

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ. ДОКЛАДЫ

LXX, № 1

1980

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, անհն. գիտ. բնեւ-
 ձու (պատ. Իստուղատ), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
 ՍՍՀ ԳԱ բարակից-անդամ, Ա. Բ. ԲԱՐԱ-
 ԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
 ՎԱԹՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
 ԿԱԼԱՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ բարակից-անդամ,
 Լ. Մ. ԲԱՌԱՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ բարակից-ան-
 դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
 Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
 (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹ-
 ՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
 ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր),
 Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ բարակից-անդամ,
 Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ բարակից-
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՓԱՅԵԼՅԱՆ, ՍՍՀ
 ԳԱ բարակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ,
 ՍՍՀ ԳԱ բարակից-անդամ

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
 АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
 мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
 демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),
 И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм.
 ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
 АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
 чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
 ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
 ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
 ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
 ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
 В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Է. Ա. Դանիելյան, Ն. Ս. Զեմլյանոյ—Որոշ $\overrightarrow{Mr}|\overrightarrow{Gr}|:|\infty$ համակարգերում ապառաժան ժամանակների համատեղ բաշխման սահմանային բաշխումների դասը կրիտիկական ժանրաբեռնվածության դեպքում 3
- Է. Ա. Դանիելյան, Գ. Ա. Պոպով—Մեկ սահմանային թեորեմի մասին նախապատվությամբ համակարգերում միավոր ժանրաբեռնվածության դեպքում 11
- Ֆ. Ա. Թալալյան—Համասեռ տարածությունների վրա տրված ինվարիանտ չափերի մասին 16
- Դ. Հ. Մուրադյան, Տ. Է. Փիլիպոսյան—Ուղղանկյուն ցանցի զազաթների մինիմալ համարակալումներ 21

ՖԻԶԻԿԱ

- Դ. Մ. Սեդրակյան, Կ. Մ. Շահարասյան—Պրոտոնների հոսանքը նեյտրոնային աստղերի «пре»-ֆազում 29
- Ա. Հ. Մելիքյան, Ս. Հ. Սահակյան—Ռեզոնանսային պայմաններում գեներացված երրորդ հարմոնիկի իմպուլսների ժամանակային կառուցվածքը 33
- Բ. Վ. Կրիժանովսկի—Ռեզոնանսային ֆլուորեսցենցիան ալյասերված մակարդակների վրա 37

ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ

- Հ. Ա. Հաբուրյունյան—Սպեկտրալ գծերի առաջացումը էքսպոնենցիալ բաշխվածությամբ աղբյուրներով մթնոլորտում 41
- Գ. Տ. Պետրով—2-տիպի Սեյֆերտի գալակտիկաների և առաքման նեղ գծերով ուղիղ գալակտիկաների միջուկների քիմիական բաղադրությունը և իոնների պարունակությունը . 46
- Ս. Գ. Իսկուդարյան— M_H-M_T չափանիշը 50

ԱՆԱԼԻՏԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

- Վ. Մ. Թառայան, Ֆ. Վ. Միրզոյան, Ժ. Վ. Սարգսյան, Ժ. Մ. Առստամյան—Հիմնային ներկանյութի հետ իոնական ասոցիատի ձևով էքստրազվող քլորթալատ իոնի բաղադրության մասին 56

ԱԿՐՈՔԻՄԻԱ

- Ա. Շ. Կալստյան, Ս. Ա. Աբրահամյան, Խ. Ն. Բաղալյան—Հումուսային նյութերի ֆերմենտային ակտիվության ուսումնասիրությունը 61

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

- Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной — Класс предельных распределений совместного стационарного распределения времен ожидания некоторых систем $M_r|G_r|1|_{\infty}$ в условиях критической загрузки 3
- Э. А. Даниелян, Г. А. Полов — Об одной предельной теореме для приоритетных систем при единичной загрузке 11
- Ф. А. Талалян — Об инвариантных мерах на однородных пространствах 16
- Д. О. Мурадян, Т. Э. Пилипосян — Минимальные нумерации вершин прямоугольной решетки 21

ФИЗИКА

- Д. М. Седракян, К. М. Шахабасян — Протонный ток в «пре» фазе нейтронных звезд 28
- А. О. Меликян, С. Г. Саакян — Временная структура рационально генерированных импульсов третьей гармоники 33
- Б. В. Крыжановский — Резонансная флуоресценция на вырожденных уровнях 37

АСТРОФИЗИКА

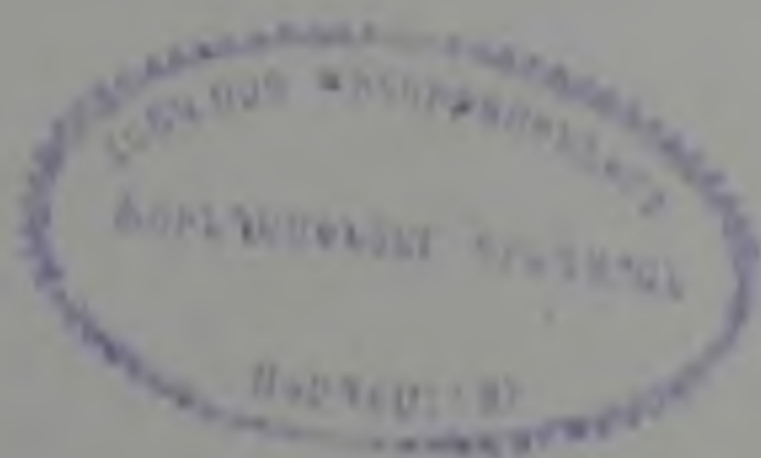
- Г. А. Арутюнян — Образование спектральных линий в атмосфере с экспоненциальным распределением источников 41
- Г. Т. Петров — Содержание ионов и химический состав в ядрах сейфертовских галактик типа 2 и радиогалактик с узкими линиями 46
- С. Г. Искусидрян — Критерий M_4-M_r 50

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- В. М. Тароян, Ф. В. Мирзоян, Ж. В. Саркисян, Ж. М. Арстамян — К особенностям экстракции хлорталлат-аниона 56

АГРОХИМИЯ

- А. Ш. Гилстян, С. А. Абрамян, Е. Н. Бидилян — Изучение ферментативной активности гумусовых веществ 61



CONTENTS

MATHEMATICS

	P.
<i>E. A. Daniellian, N. S. Zemlanoy</i> —The class of limiting distributions for the joint stationary distribution of waiting times for some $M_1 G_1 \infty$ queues in heavy traffic	3
<i>E. A. Daniellian, G. A. Popov</i> —On one limit theorem of priority queues in heavy traffic	11
<i>F. A. Talallan</i> —On invariant measures on homogeneous spaces	16
<i>D. H. Mooradian, T. E. Pllipostan</i> —Minimal numberings of a rectangular lattice	21

PHYSICS

<i>D. M. Sedrakian, K. M. Shahahasian</i> —The protons current in the „npe“ phase of the neutron stars	28
<i>A. O. Meliklan, S. H. Sahakian</i> —The temporal structure of resonantly generated third harmonic pulses	33
<i>B. V. Kryzhanovskiy</i> —Resonance fluorescence from degenerate levels .	37

ASTROPHYSICS

<i>H. A. Haruthyunlan</i> —The formation of spectral lines in an atmosphere with sources distributed by exponential law	41
<i>G. T. Petrov</i> —The content of ions and chemical composition in the nuclei of II type Seyfert galaxies and narrow line radio galaxies	46
<i>S. G. Iskudarian</i> —The criterion M_B-M_g	50

ANALYTICAL CHEMISTRY

<i>V. M. Turayan, F. V. Mirzoyan, Zh. V. Sarkissian, Zh. M. Arstamian</i> —On the extraction of chlorthallate anion	56
---	----

AGROCHEMISTRY

<i>A. Sh. Galstian, S. A. Abrahamian, E. N. Budallan</i> —Enzymatic activity investigations of humus substances	61
---	----

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 03198 Подписано к печати 3.IV.80 Тираж 510 Изд. 5195 Заказ 31
 Формат бумаги 70X108_{1/16} Печ. л. 4. Бум. л. 2
 Усл. печ. л. 5,67 Уч. изд. л. 4,34.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Бареканутян, 24.

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной

Класс предельных распределений совместного стационарного
 распределения времен ожидания некоторых систем $M|G_r|1|\infty$
 в условиях критической загрузки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрином 10/VII 1979)

Кингман (¹) предложил экспоненциальную аппроксимацию для стационарного распределения времени ожидания (в. о.) в системе массового обслуживания (СМО) $M|G_r|1|\infty$ при загрузке, приближающейся к единице слева (условие критической загрузки). Э. А. Даниелян получил аналогичные предельные теоремы сходимости к экспоненциальному распределению для СМО $M|G_r|1|\infty$ в случае дисциплин обслуживания с относительным приоритетом (схема А) и тремя разновидностями абсолютного приоритета (схемы В: с потерей прерванного вызова, дообслуживанием, обслуживанием заново) (²). В работе (³) был поставлен следующий вопрос. В приоритетных СМО $M|G_r|1|\infty$ только ли экспоненциальное распределение может служить в качестве предельного для стационарного распределения в. о. в условиях критической загрузки? Ответ оказался отрицательным. Для схемы В с дообслуживанием прерванного вызова в СМО $M|G_r|1|\infty$ при $r=2$ в (³) и при $r=3$ в (⁴) получен класс предельных распределений для совместного условного стационарного распределения в. о. при критической загрузке при условии, что с момента отсчета в. о. прекращается доступ в систему вновь приходящих вызовов. Результаты даны в преобразованиях Лапласа—Стилтьеса (п. Л.—С.) и не во всех случаях обращены.

Цель настоящей работы заключается в получении класса предельных распределений для совместных безусловных стационарных распределений в. о. СМО $M|G_r|1|\infty$ для схем А и В в условиях критической загрузки при произвольном r .

В одноканальную СМО с ожиданием поступает r независимых пуассоновских потоков вызовов. Вызовы i -го потока, называемые i -

вызовами, поступают с интенсивностью $a_i > 0$. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для i -вызовов имеют функцию распределения $B_i(t)$, $B_i(-0) = 0$. Потoki пронумерованы в порядке убывания приоритетов. Вызовы одного и того же потока обслуживаются по дисциплине FIFO.

Под загрузкой ρ_{i1} ($i = \overline{1, r}$) системы $\overline{1, i}$ -вызовами понимается среднее время, требуемое для обслуживания $\overline{1, i}$ -вызовов, поступающих в среднем за единицу времени. Значения как ρ_{i1} , так и величины ρ_{i2} ($i = \overline{1, r}$), имеющих смысл суммы по индексу j (от 1 до i) произведения интенсивности a_j на второй момент длительности обслуживания j -вызова, для схем А и В приведены в (3). Мы говорим, что система находится в условиях критической загрузки, если $\rho = 1 - \rho_{r1} > 0$.

Пусть w_i ($i = \overline{1, r}$) — стационарное в. о. i -вызова в схемах А и В: распределения $B_i(t)$ фиксированы и ρ_{r1} конечно. Задача состоит в описании класса всех предельных распределений для вектора $(x_1, \dots, x_r)$ при $\phi \downarrow 0$.

Предполагается выполненным следующее условие:

Существуют пределы

$$c_k = \lim_{\phi \downarrow 0} z_k \quad (z_k = \rho_k / \rho_{k-1}, \quad \rho_k = 1 - \rho_{k1}, \quad k = \overline{1, r}). \quad (*)$$

Ясно, что $0 \leq c_k \leq 1$. Из (*) следует также существование пределов

$$b_k = \lim_{\phi \downarrow 0} \rho_{k2} < +\infty.$$

Из индексов $1, 2, \dots, r$ выделим такие и только такие индексы

$$1 \leq p_1 (= p) < p_2 < \dots < p_m \leq r,$$

для которых $c_{p_l} = 0$ ($l = \overline{1, m}$). Без ограничения общности полагаем, что параметры первых $p-1$ потоков фиксированы.

Множество индексов ($l = \overline{1, m+1}$; $\rho_0 = 0$, $\rho_{m+1} = r+1$)

$$P_l = \{j : p_{l-1} < j < p_l\}$$

выделяет множество потоков с индексами j , для которых $c_j > 0$ ($j \in P_l$, $j \neq p_{l-1}$). Такое разбиение индексов на группы называем разбиением (*).

Пусть $\chi(t)$ — функция Хевисайда, $\varphi(t) = 1 / \sqrt{\frac{1}{4} + t - \frac{1}{2}}$ ($t \geq 0$).

Для любого $j \in P_l$ ($l = \overline{2, m+1}$) определим функции λ_j и q_j

$$\lambda_{p_{l-1}} = c_{p_{l-1}} s_{p_{l-1}}, \quad \lambda_j = c_j [s_j + c_j \lambda_{j-1} + (1 - c_j) \varphi(\lambda_{j-1})],$$

$$\lambda_{p_l-1} = s_{p_l-1} + \varphi(\lambda_{p_{l-1}-1}) \chi(c_{p_{l-1}-1}),$$

$$q_{p_{l-1}} = (1 - c_{p_{l-1}}) \varphi(\lambda_{p_{l-1}-1}), \quad q_j = (1 - c_j) \varphi(\lambda_j) + c_j^2 q_{j-1}.$$

$$q_{p_{l-1}} = -l_{p_{l-1}}(1 - \gamma_{p_{l-1}}) + q_{p_{l-1}+1} \gamma(c_{p_{l-1}+1}),$$

с помощью которых задается функция γ_l

$$\gamma_{p_{l-1}} = \frac{c_{p_{l-1}} \varphi(l_{p_{l-1}})}{\varphi(l_{p_{l-1}}) - \varphi(q_{p_{l-1}})}, \quad \gamma_l = q_l \frac{\varphi(l_l) - \varphi(q_{l+1})}{\varphi(l_l) - \varphi(q_l)},$$

$$\gamma_{p_{l-1}} = |1 + l_{p_{l-1}} + \varphi(q_{p_{l-1}+1}) \gamma(c_{p_{l-1}+1})|^{-1}.$$

Наконец положим $(j = \overline{1, r})$

$$\dot{w}_j = w_j [\gamma(p - j) + \gamma(j + 1 - p) M w_j]^{-1},$$

где M — знак математического ожидания.

Теорема 1. Пусть $\rho \neq 0$, имеют место условие (•) и разбиение (*). Тогда существует предел

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} P\{\dot{w}_j < x_j (j = \overline{1, r})\} = P\{\dot{w}_j < x_j (j = \overline{1, p-1}) | \prod_{n=2}^{m+1} \lim_{\rho \rightarrow 0} P\{\dot{w}_j < x_j (j \in P_n)\},$$

где первый сомножитель правой части равенства есть совместное стационарное распределение $W(x_1, \dots, x_{p-1})$ вектора $(w_1, \dots, w_{p-1})$ в рассматриваемых СМО только с первыми p потоками при $\rho_{p1} = 1$, а предельное распределение случайных величин $\dot{w}_j$ группы P_n ($n = \overline{2, m+1}$) имеет многомерное п. л. — с. $\prod_{j \in P_n} \gamma_j$.

Дадим качественное описание этой предельной теоремы. Пусть

$$z(x, y) = \begin{cases} x, & \text{для схемы А,} \\ y, & \text{для схем В,} \end{cases}$$

тогда (см. (2))

$$M \dot{w}_i = \frac{z(\rho_{i2}, \rho_{i2})}{\rho_{i-1} \rho_i},$$

откуда следует, что $M \dot{w}_i$ при $\rho \neq 0$ ограничено, если $i < p$ и стремится к бесконечности при $i \geq p$.

По неравенству Чебышева: $P\{\dot{w}_k > \varepsilon\} < \varepsilon^{-1} M \dot{w}_k$ ($\varepsilon > 0$), можно заключить, что при $\rho \neq 0$ случайная величина $\dot{w}_k$ ($k = \overline{1, p-1}$) является собственной, чем и объясняется отсутствие нормировки в о. группы P_1 в предельной теореме. А для $\dot{w}_k$ при $k \geq p$ и $\rho \neq 0$ естественной нормировкой служит $M \dot{w}_k$.

Условие (•) и разбиение (*) задают следующее нерархическое при $\rho \neq 0$ распределение загрузки ρ_{nl} среди групп P_n ($n = \overline{1, m+1}$). Загрузка $\rho(P_1)$, отвечающая группе потоков P_1 , составляет определенную часть ρ_{n1} . Она меньше единицы и поэтому потоки группы P_1 не находятся в условиях критической загрузки. Оставшаяся часть $\rho_{n1} - \rho(P_1)$ есть сумма $\rho(P_2) + \dots + \rho(P_{m+1})$, где $\rho(P_n)$ — суммарная загрузка системы k -вызовами ($k \in P_n, n \geq 1$). Причем первый поток

каждой группы P_n ($n > 1$) и только он характеризуется тем, что нагрузка α_n системы вызовами этого потока составляет „существенную“ часть остатка $1 - [\rho(P_1) + \dots + \rho(P_{n-1})]$. Таким образом α_n составляет главную часть $\rho(P_n)$ ($n > 1$). Вспомним, что нагрузка системы k -вызовами есть стационарная вероятность того, что обслуживается k -вызов. Из сказанного следует, что каждый вызов потока группы P_n ($n > 1$) по отношению к вызовам потоков группы P_{n-1} находится в условиях критической загрузки „более высокого порядка“. В частности поток с номером p является первым потоком, находящимся в условиях критической загрузки.

Теперь приведем простые соображения в пользу установленной в теореме асимптотической независимости при $\rho \downarrow 0$ совместных распределений нормированных в. о. вызовов из разных групп.

Обозначим π_i — математическое ожидание длительности i -периода ($i = \overline{1, r}$) (см. (2)). Математическое ожидание той части w_i ($i = \overline{p, r}$), которая определяется величиной w_{i-1} , равно:

$$Mw_{i-1}(1 + a_{i-1}\pi_{i-1}) = \pi_{i-1}^{-1} Mw_{i-1}.$$

Отсюда и из формулы для Mw_i следует, что математическое ожидание указанной составляющей, которая нормирована величиной Mw_i , в пределе при $\rho \downarrow 0$ равно нулю, если $c_i = 0$. В противном случае ($c_i > 0$) вклад в Mw_i величины w_{i-1} в пределе при $\rho \downarrow 0$ имеет порядок Mw_i .

Итак, обращению подлежат п. Л.—С. распределений, соответствующих каждой отдельной группе P_n ($n = \overline{1, m+1}$).

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при $c_i = 0$ ($i = \overline{1, r}$)

$$\lim_{\rho \downarrow 0} P\{\dot{w}_i < x_i, (i = \overline{1, r})\} = \prod_{j=1}^r E(x_j).$$

Здесь

$$E(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Приведем полное обращение п. Л.—С. предельных распределений в случае $r=3$, чему предположим обозначения.

Пусть $(x, y, z \geq 0, a, b \in (0, 1))$

$$D(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^x \int_{v=0}^y uv^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{u}{2} - \frac{v}{4} - \frac{u^2}{4v}\right\} du dv,$$

$$B_n(x, y) = \frac{\sqrt{a(1-a)}}{4\pi} \int_{t=0}^x \int_{u=0}^y t w^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{t(2a-1)}{4(1-a)} - \frac{u}{4a}\right\} dt du.$$

$$\int_{u=t}^{\infty} u(u-t)^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ \frac{u(1-2a)}{4(1-a)} - \frac{u^2 a}{4w} - \frac{t^2(1-a)}{4(u-t)} \right\} du dt dw.$$

$\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения

$$g_a(t) = \chi(t) \sqrt{\frac{2}{\pi(1-a)}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2(1-a)}} - \frac{1}{2(1-a)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\frac{v}{2(1-a)}} dv \right).$$

$\nu \geq 0$ — целочисленный индекс, не зависящий от $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$, имеющий геометрическое распределение: $P\{\nu = k\} = a(1-a)^k$ ($k \geq 0$).

Обозначим $\Phi_a(t) = P\{\xi_1 + \dots + \xi_\nu \leq t\}$ и

$$\Omega_a(y) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^y u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{4a}} \int_0^{\infty} v e^{v - \frac{uv}{4a}} d\Phi_a(v) du.$$

На основе обозначений

$$\tau_{a,b}(y, z) = \chi(z - aby) \exp \left\{ \frac{y}{4} \left(2 - a - \frac{1}{a} \right) - \frac{z}{4b} \right\} (ab)^{-1},$$

$$\tilde{\tau}_a(y, z) = \chi(z - ay) \psi(y(1-a), z - ay) \exp \left\{ \frac{y(2-a) - z}{4} \right\},$$

$$\psi(y, z) = \frac{y}{2z\sqrt{\pi z}} \exp \left(-\frac{y^2}{4z} \right),$$

функции U_a , S_a , C_a , $G_{a,b}$, $Q_{a,b}$ определяются равенствами

$$\frac{\partial^2 U_a(y, z)}{\partial y \partial z} = \tilde{\tau}_a(y, z) \frac{d\Omega_a(y)}{dy}, \quad \frac{\partial^2 S_a(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z} = \tilde{\tau}_a(y, z) \frac{\partial^2 B_a(x, y)}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^3 C_a(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z} = a^{-1} \chi(z - ay) \psi(x, y) \exp \left\{ -\frac{z}{4a} \right\},$$

$$\frac{\partial^2 G_{a,b}(y, z)}{\partial y \partial z} = \tau_{a,b}(y, z) \int_0^{\infty} \psi(y(1-a) + w(1-b), \frac{z}{b} - ay),$$

$$\exp \left\{ \frac{w(1-2b)}{4} \right\} \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{v(1-a)}{2a} \right\} \psi\left(\frac{v}{a}, \frac{y}{a}\right) \psi(v, w) dv dw,$$

$$\frac{\partial^2 Q_{a,b}(x, y, z)}{\partial y \partial z} = \tau_{a,b}(y, z) \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{w(1-2a+2a^2(1-b))}{4} \right\} \psi(x, w),$$

$$\psi\left(a^2(1-b)w + (1-a)y, \frac{z}{b} - ay\right) \int_0^{y/a} \psi(x, v) \psi\left(w(1-a), \frac{y}{a} - v\right) dv dw.$$

Теорема 2. Задаваемое теоремой 1 предельное распределение в случае трех входящих потоков для схем А и В имеет вид ($x_i \geq 0$, $x^{(i)} = (x_1, \dots, x_i)$, $i = \overline{1, 3}$; $a, b \in (0, 1)$):

$$F(x^{(3)}) = \begin{cases} (B_a \overset{2}{*} \Omega_a(x^{(3)})) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = a, \\ D(x_1, x_2) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \\ W(x_1) \cdot (B_a \overset{3}{*} \Omega_a(x_2, x_3)), & \text{если } c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = a, \\ W(x_1) \cdot D(x_2, x_3), & \text{если } c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \\ E(x_1) \cdot (B_a \overset{2}{*} \Omega_a(x_2, x_3)), & \text{если } c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = a, \\ E(x_1) \cdot D(x_2, x_3), & \text{если } c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \\ D(x_1, \min(x_2, x_3)), & \text{если } c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = 1, \\ S_a \overset{2}{*} \overset{3}{*} U_q(x^{(3)}), & \text{если } c_1 = 0, \quad c_2 = a, \quad c_3 = 1, \\ C_a \overset{3}{*} \Omega_a(x^{(3)}), & \text{если } c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = a, \\ Q_{a,b} \overset{2}{*} \overset{3}{*} G_{a,b} \overset{3}{*} \Omega_b(x^{(3)}), & \text{если } c_1 = 0, \quad c_2 = a, \quad c_3 = b, \\ W'(x_1) \cdot E(x_2) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 \neq 0, \quad c_2 = c_3 = 0, \\ W'(x_1, x_2) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_3 = 0, \\ E(x_1) \cdot E(x_2) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 = c_2 = c_3 = 0, \end{cases}$$

где $\overset{i}{*}$ означает свертку по x_i ($i = \overline{2, 3}$).

Доказательство теоремы 1 основано на получаемых введением дополнительных событий п. Л.—С. распределений вектора $(w_1, \dots, w_r)$ при фиксированной нагрузке $\rho_i < 1$. В соответствии с теоремой 1 производится нормировка параметров этих п. Л.—С. и совершается предельный переход, когда $\rho \rightarrow 0$. При этом проводятся асимптотические разложения, которые базируются на приводимых ниже важных (и не только в нашем случае) разложениях в окрестности нуля функций μ_{k+1} , y_k , v_k (³).

Теорема 3. Пусть $\rho \rightarrow 0$ и выполнено условие (*). Тогда ($\operatorname{Re} s > 0$):

1) при $c_k = 0$ ($k = \overline{p, r}$)

$$(\bar{v}_k / \rho_{k-1}) - \mu_k(\bar{v}_k) \sim \varepsilon_k \rho_k b_{k-1} s^2,$$

$$\mu_k(\bar{v}_k) \sim \rho_k^2 (s + b_p s^2),$$

$$y_{k-1}(\bar{v}_k) \sim s \rho_{k-1} \rho_k;$$

2) при $c_k = 0$, $c_{k+1} \neq 0$ ($k = \overline{p, r}$)

$$\mu_{k+1}(v_k) \sim \rho_k \lambda(s),$$

$$v_k - v_{k+1}(v_k) \sim \rho_k^2 (1 - c_{k+1}) \lambda(s),$$

$$y_k(v_k) \sim \rho_{k-1} \rho_k \Lambda(z);$$

3) при $c_k = 0, c_{k+1} = 0$ ($k = \overline{p-1, r}$) вид разложения для μ_{k+1} и ν_{k+1} сохраняется (см. 2)), а

$$y_k(v_k) - v_k \sim \rho_{k-1} \rho_k (1 - z_k) \Lambda(z),$$

причем в 2) и 3) вид разложения для $y_k(v_k)$ сохраняется и при $c_{k-1} = 0$ ($k = \overline{p, r}$).

Здесь обозначено ($k = \overline{p, r}$):

$$\mu_k \sim \rho_{k-1} \rho_k, \quad v_k \sim \rho_{k-1}^2, \quad \Lambda(z) = b_p^{-1} \varphi(\lambda b_p).$$

Доказательство этой теоремы проводится рекуррентно.

При доказательстве теоремы 2 используется формула обращения (23.91) из (*).

Ереванский государственный университет
Ереванский ИИИ математических машин

Է Ա ՊԱՆՈՆԻՅԱՆ, Ե Ս ՋԻՄԻՅԱՆՈՅ

Որոշ $M, |G, |1| \sim$ համակարգերում սպասման մամանակների համատեղ բաշխումն սահմանային բաշխումների դասը կրիտիկական ծանրաբեռնվածության դեպքում

Դիտարկվում են հարաբերական նախապատվություններ և բացարձակի տարրերակներով $M, |G, |1| \sim$ գանգվածային սպասարկման համակարգեր:

Նշանակենք ω_k -ով ($k = \overline{1, r}$) k -պահանջի սպասման ստացիոնար մամանակը FIFO սպասարկման դիսցիպլինայի դեպքում, իսկ ω_{k1} -ով $1, k$ -պահանջներով համակարգի ծանրաբեռնվածությունը:

Դիտարկվող բոլոր համակարգերի համար աշխատանքում ներմուծված են ρ_k ($k = \overline{1, r}$) մեծությունները, որոնք հանդիսանում են ֆունկցիաներ $1, k$ -պահանջների սպասարկման մամանակների առաջին երկու մոմենտներից: Ընթացիկում է ներկայացնում սահմանների գոյությունը:

$$c_k = \lim_{\rho_{k1} \rightarrow 1} \frac{1 - \rho_{k1}}{1 - \rho_{k-1,1}}, \quad \lim_{\rho_{k1} \rightarrow 1} \rho_{k2} < \infty.$$

Դիցուք $c_1, c_2, \dots, c_r$ թվերի շարքում c_p թվերը ($i = \overline{1, m}, m = \overline{1, r}$) և միայն նրանք համասար են զերոյի:

Նշանակենք ($u = \overline{1, m}; p_{m+1} = 1 = r$)

$$X^{(u)} = (x_{p_u}, \dots, x_{p_{u+1}-1}), \quad X^{(0)} = (x_1, \dots, x_{p_1-1}).$$

Թեև որեւէ բոլոր դիտարկվող համակարգերի համար գոյություն ունի սահման

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_i < x_j, \omega_j < x_j M \omega_j, (i = \overline{1, p_1-1}; j = \overline{p_1, r})) = \prod_{u=0}^{\infty} S_u(x^{(u)}),$$

որտեղ $S_u(x^{(u)})$ -ները՝ բազմադասի բաշխման ֆունկցիաներ են:

Հնդիանուր դեպքում գտնված են $S_u(x^{(u)})$ -երի ($u = \overline{0, m}$) Լապլաս-Ստիլ-տեսի ձևափոխությունները: Մասնավոր $r=3$ դեպքում ստացված են հենց այդ բաշխման ֆունկցիաները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ J. F. C. Kingman, Proc. Camb. Phil. Soc., 57 (1961).
- ² Б. В. Гнеденко и др., Приоритетные системы обслуживания. Изд. МГУ, М., 1973.
- ³ Т. А. Азларов, Я. М. Хусанов, Изв. АН Уз. ССР, сер. физ.-мат. наук, № 6 (1974).
- ⁴ Я. М. Хусанов, О предельных распределениях для длительности времени ожидания приоритетных систем в условиях большой загрузки, Рукопись деп. в ВИНТИ 25 окт. 1977 г., 4106—77 Деп.
- ⁵ Э. А. Даниелян, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат., т. 10, № 3 (1975).
- ⁶ В. А. Диткин, 4 П. Прудников, Справочник по операционному исчислению, «Высшая школа», М., 1965.

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Г. А. Попов

Об одной предельной теореме для приоритетных систем при единичной загрузке

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 20/VII 1979)

Тематика, посвященная асимптотическому изучению систем массового обслуживания в условиях загрузки, близкой или равной единице, начата Ю. В. Прохоровым ⁽¹⁾, Книгмяном ⁽²⁾ и продолжается в работах А. А. Боровкова ⁽³⁾, Иглегарта ⁽⁴⁾ и др.

Особого внимания заслуживает случай единичной загрузки. Известно, что при загрузке, равной единице, период званности π однолинейной системы с ожиданием является при довольно общих предположениях собственной случайной величиной (сл. в.). С другой стороны, при $t \rightarrow +\infty$ виртуальное время ожидания (в. в. о.) в момент t стремится при единичной загрузке к $+\infty$ ⁽⁵⁾.

Возникает вопрос об асимптотическом поведении условного в. в. о. в момент t при условии $\pi > t$, когда $t \rightarrow +\infty$. Заметим, что вероятность условия в нашем случае стремится при $t \rightarrow +\infty$ к нулю.

Рассматриваются одноканальные системы с ожиданием, с r независимыми пуассоновскими потоками $L_1, L_2, \dots, L_r$ вызовов при дисциплинах относительного приоритета и разновидностей абсолютного, описание которых можно найти в ⁽⁶⁾. Внутри каждого потока вызовов принята дисциплина *FIFO* (первым пришел — первым обслужен).

Суммарный поток 1-вызовов, ..., k -вызовов назовем потоком $\overline{1, k}$ -вызовов ($k = \overline{1, r}$). Вызовы потока L_i назовем i -вызовами ($i = \overline{1, r}$).

Длительности обслуживания вызовов из потока L_i ($i = \overline{1, r}$), интенсивность поступления которых равна $\alpha_i > 0$, не зависят от процесса поступления, независимы в совокупности и имеют функцию распределения (ф. р.) $B_i(t)$, $B_i(+0) = 0$.

Разновидности абсолютного приоритета следующие: схема В1 — дообслуживание прерванного вызова, В2 — потеря, В3 — обслуживание заново. Относительный приоритет назовем схемой А.

Пусть в момент $t = 0$, в который в системе отсутствуют вызовы,

время $u > 0$ прибор заперт для обслуживания, т. е. за $[0, u)$ вызовы накапливаются, но не обслуживаются. Обозначим через $\pi_k(u)$ первый после u момент освобождения системы от $\overline{1, k}$ -вызовов.

Пусть $\varpi_k^{(u)}(t)$ есть в. в. о. k -вызова в момент t .

Введем следующие обозначения

$$F_k(x, t) = P\{\varpi_k^{(u)}(t) < x, \pi_k(u) > t\},$$

$$R_k(x, t) = P\{\varpi_k^{(u)}(t) < x/\pi_k(u) > t\} = \frac{F_k(x, t)}{F_k(+\infty, t)},$$

$$f_k(s, \mu) = \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^\infty e^{-sx} d_x F_k(x, t) d\mu, \quad \pi_k^{(u)}(u) = M e^{-\pi_k(u)},$$

В дальнейшем используются сл. в.: k -период (π_k), kk -период (π_{kk}) и k -цикл (h_k), определения и изучение которых можно найти в (3).

Положим ($k = \overline{1, r}$; $\operatorname{Re} s \geq 0$):

$$P_k(t) = P\{\pi_k < t\}, \quad z_k = a_1 + \dots + a_k, \quad z_0 = 0,$$

$$y_{k+1}(s) = s + z_k - a_k \cdot M e^{-s z_k}, \quad y_k(s) = s + a_k - a_k \cdot M e^{-s z_k},$$

$$x_k(s) = s - a_k + a_k \cdot M e^{-s z_k},$$

где M — знак математического ожидания.

При изучении систем массового обслуживания важную роль играет загрузка системы. Под загрузкой ρ_k системы $\overline{1, k}$ -вызовами понимается среднее время, затрачиваемое из единицы времени прибора на обслуживание $\overline{1, k}$ -вызовов, поступающих в среднем за единицу времени. Как величины ρ_k ($k = \overline{1, r}$), так и величины ρ_{kk} — аналоги вторых моментов обслуживания, помноженных на интенсивности их потоков, найдены в (3).

Приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$f_k(s, \mu) = (y - x_k(s))^{-1} [e^{-\mu z_k} - e^{-\mu z_k} - 1] \quad (k = \overline{1, r}; \operatorname{Re} s \geq 0, \operatorname{Re} \mu > 0).$$

Пусть выполнено следующее условие: (1_k) в схемах А и В1 для $\beta_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB_i(t)$ ($i = \overline{1, k}$) при $s \rightarrow 0$ ($\operatorname{Re} s \geq 0$) справедливо представление

$$\beta_i(s) = 1 - \beta_{i1}s + \alpha_i^{(2)}s^2(1 + O(1)) \quad (1 < i \leq 2), \quad (1)$$

где β_{i1} и $\alpha_i^{(2)}$ — константы;

в схемах В2 и В3 (1) имеет место лишь при $i = 1$.

Положим ($k = \overline{1, r}$):

$$\rho_k = 1 - \rho_{k1}, \quad \gamma_k = \min(\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{kr}), \quad B_k = \sum_{\substack{0 \leq i_1, \dots, i_r \leq \gamma_k}} a_i x_i^{(p)}.$$

Для схем В2 и В3 полагаем ($k = \overline{2, r}$): $B_k = B_1$.

Лемма 2. Для всех рассматриваемых схем при $s \rightarrow 0$ ($\operatorname{Re} s \geq 0$) имеем:

а) при $\rho_{k1} < 1$

$$\mu_{k+1}(s) = \rho_k^{-1} s - \rho_k^{-1} A^{-1} C_k s^{1+\gamma_k} (1 + o(1)),$$

$$y_k(s) = (\rho_{k-1}/\rho_k) s - \rho_k^{-1} (1 + \gamma_k) [\rho_{k-1} C_k - \rho_k C_{k-1} \chi(\gamma_k - \gamma_{k-1})] s^{1+\gamma_k} (1 + o(1)),$$

где ($i = \overline{1, k}$)

$$C_i = \begin{cases} B_i, & \text{если } \gamma_i < 2, \\ 2\rho_{i2}, & \text{если } \gamma_i = 2, \end{cases} \quad C_0 = 0,$$

а $\chi(t)$ есть функция Хевисайда

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

б) при $\rho_{k1} = 1$

$$\mu_{k+1}(s) = C_k^{-1} \gamma_k s^{1+\gamma_k} (1 + o(1)).$$

$$y_k(s) = \rho_{k-1} \cdot C_k^{-1} \gamma_k s^{1+\gamma_k} (1 + o(1)).$$

Доказательство основного результата базируется на утверждении (ср. с леммой Лебега — Римана (4)):

Лемма 3. Пусть функция $g(x, s)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $s \in [0, \infty)$ непрерывна по совокупности переменных (x, s) и пусть существует функция $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx < +\infty, \quad \sup_{s \in [0, \infty)} |g(x, s)| \leq f(x).$$

Если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup |g(x, s)| = 0,$$

то равномерно по $s \in [0, \infty)$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} g(x, s) dx = 0.$$

Для формулировки основных результатов положим ($k = \overline{1, r}$):

$$D_k = \rho_{k-1}^{-1} C_k^{0 \gamma_k}.$$

Теорема 1. Пусть $\rho_{k1} = 1$ и для всех рассматриваемых схем выполнены условия (1_k). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_k(D_k t^{2/\gamma_k} x, t) = R_k(x),$$

где $(\operatorname{Re} s \geq 0)$

$$\int_0^\infty e^{-sx} dR_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\gamma_k)} \int_0^\infty \frac{\mu^{1/\gamma_k} e^{-\mu}}{\mu + s^{1/\gamma_k}} d\mu,$$

а $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и μ есть сл. в. с $M\mu^{1+1/\gamma_k} < \infty$. Тогда утверждение теоремы 1 опять имеет место.

Следствие 2. При $r=1$ из теоремы 1 автоматически вытекает основной результат работы (7), доказанный при более сильных ограничениях, чем условия теоремы 1.

Теорема 2. а) Функция $R_k(x)$ при $\gamma_k=2$ есть распределение Рэлея

$$R_k(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^2/4), & \text{если } x \geq 0, \\ 0 & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

а при $1 < \gamma_k < 2$ ф. р. $R_k(x)$ равна

$$R_k(x) = \frac{\gamma_k}{2\Gamma(\gamma_k^{-1})} \int_0^\infty G_{\gamma_k/2}(xt^{-2/\gamma_k}) dF_k(x),$$

где

$$F_k(x) = \int_0^\infty e^{-u^{1/\gamma_k}} |1 - \cos(u^{1/\gamma_k} t)| du,$$

а $G_a(x) (0 < a < 1)$ есть стандартный положительный устойчивый закон с показателем a .

б) Момент порядка $\alpha > 0$ предельного распределения $R_k(x)$ ($k = \overline{1, r}$) имеет вид

$$\int_0^\infty x^\alpha dR_k(x) = \begin{cases} \Gamma(1 - \gamma_k^{-1}) \Gamma(m(\alpha/\gamma_k, \gamma_k^{-1}))^{-1} \frac{\sin(\pi/\gamma_k)}{\sin(\alpha\pi/\gamma_k)}, & \text{если } 0 < \alpha < \gamma_k, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq \gamma_k. \end{cases}$$

Здесь $m(\beta, a)$ момент порядка β от ф. р. $G_a(x)$.

Теорема 3. Если выполнены условия (1_k) и $\gamma_k \neq 2$, то справедливы асимптотические при $t \rightarrow +\infty$ равенства:

а) при $\rho_{k1} < 1$

$$1 - \Pi_k(t) = \frac{\rho_k^{-(\gamma_k+1)} \cdot C_k}{\pi \rho_k} |\sin(\pi\gamma_k)| \Gamma(\gamma_k) t^{-\gamma_k} (1 + o(1)),$$

б) при $\rho_{k1} = 1$

$$1 - \Pi_k(t) = \frac{\sigma_k^{-1} C_k^{-1} \Gamma_k}{\Gamma(1 - \gamma_k^{-1})} t^{-1/\gamma_k} (1 + o(1)).$$

Ереванский государственный университет
Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՆԱՆԻԿՅԱՆ, Գ. Ա. ՊՈՊՈՎ

Լինել սահմանային բևեռների մոտին նախապատվությամբ համակարգերում
միավոր ծանրաբեռնվածության դեպքում

Դիտարկվում են հարաբերական և տարրերակներով բացարձակ նախա-
պատվությամբ $\bar{M}_r[\bar{G}_r]|\infty$ համակարգեր F/F_0 դիսցրիպլինայի դեպքում:

Դիցուք $\pi_k(u) (k = \overline{1, r}, u > 0)$ $\overline{1, k}$ — պահանջների և ուղացումով գրադ-
վածություն պարբերությունն է, իսկ $w_k^{(u)}(t)$ -ն t պահին k -պահանջի վեր-
սույն սպասման ժամանակը: Նշանակենք

$$R_k(x, t) = P\{w_k^{(u)}(t) < x / \pi_k(u) > t\},$$

ենթադրենք տեղի ունի հետևյալ վերլուծությունը ($i = \overline{1, r}, s \downarrow 0, s > 0$)

$$\beta_i(s) = 1 - \beta_{i1}s + B_i s^{\gamma_i} (1 + o(1)) \quad (1 < \gamma_i \leq 2),$$

որտեղ $\beta_i(s)$ -ը i -պահանջի սպասարկման ժամանակի բաշխման Լապլաս-
Պատիտեսի ձևափոխությունն է, հիմնական արդյունքը հետևյալն է:

Թեորեմ. Դիցուք առաջին k ճոսքերի գումարյալ ծանրաբեռնվա-
ծությունը հավասար է մեկի: Այդ դեպքում գոյություն ունի սահման

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_k(D_k t^{1/\gamma_k} x, t) = R_k(x),$$

որտեղ՝

$$\int_0^\infty e^{-sx} dR_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\gamma_k)} \int_0^\infty \frac{\mu^{\gamma_k} e^{-\mu}}{\mu + s^{\gamma_k}} d\mu, \quad \gamma_k = \min(\gamma(1), \dots, \gamma(k))$$

իսկ $\Gamma(x)$ -ը՝ Էյլերի գամմա-ֆունկցիան է:

Աշխատանքում պահված են նաև $R_k(x)$ և D_k մեծությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТИРОВАННОЕ

- ¹ Ю. В. Прохоров, Лит. мат. сборник, № 3, 1963 ² J. F. Kingman, The heavy traffic approximation in the theory of queues, Proc. symp. congestion theory. The Univ. of North Carolina Press, 1955. ³ А. А. Боровков, Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, «Наука», М., 1972. ⁴ D. L. Iglehart, W. Whitt, Adv. appl. prob., vol. 2, № 1 (1970); vol. 2, № 2 (1970). ⁵ Э. А. Даниелян, Изв. АН Арм. ССР. Математика, № 3, 1975. ⁶ В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, «Мир», М., 1967, ⁷ Х. А. Арипов, А. В. Печинкин, Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания, т. 2, МГУ, 1976.

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

Об инвариантных мерах на однородных пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 17/IX 1979)

Настоящая работа посвящена перенесению на однородные пространства следующих фактов о мере Лебега.

Теорема (Штейнгауз (¹)). Пусть E — измеримое множество положительной лебеговой меры в R^1 . Тогда разностное множество $E - E$ содержит окрестность нуля.

Теорема (Хадвигер (²)). Пусть E — измеримое множество положительной лебеговой меры в R^k . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и натурального числа $n > 1$ существует такая окрестность нуля V , что для любого множества $A \subseteq V$, состоящего из n точек,

$$m\{z \in R^k : z + A \subseteq E\} > (1 - \varepsilon)m(E),$$

где m — мера Лебега в R^k .

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, G — локально компактная группа, действующая слева непрерывно и транзитивно в X . Предположим еще, что при любом $x \in X$ $g \mapsto gx$ является открытым отображением G на X . Тогда говорят, что X есть однородное пространство для G . Пусть $\theta \in X$ — произвольная (в дальнейшем фиксированная) точка, G^θ — изотропная подгруппа точки θ , т. е. $G^\theta = \{g \in G : g\theta = \theta\}$, и μ — левая мера Хаара группы G^θ . Согласно теореме Рисса, каждой положительной регулярной борелевской мере ν на X соответствует положительная регулярная борелевская мера μ на G такая, что

$$\int_X d\nu \int_{G^\theta} f(gs) d\mu(s) = \int_G f d\mu \quad (1)$$

для любой непрерывной на G функции f с компактным носителем. При этом ((³), стр. 127) ν будет G -инвариантной тогда и только тогда, когда μ является левой мерой Хаара группы G .

Пусть $B, C \subseteq X$. Следуя ((⁴)), положим

$$B^{-1}C = U \{gC : g \in G, \theta \in gB\} \quad (2)$$

Заметим, что изменение выбора точки θ вызывает сдвиг множества $B^{-1}C$ и переход G^θ к сопряженной подгруппе. Заметим также, что в том случае, когда G действует в G как группа левых сдвигов и θ совпадает с единицей G , то $B^{-1}C$ приобретает обычный групповой смысл.

Всюду в дальнейшем предполагается, что изотропная подгруппа G^θ компактна и $\mu_\theta(G^\theta) = 1$. Тогда из условия Вейля следует, что на X существует положительная регулярная G -инвариантная борелевская мера, определенная с точностью до постоянного множителя.

Обозначим $\varphi(g) = g\theta$, $g \in G$. Ниже доказываются две теоремы. В теореме 1 устанавливаются некоторые свойства инвариантной меры, которые используются при доказательстве теоремы 2.

Теорема 1. Пусть λ и μ — положительные регулярные борелевские меры соответственно на X и G , связанные соотношением (1). Тогда

1) если $K \subset X$ — компактное множество, то $\varphi^{-1}(K)$ также компактно и $\mu(\varphi^{-1}(K)) = \lambda(K)$;

2) если группа G θ -компактна, то $\mu(\varphi^{-1}(E)) = \lambda(E)$ для любого измеримого $E \subset X$.

Доказательство. Пусть $C \subset G$ — компактное множество, такое, что $\varphi(C) = K$ ((¹), стр. 28). Тогда $\varphi^{-1}(K) = CG^\theta$. Таким образом $\varphi^{-1}(K)$ является произведением компактных множеств и поэтому компактно.

Пусть, далее, χ_E — характеристическая функция множества E . Тогда в силу компактности $\varphi^{-1}(K)$ имеем $\chi_{\varphi^{-1}(K)} \in L^1(\mu)$. Отсюда, в свою очередь, следует равенство ((¹), стр. 130)

$$\int_X d\lambda \int_{G^\theta} \chi_{\varphi^{-1}(K)}(gs) d\mu_\theta(s) = \int_G \chi_{\varphi^{-1}(K)} d\mu = \mu(\varphi^{-1}(K)). \quad (3)$$

С другой стороны имеем

$$g^{-1}\varphi^{-1}(K) \cap G^\theta = \begin{cases} G^\theta & \text{если } g\theta \in K \\ \emptyset & \text{если } g\theta \notin K. \end{cases} \quad (4)$$

Действительно. Пусть $g\theta \in K$. Тогда $g \in \varphi^{-1}(K)$ и для любого $s \in G^\theta$ имеем $gs\theta = g\theta \in K$, откуда $gs \in \varphi^{-1}(K)$. Поэтому $s = g^{-1}gs \in g^{-1}\varphi^{-1}(K)$, т. е. $G^\theta \subset g^{-1}\varphi^{-1}(K)$. Обратно, если $g^{-1}\varphi^{-1}(K) \cap G^\theta \neq \emptyset$, то выполняется равенство $g^{-1}t = s$, где $t \in \varphi^{-1}(K)$, $s \in G^\theta$. Тогда $g = ts^{-1}$, $g\theta = ts^{-1}\theta = t\theta \in K$.

Теперь, с помощью (4), левую часть равенства (3) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_X d\lambda \int_{G^\theta} \chi_{\varphi^{-1}(K)}(gs) d\mu_\theta(s) &= \int_X d\lambda \int_{G^\theta} \chi_{g^{-1}\varphi^{-1}(K)}(s) d\mu_\theta(s) = \\ &= \int_X \mu_\theta(g^{-1}\varphi^{-1}(K) \cap G^\theta) d\lambda = \int_X \chi_K(g\theta) d\lambda = \lambda(K). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (3) и (5) получаем равенство $\mu(\varphi^{-1}(K)) = \lambda(K)$.

Таким образом 1) доказано. Перейдем к доказательству 2).

Пусть группа G α -компактна. Тогда имеем

$$\mu(\varphi^{-1}(E)) = \sup\{\mu(C) : C \subset \varphi^{-1}(E), C \text{ — компактно}\}. \quad (6)$$

В силу доказанного утверждения 1) из (6) получим

$$\mu(C) = \mu(\varphi^{-1}(C\theta)) = \lambda(C\theta) \leq \lambda(E) \quad \text{при} \quad C \subset \varphi^{-1}(E). \quad (7)$$

Из (6) и (7) получим

$$\mu(\varphi^{-1}(E)) \leq \lambda(E). \quad (8)$$

С другой стороны имеем

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K \subset E, K \text{ — компактно}\}. \quad (9)$$

Еще раз применяя 1), из (9) получим

$$\lambda(K) = \mu(\varphi^{-1}(K)) \leq \mu(\varphi^{-1}(E)) \quad \text{при} \quad K \subset E. \quad (10)$$

Из (9) и (10) получим

$$\lambda(E) \leq \mu(\varphi^{-1}(E)). \quad (11)$$

Наконец из (8) и (11) получим равенство $\mu(\varphi^{-1}(E)) = \lambda(E)$.

Теорема 2. Пусть λ — положительная регулярная G -инвариантная борелевская мера на X и μ — левая мера Хаара на G , связанная с λ соотношением (1). Пусть $E \subset X$ — измеримое множество с $0 < \lambda(E) < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и натурального числа $n > 1$ существует такая окрестность W точки θ , что для любого множества $A \subset W$, состоящего из n точек,

$$\mu\{g \in G : gA \subset E\} > (1 - \varepsilon)\lambda(E).$$

Доказательство. В силу регулярности меры λ можно подобрать такое компактное множество $K \subset X$, чтобы

$$K \subset E \quad (12)$$

$$\lambda(K) > \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon/2} \lambda(E). \quad (13)$$

В силу теоремы 1 множество $\varphi^{-1}(K)$ компактно и $\mu(\varphi^{-1}(K)) = \lambda(K)$. Возьмем такое открытое множество $O \subset G$, чтобы

$$\varphi^{-1}(K) \subset O, \mu(O) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{4n}\right) \mu(\varphi^{-1}(K)). \quad (14)$$

Далее, возьмем симметричную окрестность V единицы G , такую, чтобы выполнялись условия

$$\varphi^{-1}(K)V \subset O; \quad (15)$$

$$\Delta(g) > 1 - \frac{\varepsilon}{4n} \quad \text{при} \quad g \in V, \quad (16)$$

где Δ — модулярная функция группы G .

Наконец, положим $W = V\theta$. Так как $g \rightarrow g\theta$ есть открытое отображение, то W является окрестностью точки θ в X . Покажем, что построенная окрестность W является искомой. Пусть $A \subset W$, $A = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ $x_i = g_i\theta$, где $g_i \in V$ и

$$\{g \in G : gA \subset K\} = \{g \in G : g g_i \in \varphi^{-1}(K), i = 1, \dots, n\} = \bigcap_{i=1}^n \varphi^{-1}(K) g_i^{-1} \quad (17)$$

Применив последовательно (12), (17), (15), (14), (16) и (13), будем иметь

$$\begin{aligned} \mu\{g \in G : gA \subset E\} &\geq \mu\{g \in G : gA \subset K\} = \mu\left(\bigcap_{i=1}^n \varphi^{-1}(K) g_i^{-1}\right) = \\ &= \mu\left(O \setminus \bigcup_{i=1}^n (O \setminus \varphi^{-1}(K) g_i^{-1})\right) = \mu(O) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^n (O \setminus \varphi^{-1}(K) g_i^{-1})\right) \geq \\ &\geq \mu(O) - \sum_{i=1}^n \mu(O \setminus \varphi^{-1}(K) g_i^{-1}) = -(n-1)\mu(O) + \sum_{i=1}^n \mu(\varphi^{-1}(K) g_i^{-1}) = \\ &= -(n-1)\mu(O) + \sum_{i=1}^n \Delta(g_i^{-1})\mu(\varphi^{-1}(K)) > \\ &> -(n-1)\left(1 + \frac{\varepsilon}{4n}\right)\mu(\varphi^{-1}(K)) + n\left(1 - \frac{\varepsilon}{4n}\right)\mu(\varphi^{-1}(K)) > \\ &> \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(\varphi^{-1}(K)) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(K) > (1-\varepsilon)\mu(E), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Следствие. Если $E \subset X$ — измеримое множество с $0 < \mu(E) < \infty$, то $E^{-1}E$ содержит окрестность θ .

Действительно. Пусть W — окрестность θ , построенная согласно теореме 2 при $n=2$. Возьмем произвольную точку $w \in W$. Тогда множество $\{g \in G : gw \in E, g\theta \in E\}$ имеет положительную меру и поэтому не пусто. Пусть $gw \in E$ и $g\theta \in E$ при некотором $g \in G$. Тогда $w \in g^{-1}E$ и $\theta \in g^{-1}E$. Согласно (2) это означает, что $w \in E^{-1}E$.

Ереванский государственный
университет

ՀԱՄԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Համասեռ տարածությունների վրա տրված ինվարիանտ չափերի մասին

Ապացուցվում է, որ կոմպակտ իզոտրոպ ենթախումբ ունեցող համասեռ տարածությունների վրա տրված ինվարիանտ չափերն օժտված են (երեզի չափի որոշ հատկություններով) ծույց է տրված, որ կամայական կետն ունի շրջակայք, որտեղից վերցրած կետերի վերջավոր բազմությունը կարելի է նույն ձևափոխությունով արտապատկերել տրված դրական չափի բազմության

մեջ: Այդ ձևափոխությունների բազմության Հաարի չափի համար ստացված է ներքևից գնահատական:

Նշված արդյունքից որպես մասնավոր դեպքեր ստացվում են Շտեյն-հաուզի և Հադվիգերի թեորեմները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ H. Steinhaus, Fund. Math., 1(1920). ² H. Hadwiger, Comment. Math. Helvet., 19 (1946/47). ³ H. Federer, Geometric measure theory, Springer, 1969. ⁴ W. W. Comfort, Hugh Gordon, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 99, No. 1 (1961). ⁵ А. Нейль, Интерпретирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Д. О. Мурадян, Т. Э. Пилипосян

Минимальные нумерации вершин прямоугольной решетки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшавским 28 IX 1979)

Необходимость нахождения минимальных нумераций вершин графа возникает при решении ряда задач дискретной математики. В частности, в (1) указывается необходимость нахождения минимальных нумераций вершин единичного n -мерного куба при рассмотрении некоторых задач в теории кодов и предлагается соответствующий алгоритм. В (2) изучаются некоторые свойства минимальных нумераций графа, сводя дискретную задачу к ее непрерывному аналогу. В (3) рассматриваются нумерации прямоугольной решетки, при которых минимизируется максимум абсолютных величин разностей номеров смежных вершин.

Все неопределяемые в работе понятия можно найти в монографии (4).

Пусть $G(X, U)$ — граф со множеством вершин X ($|X| = N$) и множеством ребер U . Каждое взаимно-однозначное соответствие $\varphi: X \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ называется нумерацией графа G , а $\varphi(x)$ — номером вершины x . Множество всевозможных нумераций графа G обозначим через Φ_G .

Число $E(\varphi, G) = \sum_{(x, y) \in U} |\varphi(x) - \varphi(y)|$ называется длиной нумерации φ , а число $E(G) = \min_{\varphi \in \Phi_G} E(\varphi, G)$ — длиной графа G . Нумерация φ_0 называется минимальной, если $E(\varphi_0, G) = E(G)$. Множество всех минимальных нумераций графа G обозначим через Φ_G^E .

Пусть $\varphi \in \Phi_G$; $C, B \subseteq X$; $C \cap B = \emptyset$; $k = \overline{1, N}$. Введем следующие обозначения:

$$m(C, B) = |\{(x, y) / (x, y) \in U; x \in C; y \in B\}|;$$

$$m(B) = m(B, X \setminus B);$$

$$A_k^* = \{\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(k)\};$$

$$\Delta_{\varphi}(B) = |\{(x, y) / (x, y) \in U; x \in B; y \notin B; \varphi(x) < \varphi(y)\}| + |\{(x, y) / (x, y) \in U; x \in B; y \notin B; \varphi(x) > \varphi(y)\}|;$$

$$\delta_{\varphi}(B) = \frac{\Delta_{\varphi}(B)}{|B|}.$$

Из (1) известно, что

$$E(\varphi, G) = \sum_{k=1}^N \omega(A_k^{\varphi}). \quad (*)$$

О п р е д е л е н и е. Множество $A \subset X$ назовем сплошным относительно нумерации φ , если $\max_{x \in A} \varphi(x) - \min_{x \in A} \varphi(x) = |A| - 1$.

В дальнейшем, если будет ясно, относительно какой нумерации A является сплошным, скажем, что A — сплошное.

О п р е д е л е н и е. Скажем, что множество $B \subset X$ при нумерации φ непосредственно следует за множеством $A \subset X$, если A, B — сплошные и $\min_{x \in B} \varphi(x) = \max_{x \in A} \varphi(x) + 1$.

О п р е д е л е н и е. Скажем, что множества $A, B \subset X$ независимы друг от друга, если $\omega(A, B) = 0$.

Л е м м а. Если множества $A, B \subset X$ независимы друг от друга и при нумерации $\varphi \in \Phi_0^r$ B непосредственно следует за A , то

$$\delta_{\varphi}(A) \leq \delta_{\varphi}(B).$$

Граф со множеством вершин $\Pi^{m,n} = \{x_{i,j} / i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}$ назовем прямоугольной решеткой (и обозначим через $P^{m,n}$), если вершины $x_{i,j}, x_{k,e}$ смежны тогда и только тогда, когда $|i - k| + |j - e| = 1$.

Пусть $1 \leq k \leq p \leq m, 1 \leq e \leq q \leq n$. Обозначим

$$\Pi_{k,e}^{p,q} = \{x_{i,j} / x_{i,j} \in \Pi^{m,n}; k \leq i \leq p; e \leq j \leq q\}.$$

О п р е д е л е н и е. Множество $\Pi_{k,e}^{p,q}$ назовем открытой полустрокой (соответственно — закрытой полустрокой и i -ой строкой), если $d = 1, c < m$ (соответственно $d > 1, c = m$ и $d = 1, c = m$).

Аналогично определяются открытые и закрытые полустолбцы и j -ый столбец.

О п р е д е л е н и е. Множество $A \subset \Pi^{m,n}$ назовем сжатым относительно вершины $x_{1,1}$ (соответственно — относительно $x_{1,n}, x_{m,1}, x_{m,n}$), если из $x_{i,j} \in A$ следует, что $\Pi_{1,1}^{i,j} \subseteq A$ (соответственно — $\Pi_{1,n}^{i,j} \subseteq A, \Pi_{m,1}^{i,j} \subseteq A, \Pi_{m,n}^{i,j} \subseteq A$).

О п р е д е л е н и е. Нумерацию $\varphi \in \Phi_{p,m,n}^r$ назовем сжатой относительно вершины $x_{1,1}$ (соответственно — относительно $x_{1,n}, x_{m,1}, x_{m,n}$), если для любого $k = \overline{1, m}$ множество A_k^{φ} сжато относительно вершины $x_{1,1}$ (соответственно — относительно $x_{1,n}, x_{m,1}, x_{m,n}$).

Т е о р е м а 1. Если $\varphi \in \Phi_{p,m,n}^r$, то для любого $k = \overline{1, m}$ множество A_k^{φ} сжато относительно одной из вершин

$$x_{1,1}, x_{1,n}, x_{m,1}, x_{m,n}$$

Теорема 2. Для каждой из вершин $x_{1,1}, x_{1,n}, x_{m,1}, x_{m,n}$ существует минимальная нумерация, сжатая относительно этой вершины.

Теоремы 1, 2 можно доказать, используя идею доказательств аналогичных утверждений из (2) и соотношения (*).

Мы покажем, что каждая минимальная нумерация, сжатая относительно вершины $x_{1,1}$, разбивает $\Pi^{m,n}$ на подмножества A_i ($i = \overline{1, 7}$), причем A_{i+1} непосредственно следует за A_i (рис. 1), и дадим структуру нумераций множеств A_i . Кроме того, опишем класс минимальных нумераций.

Теорема 3. Пусть $n < m$. Нумерация $\tau \in \Phi_{m,n}$ минимальна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

А) Для каждого $k = \overline{1, m}$ A_k^* является сжатым относительно одной из вершин $x_{1,1}, x_{1,n}, x_{m,1}, x_{m,n}$;

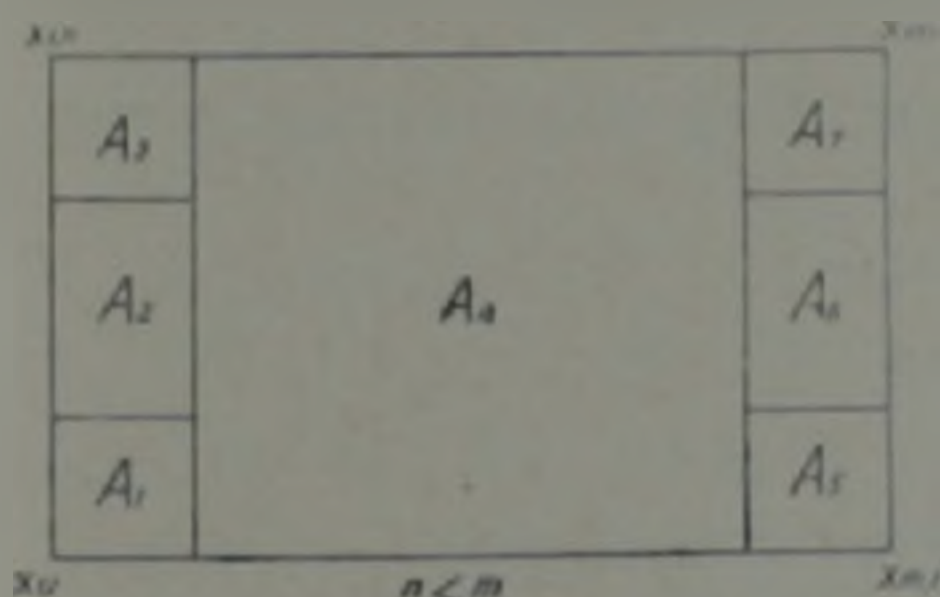


Рис. 1

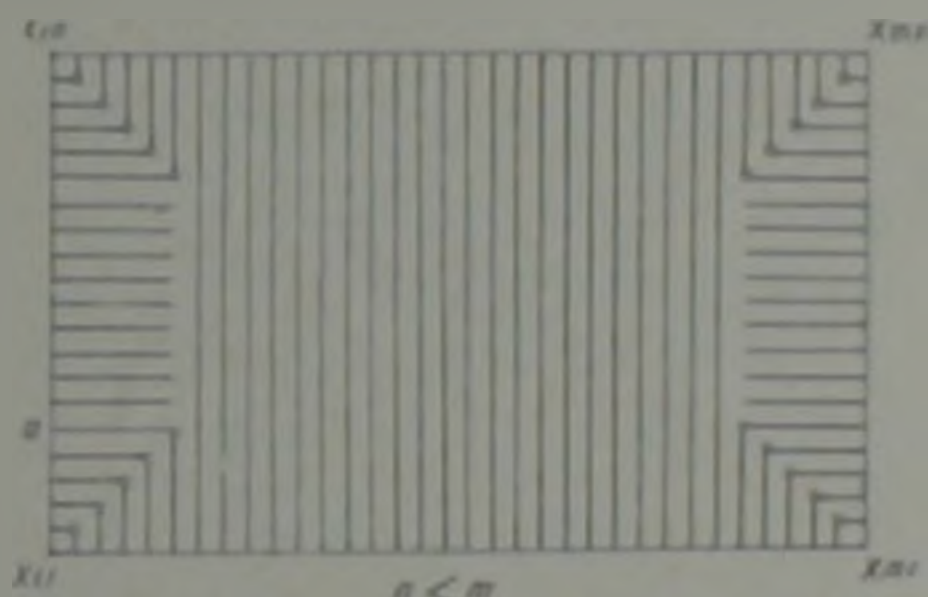


Рис. 2

Б) Для каждого $i = \overline{1, a}$ множества $\Pi_{1,1}^{i,1}, \Pi_{1,n-i+1}^{i,n-i+1}$ — сплошные, причем сплошными являются также множества $\Pi_{1,1}^{i,1}$ либо $\Pi_{1,n-i+1}^{i,n-i+1}$ либо $\Pi_{1,n-i+1}^{i,n-i+1}$ либо $\Pi_{1,1}^{i,1}$;

В) Для каждого $i = \overline{1, a}$ множества $\Pi_{m-i+1,1}^{m-i+1,1}, \Pi_{m-i+1,n}^{m-i+1,n}$ — сплошные, причем сплошными являются также множества

$$\Pi_{m-i+1,1}^{m-i+1,1} \text{ либо } \Pi_{m-i+1,n}^{m-i+1,n} \text{ и } \Pi_{m-i+1,1}^{m-i+1,1} \text{ либо } \Pi_{m-i+1,n}^{m-i+1,n}$$

Г) Для любых $i = \overline{a+1, n-a}, j = \overline{a+1, n-a}, k = \overline{a+1, m-a}$ множества $\Pi_{1,1}^{i,1}, \Pi_{m-i+1,1}^{m-i+1,1}, \Pi_{k,1}^{k,1}$ являются сплошными, где

$$\left| n - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}} \right| \leq a, \bar{a} \leq \left| n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}} \right|$$

Нумерации, удовлетворяющие условиям А), Б), В), Г), изображены схематично на рис. 2. Фактически нумерация минимальна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию А) и множество вершин, лежащих на каждом отрезке, помеченном жирной линией на

рис. 2, является сплошным, причем помеченные кружком принадлежат одному из смежных отрезков.

Мы приведем ряд утверждений, из которых последует справедливость теоремы 3.

Обозначим

$$X_1 = \Pi_{1,2}^{1,a-1} \cup \Pi_{1,1}^{m-1,1}; \quad X_2 = \Pi_{2,a}^{a-1,a} \cup \Pi_{2,2}^{m-1,2}; \quad X_3 = \Pi_{2,2}^{m-1,a-1}.$$

Утверждение 1. Пусть φ минимальна, сжата относительно вершины $x_{1,1}$ и $A \subset X_3$. Тогда

а) если $x \in X_1$ и A непосредственно следует за x , то $|x| \cup A$ — открытая полустрока, либо открытый полустолбец;

б) если $x \in X_2$ и x непосредственно следует за A , то $A \cup \{x\}$ — закрытая полустрока, либо закрытый полустолбец.

Следствие. Если закрытая полустрока (закрытый полустолбец) B непосредственно следует за открытой полустрокой (открытым полустолбцом) A , то $A \cup B$ — строка (столбец).

В следующих утверждениях предположим, что $\varphi \in \Phi_{p,m,n}^a$ и сжата относительно вершины $x_{1,1}$. Кроме того, положим $v = \min_{x \in X_1} \varphi(x)$, $h = \varphi(x_{a+1,1})$, где a — наибольшее i , что $x_{i,1} \in A^{\varphi}$. Заметим, что номер v может получать одна из вершин $x_{2,a}$ и $x_{m,2}$.

Допустим $\varphi(x_{2,a}) = v$ и $m, n \geq 5$.

Утверждение 2. Множества $\Pi_{1,1}^{2,2}$, $\Pi_{1,a-1}^{2,a-1}$, $\Pi_{m-1,1}^{m,2}$, $\Pi_{m-1,a-1}^{m,a-1}$ — сплошные.

Утверждение 3. $\Pi_{1,i}^{1,i}$ сплошное для каждого $i = \overline{1, a}$.

Утверждение 4. Для любого $x_{i,1} \in A^{\varphi}$ $i \leq a$.

Утверждение 5. Для каждого $i \leq n-a$, если $x_{i,n} \in A^{\varphi}$, то $\Pi_{i,n-a+1}^{i,n}$ — сплошное.

Следствие. Если $\Pi_{1,1}^{a,n}$ — сплошное, то $a \leq n/2$ и множество $\Pi_{1,n-a+1}^{a,n}$ — сплошное.

Пусть $\bar{v} = \varphi(x_{m-1,1})$. Наибольшее i , для которого $x_{m-i+1,n-i+1} \in (\Pi^{a,n} \setminus A^{\varphi})^{-1}$, обозначим через $\bar{a}$, и пусть $\bar{h} = \varphi(x_{m-\bar{a},n})$. Рассмотрим нумерацию $\bar{\varphi}(x) = m+1-\varphi(x)$ ($x \in \Pi^{a,n}$). Ясно, что $\bar{\varphi} \in \Phi_{p,m,n}^{\bar{a}}$, сжата относительно вершины $x_{m,n}$ и $\min_{x \in X_1} \bar{\varphi}(x) = \bar{v}$.

Применяя утверждения 2–5 и следствие утверждения 5 относительно нумерации $\bar{\varphi}$, получаем, что для любого $e = \overline{1, \bar{a}}$ $\Pi_{m-e+1,n-e+1}^{m,n}$ — сплошное и для каждого $x_{i,1} \in \Pi^{a,n} \setminus A^{\varphi}$ $i > m-\bar{a}$. Кроме того, для каждого $k \leq n-\bar{a}$, если $x_{m-k+1,1} \in \Pi^{a,n} \setminus A^{\varphi}$, то $\Pi_{m-k+1,1}^{m,k}$ — сплошное, и если $\Pi_{m-\bar{a},1}^{m,n}$ — сплошное, то $\bar{a} \leq n/2$.

Утверждение 6. $a + \bar{a} \leq m$.

По следствию утверждения 1 множества $\Pi_{1,1}^{a,n}$, $\Pi_{m-\bar{a},1}^{m,n}$ — сплошные, и для каждого $i = \overline{a+1, m-\bar{a}}$ является сплошным столбец $\Pi_{i,1}^{i,n}$. Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^a w(A_k^*) = \frac{1}{3} a^3 - \frac{a^2}{2} + \frac{a}{6};$$

$$\sum_{k=a^2+1}^{a(n-a+1)} w(A_k^*) = -2a^3 + \frac{a}{2} n(n+1) - a^3;$$

$$\sum_{k=a(n-a)+1}^{an} w(A_k^*) = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} (2n+1) + \frac{a}{6} (6n-5) - 2n;$$

$$\sum_{k=na+1}^{n(a+1)} w(A_k^*) = n^2 + n - 1;$$

$$D(a) = \sum_{k=1}^{na} w(A_k^*) = -\frac{a^3}{3} + a^2 n + a \left(\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{2}{3} \right) - 2n.$$

Так как φ минимальна, то $D(a+1) \geq D(a) + n^2 + n - 1$ и $D(a) \leq D(a-1) + n^2 + n - 1$. Отсюда $\left| n - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}} \right| \leq a \leq \left| n - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}} \right|$. Аналогичными рассуждениями те же оценки получаются и для $\bar{a}$, и, следовательно,

$$E(\varphi, P^{m,n}) = -\frac{2}{3} a^3 + 2na^2 - \left(n^2 + n - \frac{2}{3} \right) a - m(n^2 + n - 1) - n.$$

Заметим, что верхняя и нижняя оценки a совпадают для всех n , кроме тех случаев, когда $\sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}}$ — целое число. В последнем случае оценки различаются на единицу, и нет разницы, какую из них взять как значение a .

Вспомним, что непосредственно перед утверждением 2 мы допустили $v = \varphi(x_{2,n})$.

Утверждение 7. $v = \varphi(x_{2,n})$ при $m > n$.

Таким образом, если $m > n \geq 5$, то

$$E(P^{m,n}) = -\frac{2}{3} a^3 + 2na^2 - \left(n^2 + n - \frac{2}{3} \right) a - m(n^2 + n - 1) - n.$$

Мы фактически получили, что при $m > n \geq 5$ минимальные нумерации, сжатые относительно вершины $x_{1,1}$, разбивают $P^{m,n}$ на подмножества $A_i (i = \overline{1,7})$, как изображено на рис. 1, и дали структуру нумераций A_i . Кроме того, получили, что $|A_1| = |A_2| = a^2$ и $|A_3| = A_7 = \bar{a}^2$. Если в случаях $n = 2, 3$ рассмотреть те же нумерации, взяв $a = \bar{a} = 1$, то получим нумерацию $\varphi(x_{i,j}) = (i-1)n + j (x_{i,j} \in P^{m,n})$, т. е. нумерацию столбцов, следующих друг за другом. Легко убедиться, что эта нумерация является единственной минимальной, сжатой относительно вершины $x_{1,1}$ нумерацией $P^{m,n}$ (при $n < m$ и $n \leq 3$). Для $P^{1,m}$

$$1 \leq a, \bar{a} \leq 2.$$

Таким образом, описав класс минимальных, сжатых относительно вершины $x_{1,1}$ нумераций графа $P^{m,n}$. Это описание и теорема 1 дают полное описание класса минимальных нумераций прямоугольной решетки (теорема 3).

Граф со множеством вершин $\Pi^{m,n}$ назовем тором, если вершины $x_{i,j}, x_{i',j'}$ смежны тогда и только тогда, когда либо $i=k$ и $|j-e|=1$, либо $j=e$ и $|i-k|=1$. Тор, который фактически является декартовым произведением двух простых циклов, обозначим через $T^{m,n}$.

Поскольку $P^{m,n}$ и $T^{m,n}$ имеют одинаковое множество вершин, то для $T^{m,n}$ можно дать все те определения, что были даны для $P^{m,n}$. Более того, для тора верна следующая теорема, аналогичная теореме 2:

Теорема 4. Для каждой из вершин $x_{1,1}, x_{1,n}, x_{m,1}, x_{m,n}$ существует нумерация $\varphi \in \Phi_{T^{m,n}}^x$, сжатая относительно этой вершины.

Легко видеть, что для любого множества $B \subseteq \Pi^{m,n}$, сжатого относительно вершины $x_{1,1}$, $\omega_{T^{m,n}}(B) = 2\omega_{P^{m,n}}(B)$. Отсюда и из (*) получаем

$$\Phi_{P^{m,n}}^x \subseteq \Phi_{T^{m,n}}^x \quad \text{и} \quad E(T^{m,n}) = 2E(P^{m,n}).$$

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Դ. Հ. ՄԱՌԻԱՅԱՆ, Տ. Է. ՓԻՆՊՈՍՅԱՆ

Աղգանկյուն ցանցի գաղաթների մինիմալ համարակալումներ

Դիցուք $G(X, U)$ -ն դրաֆ է $X(|X|=N)$ գաղաթների և U կողերի բազմաթիվամբ: Ամեն մի $\varphi: X \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ փոխադարձիկ համապատասխանություն կոչվում է G դրաֆի համարակալում: Համարակալումը կոչվում է մինիմալ, եթե կից գաղաթների համարների աարքերությունների բացարձակ արժեքների գումարը ամենափոքրն է: Այդ մինիմալ գումարը նշանակվում է $E(G)$ -ով:

Աշխատանքում դիտարկվում է $\{X_{i,j}\}_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$ գաղաթների բազմաթիվամբ

$P^{m,n}$ աղգանկյուն ցանցը՝ m և n երկարություններից բաղկացած շղթաների դեկարտյան արտադրյալը:

$x_{1,1}, x_{1,n}, x_{m,1}, x_{m,n}$ գաղաթներից յուրաքանչյուրի համար արվում է այդ գաղաթի նկատմամբ սեղմ համարակալման դադափարը և ապացուցվում, որ նշված գաղաթներից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի մինիմալ, այդ գաղաթի նկատմամբ սեղմ համարակալում:

Տրվում է $P^{m,n}$ աղյուսակում ղանցի միջինայ համարակալումների դասի
 ւրիվ նկարագիւը: Ապացուցվում է, որ ալդ համարակալումները միջինայ են
 և $P^{m,n}$ տորի* m և n երկարութլամբ երկու պարզ ցիկլերի դեկարտյան աը-
 տադրւալի համար, և $E(T^{m,n}) = 2E(P^{m,n})$: Բերվում է նաև $E(P^{m,n})$ -ի հաշվ-
 ման բանաձեր:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Լ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

¹ L. H. Harper, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12, 1 (1964). ² L. H. Harper, J. Appl. Prob., 4, 2 (1967). ³ I. Chvatalova, Discrete Mathematics, 11(3,4) (1975) ⁴ Փ. Խարսը, Теория графов, «Мир», М., 1973.

УДК 523.877+537.312.62

ФИЗИКА

Д. М. Седракиан, К. М. Шахабасян

Протонный ток в «пре»-фазе нейтронных звезд

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Г. С. Саякяном 21/VI 1979)

В некоторых моделях нейтронных звезд (¹) основная по размерам фаза представляет собой ядерную жидкость, состоящую из нейтронов, протонов и электронов. Плотность протонов и электронов на два порядка меньше плотности нейтронов. Так как средняя плотность нуклонов в этой фазе порядка ядерной плотности, то протоны и нейтроны участвуют в сильном взаимодействии, имеющем характер притяжения. Это взаимодействие приводит к спариванию нейтронов в куперовские пары и появлению сверхтекучести нейтронного газа (^{2,3}).

В работах (^{4,5}) рассматривалась также возможность спаривания протонов. Имеющиеся оценки (^{3,5}) температур перехода нейтронов в сверхтекучее состояние и протонов в сверхпроводящее состояние показывают, что критическая температура для нейтронов может на порядок превышать критическую температуру для протонов. При температурах, меньших нижней критической, в «пре»-фазе имеется двухкомпонентная (нейтронно-протонная) сверхтекучая ферми-жидкость. Так как критическая температура нейтронов порядка $10^8 + 10^{10}$ К, то такая ситуация может реализоваться в нейтронных звездах.

Для исследования сверхтекучих и электромагнитных свойств этой взаимодействующей смеси при температурах $T \leq T_c$ нами впервые получены интегральные уравнения для температурных функций Грина и «аномальных» средних протонов и нейтронов с учетом сильного взаимодействия между ними (⁶). При получении этих уравнений использовался метод, предложенный в работе (⁷). Решая эти интегральные уравнения в приближении малых Δ , Δ_1 , g_1^2 и используя определение тока протонов посредством функции Грина $G(x, x')$, приведенное в работе (⁷), получаем уравнение Гинзбурга—Ландау для тока протонов:

$$\vec{j} = \left[\frac{ie\hbar}{m_p} \left(\Delta \frac{\partial \Delta^*}{\partial \vec{r}} - \Delta^* \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{r}} \right) - \frac{4e^2}{m_p c} |\Delta|^2 \vec{A} \right] K + \frac{ie\hbar}{m_p} \left(\Delta_1 \frac{\partial \Delta_1^*}{\partial \vec{r}} - \Delta_1^* \frac{\partial \Delta_1}{\partial \vec{r}} \right) |\Delta|^2 N, \quad (1)$$

где $K = C_p + L|\Delta_1|^2$, K_2 — постоянная нейтроно-протонного взаимодействия, Δ и Δ_1 — „щели“ протонов и нейтронов соответственно. Коэффициенты C_p , N , L равны:

$$C_p = \frac{7}{16} \zeta(3) \frac{n_p}{\pi^2 (kT)^3} \text{эрг}^{-1} \text{см}^{-3}; \quad (2)$$

$$L = 0,256 g^2 \frac{m_p m_n^2 p_F^3}{\pi^3 \hbar^3 (kT)^3} = 3,26 \cdot 10^3 \frac{n_p}{(kT)^3} \text{эрг}^{-1} \text{см}^{-3};$$

$$N = 0,106 \frac{g^2 m_p^2 m_n p_F^3}{\pi^3 \hbar^3 (kT)^3} = 1,62 \cdot 10^3 \frac{n_p}{(kT)^3} \text{эрг}^{-1} \text{см}^{-3}.$$

Здесь n_p — плотность протонов, k — постоянная Больцмана, m_p и m_n — массы протонов и нейтронов соответственно, p_F — импульс Ферми протонов, $\hbar$ — постоянная Планка, $\zeta(3)$ — функция Римана, $g_2 = 3,75 \cdot 10^{-13} \text{эрг} \text{см}^3$. Значение коэффициента C_p взято из работы (7).

Таким образом, учет взаимодействия протонов с нейтронами приводит к появлению тока „увлечения“ протонов нейтронами (второе слагаемое формулы (1)) и к изменению эффективной массы протона

$$m_{\text{эфф}} = \frac{m_p}{1 + \frac{L}{C_p} |\Delta_1|^2},$$

которая почти не отличается от массы свободного протона.

Подставим выражение для тока (1) в уравнение Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

и возьмем ротор от обеих частей, вводя при этом вместо щелей нейтронов и протонов их волновые функции следующим образом:

$$\psi = \sqrt{C_p} \Delta = \psi_0 e^{i\theta}; \quad \psi_1 = \sqrt{C_n} \Delta_1 = \psi_{10} e^{i\theta_1},$$

где ψ_0 , ψ_{10} , θ , θ_1 — соответственно модули и фазы волновых функций протонов и нейтронов. Тогда получим уравнение типа Лондонов:

$$\vec{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \vec{H} = \Phi_0 \vec{e}_n (r - r_p) + \Phi_1 \vec{e}_n (r - r_n), \quad (3)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}; \quad \Phi_1 = \frac{N \psi_{10}^2}{C_n C_p \left(1 + \frac{L \psi_{10}^2}{C_n C_p} \right)};$$

$$\lambda^2 = \frac{\hbar^2}{1 + \frac{L \psi_{10}^2}{C_n C_p}}; \quad \lambda_0^2 = \frac{m_p c^2}{16 \pi e^2 \psi_0^2}.$$

Здесь Φ_0 и Φ_1 — магнитные потоки, создаваемые вихрями протонов и нейтронов соответственно, λ — глубина проникновения магнитного поля, λ_0 — лондоновская глубина проникновения, e — единичный вектор, направленный вдоль вихревой нити.

Первое слагаемое правой части уравнения (3) приводит к появлению в точках $\vec{r}_p$ протонной вихревой нити с потоком Φ_0 . Для ее возникновения потребуется внешнее магнитное поле, равное (4):

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}.$$

Оценки для пре-фазы нейтронных звезд дают: $\lambda = 1,55 \cdot 10^{-11}$ см, $\xi = 3,8 \cdot 10^{-12}$ см и, следовательно, $H_{c1} \approx 9 \cdot 10^{13}$ гс. Такие вихревые нити появились бы, если бы во время эволюции нейтронных звезд переход протонов в сверхтекучее состояние сопровождался существованием мощных источников, генерирующих поля порядка $10^{13} - 10^{14}$ гс. Интересно отметить, что после появления такой вихревой сети магнитное поле будет стационарным благодаря сверхтекучим протонным токам.

Второе слагаемое правой части уравнения (3) приводит к появлению магнитного поля, пронизывающего нейтронные вихревые нити в точках $\vec{r}_n$. Поток магнитного поля нейтронного вихря равняется Φ_1 и появляется благодаря "увлечению" протонов нейтронами. Изменение эффективной массы протонов приводит к незначительному изменению глубины проникновения λ .

Поскольку нейтронные звезды, точнее пульсары, вращаются, то необходимо учитывать влияние вращения на поведение нейтронно-протонной сверхтекучей жидкости. Учет вращения в уравнениях для протонных функций Грина и в других формулах теории сверхпроводимости сводится к замене потенциала $\vec{A}$ на величину $\vec{A}'$, равную (5,10)

$$\vec{A}' = \vec{A} + \frac{m_p \hbar}{e} \vec{U}.$$

Здесь $\vec{U} = [\vec{\Omega} \vec{r}]$, $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращения, m_p — масса свободного протона. Для плотности тока во вращающейся системе координат имеем следующее выражение (6):

$$\vec{j} = 2 \left[\frac{ie}{2m_p^*} (\nabla_{\vec{r}} - \nabla_{\vec{r}'}) G(x, x') - \frac{e^2}{m_p^*} \vec{A}'(j(x, x')) \right]_{\vec{r}=\vec{r}', x=0} \quad (5)$$

Здесь m_p^* — масса протонной пары. Учет вращения приводит к изменению фазы функции Грина нейтронов

$$\bar{D}_-(\vec{r}, \vec{r}') = e^{im_n \vec{U}(\vec{r} - \vec{r}')} D_-^0(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (6)$$

где $D_-^0(\vec{r} - \vec{r}')$ — функция Грина свободных нейтронов. Используя (4), (5) и (6), получаем уравнение Лондонов во вращающейся системе координат

$$\vec{H} + \lambda^2 \text{rot rot} \vec{H}' = \Phi_0 e^2 (\vec{r} - \vec{r}_p) + \Phi_1 e^2 (\vec{r} - \vec{r}_n) \quad (7)$$

где

$$\vec{H}' = \text{rot} \vec{A} + \frac{2m_p c}{e} \vec{\Omega}, \quad \lambda_1 = \sqrt{2} c.$$

Уравнение (7) можно интерпретировать как уравнение для неподвижного сверхпроводника⁽¹⁰⁾, находящегося во внешнем однородном постоянном магнитном поле

$$\vec{H}_0 = \frac{2m_p c}{e} \vec{\Omega}.$$

Это заключение представляет собой обобщение теоремы Лармора на случай двухкомпонентной сверхтекучей ферми-жидкости. Легко заметить, что это поле довольно слабое — порядка $2 \cdot 10^{-4}$ эс. Даже при $\Omega \approx 200 \text{ сек}^{-1}$ оно порядка $4 \cdot 10^{-2}$ эс. Это поле на много порядков меньше критического поля H_c , следовательно, не может создавать протонные вихревые нити.

В заключение приведем некоторые оценки магнитного поля для модели вращающейся нейтронной звезды с плотностью нейтронов $n_n \approx 10^{35} \text{ см}^{-3}$, плотностью протонов $n_p \approx 10^{36} \text{ см}^{-3}$ и угловой скоростью вращения $\Omega \approx 200 \text{ сек}^{-1}$. Так как плотность нейтронов на два порядка выше плотности протонов, последние не влияют на образование нейтронных вихрей. Их плотность можно оценить по формуле⁽¹¹⁾

$$n = \frac{2\Omega}{\kappa} = 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-2},$$

где $\kappa = \pi \hbar / m_p$. Если учесть, что через каждый нейтронный вихрь проходит поток Φ_1 , то среднее магнитное поле $H_0 = n \Phi_1$, где $\Phi_1 = 0,03 \cdot 10^{-7} \text{ эс} \cdot \text{см}^2$ при $T = 10^8 \text{ К}$, $\Delta_1 = 0,1 \text{ мэв}$ и $\Phi_1 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ эс} \cdot \text{см}^2$ при $T = 10^9 \text{ К}$, $\Delta_1 = 1 \text{ мэв}$. Среднее магнитное поле в первом случае порядка 10^{-3} эс, а во втором случае порядка 10^{-1} эс. Это поле довольно маленькое, но замечательно, что оно сильно неоднородное. Действительно, в центре вихря на площади порядка 10^{-21} см^2 поле достигает довольно больших значений, оцениваемых формулой:

$$H = \frac{\Phi_1}{2\pi \lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}.$$

Для случая $\Delta_1 = 1 \text{ мэв}$ $H \approx 2,7 \cdot 10^{14} \text{ эс}$, а для $\Delta_1 = 0,1 \text{ мэв}$ поле порядка $2,7 \cdot 10^{12} \text{ эс}$. Уходя от центра вихря, поле экспоненциально падает до нуля.

Таким образом, вращение нейтронной звезды приводит к появлению довольно плотной нейтронной сети вихревых нитей, центры которых пронизывает магнитный поток с напряжением поля в центре порядка $10^{12} - 10^{14} \text{ эс}$.

Авторы выражают благодарность Г. С. Саакяну и участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за полезное обсуждение.

Ереванский государственный
университет

Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Կ. Մ. ՇԱԽԱԲԱՅԱՆ

Պրոտոնների նոսանքի նեյտրոնային աստղերի «ոքս»-փազում

Հոդվածում դիտարկված է միջուկային հրկեմայունեան գերհոսելի ֆերմի հեղուկը: Հեղուկի թաղադրիչներն են՝ գերհոսելի նեյտրոնները և գերհաղորդիչ պրոտոնները: Հաշվի է առնված ուժեղ փոխազդեցությունը հեղուկի թաղադրիչների միջև: Գրիների ֆունկցիայի միջոցով ստացված է գերհաղորդիչ պրոտոնների հոսանքի արտահայտությունը և լոնդոնի հավասարումը մագնիսական դաշտի համար աստղի ներսում: Ցույց է տրված, որ պտույտի պատճառով կստեղծվեն նեյտրոնային մրրկային թելեր, որոնք կրեբեն պրոտոնային մրրկային թելերի առաջացմանը նույն կետերում: Դաշտը թելերի կենտրոններում հավասար է $10^{12} - 10^{14}$ գաուս և արագ ընկնում է 10^{-11} սմ հեռավորության վրա: Պտույտը ստեղծում է նաև թույլ համասեռ հաստատուն մագնիսական դաշտ: Այսպիսով մագնիսական դաշտը պտտվող նեյտրոնային աստղերում խիստ անհամասեռ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Г. С. Саакян, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, «Наука», М., 1972. * А. Б. Мигдал, ЖЭТФ, т. 37, 249 (1959). * В. Л. Гимзбург, Д. А. Киржниц, ЖЭТФ, т. 47, 2003 (1964). * Д. М. Седракян, К. М. Шахбасян, Астрофизика, т. 8, 557 (1972). * Ю. М. Брук, Астрофизика, т. 9, 237 (1973). * Д. М. Седракян, К. М. Шахбасян, Г. А. Вурдяян, Ученые записки ЕГУ, 2, 1979. * А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, М., 1962. * А. А. Абрикосов, ЖЭТФ, т. 32, 1442 (1957). * Б. Н. Веркин, И. О. Кулик, ЖЭТФ, т. 61, 2067 (1971). * Д. М. Седракян, Г. С. Мкртчян, К. М. Шахбасян, Известия АН Арм ССР, Физика, т. 11, 385 (1976). * И. М. Халатников, Теория сверхтекучести, «Наука», М., 1971.

УДК—621.373.826

ФИЗИКА

А. О. Мелikian, С. Г. Саякян

Временная структура резонансно генерированных импульсов третьей гармоники

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микеляном 15/X 1979)

Авторами ранее была разработана точная теория резонансной генерации третьей гармоники (ТГ) в газах при накачке адиабатическими импульсами (^{1,2}). Было показано, что укороченные уравнения распространения для медленных амплитуд напряженностей полей имеют вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ct}\right) E_1(x, t) = -i \frac{2\pi\hbar\omega N}{c} \frac{\partial \mu_1}{\partial E_1},$$
(1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ct}\right) E_3(x, t) = -i \frac{6\pi\hbar\omega N}{c} \frac{\partial \mu_1}{\partial E_3},$$

где N —плотность числа атомов (молекул), ω —частота накачки, а μ_1 —квазиэнергия основного состояния атома. Были исследованы стационарные решения системы уравнений (1).

В настоящей работе мы исследуем влияние эффектов когерентного насыщения на временную форму импульса ТГ, генерированного адиабатическим импульсом накачки. Произведем замену переменных

$\xi = t - \frac{x}{c}$, $\eta = x$ и введем $E_1(\xi, \eta) = (I_1(\xi, \eta))^{1/2} \exp\{i\varphi_1(\xi, \eta)\}$ и

$E_3(\xi, \eta) = (I_3(\xi, \eta))^{1/2} \exp[i\varphi_3(\xi, \eta)]$; тогда из (1) имеем:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \eta} = \frac{2\pi\hbar\omega N}{c} \frac{\partial \mu_1}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = -\frac{2\pi\hbar\omega N}{c} \frac{\partial \mu_1}{\partial I_1},$$
(2)

$$\frac{\partial I_3}{\partial \eta} = \frac{6\pi\hbar\omega N}{c} \frac{\partial \mu_1}{\partial \varphi_3}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} = -\frac{6\pi\hbar\omega N}{c} \frac{\partial \mu_1}{\partial I_3}.$$

Система уравнений (2) совпадает с аналогичной системой (8) работы (¹), с той лишь разницей, что величины I_n и μ_1 зависят от локально-

го времени ξ как от параметра. Следовательно, интегрировать уравнения (2) по τ можно точно так же, как и в работе (1). При этом получаем, что величины $I_1 + I_2$ и I_1 являются интегралами движения (по τ), т. е. $\partial(I_1 + I_2)/\partial\tau = 0$, $\partial I_1/\partial\tau = 0$, и определяются из граничных условий при $\tau = 0$. Если временная форма импульса накачки на входе задается функцией $I_0(t)$, то $I_1(\xi, \tau) + I_2(\xi, \tau) = I_0(\xi)$, а $I_1(\xi)$ определяется из уравнения (10) работы (1), в котором $I_0 = I_0(\xi)$. Уравнение распространения ТГ будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial s(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \pm \frac{12\pi N \omega d_{12} d_{23} d_{34} d_{41} I_0(\xi)}{h^2 c \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4} \times \frac{\sqrt{s[(1-s)^2 - (\alpha s + \beta)^2]}}{\delta + \gamma s}, \quad (3)$$

где $s(\xi, \tau) = I_2(\xi, \tau)/I_0(\xi)$, а величины α , β , γ и δ определяются формулами (14)–(17) работы (1), в которых подставлены $I_0 = I_0(\xi)$ и $I_1 = I_1(\xi)$.

Физически тот факт, что локальное время ξ входит в уравнение распространения ТГ как параметр, означает, что если разбить импульс накачки на малые временные интервалы, в которых амплитуду напряженности можно считать постоянной, то каждый из этих участков генерирует ТГ независимо от остальных. Уравнение (3) описывает периодическую по координате передачу мощности из импульса накачки в ТГ и обратно. При малых интенсивностях накачки или больших расстройках резонанса из (3) получаем известный результат (1–3)

$$I_2(\xi, \tau) \sim I_0^3(\xi) \left(\frac{\sin \frac{\Delta k \tau}{2}}{\Delta k} \right)^2.$$

В этом случае период перекачки не зависит от интенсивности накачки и формой импульса ТГ является возведенная в куб форма импульса накачки. Иной будет ситуация в резонансных условиях, когда период зависит от интенсивности. Тогда каждый участок импульса накачки перекачивается в генерированную им ТГ со своим периодом. Это приводит к тому, что форма импульса ТГ в произвольной точке L будет иметь пиковую структуру. Действительно, если длина L является целой кратной периода, соответствующего интенсивности накачки $I_0(t_r)$, то в моменты локального времени $\xi_r = t_r$ интенсивность ТГ будет обращаться в нуль. Напомним, что для ТГ мы выбрали нулевые граничные условия.

Покажем это на примере предельного случая малых расстройок резонанса или большой интенсивности накачки, когда существенны эффекты когерентного насыщения. Возьмем симметричный импульс накачки, достигающий максимума I_{0m} при $t = 0$. Величина ϵ является

характерным временем изменения интенсивности накачки. Допустим, что расстройки резонанса малы так, что условие $\hbar^2 \dot{\xi}^2 \ll I_0 \left(\frac{L}{\tau} \right) D^2$, где $D^2 = d_{12}^2 + d_{23}^2 + d_{34}^2$ нарушается только при $t \gg \tau$. Если при этом выполняется соотношение $d_{11} \ll d_{12}, d_{23}, d_{34}$, то решение уравнения (3) имеет вид (1)

$$I_2(\xi, t) = A I_0(\xi) \sin^2 \left(\frac{I_{om}}{I_0(\xi)} \frac{L}{L} \right), \quad (4)$$

где постоянные A и L определяются из выражения (29) работы (1). Легко видеть, что $\partial I_2(\xi, t) / \partial \xi$ обращается в нуль при $\xi = 0$, а также в двух последовательностях значений локального времени $\xi = \xi_r$ и $\xi = \xi_p$, определяемых из условий:

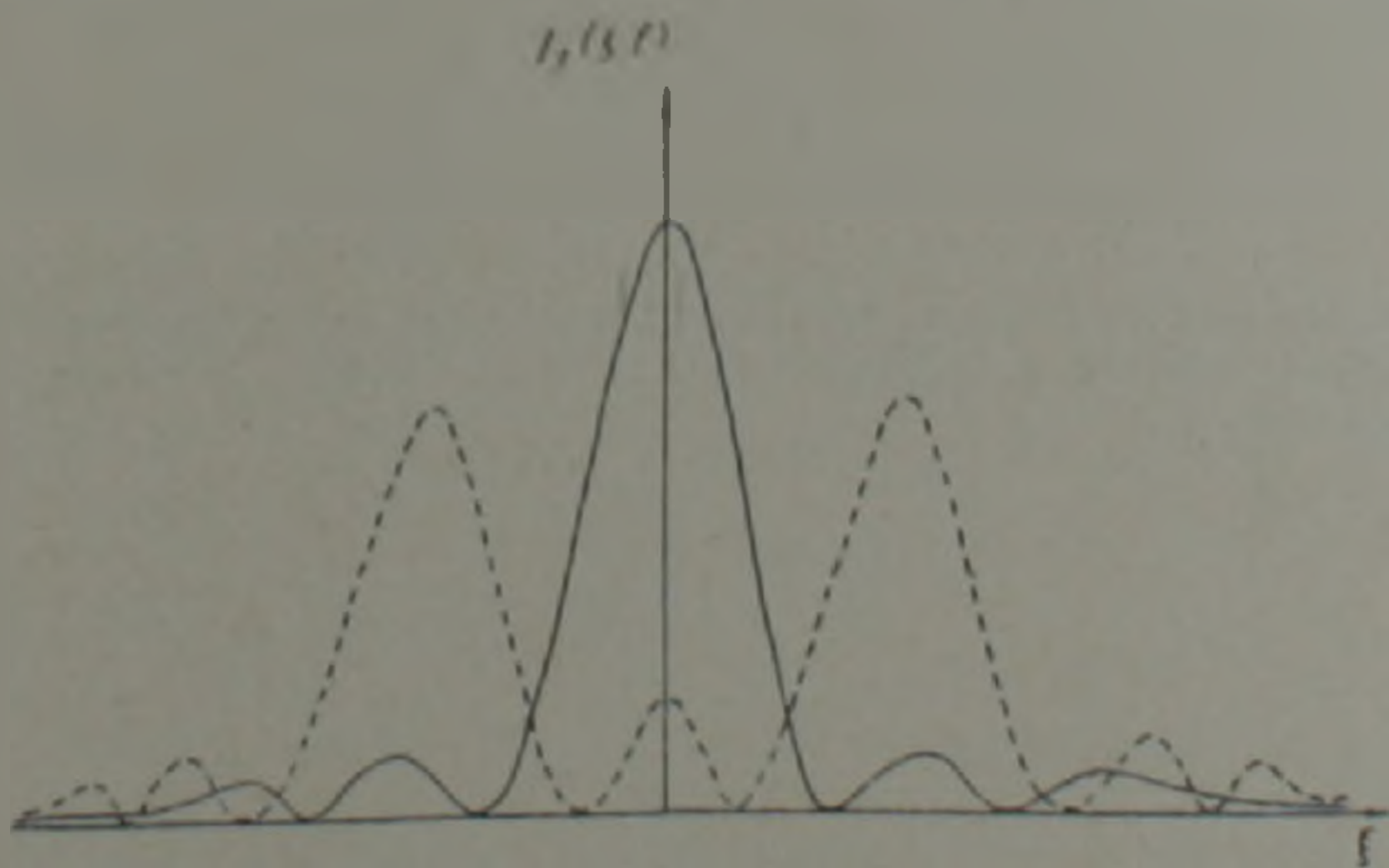
$$I_0(\xi_r) = I_{om} \left(\frac{L}{L} \right)^2 \frac{1}{4r^2} (r = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots); \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{I_{om}}{I_0(\xi_p)} \frac{L}{L} \right) = \frac{I_{om}}{I_0(\xi_p)} \frac{L}{L} (p = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots). \quad (6)$$

Из (4) и (5) следует, что интенсивность ТГ обращается в нуль при $\xi = \xi_p$, а при $\xi = 0$ и $\xi = \xi_r$ имеют место локальные максимумы. Для отношения интенсивности центрального пика ($\xi = 0$) к интенсивности пика при $\xi = \xi_p$ из (4) и (6) получаем

$$\frac{I_2(0, t)}{I_2(\xi_p, t)} = (1 + u_p^2) \left(\frac{L}{l} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{L}{L} \right), \quad (7)$$

где u_p — корень уравнения $\operatorname{tg} u = u$ ($u \neq 0$). Из уравнения (7) следует, что интенсивности пиков убывают с ростом номера p . На рисунке



изображены примерные формы импульсов ТГ для двух случаев соотношений длин l и L . При $l \ll L$ наибольшей является высота цент-

УДК 535.371

ФИЗИКА

Б. В. Крыжановский

Резонансная флуоресценция на вырожденных уровнях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 22 XI 1979)

1. Рассмотрим атомную систему $S_{1/2}-P_{1/2}$, взаимодействующую с квантованным полем излучения в присутствии классического внешнего поля, представляющего собой суперпозицию распространяющихся в одном направлении (ось z) двух монохроматических волн: поляризованной по левому кругу (σ^-) волны с частотой ω_- и поляризованной по правому кругу (σ^+) волны с частотой ω_+ . Частоты ω_- и ω_+ предполагаются близкими к частоте атома ω_0

$$|\varepsilon| = |\omega_0 - \omega_{\pm}| \ll \omega_{\pm} \quad (1)$$

Задача о поведении атома во внешнем поле сводится к рассмотрению двух независимых двухуровневых систем: полем σ^- -волны связываются уровни $\psi_{1,1/2}$ и $\psi_{2,1/2}$ (соответствующую этому взаимодействию частоту Раби обозначим через Ω_-), а полем σ^+ -волны — уровни $\psi_{1,1/2}$ и $\psi_{2,3/2}$ (частота Раби — Ω_+). Квазиэнергетические волновые функции этих связанных двухуровневых систем имеют вид ⁽¹⁾:

$$\Phi_{1,1} = e^{-i\Omega_- t} (a_{\pm} \psi_{1,1/2} + b_{\pm} \psi_{2,1/2} e^{-i\omega_{\pm} t}), \quad (2a)$$

$$\Phi_{2,1} = e^{-i\Omega_+ t} (-b_{\pm}^* \psi_{1,1/2} + a_{\pm}^* \psi_{2,3/2} e^{-i\omega_{\pm} t}), \quad (2b)$$

где

$$\xi_{\pm} = \Omega_{\pm}^2 / \omega_{\pm}^2, \quad \lambda_{\pm 1} + \lambda_{\pm 2} = \varepsilon,$$

$$\lambda_{\pm 1} = \frac{1}{2} \varepsilon (1 - \sqrt{1 + \xi_{\pm}})$$

$$a_{\pm} = [1 + \Omega_{\pm}^2 / 4\omega_{\pm}^2]^{-1/2}, \quad b_{\pm} = -a_{\pm} \Omega_{\pm} e^{i\eta_{\pm} / 2} \lambda_{\pm 2}. \quad (3)$$

Здесь η_+ и η_- — произвольные фазы, связанные со взаимодействием атома с σ^+ - или σ^- -волной соответственно.

При временах $t \gg \gamma^{-1}$, где γ есть естественная ширина атомной линии, спонтанное излучение может привести к довольно сильному перемешиванию квазиэнергетических состояний. Систему атомно

внешнем поле + квантованное поле* будем описывать при этом некогерентной смесью

$$\Psi = \sum_{n=1,2} C_n(t) \Phi_n. \quad (4)$$

Можно показать (подробный вывод содержится в работах (2,3)), что из точных уравнений для матрицы плотности, полученных (4) при строгом учете взаимодействия с квантованным полем излучения, в приближении

$$\tau \ll \tau_c = \sqrt{\gamma^2 + \Omega^2} \quad (5)$$

следуют уравнения баланса для населенностей квазиуровней

$$\frac{d}{dt} |C_n|^2 = \sum_{m \neq n} (|C_m|^2 w_{m \rightarrow n} - |C_n|^2 w_{n \rightarrow m}), \quad (6)$$

величины $w_{n \rightarrow m}$ в которых совпадают с вероятностями спонтанных переходов $\Phi_n \rightarrow \Phi_m$, вычисленными из оснований принципа соответствия (5)

$$w_{n \rightarrow m} = \frac{4\pi m_{nm}^2}{3\hbar c^3} |D_{mn}^{(-)}|^2, \quad (7)$$

где $D_{mn}^{(-)}$ — отрицательночастотная часть дипольного матричного элемента $\Phi_n \rightarrow \Phi_m$ перехода, а ω_{nm} — частота излучаемого при этом кванта

$$\omega_{nm} = \begin{cases} \omega_+ + \nu_n - \nu_m & \text{при } n = +1, +2 \\ \omega_- + \nu_n - \nu_m & \text{при } n = -1, -2. \end{cases} \quad (8)$$

Уравнения (6) позволяют определять амплитуды $C_n(t)$ только с точностью до фазовых множителей. В этом сказывается некогерентность состояния (4), которую следует учитывать, усредняя получаемые результаты по разности фаз амплитуд $C_n(t)$, что вследствие их произвольности даст $\overline{C_n C_m^*} = 0$, при $n \neq m$.

II. Наибольший интерес представляет рассмотрение стационарного режима, характеризующегося независимостью от начальных условий. При $t \gg \tau^{-1}$, пренебрегая в (6) производными по времени, получим:

$$N_{\pm 1} = |C_{\pm 1}(\infty)|^2 = \frac{\xi_{\pm}}{4} \frac{(1 + \sqrt{1 + \xi_{\pm}})^2}{\xi_+ + \xi_+ \xi_- + \xi_-}, \quad (9a)$$

$$N_{\pm 2} = |C_{\pm 2}(\infty)|^2 = \frac{\xi_{\mp}}{4} \frac{(1 - \sqrt{1 + \xi_{\pm}})^2}{\xi_+ + \xi_+ \xi_- + \xi_-}. \quad (9b)$$

Населенности $n_p^{\pm}$ возбужденных атомных состояний $\Psi_{p, \pm 2}$, как это следует из (4) и (9), оказываются равными

$$n_p^+ = n_p^- = \frac{1}{4} \frac{\xi_+ \xi_-}{\xi_+ + \xi_+ \xi_- + \xi_-}. \quad (10)$$

Следуя (3), уравнения (6) вместе с выражениями (7) будем интерпретировать в духе полуклассической теории излучения (18). В соответствии с предписаниями этой теории вычислим спектр флуоресценции при $t \gg \gamma^{-1}$. Тогда вероятности несмещенного рассеяния на частотах ω_+ и ω_- будут определяться выражением

$$w(\omega_{\pm}) = \frac{4\pi\omega^4}{3\hbar c^3} [N_{+1}|D_{\pm 1, \pm 1}^{(+)}|^2 + N_{-1}|D_{\pm 2, \pm 2}^{(-)}|^2] = \frac{\omega_0}{4} \frac{1 + \frac{1}{2}\xi_{\pm}}{1 + \xi_{\pm}}, \quad (11)$$

где $\omega_0 = \gamma(n_p^+ + n_p^-)$. Когерентное несмещенное рассеяние определится выражениями

$$w^{\text{кор}}(\omega_{\pm}) = \frac{4\pi\omega^4}{3\hbar c^3} |N_{+1}D_{\pm 1, \pm 1}^{(+)} + N_{-1}D_{\pm 2, \pm 2}^{(-)}|^2 = \frac{1}{4} \omega_0 \xi_{\pm} / (\xi_{+} + \xi_{+}\xi_{-} + \xi_{-}), \quad (12)$$

Аналогично (11) и (12), вероятность рассеяния кванта ω_{nm} вследствие перехода $\Phi_n \rightarrow \Phi_m$ ($n \neq m$) будем определять соотношением $w(\omega_{nm}) = N_n w_{n \rightarrow m}$. Вычисленные таким образом вероятности излучения квантов $\omega_+^{\pm} = \omega_{\pm} + l_{\pm 1} - l_{\pm 2}$ и $\omega_p^{\pm} = \omega_{\pm} - l_{\pm 1} + l_{\pm 2}$, появляющихся при переходах $\Phi_{+1} \rightarrow \Phi_{+2}$ и $\Phi_{-1} \rightarrow \Phi_{-2}$, имеют вид

$$w(\omega_{\pm}^{\pm}) = w(\omega_p^{\pm}) = \frac{1}{16} \omega_0 \xi_{\pm} / (1 + \xi_{\pm}). \quad (13)$$

Излучение на частотах ω_+^+ и ω_p^+ при наблюдении вдоль оси z имеет σ^+ поляризацию, на частотах ω_+^- и ω_p^- — σ^- поляризацию.

Рассмотрим теперь излучение, появляющееся вследствие переходов $\Phi_{+1} \rightarrow \Phi_{-2}$, $\Phi_{-1} \rightarrow \Phi_{+2}$, $\Phi_{+1} \rightarrow \Phi_{+1}$ и $\Phi_{-2} \rightarrow \Phi_{-2}$, которое при наблюдении в перпендикулярном оси z направлении линейно поляризовано. Частоты ω_{nm} излучаемых из этих $\Phi_n \rightarrow \Phi_m$ переходах квантов, определяются согласно (8), а вероятности излучения их в единицу времени имеют вид

$$w(\omega_{nm}) = \frac{\omega_0}{16} \frac{(A_{nm}^+ + \sqrt{1 + \xi_+})(A_{nm}^- + \sqrt{1 + \xi_-})}{\sqrt{(1 + \xi_+)(1 + \xi_-)}} \quad (14)$$

где для компактности записи введены величины $A_{+1, -2}^{\pm} = A_{-2, +1}^{\pm} = A_{-1, +2}^{\pm} = A_{+2, -1}^{\pm} = \pm 1$; $A_{+1, +1}^{\pm} = A_{-1, -1}^{\pm} = -A_{-1, +2}^{\pm} = -A_{+2, -1}^{\pm} = 1$.

В отсутствие одного из полей σ^+ или σ^- ($\xi_+ = 0$ или $\xi_- = 0$) поперечники всех процессов (11) — (14) равны нулю. Этот факт связан с тем, что, как это следует из (10), в этом случае при $t \gg \gamma^{-1}$ заселенным оказывается один из невзаимодействующих с полем волн подуровней.

В заключение автор выражает благодарность М. Л. Тер-Микаеляну и А. О. Меликяну за внимание к работе и полезные обсуждения.

Թեզոնանալին ֆլուորեսցենցիան ալլաուերված մակարդակներն վրա

Հետազոտված է երկմակարդակ ալլաուերված ատոմական սխեման փոխազդեցությունը թիթրոմատիկ արտաքին դաշտի հետ:

Ալնելով ճշգրիտ հաճախարումներին՝ խտություն մատրիցայի համար րստացված են հաճախարակչի հաճախարումներ «ուտոմ արտաքին դաշտ» սխեման քվադրմակարդակների բնակեցվածություն համար: Ճառագայթման կիսադասական տեսության հիման վրա հաշվարկված է ատոմի ֆլուորեսցենցիայի սպեկտրը՝ հաշվի առնելով ինտենսիվության էֆեկտները: Հետազոտված են ջրված ճառագայթման ընկռային հատկությունները: Ստացված արդյունքները թույլ են տալիս բացատրել ռեզոնանսային ֆլուորեսցենցիայից կատարված փորձերի արդյունքները, որոնք առից են կացվում առանց ոչ ալլաուերված երկմակարդակ սխեման յուխորոք իախապատրաստման:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒՆ

¹ М. Л. Тер-Микаелян, А. О. Меликян, ЖЭТФ, т. 58, 281 (1970). ² Б. В. Крыжановский, Препринт ИФИ-83, 1978. Аштарак, Арм. ССР. ³ В. V. Kryzhanovskii, А. О. Melikyan, Optics Communications, 29, 164 (1979). ⁴ P. W. Milioni, W. A. Smith, Phys. Rev., A11, 814 (1975). ⁵ O. Klein, Zs. f. Phys., 41, 407 (1927). ⁶ Л. Илюф, Квантовая механика, ИЛ, М., 1956.

УДК 523.035

АСТРОФИЗИКА

Г. А. Арутюнян

Образование спектральных линий в атмосфере с экспоненциальным распределением источников

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 15/VII 1979)

В работе (1) была рассмотрена одномерная задача об образовании спектральных линий при общем законе некогерентного рассеяния и произвольном распределении внутренних источников энергии $\epsilon(\tau, x)$ по оптической глубине τ , отнесенной к центральной частоте линии. Было показано, что интенсивность излучения, выходящего из полубесконечной атмосферы, $I(x)$, удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$v(x)I(x) = \int_0^\infty p(0, x', x) \alpha(x') I(x') dx' + \alpha(0, x) + \int_0^\infty \epsilon(0, x') \rho(x', x) dx' + \bar{I}(x). \quad (1)$$

Здесь $v(x) = \alpha(x) + \beta$, где $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения в линии в зависимости от безразмерной частоты x , β — отношение коэффициентов поглощения в непрерывном спектре и в центре линии. Далее через $\bar{I}(x)$ обозначена интенсивность выходящего излучения при распределении внутренних источников по закону $\frac{\partial \epsilon(\tau, x)}{\partial \tau}$; $p(0, x', x) dx$

представляет собой вероятность того, что квант с частотой x' , поглощенный на глубине τ , выйдет из среды в виде кванта с частотой, заключенной в интервале $(x, x + dx)$, и $\rho(x', x)$ — функция отражения от полубесконечной среды.

В тех случаях, когда функция перераспределения по частотам допускает представление в виде билинейного разложения по некоторой системе ортонормированных функций $\{\varphi_k(x)\}$, как известно (1,2), имеет место

$$\alpha(x') \rho(0, x', x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(x) \alpha_k(x') \quad (2)$$

$$\rho(x', x) = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(x')}{v(x) + v(x')}, \quad (3)$$

где λ — вероятность „выживания“ кванта при элементарном акте рассеяния. Постоянные A_k зависят лишь от закона перераспределения, а функции $\varphi_k(x)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений, являющихся обобщением уравнения Амбарцумяна на общий случай некогерентного рассеяния

$$\varphi_k(x) = z_k(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', x) z_k(x') dx'. \quad (4)$$

При заданном $I(x)$ решение уравнения (1) с использованием (2) — (4) не представляет трудности. С этой точки зрения весьма интересным является случай первичных источников энергии, мощность которых убывает по экспоненциальному закону с оптической глубиной τ . Случай указанного закона распределения первичных источников представляет важность с точки зрения астрофизического приложения. Распределение внутренних источников энергии можно принять экспоненциальным, в частности, при интерпретации контуров эмиссионных линий, образующихся в солнечной хромосфере (см., например, (34)).

Пусть теперь

$$\varepsilon(\tau, x) = \omega(x) e^{-m\tau}, \quad (5)$$

где $\omega(x)$ некоторая функция, описывающая зависимость первичных источников от частоты. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\bar{I}(x) = -mI'(x), \quad (6)$$

а уравнение (1) принимает вид

$$I(x) = \frac{1}{v(x) + m} \left\{ \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(x) I_k + \omega(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x') \rho(x', x) dx' \right\}, \quad (7)$$

где

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) z_k(x) dx. \quad (8)$$

Умножая (7) на $z_k(x)$ и интегрируя по всем частотам, для определения неизвестных коэффициентов I_k получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$I_k = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{kl} I_l + \delta_k, \quad (9)$$

где обозначены

$$\gamma_{nk} = \frac{\lambda}{2} A_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_n(x) \varphi_k(x)}{v(x) + m} dx; \quad z_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_n(x)}{v(x) + m} \left\{ w(x) + \int_{-\infty}^{\infty} w(x') \varphi(x', x) dx' \right\} dx. \quad (10)$$

При конкретизации задачи для различных моделей атмосфер должен быть известен вид функции $w(x)$, и, очевидно, задача может быть решена очень просто.

а) Если внутренние источники излучают лишь в непрерывном спектре, то $w(x) = a \equiv \text{const}$ и, следовательно,

$$z_n = a \int_{-\infty}^{\infty} z_n(x) \frac{1 + R_{\text{отр}}(x)}{v(x) + m} dx, \quad (11)$$

где

$$R_{\text{отр}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x', x) dx' \quad (12)$$

контур спектральной линии, образовавшейся при отражении от полубесконечной среды излучения единичной интенсивности в непрерывном спектре.

Мы видим, что решение задачи целиком выражается через φ_k -функции Амбарцумяна, определяющиеся из системы (3)–(4).

б) Пусть теперь первичные источники излучают лишь в линии. Тогда $w(x) = c \delta_0(x)$, и вместо (7) и (9) будем иметь

$$I(x) = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k I_k \frac{\varphi_k(x)}{v(x) + m} + c \frac{\varphi_0(x)}{v(x) + m}; \quad (13)$$

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{nk} I_k + \gamma_{n0} c. \quad (14)$$

Интенсивность выходящего излучения особенно просто выражается при полном перераспределении по частотам, когда

$$A_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \end{cases}$$

Тогда имеем

$$I(x) = \frac{\varphi_0(x)}{v(x) + m} \left(\frac{\lambda}{2} I + c \right), \quad (15)$$

где

$$I = c \gamma / \left(1 - \frac{\lambda}{2} \gamma \right), \quad (16)$$

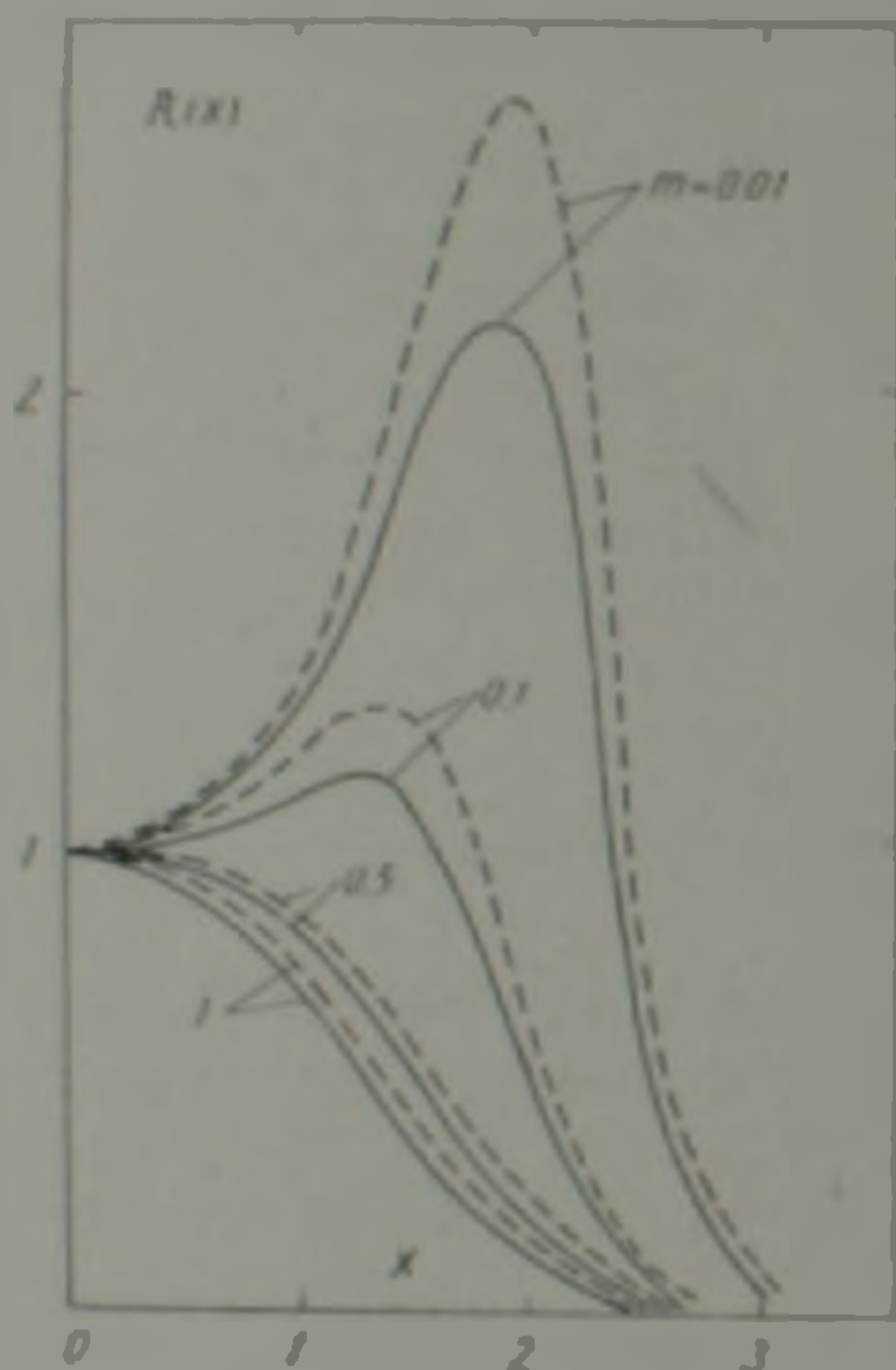
причем для упрощения записи опущены нулевые индексы у величин I_0 и $\bar{I}_0$.

Пользуясь системой уравнений (3)–(4) в приближении полного перераспределения, окончательно находим

$$I(x) = \frac{c}{z_0(x_0)} \frac{\varphi_0(x) \bar{\varphi}_0(x_0)}{v(x) - m} \quad (17)$$

где x_0 определяется из равенства $v(x_0) = m$.

Заметим, что выражение (17) другим путем было найдено в (2).



Контуры линий излучения, выходящего из атмосферы с экспоненциальным распределением источников при $\lambda = 0.99$ и $\beta = 0.01$:
— — — полное перераспределение, — — — четвертое приближение

В качестве иллюстрации на рисунке показаны контуры спектральных линий излучения $R(x) = I(x)/I(0)$ при полностью некогерентном рассеянии и чисто доплеровском законе перераспределения по частотам (в четвертом приближении, т. е. когда в суммах (13) и (14) ограничиваемся рассмотрением лишь первых четырех слагаемых). Интенсивности выходящего излучения рассчитаны по формулам (13) и (15). В последнем случае

$$A_k = \frac{1}{2k+1}, \quad z_k(x) = \frac{z(x) H_k(x)}{\pi^{1/2} 2^k \sqrt{(2k)!}},$$

где $H_k(x)$ — полином Эрмита k -й степени и $z(x) = \exp(-x^2)$.

Приведенные графики указывают на значительное количественное различие между интенсивностями, вычисленными при двух указанных законах перераспределении по частотам. Отклонения тем больше, чем меньше температурный градиент в атмосфере, т. е. чем меньше m . В частности, при $m = 0,01$ и $x \geq 2$ отклонения достигают 20%.

В заключение отметим, что все полученные в настоящей работе результаты нетрудно обобщить на трехмерный случай. Уравнения, соответствующие (1) при различных предположениях относительно геометрии элементарного акта рассеяния, приводятся в работе¹ (*).

Автор выражает свою признательность А. Г. Никогосяну за обсуждение полученных результатов.

Евразийская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Հ. Ա. ՀԱՐԱԹՅԱՆՆԱԸՆ

Ապեկուրալ գծերի առաջացումը էմսյունենցիայի բաշխվածությամբ ազդուողների մրնոլուրում

Ոչ հոհերենա ցրման բեզհանուր արենքի գեպրում էրապոնենցիայի բաշխվածությամբ ազդուողների մրնոլուրում գուրս էկոզ հառադայթման ինտենսիվության համար ստացված է ինտեգրալ հավասարում: Վերաբաշխման ֆունկցիան երկգծային գումարով փոխարինելու շնորհիվ այն բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի, որը հեշտությամբ լուծվում է, եթե հաշտել են Համբարձումյանի Գ₁-ֆունկցիաները: Մի գեպրում բերված են թվային հաշվումների արդյունքները: Կատարված է նաև համեմատություն լրիվ վերաբաշխման մոտավորությամբ ստացվող ապեկուրալ գծերի հոհաուրների հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ՆՐԱՇԱՆԱԻՐԵՐՆԵ

- ¹ Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян, ДАН СССР, т. 242, 66 (1978) * II, А. Harathyunian, A. G. Nikoghosian, J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer, v. 19, 135 (1978).
- ² В. В. Соболев, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1975. * R. O. Aihay, Radiation Transport in Spectral Lines, D. Reidel Publishing Company Dordrecht, 1972.
- ³ В. В. Иванюк, Перемещение излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969. * А. Г. Никогосян, Г. А. Арутюнян, Astroph. Sp. Sci., т. 64, 269 (1979).

УДК 523.858

АСТРОФИЗИКА

Г. Т. Петров

Содержание ионизованного газа и химический состав в ядрах сейфертовских галактик типа 2 и радиогалактик с узкими линиями

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 29/VII 1979)

В работе (1) было определено содержание некоторых ионов и атомов в ядрах ряда сейфертовских галактик (СГ) типа 1 и радиогалактик с широкими линиями (РГШ). Применялась методика, описанная в (2). Настоящая заметка является продолжением работы (1) и содержит рассчитанные тем же способом данные для 23 сейфертовских галактик типа 2 и 16 радиогалактик с узкими линиями (РГУ). Результаты спектрограмм сейфертовских галактик типа 2 и радиогалактик с узкими линиями взяты из работ (3-6).

В (1) приведены средние электронные плотности и температуры 31 сейфертовских галактик типа 2 и радиогалактик с узкими линиями. Электронные плотности определялись по относительным интенсивностям линий ионизованной серы [SII] $\lambda\lambda 6717, 6731$ и использовались для определения электронных температур по линиям дважды ионизованного кислорода [OIII] $\lambda\lambda 4363, 4959, 5007$. Полученные средние значения таковы: $\langle \lg n_e \rangle = 2,8$; $\sigma(\lg n_e) = 1,13$; $n = 34$ и $\langle \lg T_e \rangle = 4,25$; $\sigma(\lg T_e) = 0,20$; $n = 28$. Нам представляется, что столь низкие значения n_e и высокие значения T_e являются результатом того, что в (1) игнорируется стратификация излучения, хотя и отмечается существование двух зон ионизации. Поэтому приведенные в (1) температуры, вероятно, надо рассматривать как верхние границы.

Используя данные, приведенные в (1), мы определили плотности и температуры для зон [OII] и [OIII] в отдельности. Эти параметры для зон [OII] определялись по линиям [NII] $\lambda\lambda 5755, 6548$ и $\lambda\lambda 6581$ и [SII] $\lambda\lambda 4068, 4086, 6717$ и $\lambda\lambda 6731$. Относительные интенсивности перечисленных линий определены для 9 объектов. Средние значения электронных температур и плотностей и их дисперсии таковы:

$$\langle \lg T_e \rangle = 3,92; \sigma(\lg T_e) = 0,23; \langle \lg n_e \rangle = 4,38; \sigma(\lg n_e) = 0,51.$$

Для сравнения укажем, что по линиям [SII] $\lambda\lambda 4068, 4086, 6717, 6731$ и [OIII] $\lambda\lambda 4363, 4959$ и $\lambda\lambda 5007$ получается: $\langle \lg T_e \rangle = 4,27$; $\sigma(\lg T_e) = 0,16$ и

$\langle \lg n_e \rangle = 3.81$; $z(\lg n_e) = 0.37$ для 22 объектов. Линии равных отношения $[NII]$ 1.5755, 1.46518, 1.36584 и $[OIII]$ 1.4363, 1.4959, 1.5107 не пересекаются.

Поскольку данные о линии неона $[NII]$ 1.3313 не приведены, то однозначное определение n_e и T_e для зоны $[OIII]$ невозможно. Поэтому температуры определялись по линиям $[OIII]$ 1.353, 1.959 и 1.5107 для $\lg n_e = 5.5$, 6.0 и 6.5 cm^{-3} . Соответствующие средние значения по 35 объектам следующие: $\langle \lg T_e \rangle = 1.14$, 4.00 и 3.88. Сравнение этих чисел с данными, приведенными в (1), показывает, что значения электронных температур в сейфертовских галактиках типа 2 и радиогалактиках с узкими линиями совпадают с их значениями в сейфертовских галактиках типа 1 в случаях, когда электронные плотности в объектах типа 2 примерно на порядок ниже, чем в объектах типа 1. Это качественно согласуется с результатами Нейгебауэра и др. (1), а также с результатом, полученным М. А. Аракелом (2) по характеру зависимости интенсивностей линий от показателя цвета. Следует отметить, что отношение $[OIII]$ 1.4363/1.4959, 1.5107 во всех случаях равно или больше 0.008, что означает, что для $\lg T_e = 1.0$ во всех случаях $\lg n_e = 5.0$. На основании этих результатов содержание ионов и атомов определялось нами при $T_e = 10000$ К. Данные для 35 объектов приведены в табл. 1, которая содержит логарифмы чисел ионов и атомов для галактик, перечисленных в первом столбце, в предположении, что число водородных атомов равно 10^{12} .

Для сравнения в табл. 2 приведены средние значения логарифмов чисел ионов и атомов для радиогалактик с широкими линиями, сейфертовских галактик типа 1, сейфертовских галактик типа 2 и радиогалактик с узкими линиями, туманности Ориона, планетарных туманностей (PNT) и звезд.

На основании полученных результатов можно сделать следующие заключения.

1. Сейфертовские галактики типа 2 и радиогалактики с узкими линиями имеют в среднем относительно содержание гелия в полтора раза меньшее, чем сейфертовские галактики типа 1, т. е. примерно такое же содержание, как туманность Ориона или планетарная туманность, и в полтора раза больше, чем радиогалактики с широкими линиями.

2. Сейфертовские галактики типа 2 и радиогалактики с узкими линиями содержат примерно на порядок больше азота и в пять—восемь раз больше кислорода, чем сейфертовские галактики типа 1 или радиогалактики с широкими линиями.

3. Содержание серы примерно на порядок больше, чем в сейфертовских галактиках типа 1 или в радиогалактиках с широкими линиями, и примерно такое, как в звездах или в туманности Ориона.

4. Возможно, что низкое отношение $[OIII]/I$ в сейфертовских галактиках типа 2 и радиогалактиках является следствием повышенного содержания кислорода, по сравнению с сейфертовскими галактиками типа 1.

Содержание ионов и атомов в спиргетонных галактиках типа 2 и мультиплексных с
элементами

Объект	N+	S+	O	O+	O ⁺⁺	He+	He ⁺⁺	He	N	O	S
Маркарян 176	7.67	6.65	7.71	8.11	8.60	10.87	10.63	11.01	8.31	8.81	7.32
Маркарян 3	7.70	6.83	7.97	8.13	8.60	10.79	10.26	10.90	8.30	8.88	7.43
М 1008	7.80	6.55	7.72	7.67	8.59	11.04	10.61	11.18	8.83	8.65	7.52
Маркарян 523	7.59	6.83	7.63	8.05	8.58	10.87	10.50	11.04	8.20	8.73	7.47
78	7.56	6.75	7.61	8.25	8.56	10.85	10.54	11.01	8.04	8.79	7.22
348	7.66	7.01	8.17	8.24	8.57	10.95	10.31	11.03	8.08	8.83	7.51
11	7.54	6.55	7.67	8.12	8.58	10.95	10.45	11.08	8.11	8.73	7.42
1	7.54	6.64	7.97	8.63	8.54	10.87	10.48	11.08	8.17	8.74	7.27
Маркарян 270	7.60	7.06	8.05	8.34	8.41	11.15	10.34	11.20	8.02	8.78	7.42
М 105	7.70	6.74	7.80	8.00	8.34	10.82	10.30	10.90	8.23	8.62	7.23
Маркарян 198	7.55	6.61	7.71	7.90	8.21	10.91	9.85	10.95	8.00	8.51	7.29
768	7.80	7.01	8.01	8.10	8.48	10.85	9.90	10.90	8.20	8.61	7.43
Маркарян 274	7.67	6.80	7.94	8.50	8.15	10.52	10.52	10.85	7.78	8.72	6.95
М 24	7.48	6.60	7.46	7.95	7.95	11.28					
Маркарян 308	7.04	6.71	7.74	8.24	7.78	10.87			7.18	8.10	6.81
107	7.34	6.16	7.63	7.59	7.36	10.68			7.50	7.86	6.78
Маркарян 740	7.91	6.72	7.66	7.69	7.23	10.43			8.03	8.05	6.85
NGC 1701	7.49	6.64	7.29	7.97	7.18	10.91	9.78	10.95	7.56	8.11	6.71
Маркарян 378	7.62	6.56	7.60		7.15	11.15					
6	7.40	6.78	7.63	8.02	8.16	11.00			7.58	8.67	7.35
115	7.42	6.50	7.35	7.93	7.91	11.32			7.71	8.27	7.34
372	7.80	7.10	8.16	8.2	8.50	11.49			8.21	8.79	7.56
Маркарян 42	6.92	5.85	6.76	7.00	7.11	10.87			7.32	7.10	6.20
3C 33	7.14	6.84	7.97	8.28	8.00	10.85	10.41	11.03	7.93	8.81	7.14
1841	7.00	6.91	7.48	7.93	8.53	11.00	10.43	11.11	7.76	8.66	7.11
431	7.91	7.97	7.94	8.16	8.47	11.36			8.68	8.80	7.43
3C 452	7.75	6.91	8.20	8.27	8.34	11.11	9.78	11.15	8.09	8.75	7.25
5C 1101	7.25	6.18	7.18	7.57	7.26	10.91			7.41	7.81	6.36
3C 33	7.10	7.15	8.11	6.22	5.69		10.50		8.18	8.80	7.74
98	7.66	7.61	8.17	8.38	8.69	11.40	10.48	11.15	8.12	8.94	7.17
178	7.11	6.52	7.10	8.76	7.26	10.84	10.00	10.50	7.53	7.94	6.65
182	7.56	6.94	7.79	8.26	8.41	11.15	10.20	11.20	7.94	8.70	7.32
327	7.58	8.72	7.70	8.01	8.63	10.98	10.50	11.11	8.28	8.76	7.43
3C 327	7.13	8.82	7.59	7.82	8.77	10.87	10.60	11.04	8.43	8.84	7.82
1984-63	7.56	6.72	8.36	8.74	8.43	10.91			7.83	8.95	6.97
2325-12	7.34	7.05	8.07	8.44	7.30	10.72	9.78	10.78	7.57	8.62	7.11
NGC 102	7.68	7.12	8.22	8.57	7.84				7.75	8.81	7.19
NGC 5506	7.65	7.06	7.85	8.45	8.86	10.87	10.23	10.93	7.90	8.71	7.32
СурА	7.94		8.28	8.23	8.18	10.76	10.38	10.90	8.22	8.70	7.48

Примечание. Для галактики 3C 33 содержание ионов и атомов определено по относительным интенсивностям линий, приведенных соответственно в (2) и (4), а для галактики 3C 33 — в (4) и (5).

Таблица 2

Среднее содержание ионов и атомов для некоторых объектов

Объекты	N	S	O	O	O +	He	He	He	N	O	S	n
СГ 1000	6.27	5.51	6.57	6.33	7.09	11.05	10.34	11.37	6.97	7.73	6.19	36
РГ 1000	6.47	5.77	6.10	7.35	7.72	10.87	10.07	10.85	7.08	8.06	6.30	15
СГ 2 РГ 1	7.57	6.61	7.62	8.04	8.19	10.98	10.30	11.07	7.98	8.63	7.25	37
Орион	7.52	5.94		8.51	8.24	10.87		11.00	7.78	8.75	7.41	12(9)
ПлТ	7.05	5.50		7.61	8.49	10.95	10.03	11.04	8.18	8.76		13(10)
Звезда								11.21	8.5	8.95		(11)

5. По содержанию понов и атомов сейфертовские галактики типа 2 и радиогалактики с узкими линиями неотличимы друг от друга. В (3) отмечается, что эти два типа галактик по своим спектральным характеристикам образуют одну группу. Наши вычисления этому ничем не противоречат.

Приведенные результаты получены в предположении, что все рассмотренные линии в каждой галактике образуются в том же объеме. Если это предположение далеко от истины, то и применение использованной методики лишено смысла. Однако близость показателях понов, линий которых рассмотрены выше, позволяет предполагать, что полученные значения параметров близки к их истинным значениям.

Ереванский государственный
университет

Կ. Տ. ՊԵՏՐՈՎ

2 տիպի և Սելֆերտի զալակտիկաների և առաջնան ներ գծերով ապրիոգություն-
տիկաների միջակների բնիական բազադուրյունը և իոնների պատճառա-
բյունը

2 տիպի 23 Սելֆերտի զալակտիկաների և 16 առաջնան ներ գծերով ապ-
դիոգալակտիկաների նախոր որոշված են որոշ իոնների և առաջների հաշա-
րհրական քանակությունները:

• Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Ց Ի Ն

- ¹ Գ. Դ. Սետրով, ДАН АН СССР, т. 69, 52 (1979). ² Գ. Դ. Սետրով, Писем в АЖ, 5, 267 (1979). ³ А. Դ. Коске, Ap. J., 223, 56 (1978). ⁴ R. Costero, D. E. Osterbrock, Ap. J., 211, 675 (1977). ⁵ M. T. Penzton, R. A. E. Fosbury, M. N. R. A. S., 183, 479 (1978). ⁶ D. E. Osterbrock, J. S. Miller, Ap. J., 197, 535 (1975). ⁷ G. Neugebauer, E. Bechtel, J. H. Gire, L. Neugebauer, Ap. J., 205, 29 (1976). ⁸ М. А. Аракелян, Астрофизика, 13, 427 (1977). ⁹ M. Peimbert, S. Torres Peimbert, M. N. R. A. S., 178, 217 (1977). ¹⁰ M. Peimbert, S. Torres-Peimbert, Ap. J., 169, 413 (1971). ¹¹ L. H. Aller, S. J. Geyza, IAU Symp. 34, 209 (1968).

УДК 523.855

АСТРОФИЗИКА

С. Г. Искударян

Критерий $M_b - M_r$

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 19.VII 1979)

Считая важным вопрос о том, определяют ли свойства ядра не-ядерные характеристики галактики, В. А. Амбарцумян (¹) выдвигает на первый план точку зрения, согласно которой состояние галактики должно быть объяснено всей историей активности ее ядра, т. е. эти два фактора — история ядра и состояние галактики должны быть взаимно связаны. Он вносит критерий $M_b - M_r$, который можно считать одним из индикаторов, характеризующих состояние галактики.

В. А. Амбарцумян (¹) вводит пять групп для галактик по мощности их ядер:

- I — галактики без каких-либо заметных ядер или значительных сгущений в центре;
- II — галактики, имеющие спокойные ядра сравнительно низкой светимости, $M_b - M_r > 4^m 0$;
- III — галактики со спокойными ядрами высокой светимости, $1^m 5 < M_b - M_r < 4^m 0$;
- IV — сейфертовские галактики с очень яркими ядрами, $M_b - M_r < 1^m 5$;
- V — компактные галактики. Для последних за верхнюю границу значений разницы $M_b - M_r$ мы взяли значение $0^m 5$.

Это разделение на группы является совершенно независимым от разработанной В. А. Амбарцумяном и его сотрудниками «Бюраканской классификации» галактик, основанной на внешнем виде их центральных областей (^{1, 2}). Однако I группа почти полностью совпадает с бюраканским классом 1. II группа частично совпадает с бюраканским классом 2. III, IV, V группы не совпадают с бюраканскими классами 3, 4, 5, однако представители последних трех встречаются в каждой из групп III, IV, V.

Рассмотрим табл. I, которая показывает процентные доли каждой группы среди Sa, Sb, Sc галактик.

Отметим, что разделение галактик по значениям этих индексов зависит от того, инструментами какой разрешающей силы мы ведем наблюдения ядер. При классификации галактик по форме их ядер и окрестных областей ядра нормальных спиралей наблюдались почти исключительно на 21"-ом Шмидте Бюраканской обсерватории (1-6), из чего следует однородность всего наблюдательного материала для такой работы.

Таблица 1

Распределение Sa, Sb, Sc галактик по группам согласно критерию $M_b - M_r$

Группы по критерию $M_b - M_r$	HT		
	Sa	Sb	Sc
V	4	1	0
IV	A 22	8	1
III	69	82	26 B
II	4	8	68
I	0	0	6

Главное, что мы замечаем, посмотрев на табл. 1, это присутствие так сказать «главной последовательности» по направлению АВ. Sa галактики имеют относительно яркие ядра и даже содержат небольшую долю галактик V группы. Среди нормальных спиралей, конечно, нельзя ожидать компактных галактик, но в V группу, т. е. в группу компактных галактик, мы включили все те галактики, которые удовлетворяют неравенству $M_b - M_r < 0^m5$. Среди Sa галактик имеется также заметный процент галактик IV группы, т. е. той группы, в которую входят сейфертовские галактики. Однако сюда входят также и такие галактики, которые, по своим спектральным характеристикам могут быть и не сейфертовскими.

Подавляющее большинство Sa галактик имеет спокойные ядра высокой светимости. Галактики со спокойными ядрами низкой светимости составляют малую долю среди Sa галактик, а первая группа отсутствует, т. е. нет такой Sa галактики, которая не имела бы ядра.

Распределение Sb галактик по группам качественно не отличается от распределения Sa галактик. Следует отметить только, что Sb это тип, где доминируют галактики со спокойными ядрами высокой светимости. У Sc галактик доминирует II группа, куда входят галактики со спокойными ядрами низкой светимости. Среди Sc галактик заметный процент составляют галактики со спокойными ядрами высокой светимости (26%). Галактик сейфертовской группы в этом классе почти нет, нет также компактных галактик. Следует отметить, что галактики IV группы, а тем более действительные сейфертовские галактики составляют малую долю среди нормальных спиралей, несмотря на то, что именно среди них были найдены первые классические сейфертовские галактики.

Рассмотрим связь бюраканских классов 5 и 4 с группами по критерию $M_b - M_r$. Рассматриваются только галактики со звездообразны-

ми и звездоподобными ядрами, так как в центральных частях галактик остальных бюраканских классов (классы 1, 2, 3) сгущения с определенными границами не наблюдаются. Распределение нормальных спиралей бюраканских классов 5 и 4 из списков (⁴⁻⁶) по группам согласно критерию $M_b - M_r$ приводится в табл. 2.

Таблица 2

Распределение нормальных спиралей со звездобразными и звездоподобными ядрами по группам согласно критерию $M_b - M_r$

БК	n	V	IV	III	II	I
5	22	0	18	64	18	0
4	88	1	9	72	18	0

В последовательных столбцах приводятся бюраканские классы, общее число галактик n в соответствующем бюраканском классе и проценты, составляемые галактиками данной группы по критерию $M_b - M_r$ среди галактик данного бюраканского класса. Самое главное в табл. 2 это встречаемость, в приведенных бюраканских классах, галактик разных по критерию Амбарцумяна групп, что, по-видимому, говорит об их нахождении на разных ступенях эволюции. Из таблицы видно также, что звездобразные и звездоподобные ядра нормальных спиралей предпочитают III группу, т. е. они — спокойные ядра высокой светимости. Галактики со спокойными ядрами низкой светимости (II группа) составляют одинаковый процент среди галактик со звездобразными ядрами (класс 5) и звездоподобными ядрами (класс 4).

С целью сравнения характеристик звездобразных и звездоподобных ядер галактик разных Хаббловских типов и разных групп по критерию $M_b - M_r$ в табл. 3 мы приводим данные об этих ядрах.

В первом столбце таблицы даются Хаббловские типы, во втором — бюраканские классы галактик, в третьем — группы галактик согласно критерию $M_b - M_r$, в четвертом, пятом и шестом столбцах приводятся соответственно средние абсолютные величины ядер, средние значения показателей цвета ядер в интернациональной системе и средние значения разницы $M_b - M_r$. Здесь следует отметить, что значения интернационального цвета звездобразных ядер Sa и Sb галактик в некоторых случаях не согласуются с электрофотометрическими данными В—V цветов этих же ядер, измеренных авторами работы (⁷). Однако для однородности наблюдательного материала мы все же пользовались данными работ (⁵⁻⁶). В седьмом столбце приведены числа галактик n в соответствующем бюраканском классе и группе по критерию $M_b - M_r$. Данные об абсолютных величинах Sa, Sb, Sc галактик и их ядер, а также о цветах ядер этих галактик взяты из работ (^{4-6,8}).

Из таблицы видно, что в каждом Хаббловском типе звездобразные ядра в среднем тем голубее, чем выше группа по критерию $M_b - M_r$, но та же корреляция у Sb галактик выражена несколько слабее, чем

Некоторые средние характеристики звездобразных и звездоподобных ядер нормальных спиралей разных групп по критерию $M_B - M_r$

HT	БК	Группа по критерию $M_B - M_r$	$\overline{M_B}$	$\overline{CI_B}$	$\overline{M_B - M_r}$	n
Sa	5	III	-17 ^m 6	+0 ^m 8	2 ^m 2	3
		IV	19 6	0 3	1.0	3
Sb	5	II	14 9	0 8	4.7	1
		III	16.8	0 5	2.6	6
Sc	5	II	13 4	1.0	6.2	3
		III	17.5	0 3	2.5	5
		IV	17.3	0.1	1.5	1
Sa	4	III	17.8	0 8	2.3	16
		IV	18.5	0 8	1.4	5
		V	18 9	0.6	0.4	1
Sb	4	II	15.1	0 9	5.9	4
		III	17.5	0 8	2.6	28
		IV	18.2	0.9	1.1	2
Sc	4	II	15.0	0 8	4.7	12
		III	16.2	0.6	3.2	21

у Sa и Sc галактик. Следует отметить, однако, что замеченная здесь корреляция основывается на данных для малого числа галактик со звездобразными ядрами. Но имея в виду факт, что единственная Sb галактика II группы имеет красное звездобразное ядро (+0^m8) и единственная Sc галактика IV группы имеет почти голубое ядро (-0^m1), а также что Sc галактики II группы имеют в среднем очень красные ядра, в то время как вообще для Sc галактик это редкое явление, все это, по-видимому, трудно считать простой случайностью. Это скорее всего говорит в пользу существующей корреляции. У галактик же со звездоподобными ядрами (класс 4) с повышением группы по критерию $M_B - M_r$ средний цвет ядра в приведенных группах почти не меняется, оставаясь в интервале от +0^m6 до +0^m9.

Средние значения абсолютных величин звездобразных и звездоподобных ядер галактик разных Хаббловских типов растут с повышением группы по критерию $M_B - M_r$, что, естественно, следует из определения самих групп, так как среди значений абсолютных величин самих нормальных спиралей не ожидается большой дисперсии.

Средние значения $M_B - M_r$ при переходе от Sa галактик к Sc ведут себя по-разному. Галактики всех трех Хаббловских типов со спокойными звездобразными ядрами высоких светимостей (III группа, класс 5) показывают почти равное среднее значение разницы $M_B - M_r$. Среднее значение $M_B - M_r$ несколько растет при переходе от Sa к Sc для спокойных звездоподобных ядер высоких светимостей (III группа, класс 4). Почти совпадающие по средним значениям характеристики показывают спокойные звездобразные ядра высокой светимости Sa

галактик (III группа, класс 5) и спокойные звездоподобные ядра высокой светимости Sa галактик (III группа, класс 4). По-видимому, такие ядра в типе Sa не отличаются друг от друга по своей природе, как и галактики, которым они принадлежат.

Совпадают друг с другом средние значения характеристик Sh галактик со спокойными звездообразными ядрами низкой светимости (II группа, класс 5) и Sc галактик со спокойными звездоподобными ядрами низкой светимости (II группа, класс 4). Однако во II группу входит только одна Sb галактика со звездообразным ядром, так что такое совпадение может быть и случайным. Звездообразные ядра Sa галактик III группы имеют среднюю абсолютную величину более высокую, чем такие ядра Sb галактик, но они по светимости одного порядка со звездообразными ядрами Sc галактик этой же группы.

Таким образом, нельзя отрицать возможность существования некоторых характеристик звездообразных и звездоподобных ядер, которые не зависят заметно от морфологического типа нормальных спиралей, обладающих этими ядрами. В данном конкретном случае такими характеристиками являются средние значения цвета ядер каждой из групп, определенной согласно критерию $M_b - M_r$.

С другой стороны известно, что звездообразность ядра является признаком активной фазы жизни ядра (⁹). На основании некоторых фактов существует также предположение о долговечности звездообразных ядер (¹⁰). По идее же В. А. Амбарцумяна это ядро (как и всякое ядро) всей историей своей активности ответственно за состояние галактики, и, действительно, как указывалось в настоящей работе, среднее значение одной из его характеристик (CI_1) коррелирует с одним из индикаторов состояния ($M_b - M_r$) нормальных спиралей независимо от их морфологического типа.

Таким образом, критерий В. А. Амбарцумяна разделяет звездообразные ядра нормальных спиралей, независимо от их морфологического типа, на определенные группы согласно значению их цвета и тем самым как бы является градуирующим фактором для ядер этого типа.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ս. Գ. ԻՍԿՈՒԿԱՐՅԱՆ

$M_b - M_r$ չափանիշը

Ունկախ գալակտիկաների Հարլլան տիպից, նորմալ պարուրաձև գալակտիկաների աստղաձև կորիզները միջինում այնքան ավելի կապույտ են, որքան բարձր խմբի են պատկանում պարուրաձև գալակտիկաների՝ համաձայն $M_b - M_r$ չափանիշի:

Ունկախ գալակտիկաների Հարլլան տիպից, նորմալ պարուրաձև գա-

լակտիկաների աստղանման կորիզների զույնի ցուցիչների միջին արժեքը, ըստ $M_1 - M_2$ չափանիշի մի խմբից մյուսին անցնելիս, գրեթե չի փոխվում և մնում է $+0^m 6.5 + 0^m 9$ միջակայքում:

Վերահիշյալը խոսում է այն բանի հնարավորության մասին, որ կարող են գոյություն ունենալ աստղաձև և աստղանման կորիզների այնպիսի հայտանիշներ, որոնք նկատելիորեն կախված չեն այն գալակտիկաների մորֆոլոգիական տիպերից, որոնց սլատկանում են այդ կորիզները: Դիտարկվող դեպքում նման հայտանիշ հանդիսանում է այդ կորիզների զույնի ցուցիչների միջին արժեքը:

$M_1 - M_2$ չափանիշը աստղաձև կորիզների համար կարծես աստիճանավորող ֆակտորի դեր է կատարում:

4-րդ խմբի գալակտիկաները, առավել ևս իսկական սելֆերտյան գալակտիկաները, փոքրամասնություն են կազմում ինքնալ պարույրների շրջանում, լնայած այն բանին, որ առաջին դասական սելֆերտները գտնվել են հենց նորմալ պարույրների մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ V. A. Ambartsumian, Solvay Conference Report, Brussels, 1964. ² S. S. Iskharian et al., Communication IAU, Praha, 1967. ³ Бюраканский сводный каталог галактик, Сообщ. Бюраканской обс., 47, 43 (1975). ⁴ С. Г. Искусдарян, «Астрофизика», 4, 385 (1968). ⁵ К. А. Саакян, «Астрофизика», 5, 593 (1969). ⁶ К. А. Саакян, «Астрофизика», 4, 41 (1968). ⁷ Э. А. Дибай, Г. В. Зайцева, В. М. Лютый, АЖ, 46, 240 (1969). ⁸ С. Г. Искусдарян, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 62 (1975). ⁹ Г. М. Товмасьян, «Астрофизика», 2, 419 (1966). ¹⁰ С. Г. Искусдарян, «Астрофизика», 11, 362 (1975).

УДК 546.683+547.86

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Член-корреспондент АН Армянской ССР В. М. Тараян
Ф. В. Мирзоян, Ж. В. Саркисян, Ж. М. Арстамян

К особенностям экстракции хлорталлат-аниона

(Представлено 29/X 1979)

Известно, что реакционноспособной формой по отношению к катиону основного красителя (ОК) является TiCl_7^- — анион, который образует с ОК хорошо экстрагирующиеся ионные ассоциаты. Характерно, что экстракция этих соединений обычно осуществляется из сравнительно кислых по HCl растворов (¹). Замена соляной кислоты смесью H_2SO_4 и KCl позволила установить возможность количественного извлечения таллия (III) также и из слабокислых сред, если одновременно регулируется концентрация реагента-красителя (²).

В настоящем исследовании проведено изучение процесса извлечения хлорталлата ОК в зависимости от кислотности, при различной исходной концентрации хлорид-иона и постоянной концентрации ОК. При этом преследовалась цель выяснить вопрос, имеющий сугубо теоретический интерес: как изменяется состав извлекаемого хлорталлат-аниона в зависимости от кислотности среды и концентрации хлорид-иона. Этому могла бы способствовать легкая гидролизуемость солей таллия (³), тем более, что возможность экстракции гидроксокомплексных анионов в виде их ионных ассоциатов с ОК ранее была описана (⁴⁻¹¹).

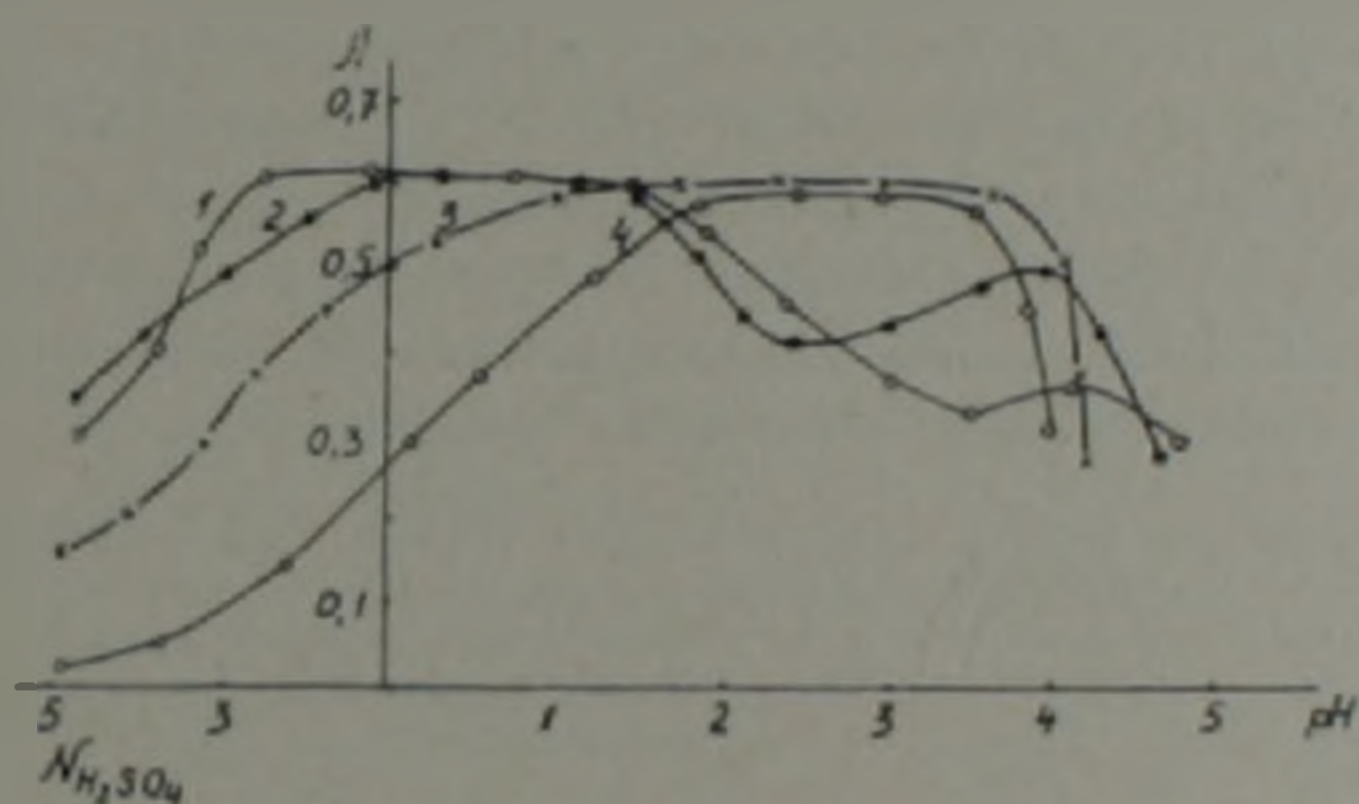
В качестве ОК использован краситель трифенилметанового ряда метиловый зеленый (МЗ).

Реагенты и аппаратура. Запасной раствор таллия (I) готовили растворением сульфата таллия (I), марки «ч» в определенном объеме дистиллированной воды. Титр раствора устанавливали броматометрически (¹²⁻¹³). Разбавлением этого раствора получали растворы заданной концентрации. Окисление таллия (I) проводили хлорной водой в солянокислой среде.

Раствор красителя готовили растворением навески препарата марки Reanal (Colour Index № 42590) в рассчитанном объеме дистиллированной воды. В связи с некоторой его неустойчивостью во времени использовали только свежеприготовленные растворы красителя. Кислотность регулировали серной кислотой, хлорид-ионы вводили в виде хлорида калия.

Оптическую плотность (ОП) экстрактов измеряли спектрофотометром СФ-4А, а pH равновесной водной фазы — стеклянным электродом (потенциометр ЛПУ-01). В качестве наиболее подходящего органического растворителя, извлекающего таллий однократной экстракцией практически полностью и не экстрагирующего простую соль МЗ, был использован бензол. Экстракционное равновесие устанавливалось за 1 мин. Оптическая плотность бензольных экстрактов остается постоянной длительное время.

Влияние кислотности и [KCl] на экстракцию таллия Была изучена зависимость ОП исследуемых экстрактов от кислотности среды, при различных исходных концентрациях хлорид-иона и постоянной концентрации реагента-красителя. Результирующие данные приведены на рисунке.



Зависимость ОП исследуемых экстрактов от кислотности среды.

$[Tl(III)] = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ М}$, $[МЗ] = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ М}$.

$[KCl]$, М: 1— 10^{-3} ; 2— 10^{-2} ; 3— 10^{-1} ; 4— 10^{-4} .

При снижении исходной концентрации хлорид-иона область оптимальной для извлечения хлорталлата МЗ кислотности смещается в сторону менее кислых сред. Так, при $1 \cdot 10^{-4} \text{ М}$ концентрации хлорид-иона эта область включает значения pH от 2 до 3,5 (рисунок, кривая 4). Десятикратное повышение исходной концентрации хлорид-иона расширяет область оптимальной кислотности — pH 1,0—3,7 (кривая 3). При заметно большей кислотности 3 н H_2SO_4 — pH 1,5 (кривая 1) и 1 н H_2SO_4 — pH 1,4 (кривая 2) увеличение исходной концентрации хлорид-иона приводит к максимальному извлечению хлорталлата МЗ. Далее степень извлечения хлорталлата МЗ падает и начиная с pH 2,5 вновь возрастает, достигая максимального значения в области pH 4,0 (кривая 2). Появление «минимума», по-видимому, связано с подавлением экстракции рассматриваемого соединения в результате конкурирующих реакций в водной фазе. Увеличение времени контакта фаз в данном

случае не привело к сглаживанию минимума на кривых 1 и 2, что позволяет считать его равновесным (¹⁹).

Возможность количественного извлечения хлорталлата МЗ при весьма различных кислотностях интересна и в дальнейшем может быть использована для повышения избирательности определения таллия (III). С другой стороны, факт извлечения таллия из слабокислых сред, и тем более при заметно малых концентрациях хлорид-иона, наводит на мысль о возможном изменении состава извлекаемого хлорталлат-иона, т. е. о возможности экстракции гидроксохлоридов таллия (III).

Состав извлекаемого анионного комплекса. После извлечения хлорталлата МЗ при определенных концентрационных условиях соответствующие экстракты были проанализированы на содержание Тl (III) и хлорид-иона. Методика заключалась в следующем: несколько экстрактов хлорталлата МЗ (условия получения приведены в таблице), содержащих в сумме 80—120 мкг таллия, центрифугированием и продолжительным отстаиванием тщательно отделяли от остатков водной фазы. Затем экстракты выпаривали на водяной бане до сухих остатков, добавляли 5 мл 1,0 N не содержащей хлорид-иона азотной кислоты, и нагревание продолжали до полного обезвреживания реагента-красителя*. Полученные растворы разбавляли водой до 25—30 мл и амперо-

Влияние кислотности водной фазы на состав извлекаемого в органическую фазу анионного комплекса таллия, $[MЗ] = 5,1 \cdot 10^{-3}$ М

Кислотность водной фазы	Степень извлечения, %	Концентрация хлорид-ионов	Содержание в экстракте г-ион $\cdot 10^4$		Отношение $[Ti(III)]:[Cl^-]$	Состав преимущественно извлекаемого в органическую фазу гидрокомплекса таллия
			Tl (III)	Cl ⁻		
1,0 N	100	0,01 М	0,49 0,49 0,49	1,96 2,00 2,00	1:4,00 1:4,08 1:4,08	$[TiCl_4]^-$
pH 1,2	100	0,01 М	0,45 0,45 0,44 0,44	1,21 1,20 1,16 1,23	1:2,69 1:2,67 1:2,64 1:2,79	$[Ti(OH)Cl_3]^-$
pH 3,2	75	0,01 М	0,44 0,44 0,59 0,59	1,01 1,01 1,30 1,29	1:2,29 1:2,29 1:2,20 1:2,19	$[Ti(OH)_2Cl_2]^-$
pH 4,2	83	0,01 М	0,34 0,34 0,47	0,24 0,24 0,38	1:0,71 1:0,71 1:0,81	$[Ti(OH)_3Cl]^-$

* Предварительными опытами было установлено, что в описанных условиях потери хлор-иона не имеют места.

Հայկական ՍՍՀ ԳԼ Քրդ-հից-անդամ Վ. Խ. ԲԱՌԱՅԱՆ, Յ. Վ. ԽԻՐԱՅԱՆ, Ժ. Վ. ՍԱԲՊՅԱՆ,
Ժ. Խ. ԱԻՈՏԱԼՄԱՆ

Հիմնալին ներկանյութի նետ իոնական ասոցիատի մեով էխստրագվոզ հլորթա-
լատ իոնի լադադրոլթյաւն մասին

Ուսումնասիրվել է հիմնային ներկանյութ մեթիլ կանաչի (ՄԿ) հեռ թուր-
թալատ իոնի առաջացրած իոնական ասոցիատի էքստրակցիան՝ կախված ջը-
րային ֆազի թթվաթյունից հիմնային ներկանյութի հաստատուն և թուրիդ իո-
նի փոփոխական կոնցենտրացիաների պայմաններում։ Թուրիդ-իոնի 0,01 Մ
կոնցենտրացիայի դեպքում թուրթալատ-իոնի մաքսիմալ կորզում նկատվում է
ուժեղ թթվային միջավայրում՝ pH 1,5-3 N H₂SO₄։ Թուրիդ-իոնի կոնցենտ-
րացիան աստիճանաբար փոքրացնելիս (10^{-2} - 10^{-1} , 10^{-4} Մ) թուրթալատ-
իոնի քանակական կորզումը ասպնձովում է աճելի ու աճելի ցածր թթվաթ-
յուն պայմաններում (pH 1,5-ից մինչև pH 4,2)։ Դա հիմք է առելու ենթա-
դրելու տարբեր բազադրամիայի իոնական ասոցիատների էքստր-
ակցիոնական մասին։

Պլոտիկ-իսելի 0,01M կոնցենտրացիայի պարմաներում՝ կախված ρH -ից՝ խլանից՝ էքստրակցվում են $[TiCl_4]^-$ (1N H_2SO_4), $[Ti(OHCl_2)]^-$ ($\rho H=1,2$),

$[Ti(OH)_2Cl_2]^-$ ($pH=3.2$) և $[Ti(OH)_2Cl]^-$ ($pH=4.2$) հիդրոլիզացիայի քիմիական հավանականությունները համապատասխանում է համապատասխան հիմնական-հիմնական $[Ti]:[Cl]$ հարաբերությանը որոշված:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԴԱՐԱՆ

- ¹ В. М. Тараян, Е. Н. Овсепян, В. Ж. Арцруни, Арм. хим. журн., т. 22, № 9 (1969).
- ² В. М. Тараян, Ф. В. Мирзоян, Ж. В. Саркисян, В. Ж. Арцруни, ЖАХ, т. 32, № 7 (1977).
- ³ Ю. Б. Яковлев, Ф. Я. Кульба, В. Е. Миронов, в сб.: «Проблемы современной химии координационных соединений», вып. 2, Ленинградский гос. ун-т (1968).
- ⁴ В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян, ДАН Арм. ССР, т. 53, № 4 (1971).
- ⁵ В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян, Арм. хим. журн., т. 26, № 2 (1973).
- ⁶ В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян, Арм. хим. журн., т. 27, № 7 (1974).
- ⁷ В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян, Л. А. Молучарян, в сб. «Успехи аналитической химии», «Наука», М., 1974.
- ⁸ В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян, Уч. зап. ЕГУ, № 3 (1974).
- ⁹ В. М. Тараян, А. Н. Погосян, ДАН Арм. ССР, т. 62, № 2 (1976).
- ¹⁰ В. М. Тараян, А. Н. Погосян, Ж. М. Арстамян, Арм. хим. журн., т. 30, № 11 (1977).
- ¹¹ В. М. Тараян, А. Н. Погосян, Ж. М. Арстамян, Арм. хим. журн., т. 31, № 7 (1978).
- ¹² I. M. Kolthoff, Rec. trav. chim., 41, 189 (1922).
- ¹³ H. Marshall, I. Soc. chem. Ind., 1, 194 (1900).
- ¹⁴ Л. А. Золотов, Экстракция внутрикомплексных соединений, «Наука», М., 1968.

УДК 631.465

АГРОХИМИЯ

А. Ш. Галстян, С. А. Абрамян, Е. Н. Бадалян

Изучение ферментативной активности гумусовых веществ

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 14/VII 1979)

Источником почвенных ферментов являются растения, микроорганизмы и фауна почвы (¹⁻²). Продуцированные организмами ферменты иммобилизуются почвенными коллоидами, приобретают высокую устойчивость и обуславливают биокаталитическую активность почвы. Часть внеклеточных ферментов в почве находится в слабоадсорбированном состоянии и выделяется с помощью фосфатных буферных растворов со слабоосновной реакцией (²⁻⁵).

Исследование биокаталитических свойств минеральных и органических фракций почвы представляет определенный интерес для познания ее генетических особенностей и сущности формирования плодородия. Изучение ферментативной активности гумусовых веществ проводится на препаратах, выделенных из почвы. Для этой цели необходимо применять мягкие экстрагенты, которые не инактивируют ферменты.

В настоящей работе показана возможность применения аминокспиртов в качестве экстрагентов для выделения гумусовых веществ с целью изучения их ферментативной активности. Исследования проводили на горно-луговой дерновой почве (А₁ 0—13 см, среднесуглинистая, гумус—15,7%, рН водной суспензии 5,1, сумма поглощенных оснований 28,8 мэкв на 100 г почвы, степень насыщенности—57,3%).

Для извлечения гумусовых веществ из почвы применяли 0,1; 0,2; 0,3 М растворы моно-, ди- и триэтаноламинов, которые обладают щелочными свойствами и хорошо растворимы в воде. Почву заливали раствором аминокспирта соответствующей концентрации, при соотношении 1:10, и тщательно перемешивали. Обработку почвы проводили при комнатной температуре, многократно, до осветления экстракта. После отстаивания суспензии (24 ч) вытяжку осторожно сливали через сифон в другой сосуд и добавляли коагулятор — насыщенный раствор Na₂SO₄. Полученные вытяжки гумусовых веществ для отделения от минеральных примесей пропускали через проточную суперцентрифугу при скорости вращения 18 тыс. об./мин. В экстракте гуминовые (ГК) и фульвокислоты (ФК) разделяли концентрированной серной кисло-

той (рН 1,5). Полученные гели ГК после сливания раствора ФК промывали водой, анализировали в целлофановых мешочках для снижения зольности препарата и высушивали при 50°. Одновременно препараты ГК и ФК выделяли с помощью 0,1 н. NaOH по общепринятой методике (6-8).

Исследования показали, что из горно-луговой почвы с высоким уровнем накопления гумуса аминокспирты (0,2 М) выделяют намного больше гумусовых веществ, чем 0,1 н. NaOH. Причем препараты ГК, выделенные аминокспиртами, содержат меньше золы и характеризуются большим выходом $C_{гк}$ (табл. 1).

Таблица 1

Выделение гуминовых кислот из почвы различными экстрагентами

Экстрагенты	Концентрация, М	рН	Вес препарата		Зола, %	С _{гк} , % от	
			г	%		песка почвы	C _{орг}
NaOH	0.1	12.9	19.0	10.1	9.0	1.24	13.6
Моноэтаноламин	0.2	11.3	53.0	27.9	6.3	1.93	21.8
Диэтаноламин	0.2	10.6	53.5	28.2	6.3	2.57	28.2
Триэтаноламин	0.2	10.3	79.5	41.8	6.0	2.34	25.7

Следует отметить, что препараты гумусовых веществ, выделенные аминокспиртами, находятся в различном состоянии: гуминовые кислоты — в кристаллизованном, фульвокислоты — слабокристаллизованном, чешуйчатом при моноэтаноламин и аморфном, несколько вязком при ди- и триэтаноламинах. Поэтому для выделения препаратов гумусовых веществ рекомендуется применять 0,2 М раствор моноэтаноламина.

В полученных препаратах гумусовых веществ (0,1 г) определяли активность некоторых ферментов (9). Препараты измельчали и просеивали через сито с диаметром отверстий 0,25 мм. Необходимо отметить, что гумусовые вещества в кристаллическом состоянии проявляют сравнительно меньшую активность ферментов, в частности тех, оптимум рН которых находится в слабокислом интервале. При растворении гумусовых веществ обнаруживается высокая ферментативная активность. В жидкой фазе создаются оптимальные условия для ферментативной реакции, так как граница раздела между молекулой фермента и субстратом снимается и имеет место гомогенный катализ. Для этого необходимо препараты гумусовых веществ предварительно растворить в 1—2 мл фосфатного буферного раствора (рН 8,0), затем определить активность ферментов.

Опыты показали, что препараты гумусовых веществ обладают очень высокой активностью ферментов (табл. 2). Ферменты гумусовых препаратов электрофоретически не разделяются, следовательно, они находятся в сложном комплексе с гуминовыми и фульвокислотами и иммобилизованы ими. В качестве контроля служили стерилизованные сухим жаром при 180° в течение 3—4 ч препараты. Стерилизация пол-

ностью не снимает ферментативное действие гумусовых веществ. Гуминовые и фульвокислоты как высокомолекулярные, сложные структурные образования обладают значительными каталитическими свойствами (¹⁰⁻¹¹). Приведенные данные показывают, что препараты гумусовых веществ, выделенные с помощью NaOH, имеют низкую фермен-

Таблица 2

Ферментативная активность препаратов гуминовых кислот, выделенных различными экстрагентами (на 1 г препарата)

Экстрагент	Инвертаза, мг глюкозы	Фосфата- за, мкг Р	Уреаза, мг NH ₃	АТФаза, мкг Р	Дегидроге- назы, мг ТФФ	Каталаза, см ³ O ₂
NaOH	34.7	21.4	22.9	5.2	0.4	4.0
Моноэтаноламин	66.9	34.3	28.1	28.0	16.4	16.0
Диэтаноламин	65.2	21.4	28.1	28.8	16.3	9.5
Триэтаноламин	65.9	27.4	28.1	29.2	16.3	10.0

тативную активность. NaOH, по сравнению с моноэтаноламином, сильно инактивирует дегидрогеназы — на 97,5%, каталазу — 75%, АТФазу — 81,4%, затем инвертазу — 48,1%. Уреаза и фосфатаза инактивируются меньше — соответственно на 18,5 и 37,6%. Аналогичная картина получена и для препаратов фульвокислот. Следовательно, NaOH является жестким экстрагентом гумусовых веществ, и его не целесообразно применять при изучении ферментативной активности препаратов гуминовых и фульвокислот. Для этой цели рекомендуется использовать 0,2 М раствор моноэтаноламина.

Таким образом, препараты гумусовых веществ обладают высокой активностью ферментов. Молекулы гуминовых и фульвокислот являются носителями при иммобилизации ферментов почв.

Институт почвоведения и
агрохимии МСХ Армянской ССР

Ա. Շ. ԿԱԼՍՅԱՆ, Ս. Ա. ԱՔՐԱՀԱՄՅԱՆ, Ե. Ե. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

Հումուսային էյուրերի ֆերմենտային ակտիվության ուսումնասիրությունը

Հողից հումուսային էյուրերի անջատման համար կիրառվել են նոր արտամղիչներ՝ մոնո-, դի- և տրիէթանոլամինների տարբեր խտության լուծույթներով Կիրառված ամինապիրտները նատրիումի հիդրօքսիդի համեմատությամբ ավելի եււրր արտամղիչներ են: Լկյդ նպատակի համար առաջարկվում է օգտագործել մոնոէթանոլամինի 0,2 մոլյարանոց լուծույթ: Պարզված է, որ հումինաթթուները և ֆուլվոթթուներն օժտված են ֆերմենտային ակտիվությամբ: Ուստի հումուսային էյուրերը հանդիսանում են հողի արտաբջջային ֆերմենտների կրողները: Լկյս հարցերի ուսումնասիրությունը բացահայտում է հողի ֆերմենտների գործունեության առանձնահատկությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ЭРЦЧЦЬПРФВНРЪ

- ¹ В. Ф. Куревич, Т. А. Щербакова. Почвенная энзимология. Минск, 1966. ² А. Ш. Гаджян, Ферментативная активность почв Армении. „Айастан“, Ереван, 1974.
- ³ М. Н. Briggs, S. Segal, Liefe Sci., 2, 1963. ⁴ Martin-Smith, Nature, 197, 4865 (1963).
- ⁵ Т. А. Щербакова, В. П. Максимова, Н. А. Голушко, ДАН БССР, т. 14, № 7 (1970)
- ⁶ И. М. Кононов, Органическое вещество почв, „Наука“, М., 1964. ⁷ Д. С. Орлов, А. А. Гришин, Н. Л. Ерошечева, Практикум по биохимии гумуса, Изд. МГУ, М., 1969.
- ⁸ Д. С. Орлов, Гумусовые кислоты почв, Изд. МГУ, М., 1974. ⁹ А. Ш. Гаджян, Почвоведение, № 2, 1978.
- ¹⁰ A. D. Mc Laren, Chemical Scripta, № 8, 1975.
- ¹¹ A. D. Mc Laren, A. H. Pak:to, J. Barshad, Soil. Science, vol. 119, № 2 (1975).

