдвига и дифференцирования в пространстве $W_{p,\omega}^{\sigma}$.

Теорема 3. Пусть $f(z) \in W_{p,\omega}^{\sigma}$. Тогда:

1. $f(z+\zeta) \in W_{p,\omega}^{\sigma}$ при любом фиксированном $\zeta \in \mathbb{C}$, причем

$$c_1 \|f\|_{W_{p,\omega}^{\sigma}} \geq \|f(z+\zeta)\|_{W_{p,\omega}^{\sigma}}$$

2. $f'(z) \in W_{p,\omega}^{\sigma}$, причем

$$\|f'\|_{W_{p,\omega}^{\sigma}} \leq c_2 \|f\|_{W_{p,\omega}^{\sigma}}$$

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность моему научному руководителю академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство при выполнении настоящей работы.

Ереванский государственный университет

Ա. Գ. ՌԱՅԱՆՆԻԱՆ

Վերջավոր անի ամբողջ ֆունկցիաների մի դասի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր $\rho (1 \leq \rho < 2)$ կարգ և $\omega (0 < \omega < +\infty)$ տիպ անկցող անը բոլոր $f(z)$ ամբողջ ֆունկցիաների համար՝ $W_{p,\omega}^{\sigma}$ որոնց համար

$$\int_0^1 |f(re^{i\theta})|^p r^{-\omega} dr < +\infty, \quad (-1 < \omega < \rho-1, 1 < \rho < +\infty).$$

որտեղ՝

$$\theta_{14} = \pm \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right),$$

$$\theta_{24} = \pm \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right).$$

Մտցնելով համապատասխան նորմա, ցույց է տրվում, որ $W_{1,2}^{0,2}$ դասը կազմում է Բանախի տարածություն, ինչպես նաև ստացված է այդ դասում ներդրման թեորեմ:

Վերջում բերվում է այն փաստը, որ $W_{1,2}^{0,2}$ տարածությունում գիֆերենցման և տեղաշարժի սպերատորները սահմանափակ են:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян, *Мат. сб.*, 33(75), № 3 (1953). ² М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области*, «Наука», М., 1966. ³ В. М. Мартirosян, *Изв. АН Арм. ССР. Мат.*, т. 13, № 5—6 (1979). ⁴ Б. Я. Левин, Ю. Н. Любарский, *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, т. 3, вып. 39 (1975). ⁵ И. И. Привалов, *Субгармонические функции*, «Наука», М., 1937. ⁶ Б. Я. Левин, *Целые функции*, Изд. МГУ, М., 1971. ⁷ М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян, *ДАН СССР*, т. 120, № 3 (1958); *Сиб. мат. журн.*, 1, № 3 (1960). ⁸ С. А. Акоюн, *Изв. АН Арм. ССР. Мат.*, т. 1, № 2 (1967). ⁹ А. М. Седлецкий, *Мат. сб.*, 96 (138), № 1 (1975).

УДК 51:621.391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

К оценке сложности и приближенной расшифровке комбинаторных описаний

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 28/IX 1979)

1. В работе (1) было показано, что ряд известных комбинаторных проблем имеют эквивалентные с точностью до кодирования — декодирования входных—выходных данных представления в стандартной форме проблемы расшифровки описаний (ПРО), а длина минимального теста (д. м. т.) таблицы, специальным образом построенной для данной ПРО, может в ряде случаев служить нижней оценкой ее пиковой сложности. Асимптотические оценки д. м. т. из (2) справедливы только для таблиц с попарно различными строками, а алгоритм построения нижних оценок д. м. т. из (3) по существу требует задания внутренней структуры таблицы. Из сформулированной ниже теоремы 1 следует простой алгоритм вычисления нижних оценок д. м. т. произвольных таблиц с произвольным разбиением их на классы. Теорема 1 дает решение следующей экстремальной задачи.

Пусть R_n — множество всех Δ_n -наборов (4), $\eta = (n, m)$ — произвольная пара чисел, $n > 0$, $m < 2^n$, $K_\eta = \{S \mid S \subseteq R_n \& |S| = m\}$, $N_i(S)$ — число всех различных поднаборов длины i наборов S , $S \subseteq R_n$, $l'_\eta = \min_{S \in K_\eta} (0 \leq i < n \& \exists S' (S' \in K_\eta \& N_i(S') < C^i))$. Требуется построить систему $S^* \in K_\eta$ такую, что $\forall S (S \in K_\eta \rightarrow N_{l'_\eta}(S^*) \leq N_{l'_\eta}(S))$. Подчеркнем, что в отличие от (4) элементы S^* могут быть попарно сравнимы, а длины их заранее не фиксированы.

Пусть $\{2^n\}$ — множество всех двоичных чисел от 0 до $2^{n+1} - 1$, $\omega: \{2^n\} \rightarrow R_n$ — взаимно-однозначное отображение $\{2^n\}$ на R_n такое, что $\forall z (z \in \{2^n\} \& \omega(z) = A \rightarrow A = \{i \mid (z)_i = 0\})$, где $(z)_i$ — цифра i -ого разряда z , $1 \leq i < n$. Пусть также $E_\eta = \{F(2^{n+1} - 1), F(2^n - 2), \dots, F(2^n - m + 2)\}$, где $F(j) = \omega(j)$, j — двоичная запись числа j , $j = 0, 1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1$, $s(z)$ — число единиц в записи z , $z \in \{2^n\}$ и $(A)_i$ — i -ый элемент набора A , $1 \leq i < |A|$. Справедлива следующая

Теорема 1. 1). Для произвольной пары $\eta = (n, m)$, $n > 0$, $m < 2^n$, число i_η^* существует;

$$2) \forall S (S \in K_\eta \rightarrow N_{i_\eta^*}(E_\eta) \leq N_{i_\eta^*}(S));$$

$$3) N_i(E_\eta) = C_n^i - \sum_{j=0}^{n-i-1} C_{n-i-j}^{n-i-1}, \text{ где } n_j = (\omega(z^j)), 1 \leq j \leq n-i, 0 \leq i \leq n, z^j \in \{2^n\}.$$

$$c(z^j) = i, 0 \leq z^j \leq m-1 \text{ и } \exists! z(z > z^j \& c(z) = i);$$

$$4) \text{ если } \sum_{j=1}^p 2^{n-j} \leq m-1 < \sum_{j=1}^{p+1} 2^{n-j}, \text{ при } p \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \sum_{j=1}^0 2^{n-j} = 0, \text{ то } i_\eta^* = p+1.$$

Ясно, что если K_1, \dots, K_r — разбиение произвольной таблицы T n -мерных булевых векторов $r \geq 2$, S — множество всех максимально недопустимых наборов для пар векторов из K_1, \dots, K_r ⁽¹⁾, а $m = |S|$, то i_η^* может служить оценкой д. м. т. для T .

2. Временная сложность отдельных ПРО может быть непреодолимо большой не только относительно актуально известных алгоритмов, но и относительно оптимальных. Для таких проблем критерий временной сложности теряет свою адекватность, поскольку ни при каких разумных ограничениях на время вычисления индивидуальных задач точные оптимальные решения не могут быть получены и каждый реальный разрешающий алгоритм будет приближенным. Возникают проблемы выбора подходящей меры эффективности работы алгоритмов приближенной расшифровки описаний и ее вычисления. В качестве такой меры нами предлагается вектор с компонентами усредненной временной сложности решения индивидуальных задач и числовой оценки отклонения этих решений от оптимальных. Определение понятия оптимального при такой мере алгоритма нетривиально; в частности, при игровой интерпретации проблемы аксиома симметрии Нэша ⁽²⁾ не выполняется. В данной работе рассматриваются оптимальные только по критерию среднего отклонения алгоритмы при фиксированном среднем времени. Тем не менее при отсутствии аналитического представления оценки по этому критерию требуют анализа каждой индивидуальной задачи, что, как правило, нереализуемо. Для одной из таких комбинаторных проблем — поиска оптимального управления в шахматах (ПОУШ) ⁽³⁾ получены локально проверяемые достаточные условия увеличения среднего сходства. Доказательство соответствующей теоремы получено при предположении о прямой зависимости между местом, занимаемым данной шахматной стратегией в абсолютном турнире всевозможных стратегий, и степенью ее близости к оптимальной.

3. В дальнейшем изложении определения и обозначения, введенные в ⁽¹⁾, предполагаются известными.

Пусть t_* — верхняя граница времени, допустимого при решении индивидуальных задач ПРО произвольным алгоритмом предельных вычислений (АПВ).

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что функционал φ предназначен для моделирования квазифункционального отношения φ , $\varphi \subseteq U \times Y$, если $\forall u \in U (\varphi(u) \in Y)$. Соответственно, АПВ f предназначен для моделирования φ , если функционал, вычисляемый f , предназначен для моделирования φ , а каждая гипотеза на выходной ленте f является элементом из Y .

В частности, для ПРО все гипотезы являются парами множества (ПМ) из T .

В дальнейшем рассматриваются только t_* -ограниченные АПВ. Класс таких АПВ, предназначенных для моделирования φ , обозначим через F_φ .

Предполагается, что для каждой исследуемой ПРО определен алгоритм сходства A , который гипотезе h ставит в соответствие число $A(\varphi, h, u)$ — сходство гипотезы h с φ -приближением заданной входной записи u . Предполагается также, что $0 \leq A(\varphi, h, u) \leq 1$, $\forall u \in U$ ($u \in U \& h \in \varphi(u) \rightarrow A(\varphi, h, u) = 1$) и чем больше $A(\varphi, h, u)$, тем достовернее гипотеза h . Разность $1 - A(\varphi, h, u) = a(\varphi, h, u)$ будем называть *отклонением* гипотезы h . Например, аналогично (3) можно использовать

$a(\varphi, h, u) = \min_{v \in \varphi(u)} \frac{h \varphi v}{2k}$, где $k = |M|$, $\varphi, h \in T$, $\langle M, T, U, \varphi, C_0, C_1 \rangle$ — параметры произвольной ПРО. Если $h = f(u)$, где f — заданный алгоритм поиска управлений (АПУ), то вместо $a(\varphi, h, u)$ будем писать $a(\varphi, f, u)$.

О п р е д е л е н и е. Комплексной сложностью отношения φ на аргументе u относительно АПВ f , или $\langle \varphi, f, u \rangle_{КС}$, назовем вектор $\langle a(\varphi, f, u), b(\varphi, f, u) \rangle$, где $a(\varphi, f, u)$ — отклонение гипотезы h , построенной f в момент останова, при входной записи u , а $b(\varphi, f, u) = \frac{S(\varphi, f, u)}{t_\varphi}$, где $S(\varphi, f, u)$ — время, затраченное на построение h .

Средней комплексной сложностью φ относительно f , или $\langle \varphi, f \rangle_{КС}$, назовем вектор $\langle a(\varphi, f), b(\varphi, f) \rangle$, где $a(\varphi, f) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} a(\varphi, f, u)$

$$\text{и } b(\varphi, f) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \frac{S(\varphi, u, f)}{t_\varphi}$$

4. Введем понятие оптимального АПВ, предназначенного для моделирования отношения φ . В нашем представлении оно связывается с множеством F минимальных относительно нижеследующего упорядочения B° АПВ:

$$\forall f_1, f_2 \in F. (f_1 B^\circ f_2 \rightarrow a(\varphi, f_1) \leq a(\varphi, f_2) \& b(\varphi, f_1) \leq b(\varphi, f_2)).$$

где $a(\varphi, f_i), b(\varphi, f_i)$ — компоненты $\langle \varphi, f_i \rangle_{КС}$, $i = 1, 2$.

Легко видеть, что $F \neq \emptyset$ и $\forall f_1, f_2 \in F (a(\varphi, f_1) < a(\varphi, f_2) \Leftrightarrow b(\varphi, f_1) > b(\varphi, f_2))$.

Наши попытки упорядочения F на основе векторной разности СКС элементов F приводили к противоречию с B^n . Безуспешной оказалась также попытка определения оптимальности по Нэшу (³), при интерпретации проблемы в рамках общих арбитражных схем (⁶). При этом в качестве I и II игроков рассматривались два противоположных начала, присущие каждому АПВ и ответственные за изменение компонент сходства $x_1 = 1 - a(\varphi, f)$ и быстрогодействия $x_2 = 1 - b(\varphi, f)$, а сами x_1 и x_2 принимались за доли игроков при дележе (x_1, x_2) . Исходный дележ при отсутствии соглашения принимался равным $(0,0)$. В такой интерпретации проблемы можно полагать, что все аксиомы Нэша за исключением аксиомы симметрии приемлемы. В последней требуется инвариантность оптимума при перестановке игроков, что несовместимо с существенно различной природой сходства и быстрогодействия. Принятое нами упорядочение АПВ основано на их сведении к некоторым, вообще говоря, другим АПВ класса F , с одним и тем же средним временем вычисления и сравнении приведенных АПВ по значениям среднего отклонения.

О п р е д е л е н и е. При заданных отношении φ и среднем нормированном времени α , $0 < \alpha < 1$, α -оптимальным АПВ в классе F , назовем произвольный АПВ $f^* \in F$ такой, что $|b(\varphi, f^*) - \alpha| = \min_{f \in F} |b(\varphi, f) - \alpha|$. Ясно, что α -оптимальный АПВ существует.

5. Пусть исходная ПРО L_0 имеет параметры $\langle M, T, U, \varphi, C_0, C_1 \rangle$. Приближенной ПРО относительно L_0 назовем проблему, в которой дополнительно к L_0 заданы: допустимое время t , решения индивидуальных задач L_0 , алгоритм сходства $A(\varphi, h, u)$, среднее нормированное время α для оптимального в классе $F_\varphi = F(C_0, C_1)$ АПВ; требуется из множества F_φ выделить α -оптимальный.

Приближенную ПРО будем задавать системой параметров $\langle M, T', U, \varphi, C_0, C_1, t_0, A, \alpha \rangle$. Отметим, что использование в ней пары $\langle \varphi, A \rangle$ в определенном смысле равносильно переходу к размытым отношениям по Л. Заде. Исследование влияния „степени размытости“ на СКС, регулируемое посредством $A(h, \varphi, u)$, может дать сравнительные оценки эффективности различных типов классификаций, в частности, определяемых отношениями эквивалентности, толерантности или размытыми.

6. Итак, приближенная ПРО сводится нами к оптимизационной проблеме, в которой оптимум задается требованием $\min_{f \in F_\varphi} \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} a(\varphi, f, u)$ при условии $b(\varphi, f) = \alpha$. В общем случае вычисление $a(\varphi, f)$ связано с вычислением $a(\varphi, f, u)$ при каждом $u \in U$, что при больших $|U|$ не реально. Практическое использование критерия $a(\varphi, f)$ в этом случае возможно только для таких ПРО, для которых удастся выделить локально проверяемые методы его оценки. Рассмотрим одну из

таких процедур для ПОУ^ш. Она основана на предположении о том, что доли выигрышей, ничьих и проигрышей заданного АПУ f в играх с произвольными другими АПУ при фиксированной начальной позиции P прямо пропорциональны долям концевых вершин соответствующих типов в P -стратегии, порожденной f . Это предположение уточняется посредством нижеследующей аксиомы 1.

Пусть H — множество специальным образом подобранных позиций шахматной игры H , используемых как начальные. Будем считать, что определен алгоритм упорядочения (локальный) A_1 , который по результатам матча заданных АПУ f_i и f_j из $2|H|$ партий, с правом первого хода для f_i и f_j ровно один раз в каждой позиции из H , указывает, равносильны ли f_i и f_j ($f_i \approx f_j$) или f_i выигрывает у f_j ($f_i \succ f_j$).

Будем говорить, что для множества АПУ F определен турнир T с параметрами $\langle H, H, A_1, \dots, A_n, A_r \rangle$, если заданы множество начальных позиций H , среднее допустимое время τ выбора хода в произвольной позиции, алгоритмы A_i — локального упорядочения АПУ по результатам матчей с начальными позициями из H , A_n — выбора пар из F для сравнения и A_r — (глобального) линейного упорядочения всех АПУ из F на основе графа матчей. Если АПУ f_i и f_j занимают места i и j относительно упорядочения A_r , то будем говорить, что " f_i сильнее f_j " ($f_i > f_j$), если $i < j$, и " f_i эквивалентно f_j " ($f_i = f_j$), если $i = j$.

Пусть также P — множество всех позиций графа игры ПОУ^ш и F^* — множество всех неэквивалентных (т. е. отличающихся управлением хотя бы в одной позиции) АПУ в ПОУ^ш. Ясно, что F^* конечно. Рассмотрим для F^* абсолютный турнир $T^* = \langle H^*, H^*, A_1^*, \dots, A_n^*, A_r^* \rangle$, параметры которого определены следующим образом.

Пусть $a_{ij}(P)$, при $a_{ij}(P) \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $f_i, f_j \in F^*$, есть результат партии f_i с f_j при начальном ходе из позиции P для f_i , $a_{ij} = \frac{1}{|P|} \sum_{P \in P} a_{ij}(P)$ и

$a_i = \frac{1}{|F^*|} \sum_{f_j \in F^*} a_{ij}$. Тогда в T^* полагаем: 1) $H^* = P$; 2) алгоритм A_1^*

такой, что $\forall f_i, f_j \in F^* (f_i \succ f_j \rightarrow a_{ij} > a_{ji}) \& (f_i \approx f_j \rightarrow a_{ij} = a_{ji})$; 3) $\tau^* = 2 \cdot \tau_0$; 4) алгоритм A_r^* определяет ровно один матч каждого АПУ из F^* со всеми остальными, т. е. является круговым; 5) алгоритм A_r^* такой, что $\forall f_i, f_j \in F^* (f_i > f_j \rightarrow a_i > a_j) \& (f_i = f_j \rightarrow a_i = a_j)$. Величину a_i будем называть абсолютным коэффициентом АПУ f_i , $f_i \in F^*$, а место f_i относительно упорядочения A_r^* — абсолютным местом f_i .

По определению ПОУ^ш оптимальная P -стратегия доставляет

$\max_{G \in G_P} \frac{m_1(G) + 2m_2(G)}{2m(G)}$, где $m_1(G)$, $m_2(G)$ и $m(G)$ — число ничейных, выиг

рышных и всех концевых вершин G , а G_P — всевозможные P -стратегии.

Естественно считать $B(\varphi, f_i, P) = \frac{m_1(f_i(P)) + 2m_2(f_i(P))}{2m(f_i(P))}$ мерой $A(\varphi, f_i, P)$.

С другой стороны величина $\frac{1}{|F^*|} \sum_{P \in F^*} a_{ij}(P)$ содержательно близка к

$B(\varphi, f_i, P)$, поскольку рассматриваются всевозможные АПУ f_j , и потому можно считать, что доля исходов их встреч с f_i имеет один и тот же коэффициент пропорциональности для концевых вершин

каждого из типов стратегии $f_i(P)$. Это предположение дает основание для принятия следующей аксиомы 1: для произвольных АПУ f и позиции P сходство $A(\varphi, f, P)$ стратегии-гипотезы $f(P)$ с опти-

мальной равно $\frac{1}{|F^*|} \sum_{f_j \in F^*} a_{ij}(P)$.

Следствие 1. Среднее сходство гипотез, порождаемых данным АПУ f , равно абсолютному коэффициенту f .

Следствие 1 при некоторых естественных предположениях позволяет оценивать среднее сходство АПУ f , используя результаты матчей f с другими АПУ, что в отличие от строения P -стратегий представляется более измеримой величиной.

Пусть $f_i \in F^*$, i — номер абсолютного места f_i , $1 \leq i \leq m$, $m = |F^*|$. Принимается следующая

Гипотеза 1 (о зонах устойчивости). Для произвольного i , $1 \leq i \leq m$, существуют натуральные числа l'_1, l'_2, k'_1, k'_2 ($l'_1 \geq k'_1, l'_2 \geq k'_2$) такие, что при произвольном j , $1 \leq j \leq m$, как правило, справедливы следующие утверждения:

$$1) j \geq l + k'_2 \rightarrow \neg(f_i \rightarrow f_j); \quad 2) i > l + l'_2 \rightarrow f_i \rightarrow f_j$$

$$3) j < l - k'_1 \rightarrow \neg(f_i \rightarrow f_j); \quad 4) i < l - l'_1 \rightarrow f_i \rightarrow f_j$$

Гипотеза 1 хорошо согласуется с нашим представлением о „сильных“ и „слабых“ шахматистах, отраженным, в частности, посредством рейтингов Эло. А именно, с ростом разницы рейтингов ΔK игрока i относительно игрока j , по таблице Эло (*), растет процент ожидаемых от i очков в матче между i и j . При этом если $\Delta K < 735$, i может как выигрывать, так и проигрывать j ; в противном случае i всегда выигрывает. Полагая ΔK пропорциональным разнице мест i и j в абсолютном турнире, можно видеть, что выводы Эло и гипотезы 1 аналогичны.

Усилив гипотезу 1, полагая ее утверждения с вероятностью больше определенного порога, связанного с границами k и l , достоверными, можно указать локально проверяемые достаточные условия того, что один АПУ сильнее другого.

Теорема 2. Для произвольных АПУ f_i и f_j :
 а) если $f_i \rightarrow f_j$ существует множество АПУ F' такое, что

$|F'| \geq k_i - 1$ и $\forall f \in F'(f_i \rightarrow f \& f_i \rightarrow f)$ в турнире $T = \langle H, H^*, A_i^*, \tau^*, A_n, A_i \rangle$ для $F' \cup \{f_i, f_j\}$, где H^*, A_i^*, τ^* - те же, что и в абсолютном турнире, а A_n обеспечивает встречу f_i и f_j с каждым АПУ из F' , то $f_j > f_i$; б) если $f_i \leq f_j$, существует множество F'' такое, что $|F''| \geq k_i + k_j - 1$ и $\forall f \in F''(f_j \rightarrow f \& f_i \rightarrow f \vee f_i \leq f)$ в вышеуказанном турнире T , то $f_j > f_i$.

Теорема может служить ориентиром при экспериментальном сравнении усилителей АПУ. Даже при отсутствии оценок для k и l , используя теорему, по меньшей мере можно утверждать, что чем больше $|F'|$ ($|F''|$), тем достовернее выполнение неравенств $f_j > f_i$. Трудностей

вычисления величины $a_{ij} = \frac{1}{|P|} \sum_{P \in P} a_{ij}(P)$, связанных с отсутствием всего P , можно избежать рассмотрением сбалансированных позиций (*). При отсутствии таковых приемлемого приближения к a_{ij} можно достичь посредством других, априори равноценных для f_i и f_j позиций.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. Б. Маранджяну за полезное обсуждение работы.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Է. Մ. ԳՈՂՈՍՅԱՆ

Կոմբինատոր և կարագրությունների մոտավոր դեկոդավորման և բարդության զննահատման մասին

Կամայական $n > 0$ և $m < 2^n$ ամբողջ թվերի համար n հզորություն բազմություն m ենթաբազմություններից կառուցված է E սխեմաներ, նրա l հզորություն ենթաբազմությունների $N_l(E)$ թիվը մինիմալ է այն փոքրագույն $0 < l < n$ թվի համար, որ գոյություն ունի $N_l(S) < C_l$ պայմանին բավարարող տրված տիպի որևէ մի սխեմա S ։

Հայտնի է, որ նկարագրությունների դեկոդավորման պրոբլեմներին կարելի է համապատասխանեցնել հատուկ n -չափանի բուլյան աղյուսակներ, որոնց մինիմալ տեստերի նրկարությունները կարող են տալ այդ պրոբլեմների անհատական խնդիրների մաթսիմալ բարդության ներքին գնահատականները։ Վերոհիշյալ E սխեմաի հիման վրա կամայական բուլյան աղյուսակների կամայական դասերի տրոհման համար առաջարկված է մինիմալ տեստերի նրկարությունները գնահատելու մի պարզ ալգորիթմ, որը տալիս է այդ գնահատականները նույնիսկ այն դեպքում, երբ ի սկզբանի հայտնի են միայն դասերի հզորությունները։

Ուսմանված է կոմբինատոր նկարագրությունների մոտավոր դեկոդավորման պրոբլեմի գաղափարը։

Շախմատային օպտիմալ ղեկավարման պրոբլեմի մատավոր դրվածքի համար տրված են դիտվող և օպտիմալ ալգորիթմների միջին տարրերության գնահատման լոկալ ստուգվող անհրաժեշտ պայմաններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. М. Погосян, ДАН Арм. ССР, т. 68, № 1 (1979). ² А. Д. Коршунов, «Кибернетика», № 6, 1970 ³ Э. М. Погосян, ДАН Арм. ССР, т. 50, № 2 (1970) ⁴ Э. М. Погосян, Сб., Комбинаторный анализ, вып. 4, МГУ, М., 1976 ⁵ Г. Оуэн, Теория игр, «Мир», М., 1971 ⁶ Н. Н. Воробьев, Сб. Теоретико-игровые вопросы принятия решений, «Наука», Л., 1978 ⁷ А. А. Мартиросян, Э. М. Погосян, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 4 (1978) ⁸ Е. Я. Гик, Математика на шахматной доске, «Наука», М., 1976 ⁹ Э. М. Погосян, Сб. Материалы Всесоюзной конференции «Мат. обеспечение моделирования сложных систем», Киев, 1977.

УДК 517.983 : 517.95

МАТЕМАТИКА

Г. С. Аюбян

О спектральных свойствах пучка дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 1 XII 1979)

Спектральные свойства пучка дифференциальных операторов $- \lambda \Delta$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, Δ — оператор Лапласа, при нулевых краевых условиях, впервые были рассмотрены в работах Р. А. Александряна (¹⁻³) в связи с изучением качественного поведения решений системы С. Л. Соболева, описывающей малые колебания вращающейся идеальной жидкости (^{4,5}).

В (^{2,3}) было показано, что порождаемая этим пучком задача Дирихле эквивалентна изучению спектральных свойств оператора $Q = -\Delta^{-1} \square$, действующего в пространстве W_2^1 . Было установлено, что в зависимости от границы области спектр оператора Q может быть как чисто точечным, так и содержать интервалы непрерывности.

Исходя из свойств семейства диффеоморфизмов границы области Р. А. Александряном был построен некоторый класс кусочно-постоянных функций, представляющих собой обобщенные собственные функционалы оператора Q .

В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные вопросы для операторов с постоянными коэффициентами, однако уже действующими в пространстве вектор-функций.

Пусть Ω — ограниченная область в R^2 с достаточно гладкой границей Γ .

Рассматривается краевая задача для пучка систем дифференциальных уравнений.

$$A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^2} + B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial \bar{u}}{\partial y^2} = -\lambda \Delta \bar{u} \tag{1}$$

$$\bar{u}|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где A, B, C — $n \times n$ коммутирующие между собой постоянные, вещественные, симметрические матрицы, E — единичная матрица.

В гильбертовом пространстве вектор-функция

$$\vec{W}_1(\Omega) = \left\{ \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ \vdots \\ f_n(x, y) \end{pmatrix}, f_i(x, y) \in W_1^1(\Omega) \ (i=1, 2, \dots, n) \right\}$$

рассмотрим оператор $A = -\Delta^{-1} \left(A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, где Δ^{-1} — оператор, обратный к оператору Δ при нулевых краевых условиях.

В пространстве $\vec{W}_1(\Omega)$ скалярное произведение зададим по формуле

$$(\vec{f}, \vec{g})_\lambda = \int \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right] dx dy.$$

Теорема 1. В пространстве $\vec{W}_1(\Omega)$ оператор A является ограниченным и самосопряженным, и его собственные функции являются решениями однородной краевой задачи (1)–(2).

Определение 1. $\vec{u}_\lambda(x, y) \in L_2(\Omega)$ называется собственным функционалом оператора A или краевой задачи (1)–(2), соответствующим собственному значению λ , если

$$\int \vec{u}_\lambda(x, y) \cdot \left[(A + iE) \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial x \partial y} + (C + iE) \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial y^2} \right] dx dy = 0$$

для всех

$$\vec{\varphi}(x, y) \in \vec{\Phi}_0(\Omega) = \{ \vec{f}(x, y), f(x, y) \in C^2(\bar{\Omega}), \vec{f}(x, y)|_\Gamma = 0 \}.$$

Пусть a_k, b_k, c_k ($1 \leq k \leq n$) собственные значения матриц A, B, C и $\gamma_k(\lambda)$ совокупность тех граничных точек*, в которых

$$(a_k + i) \cos^2 \nu_x + b_k \cos \nu_x \cos \nu_y + (c_k - i) \cos^2 \nu_y = 0.$$

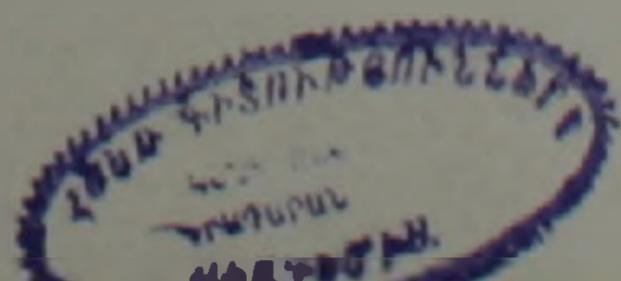
Лемма 1. Если собственный функционал $\vec{u}_\lambda(x, y)$ — гладкая вектор-функция и если дополнения к множествам $\gamma_k(\lambda)$ ($k=1, 2, \dots, n$) являются всюду плотными на Γ , то $\vec{u}_\lambda(x, y)$ является классическим решением задачи (1)–(2).

Будем считать область Ω „допустимой“, т. е. такой, что любая прямая пересекает ее границу не более чем в двух точках.

Рассмотрим однородную краевую задачу:

$$\left. \begin{aligned} (a + i) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (c + i) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ u|_\Gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

* Здесь ν — внешняя нормаль.



Пусть $y + \mu_1 x = \text{const}$ и $y + \mu_2 x = \text{const}$ — соответственно первое и второе семейство вещественных характеристик уравнения (*).

Диффеоморфизм $S_1^{-1}(a, b, c)$ (соответственно $S_2^{-1}(a, b, c)$) сопоставляет каждой точке $\theta \in \Gamma$ точку пересечения с границей Γ характеристики первого семейства (соответственно второго семейства), проходящей через θ .

Диффеоморфизм $S_1(a, b, c)$ определяется как произведение диффеоморфизмов $S_1^{+1}(a, b, c)$ и $S_1^{-1}(a, b, c)$, т. е.

$$S_1(a, b, c) = S_1^{-1}(a, b, c) \cdot S_1^{+1}(a, b, c).$$

Определение 2. Орбитой точки $\theta \in \Gamma$ относительно группы, порожденной образующими $S_1(a, b, c)$, $S_1^{-1}(a, b, c)$, называется множество $\text{Orb}(\theta) = \{S_1^k(a, b, c)\theta, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, а $\text{Orb}(S_1^{+1}(a, b, c)\theta)$ и $\text{Orb}(S_1^{-1}(a, b, c)\theta)$ называются смежными по отношению к $\text{Orb}(\theta)$.

Каждая точка $\theta \in \Gamma$ порождает вполне определенную совокупность граничных точек $\mathfrak{X}(\nu, \theta, \Gamma)$, которая называется λ -орбитой и представляет собой объединение двух смежных орбит, порождаемых этой точкой.

λ -орбита $\mathfrak{X}(\nu, \theta, \Gamma)$ называется тривиальной, если она содержит точку, в которой касательная к границе Γ параллельна одному из характеристических направлений.

Теорема 2. Если при $\nu = \nu_0$ некоторая итерация диффеоморфизма $S_{\nu_0}(a, b, c)$ имеет такую неподвижную точку θ_0 , что ν_0 -орбита $\mathfrak{X}(\nu_0, \theta_0, \Gamma)$ не является тривиальной, то существует собственный функционал краевой задачи (*), изоморфный ограниченной функции.

Пусть $A_r(\nu, a, b, c)$ — совокупность точек $\theta \in \Gamma$, неподвижных относительно r -й итерации отображения $S_\nu(a, b, c)$.

$$\text{Ясно, что } \Gamma = A_{\infty}(\nu, a, b, c) + \sum_{r=1}^{\infty} A_r(\nu, a, b, c).$$

Можно доказать (см. (2), лемма 12), что в этом представлении только одно слагаемое под знаком суммы может быть непустым, т. е. либо $\Gamma = A_{\infty}(\nu, a, b, c)$, либо существует $r = r(\nu, a, b, c)$ такое, что $\Gamma = A_{\infty}(\nu, a, b, c) + A_r(\nu, a, b, c)$.

Таким образом, диффеоморфизм $S_\nu(a, b, c)$ состоит из двух компонент: одна из них индуцирована им на множестве $A(\nu, a, b, c)$ — периодическая компонента с фиксированным периодом, а другая индуцирована им на множестве $A_{\infty}(\nu, a, b, c)$ — аperiodическая компонента.

Теорема 3. Если множество $A(\nu_0, a, b, c)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то можно построить гладкую собственную функцию краевой задачи (*).

Справедливость теорем 2.3 устанавливается аналогично доказательству теорем 9.11 из (2).

Теорема 4. Если при $\nu = \nu_0$ для некоторого $1 \leq k \leq n$ существует диффеоморфизм $S_{\nu_0}(a_k, b_k, c_k)$, конечная итерация которого

имеет неподвижную точку θ_0 , такую, что λ_0 -орбита $\mathfrak{X}(\lambda_0, \theta_0, \Gamma)$ не является тривиальной, то существует собственный функционал оператора A , изоморфный ограниченной вектор-функции.

Теорема 5. Если при $\lambda = \lambda_0$ для некоторого $1 \leq k \leq n$ множество $A(\lambda_0, a_k, b_k, c_k)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то можно построить гладкую собственную вектор-функцию краевой задачи (1) - (2).

Рассмотрим тот случай, когда Ω — круг.

Лемма 2. Если Γ есть окружность $x^2 + y^2 = 1$, то множество $A(\lambda, a, b, c) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda = \lambda_{l,m} = -\frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2} \cos \frac{\pi l}{m}, \quad (m=2, 3, \dots, l=1, 2, \dots, (m-1)).$$

Таким образом, если $\rho_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $\rho_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ решения характеристического уравнения $(a + \lambda)\rho^2 + b\rho + c + \lambda = 0$, то множество $A(\lambda, a, b, c)$ совпадает с границей Γ тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\pi}$ есть число рациональное.

Теорема 6. Если Ω есть круг $x^2 + y^2 < 1$, то функции

$$v_{l,m}(x, y) = \cos \left| m \operatorname{arccos} \cos \left(x \sin \left(\frac{\pi l}{2m} - \beta \right) + y \cos \left(\frac{\pi l}{2m} - \beta \right) \right) \right| + \\ + (-1)^{l+1} \cos \left| m \operatorname{arccos} \cos \left(y \cos \left(\frac{\pi l}{2m} + \beta \right) - x \sin \left(\frac{\pi l}{2m} + \beta \right) \right) \right|$$

являются собственными функциями краевой задачи (*), соответствующими собственному значению $\lambda = \lambda_{l,m}$ ($m=2, 3, \dots, l=1, 2, \dots, (m-1)$), где $\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arccos} \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}$.

Лемма 3. Собственные функции $v_{l,m}(x, y)$ ($m=2, 3, \dots, l=1, 2, \dots, (m-1)$) образуют полную систему в $W^1(\Omega)$.

Пусть N — невырожденное преобразование, приводящее матрицы A, B, C одновременно к диагональному виду. Из теорем 5, 6 следует, что вектор-функция $u_{l,m,k} = N \bar{v}_{l,m,k}$, где $\bar{v}_{l,m,k}$ — вектор-функция, k -тая компонента которой равна $v_{l,m}(x, y)$, а остальные компоненты — нули, являются собственными функциями оператора A , соответствующими собственным значениям

$$\lambda = \lambda_{l,m,k} = -\frac{a_k + c_k}{2} + \frac{\sqrt{(a_k - c_k)^2 + b_k^2}}{2} \cos \frac{\pi l}{m} \\ (m=2, 3, \dots, l=1, 2, \dots, (m-1), k=1, 2, \dots, n).$$

Теорема 7. Вектор-функции $u_{l,m,k}$ ($m=2, 3, \dots, l=1, 2, \dots, (m-1), k=1, 2, \dots, n$) образуют полную систему в $W^1_2(\Omega)$.

Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածությունում դիֆերենցիալ օպերատորների
փնտի սպեկտրալ հատկությունների մասին

Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածությունում դիտարկվում է դիֆերենցիալ օպերատորների փնտի ձևով \mathcal{H} -ի խնդիրը և պայացուցվում է, որ այդ խնդիրը համարժեք է W -ի տարածությունում A ինքնահամայնի և սուհամանափակ օպերատորի սպեկտրալ հատկությունների ուսումնասիրությանը: Օգտագործելով տիրույթի եզրագծի հատուկ դիֆեոմորֆիզմների ընտանիքի հայտնի հատկություններ, հաջողվում է կառուցել այդ օպերատորի ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների որոշակի համախմբություն: Բերվում է բավարար պայման, որի դեպքում հնարավոր է կառուցել A օպերատորի ողորկ սեփական ֆունկցիա: Այն դեպքում, երբ տիրույթը շրջան է, կառուցվում է բազմանդամային սեփական ֆունկցիաների սխեմա և ապացուցվում է, որ այն լրիվ է W -ի տարածության մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Р. А. Александрян, ДАН СССР, т. 73, № 5 (1950) 2 Р. А. Александрян, Дис., МГУ, 1949 3 Р. А. Александрян, Труды Моск. мат. о-ва, т. 9 (1960). 4 С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, № 1 (1954). 5 С. Л. Соболев, ПМФ 1, № 3 (1960)

УДК 517.9.

МАТЕМАТИКА

А. О. Оганесян

О локальной разрешимости и гипозэллиптичности для одного класса уравнений второго порядка.

(Представлено чл-корр АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/XII 1979)

Как известно (¹), общее линейное дифференциальное уравнение

$$P(x, D)u = f \quad (1)$$

в случае, когда коэффициенты оператора $P(x, D)$ или функция f не являются аналитическими функциями, не всегда имеет решение (хотя бы локальное). Если оператор $P(x, D)$ является оператором главного типа, то получены условия локальной разрешимости уравнения (1), имеющие окончательный характер. Эти результаты изложены в (²), где имеется и подробная библиография. Гораздо меньше изучен вопрос о локальной разрешимости уравнений, не являющихся уравнениями главного типа. Укажем на работы (³⁻⁶).

В предлагаемой статье изучается вопрос о локальной разрешимости и гипозэллиптичности уравнения второго порядка, не являющегося уравнением главного типа. Схема, предложенная в работе (⁶), переносится на более общее уравнение второго порядка. Полученные условия локальной разрешимости и гипозэллиптичности уравнения обобщают результаты этой работы.

Пусть H — абстрактное гильбертово пространство, а A — неограниченный, обратимый, самосопряженный, положительно определенный оператор, определенный на плотном подмножестве пространства H . Обозначим через J открытое множество на действительной оси, содержащее точку 0.

Рассмотрим оператор второго порядка

$$P = (\partial_t - a(t, A)A) (\partial_t - b(t, A)A) - c(t, A)A, \quad (2)$$

где $a(t, A)$, $b(t, A)$, $c(t, A)$ являются рядами по неотрицательным степеням A^{-1} с коэффициентами из $C^\infty(J)$:

$$a(t, A) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(t)A^{-l}; \quad b(t, A) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l(t)A^{-l}; \quad c(t, A) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(t)A^{-l}.$$

Предполагается, что эти ряды, так же как и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по t , произвольное число раз сходятся в пространстве $L(H, H)$ равномерно по t на любом компактном подмножестве множества J .

Определим с помощью оператора A шкалу собелевских пространств $H^s (s \in \mathbb{R}^1)$: если $s \geq 0$, то $u \in H^s$, если $u \in H$ и $A^s u \in H$ с нормой $\|u\|_s = \|A^s u\|$, где через $\|\cdot\|$ обозначена норма пространства $H = H^0$. Если $s < 0$, то H^s есть пополнение H по норме $\|u\|_s = \|A^s u\|$. Обозначим через $C^\infty(J, H^s)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций со значениями в $H^s = \bigcap_{s' \leq s} H^{s'}$, а $C_0^\infty(J, H^s)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными в J носителями со значениями в H^s . Дуальное к $C_0^\infty(J, H^s)$ пространство обозначим $D'(J, H^{-s})$.

Определение 1. Оператор P называется локально разрешимым в точке $t=0$, если существует окрестность $J' \subset J$ точки $t=0$, такая, что для любой функции $f \in C_0^\infty(J', H^s)$ существует $u \in D'(J', H^{-s})$, такая, что

$$Pu = f \text{ в } J'.$$

Определение 2. Оператор P называется гипозэллиптическим в J , если для любой окрестности $J' \subset J$ и любого распределения $u \in D'(J', H^{-s})$ из $Pu \in C_0^\infty(J', H^s)$ следует, что $u \in C_0^\infty(J', H^s)$.

Оператор P называется гипозэллиптическим в точке $t=0$, если он является гипозэллиптическим в некоторой окрестности этой точки.

Введем следующие обозначения:

$$X = \partial_t - a(t, A)A, \quad Y = \partial_t - b(t, A)A;$$

$$c(t, A) = a(t, \dot{A}) - a(t, A).$$

В дальнейшем предполагается, что функции $a_0(t)$ и $b_0(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_0^{(s)}(0) = b_0^{(s)}(0) = 0 \quad s = 0, \dots, k-1; \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} a_0^{(k)}(0) > 0, \quad \operatorname{Re} b_0^{(k)}(0) < 0, \tag{4}$$

где k — нечетное положительное число. Известно (4), что при выполнении условий (3), (4) оператор $\bar{P} = XY$ не является ни локально разрешимым, ни гипозэллиптическим в точке $t=0$. В статье изучаются условия, накладываемые на коэффициент $c(t, A)$, при которых оператор $P = XY - c(t, A)A$ оказывается и локально разрешимым и гипозэллиптическим в точке $t=0$. Случай $k=1$ рассмотрен в (4).

Теорема 1. Пусть оператор P удовлетворяет условиям (3), (4) и для любого $t \in J$

$$t^{k-1}k \left| \frac{a_0^{(k)}(0) - b_0^{(k)}(0)}{k!} \right|^2 \leq 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \frac{c_0^{(l)}(0)}{l!} \frac{a_0^{(k-l)}(0) - b_0^{(k-l)}(0)}{k!} \right), \quad (5)$$

Тогда существуют постоянные $c_0, c_1 > 0$ такие, что для любой функции $u \in C_0^\infty(J, H^-)$ имеет место неравенство

$$\int \left(|u_t|^2 + |t^k Au|^2 \right) dt \leq c_0 \left| \int (Pu, u) dt \right| + c_1 \int |t| \left(|u_t|^2 + |t^k Au|^2 \right) dt. \quad (6)$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$a = \frac{a_0^{(k)}(0)}{k!}; \quad b = \frac{b_0^{(k)}(0)}{k!}; \quad c = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{c_0^{(l)}(0)}{l!} t^l;$$

$$\bar{X} = \partial_t - at^k A; \quad \bar{Y} = \partial_t - bt^k A; \quad \bar{P} = \bar{X} \bar{Y} - cA.$$

Учитывая условия (3), нетрудно доказать следующую оценку:

$$\left| \int (|P - \bar{P}|u, u) dt \right| \leq c\varepsilon^{-1} \int |t| \left(|u_t|^2 + |t^k Au|^2 \right) dt + \varepsilon \int \left(|u_t|^2 + |t^k Au|^2 \right) dt,$$

где ε — произвольное положительное число. Поэтому неравенство (6)

достаточно доказать для оператора \bar{P} . Опуская знак \sim , запишем

$$P = XY - cA; \quad X = \partial_t - at^k A; \quad Y = \partial_t - bt^k A;$$

$$\operatorname{Re} a > 0; \quad \operatorname{Re} b < 0.$$

Обозначим $X^* = \partial_t + \bar{a}t^k A$ и $\varepsilon = a - b$. В новых обозначениях условие (5) запишется в виде

$$t^{k-1}k |\varepsilon|^2 \leq 2 \operatorname{Re}(c \bar{\varepsilon}). \quad (7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \left\{ \bar{\varepsilon} \int (Pu, u) dt \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \bar{\varepsilon} \int (Yu, X^* u) dt \right\} + \\ &+ \int \operatorname{Re}(c \bar{\varepsilon}) (Au, u) dt = \int \left\{ \operatorname{Re}(c \bar{\varepsilon}) - \frac{k|\varepsilon|^2}{2} t^{k-1} \right\} (Au, u) dt + \\ &+ \int \left\{ (\operatorname{Re} \varepsilon) |u_t|^2 - \operatorname{Re}(ab \bar{\varepsilon}) |t^k Au|^2 - \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} (a+b) \right\} 2 \operatorname{Im}(u_t, t^k Au) \right\} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда, учитывая условие (7), $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$ и легко проверяемое равенство (*)

$$-(\operatorname{Re} \varepsilon) \operatorname{Re}(ab \bar{\varepsilon}) - \left| \operatorname{Im} \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} (a+b) \right|^2 = -(\operatorname{Re} a) (\operatorname{Re} b) |\varepsilon|^2 > 0, \quad (9)$$

получим требуемое неравенство (6).

Замечание 1. Пользуясь обозначением $\varepsilon = |a_0^{(k)}(0) - b_0^{(k)}(0)| (k!)^{-1}$, запишем условие (5) в следующем виде:

$$2\operatorname{Re}\left(\sum_{l=0}^{k-2} \frac{c_0^{(l)}(0)}{l!} \bar{z} t^l\right) + \left| 2\operatorname{Re} \frac{c_0^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \bar{z} - |z|^2 k \right| t^{k-1} \geq 0.$$

Так как t меняется в окрестности нуля, то из этого неравенства следует, что в сумме первый отличный от нуля коэффициент должен быть при четной степени l и этот коэффициент $2\operatorname{Re}[c_0^{(2l)}(0)\bar{z}(2l!)^{-1}]$ должен быть положительным. Тогда, если t меняется в достаточно малом интервале J' , содержащем точку $t=0$, то из равенства (8) легко получить следующую оценку:

$$\int \left| |u_t|^2 + \mu^k A u^2 + t^{2l} (A u, u) \right| dt \leq c \int (P u, u) dt \quad (10)$$

Замечание 2. Пусть $c_0^{(i)}(0) = 0 \quad i = 0, \dots, k-2$. Имеем

$$\varepsilon k \int t^{k-1} (A u, u) dt \leq \varepsilon \int |u_t|^2 dt + \varepsilon \int |t^k A u|^2 dt. \quad (11)$$

Взяв ε достаточно малым и изменив в неравенстве (6) постоянную c_0 , получим для достаточно малого интервала J'

$$\int \left| |u_t|^2 + \mu^k A u^2 + t^{k-1} (A u, u) \right| dt \leq c \left| \int (P u, u) dt \right|. \quad (12)$$

Таким образом, если $c_0(t)$ имеет вид $c_0(t) = a t^{2q} + g(t)$, $0 \leq q \leq \frac{k-1}{2}$, где $a \neq 0$, $|g(t)| \leq c t^{2q+1}$ и удовлетворяет условию (5), то для достаточно малых t имеет место неравенство

$$\int \left| |u_t|^2 + \mu^k A u^2 + t^{2q} (A u, u) \right| dt \leq c \left| \int (P u, u) dt \right|. \quad (13)$$

Лемма 1. Пусть оператор P удовлетворяет неравенству (13), $\operatorname{Im} c_0(t)$ не меняет знак в некоторой окрестности точки $t=0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} |\operatorname{Im} c_0(t)| t^{1-k} \neq 0$. Тогда $\operatorname{Im} c_0(t) = \beta t^{2r} + h(t)$, где $0 \leq r \leq \frac{k-1}{2}$, $\beta \neq 0$, $|h(t)| \leq c t^{2r+1}$ и для любой функции $u \in C_0^\infty(J', H^2)$ имеет место неравенство

$$\int \left| |u_t|^2 + \mu^k A u^2 + t^{2q} (A u, u) + t^{2r} (A u, u) \right| dt \leq c \left| \int (P u, u) dt \right|, \quad (14)$$

где J' достаточно малый интервал, содержащий точку $t=0$.

Доказательство. Пусть α — действительное число. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\{ \alpha \int (P u, u) dt \right\} &= \alpha \operatorname{Im}(a b) \int |t^k A u|^2 dt + \\ &+ \alpha \int \operatorname{Im} \{ a(u_t, t^k A u) \} dt - \alpha \int \operatorname{Im} \{ b(t^k A u, u) \} dt - \end{aligned}$$

$$-2 \int \sum_{l=2r}^{k-1} \frac{\operatorname{Im} c_0^{(l)}(0)}{l!} t^l (Au, u) dt. \quad (15)$$

Выбрав ε достаточно малым по абсолютной величине и так, чтобы $-2 \operatorname{Im} c_0^{(2r)}(0) > 0$, с учетом неравенства (13) получим требуемую оценку (14).

Обозначим $m = \min |q, r|$. Тогда неравенство (14) можно привести к виду

$$\int \left| |u_t|^2 + \varepsilon^2 Au^2 + t^m (Au, u) \right| dt \leq c \left| \int (Pu, u) dt \right|. \quad (16)$$

Теорема 2. Пусть оператор P удовлетворяет условиям теоремы 1 и кроме того выполняется одно из двух условий:

- 1) $|\operatorname{Im} c_0(t)| \leq c |\operatorname{Re} c_0(t)|$;
- 2) $\operatorname{Im} c_0(t)$ не меняет знак в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Тогда оператор P является и локально разрешимым и гипоеллиптическим в точке $t = 0$.

Эта теорема доказывается, в основном, по схеме, изложенной в (*) с помощью неравенства (13) при выполнении условия 1 и с помощью неравенства (16) при условии 2.

Лемма 2. Пусть оператор P удовлетворяет условиям (3), (4). Тогда он равен оператору вида

$$P^0 = (X + \varphi(t, A))(Y - \varphi(t, A)) - c^0(t, A)A, \quad (17)$$

где

$$c^0(t, A) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^0(t) A^{-j}; \quad c_0^0(t) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{c_0^{(l)}(0)}{l!} t^l;$$

$$c_j^0 = \sum_{l=0}^{k-1} c_{jl}^0 t^l \quad j=1, 2, \dots, \infty; \quad \varphi(t, A) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(t) A^{-l}.$$

Доказательство. Раскрывая равенство $P = P^0$, получим:

$$\begin{aligned} & - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(t) A^{-j} \right)^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{2j}(t) A^{-j} = \\ & = \sum_{l,j=0}^{\infty} \left| a_l(t) - b_l(t) \right| \varphi_l(t) A^{-(l+j)+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \left| c_l(t) - c_l(t) \right| A^{-j+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Приравнявая коэффициенты при A , приходим к равенству

$$\left| a_0(t) - b_0(t) \right| \varphi_0(t) + \left| c_0^0(t) - c_0(t) \right| = 0.$$

Возьмем в качестве функции $c_0^0(t)$

$$c_0^0(t) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{c_0^{(l)}(0)}{l!} t^l.$$

Тогда

$$\varphi_0(t) = \frac{c_0(t) - c_0^0(t)}{a_0(t) - b_0(t)}$$

и $\varphi_0 \in C^0(J)$.

Для определения функции $\varphi_1(t)$ получаем следующее соотношение:

$$-\varphi_1'(t) + \varphi_{01}(t) = \left| a_0(t) - b_0(t) \right| \varphi_1(t) + \left| a_1(t) - b_1(t) \right| \varphi_0(t) + c_1^0(t) - c_1(t).$$

Обозначим

$$f_1(t) = -\varphi_1'(t) + \varphi_{01}(t) - \left| a_1(t) - b_1(t) \right| \varphi_0(t) + c_1(t).$$

Тогда, если

$$c_1^0(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i^0 t^i,$$

где $c_i^0 = \frac{f_1^{(i)}(0)}{i!}$, то

$$\varphi_1(t) = \frac{f_1(t) - c_1^0(t)}{a_0(t) - b_0(t)}$$

и $\varphi_1 \in C^0(J)$.

Продолжая этот процесс, получим требуемое представление оператора $P^0(17)$.

Введем обозначения

$$X^0 = \partial_t - a^0(t, A)A; \quad Y^0 = \partial_t - b^0(t, A)A,$$

где

$$a^0(t, A) = a(t, A) - \varphi(t, A)A^{-1};$$

$$b^0(t, A) = b(t, A) + \varphi(t, A)A^{-1}.$$

Тогда

$$P^0 = X^0 Y^0 - c^0(t, A)A. \quad (19)$$

Оператор P^0 будет первым элементом в последовательности операторов, порожденной оператором P . Пусть построили оператор P^j

$$P^j = X^j Y^j - c^j(t, A)A. \quad (20)$$

Тогда

$$\begin{aligned} P^{j+1} &= Y^j X^j - c^j(t, A)A = X^j Y^j - [X^j, Y^j] - c^j(t, A)A = \\ &= X^j Y^j - [c^j(t, A) + \sigma^j(t, A)]A. \end{aligned} \quad (21)$$

Поступая так же, как в случае оператора $P = P^0$, для оператора P^{j+1} получим вид

$$P^{(k)} = X^{(k+1)} Y^{(k+1)} - c^{(k+1)}(t, A)A, \quad (22)$$

Из способа построения последовательности операторов P^k легко получить следующую формулу:

$$c_k^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{c_0^{(j)}(0)}{i!} t^i + \frac{c_0^{(k-1)}(0) - j\alpha_0^{(k)}(0)}{(k-1)!} t^{k-1}. \quad (23)$$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3. Пусть оператор P удовлетворяет условиям (3), (4) и для некоторого натурального числа k выполнено неравенство

$$t^{k-1} \left| \frac{a_0^{(k)}(0) - b_0^{(k)}(0)}{k!} \right|^2 \leq 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_{i=0}^{k-2} \frac{c_0^{(i)}(0)}{i!} t^i + \frac{c_0^{(k-1)}(0) + j\alpha_0^{(k)}(0)}{(k-1)!} t^{k-1} \right) \frac{a_0^{(k)}(0) - b_0^{(k)}(0)}{k!} \right\} \quad (24)$$

Кроме того, пусть $\operatorname{Im} c_0(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Тогда следующие три условия эквивалентны:

- 1) P — локально разрешим в точке $t=0$;
- 2) P — гипозллиптичен в точке $t=0$;
- 3) $c^j(t, A) = 0$ ни для какого $j=0, 1, \dots$

Доказательство этой теоремы в основном аналогично доказательству соответствующей теоремы в (1). Заметим, что при $k=1$ условие (24) всегда выполнено.

Ереванский государственный университет

Ա. Ն. ՀՈՒՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Մի դասի երկրորդ կարգի հավասարումների լոկալ լուծելիության և հիպոէլիպտիկության մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում է երկրորդ կարգի կոմպլեքս բնութագրիչներ ունեցող հավասարումներ: Այդ բնութագրիչները համընկնում են, երբ $t=0$: Հավասարման գլխավոր մասը բավարարում է այնպիսի պայմաններին, որ եթե ցածր կարգի անդամները հավասար են նույնաբար զրոյին, ապա այդ հավասարումը ոչ լոկալ լուծելի է և ոչ էլ հիպոէլիպտիկ: Ստացվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց պետք է բավարարեն ցածր կարգի անդամները, որպեսզի հավասարումը լինի և լոկալ լուծելի և հիպոէլիպտիկ: Հոդվածում ստացված արդյունքներն ընդհանրացնում են հայտնի արդյունքներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ր Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Ю. В. Егоров, УМН, т. 26, №2 (1971). ² М. И. Вишук, В. В. Грешин, УМН, т. 25, №4 (1970). ³ I. Hormander, Acta Math., v. 119 (1967). ⁴ F. Trèves, Comm. Pure Appl. Math., v. 26 (1973). ⁵ A. Gillett, F. Trèves, Amer. J. Math., v. 96, N 2 (1974). ⁶ P. R. Weston, J. Diff. Eq., v. 22 (1976).

УДК 511.6+517.56

МАТЕМАТИКА

В. П. Петренко, Я. Шимша

Об одном классе целых кривых

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР П. У. Аракелянном 11/ХІІ 1979)

В 1970 г. В. Фукс ⁽¹⁾ установил следующий результат.

Теорема А. Если $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного порядка ρ , все a -точки которой являются простыми a -точками, то

1. Сумма всех дефектов $f(z)$ равна 2ρ ;
2. Порядок ρ функции $f(z)$ удовлетворяет такому соотношению $\rho = 0,5t$, где $t = 2, 3, 4, \dots$;
3. Функция $f(z)$ имеет регулярный рост, т. е. ее порядок ρ совпадает с ее нижним порядком λ ;
4. Число дефектных значений у $f(z)$ не превышает 2ρ ;
5. Каждый дефект является кратным ρ^{-1} ;
6. Каждое дефектное значение a является асимптотическим значением для функции $f(z)$.

В данной работе мы интересуемся асимптотическими свойствами одного класса целых кривых, являющегося аналогом класса мероморфных функций, все a -точки которых простые.

Напомним, что n -мерной целой кривой $\bar{G}(z) = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ называется переменный n -мерный вектор, компоненты которого, функции $g_k(z)$, являются линейно независимыми целыми функциями (см. ⁽²⁻⁴⁾).

Определение. Будем говорить, что n -мерная целая кривая $\bar{G}(z) = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ принадлежит классу P_n , если она имеет конечный порядок ρ и для любого n -мерного комплексного вектора \bar{a} ($\bar{a} \neq 0$) все корни скалярного произведения $(\bar{G}(z), \bar{a})$ имеют кратности не выше $n-1$.

По аналогии со случаем мероморфных функций в теории целых кривых используются такие характеристики их роста и распределения значений (см. ⁽²⁻⁴⁾). Функция

$$T(r, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\bar{G}(re^{i\theta})| d\theta$$

называется характеристикой роста целой кривой $\bar{G}(z)$.

Как и в случае мероморфных функций, с помощью $T(r, \bar{G})$ определяется порядок роста $\bar{G}(z)$ ρ и ее нижний порядок роста λ . Характеристики среднего и максимального приближения $\bar{G}(z)$ к вектору \bar{a} определяются так:

$$m(r, \bar{a}, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{|G(re^{i\theta})| |\bar{a}|}{|(\bar{G}(re^{i\theta}), \bar{a})|} d\theta,$$

$$L(r, \bar{a}, \bar{G}) = \max_{|z|=r} \ln \frac{|G(z)| |\bar{a}|}{|(\bar{G}(z), \bar{a})|}.$$

Величины

$$\delta(\bar{a}, \bar{G}) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \bar{a}, \bar{G})}{T(r, \bar{G})} \quad \text{и} \quad \Delta(\bar{a}, \bar{G}) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \bar{a}, \bar{G})}{T(r, \bar{G})}$$

называются соответственно дефектами целой кривой $\bar{G}(z)$ относительно вектора \bar{a} в смысле Р. Неваллины и Ж. Валирона. А величина

$$\beta(\bar{a}, \bar{G}) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{L(r, \bar{a}, \bar{G})}{T(r, \bar{G})}$$

называется величиной отклонения $\bar{G}(z)$ относительно вектора \bar{a} (см. (6)).

Для двумерной целой кривой $\bar{G}(z) = \{g_1(z), g_2(z)\}$ данные характеристики совпадают с классическими характеристиками роста и распределения значений мероморфной функции $f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$. По этой причине для двумерных целых кривых, принадлежащих классу P_n , сохраняет силу теорема А.

Основной результат данной работы можно рассматривать как некоторый аналог теоремы В. Фукса для произвольных n -мерных целых кривых. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Для произвольной целой кривой $\bar{G}(z)$, принадлежащей классу P_n , справедливы такие утверждения:

1. Порядок ρ кривой $\bar{G}(z)$ не меньше единицы и является числом рациональным.
2. Кривая $\bar{G}(z)$ имеет регулярный рост, т. е. ее нижний порядок λ совпадает с ее порядком ρ .
3. Для каждого n -мерного вектора \bar{a} , для которого $(\bar{G}(z), \bar{a}) \neq 0$, выполняется равенство $\delta(\bar{a}, \bar{G}) = \Delta(\bar{a}, \bar{G})$.
4. Для каждого n -мерного вектора \bar{a} , для которого $(\bar{G}(z), \bar{a}) = 0$, имеет место оценка $\beta(\bar{a}, \bar{G}) \leq \pi$.

5. Для произвольной фиксированной допустимой системы* A n -мерных комплексных векторов множества

$$D_A(\bar{G}) = \{\bar{a} \in A : \delta(\bar{a}, \bar{G}) > 0\},$$

$$V_A(\bar{G}) = \{\bar{a} \in A : \Delta(\bar{a}, \bar{G}) > 0\},$$

$$\Omega_A(\bar{G}) = \{\bar{a} \in A : \rho(\bar{a}, \bar{G}) > 0\}$$

содержит не более чем $n(n-1)/2$ векторов.

Доказательство этой теоремы использует ряд вспомогательных утверждений об асимптотических свойствах решений линейных дифференциальных уравнений (д. у.) с полиномиальными коэффициентами. Это объясняется следующими обстоятельствами. Целая кривая $\bar{G}(z) = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ принадлежит классу P_n тогда и только тогда, когда определитель Вронского системы функций $\{g_k(z)\}_{k=1}^n$ не имеет корней. Это утверждение в свою очередь эквивалентно тому факту, что система $\{g_k(z)\}_{k=1}^n$ является фундаментальной системой решений линейного д. у. n -го порядка вида (см. (6), стр. 95)

$$x^{(n)} + a_1(z)x^{(n-1)} + \dots + a_n(z)x = 0, \quad (1)$$

где $a_k(z)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ — целые функции.

Если дополнительно известно, что целая кривая $\bar{G}(z)$ имеет конечный порядок ρ , то в этом случае в д. у. (1) все коэффициенты являются полиномами (см. (7), стр. 120). Таким образом, изучение роста и распределения значений целых кривых класса P_n сводится к изучению роста и распределения значений фундаментальной системы решений линейного д. у. (1) с полиномиальными коэффициентами. Линейное д. у. (1) с полиномиальными коэффициентами сводится стандартным образом к системе n линейных д. у. первого порядка. Асимптотические свойства подобных систем изучены в книге (8). В связи с тем, что в рассматриваемом случае система линейных д. у. первого порядка носит специальный характер, удастся несколько уточнить асимптотики решений, полученные для общих систем д. у. (см. (9)). Эти уточненные асимптотики для фундаментальной системы решений д. у. (1) и приводят к теореме.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Վ. Գ. ԳԵՏԻԵԿՆԿՈՒ, Կ. ՇՈՒՐՇԱ

Ամբողջ կորերի մի դասի մասին

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է n -շափանի վերջավոր կարգի ամբողջ կորերի աճը և արժեքների բաշխումը, որոնց բոլոր n -կետերի կարգը

* Т. е. каждые n векторы из этой системы A являются линейно независимыми.

չի գերազանցում $n-1$ -ից: Ճույն է տրվել, որ այդ դասի կորերը ցանկացած
ֆիքսված β ույլատրելի վեկտորների համակարգի նկատմամբ ունեն ռեզույար
ած և վերջավոր β փոփ դեֆեկտային արժեքներ:

Այս աշխատանքն ընդհանրացնում է Վ. Ֆուրսի որոշ արդյունքները, որոնք
վերաբերվում են միայն պարզ α -կետեր ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների ա-
սիմպտոտիկական հատկություններին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ը Ն Ո Ւ Ր Ե Մ Ի Ն

- ¹ W. H. J. Fuchs, Proceedings of the Naval Research Laboratory conference on
classical function theory, Washington, 1970. ² А. А. Гольдберг, Дополнение к книге
Г. Виттих «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям»,
Физматгиз, М., 1966). ³ H. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves, Princeton,
1913. ⁴ H. Cartan, Mathematika, v. 7, 5-31 (1933). ⁵ В. П. Петренко, ДАН СССР,
т. 207, № 3 (1972). ⁶ Э. А. Коттингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных диффе-
ренциальных уравнений, ИЛ, М., 1958. ⁷ Г. Виттих, Новейшие исследования по од-
нозначным аналитическим функциям, Физматгиз, М., 1960. ⁸ В. Визон, Асимптотиче-
ские разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», М.,
1968.

УДК 517.942

МАТЕМАТИКА

Г. Ю. Таманян

Лакуны в спектре оператора Хилла

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 19/XII 1979)

В этой работе мы получаем оценку ширины лакуны в спектре оператора Хилла с 1-периодическим, положительным потенциалом из класса Жевре $G_0 (\alpha \geq 1)$.

Таким образом, мы рассматриваем уравнение

$$y'' + \lambda^2 p(x)y = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где $p(x) \in C$ и существует постоянная A такая, что

$$|p^{(k)}| \leq A^k k!^{\alpha} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Метод, который мы применяем, аналогичен методу статьи (1), в которой получены аналогичные результаты для уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad -\infty < x < \infty, \quad q(x) \in G_0. \quad (3)$$

Отметим, что хотя и существует сведение уравнения (1) к уравнению (3), однако оно не позволяет отнести все результаты, полученные для (3), к (1). Поэтому уравнение (1) приходится изучать параллельно с (3).

Известно (см. (2)), что спектр оператора L , порожденного уравнением (1) в $L_2(-\infty, \infty)$, является чисто непрерывным с лакунами, причем концами лакуны являются собственные числа периодической и антипериодической краевых задач на интервале $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 p(x)y &= 0 \\ y(0) &= \pm y(1) \\ y'(0) &= \pm y'(1) \end{aligned} \quad (4)$$

Для изучения собственных чисел задач (4) мы изучаем целую функцию $\Delta(\lambda) = C(1, \lambda) \pm S(1, \lambda)$, где $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) с начальными данными Коши: $C(0, \lambda) = 1, C'(0, \lambda) = 0, S(0, \lambda) = 0, S'(0, \lambda) = 1$.

Тогда собственные числа задач (4) являются решениями уравнения $\Delta(\lambda) = \pm 2$.

Известно (см. (3)), что решения $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ допускают разложение в асимптотические ряды. Для решения $C(x, \lambda)$ это разложение имеет вид:

$$C(x, \lambda) \sim \sum_{s=0}^{\infty} e^{\int_0^x \omega_s(\xi) d\xi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_{s,l}(x)}{\lambda^s}, \quad (5)$$

где $\omega_s(x) = (-1)^s \sqrt{\mu(x)}$. При этом для коэффициентов $c_{s,l}(x)$ выполнены рекуррентные соотношения:

$$c_{s,l}(x) = e^{-\int_0^x T_s(\xi) d\xi} \left[\int_0^x U_s(\xi) c_{s,l-1}(\xi) e^{\int_0^{\xi} T_s(\eta) d\eta} d\xi + a_{s,l} \right], \quad (6)$$

Здесь $T_s(x) = \omega_s'(x)/2\omega_s(x)$, $U_s(x) = -l/2\omega_s(x)$, $a_{s,l} = c_{s,l}(0)$.

Аналогичные формулы верны и для решения $S(x, \lambda)$. Из (6) можно вывести, что

$$c_{s,l}(x) = (-1)^s c_{s,l}(x) \equiv (-1)^s c_{s,l}(x).$$

Исходя из (2) можно получить оценки коэффициентов $c_{s,l}(x)$ (и $s_{s,l}(x)$) в (6).

Сперва, очевидно, надо установить, что $T_s(x)$ и $U_s(x)$ принадлежат G_n . Это делается с использованием формулы Коши: $f(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_g(\lambda) d\lambda$ (обозначения стандартны). Заметим, что прямое

доказательство, использующее индукцию, приводит лишь к установлению факта, что $T_s(x) \in G_{n+1}$.

Таким образом мы приходим к следующей лемме:

Лемма 1. Для функций $T_s(x)$ и $U_s(x)$ выполнены следующие оценки:

$$|U_s^{(k)}(x)| \leq A^k k^{2k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$|T_s^{(k)}(x)| \leq A^{k+1} (k+1)^{(k+1)}.$$

Применением индукции и леммы 1 доказывается

Лемма 2. Для функций $c_{s,l}(x)$ и их производных имеют место следующие оценки:

$$|c_{s,l}(x)| \leq A^{\nu} \nu^{\nu}$$

$$|c_{s,l}^{(k)}(x)| \leq A^{\nu+k} (\nu+k)^{(\nu+k)} \quad k = 1, 2, \dots$$

Такие же оценки, очевидно, справедливы и для функций $s_{s,l}(x)$.

Формула (5) означает, что для любого N существуют функции $B_{N,1}(x, \lambda)$ такие, что при $x \in [0, 1]$ и $\lambda \rightarrow \infty$ имеется представление:

$$C(x, \lambda) = e^{\int_0^x \sqrt{p(x)} dx} \left(\sum_{k=0}^N \frac{c_k}{\lambda^k} + \frac{B_{N,0}}{\lambda^{N+1}} \right) + e^{-\int_0^x \sqrt{p(x)} dx} \left(\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k c_k}{\lambda^k} + \frac{B_{N,1}}{\lambda^{N+1}} \right),$$

причем $|B_{N,1}(x, \lambda)| \leq M$ при $x \in [0, 1]$, $\lambda \rightarrow \infty$.

Постоянная M зависит от N , и эту зависимость раскрывает

Лемма 3. Для функций $B_{N,1}(x, \lambda)$ и их производных

$\frac{\partial B_{N,1}}{\partial x} = D_{N,1}(x, \lambda)$ верны оценки:

$$|B_{N,1}(x, \lambda)| \leq A^{N+2} (N+2)^{O(N+2)}$$

$$|D_{N,1}(x, \lambda)| \leq A^{N+2} (N+2)^{O(N+2)}.$$

Лемма 3 доказывается стандартной процедурой, несколько, правда, отличающейся от указанной в (1) и (2).

В силу леммы 3 функция $\Delta(\lambda)$ может быть представлена для любого N в следующем виде:

$$\Delta(\lambda) = e^{i\lambda\mu} \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{\lambda^k} + e^{-i\lambda\mu} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k a_k}{\lambda^k} + \frac{\varphi_N(\lambda)}{\lambda^{N+1}},$$

где $\mu = \int_0^1 \sqrt{p(x)} dx$, a_k есть линейные комбинации c_k и s_k .

При этом для a_k и $\varphi_N(\lambda)$ верны оценки:

$$|a_k| \leq A^k k^{O(k)} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$|\varphi_N(\lambda)| \leq A^{N+2} (N+2)^{O(N+2)}.$$

Теперь наша цель заключается в решении уравнения $\Delta(\lambda) = 2$ (аналогично решается уравнение $\Delta(\lambda) = -2$), которое можно переписать в эквивалентной форме:

$$e^{i\lambda\mu} \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{\lambda^k} - 2e^{i\lambda\mu} + \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k a_k}{\lambda^k} \sim 0. \quad (7)$$

Это уравнение решается точно так же, как соответствующее уравнение в (4). Итак мы приходим к следующей лемме:

Лемма 4. Решения уравнения (7) представляют собой две последовательности чисел, одна из которых стремится к $-\infty$ при $n \rightarrow \infty$, а другая $-\kappa - \infty$. При этом верны следующие асимптотические разложения:

$$\lambda_{n1} = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_N}{n^N} + \frac{\gamma_{N1}}{n^{N+1}}$$

$$i_{n2} = -n - \zeta_0 - \frac{\zeta_1}{n} - \dots - \frac{\zeta_n}{n^n} - \frac{\zeta_{N2}}{n^{N+1}}$$

причем для остатков ζ_{N1} и ζ_{N2} верны оценки

$$|\zeta_{N1}| \leq A^{N+1}(N+1)^{N(N+1)}$$

$$|\zeta_{N2}| \leq A^{N+1}(N+1)^{N(N+1)}.$$

Используя лемму 4, мы, обозначив ширину n -ой лакуны через Δ_n , получаем следующую теорему:

Теорема. При условии (2) для ширины n -ой лакуны в спектре оператора L справедлива оценка:

$$\Delta_n \leq \gamma e^{-\zeta_n/n^2},$$

где γ и ζ — некоторые постоянные, не зависящие от n .

В заключение автор приносит искреннюю благодарность профессору А. Г. Костюченко за внимание и поддержку в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Գ. ԱՍԻՄՄԵՏԱՆ

Հակունաների երկրային օպերատորի սպեկտրում

Իրատրվում է L օպերատորը, որը առաջանում է $L_2(-\infty, \infty)$ տարածության մեջ հետևյալ դիֆերենցիալ համասարման հետևանքով՝

$$y'' + i^2 p(x)y = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

որտեղ $p(x)$ դրական է, պերիոդիկ և $p(x) \in G_\alpha$ ($\alpha > 1$): Այդ նշանակում է, որ $p(x) \in C^\infty$ և $|p^{(k)}(x)| \leq A^k k^{\alpha k}$, որտեղ A — հաստատուն է, k — բնական թիվ է, $\alpha > 1$: Մտապահված է L օպերատորի սպեկտրի լակունային երկարությունների դնահատումը, որը ցույց է տալիս նրա նվազումը էքսպոնենցիալ ձևով, $1/\alpha$ կարգով:

Կիրառված մեթոդը համանման է ⁽¹⁾ հոդվածի մեթոդին, որտեղ ստացված է նույն արդյունքը՝

$$-y'' + q(x)y = i^2 y \quad -\infty < x < \infty$$

համասարման համար, որտեղ $q(x)$ — պերիոդիկ ֆունկցիա է և $q(x) \in G_\alpha$ ($\alpha > 1$).

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ X. M. Mkoյan, ДАН Арм ССР, т 60, № 4 (1975). ² И. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. ³ А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892.
⁴ X. M. Mkoյan, канд. дис., Баку, 1977. ⁵ А. О. Кривицкий, В. Б. Лидский, Сибирский мат. журн., т 12, № 4 (1971).

УДК 539.30

МЕХАНИКА

А. А. Хачатрян

О вариационном принципе в разномодульной теории упругости

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 14/VIII 1979)

Известно (1), что для разномодульного материала удельная потенциальная энергия деформации в данной точке является выпуклой функцией своих аргументов (компонентов деформации). Исходя из этого ниже показано, что в разномодульной теории упругости, аналогично классической, существует минимальный принцип для перемещений.

1. Приведем вкратце основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости (2-4), когда знак одного из главных напряжений (σ_3) отличен от знака двух других (σ_1, σ_2). Законы упругости в системе координат x_n ($n=1, 2, 3$) имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = (a_{11} - a_{12})\sigma_{ij} + a_{12}\sigma_0\delta_{ij} + (a_{22} - a_{11})m_i m_j \sigma_j \quad (1.1)$$

или

$$\sigma_{ij} = A\varepsilon_{ij} + B\varepsilon_0\delta_{ij} - C(B\varepsilon_0 + A\varepsilon_3) (B\delta_{ij} + Am_i m_j), \quad (1.2)$$

где m_i — направляющие косинусы направления ϑ ;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad \sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33};$$

$$A = \frac{1}{a_{11} - a_{12}}, \quad B = -\frac{a_{12}A}{a_{11} + 2a_{12}}, \quad C = \frac{a_{22} - a_{11}}{1 + (a_{22} - a_{11})(A + B)} \quad (1.4)$$

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \quad (\text{при } \sigma_3 < 0).$$

Удельная потенциальная энергия деформации (W), выраженная через компоненты тензора деформации, определяется формулой

$$2W = A\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + B\varepsilon_0^2 - C(B\varepsilon_0 + A\varepsilon_3)^2 \quad (1.5)$$

Причем

$$\frac{\partial W'}{\partial e_{pq}} = \sigma_{pq} \quad (p \leq q), \quad \varepsilon_p = m_1 m_2 \varepsilon_{11}, \quad e_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij} & i = j \\ 2\varepsilon_{ij} & i \neq j. \end{cases} \quad (1.6)$$

где e_{ij} представляет собой компоненты деформации.

2. Рассмотрим краевую задачу, когда на одной части поверхности тела (S_u) заданы перемещения, а на другой части (S_F) внешние напряжения.

Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия задачи есть

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad \begin{cases} \sigma_{ij} l_j = F_i & \text{на } S_F \\ u_i = u_i^0 & \text{на } S_u. \end{cases} \quad (2.1)$$

где X_i — компоненты объемной силы, F_i — компоненты напряжения на поверхности, l_j — направляющие косинусы внешней нормали поверхности в данной точке.

Пусть u_i есть решение поставленной задачи. Эти перемещения определяют компоненты деформации, через которые выражается работа деформации всего тела

$$U(e_{pq}) = \int W(e_{pq}) dV. \quad (2.2)$$

Варьируя перемещениями, после известных преобразований (2.1) из (2.2) будем иметь

$$\delta \Pi(e_{pq}) = \delta \left\{ U(e_{pq}) - \int F_i u_i dS - \int X_i u_i dV \right\} = 0. \quad (2.3)$$

где $\Pi(e_{pq})$ — полная потенциальная энергия тела.

Из (2.3) видно, что при действительных перемещениях полная потенциальная энергия тела принимает экстремальное значение.

Выясним теперь, максимум или минимум представляет собой это экстремальное значение для $\Pi(e_{pq})$. Для этого составим разность $\Pi(e_{pq} + \delta e_{pq}) - \Pi(e_{pq})$, которая с учетом (2.3) и

$$U(e_{pq} + \delta e_{pq}) = U(e_{pq}) + \frac{\partial U}{\partial e_i} \delta e_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial e_i \partial e_j} \delta e_i \delta e_j + \dots \quad (2.4) \\ (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

приводится к виду

$$\Pi(e_{pq} + \delta e_{pq}) - \Pi(e_{pq}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial e_i \partial e_j} \delta e_i \delta e_j + \dots \quad (2.5) \\ (i, j = 1, 2, \dots, 6).$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения:

$$\begin{aligned} e_{11} = e_1, \quad e_{22} = e_2, \quad e_{33} = e_3; \\ e_{12} = e_4, \quad e_{21} = e_4, \quad e_{33} = e_5. \end{aligned} \quad (2.6)$$

УДК 55.034 + 699.841

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

Р. О. Амасян, Г. Г. Топоян

Методы установления статистического подобия механических величин в задачах инженерной сейсмологии

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 14/XI 1979)

Многие задачи инженерной сейсмологии решаются методами моделирования, в основе которых лежит теория расширенного подобия твердых деформируемых тел, разработанная А. Г. Назаровым (1). Одним из возможных путей повышения надежности информации, получаемых на моделях, является учет фактора случайности свойств моделей. Дело в том, что во время испытания модели многие процессы происходят под влиянием факторов, которые не могут быть полностью учтены в силу принципиальных причин или практических соображений. Кроме того, при моделировании конструкций делается предположение о полной определенности, детерминированности свойств материалов, внешних нагрузок, геометрических размеров и формы сооружения. Между тем, все эти факторы находятся под влиянием большого количества разнообразных, слабо контролируемых и сложным образом взаимодействующих причин и поэтому в той или иной мере несут изменчивый, случайный характер. В связи с изложенным возникает необходимость привлечения статистических методов к проблеме теории моделирования.

В данной статье разработаны методы установления подобия вероятностных характеристик для механических величин.

Предположим, что состояние оригинала конструкции A и его модели A' полностью определяется набором величин X_1, X_2, \dots, X_n и X'_1, X'_2, \dots, X'_n , являющихся непрерывными и случайными в силу всякого рода случайностей. Найдем условия подобия плотностей распределения вероятностей $f(x)$ и $f'(x')$, начальных моментов $\mu_1(x)$ и $\mu'_1(x')$ и центральных моментов $\nu_2(x)$ и $\nu'_2(x')$ для случайных величин X и X' .

Через α обозначим обобщенный множитель подобия, т. е. каждому определенному значению x случайной величины X соответствует

конкретное значение x' случайной величины X' , причем:

$$x' = ax, \quad (1)$$

а) Рассмотрим подобие начальных моментов случайных величин X и X' s -го порядка $\mu_s(x)$ и $\mu'_s(x')$

$$\mu'_s(x') = M[(x')^s] = M[(ax)^s] = a^s \mu_s(x),$$

т. е. для математических ожиданий подобных случайных величин имеет место следующее равенство:

$$m'_s = a^s m_s. \quad (2)$$

б) Для центральных моментов s -го порядка $\nu_s(x)$ и $\nu'_s(x')$ имеем:

$$\nu'_s(x') = M[(x' - \bar{x}')^s] = M[ax - a\bar{x}]^s = a^s \nu_s(x).$$

Следовательно, для дисперсии и среднеквадратического отклонения случайных величин X и X' очевидны равенства:

$$D'(x') = a^2 D(x); \quad \sigma'(x') = a \sigma(x). \quad (3)$$

в) Найдем общую закономерность связи между плотностями распределения вероятностей $f(x)$ и $f'(x')$.

Так как системы A и A' подобны, то

$$P(x < X < x + \Delta x) = P(x' < X' < x' + \Delta x'), \quad (4)$$

где $P(x < X < x + \Delta x)$ — вероятность попадания случайной величины X на участок $(x, x + \Delta x)$, а $P(x' < X' < x' + \Delta x')$ — вероятность попадания случайной величины X' на соответствующий участок $(x', x' + \Delta x')$.

Очевидно, что

$$\Delta x' = a \Delta x. \quad (5)$$

Известно, что

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

$$P(x' < X' < x' + \Delta x') = F'(x' + \Delta x') - F'(x'),$$

где F — функция распределения случайных величин (3).

Имея в виду (4), получим

$$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(x' + \Delta x') - F'(x'). \quad (6)$$

Рассмотрим следующие отношения:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}; \quad \frac{F'(x' + \Delta x') - F'(x')}{\Delta x'}$$

Если в этих отношениях перейти к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и, соответственно, $\Delta x' \rightarrow 0$, получим плотности распределения для случайных величин X и X' :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x); \quad (7)$$

$$\lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{F'(x' + \Delta x') - F'(x')}{\Delta x'} = f'(x'). \quad (8)$$

Подставляя значение (5) в (8) и учитывая (6) и (7), получаем

$$f'(x') = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{a \Delta x} = \frac{1}{a} f(x).$$

Таким образом мы получили условие подобия плотностей распределений

$$f'(x') = \frac{1}{a} f(x). \quad (9)$$

Этот результат имеет определенную геометрическую интерпретацию.

Таким образом, множитель подобия математического ожидания подобных случайных величин X и X' совпадает, множитель подобия дисперсии равен квадрату, а множитель подобия плотности распределения вероятностей взаимно-обратен с множителем механического подобия этих величин.

Имея в виду множители механического подобия механических величин (1), можно составить таблицу множителей статистического подобия некоторых механических величин.

Рассмотрим вывод последней связи для конкретных типов распределений вероятностей, наиболее часто встречающихся в практике моделирования сейсмических задач.

1. Рассмотрим случай, когда X и X' имеют одинаковые плотности распределения.

Нормальное распределение. Плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Математическое ожидание m_x и среднеквадратическое отклонение σ_x являются определяющими параметрами данного распределения. Для модели функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f'(x') = \frac{1}{\sigma_{x'} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x' - m_{x'})^2}{2(\sigma_{x'})^2}}$$

Имея в виду (1), (2) и (3), преобразуем данную функцию:

Механические величины	Расширенное статистическое подобие			Статистическое подобие, когда ускорения оригинала и модели равны		
	множители подобия математ. ожидания	множители подобия дисперсии	множители подобия плотности распределения	множители подобия математ. ожидания	множители подобия дисперсии	множители подобия плотности распределения
Длина l	a	a^2	a^{-1}	a	a^2	a^{-1}
Напряжение, нагрузка распределена по поверхности σ	λ	λ^2	λ^{-1}	$a\delta$	$a^2\delta^2$	$a^{-2}\delta^{-1}$
Относительная деформация ϵ	γ	γ^2	γ^{-1}	γ	γ^2	γ^{-1}
Плотность (масса, отнесенная к единице объема) ρ	δ	δ^2	δ^{-1}	δ	δ^2	δ^{-1}
Масса m	$a^3\delta$	$a^6\delta^2$	$a^{-3}\delta^{-1}$	$a^3\delta$	$a^6\delta^2$	$a^{-3}\delta^{-1}$
Время t для квазистатических процессов	τ	τ^2	τ^{-1}	τ	τ^2	τ^{-1}
Время t для динамических процессов	$a\tau^{-1/2}\delta^{1/2}$	$a^2\tau^{-1}\delta$	$a^{-1/2}\tau^{1/2}\delta^{-1/2}$	$a^{1/2}\tau^{1/2}$	$a\tau$	$a^{-1/2}\tau^{-1/2}$
Сосредоточенная нагрузка P	$a^2\delta$	$a^4\delta^2$	$a^{-2}\delta^{-1}$	$a^2\delta$	$a^4\delta^2$	$a^{-2}\delta^{-1}$
Перемещение U	$a\tau$	$a^2\tau^2$	$a^{-1}\tau^{-1}$	$a\tau$	$a^2\tau^2$	$a^{-1}\tau^{-1}$
Скорость v	$a^{1/2}\tau^{1/2}\delta^{-1/2}$	$a\tau\delta^{-1}$	$a^{-1/2}\tau^{-1/2}\delta^{1/2}$	$a^{1/2}\tau^{1/2}$	$a\tau$	$a^{-1/2}\tau^{-1/2}$
Раскрытие трещины Δl	$a\tau$	$a^2\tau^2$	$a^{-1}\tau^{-1}$	$a\tau$	$a^2\tau^2$	$a^{-1}\tau^{-1}$
Момент силы M	$a^2\delta$	$a^4\delta^2$	$a^{-2}\delta^{-1}$	$a^2\delta$	$a^4\delta^2$	$a^{-2}\delta^{-1}$
Работа, энергия U	$a^3\delta\tau$	$a^6\delta^2\tau^2$	$a^{-3}\delta^{-1}\tau^{-1}$	$a^3\delta\tau$	$a^6\delta^2\tau^2$	$a^{-3}\delta^{-1}\tau^{-1}$
Скорость распространения деформации a	$a^{1/2}\tau^{1/2}\delta^{1/2}$	$a\tau\delta$	$a^{-1/2}\tau^{-1/2}\delta^{-1/2}$	$a^{1/2}\tau^{1/2}$	$a\tau$	$a^{-1/2}\tau^{-1/2}$
Ускорение \ddot{x}	$a^{-1}\delta^{-1}$	$a^{-2}\delta^{-2}$	$a\delta$	1	1	1
Угловая скорость $\dot{\omega}$	$a^{-1/2}\tau^{1/2}\delta^{-1/2}$	$a^{-1}\tau\delta^{-1}$	$a^{1/2}\tau^{-1/2}\delta^{1/2}$	$a^{-1/2}\tau^{1/2}$	$a^{-1}\tau$	$a^{1/2}\tau^{-1/2}$

$$f'(x') = \frac{1}{a\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ax-am_x)^2}{2a^2\sigma_x^2}} = \frac{1}{a} f(x).$$

Мы пришли к выводу, что

$$f'(x') = \frac{1}{a} f(x).$$

Логарифмически нормальное распределение. Функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{M}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x - m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

где $M = \lg e$.

Определяющими параметрами для этого распределения являются m_y и σ_y .

Математическое ожидание m_x и среднеквадратическое отклонение выражаются через определяющие параметры следующим образом:

$$m_x = \exp\left(\frac{m_y}{M} + \frac{\sigma_y^2}{2M}\right);$$

$$\sigma_x = \exp\left(\frac{m_y}{M} + \frac{\sigma_y^2}{2M}\right) \sqrt{e^{\frac{\sigma_y^2}{M^2}} - 1}.$$

Для модели будем иметь

$$f'(x') = \frac{M}{x' \sigma_{y'} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x' - m_{y'})^2}{2(\sigma_{y'})^2}}.$$

Имея в виду (1), (2) и (3), запишем

$$\sqrt{e^{\frac{(\sigma_{y'})^2}{M^2}} - 1} = \sqrt{e^{\frac{\sigma_y^2}{M^2}} - 1}.$$

Откуда после простых преобразований следует, что $\sigma_{y'} = \sigma_y$.

Учитывая эту связь, из математических ожиданий оригинала модели получим

$$m_{y'} = \lg \alpha + m_y.$$

Теперь уже преобразуем $f'(x')$

$$f'(x') = \frac{M}{2x' \sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x' - \lg \alpha - m_y)^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{2} f(x).$$

Мы пришли к аналогичному результату, т. е.

$$f'(x') = \frac{1}{2} f(x).$$

Экспоненциальное распределение. Плотность вероятностей этого распределения имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение выражаются через параметр распределения λ следующим образом:

$$m_x = \frac{1}{\lambda}; \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Для подобного распределения $f'(x')$ имеем

$$f'(x') = \lambda' e^{-\lambda' x'}.$$

Имея в виду, что

$$\frac{1}{\lambda'} = 2 \frac{1}{\lambda},$$

получим

$$f'(x') = \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{a}ax'} = \frac{1}{a} f(x).$$

Таким образом, для подобных распределений имеем

$$f'(x') = \frac{1}{a} f(x).$$

Распределение Релея. Плотность вероятностей этого распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{\lambda x}{2m_x^2} e^{-\frac{\lambda x^2}{4m_x^2}}.$$

В этом случае определяющим параметром является математическое ожидание m_x .

Для модели будем иметь

$$f'(x') = \frac{\lambda x'}{2(m_{x'})^2} e^{-\frac{\lambda x'^2}{4(m_{x'})^2}}.$$

Так как $m_{x'} = ax$, то получим

$$f'(x') = \frac{\lambda ax}{2a^2 m_x^2} e^{-\frac{\lambda a^2 x^2}{4a^2 m_x^2}} = \frac{1}{a} f(x).$$

2. Рассмотрим случай, когда X и X' имеют различные плотности распределения.

Пусть случайная величина X имеет плотность распределения гамма с параметром $k=2$, т. е.

$$f(x) = \frac{x}{\beta^2} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad (10)$$

где математическое ожидание $m_x = 2\beta$.

Пусть случайная величина X' имеет плотность распределения Эрланга, т. е. плотность распределения имеет вид

$$f'(x') = \frac{4x'}{m_{x'}^2} e^{-\frac{2x'}{m_{x'}}}, \quad (11)$$

где $m_{x'}$ — математическое ожидание случайной величины X' .

Так как величины X и X' подобны, то имеют место следующие соотношения:

$$x' = ax; \quad m_{x'} = am_x = 2a\beta.$$

Подставив последние значения в (11), получим

$$f'(x') = \frac{4ax}{a^2 4b^2} e^{-\frac{2ax}{2a^2}} = \frac{1}{a} \frac{x}{b^2} e^{-\frac{x}{b^2}}$$

Если последнее сравнить с (10), получим

$$f'(x') = \frac{1}{a} f(x).$$

Т. е. условие статистического подобия выполняется.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ն. ՀԱՄԱՍՅԱՆ, Գ. Գ. ՏՈՆՈՅԱՆ

Մեխանիկական մեծությունների վիճակագրական նմանության որոշման մեթոդները ինժեներային սեյսմոլոգիայի խնդիրներում

Հողվածում մշակված են մեխանիկական մեծությունների հավանականության բնութագրերի նմանության որոշման մեթոդները հավանականության տարրեր բաշխումների դեպքում: Դուրս են բերված այն պայմանները, որոնց պետք է բավարարեն նման մեխանիկական մեծությունների հավանականության խտության բաշխման ֆունկցիաները:

Ստացված տեսական արդյունքների հիման վրա կազմված է ինժեներային սեյսմոլոգիայի խնդիրներում օգտագործվող հիմնական մեխանիկական մեծությունների ընդլայնված վիճակագրական նմանության գործակիցների աղյուսակը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Г. Назаров, О механическом подобии твердых деформируемых тел, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1965. ² Е. С. Вентцель, Теория вероятностей, Изд. военной лит., М., 1962.

УДК 576.311.317 — 575.1.001.8 (611.12+611.33)

БИОХИМИЯ

И. Р. Саакян

Ограничение α -кетоглутаратом скорости окисления сукцината в митохондриях сердца и печени

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 31/X 1979)

Митохондриальная система окисления сукцината (СУК) как наиболее интенсивного поставщика богатых энергией соединений в дыхательную цепь, а также протонов в фонд пиридиннуклеотидов занимает центральное место в регуляции энергетики клетки и функциональном состоянии организма (¹⁻³). Среди факторов, регулирующих интенсивность окисления СУК в сукциндегидрогеназной (СДГ) реакции, в основном указываются или уровень восстановленного никотинамиддинуклеотида (НАДН) и связанного с ним восстановленного убихинона (²⁻⁴) или уровень эндогенной щавелевоуксусной кислоты (ЩУК) (^{1,5}). Принято считать, что действие на активность СДГ других субстратов: глутамата (ГЛ), пирувата (ПНР) или α -кетоглутарата (КГ) — источников образования ЩУК, реализуется через ЩУК.

В настоящей работе описано двукратное снижение КГ скорости окисления СУК в метаболическом состоянии + дыхания митохондрий (МХ) сердца кролика, собаки и крысы, а также печени кролика и крысы. Этот эффект, названный ограничивающим окисление СУК, связан с умеренным окислением НАДН в зоне исходно высокой их восстановленности. Он дифференцируется от действия ЩУК и, по-видимому, связан с индукцией КГ синтеза глутамата, приводящего к уменьшению восстановленности дыхательной цепи и к снижению активности СДГ. Работа подчеркивает взаимосвязь работы цикла Кребса и дыхательной цепи МХ с реакциями биосинтеза.

Материал и методы. Ткань сердца (кролик, собака и крыса) и печени (кролик и крыса) измельчали ножницами, а затем гомогенизировали в обоих случаях в стеклянном гомогенизаторе с пестиком из фторопласта. МХ осаждали методом дифференциального центрифугирования по 10 мин при 760 и 5000 г для печени и 1000 и 9000 г для сердца. Среда гомогенизации и среда суспендирования МХ печени содержала 0,3 М сахарозу, 0,003 М трис-НCl (рН 7,5), среда гомогенизации МХ сердца содержала 0,3 М сахарозу, 0,008 М ЭДТА (рН 7,5) и среда

суспендирования — 0,3 М сахарозу, 0,01 М трис-НСI (рН 7,5). Температура выделения МХ 2—4°C.

Потребление кислорода измеряли полярографическим методом, уровень НАДН — флуоресцентным методом, транспорт водорода — потенциометрическим методом. Белок МХ определяли методом Лоури.

Результаты и обсуждение. При добавлении КГ к МХ сердца кролика, собаки и крысы или печени кролика и крысы наблюдали снижение скорости окисления СУК. Этот эффект показан на примере дыхания МХ сердца крысы (рис. 1) (результаты изображены в форме диаграмм дыхания, построенных на основе полярографического измерения). Показано, что внесение КГ в пробу и проведение цикла фосфорилирования АДФ до добавления СУК приводит к уменьшению ско-

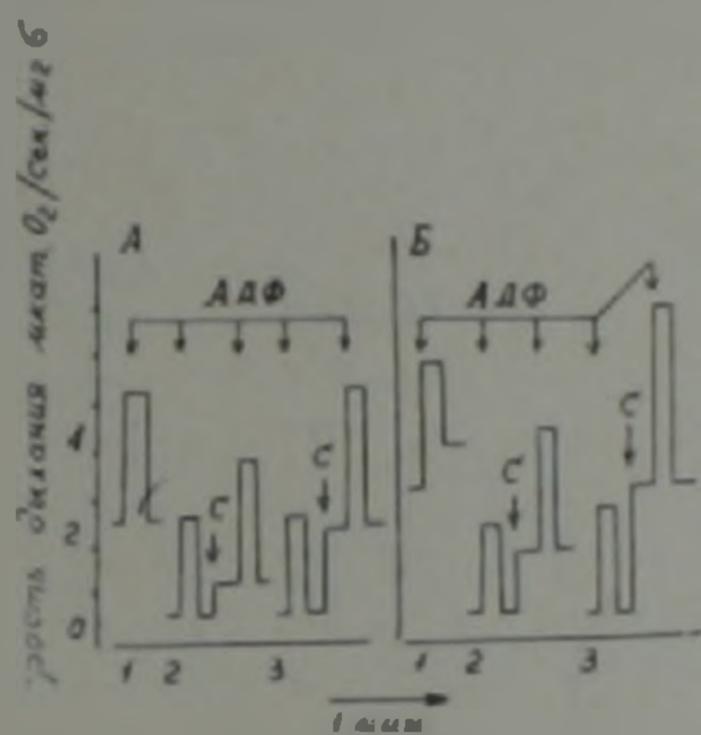


Рис. 1. Ограничение α -кетоглутаратом скорости окисления сукцината в метаболическом состоянии 4. А—свежевыделенные МХ сердца крысы; Б—через 2 ч хранения на льду. Среда инкубации общим объемом 1 мл содержит 0,25 М сахарозу, 0,03 М КСI, 0,015 М KH_2PO_4 (рН 7,5). Добавки: 4 мМ сукцината, 6 мМ α -кетоглутарата, глутамата и пирувата. АДФ 200 мкМ. До добавления в среду инкубации МХ внесены: 1—сукцинат; 2— α -кетоглутарат; 3—глутамат или пируват.

рости последующего дыхания на СУК. Оно происходит преимущественно за счет уменьшения скорости дыхания в состоянии 4, что составляет 50—60% на свежесделанных МХ (рис. 1, А) и 40% на МХ с ускоренным дыханием состояния 4 и со сниженными параметрами сопряжения (уменьшением дыхательного контроля по Чансу, удлинением времени фосфорилирования АДФ) в результате 2-часового хранения на льду (рис. 1, Б). Как показано на рисунке, другие НАДзависимые субстраты (НАДЗС), такие как ГЛ или ПИР, не обладают действием, подобным влиянию КГ: их внесение не меняет последующей скорости

дыхания МХ на СУК. Показано, что СУК окисляется интенсивнее, чем НАДЗС. Скорость дыхания на СУК превышает таковую на НАДЗС в состоянии 4 в 5—6 раз, а в состоянии 3 — в 1,5—2 раза. После 2-часового хранения МХ разница между скоростями дыхания на СУК и на НАДЗС увеличивается, так как дыхание на СУК возрастает, а на НАДЗС не меняется. Внесение КГ ограничивает скорость окисления СУК, одновременно повышая параметры сопряжения. Поэтому эффект КГ на окисление СУК обозначаем как ограничивающий, а не как тормозящий.

Измерение степени восстановленности НАД в МХ сердца кролика (рис. 2) и печени крысы (рис. 3) показало, что описанный эффект связан с 15—30%-ным окислением НАДН, наблюдаемым только в зоне высокого его восстановления, обеспечиваемого внесением СУК или ротенона (рис. 3). Добавление КГ к МХ с низким (менее 50%) исходным

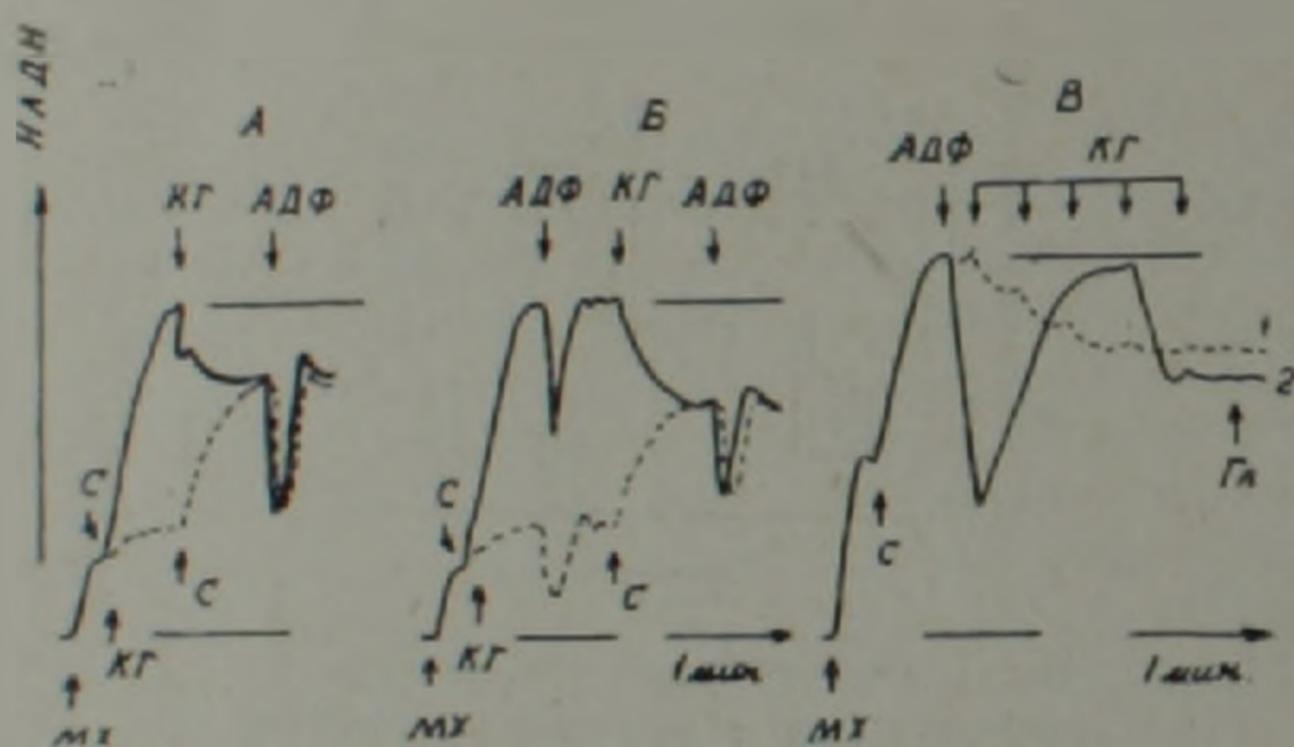


Рис. 2 Умеренное окисление НАДН при ограничивающем окислении сукцината действием α -кетоглутарата на МХ сердца кролика (А, Б) и крысы (В). Усиление окисляющего НАДН действия α -кетоглутарата после цикла фосфорилирования АДФ. А, В, 1 и Б, В, 2—до и после фосфорилирования АДФ. Условия инкубации как в подписи к рис. 1, кроме концентрации В, 1— α -кетоглутарата—добавки последовательно до 3, 6, 9 и 12 мМ и В, 2—АДФ—150 мкМ

уровнем НАДН приводит к противоположному эффекту: восстановлению НАДН примерно на 10—15%. Последующее внесение СУК обеспечивает дополнительно восстановление НАД, однако оно (как и дыхание в состоянии 4) оказывается ограниченным и достигает того же уровня, что и при добавлении КГ после СУК (рис. 2, 3). Показано, что реакции при внесении АДФ, так же, как и при измерении дыхания, не подвержены влиянию КГ. Однако степень окисляющего действия НАДН КГ усиливается после цикла фосфорилирования АДФ и накопления в МХ АТФ (рис. 2, 3). На рис. 2, В показано, что и при детальном добавлении КГ каждая добавка по 3 мМ до цикла фосфорилирования вызывает окисление НАД примерно на 10%. После цикла фосфорилирования уже одна добавка КГ вызывает окисление СУК более чем на

30%, что превышает суммарный эффект от трех добавок до фосфорирования. ГЛ на этом фоне не обращает окисления НАДН КГ.

Предполагаем, что одним из вероятных объяснений действия КГ, вызывающего окисление СУК и связанное с ним окисление НАДН на высокоэнергизованных МХ, представляется следующее включение реакции восстановительного аминирования КГ, в процессе которого НАДН расходуется на синтез глутамата. Действительно, аммиак как непосредственный субстрат реакции синтеза глутамата усиливает окисление НАДН КГ как в МХ печени (рис. 3), так и в МХ сердца.

Возможность же ограничивающего действия КГ на окисление СУК под влиянием образованной из нее ЩУК исключается следующими доводами:

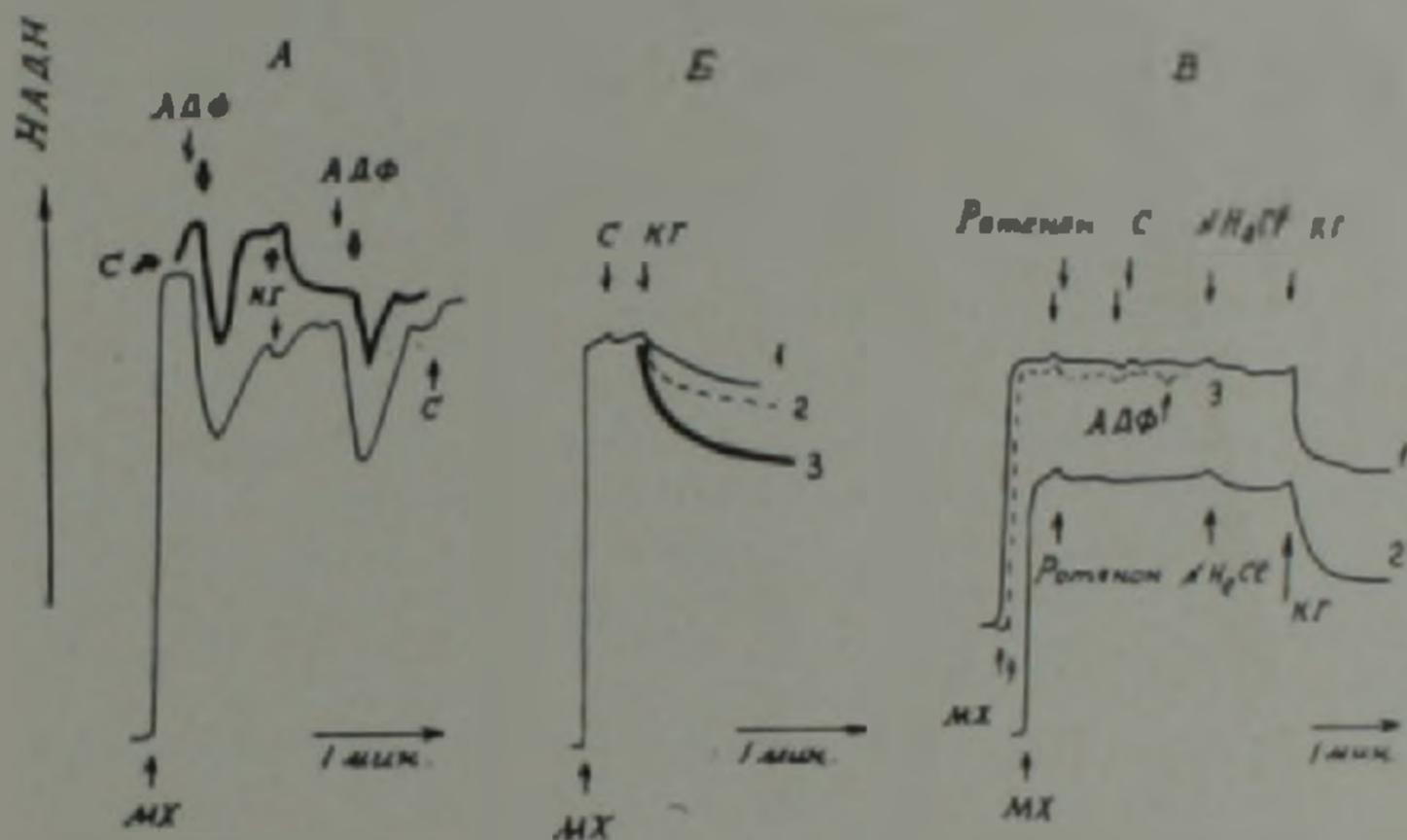


Рис. 3. Умеренное окисление НАДН при ограничивающем окислении сукцината действием α -кетоглутарата на МХ печени крысы (А, Б, В). Усиление окисляющего действия α -кетоглутарата ротеноном и хлористым аммонием (Б, В). Среда инкубации общим объемом 1 мл содержит: 0,1 М сахарозу, 0,06 М КСl, 0,0015 М трис-НСl, 0,0015 М KH_2PO_4 . Добавки: 1 мМ сукцината, 6 мМ α -кетоглутарата, 150 мкМ АДФ, 2 мкМ ротенона и 10 мМ NH_4Cl . Б: 1— α -кетоглутарат, 2— α -кетоглутарат + NH_4Cl , 3— α -кетоглутарат + NH_4Cl + ротенон. В: последовательно добавлены 1—ротенон, сукцинат, NH_4Cl и α -кетоглутарат, 2—ротенон, NH_4Cl и α —кетоглутарат (без сукцината), 3—ротенон, сукцинат и АДФ.

1. Как было показано выше, ГЛ и ПИР, которые так же как и КГ могут служить источниками образования ЩУК, не обладают действием, подобным КГ.

2. Ограничивающее действие КГ выражено как на МХ печени (кролик, крыса), так и на МХ сердца (кролик, собака и крыса). Однако известно, что торможение ЩУК дыхания характерно для МХ печени (1,2,5-9), а для МХ сердца ЩУК благодаря ее интенсивному окислению не вызывает торможения дыхания (10).

3. Ограничивающее окисление СУК действие КГ проявляется лишь в отношении дыхания в состоянии 4 и при высоком уровне восстанов-

ленности и высокой энергизованности МХ. Ингибирующее же действие ЩУК лучше проявляется при ослаблении энергизации МХ. На рис. 4, А, Б продемонстрирована разнонаправленность ответов МХ сердца под влиянием КГ и ЩУК при окислении СУК в зависимости от степени энергизованности МХ. Показано, что интактные МХ сердца в присутствии СУК осуществляют накопление ионов кальция при его последовательных добавках по 25 мкМ с выбросом на 7 добавке. Добавление

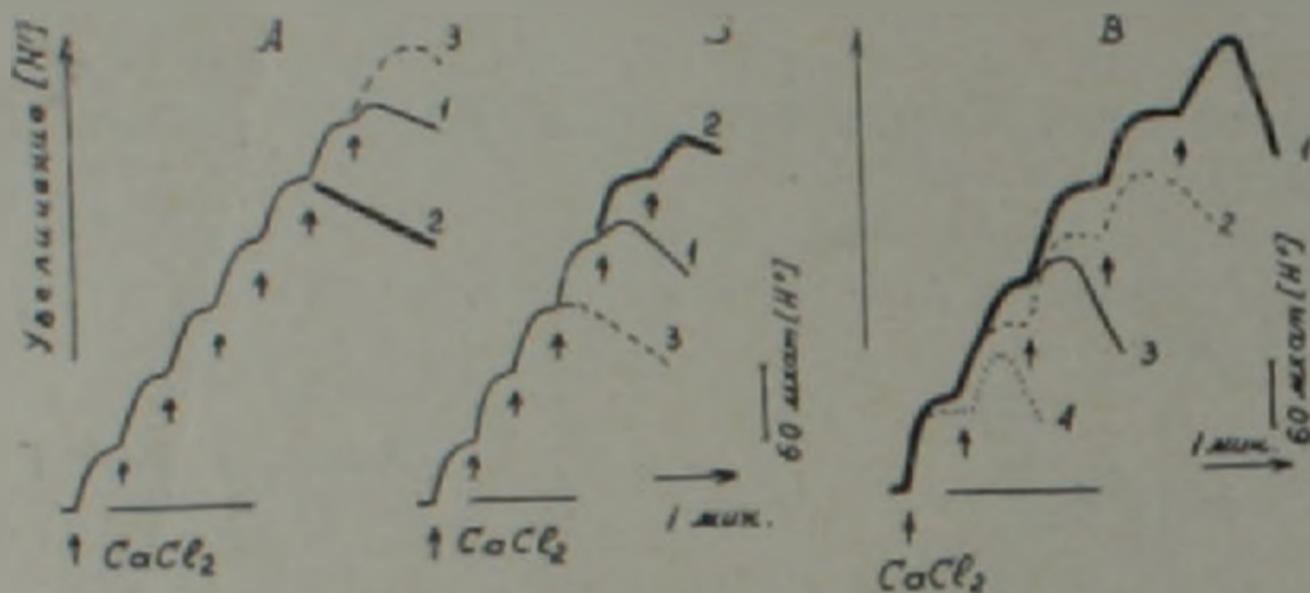


Рис. 4. Уменьшение кальциевой емкости при ограничивающем окислении сукцината действием α -кетоглутарата на МХ сердца кролика (А). Инверсия ответов МХ под влиянием КГ и ЩУК (А, Б). Уменьшение α -кетоглутаратом тормозящего действия ЩУК на поглощение кальция в МХ печени кролика в присутствии сукцината и ротенона (В). А—МХ свежewedенные, Б—через 2 ч хранения на льду. Условия инкубации А и Б как в подписи к рис. 1, В как в подписи к рис. 3, кроме CaCl_2 , вносимого порциями по 25 мкМ. Добавки А и Б 1—сукцинат; 2—сукцинат + α -кетоглутарат, 3—сукцинат + ЩУК. В 1—сукцинат, 2—сукцинат, глутамат и ЩУК, 3—сукцинат, α -кетоглутарат и ЩУК, 4—сукцинат и ЩУК.

КГ приводит к снижению кальциевой емкости до 5 добавок. Добавление ЩУК не изменяет или, наоборот, увеличивает кальциевую емкость МХ в присутствии СУК. При 2-часовом хранении МХ на льду отмечалось наряду со снижением параметров сопряжения и уровня восстановленности НАД (рис. 1, 2) снижение кальциевой емкости до 4 добавок. Добавка КГ приводит к увеличению, а ЩУК, напротив, к снижению кальциевой емкости соответственно до 5 и 3 добавок.

4. Ограничивающее окисление СУК действие КГ в отличие от торможения его ЩУК не снимается ГЛ и ротеноном, как показано выше. Ротенон, напротив, усиливает действие КГ, что соответствует данным (10, 12).

5. Наблюдается прямой антагонизм между ограничивающим окислением СУК действием КГ и тормозящим действием ЩУК (рис. 4, В). Показано, что в то время как добавление ЩУК приводит к значительному снижению кальциевой емкости при окислении СУК, КГ увеличивает указанную емкость. При совместном присутствии СУК, ЩУК и КГ емкость по кальцию возрастает более чем вдвое, по сравнению с пробой, содержащей СУК и ЩУК.

Анализ полученных данных позволяет считать, что наиболее вероятным объяснением ограничивающего действия КГ на окисление СУК является включение реакции восстановительного аминирования КГ, в процессе которого синтезируется глутамат и расходуется НАДН. В пользу этого говорит факт регистрации эффекта именно в области высокой восстановленности НАД и высокой энергизации МХ, усиливающегося наличием АТФ, ионами аммония и ретенонем. Это согласуется с данными (11, 12), показавшими, что под воздействием КГ, ионов аммония и ретенона имеет место увеличение концентрации глутамата в МХ мозга и печени крыс. Причем способность к образованию глутамата оказалась выше у годовалых крыс, по сравнению со старыми животными, что, как нам кажется, связано с различной степенью энергизации МХ.

Таким образом, регуляторное действие КГ на активность СДГ может быть сведено к одному механизму — снижению уровня НАДН. Поскольку КГ избирательно ограничивает окисление СУК, его действие можно использовать для снижения гиперактивного состояния СДГ, характерного для ряда патологических состояний (11-13). Известно также, что с торможением СДГ связано защитное действие ряда биологически активных препаратов (14). На основании этих данных предполагаем, что торможение дыхательной цепи имеет защитное для организма значение в патологических ситуациях. Следовательно, избирательное ограничение окисления СУК и физиологическое регуляторное действие КГ на активность СДГ заслуживает внимания в плане его фармакологического использования.

Филиал Всесоюзного
научного центра хирургии
МЗ СССР (Ереван)

Ի. Ի. ՍԱՀՆԿՅԱՆ

Սուկցինատի օքսիդացման արագության սահմանափակումը α-կետոգլուտարատով սրտի և լյարդի միտոքոնդրիաներում

Ցույց է տրված սուկցինատի օքսիդացման արագության կրկնակի իջեցում α-կետոգլուտարատով մետարուլիկ 4 դրություներ սրտի և լյարդի (ծագար, շուն, առնետ) միտոքոնդրիումների շնչառության ժամանակ: Դա կապված է NADH-ի շափավոր օքսիդացման հետ, վերջիններիս բարձր վերականգնման գոնայում: Այս էֆեկտը դիֆերենցվում է օքսալացետատի ազդեցությունից: Ըստ երկփուլյա, NADH-ի մակարդակի իջեցումը կապված է α-կետոգլուտարատով գլուտամատի սինթեզի ինդուկցիայի հետ: NADH-ի շափավոր իջեցումը կարող է բերել սուկցինատի հիդրոգենազայի ակտիվության սահմանափակման: Կարելի է ենթադրել, որ հնարավոր է օգտագործել α-կետոգլուտարատի վերը նշված ազդեցությունը՝ սահմանափակելու ախտարանական վիճակներին բնորոշ սուկցինատի հիդրոգենազի «հիստերալիպիզիան» օրգանիզմում:

- ¹ М. Н. Кондрашова, Автореф. докт. дис., Пушкино, 1973. ² М. Н. Кондрашова, Регуляция энергетического обмена и физиологическое состояние организма, «Наука», М., 1978. ³ M. Guitton, E. B. Kearney, T. P. Singer, Biochemistry, v. 10, 2726 (1971). ⁴ Они же, там же, v. 10, 4763 (1971). ⁵ E. S. Davis, D. M. Gibson, J. Biol. Chem., 241, 1, 161—170 (1969). ⁶ L. F. Rasmussen, FEBS Letters, v. 19, 239 (1971). ⁷ A. B. Wojszak, Biochem et Biophys Acta, v. 172 (1969). ⁸ Р. Н. Ахмеров, Н. Р. Саакян, Биофизика живой клетки, Пушкино 1973. ⁹ А. Д. Виноградов, Автореф. канд. дис., М., 1967. ¹⁰ Е. Г. Оком, в сб. «Терапевтическое действие янтарной кислоты», Пушкино, 1976. ¹¹ Г. В. Аларкян, В. А. Шагинян, Г. Г. Бунатян, Всесоюз. съезд геронтологов и гернаторов, Киев, 1976. ¹² Г. Г. Бунатян, Автореф. канд. дис., Ереван, 1977. ¹³ Е. Л. Богомолов, И. А. Комиссарова, Клиническая медицина, т. 8 (1975). ¹⁴ З. Н. Дедухова, И. А. Комиссарова, В. С. Моисеев, Кардиология, 1975. ¹⁵ И. А. Комиссарова, Р. Н. Нарцисов, в сб. «Терапевтическое действие янтарной кислоты», Пушкино, 1976. ¹⁶ Н. Р. Саакян, Т. Д. Карапетян с соавт., в сб. «Кровоснабжение, метаболизм и функция органов при реконструктивных операциях», Ереван, 1979. ¹⁷ А. С. Янонская, в сб. «Терапевтическое действие янтарной кислоты», Пушкино, 1976. ¹⁸ Г. Д. Миронова с соавт. Биофизика сложных систем и радиац. нарушений, «Наука», М., 1977.

УДК 581.193

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИИ

Академик АН Армянской ССР В. О. Казарян, Р. С. Шахазизян

К вопросу о морфо-физиологических особенностях развития и отмирания корней различных по возрасту осей кустарников

(Представлено 30/XI 1979)

Одна из характерных особенностей онтогенеза типичных кустарников заключается в формировании чередующихся дочерних осей в направлении от центра к периферии. Хотя каждая из дочерних осей находится на питании корней материнской оси, она одновременно образует собственную придаточную корневую систему, обуславливающую повышенную корнеобеспеченность листьев и их энергичный рост (¹). При таком обстоятельстве по мере увеличения числа периферийных осей постепенно усиливается корневая недостаточность для листьев материнской оси, что и рассматривается как причина преждевременного ее старения и отмирания (²).

Морфологически развитие отдельных осей выражается в усилении верхушечного роста и ветвления, тогда как старение проявляется сначала в образовании суховершинности, а затем в опускании зоны ветвления. По всей вероятности, подобные морфо-структурные изменения происходят и в онтогенезе корней отдельных осей. В действительности, тщательные раскопки корней показывают, что у молодых осей наиболее густо разветвленная зона размещается на терминальном, а у старых осей — базальном ярусах (рис. 1). Эти наблюдения дают основание полагать, что физиологическая активность корней старых материнских и молодых дочерних осей у одного и того же куста должна быть различной. По всей вероятности, у старых осей она выше у базальных, а у молодых — у терминальных корней. Цель данной работы заключалась в экспериментальной проверке этого предположения.

В качестве объекта для исследований были взяты кусты жимолости кавказской (*Lonicera caucasica* Pall.), произрастающие на территории Хосровского заповедника. Были подобраны растения, находящиеся на следующих возрастных этапах: период интенсивного роста центральных осей; период старения и отмирания центральных и формирования молодых периферийных осей различных порядков.

С целью выяснения физиологической активности корней материн-

ских и дочерних осей и взяты из них пробы для биохимических анализов. Растения раскапывали начиная от корневой шейки до терминальных разветвлений. Одновременно тщательно промывали корни слабой струей воды.

Для определения уровня общей жизнедеятельности активных (до 1 мм толщины) корней различных ярусов были взяты пробы от базальной, средней и терминальной зон скелетных образований, отходящих от старых и молодых осей. Образцы фиксировали на сухом горячем паре, затем высушивали в термостате до постоянного веса. Во

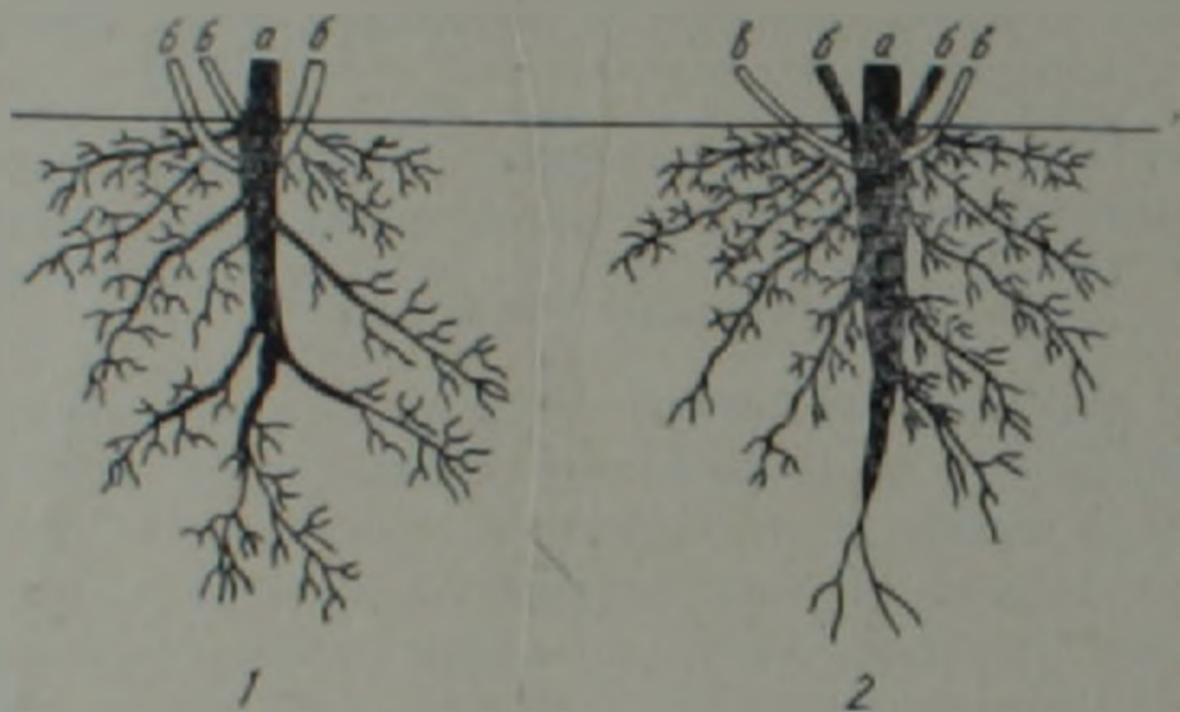


Рис 1 Архитектоника корневой системы молодого (1) и старого (2) куста, а—центральная ось, б—оси II порядка, в—оси III порядка

взятом материале определяли количество углеводов методом Хагедори-Иенсена по схеме Кизля (3), содержание форм азота микрометодом Къельдаля (3), фосфора — по Лоури и Лопесу (4), в модификации Хонда (5) и количество аминокислот методом бумажной хроматографии. Определение проводили в 4—8-кратных повторностях, полученные данные обработаны статистически. Наблюдается общая тенденция существенного отличия корней различных ярусов материнских и дочерних осей по содержанию общего и белкового азота (табл. 1). Количество нарастание этих форм азота у корней материнских осей молодых кустов имеет акропетальное направление, дочерних осей — базипетальное.

Диаметрально противоположная картина обнаружена у старого куста, но более показательна разница у корней дочерних осей II и III порядка. У осей II порядка, отличающихся в возрастном отношении от осей III порядка, максимальное содержание общего и белкового азота обнаруживается у активных корней среднего яруса. Это обстоятельство уже свидетельствует о том, что с возрастом осей направленность физиологической активности корней от акропетальной смещается к базипетальной, т. е. если у молодых осей она имеет акропетальное направление, то у старых — базипетальное. У средневозрастных осей ак-

тивными оказались корни, отходящие от центральной зоны скелетных образований

Таблица 1
Содержание форм азота (мг/г сухого веса) в разноярусных корнях, отходящих от старых и молодых осей жимолости кавказской

Куст	Корни	Ярусность взятых корней	Содержание азота			% белково- го азота от общего
			общего	небелкового	белкового	
Молодой	Материн- ской оси	Базальная	5.30±0.07	1.74±0.03	3.56±0.10	67.17
		Средняя	5.47±0.12	1.78±0.04	3.69±0.11	67.46
		Терминаль- ная	6.07±0.03	1.71±0.02	4.33±0.05	71.33
	Осей II по- рядка	Базальная	8.63±0.12	2.52±0.19	6.11±0.12	70.79
		Средняя	8.40±0.02	2.58±0.08	5.82±0.11	69.28
		Терминаль- ная	5.76±0.11	2.12±0.07	3.64±0.09	63.19
Старый	Материн- ской оси	Базальная	12.07±0.13	1.76±0.11	7.31±0.14	68.87
		Средняя	7.07±0.15	2.93±0.07	4.09±0.11	58.26
		Терминаль- ная	5.13±0.11	2.31±0.002	2.82±0.09	54.97
	Осей II порядка	Базальная	7.65±0.13	2.52±0.03	5.13±0.09	67.05
		Средняя	9.03±0.09	1.89±0.007	7.14±0.15	79.07
		Терминаль- ная	5.88±0.07	1.43±0.005	4.45±0.11	75.63
	Осей III порядка	Базальная	8.28±0.02	3.02±0.05	5.26±0.12	63.52
		Средняя	6.15±0.09	2.65±0.07	3.50±0.11	56.91
		Терминаль- ная	5.04±0.11	2.21±0.03	2.83±0.06	56.15

Таблица 2
Содержания форм фосфора (мг/г сухого веса) в разноярусных корнях, отходящих от старых и молодых осей жимолости кавказской

Куст	Корни	Ярусность взятых кор- ней	Содержание фосфора			% органи- ческого фосфора от общего
			общего	неоргани- ческого	органичес- кого	
Молодой	Материн- ских осей	Базальная	1.91±0.04	0.22±0.003	1.69±0.06	88.48
		Средняя	2.22±0.08	0.17±0.002	2.05±0.05	92.32
		Терминаль- ная	4.42±0.05	0.14±0.001	4.28±0.12	96.83
	Осей II порядка	Базальная	4.58±0.17	0.12±0.002	4.46±0.13	97.38
		Средняя	2.34±0.07	0.20±0.005	2.14±0.07	91.45
		Терминаль- ная	2.21±0.05	0.25±0.003	1.96±0.04	88.69
Старый	Материн- ских осей	Базальная	4.23±0.13	0.14±0.003	4.09±0.12	96.69
		Средняя	3.52±0.11	0.17±0.001	3.35±0.11	95.17
		Терминаль- ная	2.65±0.08	0.22±0.002	2.43±0.07	91.69
	Осей II порядка	Базальная	4.21±0.04	0.13±0.002	4.08±0.14	96.91
		Средняя	4.17±0.12	0.11±0.001	4.26±0.12	97.48
		Терминаль- ная	4.17±0.11	0.19±0.003	3.98±0.09	95.44
	Осей III порядка	Базальная	4.05±0.12	0.28±0.001	3.77±0.12	93.09
		Средняя	3.65±0.07	0.33±0.002	3.32±0.09	90.68
		Терминаль- ная	3.02±0.05	0.28±0.003	2.64±0.11	87.42

Аналогичное явление, иллюстрирующее уровень метаболической активности корней того или иного яруса, наблюдается и в отношении процента белкового азота от общего.

Учитывая, что содержание органической формы фосфора также характеризует уровень физиологической активности корней, в первую очередь метаболической, мы одновременно определяли содержание форм фосфора во всех взятых нами образцах (табл. 2).

Таблица 3

Содержание углеводов (мг/г сухого веса) в разноярусных корнях, отходящих от старых и молодых осей зимолости кавказской

Куст	Корни	Ярусность взятых корней	С о д е р ж а н и е		
			сахароп	крахмала	углеводов
Молодой	Материнской оси	Базальная	44.15±0.05	76.80±0.20	120.95±0.38
		Средняя	55.64±0.32	80.40±0.20	136.04±0.31
		Терминальная	58.61±0.24	80.10±0.25	138.71±0.25
	Осей II поряд- ка	Базальная	74.98±0.25	75.30±0.40	150.28±0.46
		Средняя	66.23±0.28	83.70±0.10	149.93±0.27
		Терминальная	61.02±0.24	81.00±0.11	142.62±0.30
Старый	Материнской оси	Базальная	99.69±0.24	75.00±0.18	174.69±0.30
		Средняя	89.39±0.20	70.12±0.21	159.51±0.27
		Терминальная	65.94±0.20	65.78±0.15	131.72±0.25
	Осей II по- рядка	Базальная	51.36±0.19	72.90±0.10	124.26±0.22
		Средняя	57.21±0.24	78.00±0.15	135.21±0.28
		Терминальная	53.23±0.22	70.50±0.16	123.73±0.27
	Осей III порядка	Базальная	64.15±0.21	69.00±0.13	133.15±0.25
		Средняя	62.92±0.19	64.16±0.18	127.18±0.26
		Терминальная	57.94±0.22	60.21±0.11	118.18±0.24

Как в первой таблице, так и здесь приведенные цифровые данные весьма наглядно свидетельствуют о различии в онтогенетическом смещении физиологической активности корней, отходящих от старых и молодых осей. Особенность количественных показателей форм фосфора заключается лишь в том, что в отличие от азота процент органического фосфора от общего всегда высок, что следует рассматривать как показатель более активного метаболизма этого минерального элемента в корневой системе.

Идентичные данные были получены и в результате определения содержания углеводов в корнях (табл. 3). Приведенные цифры, будучи аналогичными данными предыдущих таблиц, опять-таки свидетельствуют об общем состоянии корней. Если судить об активности корней по содержанию углеводов, то у молодых кустов активными следует считать терминальные корни материнских осей. У осей II порядка те же кустов активными оказываются корни, отходящие непосредственно

от основания. У старых кустов общее содержание углеводов наиболее высокое у корней базального яруса как у материнской оси, так и у осей III порядка, тогда как у осей II порядка активными оказываются корни среднего яруса. Точно такая же картина обнаружена и в отношении белкового азота и органического фосфора.

Учитывая, что как один из показателей метаболической активности корней рассматривается синтез ими аминокислот, мы определяли их содержание в тех же разноярусных корнях (рис. 2).

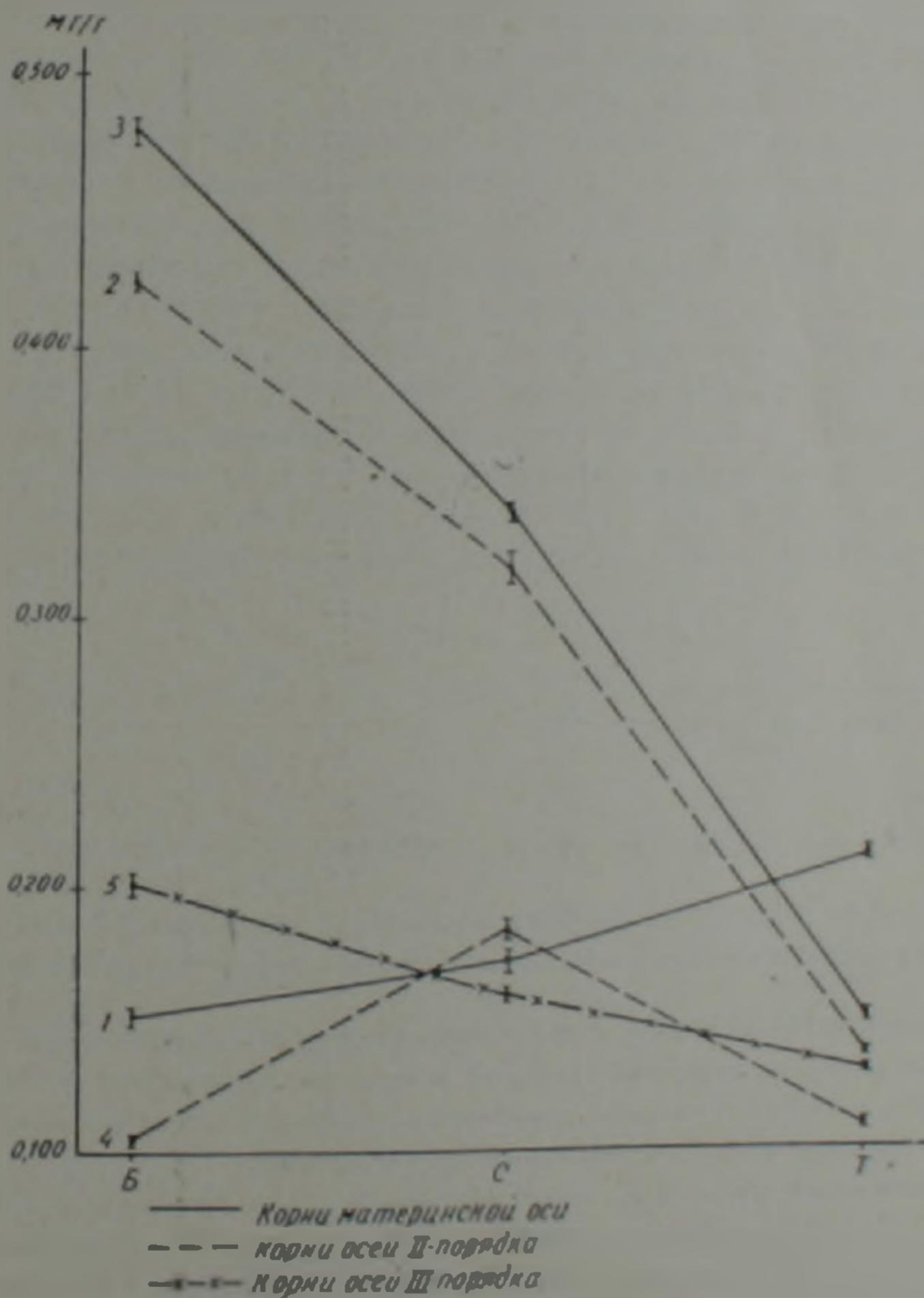


Рис. 2. Содержание свободных аминокислот в активных корнях базального (Б), среднего (С) и терминального (Т) молодых (1, 2) и старых (3—5) кустов жимолости кавказской

У материнских осей молодых кустов содержание аминокислот нарастает от базальных корней к терминальным, тогда как у корней осей II порядка наблюдается обратная картина: наименьшее количество аминокислот определяется у терминальных, наибольшее — у базальных корней. У старых кустов положение становится иным. У материнских (старых) осей содержание аминокислот нарастает от терминальных к базальным корням, а у осей II порядка наибольшее количество аминокислот обнаруживается у корней, отходящих от среднего яруса. У осей же III порядка обнаруживается такая же картина, как и у корней материнских осей.

Изложенные выше данные в конечном счете свидетельствуют с одной стороны о закономерном изменении архитектоники активных корней у разновозрастных кустов и осей, с другой — об их физиологической активности. При этом если у дренесных форм эта изменчивость с возрастом смещается от акропетального направления к базипетальному (6), то у кустарников подобная тенденция обнаруживается лишь у отдельных осей. У старых центральных осей проявляется такая же тенденция, как у старых деревьев, а у дочерних осей — как у молодых деревьев. Эти особенности корней в отношении локального старения отдельных осей по сути дела показывают, что онтогенез их протекает самостоятельно, хотя они вместе взятые и образуют целостное растение. С этой точки зрения совершенно прав В. Л. Комаров (7), утверждавший, что каждая ось у кустарников представляет собой более или менее самостоятельный индивид как целостная физиологическая система.

Ботанический институт
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիայի Գ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ի. Ս. ՇԱՀԱԶԻԶՅԱՆ

Խիւրի տարրեր հասակի առանցքների աճատների զարգացման և մահացման մոլոֆո-ֆիզիոլոգիական առանձնահատկությունների հարցի մասին

Կատարված են ուսումնասիրություններ կովկասյան ցախակեռասի աճատային համակարգի արիտակտոնիկայի և տարրեր առանցքների ու հարկերի ակտիվ աճատների մեջ ազոտի, ֆոսֆորի, ածխաջրատների ձևերի ու ամինաթթուների քանակական փոփոխությունների վերաբերյալ:

Հաստատված են, որ մայրական ծեր առանցքների մոտ աճատային համակարգի էյուդավորությունը զարգանում է քաղիպետալ, իսկ դուստր առանցքների մոտ ակրոպետալ ուղղությամբ: Դրան զուգահեռ փոխվում է նաև ակտիվ աճատների ֆիզիոլոգիական ակտիվությունը ըստ հարկերի: Ծեր առանցքների մոտ ամենաակտիվ աճատները տեղաբաշխված են աճատավզիկի մոտ, երիտասարդ առանցքների մոտ՝ ծայրային գոնայում: Այս ցույց է տալիս, որ տարրեր առանցքների օնոգեննեզը բնթանում է ինքնուրույնաբար, շնայած նրանք միասին վերցրված կազմում են ամբողջական արգանիզմ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. О. Казарян, Старение высших растений, «Наука», М., 1969 ² В. О. Казарян, А. Г. Гаспарян, Бюл. Моск. о-ва испытателей природы, отд. биологии, т. 75 (11) (1970). ³ А. Н. Белозерский, Н. И. Проскуряков, Практическое руководство по биохимии растений, «Сов. наука», М., 1951. ⁴ О. Н. Lowry, I. H. Lips, Biological chem., 162, 3 (1946). ⁵ S. L. Hoidal, Plant Physiol., 31, 1(1956) ⁶ В. О. Казарян, Р. С. Шахазизян, ДАН Арм. ССР, т. 69, № 3 (1979). ⁷ В. Л. Комаров, Учение о виде растений, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1940

УДК 595.768.23

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хизорян

**Новый вид жесткокрылых-долгоносиков с Кавказа
 (Coleoptera, Curculionidae)**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 26/XI 1979)

Mylacus daghestanicus Iablokoff-Khizorian sp. nov.

Дагестан, Хунзах, 23/V 1908, сборы Полторацкого, голотип ♂ и аллотип, в коллекциях Института зоологии АН Армянской ССР.

Тело черное или темно-бурое, усики желтые, голени и лапки темные или светлые, бедра темно-бурые, волосистость беловатая. Длина 3,5—3,6 мм. Рис. 1, а

Глаза выпуклые, выступающие, слегка конические, лоб покрыт довольно густыми, прилегающими волосками, расположенными вокруг глаз поперечно их оси, у середины лба слегка веерообразно, точечность мелкая и густая, за головотрубкой слабое треугольное вдавление, расширенное кзади. Голова сверху выглядит трапециевидной, кзади от глаз расширена, кпереди от них сужена постепенно, с прямолнейными боковыми краями, головотрубка со слабым продольным вдавлением, в такой же точечности и волосистости, как лоб. Расстояние между усиковыми впадинами втрое меньше ширины головы у глаз. Усики голстые и короткие, их рукоятка прямолнейная, такой же длины, как жгутик, постепенно и слабо расширена к вершине, 1-й членик жгутика вдвое длиннее 2-го и в 4 раза — коротких 3-го и 4-го, последующие 3 членика поперечные, булава слегка короче половины рукоятки. Переднеспинка в 1,65—1,70 раза шире длины, с равномерно закругленными боками, без основной ямки, в такой же точечности и волосистости, как лоб, волоски зачесаны косо назад и кнаружи, без пробора. Надкрылья в 1,2—1,35 раза длиннее общей ширины, со слабо закругленными боками, с правильными рядами точек, которые по крайней мере вдвое крупнее точек переднеспинки, промежутки между рядами плоские, мелко и очень рассеянно точечные и волосистые на гладком фоне, вдоль шва и по бокам тела имеются палочковидные чешуйки. Все бедра без зубца. Передние голени без вершинного зубца, но с зубчиком, направленным вниз.

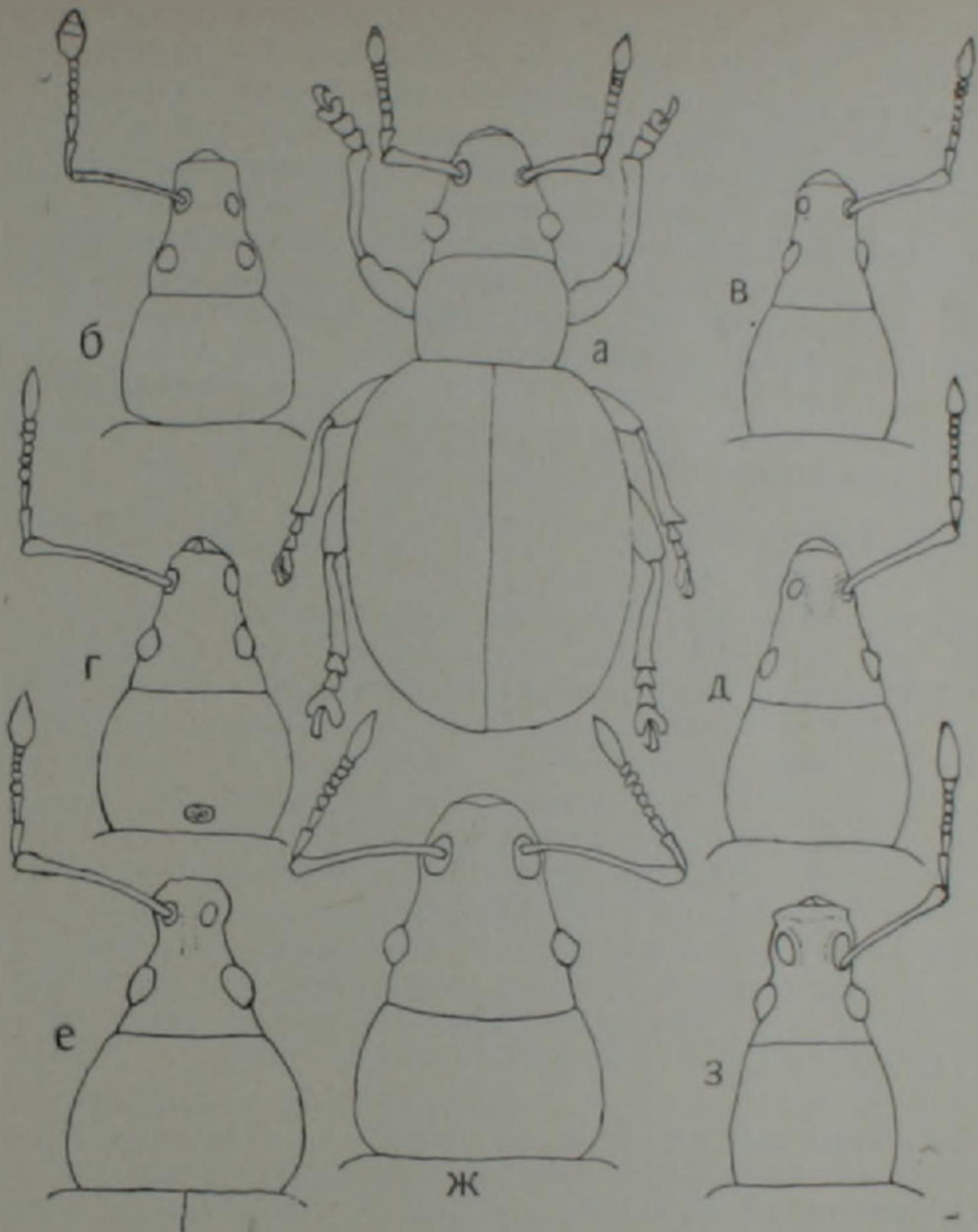


Рис. 1. а—*Mylacus daghestanicus* Khnz., sp. nov., голотип, габитус. б—*M. turkestanicus* Schilsky, голотип, голова и переднеспинка; в—*M. mostajkii* Angelov, с Ям., то же; г—*M. verruca* Slev., из Армении (Джрвеж) то же; д—*M. rotundatus* F., из Армении (Джрвеж), то же; е—*M. globulus* Boh., из Житомира, то же; ж—*M. globosus* Oyll., из Кисловодска, то же; з—*M. turinus* Boh., из Украины, то же

Этот вид — типичный представитель рода *Mylacus* Schoenherr, насчитывающего вместе с ним 44 описанных вида, распространенных в основном по Средиземноморью, в особенности на Балканах, некоторые виды проникают в среднюю и восточную Европу до западной Сибири, на Кавказ, в Казахстан, в СССР пока обнаружено 8 видов, определительная таблица которых приводится ниже.

Все виды однородного габитуса, сходных размеров, их тело черное или бурое, ноги темные, часто со светлыми голеньями и лапками, у всех видов, известных из СССР, волосистость светлая и прилегающая.

От всех видов рода новый вид легко отличается по признакам, приведенным в таблице. Для ее установления мы осмотрели 3 типа *M. turkestanicus* Sch., любезно присланных нам из Берлина М. Улигом. Из них один выделен нами как голотип. Он несет 5 этикеток, с надписями: *Karagaitau turkestanicus* Schilsky* (рукой Шильского); *Mylacus* Sch. *turkestanicus* Schilsky, coll. Schilsky; *typus* (звездочкой Шильский, следуя Вейзе, отмечал свои голотипы). Этот тип тождествен особям, собранным нами около Алма-Аты. Два прочих типа несут по 3 этикетки, соответствующие 3 последним этикеткам голотипа, без указания местонахождения.

Определительная таблица видов рода *Mylacus* Schoenh. фауны СССР

- 1(12) Передние голени с тонким вершинным зубцом на внутреннем крае, отогнутым внутрь под прямым углом. Переднеспинка не более чем в 1,5 раза шире длины. Головотрубка не или едва шире длины. Рукоятка усиков заходит за основание переднеспинки (незначительно у *rotundatus*) Волосистость верха однородная, равномерная, густая или рассеянная, иногда потеряя.
- 2(5) Голова сужена конически от основания до вершины.
- 3(4) Переднеспинка с прищитковой ямкой, усаженной прилегающими желтоватыми чешуйками (очень редко отсутствующей), в 1,2—1,3 раза шире длины (рис. 1, г), ее точечность едва мельче, чем на надкрыльях, фон которых шагренирован, а волосистость густая. Головотрубка без килей. Длина 2,5—3,4 мм. Степи европейской части СССР с Крымом, Кавказ, Анатолия
1. *M. verruca* Stev., 1829
- 4(3) Переднеспинка без следа ямок (как и у всех следующих видов), в 1,3—1,4 раза шире длины, ее точки гораздо мельче точек рядов надкрылий, фон которых гладкий, а волосистость рассеянная. Головотрубка с 2 четкими параллельными килями (рис. 1, д). Длина 2,4—3,1 мм. Юг европейской части СССР, Кавказ, средняя Европа
2. *M. rotundatus* F., 1792
- 5(2) Голова сужена более или менее конически до головотрубки, которая, по крайней мере дистально, параллельнобокая или расширена к вершине, без четких килей (с их следом у некоторых видов).
- 6(7) Головотрубка сужена к усиковым впадинам, здесь расширена и едва уже, чем у основания, слегка длиннее ширины. Глаза четко выступают из контура головы. Последние членики жгутика округлые (рис. 1, е). Переднеспинка в 1,3—1,5 раза шире длины.

наибольшей ширины за серединой, точечность слегка крупнее, чем в рядах точек надкрылий. Длина 2—2,7 мм. Юг европейской части СССР до Урала, Кавказ, средняя Европа

3. *M. globulus* Boh., 1843

7(6) Головотрубка к вершине едва расширена, почти равной длины и ширины.

8(9) Два последних членика жгутика поперечные. Голова резко сужена от шейки к глазам, которые четко выступают из ее контура (рис. 1, в). Переднеспинка в 1,3—1,4 раза шире длины, наибольшей ширины у середины, ее точечность заметно мельче, чем в рядах точек надкрылий. Длина 2,3—2,8 мм. Яйла

4. *M. moczarskii* Angelov, 1973

9(8) Последние членики жгутика округлые. Голова к глазам сужена слабее.

10(11) Переднеспинка в 1,45—1,5 раза шире длины, наибольшей ширины за серединой, ее точечность заметно мельче, чем в рядах точек надкрылий. При осмотре сверху глаза не выступают из контура головы, головотрубка четко расширена к основанию, без килей, ее впадины округлые (рис. 1, б). Длина 2,6—2,7 мм. Казахстан

5. *M. turkestanicus* Schilsky, 1912

11(10) Переднеспинка в 1,2—1,3 раза шире длины, наибольшей ширины почти у середины, ее точки не мельче точек рядов надкрылий. При осмотре сверху глаза четко выступают из контура головы, головотрубка не или едва расширена к основанию, со следом килей, сближенных кзади, ее впадины крупные, овальные (рис. 1, з). Длина 2,5—3 мм. СССР на юг от Москвы до юго-западной Сибири и Кавказа. Малая Азия

6. *M. murinus* Boh., 1843

12(1) Передние голени без зубца, но с зубчиком, направленным вниз. Переднеспинка в 1,6—1,8 раза шире длины, ее точечность вдвое мельче, чем в рядах надкрылий. Головотрубка намного шире длины. Рукоятка усиков не достигает основания переднеспинки. Волосистость надкрылий двойная, с волосками и палочковидными чешуйками. Голова сужена от основания до вершины, глаза сильно выступают из ее контура. Последние членики жгутика поперечные.

13(14) Надкрылья в основном голые и блестящие, вдоль шва и по контуру покрыты чешуйками и очень короткими, редкими волосками. У ♂ бедра с острым зубцом. Усики тонкие (рис. 1, ж). Ноги черные. Длина 2,5—3,7 мм. Юг Украины, Крым, северный Кавказ

7. *M. globosus* Gyll., 1834

14(13) Надкрылья густо волосистые, по бокам и вдоль шва также с чешуйками. Бедра темные, без зубца. Усики толстые и короткие,

с едва изогнутой рукояткой (рис. 1, а). Длина 3,5—3,6 мм. Да-
гестан

M. daghestanicus Khnz. sp. nov.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ԾԱՐՈՒՎ-ԿՆՅՈՐՅԱՆ

Երկարակենիք-կալոճարեերի նոր տեսակ Կովկասից (Coleoptera,
Curculionidae)

Հետ 2002 ՔԱ Կենդանաբանության ինստիտուտի նյութերի, նկարագրված է երկարակենիքների նոր տեսակ—*Myiachus daghestanicus* Khnz., որը խիստ տարրերվում է այս սեռի մյուս 43 տեսակներից: Տրված է որոշիչ աղյուսակ 0020-ից հայտնի բոլոր 8 տեսակների համար:

