ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1977

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТОВ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ

Распространение слабых ударных волн в недиспергирующих средах рассматривалось в [3—5].

Существенно дисперсионный и диссипативный характер имеет распространение волн в реагирующих средах, уравнения коротких волн для которых получены и исследованы в [6, 9, 10]. Помимо изучения свойств решений указанных уравнений представляет интерес рассмотрение волн с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Общий метод для получения уравнений для модулированных колебаний в диспергирующих нелинейных средах предложен в [1, 2, 13].

1. В данной статье комбинированием метода [3, 5] с методом [1] выводятся уравнения для медленно изменяющихся параметров для произвольной волны в трехмерной постановке. Подобная задача, например, возникает при дифракции плоской монохроматической волны (или волны, близкой к ней) от плоского или пространственного угла, причем трехмерная (двухмерная) задача имеет место вблизи лучей, проходящих через точки или линии касания отраженных от угла волн с точечными волнами, произведенными вершиной угла, или, по принятой терминологии, на границе области дифракции [8, 15].

Для значительных расстояний от отражающего угла становятся существенными искажения профиля волны из-за дисперсии и нелинейности, и требуется вывести уравнения, описывающие слабые изменения амплитуды и фазы волны. В силу стационарности задачи имеется бесчисленное множество конфигураций фронтов волн, каждая из которых характеризуется некоторым параметром t, представляющим время, прошедшее с момента ее отражения от вершины угла.

Поэтому в качестве «основной» волны выбирается, для определенности, невозмущенная точечная волна (которая связана только со свойствами среды, а не формой отраженной или падающей волны), произведенная в момент $t = 0$ вершиной угла и рассматриваемая в момент t, уравнение которой берем в виде $\bar{\tau} = \omega t$, $\bar{\tau}_1 = \omega \tau_1(\bar{r})$, где ω — основная частота процесса, $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки. Рассматриваются для общности те участки волны, для которых решение зависит не только от координаты x_1 по нормали к волне, но также и от координат x_2, x_3, отсчитываемых в поверхности волны.

Величина $\varepsilon = \tau_1 - t$ является эйконалом для точечной невозмущенной волны (в отсутствие нелинейного искажения). В качестве координат, отсчитываемых в поверхности волны, удобно выбрать [5] координаты

θ, ζ, где $\theta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$ дают уравнения лучей для точечной волны, причем $dx_2 = H_2 d\theta$; $dx_3 = H_3 d\zeta$; H_2, H_3 — параметры Ламе.

Вначале рассматриваются линейные уравнения. Как и в нестационарной задаче [5] без ограничения общности можно вместо линейной системы уравнений рассматривать линейное уравнение для одной из функций. Чтобы показать это, для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + b_{ij} u_j = a_{ij}^{(k)'} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \tag{1.1}$$

для рассматриваемого движения, близкого к монохроматической волне, можно полагать $u_j = U_j(\bar{r}, t) \exp(i\tau_1 - i\omega t)$, где U_j есть медленно меняющаяся функция аргументов, что с точки зрения порядков (как принято в геометрической оптике) эквивалентно предположению о больших значениях ω. Предполагая, что $b_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$, $a_{ij}^{(k)'} \sim \frac{a_{ij}^{(k)}}{\omega}$, $C_{ij} \sim \frac{B_{ij}}{\omega}$ и порядок $a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$, $B_{ij} u_j$ одинаков, можно разрешить уравнения относительно, например, $u_1 = \Phi_1$,

$$\Phi_1 = \Psi e^{i\tau} \tag{1.2}$$

и получить

$$\Delta \Phi_1 = P(u_j), \quad \Delta = \det \left| a_{ij}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k} + B_{ij} \right|$$

где $P(u_j) = -A_{1i} C_{ij} u_j - A_{1i} a_{ij}^{(k)'} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + P'$, A_{1i} — алгебраические дополнения элементов a_{i1} в Δ; P' есть результат действия операторов в Δ на переменные коэффициенты, который приводит к производным, по крайней мере, на порядок ниже, чем в Δ, и то же относится к A_{1i}, поэтому для больших ω, предполагая, что для основных членов имеют место порядки $\Delta \sim \omega^n$, можно найти $P \sim \omega^{n-1}$. Поскольку в окончательных уравнениях оставляются члены порядка ω^{n-1}, можно в P вместо u_j подставить их значения из характеристических уравнений $a_{ij}^{(k)} \alpha_k u_j + B_{ij} u_j = 0$, $\alpha_k = \frac{\partial \tau}{\partial x_k}$, имеющих место в порядке ω^n, и дифференцировать только множитель $e^{i\tau}$ в Φ_1, при этом слагаемое P будет содержать лишь множитель Ψ, и оно влияет только на лучевое решение.

Поскольку слагаемое $-\Psi \frac{d \ln K}{dt}$, где K есть линейное одномерное по нормали к волне, или лучевое, решение, включается в окончательное уравнение (1.11), учитывая все члены, содержащие Ψ в порядке ω^{n-1}, при дальнейших выкладках слагаемые с Ψ порядка ω^{n-1} можно не выписывать вплоть до окончательного уравнения, что значительно облегчает действие с операторами, позволяя производить с ними действие в порядке ω^{n-1} как с операторами с постоянными коэффициентами. При нахождении оператора от произведения $\Psi e^{i\bar{\tau}}$ можно пользоваться формулой Лейбница, согласно которой для любого линейного оператора по переменной x

$$L(f\varphi) = \varphi L(f) + L_{\frac{\partial}{\partial x}}(f)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}L_{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}(f)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \ldots$$

то есть оператор следует записывать в виде ряда (многочлена) по оператору $\frac{\partial}{\partial x}$. Указанную формулу можно применить к оператору Δ от $\Psi e^{i\bar{\tau}}$ по переменным x_i, t. Следует учесть, что для неплоской волны и неоднородной среды коэффициенты в Δ, а также компоненты нормали к волне $\alpha_j = \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial x_j}$ могут зависеть от x_i, t. Тогда в указанную формулу следует добавить слагаемые, соответствующие действию операторов $\frac{\partial}{\partial x_k}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ на переменные коэффициенты. Однако, как показано ниже, в основном порядке ω^{n-1} это отразится лишь на слагаемых, содержащих Ψ, которые включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде слагаемого, содержащего лучевое решение. Применяя оператор Δ к произведению (1.2), учитывая медленную зависимость Ψ от x_k, t и оставляя слагаемые основного порядка ω^{n-1} (см. далее), можно получить

$$\Delta\left(\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial x_1}, \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial x_2}, \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial x_3}, -\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial t}\right)\Psi e^{i\bar{\tau}} + \left(-i\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\right)\left(\Delta_{-i\frac{\partial}{\partial x_k}} e^{i\bar{\tau}}\right) +$$
$$+ \left(i\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\left(\Delta_{i\frac{\partial}{\partial t}} e^{i\bar{\tau}}\right) + \frac{1}{2}\left\{-\Delta_{\left(-i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial x_j} +\right.$$
$$\left. + 2\Delta_{\left(-i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial t} - \Delta_{\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right\} e^{i\bar{\tau}} = 0 \qquad (1.3)$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Полагая $\alpha_j = \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2, 3)$, учитывая дисперсионное уравнение линейной задачи

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega) = 0 \qquad (1.4)$$

и вводя производные по τ, θ, ζ по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\alpha_j\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

можно (1.3) записать в виде

$$\chi=\alpha_k\Delta_{\alpha_k}$$

$$i\Delta_\omega\frac{\partial\Psi}{\partial t}-i\chi\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}-i\Delta_{\alpha_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-i\Delta_{\alpha_k}\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\Delta_{\alpha_k\alpha_j}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial x_j}-2\Delta_{\alpha_k\omega}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial t}+\Delta_{\omega\omega}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)=0 \tag{1.5}$$

В силу уравнений лучей

$$\frac{dx_k}{d\sigma}=\Delta_{\alpha_k},\quad \frac{dt}{d\sigma}=-\Delta_\omega \tag{1.6}$$

можно записать для производной вдоль них $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|=\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{1}{\Delta_\omega}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\chi$, где учтено, что

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\Delta_{\alpha_k}=0,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\Delta_{\alpha_k}=0 \tag{1.7}$$

Из уравнения (1.5), выражая в нем производные по x_k через производные по лучевым переменным, заменяя в малых более высокого порядка вторых производных от Ψ $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\chi}{\Delta_\omega}\frac{\partial}{\partial\tau}$ и учитывая (1.7), можно получить

$$i\Delta_\omega\frac{\partial\Psi}{\partial t}+Z-\frac{1}{2}\Gamma\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\partial\theta}\Lambda+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\partial\zeta}\Lambda_1=0 \tag{1.8}$$

где

$$\Lambda=\left(\Delta_{\alpha_k\omega}\frac{\chi}{\Delta_\omega}-\Delta_{\alpha_k\alpha_j}\alpha_j\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_k}$$

$$\Gamma=\sum_{j,\,k=1}^{3}\alpha_k\alpha_j\Delta_{\alpha_k\alpha_j}+\Delta_{\omega\omega}\chi^2\frac{1}{\Delta_\omega^2}-2\frac{\chi}{\Delta_\omega}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\Delta_{\alpha_k\omega}$$

$$Z=-\frac{1}{2}\Delta_{\alpha_k\alpha_j}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\Psi$$

а Λ_1 получается из Λ заменой θ на ζ.

Вообще говоря, для неплоской волны и неоднородной среды при получении (1.8) из (1.2) следует учесть влияние операторов на $\alpha_k=\alpha_k(x_j)$. Однако, в основных порядках это отразится лишь на слагаемых, содержащих Ψ, которые включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде слагаемого, содержащего лучевое или немодулированное решение K. В самом деле, по предположению зависимость Ψ от τ, θ, ζ, t является медленной, что с точки зрения порядков эквивалентно предположению о больших значениях эйконала τ_1, принимаемому в геометрической оптике. Последнее равносильно тому, что велики x_i, t или ω, причем для определенности при определении порядков считаем ω большим и порядок членов в (1.4) равным ω^n. Кроме того, естественно, принять для медленных переменных в Ψ порядки

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\sim\frac{\Psi}{\sqrt{\omega}},\qquad\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\sim\sqrt{\omega}\Psi,\qquad\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}\sim\sqrt{\omega}\Psi$$

при которых все члены в (1.8) имеют порядок ω^{n-1}. Тогда действие операторов на переменные коэффициенты в (1.3) дает порядок ω^{n-1} лишь в слагаемых, содержащих Ψ (при однократном действии операторов в Δ на α_k), причем члены с Ψ включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде слагаемого, содержащего лучевое решение, поэтому вычисления, проведенные при получении (1.8), являются обоснованными и для неоднородной среды, что также видно из иного вывода уравнений, приведенного далее. В п. 2 рассматривается задача дифракции для недиспергирующей среды, для которой $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega)$ предполагается однородной функцией. Сюда относятся идеальные сплошные среды, которые могут быть неоднородными. Тогда $\omega\Delta_\omega = -Z$, и, как видно из (2.3), $\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\sim\frac{1}{\omega}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\sim\frac{\Psi}{\omega}$. В типичной задаче дифракции и для диспергирующей среды $\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\sim\frac{\Psi}{\omega}$.

Так как Λ, $\Lambda_1\sim\Delta_\omega$ в порядке ω^{n-1}, последние три слагаемых в (1.8) выпадают (кроме указанных задач, также и в случае узких пучков в диспергирующей среде зависимость Ψ от τ значительно меньше, чем от θ, ζ).

Для вычисления слагаемого Z в (1.8) можно, как и для нестационарной задачи при отсутствии дисперсии [5], показать, что при определении коэффициентов при производных $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}$, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}$, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial\zeta}$ в уравнениях движения среды можно совмещать оси $x_{1,2,3}$ с осями подвижного трехгранника с началом в данной точке касания волн, причем ось x_1 направлена по нормали к точечной волне. Последующие вычисления до формулы (1.11) верны также и для нестационарной задачи [5]. Обозначим через s_1, s_2 длины дуг линий пересечения волны $\tau = 0$ с поверхностями $\theta = \mathrm{const}$, $\zeta = \mathrm{const}$ соответственно. Тогда $\theta=\theta(s_1)$, $\zeta=\zeta(s_2)$, и имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_2}=0,\qquad\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_1}=\frac{\partial\theta}{\partial s_1}=\frac{1}{H_2},\qquad\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\Delta_{\alpha_j}=0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_1}=0,\qquad\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_2}=\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}=\frac{1}{H_3},\qquad\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\Delta_{\alpha_j}=0$$

Поскольку ось x_1 направлена по нормали к волне, $\dfrac{\partial x_1}{\partial s_1} = 0$, $\dfrac{\partial x_1}{\partial s_2} = 0$ и тогда получится

$$\theta_{x_1} = \frac{\Delta_\gamma \dfrac{\partial x_2}{\partial s_2} - \Delta_\beta \dfrac{\partial x_3}{\partial s_2}}{H_2 D}, \quad \theta_{x_2} = \frac{\dfrac{\partial x_3}{\partial s_2}\Delta_\alpha}{H_2 D}, \quad \theta_{x_3} = -\frac{\dfrac{\partial x_2}{\partial s_2}\Delta_\alpha}{H_2 D}$$

$$\zeta_{x_1} = -\frac{\dfrac{\partial x_3}{\partial s_1}\Delta_\beta - \dfrac{\partial x_2}{\partial s_1}\Delta_\gamma}{H_3 D}, \quad \zeta_{x_2} = \frac{\dfrac{\partial x_3}{\partial s_1}\Delta_\alpha}{H_3 D}, \quad \zeta_{x_3} = \frac{-\dfrac{\partial x_2}{\partial s_1}\Delta_\alpha}{H_3 D}$$

$$D = \Delta_\alpha \left(\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_2} - \frac{\partial x_3}{\partial s_1}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} \right) \tag{1.9}$$

где для удобства обозначено $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = \gamma$. Следует также учесть соотношения, получаемые из (1.5) при $\omega = \mathrm{const}$, $\alpha = \alpha(\beta, \gamma)$

$$\Delta_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \Delta_\beta = 0, \quad \Delta_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \Delta_\gamma = 0$$

$$\Delta_{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right)^2 + 2\Delta_{\alpha\beta}\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \Delta_{\beta\beta} + \Delta_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = 0$$

$$\Delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \Delta_{\alpha\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \Delta_{\beta\gamma} + \Delta_{\alpha\beta}\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \Delta_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$$

$$\Delta_{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}\right)^2 + 2\Delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \Delta_{\gamma\gamma} + \Delta_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} = 0 \tag{1.10}$$

С учетом (1.10) слагаемое Z в (1.8) примет вид

$$-\frac{2D^2}{\Delta_\alpha^3} Z = \frac{1}{H_2^2}\left\{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\right)^2 + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial x_3}{\partial s_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\frac{\partial x_3}{\partial s_2}\right\}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{1}{H_3^2}\left\{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\right\}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} +$$

$$+ \frac{2}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_2} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\right\}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial \zeta}$$

Теперь можно выбрать оси x_2, x_3 по касательным к линиям s_1, s_2. Тогда (1.8) запишется в виде

$$i\Delta_\omega \frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big| - \frac{1}{2}\Gamma\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} + \Lambda\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial\tau} + \Lambda_1\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta\partial\tau} +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta_\omega\left(\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\zeta}\right)\Psi -$$

$$-i\Delta_\omega\Psi\frac{d\ln K}{dt} = 0 \qquad (1.11)$$

где K есть одномерное по нормали к волне линейное решение без дифракционных эффектов, даваемых $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}$, или лучевое решение для Ψ, причем последнее слагаемое в (1.11) добавлено взамен отброшенных производных низшего порядка. Проведенные вычисления особенно наглядны для недиспергирующей среды, для которой производные α по β и γ имеют тот же смысл, что и коэффициенты в уравнениях вблизи нестационарных слабых ударных волн [5], а искажение профиля волны, то есть отличие функции Ψ в (1.2) от K, для указанной среды происходит из-за нелинейности, причем в следующем параграфе рассматривается характерная задача для нелинейной среды без дисперсии. Для диспергирующей среды связь более сложная, а для диссипативной среды уравнения (1.6) становятся комплексными, и полученные далее уравнения для амплитуд и фаз требуют уточнения. Имеет смысл уточнить коэффициенты в (1.11) для уравнений, описывающих окрестность слабых ударных волн [3—6, 10]. Имеет место [5, 10] в окрестности волны Σ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\tau} - \frac{H_1}{2}\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial\beta'^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\alpha'}{\partial\gamma'^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2\alpha'}{\partial\beta'\partial\gamma'}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}\right) -$$

$$-\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{d\ln A}{dt} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\lambda+1}{H_1}u\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) + \nu\frac{\partial^3 u}{H_1^2\partial\tau^3} + k\frac{\partial^4 u}{H_1^3\partial\tau^4} = 0$$

$$d\tau = \frac{dx_1}{H_1}$$

причем последние слагаемые характеризуют диссипацию и дисперсию, штрихи поставлены для различия с α, β, γ в осредненных уравнениях (1.11). Записывая $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}V_i$, где $V_i = \Delta_{x_i}$ есть групповая скорость точек волны Σ и отбрасывая нелинейный член, можно получить дисперсионное уравнение (1.4) в виде

$$\Delta = \omega + V_i' x_i - \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial\beta'^2}\beta^2 + \frac{\partial^2\alpha'}{\partial\gamma'^2}\gamma^2 + 2\frac{\partial^2\alpha'}{\partial\beta'\partial\gamma'}\beta\gamma\right) - \nu i\sigma^2 + k\sigma^3$$

$$\alpha'\Delta_\omega = 1$$

что, после подстановки в (1.10), позволяет определить коэффициенты в (1.11), причем при малых ν и k получается указанное выше совпадение производных Δ' по α_i и Δ по α, β, γ. Кроме того, имеет место [7] $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{1}{24\alpha^2 k}$*. В свою очередь можно записать [7] $\Psi = ae^{i\varphi}$, где a, φ — медленно меняющиеся значения амплитуд и возмущенной фазы (эйконала) решения в окрестности волны $\tau_1 = \omega t$. Подставляя Ψ в (1.11) и отделяя действительную и мнимую части, можно получить уравнения в линейной задаче

$$\varphi_t|_0 + \frac{1}{2}\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\varphi_y^2 + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\varphi_z^2 + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\varphi_y\varphi_z\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta_\alpha}{a\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}a_{yy} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}a_{zz} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}a_{yz}\right) +$$

$$+\frac{1}{2a\Delta_\omega}\Gamma(a\varphi_\tau^2 - a_{\tau\tau}) + \frac{1}{a\Delta_\omega}\Lambda H_2(a\varphi_\tau\varphi_y - a_{\tau y}) +$$

$$+\frac{1}{a\Delta_\omega}\Lambda_1 H_3(a\varphi_\tau\varphi_z - a_{\tau z}) = 0 \qquad (1.12)$$

$$(a^2)_t|_0 - a^2\frac{d\ln K^2}{dt} + \frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega}\left\{\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}(a^2\varphi_y)_y + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}(a^2\varphi_z)_z +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}(a^2\varphi_y)_z + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}(a^2\varphi_z)_y\right\} - \frac{1}{\Delta_\omega}\Gamma(a^2\varphi_\tau)_\tau +$$

$$+\frac{1}{\Delta_\omega}\Lambda H_2\{(a^2\varphi_\tau)_y + (a^2\varphi_y)_\tau\} + \frac{1}{\Delta_\omega}\Lambda_1 H_3\{(a^2\varphi_\tau)_z + (a^2\varphi_z)_\tau\} = 0 \qquad (1.13)$$

Здесь $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Значения производных α по β, γ в задаче магнитной газодинамики для недиспергирующей среды конкретизированы в [5]. Можно рассмотреть ту же задачу в приближении нелинейной геометрической оптики. Пусть $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$ есть дисперсионное уравнение нелинейной задачи [1], причем $\omega \approx \omega_0(\alpha, \beta, \gamma) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2$, где $\omega = \omega_0$ есть линейное уравнение дисперсии волн. Тогда фаза или эйконал $F(\bar{r}, t) = \tau(\bar{r}, t) + \varphi(\bar{r}, t)$, $\tau = \tau_1 - \omega_0^{(0)} t$, $\omega_0^{(0)} = \omega_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ есть фигурирующая в (1.1) в роли ω невозмущенная частота [1]. Имеет место для медленно меняющихся величин

$$\omega(\bar{r}, t) = -\frac{\partial F}{\partial t} = \omega_0^{(0)} - \varphi_t, \quad \bar{k}(\bar{r}, t) = \nabla F(\bar{r}, t) = \bar{k}_0 + \Delta\varphi$$

$$\bar{k}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0), \quad \alpha = \alpha_0 + \varphi_x, \quad \beta = \beta_0 + \varphi_y, \quad \gamma = \gamma_0 + \varphi_z$$

* При $k = 0$ следует учитывать кубичную нелинейность.

Отсюда получится

$$-\varphi_t - \bar{V}\nabla\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\varphi_x^2 + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\beta^2}\varphi_y^2 + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\gamma^2}\varphi_z^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\beta}\varphi_x\varphi_y + 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\gamma}\varphi_x\varphi_z + 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\beta\partial\gamma}\varphi_y\varphi_z\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \qquad (1.12')$$

где $\bar{V} = \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}, \frac{\partial\omega_0}{\partial\beta}, \frac{\partial\omega_0}{\partial\gamma}\right)$ дает лучевую скорость.

В силу (1.9) имеет место $\partial\theta/\partial x = -\Delta_2/\Delta_\omega H_2$, $\frac{\partial\zeta}{\partial x} = -\Delta_1/\Delta_\omega H_3$, и тогда $\varphi_x = \varphi_\xi\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\varphi_y + \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}\varphi_z$. Учитывая, что (1.10) имеет место также и при замене Δ на $\omega - \omega_0(\alpha, \beta, \gamma)$, можно получить соотношения, в силу которых (1.12') примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_\xi - \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\varphi_y^2 + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\varphi_z^2 + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\varphi_y\varphi_z\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\alpha^2\varphi_\xi^2 + \alpha\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\varphi_\xi\varphi_y +$$

$$+ \alpha\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)\varphi_\xi\varphi_z = 0$$

При указанном выборе осей имеет место $\beta \approx 0$, $\gamma \approx 0$, поэтому можно значения Γ из (1.6) и Λ, Λ_1 из (1.8) записать в виде

$$\Gamma = \alpha^2\left(\Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\omega\omega}\frac{\Delta_\alpha^2}{\Delta_\omega^2} - 2\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega}\Delta_{\alpha\omega}\right) = -\Delta_\omega\alpha^2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}$$

$$\Lambda = -\frac{\alpha}{H_2}\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\Delta_{\omega\omega}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \Delta_{\alpha\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\Delta_{\omega\beta} + \Delta_{\alpha\beta}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{H_2}\Delta_\omega\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\beta}\right)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\alpha}{H_3}\Delta_\omega\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)$$

Тогда можно видеть, что вышенаписанное уравнение для φ, после отбрасывания нелинейного члена, совпадает с (1.12), в котором отброшены дифракционные члены, и окончательно получится

$$\varphi_t\Big|_\xi + \frac{1}{2}\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\varphi_y^2 + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\varphi_z^2 + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\varphi_y\varphi_z\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\Delta_\alpha}{a\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}a_{yy} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}a_{zz} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}a_{yz}\right) +$$

$$+\frac{\Lambda H_2}{a\Delta_\omega}(a\varphi_z\varphi_y - a_{zy}) + \frac{\Lambda_1}{a\Delta_\omega}H_3(a\varphi_z\varphi_z - a_{zz}) +$$

$$+\frac{1}{2a\Delta_\omega}\Gamma(a_{zz} - a\varphi_z^2) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 = 0 \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.14) получено из общих рассмотрений работы [5], а также сравнением полученных различными способами уравнений (1.12) и (1.12') для φ. Что касается уравнения (1.13), то слагаемое K, фигурирующее в нем, должно получаться из закона сохранения возмущенной энергии волны, имеющем место в одномерной постановке [14] $\rho_0 \sum v^2 \frac{H_1^2}{c_n} = \text{const}$, где Σ — площадь волны внутри заданной лучевой трубки, c_n — нормальная скорость волны относительно частицы, ρ — плотность среды, v — возмущенная скорость частиц, причем K определится через v из условий совместности на волне. Коэффициент $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$ в (1.14) должен определяться из нелинейного дисперсионного уравнения $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$. Общий способ определения такого уравнения дается методом Витема [1]. Пусть уравнения движения среды получаются вариацией лагранжиана $\int L(\Phi_t^\nu, \Phi_{x_j}^\nu, \Phi^\nu)\,dx\,dt$, где $dx = dx_1 dx_2 dx_3$, $j = 1, 2, 3$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Для малых амплитуд можно за основное решение выбрать $\Phi^\nu = a^\nu \cos\theta$, $\theta = \alpha_j x_j - \omega t$. Подставляя указанное решение в функционал, вводя затем осредненный лагранжиан

$$L(\omega, \alpha_j, a^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(-\omega\Phi_\theta^\nu, \alpha_j\Phi_\theta^\nu, \Phi^\nu)\,d\theta$$

где все a^ν выражены через одну из них из условий совместности, можно для малых a записать $L = a^2 L_0(\alpha_j, \omega) + \frac{a^4}{2} G(\alpha_j, \omega)$. Оставляя только первое слагаемое в праной части и варьируя по a^2, можно получить [1] $L_0(\alpha_j, \omega) = 0$, то есть дисперсионное уравнение в линейной постановке, $L_0 = \Delta$. Варьируя L по a^2, можно найти $L_0(\alpha_j, \omega) + a^2 G(\alpha_j, \omega) = 0$, что дает искомое соотношение $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$.

Как и в работе [7] (Приложение A), можно показать, что из соотношения $\omega = \omega(\alpha_j, a^2)$ получается уравнение (1.12) или более общее соотношение (1.14) с дифракционными членами. Подставляя a^2 из (1.14) в равенство $L = -\frac{a^4}{2} G(\alpha_j, \omega)$, где в G можно вместо ω, α_j подставить их невозмущенные значения, затем подставляя L в уравнение $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{x_j}}\right) = 0$, в которых по j проводится суммирование от 1 до 3, $x_1 = \tau$, можно показать, что слагаемые, содержащие старшие производные в указанном уравнении, совпадут с соответствующими слагаемыми в (1.13), а недифференцируемые члены вида const a^2 дадут слагаемое $-a^2 \dfrac{d \ln K^2}{dt}$ в (1.13). Таким образом, как и в [7], где рассмотрена плоская волна в однородной среде, показано, что вариация L по φ приводит к уравнению (1.13) для a^2.

В плоской задаче $\varphi_z = a_z = \Delta_1 = 0$ условие действительности характеристик $F = 0$ уравнений (1.12), (1.15) без вторых производных a*

$$J = a^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial a^2} n_\tau^2 + 2\Delta n_\tau H_2 n_y + \Delta_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} n_y^2$$

$$J\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right) > 0; \qquad n_\tau = \frac{\partial F}{\partial \tau}, \qquad n_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

первое слагаемое в J дает условие продольной устойчивости волны, а последнее слагаемое в J дает условие поперечной устойчивости $\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 \left(-\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}\right) > 0$, и для вогнутой части медленной магнитозвуковой волны, для которой $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} > 0$, должно быть $\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$, то есть чем больше a^2, тем меньше скорость волны, и вогнутость сохраняется.

Указанное условие $\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ требует проверки вычислением.

Учет вторых производных a увеличивает область устойчивости до

$$-Y^2 < 4a_0^2 J \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$$

В двумерной задаче при отсутствии дисперсионных эффектов, заменяя $a(\beta, \omega)$, β на $\beta(\alpha, \omega)$, α, из (1.11) можно найти

$$i\Delta_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t}\bigg| + \frac{1}{2}\Delta_2 H_2^{-2} \beta''(\alpha, \omega) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - i\Delta_0 \Psi \frac{d \ln K}{dt} = 0 \qquad (1.15)$$

где $\Gamma = 0$, $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau \partial \theta} \approx 0$, штрихом обозначены производные по α.

---

* В пространственной задаче условие устойчивости записывается

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 \left(a^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial a^2} n_\tau^2 + 2\Delta n_\tau H_2 n_y + 2\Delta_1 n_\tau H_3 n_z + \Delta_2 K_1\right) > 0$$

$$K_1 = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} n_y^2 + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} n_z^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} n_y n_z$$

2. Уравнение (1.15) соответствует линейной периодической во времени задаче, решение которой можно получить из решения нестационарной задачи в окрестности касания разрывной волны произвольной формы S с точечной волной для произвольной линейной недиссипативной среды при отсутствии дисперсионных эффектов, имеющего вид при $\theta > \theta_0$ [5]

$$u = \frac{1}{\pi} \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)(t - \tau_1)}}{\theta - \theta_0}$$

$$t > \tau_1; \quad u = 0, \quad t < \tau_1 \tag{2.1}$$

с помощью преобразования Лапласа по t в виде $(s = -i\omega)$

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi} \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \int\limits_{\tau_1}^{\infty} e^{-st} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)(t - \tau_1)}}{\theta - \theta_0}\, dt \tag{2.2}$$

Здесь преобразование Лапласа берется по «быстрой» переменной, входящей в эйконал $(t - \tau_1)$. A есть величина лучевого решения на точечной волне, кривизны k_1, k_2 [5] точечной волны и начальной волны, из которой получилась данная волна S, считаются постоянными (они вычисляются на волне $t = \tau_1$, поэтому их можно считать функциями $\tau_1 \approx t$), c_0 есть значение нормальной проекции к волне групповой скорости в начальной точке, θ — угловая координата, θ_0 — значение θ в точке касания волн [5].

Вычисляя интеграл, можно получить широко известную из теории [8, 11, 15] отражения акустических волн от угла формулу при $\theta > \theta_0$

$$\bar{u} = \frac{e^{-s\tau_1}}{2\sqrt{k_1 - k_2}\, s} A e^{\frac{s(\theta - \theta_0)^2}{2c_0(k_1 - k_2)}} \left\{1 - \Phi\left(\frac{1}{k}\sqrt{s}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)}} \tag{2.3}$$

где $\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\xi} e^{-x^2} dx$ есть интеграл Френеля. Следует отметить, что формула для $\bar{u}$ дает решение в окрестности касания волн для периодической задачи в произвольной среде. Отождествляя $\bar{u}$ с $\Phi_1 e^{-st}$, из (1.1) можно получить в линейной задаче

$$\Psi = \frac{A}{2\sqrt{k_1 - k_2}\, s} \lambda_1\left(\frac{\sqrt{s}}{k}\right), \quad \lambda_1(\xi) = e^{\xi^2}[1 - \Phi(\xi)] \tag{2.4}$$

причем, как видно из решения, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} \approx \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\partial\theta} \approx 0$. Подставляя Ψ в (1.15) и учитывая формулу, связывающую k_1 с уравнением кривой нормалей к волне $\beta(\alpha, \omega)$ [5]

$$\frac{dk_1}{dt} = -\frac{\omega\Delta_\theta}{\Delta_\omega}\frac{\beta''}{H_2 c_0} \tag{2.5}$$

можно убедиться, что уравнение (1.15) удовлетворится при выполнении соотношения $K = A$, что еще раз подтверждает тот факт, что K есть значение лучевого решения для точечной волны.

При $\theta < \theta_0$ имеет место (2.1) для $t > \tau_1$, причем выбирается ветвь арктангенса $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$; при $t < \tau_1 - \frac{1}{k^2}$, то есть впереди волны S, $u = 0$, а между волной и точечной волной $(\tau_1 = t)$ $u = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}}$ [5]. Тогда можно получить, подобно (2.2),

$$\frac{\sqrt{k_1 - k_2}}{A}\bar{u} = \frac{e^{-s\tau_1}}{2s} e^{\frac{s}{k^2}} \left\{1 + \Phi\left(\frac{1}{-k}\sqrt{s}\right)\right\} \tag{2.6}$$

причем $\Psi = e^{s\tau_1}\bar{u}$ так же, как и (2.4), удовлетворяет уравнению (1.15). Используя асимптотические представления для функции $\Phi(x)$

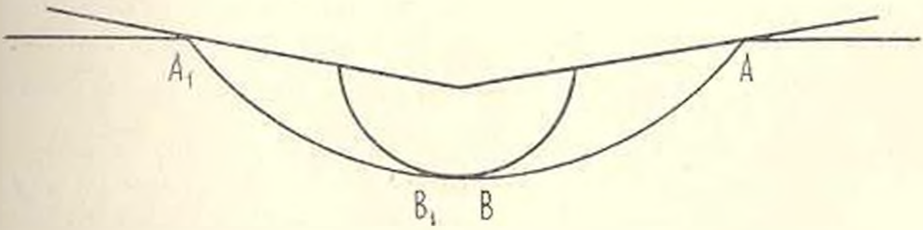
$$\Phi\left(\frac{1}{|k|}\sqrt{s}\right) \approx 1 - \frac{|k|}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}} e^{-\frac{s}{k^2}}, \qquad \left|\frac{\sqrt{s}}{|k|}\right| \gg 1$$

можно получить из (2.3) вблизи точечной волны

$$\Psi_p = a_p e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad a_p = A\varkappa, \ \varkappa = \frac{\sqrt{c_0 \frac{1}{2\pi}}}{\omega^{3/2}(\theta - \theta_0)}$$

что дает решение на точечной волне вдали от точки касания волн. То же решение можно получить из решения (2.1) в указанной области. Поскольку в линейной задаче вблизи точечной волны $\varphi_p = \frac{3\pi}{4}$, естественно в нелинейной задаче также считать, что в основном порядке φ_p, a не зависят от θ, тогда (1.14), (1.15) дают

$$a_p = A\varkappa, \qquad \varphi_p = -\int \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 A^2\varkappa^2 dt + \frac{3\pi}{4} \tag{2.7}$$



Фиг. 1.

Что касается окрестности точки B фиг. 1 касания волн, то в ней имеет место

$$
\begin{aligned}
&(a^2)_t\big|_\tau - a^2\frac{d\ln A^2}{dt}\Big|_\tau + \frac{\Delta_3}{\Delta_m}\beta''\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0\\
&\varphi_t\big|_\tau + \frac{1}{2}\frac{\Delta_3}{\Delta_m}\beta''\frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta_3}{a\Delta_m}\beta''\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2 a}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

При $\theta_0-\theta\sim 1$, $\theta<\theta_0$, линейное решение (2.6) дает $\Psi=\dfrac{A\exp\left(\dfrac{s}{k^2}\right)}{c_0\sqrt{k_1-k_2\,s}}$ а решение нелинейных уравнений (2.8) имеет вид

$$
a=\frac{A}{c_0\sqrt{k_1-k_2\,\omega}},\qquad \varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega(\theta-\theta_0)^2}{2c_0(k_1-k_2)}-\int\limits_0^t\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0\frac{A^2}{c_0^2(k_1-k_2)\,\omega^2}\,dt
\tag{2.9}
$$

В окрестности B линейное решение по (2.4) можно записать в виде

$$
\Psi e^{i\varphi}=p+iq,\qquad p=\frac{A}{\sqrt{\pi}\sqrt{k_1-k_2\,\omega}}\int\limits_{\frac{\sqrt{\omega}}{k}}^{\infty}\cos T\,d\eta
$$

$$
q=\frac{A}{\sqrt{\pi}\sqrt{k_1-k_2\,\omega}}\int\limits_{\frac{\sqrt{\omega}}{k}}^{\infty}\sin T\,d\eta
\tag{2.10}
$$

причем $T=\eta^2-\dfrac{s}{k^2}+\omega\tau+\dfrac{\pi}{4}$; $a=\sqrt{p_0^2+q_0^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{q_0}{p_0}$; p_0, q_0 — значения p, q при $\tau=0$. Если отбросить дифракционный член в уравнении для φ, система уравнений (2.8) может быть записана в виде

$$
\varphi_t+\frac{c_0}{2\omega}\frac{dk_1}{dt}\varphi_\theta^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 A^2b^2=0,\qquad (b^2)_t+\frac{c_0}{\omega}\frac{dk_1}{dt}A^2(b^2\varphi_\theta)_\theta=0
\tag{2.11}
$$

где $a^2=A^2b^2$. Обозначая $\varphi_t=u$, $\varphi_\theta=v$ и дифференцируя первое уравнение по θ, можно привести (2.11) к системе уравнений первого порядка по u, v, b^2, которую можно решать методом характеристик, взяв в качестве начальных условий линейное решение (2.10). Нелинейное уравнение для Ψ дается (1.15), где в левой части добавлено $-\Delta_m|\Psi|^2\Psi\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$. Отметим, что указанное простое решение (2.3) получено для недиспергирующей среды. Впрочем, и при наличии дисперсии можно показать, повторяя вычисления [5, 12] для периодической волны, что (2.3) имеет место в дифракционной области. Только значения A, c_0, $k_{1,2}$ есть уже функции ω. Для этого следует уравнения движения среды [12] $A_1\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x}+A_2\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial y}+A_3\bar{u}=A_4U$, где $A_{1,2,3}$ — матрицы, зависящие от ω, U — значение вектора $\bar{u}$ за начальной волной с уравнением $\tau_0 = 0$ или $y_0 = y_0(x_0)$, решать методом Фурье, причем, как и в [12], можно записать для постоянных коэффициентов

$$a(x - x_0) + \beta(a, \omega)(y - y_0) = -\tau_2 - \frac{(\theta_0 - \theta)^2}{2c_0(k_1 - k_2)} +$$

$$+ \frac{k_1 - k_2}{2c_0}\left(\frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2} - x_2\right)^2 + \dots$$

причем в отличие от нестационарной задачи и в соответствии с методом, используемым в дифракции Френеля, следует интегрировать в пределах $-\tau_0 < \tau < \infty$, $0 < x_4 < \infty$ в области позади волны $\tau_0 = 0$, тогда получается решение (2.3). Те же результаты методом [5] распространяются на переменные коэффициенты, для которых снова выполняется (2.3), (1.15), (2.5). Типичным примером являются уравнение Клейна-Гордона, а также вышенаписанное уравнение для u при $\nu = 0$. Следует отметить, что в нелинейной задаче при отсутствии дисперсии в периодической волне образуются, начиная с некоторого расстояния, ударные волны, что ограничивает для такой среды применение уравнений (2.11), выведенных для плавно-меняющихся амплитуд. Уравнение же для u при $k \neq 0$ имеет непрерывный профиль решения [7], что тем более верно для произвольной диспергирующей среды с сильной дисперсией.

3. Можно получить также уравнения для медленных изменений параметров вблизи каустики, вблизи которой решение определяется переменными

$$\tilde{x}_1 = (\bar{x} - \bar{x}^0)\bar{k}, \quad y_1 = (\bar{x} - \bar{x}^0)\bar{N}, \quad \bar{x} = \{x_i\}, \quad \bar{k} = \{a_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

$\bar{x}^0$ есть радиус-вектор точки A касания выбранного луча с каустикой, y_1 — расстояние по нормали от точки $\{x_i\}$ до каустики, $\tilde{x}_1$ — время пробега волны вдоль луча от A до основания нормали на каустике. В силу линейного решения имеют место порядки $y_1 \sim \varepsilon$, $\tilde{x}_1 \sim \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, $\omega \sim \frac{1}{\tilde{x}_1}$. Записывая $p_t = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}$, $p_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + N_j \frac{\partial}{\partial y_1}$, $\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t} = -1 + (\bar{x} - \bar{x}^0)\frac{\partial \bar{k}}{\partial t}$, можно, разлагая $\Delta(ip_t, -ip_j, \bar{x})$ по степеням малых операторов и удерживая величины порядка $\varepsilon^{n - \frac{2}{3}}$, получить

$$e^{-i\omega \tilde{x}_1}\Delta(ip_t, -ip_j, \bar{x})\Phi_1 = -\Psi_{01}\Lambda_{0i}(x_j - x_j^0)\left(\frac{\partial \alpha_j^1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial t}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\Delta_{\alpha_i\alpha_j}N_iN_j\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2} \tag{3.2}$$

где учтено уравнение лучей $\omega\Delta_\omega\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}=\Delta_{x_j}$ и введены величины $\overline{\alpha}_j$, α_j вместо α_j, α'_j п. 1, причем $\overline{\alpha}_j=\omega\alpha_j$, α^1_j есть значение α_j в A. Обозначая $\lambda_1 y_1=-\omega\Delta_\omega(x_j-x_j^0)\left(\frac{\partial\alpha^1}{\partial t}-\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}\right)$, из уравнения $\Delta\Phi_1=0$ можно получить в линейной задаче

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}-\varkappa y_1\Psi=0, \qquad \varkappa=\frac{\lambda_1}{\frac{1}{2}\Delta_{\overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_j}N_iN_j} \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.3) линейной задачи есть функция Эйри

$$\Psi=v\left(y_1\sqrt[3]{\varkappa}\right) \tag{3.4}$$

Для уравнения (3.3) можно искать решение в виде медленно меняющихся амплитуд и фаз волны $\Psi=ae^{i\varphi}$. Тогда после отделения действительной и мнимой части получится

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}+\varkappa y_1 a=0, \qquad a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+2\frac{\partial a}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0 \tag{3.5}$$

Отбрасывая $\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}$ или дифракционное слагаемое [6], можно найти решение уравнений (3.5) в виде

$$a=\frac{\text{const}}{\sqrt{\partial\varphi/\partial y_1}}, \qquad \partial\varphi/\partial y_1=\mp\sqrt{-\varkappa y_1}, \qquad \varphi=\pm\sqrt{\varkappa}\,\frac{2}{3}(-y_1)^{3/2} \tag{3.6}$$

верхний знак соответствует падающей на каустику, нижний — отраженной волнам. Решение (3.6) является асимптотикой (3.4) на некотором удалении от каустики. Оно имеет особенность на каустике, то есть при $y_1=0$, в то время как (3.4) аналитично. Следует отметить, что учет квадратичной нелинейности для медленно меняющихся амплитуд в недиспергирующей среде не даст отличных от нуля добавок в (3.3), поскольку при осреднении соответствующие члены выпадают из функционала $\int L d\bar{x} dt$. Поэтому для учета нелинейных слагаемых следует [6] записать нелинейное дисперсионное соотношение (где эйконал $\omega_i x_i+\varphi\omega_0$, φ зависит лишь от y_1).

$$\omega\approx\omega_0(\bar{k}_0,\bar{x}^0)+\frac{\partial\omega_0}{\partial x_k}(x_k-x_k^0)+$$

$$+\frac{\partial\omega_0}{\partial\bar{k}}(\bar{k}-\bar{k}^0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}(\alpha_i-\alpha_i^1)(\alpha_j-\alpha_j^1)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2$$

что после сравнения с (3.2) даст в нелинейной задаче

$$\frac{1}{2}\Delta_{\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial}{\partial \alpha_j}} N_i N_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} - \lambda_1 y_1 \Psi + \Delta_\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 |\Psi|^2 \Psi = 0 \tag{3.7}$$

Принимая, что $-\lambda_1^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0$, $(\lambda_1 < 0)$, обозначая $\Psi = \mu \Psi'$, $y_1 = \nu y'$,

$\nu = \varkappa^{-\frac{1}{3}}$, $\mu = \sqrt{-\frac{\lambda_1 \nu}{\Delta_\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0}}$, можно записать (3.7) в виде

$$\frac{d^2 \Psi'}{dy'^2} - y' \Psi' - |\Psi'|^2 \Psi' = 0 \tag{3.8}$$

С другой стороны, полагая $\Psi' = a' e^{i\varphi}$*, получим из (3.8)

$$a' \left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)^2 - \frac{d^2 a'}{dy'^2} + y' a' + a'^3 = 0, \qquad a' = \frac{c}{\sqrt{\frac{d\varphi}{dy'}}}, \quad C = \text{const} \tag{3.9}$$

Для $\frac{d^2 a'}{dy'^2} = 0$ (3.9) можно решить аналитически.

Задавая начальные условия для некоторого y' согласно линейному решению (3.4) или (3.6), можно численно решить (3.9) и найти значения a', φ вблизи каустики. В электродинамике тонких пучков можно записать уравнение для напряженности электрического поля

$$\nabla^2 \bar{E} + \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \varepsilon_0 \bar{E}\right) + k^2 (1 + \varepsilon_2 |\bar{E}|^2) \bar{E} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}$$

где ∇ — оператор Гамильтона, и тогда получится дисперсионное уравнение

$-\Delta = \varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} c \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \omega$, $\Delta_{\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial}{\partial \alpha_j}} N_i N_j = -\frac{c^2}{\varepsilon_0 \omega}$, откуда $\lambda_1 = -\frac{\omega c}{\sqrt{\varepsilon_0} R}$,

и уравнение (3.7) $\frac{1}{2}\frac{c^2}{\varepsilon_0 \omega}\frac{d^2 \Psi}{dy_1^2} - \omega y_1 \frac{1}{R}\Psi + \frac{\omega}{2}\varepsilon_2 |\Psi|^2 \Psi = 0$, $\frac{1}{R}$ есть разность кривизны каустики и луча.

При $\varkappa \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ получится вместо (3.8) $\mu = \sqrt{\frac{\lambda_1 \nu}{\Delta_\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0}}$,

$\frac{d^2 \Psi'}{dy'^2} - y' \Psi' + |\Psi'|^2 \Psi' = 0$ и в (3.9) стоит „—" перед a'^3.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 V 1977

* Разделение на падающую и отраженные волны возможно вдали от каустики, вблизи нее следует решать (3.7) при начальном условии, взятом из (3.4).

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՃԱԿԱՏՆԵՐԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ամփոփում

Բերվում է ոչ գծային ցրող միջավայրում տարածվող կամայական ալիքի համար դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդային և ֆազային հավասարումների արտածումը։ Վերջնական հավասարումը նկարագրում է լուծման եռչափ կազմվածքը կամայական դանդաղ փոփոխվող ալիքի համար։ Որոշվում է տիպիկ դիֆրակցիոն խնդրի ժամանակից կախված պարբերական լուծումը ցրող միջավայրի համար։

DETERMINATION OF THE VICINITY OF WAVE FRONTS IN A THREE-DIMENSIONAL PROBLEM

A. G. BAGDOEV

Summary

The equations for slowly-varying amplitudes and phases of an arbitrary shape wave in non-homogeneous dispersive non-linear medium are derived. The final equation describes the three-dimensional structure of the solution for an arbitrary wave of slowly-varying parameters. The periodic in time solution of the typical diffraction problem in dispersive linear medium is determined, the statement of the problem on determination of non-linear solution is given and the conditions for longitudinal and transversal stability of the wave are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitham G. B.* A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. J. Fluid Mech. 1965, vol. 22, No. 2, 273–284.
2. *Lighthill M. J.* Some special cases treated by the Whitham theory. Proceed. Roy. Soc., A299, 28 (1967).
3. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. Прикл. матем. и механ., 1958, т. 22, № 5.
4. *Нигул У. К., Энгельбрехт.* Нелинейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин. Изд-во АН Эст. ССР, 1972.
5. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. XII, № 6.
6. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, 1971, т. 35, в. 6.
7. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, Изд. «Наука», 1973.
8. *Бабич В. Н., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.

9. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых ударных волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. 26, № 6.

10. *Bagdoev A. G., Gurgenian A. A.* On the definition of simplified nonlinear equations. Instituto di meccanica applicata del politecnico di Torino, nota tecnica 113, 1976.

11. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Мир», 1966.

12. *Багдоев А. Г.* Исследование окрестности волны вблизи особой линии. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, № 1.

13. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Метод усреднения для несинусоидальных волн. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4.

14. *Bretherton F. P., Garret C. Y. R.* Wavetrains in inhomogenous moving media. Proceed. Roy. Soc., A302, 1968, 529—554.

15. *Петрашень Г. И., Николаев Б. С., Коузов Д. П.* О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей. Уч. записки ЛГУ, 1958, в. 32.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

В. Т. ГОЛОВЧАН, Н. Я. ОСТАШЕВСКАЯ

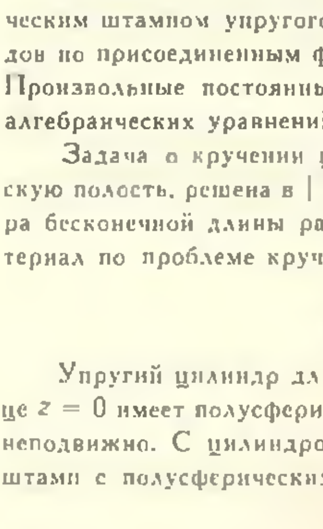
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПОЛУСФЕРИЧЕСКИМ ШТАМПОМ

Построено точное решение контактной задачи о кручении полусферическим штампом упругого цилиндра конечной длины с использованием рядов по присоединенным функциям Лежандра и цилиндрическим функциям. Произвольные постоянные удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, допускающей решение методом редукции.

Задача о кручении цилиндра конечной длины, содержащего сферическую полость, решена в [1]. Аналогичная задача в случае упругого цилиндра бесконечной длины рассматривалась в [2]. Большой теоретический материал по проблеме кручения и подробный обзор содержится в [3].

§ 1. *Постановка задачи*

Упругий цилиндр длиной L и радиусом поперечного сечения a на торце $z = 0$ имеет полусферическую выемку радиуса R. Торец $z = L$ закреплен неподвижно. С цилиндром через поверхность выемки жестко соединен штамп с полусферическим наконечником радиуса R. К штампу приложен внешний крутящий момент M, в результате чего цилиндр испытывает деформацию кручения. Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния цилиндра.



Фиг. 1.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет смещение точек цилиндра $u_\varphi(\rho, z)$, в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z), соответствующей декартовым координатам (x, y, z) (фиг. 1), имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_\varphi = 0 \tag{1.1}$$

Решение уравнения (1.1) необходимо подчинить следующим краевым условиям:

$$u_\varphi\big|_{z=L} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \rho} u_\varphi - \frac{1}{\rho} u_\varphi\right)\Big|_{\rho=a} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z} u_\varphi\Big|_{z=0,\, R\le\rho\le a} = 0, \quad u_\varphi\big|_{r=R} = \varepsilon R P_1^1(\cos\theta) \tag{1.2}$$

Второе и третье условия (1.2) соответствуют отсутствию касательных напряжений на боковой поверхности цилиндра $\rho = a$ и на его торце $z = 0$. Четвертое условие фиксирует равенство смещений штампа и цилиндра на поверхности контакта $r = R$. Здесь Φ — угол поворота штампа, (r, θ, φ)— сферическая система координат. P_1^1 — присоединенная функция Лежандра $\left(P_n^1(x) = \sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d}{dx}\,P_n(x)\right)$.

§ 2. *Периодические решения уравнения (1.1)*

Сначала получим систему внешних периодических (с периодом δ) решений уравнения (1.1), допускающих путем несложных преобразований представление в сферических координатах (r, θ, φ) и в цилиндрических координатах (ρ, φ, z). С этой целью рассмотрим ряд

$$\zeta = \sum_k \frac{1}{r_k^2} P_1^1(\cos\theta_k) \tag{2.1}$$

где $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ — сферическая система координат с полюсом на оси z, причем $z_k = z - k\delta$, $(k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$.

Функция ζ удовлетворяет уравнению (1.1) и является периодической с периодом δ. Поэтому она может быть еще представлена в виде

$$\zeta = B_0 \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_1(\psi_n \rho) \cos(\psi_n z), \qquad \psi_n = \frac{2\pi}{\delta} n, \quad (\rho \neq 0) \tag{2.2}$$

Здесь K_1 — модифицированная цилиндрическая функция второго рода, а B_n — подлежащие определению постоянные.

Сравнивая выражения (2.1), (2.2) и учитывая интегральное представление функции Макдональда

$$K_1(\psi_n \rho) = \frac{\rho}{\psi_n} \int_0^\infty \frac{\cos(\psi_n z)}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\, dz, \qquad (n \neq 0)$$

приходим к следующим значениям постоянных B_n:

$$B_0 = \frac{2}{\delta}, \quad B_n = \frac{4\psi_n}{\delta}, \quad (n \neq 0) \tag{2.3}$$

Подстановка (2.3) в равенство (2.2) позволяет преобразовать его к виду

$$\zeta = \frac{4}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \psi_n K_1(\psi_n \rho) \cos(\psi_n z), \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \qquad \varepsilon_n = 1 \tag{2.4}$$

$$(\rho \neq 0), \quad (n \neq 0)$$

Таким образом, получены два представления периодического по z частного решения уравнения(1.1): (2.1) и (2.4). Исходя из этого решения, можно построить полную систему периодических по z решений уравнения (1.1). С этой целью подействуем на ζ последовательностью операторов

$$D_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

В результате имеем

$$\zeta_n = D_n\zeta = \sum_k \frac{1}{r_k^{n+1}} P_n^1(\cos\theta_k) =$$

$$= \frac{4}{\delta}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s\psi_s K_1(\psi_s\rho)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\cos\psi_s z \qquad (2.5)$$

$$(n = 1, 2, \ldots;\ \rho \neq 0)$$

При выводе (2.5) использовано равенство

$$\frac{1}{r^{n+1}} P_n^1(\cos\theta) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{r^2}P_1^1(\cos\theta)\right]$$

которое следует из результатов работы [4].

Выделим из системы (2.5) нечетные и четные по z решения

$$\zeta_{2n} = \sum_k \frac{1}{r_k^{2n+1}} P_{2n}^1(\cos\theta_k) = \frac{4}{\delta}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s\psi_s^{2n}K_1(\psi_s\rho)\sin(\psi_s z) \qquad (2.6)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

$$\zeta_{2n-1} = \sum_k \frac{1}{r_k^{2n}} P_{2n}^1(\cos\theta_k) = \frac{4}{\delta}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s\psi_s^{2n-1}K_1(\psi_s\rho)\cos(\psi_s z) \qquad (2.7)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Функции (2.6) и (2.7) являются периодическими по z с периодом δ, на что в дальнейшем будет указывать запись $\zeta_n(\delta)$. Составим комбинации

$$\xi_{2n} = \zeta_{2n}(2\delta) - \frac{1}{2}\zeta_{2n}(\delta), \qquad \xi_{2n-1} = \zeta_{2n-1}(2\delta) - \frac{1}{2}\zeta_{2n-1}(\delta)$$

После некоторых преобразований имеем

$$\xi_{2n} = \sum_m \frac{1}{r_m^{2n+1}} P_{2n}^1(\cos\theta_m) - \frac{1}{2}\sum_k \frac{1}{r_k^{2n+1}} P_{2n}^1(\cos\theta_k) =$$

$$= \frac{2}{\delta}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\psi_{2s+1}\right)^{2n}K_1\left(\frac{1}{2}\psi_{2s+1}\rho\right)\sin\left(\frac{1}{2}\psi_{2s+1}z\right) \qquad (2.8)$$

$$\xi_{2n-1} = \sum_m \frac{1}{r_m^{2n}} P_{2n-1}^1(\cos\theta_m) - \frac{1}{2}\sum_k \frac{1}{r_k^{2n}} P_{2n-1}^1(\cos\theta_k) =$$

$$= \frac{2}{\delta}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\psi_{2s+1}\right)^{2n-1}K_1\left(\frac{1}{2}\psi_{2s+1}\rho\right)\cos\left(\frac{1}{2}\psi_{2s+1}z\right) \qquad (2.9)$$

Как следует из полученных соотношений

$$\xi_{2n}\big|_{z=0}=0, \quad \frac{\partial \xi_{2n}}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{\delta}{2}}=0 \tag{2.10}$$

$$\xi_{2n-1}\big|_{z=\frac{\delta}{2}}=0, \quad \frac{\partial \xi_{2n-1}}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0 \tag{2.11}$$

Таким образом, система функций (2.8) может быть использована при решении задачи кручения упругого цилиндра длиной $L=\frac{1}{2}\delta$ с полусферической выемкой на торце $z=0$, если этот торец закреплен неподвижно, а торец $z=\frac{1}{2}\delta$ не загружен. При этом внешние касательные усилия предполагаются приложенными на поверхностях $\rho=a$ и $z=R$. Система (2.9) будет использована ниже для решения задачи, сформулированной в § 1.

§ 3. *Решение задачи*

Представим решение рассматриваемой контактной задачи в виде

$$u_\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n-1}\xi_{2n-1}+\sum_{i=1}^{\infty}B_{2i-1}I_1\left(\frac{1}{2}\gamma_{2i-1}\rho\right)\cos\left(\frac{1}{2}\gamma_{2i-1}z\right) \tag{3.1}$$

где I_1 — модифицированная цилиндрическая функция первого рода. Смещение (3.1) удовлетворяет первому и третьему граничным условиям (1.2) для $\delta=2L$. Произвольные постоянные A_{2n-1} и B_{2i-1} должны быть определены в результате выполнения второго и четвертого условий (1.2).

Решение (3.1) легко преобразуется к цилиндрическим координатам с помощью равенства (2.9). В итоге получаем

$$u_\varphi(\rho, z)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[B_{2i-1}I_1(x_{2i-1}\rho)+Q_{2i-1}K_1(x_{2i-1}\rho)\right]\cos(x_{2i-1}z)$$

$$\rho>0$$

$$Q_{2i-1}=\frac{1}{L}\sum_{p=1}^{\infty}A_{2p-1}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p-2)!}(x_{2i-1})^{2p-2} \tag{3.2}$$

$$x_{2i-1}=\frac{1}{2}\gamma_{2i-1}=\frac{\pi}{2L}(2i-1)$$

Подставив (3.2) во второе граничное условие (1.2), приходим к следующим алгебраическим соотношениям:

$$B_{2i-1}I_2(x_{2i-1}a)-K_2(x_{2i-1}a)\,Q_{2i-1}=0, \quad i=1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Для выполнения четвертого условия (1.2) преобразуем смещение (3.1) к сферическим координатам r, θ, φ. Это можно сделать, используя равенство

$$I_1(\varkappa_{2i-1} r)\cos(\varkappa_{2i-1} z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}(\varkappa_{2i-1} r)^{2p-1}}{(2p)!} P^1_{2p-1}(\cos\theta) \quad (3.4)$$

и соответствующие теоремы сложения для внешних решений уравнения Лапласа в сферических координатах [5]. Разложение (3.4) может быть получено, если записать его с неопределенными коэффициентами в точке $r = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ и сравнить ряды по степеням r.

После некоторых преобразований имеем

$$u_z(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} A_{2i-1} \frac{1}{r^{2i}} + (L_{2i-1} + S_{2i-1}) r^{2i-1} \right] P^1_{2i-1}(\cos\theta) \quad (3.5)$$

где введены следующие обозначения:

$$S_{2i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{(2i)!} \sum_{p=1}^{\infty} (\varkappa_{2p-1})^{2i-1} B_{2p-1}$$

$$L_{2i-1} = \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p-1} \left[L^{(p)}_{2i-1}(4L) - \frac{1}{2} L^{(p)}_{2i-1}(2L) \right] \quad (3.6)$$

$$L^{(p)}_{2i-1}(x) = 2 \frac{(2i+2p-2)!}{(2p-2)!\,(2i)!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mx)^{2i+2p-1}}$$

Смещение (3.5) будет удовлетворять четвертому краевому условию (1.2), если

$$\frac{1}{2} A_{2i-1} \frac{1}{R^{2i}} + (L_{2i-1} + S_{2i-1}) R^{2i-1} = \delta^1_{2i-1} q R \quad (3.7)$$

$$(\delta^1_1 = 1, \quad \delta^1_{2i-1} = 0 \ \text{ при } \ i \neq 1; \ i = 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, в результате выполнения условий (1.2) получены две группы алгебраических соотношений (3.3) и (3.7), которые представляют собой замкнутую бесконечную систему алгебраических уравнений с неизвестными A_{2i-1} и B_{2i-1}. Данная система заменой неизвестных

$$B_{2i-1} I_1(\varkappa_{2i-1} a) = x_{2i-1}, \qquad \frac{1}{2} A_{2i-1} \frac{1}{R^{2i}} = y_{2i-1}$$

преобразуется в систему нормального типа, если $R < a$, L. Это легко доказывается с использованием результатов работы [1]. Благодаря этому система уравнений (3.3) и (3.7) может быть решена с требуемой степенью точности методом редукции.

§ 4. *Численные результаты*

Напряжения кручения на поверхности контакта цилиндра со штампом находим с учетом выражения (3.5)

$$\frac{1}{\mu}\tau_{\varphi r}=\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}u_\varphi\right)\Bigg|_{r=R}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2}A_{2i-1}\frac{1+2i}{R^{2i+1}}+(2i-2)\left(L_{2i-1}+S_{2i-1}\right)R^{2i-2}\right]P_{2i-1}^{1}(\cos\theta) \quad (4.1)$$

Условие равновесия штампа имеет вид

$$M=-2\pi R^3\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,\tau_{r\varphi}\,d\theta=2\pi R^3\int_0^{\pi/2}P_1^1(\cos\theta)\,\tau_{r\varphi}\,d\cos\theta \quad (4.2)$$

Подставив в (4.2) напряжение (4.1), получаем с учетом условия ортогональности присоединенных функций Лежандра следующее равенство:

$$M=2\pi\mu A_1 \quad (4.3)$$

Таким образом, момент, который передается на штамп со стороны цилиндра, зависит лишь от одной неопределенной постоянной решения (3.1).

Напряжения во внутренних точках упругого цилиндра определяются следующими равенствами:

$$\frac{1}{\mu}\tau_{z\varphi}=\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n-1}\frac{\partial}{\partial z}\xi_{2n-1}-\sum_{i=1}^{\infty}\varkappa_{2i-1}B_{2i-1}I_1(\varkappa_{2i-1}\rho)\sin(\varkappa_{2i-1}z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\xi_{2n-1}=\frac{\partial}{\partial z}\zeta_{2n-1}(4L)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\zeta_{2n-1}(2L)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\zeta_{2n-1}(x)=-(2n-1)\sum_k\frac{1}{r_k^{2n+1}}P_{2n}^1(\cos\theta_k)$$

$$\frac{1}{\mu}\tau_{\varphi\rho}=\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n-1}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\right)\xi_{2n-1}+\sum_{i=1}^{\infty}\varkappa_{2i-1}B_{2i-1}I_2(\varkappa_{2i-1}\rho)\cos(\varkappa_{2i-1}z) \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\right)\xi_{2n-1}=\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\right)\zeta_{2n-1}(4L)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\right)\zeta_{2n-1}(2L)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\right)\zeta_{2n-1}(x)=-\sum_k\frac{1}{r_k^{2n-1}}P_{2n}^2(\cos\theta_k)$$

Таким образом, все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние цилиндра, могут быть найдены по формулам (3.1), (4.3) и (4.4) после решения системы алгебраических уравнений, получающейся путем усечения бесконечной системы (3.3) и (3.7). В процессе вычислений рассматривалась система восьмого порядка, то есть предполагалось, что $A_{2j-1} = B_{2j-1} = 0$ при $j \geqslant 5$. При этом геометрические параметры цилиндра изменялись в пределах:

$$1.5\,R < a \leqslant 3.0\,R, \quad \Delta a = 0.5\,R, \quad 1.5\,R \leqslant L \leqslant 3.0\,R, \quad \Delta L = 0.5\,R$$

$$\text{и} \quad 5\,R \leqslant L \leqslant 1.5\,R, \quad \Delta L = 2R$$

После определения неизвестных A_{2j-1} и B_{2j-1} производились вычисления безразмерного смещения $u_\theta^* = \frac{u_\theta}{R\Phi}$ и безразмерных напряжений $\tau_{z\theta}^* = \frac{1}{\mu\Phi}\tau_{z\theta}$ и $\tau_{\rho\theta}^* = \frac{1}{\mu\Phi}\tau_{\rho\theta}$ в следующих интервалах изменения координат:

$$0 \leqslant z \leqslant L, \quad \Delta z = 0.25\,R; \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad \Delta\rho = 0.25\,R$$

$$\text{при } L > 5R, \quad 0 \leqslant z \leqslant R$$

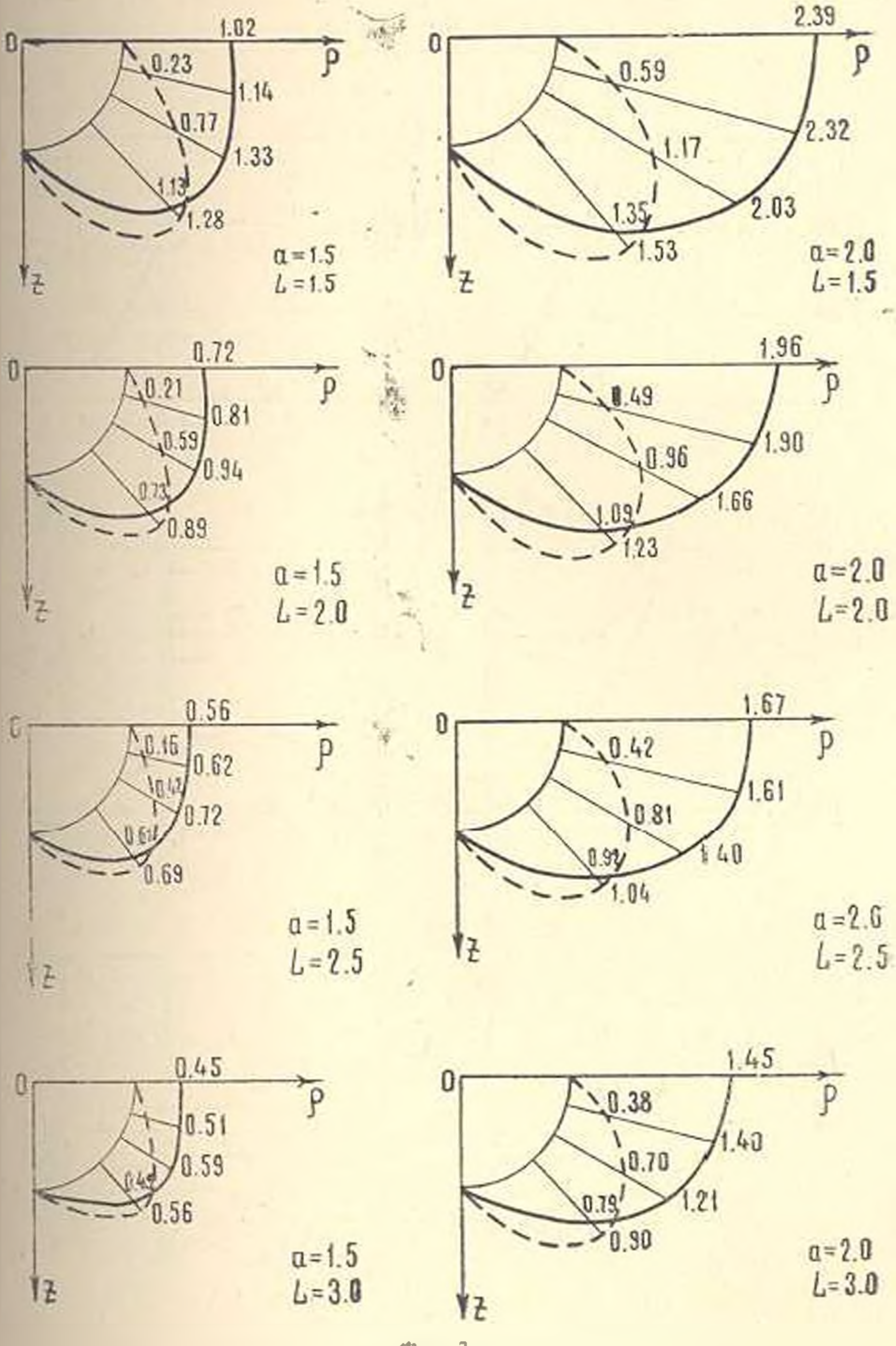
Результаты вычислений представлены на фиг. 2—5, причем сплошной линии соответствует напряжение $-\tau_{z\theta}^*$, пунктирной — напряжение $-\tau_{\rho\theta}^*$ и штрихпунктирной — смещение u_θ^*.

На фиг. 2 приведены графики распределения напряжений в точках на поверхности контакта цилиндра со штампом. Характерной особенностью показанных распределений является то, что максимальным является напряжение $\tau_{z\theta}^*$, причем для $a = 1.5\,R$ этот максимум достигается внутри интервала $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, а для $a = 2.0\,R$ — в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$. С увеличением L уровень контактных напряжений понижается.

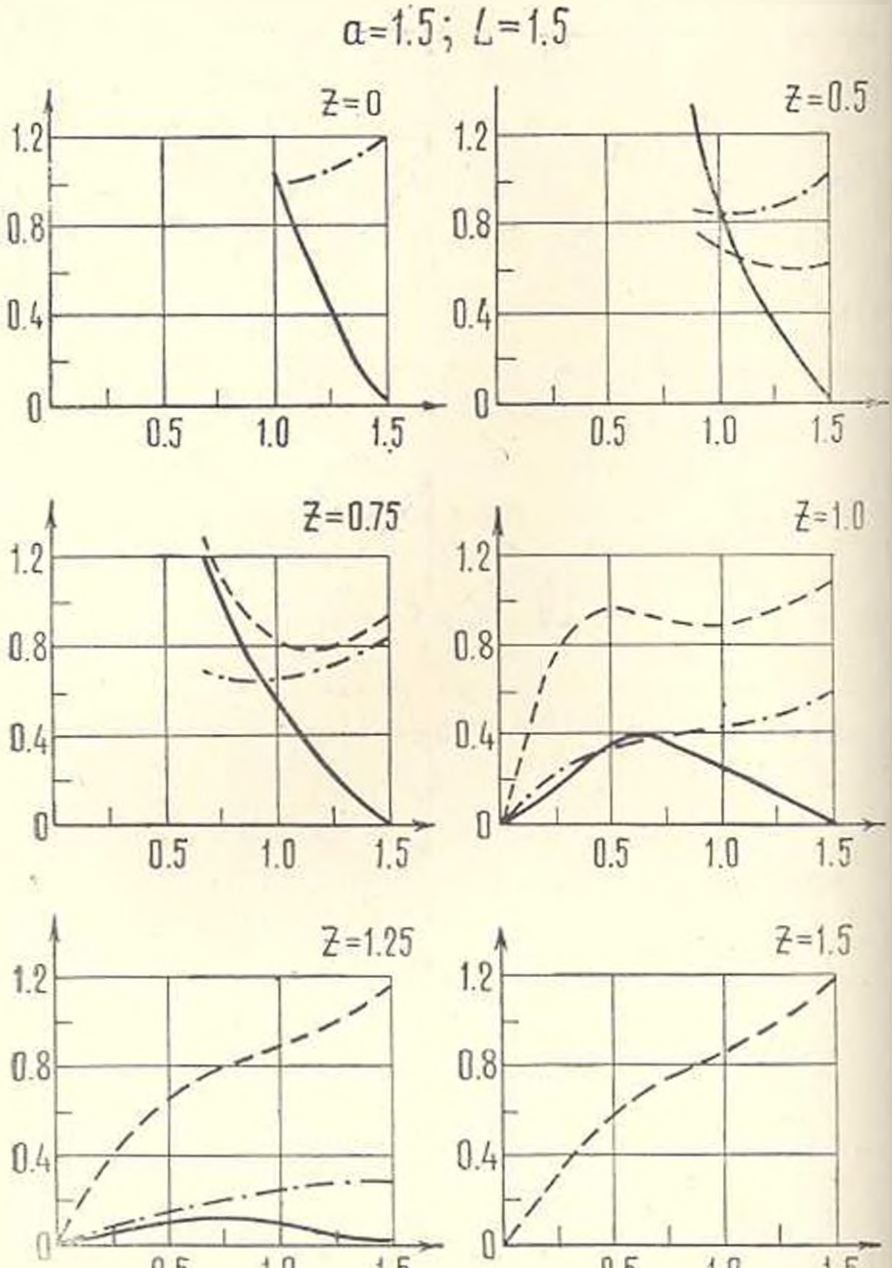
На фиг. 3—4 показаны смещение и напряжения в различных поперечных сечениях короткого цилиндра (фиг. 3) и в два раза более длинного (фиг. 4). Как следует из этих графиков, с увеличением z преобладающими становятся напряжения $\tau_{z\theta}^*$, причем кривые $\tau_{z\theta}^*$ и u_θ^* все более распрямляются.

Последнее в большей мере проявляется для более длинного цилиндра, и для $z \geqslant 1.75R$ графики $\tau_{z\theta}^*$ и u_θ^* практически прямолинейны. Однако максимальные смещение и напряжения на $\sim 12\%$ превосходят смещение и напряжения в точках на боковой поверхности цилиндра, вычисленные по теории Сен-Венана кручения длинных стержней. Напряжение же $\tau_{\rho\theta}^*$ для указанных z является весьма незначительным (теория Сен-Венана не учитывает этих напряжений).

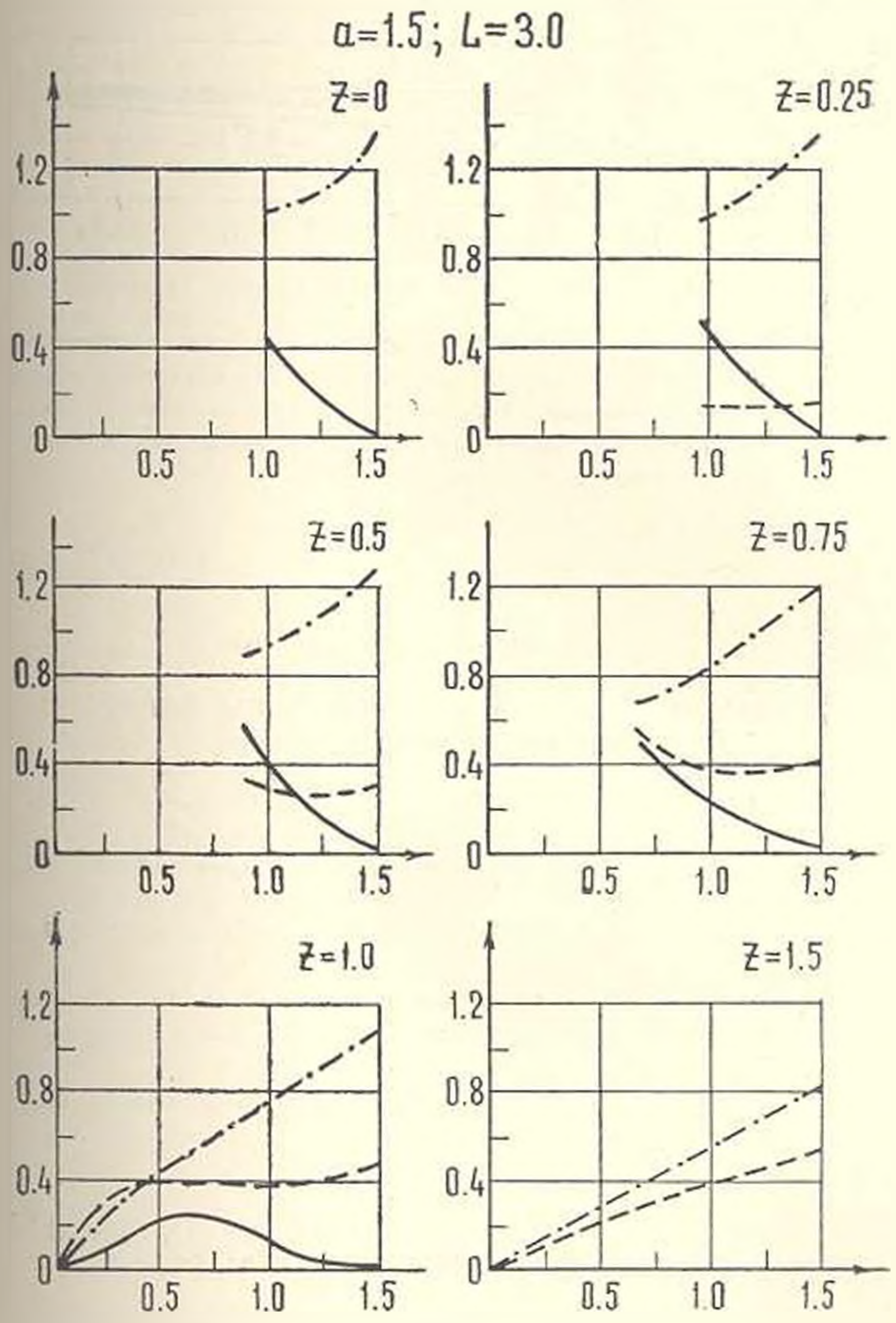
Представляют интерес также приведенные на фиг. 5 кривые зависимости между $\beta = \frac{D}{D_1}$ и L. Здесь D — коэффициент при $\frac{\Phi}{L}$ в формуле для крутящего момента (4.3), а D_1 — жесткость цилиндра на кручение по теории Сен-Венана. С увеличением L параметр β стремится к единице сверху для $a = 1.5R$ и снизу для $a = 2.0R$ и $a = 2.5R$.


0
1.02
P
0.23
1.14
0.77
1.33
1.13
1.28
a=1.5
L=1.5
z
0
2.39
P
0.59
2.32
1.17
2.03
1.35
1.53
a=2.0
L=1.5
z
0
0.72
P
0.21
0.81
0.59
0.94
0.73
0.89
a=1.5
L=2.0
z
0
1.96
P
0.49
1.90
0.96
1.66
1.09
1.23
a=2.0
L=2.0
z
0.56
P
0.16
0.62
0.43
0.72
0.61
0.69
a=1.5
L=2.5
z
0
1.67
P
0.42
1.61
0.81
1.40
0.92
1.04
a=2.0
L=2.5
z
0
0.45
P
0.51
0.59
0.42
0.56
a=1.5
L=3.0
z
0
1.45
P
0.38
1.40
0.70
1.21
0.79
0.90
a=2.0
L=3.0
z

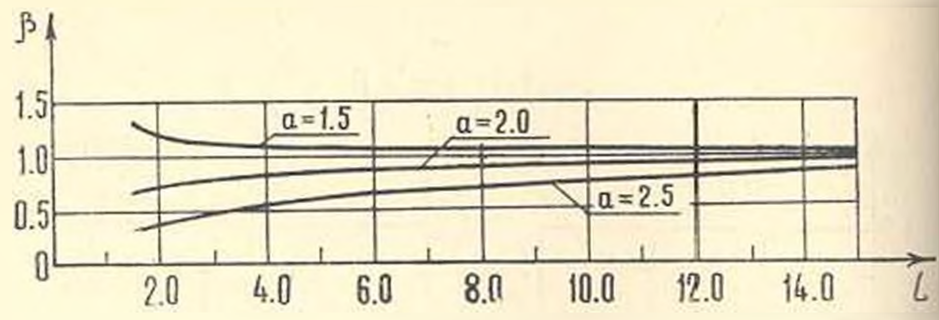
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5

Заметим наконец, что усечение бесконечной системы алгебраических уравнений (3.3) и (3.7) до восьмого порядка для рассмотренных геометрических параметров цилиндра обеспечивает достаточную точность результатов. Так, например, погрешность выполнения краевых условий во всех случаях составляет лишь доли процента.

Украинский научно-исследовательский
институт гидротехники и мелиорации

Поступила 15 VI 1976

Վ. Տ. ԳՈԼՈՎՉԱՆ, Ն. Յա. ՕՍՏԱՇԵՎՍԿԱՅԱ

ԿԻՍԱԳՆԴԱՅԻՆ ԴՐՈՇՄՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԼԱՆԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Կառուցվել է կիսագնդային դրոշմով վերջավոր երկարության առաձգական գլանի ոլորման կոնտակտային խնդրի ճշգրիտ լուծումը։

Օգտագործվել են ըստ Լեժանդրի միացված ֆունկցիաների և գլանային ֆունկցիաների շարքերը։

Ինտեգրման կամավոր հաստատունները որոշվում են հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սիստեմից, որը լուծվում է ռեդուկցիայի եղանակով։

Բերված բազմաթիվ գծագրերում հաշվումների արդյունքները ցույց են տրվում խնդրի պարամետրի կոնկրետ արժեքների համար։

THE CONTACT PROBLEM ON TORSION OF AN ELASTIC CYLINDER BY A SEMI-SPHERICAL DIE

V. T. GOLOVCHAN, N. Y. OSTASHEVSKAYA

Summary

An accurate solution is suggested for a contact problem on torsion of a finite length elastic cylinder by a semi-spherical die, using

the series of Legendre associated functions and cylindrical functions. The arbitrary constants obey the infinite system of linear algebraic equations permitting the solution by the reduction method. The results of calculations for concrete values of the problem parameters are shown in numerous diagrams.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Головчан В. Т.* Кручение цилиндра конечной длины со сферической полостью. Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 3.
2. *Chih-Bing Ling*. Torsion of a circular cylinder having a spherical cavity. Quart. of Appl. Mathem., 1952, 10, 2.
3. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
4. *Erdelyi A.* Zur Theorie der Kugelwellen. Physica, 1937, 4, 2.
5. *Гузь А. Н., Головчан В. Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. К., «Наукова думка», 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН, П. А. МКРТЧЯН

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В РАДИАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе [1] на основе гипотез магнитоупругости тонких тел [2, 3] (в предположении, что влиянием токов смещения можно пренебречь) получены двумерные уравнения магнитоупругости сферической оболочки, находящейся в произвольном неоднородном магнитном поле. Там же, с помощью указанных уравнений, решена задача колебаний сферической оболочки в стационарном радиальном магнитном поле.

В данной работе рассматривается та же задача на основе трехмерных линеаризованных уравнений магнитоупругости. Совместным решением уравнений магнитоупругости оболочки и уравнений электродинамики для среды, окружающей оболочку, при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред и условиях на бесконечности, определена нормальная компонента индуцированного магнитного поля во всем пространстве. Приведено характеристическое уравнение относительно частоты упругих колебаний оболочки. Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля определены в случае осесимметричных колебаний. Полученные результаты сопоставляются с соответствующими результатами работы [1] и оценивается точность гипотез магнитоупругости тонких тел для данной задачи.

1. Изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса R, изготовленная из материала с конечной электропроводностью σ, находится в стационарном неоднородном магнитном поле $\vec{H}_0(\gamma)$, вектор напряженности которого перпендикулярен к недеформированной срединной поверхности.

Принимается, что магнитная и диэлектрическая проницаемости материала оболочки и окружающей среды равны единице ($\mu=\varepsilon=1$).

Ортогональная система координат (α, β, γ) выбрана так, что срединная поверхность сферической оболочки отнесена к географическим координатам α, β (α — угол долготы, β — угол широты), а γ направлена по нормали к срединной поверхности. Тогда для коэффициентов первой квадратичной формы и для кривизны срединной поверхности будем иметь $A=R$, $B=R\sin\alpha$, $k_1=k_2=R^{-1}$. В последующем ради сохранения симметричной структуры получаемых выражений приведенные выше значения A и B в расшифрованном виде не будем подставлять, однако будем помнить, что A — величина постоянная, а B не зависит от β [4, 5].

В отношении тонкой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

Задача решается в предположении, что для среды, окружающей оболочку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума.

Вектор напряженности невозмущенного магнитного поля $\vec{H}_0$ определяется следующим образом:

$$\vec{H}_0 = \frac{H_0}{(1+\gamma/R)^2}\,\vec{n}_\gamma \tag{1.1}$$

удовлетворяет уравнениям магнитостатики $\operatorname{rot}\vec{H}_0=0$, $\operatorname{div}\vec{H}_0=0$ и условиям непрерывности на поверхностях оболочки.

В (1.1) H_0 — величина вектора напряженности магнитного поля на срединной поверхности ($\gamma=0$), $\vec{n}_\gamma$ — единичный вектор в направлении координатной линии γ.

Принимая упругие и электромагнитные возмущения малыми, после линеаризации для рассматриваемой задачи получим следующие исходные уравнения и соотношения [1].

Уравнения магнитоупругости в области, занимаемой оболочкой ($-h<\gamma<h$)

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{h}^{(i)} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\vec{e}^{(i)} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}^{(i)}}{\partial t}\\ \operatorname{rot}\vec{e}^{(i)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(i)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{h}^{(i)} = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{A}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \frac{h^2}{3R^3}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\Delta+2)\,w\right] - (1-\nu)\frac{1}{B}\frac{\partial\omega}{\partial\beta} +\\ +\frac{1-\nu}{R}\left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(q_1 + \frac{m_1}{R}\right)\\ \frac{1}{B}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - \frac{h^2}{3R^3}\frac{\partial}{\partial\beta}(\Delta+2)\,w\right] + (1-\nu)\frac{1}{A}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} +\\ +\frac{1-\nu}{R}\left(\frac{v}{R} - \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(q_2 + \frac{m_2}{R}\right)\\ \left(\frac{h^2}{3R^3}\Delta - \frac{1+\nu}{R}\right)\theta - \frac{h^2}{3R^4}(\Delta+1-\nu)(\Delta+2)\,w - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =\\ = -\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left\{q_3 + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Bm_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(Am_2)\right]\right\}\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{h}^{(i)}$ и $\vec{e}^{(i)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей, $\vec{U}(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ — вектор перемещения частиц оболочки, u, v, w — тангенциальные и нормальные перемещения точек срединной поверхности, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, c — электродинамическая постоянная. $\vec{Q}(q_1, q_2, q_3)$, $\vec{m}(m_1, m_2, m_3)$ — силы и моменты электромагнитного происхождения

$$q_1 = \int_{-h}^{h} R_1 d\gamma, \quad q_2 = \int_{-h}^{h} R_2 d\gamma, \quad q_3 = \int_{-h}^{h} R_3 d\gamma$$

$$m_1 = \int_{-h}^{h} \gamma R_1 d\gamma, \qquad m_2 = \int_{-h}^{h} \gamma R_2 d\gamma$$

$$\vec{R}(R_1, R_2, R_3) = \frac{\pm}{c}\left[\vec{e}^{(i)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_0\right] \times \vec{H}_0 \tag{1.4}$$

$$\theta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(Bu) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Av)\right] + \frac{2w}{R}$$

$$\chi = \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(Bv) - \frac{\partial}{\partial \beta}(Au)\right]$$

$$\Delta = \frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\right] \tag{1.5}$$

Уравнения электродинамики для вакуума в областях $(-R < \gamma < -h, \gamma > h)$

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{e}^{(e)} = 0 \\ &\operatorname{rot} \vec{e}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\vec{h}^{(e)}$ и $\vec{e}^{(e)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей, причем индекс $e = 1$ относится к области $\gamma > h$, а $e = 2$ — к области $\gamma < -h$.

Таким образом, трехмерная задача магнитоупругих колебаний сферической оболочки свелась к совместному интегрированию системы уравнений (1.2), (1.3) и (1.6), решения которых должны удовлетворять следующим граничным условиям на колеблющихся поверхностях оболочки:

$$\vec{h}^{(i)} = \vec{h}^{(e)}, \qquad \vec{e}_{\tau}^{(i)} = \vec{e}_{\tau}^{(e)} \quad \text{при} \quad \gamma = \pm h \tag{1.7}$$

а также условиям затухания возмущений на бесконечности и условиям ограниченности в области $\gamma < -h$. В (1.7) $\vec{e}_{\tau}$ — векторная составляющая вектора $\vec{e}$, параллельная касательной плоскости к поверхности оболочки в рассматриваемой точке.

2. Подставляя (1.1) в уравнения движения (1.3) и пренебрегая тангенциальными составляющими сил инерции, с учетом (1.4), после некоторых преобразований получим

$$(\Delta+1-\nu)\theta-\frac{1}{R}\left(\frac{h^2}{3R^2}\Delta+1-\nu\right)(\Delta+2)w-$$

$$-\frac{\sigma H_0^2R^2}{\rho c^2c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta-\frac{2w}{R}+\frac{h^2}{R^3}\Delta w\right)-\frac{\sigma H_0R^2}{2\rho hc^2c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h}h_1^{(i)}d\gamma=0$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^3}\Delta-\frac{1+\nu}{R}\right)\theta-\frac{h^2}{3R^4}(\Delta+1-\nu)(\Delta+2)w-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{\sigma h^2H_0^2}{\rho c^2c_0^2R}\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta-\frac{2w}{R}+\frac{1}{3R}\Delta w\right)-\frac{\sigma H_0R}{2\rho hc^2c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h}\frac{\gamma}{r}h_1^{(i)}d\gamma=0 \qquad (2.1)$$

Здесь $c_0=[E/\rho(1-\nu^2)]^{1/2}$ — скорость звука в материале оболочки, $r=R+\gamma$.

В систему (2.1) входит только нормальная компонента индуцированного магнитного поля. Это означает, что для решения задачи магнитоупругих колебаний оболочки из компонентов индуцированного электромагнитного поля необходимо иметь лишь $h_1^{(i)}$. Из уравнений (1.2), (1.6) для определения нормальной компоненты индуцированного магнитного поля во всем пространстве легко получить следующие уравнения:

в области, занимаемой оболочкой,

$$\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial r^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta\Phi^{(i)}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{4\pi\sigma H_0R^2}{c^2r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\Delta w+r\left(\theta-\frac{2w}{R}-\frac{1}{R}\Delta w\right)\right| \qquad (2.2)$$

в области вне тела оболочки

$$\frac{\partial^2\Phi^{(e)}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta\Phi^{(e)}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi^{(e)}}{\partial t^2}=0 \qquad (2.3)$$

с поверхностными условиями [6]

$$\Phi^{(i)}=\Phi^{(e)},\quad \frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial r}=\frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial r}\quad \text{при}\quad r=R+h \qquad (2.4)$$

где

$$\Phi=rh_\gamma \qquad (2.5)$$

Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля определяются из уравнений электродинамики (1.2) и (1.6) при условиях (1.7).

Таким образом, задача магнитоупругих колебаний оболочки свелась к совместному интегрированию системы уравнений (2.1)—(2.3), решения которых должны удовлетворять граничным условиям (2.4), условиям однозначности на сфере и условиям ограниченности в области $|\gamma| > h$.

3. Решения уравнений (2.1), (2.2) и (2.3) представим в виде разложения

$$w = e^{\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} w_n Y_n(\alpha, \beta), \qquad \theta = e^{\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n Y_n(\alpha, \beta)$$

$$\Phi^{(i)} = e^{\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(i)}(r)\, Y_n(\alpha, \beta), \qquad \Phi^{(e)} = e^{\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(e)}(r)\, Y_n(\alpha, \beta) \quad (3.1)$$

$$Y_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n} (A_{nk} \cos k\beta + B_{nk} \sin k\beta)\, P_n^k(\cos \alpha)$$

где ω — частота колебаний, A_{nk} и B_{nk} — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$A_{nk} = \frac{1}{\| Y_n^k \|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta)\, P_n^k(\cos \alpha) \cos k\beta \sin \alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$B_{nk} = \frac{1}{\| Y_n^k \|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta)\, P_n^k(\cos \alpha) \sin k\beta \sin \alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$\| Y_n^k \|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_k}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad \varepsilon_k = \begin{cases} 2 & \text{при } k = 0 \\ 1 & \text{при } k > 0 \end{cases}$$

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \text{ — полиномы Лежандра.}$$

Подставляя (3.1) в уравнения (2.2) и (2.3), для определения $\Phi_n^{(i)}(r)$, $\Phi_n^{(e)}(r)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered} \frac{d^2\Phi_n^{(i)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_n^{(i)}}{dr} - \left(\nu_1^2 + \frac{\lambda_n}{r^2} \right) \Phi_n^{(i)} = f_n(r) \\ \frac{d^2\Phi_n^{(e)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_n^{(e)}}{dr} - \left(\nu_0^2 + \frac{\lambda_n}{r^2} \right) \Phi_n^{(e)} = 0 \end{gathered} \quad (3.2)$$

Здесь

$$\nu_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \qquad \nu_1^2 = \nu_0^2 + \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}, \qquad \lambda_n = n(n+1)$$

$$f_n(r) = \frac{4\pi\sigma H_0 R^2\omega}{c^2 r^2}\left|\left(\theta_n - \frac{\lambda_n - 2}{R} w_n\right) r - \lambda_n w_n\right|$$

Уравнения (3.2) интегрируются в функциях Бесселя чисто мнимого аргумента [7]

$$\Phi_n^{(i)} = r^{-1/2}[A_n^{(i)} I_{n+1/2}(\nu_1 r) + B_n^{(i)} K_{n+1/2}(\nu_1 r) + F_n(r)]$$

$$\Phi_n^{(e)} = r^{-1/2}[A_n^{(e)} I_{n+1/2}(\nu_0 r) + B_n^{(e)} K_{n+1/2}(\nu_0 r)] \qquad (3.3)$$

$$F_n(r) = \int\limits_{R-h}^{r} s^{3/2} f_n(s)[I_{n+1/2}(\nu_1 r) K_{n+1/2}(\nu_1 s) - K_{n+1/2}(\nu_1 r) I_{n+1/2}(\nu_1 s)]\, ds$$

Известно, что функция K в начале координат имеет особенность, а функция I неограниченно возрастает при $r \to \infty$, поэтому следует положить $A_n^{(1)} = B_n^{(2)} = 0$. Удовлетворяя граничным условиям (2.4), определяем остальные постоянные интегрирования и, следовательно, интересующие нас величины $\Phi_n^{(i)}$, $\Phi_n^{(e)}$. Выражения постоянных интегрирования и указанных величин ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Принимая $|\nu_1 R| \gg 1$, $|\nu_0 R| \ll 1$ и используя асимптотические формулы функций Бесселя, выражения для $\Phi_n^{(i)}$, $\Phi_n^{(e)}$ упрощаются и принимают вид

$$\Phi_n^{(i)} = \frac{H_0\lambda_n}{r\delta_n}[a_n(r) w_n + b_n(r)\theta_n]$$

$$\Phi_n^{(1)} = \frac{H_0\lambda_n}{r_1\delta_n}[a_n(r_1) w_n + b_n(r_1)\theta_n]\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1} \qquad (3.4)$$

$$\Phi_n^{(2)} = \frac{H_0\lambda_n}{r_2\delta_n}[a_n(r_2) w_n + b_n(r_2)\theta_n]\left(\frac{r}{r_2}\right)^{n}$$

где введены обозначения

$$\delta_n = (\lambda_n + \nu_1^2 r_1 r_2)\,\mathrm{sh}\,2\nu_1 h + [n\nu_1 r_2 + (n+1)\nu_1 r_1]\,\mathrm{ch}\,2\nu_1 h$$

$$a_n(r) = \frac{2\delta_n R}{\lambda_n}\left(1 - \frac{\lambda_n\gamma}{2R}\right) - \delta_{1n}(r)[n^2 r_2 - (\lambda_n + 2)R] +$$

$$+ \delta_{2n}(r)[(n+1)^2 r_1 - (\lambda_n + 2)R], \quad r_1 = R + h, \quad r_2 = R - h$$

$$b_n(r) = R^2\left|\delta_{2n}(r) - \delta_{1n}(r) - \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right| \qquad (3.5)$$

$$\delta_{1n}(r) = \mathrm{sh}\,\nu_1(r - r_1) - \frac{\nu_1 r_1}{n}\,\mathrm{ch}\,\nu_1(r - r_1)$$

$$\delta_{2n}(r) = \mathrm{sh}\,\nu_1(r - r_2) + \frac{\nu_1 r_2}{n+1}\,\mathrm{ch}\,\nu_1(r - r_2)$$

Подставляя (3.4) в (2.5), с учетом (3.1), найдем величину нормальной компоненты напряженности индуцированного магнитного поля во всем пространстве

$$h_r = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(r)\,Y_n(\alpha,\beta)\exp(i\omega t) \tag{3.6}$$

В силу (3.1) и (3.6) из системы (2.1) получим характеристическое уравнение относительно частоты колебаний оболочки

$$\Omega_n^2 - \omega^2 + \frac{\varepsilon_0\beta_0^2 R^2\omega^2}{\mathrm{ch}(\lambda_n - 1 + \nu)}\left(1 + \frac{\lambda_n a_{2n}}{2h\delta_n}\right) + \frac{\varepsilon_0^2 c_0^2\beta_0^4\lambda_n Q_{1n}}{3c^2(\lambda_n - 1 + \nu)}\omega^2 + \frac{\varepsilon_0\beta_0^2 c_0^2 Q_{2n}}{\mathrm{ch}(\lambda_n - 1 + \nu)}\omega = 0 \tag{3.7}$$

где

$$Q_{1n} = 1 + \frac{3}{2h\delta_n}\left[a_{1n} + 2a_{2n}\left(1 + \frac{\lambda_n}{6}\right) + \frac{a_{3n}R^2}{h^2} + \frac{2a_{4n}R^2}{h^2}\left(1 + \frac{\lambda_n h^2}{2R^2}\right)\right]$$

$$Q_{2n} = \frac{h^2}{3R^2}(\lambda_n - 1 + \nu)(\lambda_n - 2)\left(1 + \frac{\lambda_n a_{2n}}{2h\delta_n}\right) + \frac{\lambda_n a_{3n}}{2h\delta_n}(\lambda_n - 1 + \nu) + \frac{\lambda_n h^2}{3R^2}(\lambda_n - 2) + 2\left(1 + \nu + \frac{2\lambda_n h^2}{R^2}\right) - \frac{\lambda_n a_{4n}}{2h\delta_n}(\lambda_n - 2)\left(\frac{\lambda_n h^2}{3R^2} - 1 + \nu\right) - \frac{\lambda_n a_{1n}}{2h\delta_n}\left(1 + \nu + \frac{\lambda_n h^2}{3R^2}\right) \tag{3.8}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{4\pi\sigma h}{c}, \quad \beta_0 = \frac{V_A}{c_0}, \quad V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

$$a_{1n} = R\int_{r_1}^{r_2}\frac{a_n(r)}{r^2}\,dr, \qquad a_{2n} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{b_n(r)}{r^2}\,dr$$

$$a_{3n} = R\int_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma a_n(r)}{r^3}\,dr, \qquad a_{4n} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma b_n(r)}{r^3}\,dr$$

Определение остальных компонент индуцированного электромагнитного поля в общем случае весьма затруднительно. Их определение существенно облегчается в случае осесимметричных колебаний (возмущения не зависят от координаты β, $u_\beta = h_\beta = e_\alpha = e_\gamma = 0$). В этом случае из уравнений электродинамики (1.2), (1.6) в силу (3.6) найдем

$$
\begin{aligned}
e_\beta &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{\lambda_n}\Phi_n(r)\,Y_n^0(\alpha)\exp \omega t \\
h_\alpha &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r}{\lambda_n}\Phi_n(r)\,Y_n^0(\alpha)\exp(\omega t)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Здесь $Y_n^0(\alpha) = Y_n(\alpha, \beta)|_{k=0}$.

4. Рассмотренная здесь задача на основе гипотез магнитоупругости тонких тел была решена в работе [1]. Получены формулы для определения компонент индуцированного электромагнитного поля и характеристическое уравнение относительно частоты упругих колебаний оболочки. Выражение компоненты h_γ и характеристическое уравнение, полученные в работе [1], имеют вид

$$
\begin{gathered}
h_\gamma^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n, \qquad h_\gamma^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+2} Q_n, \qquad h_\gamma^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{n+1} Q_n \\
Q_n = -\frac{4\pi\sigma\omega H_0 R^2}{\nu_n^2 c^2}\left(\theta_n - \frac{2w_n}{R}\right) Y_n(\alpha, \beta)\exp(\omega t)
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

$$
1 + b_1\omega_n + b_2\omega_n^2 + b_3\omega_n^3 = 0 \tag{4.2}
$$

где

$$
b_1 = \frac{\sigma_0\Omega_n R^2}{d_n c h} + \frac{\sigma_0 h c_0^2 \beta_0^2}{3c\Omega_n R^2(\lambda_n - 1 + \nu)}\left[\lambda_n^2 + (\lambda_n - 2)(\lambda_n - 1 + \nu) + \frac{6R^2(1+\nu)}{h^2}\right]
$$

$$
b_2 = 1 + \frac{\lambda_n\sigma_0^2 c_0^2\beta_0^2}{3d_n c^2(\lambda_n - 1 + \nu)}(\lambda_n\beta_0^2 + \lambda_n - 2)
$$

$$
b_3 = \frac{\sigma_0\Omega_n R^2}{d_n c h(\lambda_n - 1 + \nu)}(d_n\beta_0^2 + \lambda_n - 1 + \nu)
$$

$$
d_n = \lambda_n + \frac{R}{h}\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad \omega_n = \frac{\omega}{\Omega_n}
$$

$$
\Omega_n^2 = \frac{gE}{\gamma_0 R^2}(\lambda_n - 2)\frac{1 + \delta^2(\lambda_n - 1)^2}{\lambda_n - 1 + \nu}, \qquad \frac{\gamma_0}{g} = \rho, \qquad \delta^2 = \frac{h^2}{3R^2(1 - \nu^2)}
$$

$$
\nu_n^2 = \lambda_n + \frac{4\pi\sigma\omega R^2}{c^2} + \frac{(2n+1)R}{2h}
$$

Здесь γ_0 — удельный вес материала оболочки, g — ускорение силы тяжести, Ω_n — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

Приведем также выражения остальных компонент индуцированного электромагнитного поля в случае осесимметричной деформации

$$e_{\beta}^{(i)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{\lambda_n}Q_n^0$$

$$e_{\beta}^{(1)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{\lambda_n}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1}Q_n^0$$

$$e_{\beta}^{(2)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{\lambda_n}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{n}Q_n^0$$

$$h_{\alpha}^{(i)} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{2\lambda_n}\left[1-(2n+1)\frac{1}{h}\right]Q_n^0$$

$$h_{\alpha}^{(1)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{n+1}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+2}Q_n^0$$

$$h_{\alpha}^{(2)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{n}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{n-1}Q_n^0$$

$$Q_n^0 = Q_n|_{h=0}$$

Принимая $|\nu_1^2 h^2| \ll 1$, формулы (3.6), (3.9) и уравнение (3.7) совпадают соответственно с формулами (4.1), (4.3) и с уравнением (4.2).

Таким образом, точность гипотез магнитоупругости тонких тел для рассматриваемой задачи характеризуется условиями

$$\left|\frac{\omega R}{c}\right| \ll 1, \qquad |\nu_1 R| \gg 1, \qquad |\nu_1^2 h^2| \ll 1$$

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 19 I 1977

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Գ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐՈՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳՆԴԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում մագնիսաառաձգականության եռաչափ գծայնացված հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրվում է գնդային թաղանթի մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը ստացիոնար մագնիսական դաշտում, երբ մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորը ուղղված է թաղանթի միջին մակերևույթին ուղղահայաց։ Համատեղ լուծելով թաղանթի մագ-

նիսաառաձգականության հավասարումները նրան շրջապատող միջավայրի էլեկտրոդինամիկայի հավասարումների հետ, որոշվում է ինդուկցված մագնիսական դաշտի նորմալ բաղադրիչը։ Թաղանթի առաձգական տատանումների հաճախականության որոշման համար բերվում է խարակտերիստիկ հավասարում։ Ինդուկցված էլեկտրոմագնիսական դաշտի մյուս բաղադրիչները որոշվում են առանցքասիմետրիկ տատանումների դեպքում։

Բերված արդյունքները համեմատվում են այն արդյունքների հետ, որոնք ստացվում են նույն խնդիրը բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության հիպոթեզի օգնությամբ լուծելիս և գնահատվում է նշված հիպոթեզի ճշտությունը դիտարկվող խնդրի համար։

VIBRATION OF ELECTROCONDUCTING SPHERICAL SHELL IN THE RADIAL MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, P. A. MKRTCHIAN

Summary

The problem of magnetoelastic vibration of a spherical shell in the stationary radial magnetic field is considered. The normal component of the induced magnetic field is determinated all over the space by means of a simultaneous solving both the magnetoelasticity equations of shell and the equations of electrodynamics for environment of the shell. The characteristic equation of the shell elastic vibration modes is derived. The other components of the induced electromagnetic field are obtained for the case of axisymmetric vibration. The results obtained are compared with the similar ones of the same problem solved by means of the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies, and the accuracy of that hypothesis is estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* Об уравнениях магнитоупругости тонких сферических оболочек. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
4. *Вл[illegible] В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949, 265—275.
5. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974, 128—132.
6. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962, 82—89.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971, 398—403.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механ

М. В. БЕЛУБЕКЯН, А. В. ВАРДАНЯН

О ПРИМЕНИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДО В ЗАДАЧАХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматриваются гармонические колебания электропроволящей беско нечной пластинки, находящейся в постоянном магнитном поле с вектор напряженности, параллельным срединной поверхности пластинки. Предп лагается, что материал пластинки не обладает свойствами намагничиван и электрической поляризуемости.

Результаты точного решения сравниваются с результатами, получен ными на основе приближенных методов определения возмущенного эле тромагнитного поля.

1. Бесконечная пластинка постоянной толщины $2h$ помещена в посто ное продольное магнитное поле H_0. Упругие и электромагнитные свойст материала пластинки характеризуются модулем упругости D, коэффицие том Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ. Магнитная прон цаемость пластинки и среды, окружающей пластинку, принимается равно единице (все величины и соотношения приводятся в гауссовой системе еди ниц). Токи смещения в пластинке пренебрегаются по сравнению с ток проводимости.

Исследования проводятся при допущении о справедливости гипоте Кирхгофа о недеформируемых нормалях и линейных уравнений магнит упругости [1].

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбирается так, что коо динатная плоскость (x, y) совпадает со срединной плоскостью пластинки, направление оси ox — с направлением вектора напряженности заданног магнитного поля.

При указанных предположениях уравнения электродинамики для воз мущенного электромагнитного поля в области, занимаемой пластинк $(|z| \leqslant h)$, следующие:

$$\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c} e_x, \quad \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_y + \frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_z - \frac{H_0}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\right)\right] \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} e = -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial t}, \quad \operatorname{div} h = 0, \quad \operatorname{div} e = 4\pi\rho_e$$

Здесь $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ — компоненты перемещения сре динной плоскости пластинки, h_x, h_y, h_z, e_x, e_y, e_z — соответствующие компоненты возбужденного магнитного (h) и электрического (e) полей. Последнее уравнение из (1.1) служит для определения электрических зарядов ρ_e, возникающих в процессе колебаний.

Для среды, окружающей пластинку ($|z| > h$), принимается справедливость уравнений электродинамики для вакуума

$$
\begin{gathered}
\operatorname{rot} h^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial e^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} e^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h^{(e)}}{\partial t} \\
\operatorname{div} h^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} e^{(e)} = 0, \quad (e) = (1),\ (2)
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

Здесь индексы (1) и (2) показывают принадлежность соответствующей компоненты возмущенного электромагнитного поля к областям $z > h$ и $z < -h$ соответственно.

Уравнения (1.1) и (1.2) связаны общими граничными условиями на поверхностях пластинки

$$
\begin{aligned}
h &= h^{(1)}, \qquad e_x = e_x^{(1)}, \qquad e_y = e_y^{(1)} \quad \text{при} \quad z = h \\
h &= h^{(2)}, \qquad e_x = e_x^{(2)}, \qquad e_y = e_y^{(2)} \quad \text{при} \quad z = -h
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Условия (1.3) означают непрерывность соответствующих компонент электромагнитного поля на поверхности разрыва при справедливости принятой линеаризации [1], отсутствии поверхностных токов ($\sigma < \infty$) [2] и пренебрежении намагниченностью ($\mu = 1$). На нормальную к поверхности разрыва компоненту электрического поля e_z никакие условия не налагаются. Разрывы компоненты e_z допустимы, так как в процессе колебаний может возникнуть распределение поверхностных электрических зарядов.

Для компонент возмущенного электромагнитного поля в среде, окружающей пластинку, должны выполняться также условия затухания возмущений на бесконечности.

Уравнения движения пластинки имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{E}R_x \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{E}R_y \\
D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = R_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Записанные в правой части уравнений (1.4) силы и моменты, обусловленные взаимодействием электромагнитного поля с движущимся проводником, согласно [1], имеют вид

$$
R_x = 0, \qquad R_y = -\frac{2h\sigma H_0}{c}\left(\frac{H_0}{c}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e_x\,dz\right)
$$

$$R_z = -\frac{2h\sigma H_0}{c}\left(\frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e_y dz\right) \tag{1.5}$$

$$m_x = 0, \quad m_y = \frac{2h^3\sigma H_0}{3c}\left(\frac{H_0}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} z e_z dz\right)$$

Приведенные выше уравнения и граничные условия полностью определяют рассматриваемую задачу магнитоупругих колебаний пластинки.

2. Для поставленной в первом пункте задачи рассматриваются решения следующего вида:

$$q = q_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad Q = Q_0(z) \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \tag{2.1}$$

где через q обозначена любая из компонент перемещения точек пластинки, через $Q(z)$ — любая из компонент электромагнитного поля. $Q_0(z)$ подлежит определению удовлетворением уравнениям и граничным условиям задачи.

Подставляя (2.1) в уравнения (1.1) и (1.2), решая получающиеся при этом обыкновенные дифференциальные уравнения, удовлетворяя условиям (1.3) и условиям затухания возмущений при $z \to \infty$, находим соответствующие для компонент возмущенного электромагнитного поля функции $Q_0(z)$, выраженные через u_0, v_0, w_0. Ниже приводятся лишь некоторые из них

$$e_{y0} = \frac{4\pi\sigma i\omega}{c} H_0 \left\{\left(N + \frac{k_1^2}{\nu_1^2} N_1\right) \operatorname{ch} \nu_1 z - \right.$$

$$\left. - \frac{1 + (k_2^2 - k_1^2)/\nu_1^2}{4\pi\sigma}\right] w_0 - \frac{ik_2 \operatorname{sh} \nu_1 z}{\nu_1^2 \vartheta_1} v_0 \Big\}$$

$$e_{z0} = -\frac{4\pi\sigma\omega}{\nu_1 c} H_0 \left[k_2 \left(N \operatorname{sh} \nu_1 z + \frac{i\omega}{\nu_1 c^2} z\right) w_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\omega}{c^2} - \frac{i(k_1^2 + k_2^2) \operatorname{ch} \nu_1 z}{\nu_1^2 \vartheta_1}\right) \frac{1}{\nu_1} v_0 \right] \tag{2.2}$$

$$h_{z0} = -\frac{4\pi\sigma\omega k_1}{\nu_1^2 c^2}\left(\frac{\nu_0 \operatorname{ch} \nu_1 z}{\nu_0 \operatorname{ch} \nu_1 h + \nu_1 \operatorname{sh} \nu_1 h} - 1\right) H_0 w_0$$

$$e_{y0}^{(e)} = \frac{4\pi\sigma i\omega}{c} H_0 \left[(M + k_1^2 M_1) w_0 \mp \frac{ik_2 \operatorname{sh} \nu_1 h}{\nu_1^2 \vartheta_1} v_0 \right] \exp \nu_0 (h \mp z)$$

$$e_{z0}^{(e)} = \pm \frac{4\pi\sigma\omega}{\nu_0 c} H_0 \left[k_2 M w_0 \mp \frac{i(k_1^2 + k_2^2) \operatorname{sh} \nu_1 h}{\nu_1^2 \vartheta_1} v_0 \right] \exp \nu_0 (h \mp z)$$

$$h_{z0}^{(e)} = \frac{4\pi\sigma\omega k_1 \operatorname{sh} \nu_1 h}{\nu_1 c^2 (\nu_0 \operatorname{ch} \nu_1 h + \nu_1 \operatorname{sh} \nu_1 h)} H_0 w_0 \exp \nu_0 (h \mp z)$$

Здесь

$$\nu_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}, \qquad \nu_0^2 = k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\delta = \frac{4\pi\sigma}{\nu_1}\,\mathrm{sh}\,\nu_1 h + \frac{i\omega}{\nu_0}\,\mathrm{ch}\,\nu_1 h, \qquad \delta_1 = \frac{4\pi\sigma}{\nu_1}\,\mathrm{ch}\,\nu_1 h + \frac{i\omega}{\nu_0}\,\mathrm{sh}\,\nu_1 h$$

$$N = \frac{1}{\delta}\left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)\,h}{\nu_1^2} + \frac{i\omega}{4\pi\sigma\nu_0}\left(1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\nu_1^2}\right)\right]$$

$$N_1 = -\frac{1}{\nu_0\nu_1\delta}\left[\frac{i\omega\nu_1}{2\pi\sigma} - \frac{4\pi\sigma i\omega\,\mathrm{sh}\,\nu_1 h}{(\nu_0\,\mathrm{ch}\,\nu_1 h + \nu_1\,\mathrm{sh}\,\nu_1 h)\,c^2} + \nu_1\nu_0 h\right]$$

$$M = \frac{1}{\delta}\left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)\,h}{\nu_1^2}\,\mathrm{ch}\,\nu_1 h - \frac{1}{\nu_1}\left(1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\nu_1^2}\right)\mathrm{sh}\,\nu_1 h\right]$$

В (2.2) верхний знак соответствует индексу $(e) = (1)$, нижний — $(e) = (2)$.

Подставляя (2.1) в уравнения движения пластинки и учитывая (1.5) и (2.2), получим следующие уравнения, определяющие частоты колебаний:

$$\left[k_1^2 + \frac{1-\nu}{2}k_2^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2\right]u_0 + \frac{\nu+1}{2}k_1k_2v_0 = 0$$

$$\left\{k_2^2 + \frac{1-\nu}{2}k_1^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2 + \frac{1-\nu^2}{E}\,\frac{2\sigma i\omega}{\nu_1^2c^2}H_0^2\left[h\nu_0^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{4\pi\sigma}{\delta_1\nu_1^2}(k_1^2 + k_2^2)\,\mathrm{sh}\,\nu_1 h\right]\right\}v_0 + \frac{\nu+1}{2}k_1k_2u_0 = 0 \tag{2.3}$$

$$D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h\omega^2 = -\frac{2\sigma i\omega h}{c^2}H_0^2\left[1 + \frac{k_2^2 h}{3} + \frac{4\pi\sigma}{\nu_1^2 h}\right]\left(N\nu_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{k_1^2}{\nu_1}N_1\right)\mathrm{sh}\,\nu_1 h - \frac{\nu_1^2 + k_2^2 - k_1^2}{4\pi\sigma}\,h -$$

$$\left. - \frac{k_2^2}{\nu_1}N(\nu_1 h\,\mathrm{ch}\,\nu_1 h - \mathrm{sh}\,\nu_1 h) - \frac{k_2^2h^3}{3c^2}\,i\omega\right]\Big\} \tag{2.4}$$

Приравняв нулю детерминант системы уравнений (2.3), получим характеристическое уравнение, определяющее частоты продольных колебаний. Уравнение же (2.4) определяет частоты поперечных колебаний. Заметив, что задача нахождения частот поперечных колебаний отделяется от задачи нахождения частот продольных колебаний, в дальнейшем будем рассматривать в основном частоты поперечных колебаний.

3. Уравнение (2.4) является трансцендентным и его исследование связано с большими трудностями. Наиболее естественным приближением для решения уравнения (2.4) является упрощение, связанное с использованием

(точнее — с более последовательным использованием) тонкостенности пластинки. Для этого правая часть уравнения (2.4) разлагается в асимптотический ряд по параметру $|\nu_1|h$ и оставляется первый член асимптотического разложения, что будет означать пренебрежение членами порядка $|\nu_1^2|h^2$ по сравнению с единицей [1]

$$|\nu_1^2|h^2 \ll 1 \tag{3.1}$$

В приближении (3.1) соответствующие функции $Q_0(z)$ для компонент возмущенного электромагнитного поля получаются в виде

$$e_{x0} = -\frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{c\delta_0} H_0 \left| \frac{k_2(1+\nu_0 h)}{\nu_0 + h\nu_1^2} w_0 + \frac{i\delta_0}{4\pi\sigma h} z v_0 \right|$$

$$e_{y0} = -\frac{4\pi\sigma i\omega\nu_0 h}{c\delta_0} \left| \left(1 - \frac{k_1^2(1+\nu_0 h)}{\nu_0(\nu_0 + h\nu_1^2)}\right) w_0 + \frac{ik_2\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0 h} z v_0 \right| H_0$$

$$e_{z0} = -\frac{\omega}{c} H_0 \left| k_2 \left(1 + \frac{i\omega}{\delta_0}\right) z w_0 - i v_0 \right|$$

$$h_{x0} = \frac{4\pi\sigma i\omega}{\delta_0 c^2} H_0 \left| \left(\frac{4\pi\sigma k_1^2 h}{\nu_0 + h\nu_1^2} + i\omega\right) z w_0 - \frac{\omega k_2 h\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right|$$

$$h_{y0} = \frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{\delta_0 c^2} H_0 \left(\frac{4\pi\sigma k_2}{\nu_0 + \nu_1^2 h} z w_0 + \frac{\omega\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0\right)$$

$$h_{z0} = \frac{4\pi\sigma\omega k_1 h}{(\nu_0 + \nu_1^2 h) c^2} H_0 w_0 \tag{3.2}$$

$$e_{x0}^{(e)} = -\frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{\delta_0 c} H_0 \left| \frac{k_2(1+\nu_0 h)}{\nu_0 + \nu_1^2 h} w_0 \pm \frac{i\delta_0}{4\pi\sigma} v_0 \right| \exp(h \mp z)\nu_0$$

$$e_{y0}^{(e)} = -\frac{4\pi\sigma i\omega\nu_0 h}{c\delta_0} H_0 \left| \left(1 - \frac{k_1^2(1+\nu_0 h)}{\nu_0(\nu_0 + \nu_1^2 h)}\right) w_0 \pm \frac{ik_2\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right| \exp\nu_0(h \mp z)$$

$$e_{z0}^{(e)} = \mp\frac{4\pi\sigma\omega h}{\delta_0 c} \left| k_2 w_0 \pm \frac{i(k_1^2 + k_2^2)\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right| H_0 \exp\nu_0(h \mp z)$$

$$h_{x0}^{(e)} = \pm\frac{4\pi\sigma i\omega h}{\delta_0 c^2} H_0 \left[\left(\frac{4\pi\sigma k_1^2 h}{\nu_0 + \nu_1^2 h} + i\omega\right) w_0 \mp \frac{\omega k_2\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right| \exp\nu_0(h \mp z)$$

$$h_{y0}^{(e)} = \pm\frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{\delta_0 c^2} \left(\frac{4\pi\sigma k_2 h}{\nu_0 + \nu_1^2 h} w_0 \pm \frac{\omega\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0\right) H_0 \exp\nu_0(h \mp z)$$

$$h_{z0}^{(e)} = \frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{(\nu_0 + \nu_1^2 h) c^2} H_0 w_0 \exp\nu_0(h \mp z), \qquad \delta_0 = 4\pi\sigma\nu_0 h + i\omega$$

В отличие от (2.2), здесь приведены выражения для всех компонент возмущенного электромагнитного поля.

Характеристическое уравнение (2.4) приводится к следующему алгебраическому уравнению:

$$D(k_1^2+k_2^2)^2-2\rho h\omega^2=-\frac{2h\sigma i\omega}{\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{4\pi\sigma k_1^2 h(1+\nu_0 h)}{\nu_0+\nu_1^2 h}+i\omega\right]H_0^2 \tag{3.3}$$

Если в выражении для ν_0 из (3.3) пренебречь членом ω^2/c^2, то получится алгебраическое уравнение четвертой степени относительно ω. В частных случаях, когда колебания не зависят или от координаты $y(k_2=0)$ или от координаты $x(k_1=0)$, характеристические уравнения, соответствующие уравнению (3.3), получены аналогичным образом в [3, 4]. В этих же работах приводятся графики зависимости частоты колебаний и коэффициента затухания в зависимости от напряженности начального магнитного поля и электропроводности материала пластинки.

4. Решение задач магнитоупругих колебаний пластинки значительно упрощается применением гипотезы магнитоупругости тонких тел [1, 5]. Эта гипотеза, наряду с гипотезой Кирхгофа, предполагает, что нормальная компонента возмущенного магнитного поля и тангенциальные компоненты возмущенного электрического поля не меняются по толщине пластинки и аналитически записываются в следующей форме:

$$\begin{gathered}u_x=u(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial x},\quad u_y=v(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial y},\quad u_z=w(x,y,t)\\ e_x=\varphi(x,y,t),\quad e_y=\psi(x,y,t),\quad h_z=f(x,y,t)\end{gathered} \tag{4.1}$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты вектора перемещений частиц пластинки.

Используя (4.1) в уравнениях (1.1), (1.4) с учетом (1.5) и осредняя их по толщине пластинки так, как это делается в [1], получим связанные линейные уравнения движения пластинки и электродинамики в области, занимаемой пластинкой, которые после исключения неизвестных функций φ и ψ можно привести к следующему виду:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=\\ =\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{1-\nu^2}{8\pi E}H_0\left[\frac{\partial}{\partial x}(h_y^+ + h_y^-)-\frac{\partial}{\partial y}(h_x^+ + h_x^-)\right]\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{hH_0}{2\pi}\left[\frac{h_x^+-h_x^-}{2h}-\frac{\partial f}{\partial x}+\right.\\ \left.+\frac{h^2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{h_y^+-h_y^-}{2h}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{h_x^+-h_x^-}{2h}\right)\right]\\ \Delta f-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{h_x^+-h_x^-}{2h}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{h_y^+-h_y^-}{2h}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}H_0\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\end{gathered} \tag{4.3}$$

Здесь h_x^+, h_x^-, h_y^+, h_y^- — неизвестные пока значения соответствующих компонент возмущенного магнитного поля на поверхностях пластинки $z = \pm h$. Остальные компоненты возмущенного электромагнитного поля в области, занимаемой пластинкой, выражаются через входящие в уравнения (4.2) и (4.3) искомые величины следующим образом:

$$\varphi = -\frac{c}{4\pi\sigma}\left(\frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} - \frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \psi = \frac{c}{4\pi\sigma}\left(\frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} - \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$h_x = \frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} z, \qquad h_y = \frac{h_y^+ + h_y^-}{2} + \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} z \tag{4.4}$$

$$e_z = \frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} + \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} z\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} z\right)\right] + \frac{H_0}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\right)$$

Система из четырех уравнений (4.2), (4.3) содержит восемь неизвестных функций u, v, w, f, h_x^+, h_x^-, h_y^+, h_y^-, поэтому ее необходимо рассматривать совместно с уравнениями электродинамики (для среды, окружающей пластинку) (1.2) при общих граничных условиях на поверхностях пластинки (1.3) и условиях затухания на бесконечности. Представляя искомые функции в виде (2.1), легко получить решение задачи. Указанное решение в точности совпадает с выражениями для компонент возмущенного электромагнитного поля (3.2) и характеристическим уравнением (3.3). Отсюда заключаем, что для рассматриваемой задачи гипотеза магнитоупругости тонких тел применима при условии $|\nu_1^2| h^2 \ll 1$.

Частные случаи, когда колебания не зависят или от координаты $y(k_2 = 0)$, или от координаты $x(k_1 = 0)$, на основе (4.1) были ранее рассмотрены в [1, 4].

5. В работе [6] предложены допущения о характере изменения возмущенного электромагнитного поля в вакууме вблизи от поверхностей пластинки $z = \pm h$, которые в сочетании с гипотезой магнитоупругости тонких тел еще более упрощают решение задач магнитоупругих колебаний. Эти допущения для данной задачи следующие:

$$h_x^{(1)} = h_x^{(1)}(x, y, t), \qquad h_y^{(1)} = h_y^{(1)}(x, y, t) \text{ при } h \leqslant z \leqslant h + \lambda$$

$$h_x^{(2)} = h_x^{(2)}(x, y, t), \qquad h_y^{(2)} = h_y^{(2)}(x, y, t) \text{ при } -h - \lambda \leqslant z \leqslant -h$$

$$e_x^{(1)}(h + \lambda) \ll e_x^{(1)}(h), \quad e_y^{(1)}(h + \lambda) \ll e_y^{(1)}(h), \quad h_z^{(1)}(h + \lambda) \ll h_z^{(1)}(h) \tag{5.1}$$

$$e_x^{(2)}(-h - \lambda) \ll e_x^{(2)}(-h), \quad e_y^{(2)}(-h - \lambda) \ll e_y^{(2)}(-h)$$

$$h_z^{(2)}(-h - \lambda) \ll h_z^{(2)}(-h)$$

где λ — некоторый характерный размер (в частности, длина полуволны [6]).

Исключая компоненту $e_z^{(e)}$ из уравнений (1.2), осредняя полученные уравнения по толщине h и используя граничные условия (1.3), найдем [6]

$$\Box(h_x^+ + h_x^-) = 0, \qquad \Box(h_y^+ + h_y^-) = 0, \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Box(h_x^+ - h_x^-) = \frac{2}{h}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f - \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{1}{8\pi\sigma h}\frac{\partial}{\partial t}(h_x^+ - h_x^-) - \frac{H_0}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]$$

$$\Box(h_y^+ - h_y^-) = \frac{2}{h}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(f - \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{1}{8\pi\sigma h}\frac{\partial}{\partial t}(h_y^+ - h_y^-)\right] \qquad (5.2)$$

Уравнения (5.2) вместе с уравнениями (4.2) и (4.3) полностью замыкают рассматриваемую задачу магнитоупругих колебаний пластинки. Таким образом, гипотеза магнитоупругости тонких тел в сочетании с допущениями (5.1) позволяет свести пространственную (трехмерную) задачу магнитоупругих колебаний пластинки к двумерной. Отметим также, что уравнения (4.3) и последние два уравнения из (5.2) можно рассматривать независимо от остальных уравнений, что, в частности, означает отделение задачи определения частот поперечных колебаний от задачи определения частот продольных колебаний.

Представляя функции w, f, $h_x^+ - h_x^-$, $h_y^+ - h_y^-$ в виде

$$q = q_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

подставляя в уравнения (4.3) и в последние два уравнения из (5.2), после некоторых преобразований получим характеристическое уравнение, определяющее частоты поперечных колебаний

$$D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h\omega^2 = -\frac{2h\sigma i\omega}{c^2(4\pi\sigma\nu_0^2 h + i\omega)}\left[\frac{4\pi\sigma k_1^2 h(1 + \nu_0^2 h)}{1/h + \nu_1^2 h} + i\omega\right] H_0^2 \qquad (5.3)$$

Если за характерный размер принять $\lambda = \nu_0^{-1}$, то уравнение (5.3) совпадает с характеристическим уравнением (3.3), полученным без использования допущений (5.1). Пренебрегая в выражении ν_1 членом ω^2/c^2, получим для характерного размера выражение

$$\lambda = (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2}$$

Таким образом, принимая в допущениях (5.1) за характерный размер λ указанное выражение, получим достаточно хорошее приближение для определения частот колебаний данной волны.

Еще раз отметим, что гипотеза магнитоупругости тонких тел в сочетании с допущениями (5.1) позволяет свести пространственную задачу магнитоупругих колебаний пластины к двумерной. Это дает возможность получить решение задач магнитоупругих колебаний также для пластин (и оболочек) с конечными размерами. Решение одной частной задачи магнитоупругих колебаний конечной пластинки на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел и допущений (5.1) приведено в [4].

Институт механики
АН Армянской ССР
Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 21 IV 1977

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՆՂԱՆԱԿՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում են էլեկտրահաղորդիչ անվերջ սալի հարմոնիկ տատանումները, երբ սալը գտնվում է իր միջին մակերևույթին զուգահեռ լարվածության վեկտորով հաստատուն մագնիսական դաշտում։ Ենթադրվում է, որ սալի նյութը չունի մագնիսականացման և էլեկտրական բևեռացման հատկություններ։

Ճշգրիտ լուծման արդյունքները համեմատվում են գրգռված էլեկտրամագնիսական դաշտի որոշման մոտավոր եղանակների հիման վրա ստացված արդյունքների հետ։

ON APPLICABILITY OF SOME APPROXIMATION METHODS IN PROBLEMS ON ELECTROCONDUCTING PLATE VIBRATION IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

M. V. BELUBEKIAN, L. V. VARDANIAN

Summary

Harmonic vibration of an electroconducting infinite plate in the constant magnetic field parallel to the plate's middle surface is considered.

The results of the accurate solution are compared with those obtained by the approximation method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М., Изд. «Мир», 1967.
3. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 20, № 5.
4. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний электропроводящей пластинки в продольном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 5.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
6. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Г. Н. ПАВЛИК

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХСТОРОННИХ СВЯЗЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖИМАЮЩИХ УСИЛИЙ

§ 1. Рассмотрим круглую плиту радиуса R, находящуюся под действием продольных сжимающих усилий T и лежащую без трения на линейно-деформируемом основании. Предполагается, что плита соединена с основанием двухсторонними неосвобождающими связями.

Математически задачу можно сформулировать в виде системы уравнений, которая в безразмерных координатах $r' = Rr$, $\rho' = R\rho$ имеет вид

$$\Delta^2 w(r) = -q(r) - d\Delta w(r) \tag{1.1}$$

$$\Delta w(r) - \frac{1-\nu}{r}\frac{dw(r)}{dr}\Big|_{r=1} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dr}\Delta w(r) - d\,\frac{dw(r)}{dr}\Big|_{r=1} = 0 \tag{1.3}$$

$$\int_0^1 q(\rho)\left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) + F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right)\right]\rho\, d\rho = \lambda\mu w(r) \qquad r \leqslant 1 \tag{1.4}$$

$$\lambda = HR^{-1}, \quad q(r) = q^*(r')R^3D^{-1}$$

$$d = TD^{-1}R^2, \qquad \mu = \theta R^3 D^{-1}$$

$$w(r) = w^*(r')R$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость плиты, ν — коэффициент Пуассона материала плиты, $q^*(r')$ — реактивное давление, $w^*(r')$ — прогиб плиты, H — некоторый геометрический параметр основания, параметр θ характеризует физико-механические свойства основания, $K(e)$ — эллиптический интеграл. Функция $F(t, \tau)$, входящая в (1.4), имеет вид [3]

$$F(t, \tau) = \int_0^\infty [L(u) - 1]\, J_0(tu)\, J_0(\tau u)\, du \tag{1.5}$$

где $L(u)$ — некоторая функция, определяющая тип линейно-деформируемого основания. Для основных моделей ее поведение на бесконечности и в нуле подчиняется следующим соотношениям:

$$L(u) = 1 + O(u^{-3}) \text{ при } u \to \infty$$

$$L(u) = O(u^{\gamma}) \qquad \text{при } u \to 0, \ \gamma > 1$$

Представим функцию прогиба $w(r)$ в виде [1]:

$$w(r) = \sum_{m=1}^{N-1} b_m Q_m(r) + b_N Q_N(r) \tag{1.6}$$

Здесь $Q_1(r) = 1$, а $Q_m(r)$ — специальная система полиномов, ортонормированных по отношению к дифференциальному оператору $E = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2$, то есть

$$\int_0^1 E[Q_m(r)]\, Q_k(r)\, r\,dr = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = k \\ 0 & \text{при} \quad m \neq k \end{cases} \qquad m \geq 2$$

при граничных условиях (1.2) и

$$\frac{d}{dr}\Delta w(r)\Big|_{r=1} = 0 \tag{1.7}$$

Заметим, что $Q_m(r)$ будут иметь вид

$$Q_m(r) = \sum_{s=0}^{m} l_s r^{2s+2} \quad (m \geq 2) \tag{1.8}$$

Коэффициенты l_s даны в табл. 1.

Таблица 1

l_s \ s	0	1	2	3	4
$m=2$	0.851819	−0.344002	0.076445		
$m=3$	−0.942660	1.847518	−1.302656	0.334538	
$m=4$	1.060218	−4.220414	6.643455	−4.561497	1.162520

Учитывая линейность задачи, ищем решение интегрального уравнения (1.4) в том же виде, что и функцию прогиба

$$q(r) = \sum_{m=1}^{N} b_m q_m(r) \tag{1.9}$$

Подставляя в интегральное уравнение (1.4) выражения (1.5) и (1.9), получим для определения $q_m(r)$ интегральные уравнения вида

$$\int_0^1 q_m(\rho)\left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) + F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right)\right]\rho\,d\rho = \gamma\, Q_m(r) \tag{1.10}$$

$$r \leq 1, \; m = 1, 2, \ldots, N$$

§ 2. Для решения интегрального уравнения (1.10) воспользуемся методом сведения его к бесконечной линейной алгебраической системе, изложенным в [3].

Представим функцию $F(t, \tau)$ вида (1.5) в форме двойного ряда по четным полиномам Лежандра

$$F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{kj}(\lambda) P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}) P_{2j}(\sqrt{1-r^2}) \tag{2.1}$$

функции $q_m(\rho)$ и $Q_m(r)$ также разложим в ряды по четным полиномам Лежандра

$$q_m(\rho) = \frac{\mu}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{k=0}^{\infty} S_k^m P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}) \tag{2.2}$$

$$Q_m(r) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^m P_{2k}(\sqrt{1-r^2}), \quad R_k^m = 0 \quad \text{при} \quad k > m+1 \tag{2.3}$$

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Лежандра [4] и интегралом [4]

$$\int_0^1 J_0(bx) P_{2k}(\sqrt{1-x^2}) \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{\sqrt{b}} J_{2k+\frac{1}{2}}(b)$$

получим для коэффициентов $e_{kj}(\lambda)$ выражение

$$e_{kj} = (4k+1)(4j+1) \frac{\pi\lambda (2k-1)!!\,(2j-1)!!}{2\,(2k)!!\,(2j)!!} \times$$

$$\times \int_0^1 [1 - L(u)]\, J_{2k+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2j+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u} \tag{2.4}$$

Для определения коэффициентов R_k^m имеем

$$R_k^m = (4k+1) \int_0^1 Q_m(\rho) P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}) \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad (k \leqslant m+1) \tag{2.5}$$

Подставляя в интегральное уравнение (1.10) функции $F(t, \tau)$, $q_m(\rho)$, $Q_m(r)$ вида (2.1), (2.2), (2.3) и используя спектральное соотношение [3, 4]

$$\int_0^1 \frac{P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{\rho\,d\rho}{r+\rho} = \frac{\pi^2}{4} \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} P_{2m}(\sqrt{1-r^2}) \tag{2.6}$$

получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов S_k^m

$$S_k^m \frac{\pi}{2} \frac{[(2k-1)!!]^2}{[(2k)!!]^2} = R_k^m + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^m \frac{e_{kn}(\lambda)}{4n+1} \tag{2.7}$$

Система (2.7), как доказывается в работе [3], квазивполне регулярна при всех $0 < \lambda < \infty$. Ее можно решать методом редукции.

§ 3. Для окончательного решения задачи необходимо найти коэффициенты b_m.

N—2 коэффициента определяются из дифференциального уравнения (1.1) при условии (1.7).

Именно, будем иметь

$$b_m = -\int_0^1 [q(r) + d\Delta w(r)]\, Q_m(r)\, r dr, \quad m \geq 2 \tag{3.1}$$

или

$$b_m + \sum_{k=1}^{N} b_k (c_{km} + d f_{km}) = 0, \quad m \geq 2 \tag{3.2}$$

где

$$c_{km} = \int_0^1 q_k(r)\, Q_m(r)\, r dr, \qquad f_{km} = \int_0^1 \Delta Q_k(r)\, Q_m(r)\, r dr$$

b_1 найдем из удовлетворения условию статики

$$\int_0^1 q(\rho) \rho d\rho = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} b_k c_{km} = 0 \tag{3.3}$$

Коэффициент b_N найдем из удовлетворения граничному условию (1.3)

$$\sum_{m=1}^{N} b_m (A_m + dB_m) = 0 \tag{3.4}$$

где

$$A_m = \frac{d}{dr} \Delta Q_m(r) \Big|_{r=1}, \qquad B_m = \frac{d}{dr} Q_m(r) \Big|_{r=1}$$

Для того, чтобы однородная система (3.2), (3.3), (3.4) имела нетривиальное решение, определитель ее должен быть равен нулю. Из этого условия находится величина критического сжимающего усилия $d_{\text{кр}}$, при котором пластина теряет устойчивость.

В качестве примера рассмотрим круглую пластину на слое толщиной H, лежащем без трения на жестком основании. Слой связан с жестким основанием при помощи неосвобождающих связей. Эта гипотеза, на наш взгляд, будет реализоваться, если учесть собственный вес слоя. Функция $L(u)$ в этом случае имеет вид [3]:

$$L(u)=\frac{\operatorname{ch}2u-1}{\operatorname{sh}2u+2u}$$

Расчеты проведем для случая $\lambda=1$.

Как показывают вычисления, практически точные результаты достигаются при $N=3$.

Для относительной жесткости $\mu=1,\ 4,\ 10$ будем иметь соответственно $d_{\text{кр}}=T_{\text{кр}}D^{-1}R^2$, $d_{\text{кр}}=6.3799,\ 7.4911,\ 9.5017$.

НИИ механики и прикладной
математики РГУ

Поступила 11 IV 1977

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Գ. Ն. ՊԱՎԼԻԿ

ՍԵՂՄՈՂ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳԾԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԿՈՂՄԱՆԻ ԿԱՊԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ընդհանուր տեսակի գծային դեֆորմացվող հիմքի վրա գտնվող կլոր սալի կայունության վերաբերյալ խնդիրը ուսումնասիրվում է առաջին անգամ։

Ենթադրվում է, որ սալը եզրագծով սեղմվում է ինքնահավասարակշռող շառավղային T ուժերով։ Բացի դրանից ենթադրվում է, որ սալի և հիմքի կոնտակտի շրջանում շփման ուժերը բացակայում են, սակայն նրանց միջև առկա է երկկողմանի շաղկապող կապ սալի հարթությանը ուղղահայաց ուղղությամբ։ Ուսումնասիրվում է կայունության կորուստի առանցքասիմետրիկ ձևը։ Խնդիրը բերվել է սեփական արժեքների որոշման համար դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի համատեղ լուծմանը։

Օրթոգոնալ բազմանդամների եղանակի [1,2] օգնությամբ խնդիրը բերվում է որոշակի քվազի լիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների սիստեմի և սեփական արժեքների որոշման համար հանրահաշվական հավասարումների վերջավոր սիստեմի ուսումնասիրությանը։ Որպես կոնկրետ թվային օրինակ ուսումնասիրվել է կոշտ հիմքի վրա ազատ դրված առաձգական շերտի վրա գտնվող կլոր սալի կայունության վերաբերյալ խնդիրը։

ON STABILITY OF A ROUND PLATE ON A LINEAR-DEFORMED BASE WITH BILATERAL COUPLING UNDER COMPRESSIVE FORCES

V. M. ALEXANDROV, G. N. PAVLIK

S u m m a r y

For the first time the problem on stability of a round plate on the linear-deformed base of a general type is studied.

The plate is compressed along its contour by self-balanced radial forces. The axisymmetrical form of the loss of stability is investigated. The problem is reduced to a joint solution at eigen-values of the system of differential and integral equations. By the method of orthogonal polynomials the problem is reduced to the solution of some infinite quasi-regular algebraic system and to the investigation of a finite system of algebraic equations at eigenvalues.

The problem on stability of a round plate on an elastic layer, free on a rigid base, is presented as a particular numerical example.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Солодовник М. Д.* Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве. Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 4.
2. *Александров В. М., Шацких Л. С.* Универсальная программа расчета изгиба балочных плит на линейно-деформируемом основании. Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1970.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

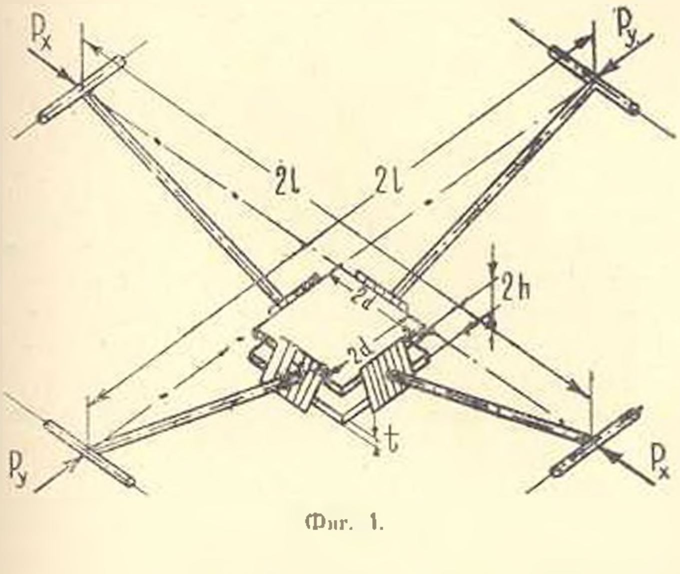
Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

А. Г. ПОПОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ИДЕАЛИЗИРОВАННОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СИНГУЛЯРНОМ ЗАКОНЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

Существует мнение, что использование теорий пластичности с конической особенностью поверхности нагружения в работах по устойчивости пластин за пределом упругости связано с большими математическими трудностями. Эти опасения основаны на том, что при сингулярном законе пластичности существует область, где соотношения между приращениями напряжений и деформаций дифференциально-нелинейные. Однако, при определенных путях нагружения эти дифференциально-нелинейные соотношения при расчетах на устойчивость пластин не используются. Это и будет показано на примере устойчивости идеализированной пластинки при пропорциональном нагружении.

1. *Описание модели пластинки.* Все дальнейшие рассуждения будут проводиться на основе модели идеализированной пластинки (фиг. 1), предложенной в работе [1].



Фиг. 1.

Идеализированная пластинка представляет собой четыре равные жесткие штанги, составляющие в плане прямоугольный координатный крест, которые опираются своими плоскими и перпендикулярными к их осям основаниями на торцы двух параллельных квадратных пластинок. Эти пластинки сделаны из упруго-пластического материала и могут деформироваться лишь в своей плоскости.

В начальном состоянии оси штанг лежат в одной исходной плоскости, размеры пластинок одинаковы и модель медленно нагружается плоской системой сил P_x и P_y, приложенных к концам штанг вдоль их осей.

В качестве критерия устойчивости рассматривается критерий бифуркации процесса деформирования, обоснованность которого проверена прямым анализом свойств возмущенного движения [1].

Система уравнений, описывающая возникающие дополнительные напряжения и деформации при внешних догрузках δP_x и δP_y имеет вид [1]

$$
\begin{gathered}
\delta\sigma_x = \delta\sigma_x^+ + \delta\sigma_x^-, \quad \delta\sigma_y = \delta\sigma_y^+ + \delta\sigma_y^- \\
(\sigma_x + \sigma_y)\frac{ld}{h^2}\varkappa = \delta\sigma_x^+ + \delta\sigma_y^+ - (\delta\sigma_x^- + \delta\sigma_y^-) \\
\varkappa = \frac{1}{4}\left[\delta\varepsilon_x^+ + \delta\varepsilon_y^+ - (\delta\varepsilon_x^- + \delta\varepsilon_y^-)\right] \\
\delta\varepsilon_x^+ - \delta\varepsilon_y^+ = \delta\varepsilon_x^- - \delta\varepsilon_y^-
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где индексом «+» отмечены величины, относящиеся к верхней (фиг. 1) пластинке, а индексом «—» к нижней, и обозначено

$$\delta\sigma_i = \frac{\delta P_i}{2dt}, \qquad \sigma_i = \frac{P_i}{2dt}, \qquad i = x,\ y$$

Линейные размеры l, d, h, t указаны на фиг. 1.

Система (1.1) допускает тривиальное решение

$$
\begin{gathered}
\delta\sigma_x^+ = \delta\sigma_x^- = \frac{1}{2}\delta\sigma_x, \qquad \delta\sigma_y^+ = \delta\sigma_y^- = \frac{1}{2}\delta\sigma_y \\
\delta\varepsilon_x^+ = \delta\varepsilon_x^-, \qquad \delta\varepsilon_y^+ = \delta\varepsilon_y^-
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Это решение соответствует основному продолжению процесса деформирования, при котором центр модели находится в исходной плоскости. Задача заключается в отыскании таких минимальных параметров нагружения, при которых возможно отличное от тривиального решение системы (1.1). Это решение будет соответствовать побочному продолжению процесса деформирования, при котором центр модели отклоняется от исходной плоскости, а полученные значения внешних параметров будут критическими для данной модели.

Материал пластинок считаем несжимаемым.

Каждая пластинка модели находится в условиях плоско-напряженного состояния типа двуосного растяжения-сжатия ($\tau_{xy} = 0$). Как видно, все процессы протекают в одной девиаторной плоскости

$$S_x + S_y + S_z = 0, \quad S_{xy} = S_{xz} = S_{yz} = 0$$

Сделаем замену переменных, аналогичную предложенной в [2]. Введем в этой плоскости орт i в направлении, противоположном проекции оси S_z и перпендикулярный к нему орт j — в сторону оси S_x. Тогда вектор напряжений S в девиаторном пространстве может быть представлен в виде: $S = S_1 i + S_2 j$. Это отвечает следующей замене переменных:

$$S_x + S_y = \sqrt{\frac{2}{3}} S_1, \quad S_x - S_y = \sqrt{2}\, S_2 \tag{1.3}$$

Аналогично для деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j$$

где

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \varepsilon_1, \quad \varepsilon_x - \varepsilon_y = \sqrt{2}\, \varepsilon_2 \tag{1.4}$$

Все дальнейшие рассуждения будут вестись в совмещенной девиаторной плоскости $S_1 \sim S_2$. Отметим, что на ней первоначальная поверхность нагружения $\sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \text{const}$ принимает вид

$$\sqrt{S_1^2 + S_2^2} = S_0$$

то есть просто окружность.

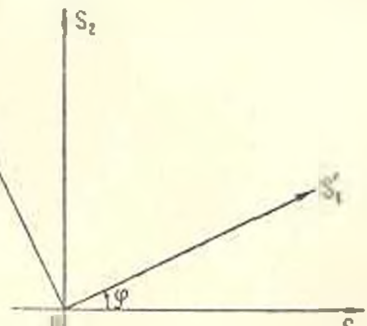
Ниже будут рассматриваться такие процессы нагружения, при которых отношение $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ остается постоянным (пропорциональное нагружение), причем, не нарушая общности, можно считать $\sigma_x \geqslant \sigma_y$. Таким процессам на плоскости $S_1 \sim S_2$ соответствует нагружение по лучу, исходящему из начала координат под некоторым углом φ к оси S_1, $(0 \leqslant \varphi < \pi/2)$. Запишем систему (1.1) в проекциях на оси, повернутые на угол φ относительно первоначальной системы координат $S_1 o S_2$ (фиг. 2) и выделим обратимые части деформаций:

$$\mu S_1 (\delta p_1^+ - \delta p_1^-) =$$

$$= (\delta S_1^+ - \delta S_1^-)\left(\cos^2\varphi - \mu S_1 \frac{1}{2G}\right) -$$

$$- (\delta S_2^+ - \delta S_2^-) \cos\varphi \sin\varphi \tag{1.5}$$

$$\delta S_1^+ + \delta S_1^- = \delta S_1, \quad \delta S_2^+ + \delta S_2^- = \delta S_2$$



Фиг. 2.

$$(\delta p_1^+ - \delta p_1^-) \sin\varphi + (\delta p_2^+ - \delta p_2^-) \cos\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2G} \left[(\delta S_1^+ - \delta S_1^-) \sin\varphi + (\delta S_2^+ - \delta S_2^-) \cos\varphi\right]$$

где обозначено $\mu = \frac{ld}{h^2} \frac{\sqrt{6}}{12}$, δp_i — приращения пластических деформаций, G — модуль упругого сдвига.

Здесь для удобства записи все приращения даны в повернутой системе координат, а значение S_1 — в первоначальной.

Для процесса пропорционального нагружения в системе (1.5) нужно положить $\delta S_2 = 0$.

2. *О соотношениях между напряжениями и деформациями для плоских путей нагружения.* Для полной постановки задачи к системе (1.1) необходимо добавить связь между напряжениями и деформациями. В работе [3] сравниваются выводы некоторых теорий пластичности (теории скольжения Батдорфа и Будянского, теории Сандерса, соотношений «напряжение—деформация», предложенных Клюшниковым В. Д. и модельного представления Работнова Ю. Н.). В этой работе показано, что для плоских путей нагружения при догрузке из конца простого нагружения все названные теории совпадают, а при определенных ограничениях на направление догрузки их соотношения переходят в деформационную теорию. Дальнейшие рассуждения будут проводиться на основе теории Сандерса, однако полученный результат, в силу вышесказанного, будет справедлив для любой из этих теорий.

Основные предположения теории Сандерса для плоских путей нагружения заключаются в следующем [3]. Роль поверхности нагружения играет замкнутая кривая нагружения, которая представляет собой огибающую плоского семейства прямых (прямые пластичности). Эти прямые в процессе пластического деформирования могут перемещаться лишь в противоположную от начала координат сторону и только поступательно (самопараллельно), причем перемещаются только те прямые, которые имеют с вектором напряжений S общую точку. При перемещении данной прямой пластичности на величину δh возникает единичное приращение пластической деформации $\delta \boldsymbol{p}_n$, определяемое соотношением

$$\delta \boldsymbol{p}_n = g(h)\,\boldsymbol{n}\,\delta h$$

где g — функция расстояния h данной прямой от начала координат, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к этой прямой в плоскости нагружения.

Полное приращение пластической деформации $\delta \boldsymbol{p}$, вызываемое догрузкой δS, находится суммированием единичных приращений

$$\delta \boldsymbol{p} = \int g(h)\,\boldsymbol{n}\,\delta h\,d\eta \tag{2.1}$$

где η — угол между нормалью $\boldsymbol{n}$ и направлением вектора напряжений S, интегрирование ведется по всем углам η, соответствующие прямые которых перемещаются при догрузке δS.

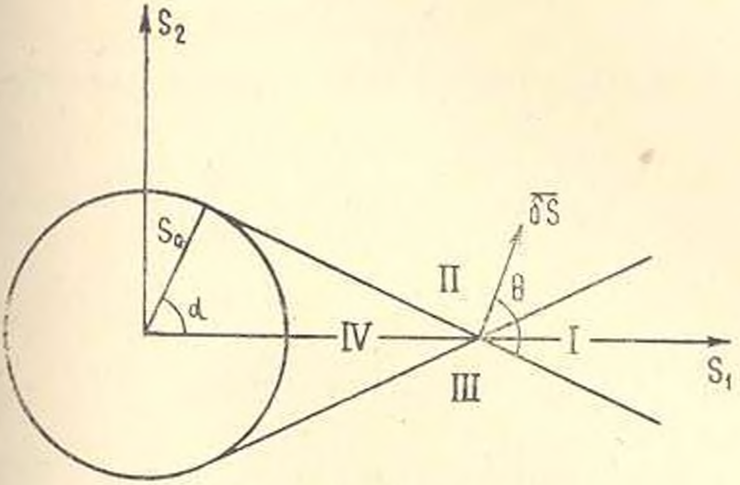
Рассмотрим следующий путь нагружения, когда из начала координат на плоскости $S_1 \sim S_2$ нагружение происходит по оси S_1. Для приращения напряжения δS можно выделить следующие четыре зоны, где соотношения „$\delta p \sim \delta S$" записываются различным образом (фиг. 3).

I зона: $-\frac{\pi}{2}+\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}-\alpha$ — зона полного нагружения (ПН)

$$
\begin{aligned}
\delta p_1 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos^2\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_2 \\
\delta p_2 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta\, d\eta\, \delta S_2
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где $h=|s|\cos\eta$, углы α и θ определяются соотношением

$$
\cos\alpha=\frac{S_0}{|S|};\quad \cos\theta=\frac{\delta S_1}{\sqrt{\delta S_1^2+\delta S_2^2}};\quad \sin\theta=\frac{\delta S_2}{\sqrt{\delta S_1^2+\delta S_2^2}}
\tag{2.3}
$$



Фиг. 3.

II зона: $\frac{\pi}{2}-\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}+\alpha$ — зона неполного нагружения (НН)

$$
\begin{aligned}
\delta p_1 &= \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(h)\cos^2\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_2 \\
\delta p_2 &= \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta\, d\eta\, \delta S_2
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

III зона: $-\frac{\pi}{2}-\alpha<\theta<-\frac{\pi}{2}+\alpha$ — зона неполного нагружения (НН)

$$
\begin{aligned}
\delta p_1 &= \int_{-\alpha}^{\theta+\frac{\pi}{2}} g(h)\cos^2\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{-\alpha}^{\theta+\frac{\pi}{2}} g(h)\cos\eta \sin\eta\, d\eta\, \delta S_2 \\
\delta p_2 &= \int_{-\alpha}^{\theta+\frac{\pi}{2}} g(h)\cos\eta \sin\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{-\alpha}^{\theta+\frac{\pi}{2}} g(h)\sin^2\eta\, d\eta\, \delta S_2
\end{aligned}
\qquad (2.5)
$$

IV зона: происходит упругая разгрузка.

При δS, направленном в зону I, соотношения (2.2) — дифференциально-линейные, голономные и, следовательно, определяются деформационной теорией пластичности. При δS, направленном в зоны II и III, соотношения (2.4) и (2.5) — дифференциально-нелинейные.

Введем в рассмотрение следующие две функции, определенные при $\delta S_2 \geqslant 0$:

$$
\begin{aligned}
f_1(\delta S_1, \delta S_2) &= \int_{\gamma}^{\alpha} g(h)\cos^2\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{\gamma}^{\alpha} g(h)\cos\eta \sin\eta\, d\eta\, \delta S_2 \\
f_2(\delta S_1, \delta S_2) &= \int_{\gamma}^{\alpha} g(h)\cos\eta \sin\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{\gamma}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta\, d\eta\, \delta S_2
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$

где

$$
\gamma = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 - \alpha \\ \theta - \pi/2, & \text{если } \pi/2 - \alpha < \theta < \pi/2 + \alpha \end{cases} \qquad (2.7)
$$

и θ определяется (2.3).

Тогда, учитывая (2.2) и (2.4), при $\delta S_2 \geqslant 0$ (то есть при $\theta \geqslant 0$) можно записать

$$
\delta p_1 = f_1(\delta S_1, \delta S_2), \quad \delta p_2 = f_2(\delta S_1, \delta S_2) \qquad (2.8)
$$

Сделаем функцию $\gamma(\theta)$ дифференцируемой функцией своего аргумента. Для этого заменим недифференцируемую особенность (угол) в точке $\theta = \pi/_2 - \alpha$ дугой окружности, и затем радиус этой окружности устремим к нулю. Тогда получим, что при переходе через точку $\theta = \pi/_2 - \alpha$ производная $\dfrac{d\gamma}{d\theta}$ плавно меняется от 0 слева до 1 справа от этой точки. Так измененные функции f_1 и f_2, определенные (2.6), будут теперь дифференцируемыми функциями своих аргументов, а соотношения (2.8) при этом останутся в силе.

Выполним некоторые вспомогательные вычисления, которые понадобятся в дальнейшем.

Рассмотрим два вектора δS^+ и δS^-, компоненты которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\delta S_1^+ + \delta S_1^- > 0;\quad \delta S_2^+ + \delta S_2^- = 0;\quad \delta S_2^+ > 0 \tag{2.9}$$

Тогда, учитывая (2.4) и (2.7), можно записать

$$\begin{aligned} \delta p_1^+ &= f_1(\delta S_1^+,\ \delta S_2^+),\quad \delta p_2^+ = f_2(\delta S_1^+,\ \delta S_2^+) \\ \delta p_1^- &= f_1(\delta S_1^-,\ -\delta S_2^-),\quad \delta p_2^- = f_2(\delta S_1^-,\ -\delta S_2^-) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Рассмотрим следующую разность и применим теорему о среднем

$$\delta p_1^+ - \delta p_1^- = f_1(\delta S_1^+,\ \delta S_2^+) - f_1(\delta S_1^-,\ -\delta S_2^-) =$$

$$= \left.\frac{\partial f_1}{\partial(\delta S_1)}\right|_* (\delta S_1^+ - \delta S_1^-) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial(\delta S_2)}\right|_* (\delta S_2^+ + \delta S_2^-)$$

здесь и ниже * означает, что взято значение в некоторой средней точке.

Учитывая условие (2.9), получим

$$\delta p_1^+ - \delta p_1^- = \left.\frac{\partial f_1}{\partial(\delta S_1)}\right|_* (\delta S_1^+ - \delta S_1^-) \tag{2.11}$$

Аналогично по второй оси:

$$\delta p_2^+ - \delta p_2^- = f_2(\delta S_1^+,\ \delta S_2^+) + f_2(\delta S_1^-,\ -\delta S_2^-) =$$

$$= 2f_2(\delta S_1^-,\ -\delta S_2^-) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial(\delta S_1)}\right|_* (\partial S_1^+ - \delta S_1^-) \tag{2.12}$$

Для входящих сюда производных имеем

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial(\delta S_1)}\right|_* = \int\limits_{\gamma^*}^{\alpha} g(h)\cos^2\gamma_1 d\gamma_1 = k_1 \tag{2.13}$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial(\delta S_1)}\right|_* = \int\limits_{\gamma^*}^{\alpha} g(h)\cos\gamma_1\sin\gamma_1 d\gamma_1 = k_2 \tag{2.14}$$

Так как $\gamma^* \geqslant -\alpha$, имеем два следующих неравенства:

$$k_1 \leqslant \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos^2\gamma_1 d\gamma_1 = g_1 \tag{2.15}$$

$$k_2 \geqslant 0 \tag{2.16}$$

Если вектор δS^- направлен в зону ПН, то, учитывая (2.2) и условие (2.9), можно записать

$$2f_2(\delta S_1^-,\ -\delta S_2^-) = g_3(\delta S_2^+ - \delta S_2^-)$$

где обозначено

$$g_3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta d\eta$$

Если вектор δS^{-} направлен в зону III (фиг. 3), то представим

$$2f_2(\delta S_1^-, \quad \delta S_2^-) = k_3(\delta S_2^- - \delta S_2^-) \tag{2.17}$$

Выше показано, что f_2 есть неубывающая функция от δS_1 при фиксированном δS_2, следовательно, справедливо неравенство

$$k_3 \leqslant g_3 \tag{2.18}$$

Окончательно (2.11) и (2.12) принимают вид

$$\delta p_1^+ - \delta p_1^- = k_1(\delta S_1^+ - \delta S_1^-) \tag{2.19}$$

$$\delta p_2^+ - \delta p_2^- = k_2(\delta S_1^+ - \delta S_1^-) + k_3(\delta S_2^+ - \delta S_2^-)$$

где k_1, k_2, k_3 удовлетворяют неравенствам (2.15), (2.16), (2.17).

Эти соотношения получены для случая, когда нагружение происходило по оси S_1. Они, очевидно, будут верны и для любого нагружения по лучу из начала координат, если считать компонентами векторов приращений напряжений и деформаций их значения в повернутой системе координат, в которой ось абсцисс совпадает с лучом нагружения.

3. *Определение критических нагрузок.* Покажем, что наименьшая нагрузка, при которой происходит разветвление форм равновесия для путей пропорционального нагружения, соответствует случаю, когда приращения напряжений направлены в зону ПН, где зависимость между приращениями напряжений и деформаций определяется деформационной теорией пластичности.

Пусть продолжения δS^+ и δS^- направлены в зону ПН. Тогда из (2.2) имеем следующую связь:

$$\delta p_1 = g_1 \delta S_1, \quad \delta p_2 = g_3 \delta S_2 \tag{3.1}$$

где обозначено

$$g_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos^2\eta d\eta, \qquad g_3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta d\eta$$

Подставляя (3.1) в систему уравнений (1.5), получим следующее уравнение для определения критического значения S_1:

$$\left(\mu S_1 g_1 + \mu S_1 \frac{1}{2G} - \cos^2\varphi - \frac{1+2Gg_3}{1+2Gg_3}\sin^2\varphi\right)(\delta S_1^+ - \delta S_1^-) = 0 \tag{3.2}$$

из которого видно, что побочные продолжения возможны при

$$S_1 = \frac{\cos^2 \varphi}{\mu\left(\dfrac{1}{2G} + g_1\right)} + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu\left(\dfrac{1}{2G} + g_3\right)} \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь случай, когда хотя бы одно из побочных продолжений направлено в зону НН. Заметим, что система (1.5) не меняется при замене индексов «+» и «—». Поэтому, не нарушая общности, для продолжений δS^+ и δS^- достаточно рассмотреть ситуацию, удовлетворяющую условиям (2.9). Тогда выполняются соотношения (2.19) и (2.20). Используя их, для критического значения S_1 получим

$$S_1 = \frac{\cos^2 \varphi + \dfrac{1+2Gk_1}{1+2Gk_3}\sin^2\varphi + \dfrac{2Gk_2}{1+2Gk_3}\cos\varphi\sin\varphi}{\mu\left(\dfrac{1}{2G} + k_1\right)} \tag{3.4}$$

Сравнивая значения критических параметров (3.3) и (3.4) и учитывая неравенства (2.15), (2.16) и (2.18), получаем, что нанраннее разветвление форм равновесия происходит при побочных продолжениях, направленных в зону ПН.

На основании этого можно сделать вывод, что при пропорциональном нагружении ветвление процесса (потеря устойчивости) происходит при приращениях напряжений, направленных в зону, где соотношения «напряжение—деформация» являются дифференциально-линейными. Именно эти соотношения и надо использовать при расчетах на устойчивость пластин.

Дифференциально-нелинейные соотношения, которые и представляли основную трудность при использовании сингулярного закона пластичности при вычислении критических нагрузок для путей пропорционального нагружения не участвуют. По всей видимости, такого результата можно ожидать и для более широкого класса путей нагружения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 24 VI 1976

Լ. Դ. ՊՈՊՈՎ

ԻԴԵԱԼԱԿԱՆԱՑՎԱԾ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐ ՕՐԵՆՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է իդեալականացված սալի դեֆորմացիայի ընթացքի բիֆուրկացիան բեռնավորման մակերևույթի վրա եզակիություններով պլաստիկության տեսության շրջանակներում:

Ցույց է տրվում, որ որոշակի պայմանների դեպքում ոչ գծային դիֆերենցիալ առնչությունները լարումների և դեֆորմացիաների աճերի միջև սալերի կայունության ուսումնասիրության համար կատարվող հաշվարկնե-

բում չեն օգտագործվում և կայունությունը որոշվում է պլաստիկության դե-ֆորմացիոն տեսության հիման վրա։

STABILITY OF AN IDEALIZED PLATE UNDER THE SINGULARITY LAW OF ELASTICITY

L. G. POPOV

Summary

The problem of bifurcation of the deformation process for an idealized plate with a loading surface singularity is considered in terms of the plasticity theory.

It is shown that under certain conditions at least, the differential nonlinear relation between stress and strain increments is not used when the plate's stability is calculated and the stability is estimated in terms of the deformation theory of plasticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клюшников В. Д.* Устойчивость процесса сжатия идеализированной пластинки. МТТ, 1968, № 4.
2. *Клюшников В. Д.* О зависимости критических нагрузок от истории нагружения упруго-пластических пластин. Сб. «Механика деформируемых тел и конструкций», М., 1975.
3. *Клюшников В. Д.* Новые представления в пластичности и деформационная теория. ПММ, 1956, т. XXIII, вып. 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

С. А. ГУКОВСКИЙ

БИФУРКАЦИЯ ПРОЦЕССА СЖАТИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Вопросу устойчивости упруго-пластических конструкций и, в частности, устойчивости сжатого стержня за пределом упругости посвящена обширная литература. Устойчивость стержня с исследованием закритического состояния впервые рассматривалась в работах [6, 7], а также в других работах тех же авторов. История вопроса и анализ различных критериев устойчивости содержатся в [3].

В работах [1, 2] изложен новый взгляд на проблему устойчивости упруго-пластических систем. Сущность его состоит в том, что явление выпучивания упруго-пластических систем рассматривается как следствие потери устойчивости движения или процесса деформирования. Высказывается естественное предположение, что процесс деформирования неустойчив, если при заданном приращении внешних параметров решение для приращения внутренних параметров неединственно. На основе этого сформулирован критерий бифуркации процесса: при медленном нагружении консервативными силами процесс деформирования становится неустойчивым за первым моментом бифуркации процесса.

В тех же работах вводится далее понятие равноактивной бифуркации процесса деформирования, то есть такой бифуркации, при которой распределение упругих и пластических зон в деформируемой системе одинаково для основного и побочного продолжения процесса. Можно предположить, и это предположение подтверждается для простейших идеализированных упруго-пластических систем [3], что равноактивная бифуркация процесса является наиболее ранней в истории внешнего нагружения. Здесь это положение подтверждается для реального стержня.

Отметим, что критерий равноактивной бифуркации определяет критические силы, совпадающие с теми, которые получаются на основе концепции продолжающегося нагружения [4] в тех случаях, когда последняя может быть реализована. Более подробно об этом см. в работе [2].

§ 1. *Уравнения процесса деформирования стержня*

Рассматривается шарнирно опертый прямолинейный стержень квадратного поперечного сечения (сторона квадрата равна $2a$) длиной $2l$, сжатый силой P. Предполагается, что к моменту потери устойчивости стержень находился в пластическом состоянии и что в процессе выпучивания в нем может появиться зона упругой разгрузки. Основной процесс в данном случае — это нагружение силой P стержня, который сохраняет прямолинейную форму, побочный — нагружение выпученного стержня.

Получим уравнения процесса деформирования. Пусть нагрузке P соответствует деформация e, напряжения σ и прогиб стержня U. Приращению нагрузки $dP (dP > 0)$ соответствуют приращения $d\sigma$, de и dU. Рассмотрим перпендикулярное к оси стержня сечение S, в котором произошла разгрузка. Прямая $y = -\eta$ является границей между областью упругой разгрузки и областью пластического нагружения (см. фиг. 1). Приращение нагрузки dP уравновешивается приращением напряжений $d\sigma$

Фиг. 1.

$$dP = \iint_S d\sigma dS \tag{1.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= E de \text{ при } -a \leqslant y \leqslant -\eta \\ d\sigma &= E' de \text{ при } -\eta \leqslant y \leqslant a \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Здесь E и E' — модуль упругости и касательный модуль соответственно.

На основе гипотезы плоских сечений имеем

$$de = d\varepsilon + y d\varkappa \tag{1.3}$$

где $d\varepsilon$ — приращение деформации оси стержня, $d\varkappa$ — приращение кривизны оси стержня, которое будем считать положительным.

На границе раздела между областями нагружения и разгрузки приращение деформации de равно нулю, поэтому

$$d\varepsilon = \eta d\varkappa \tag{1.4}$$

Подставляя выражения (1.2) в уравнение (1.1) и используя формулы (1.3) и (1.4), получим уравнение относительно η

$$\eta^2 - 2\eta a \frac{E + E'}{E - E'} + a^2 + \left[a (E - E') \frac{d\varkappa}{dP} \right]^{-1} = 0 \tag{1.5}$$

Величина η должна удовлетворять неравенству $\eta \leqslant a$. Один корень уравнения (1.5) больше $a (E > E')$, поэтому рассмотрим другой корень

$$\eta = a \frac{E + E'}{E - E'} - \left\{ \frac{4EE'a^2}{(E - E')^2} - \left[a (E - E') \frac{d\varkappa}{dP} \right]^{-1} \right\}^{1/2} \tag{1.6}$$

Условие, при котором $\eta \leqslant a$ есть

$$\frac{d\varkappa}{dP} > \frac{1}{4a^2 E'} \tag{1.7}$$

Составим уравнения моментов. Момент внешней нагрузки относительно оси сечения $y = 0$ уравновешивается моментом напряжений, действующих в сечении

$$PU + \iint\limits_S \sigma y dS = 0$$

$$(P + dP)(U + dU) + \iint\limits_S (\sigma + d\sigma)\, y dS = 0$$

Вычитая из второго уравнения первое и пренебрегая бесконечно малым слагаемым второго порядка, получим

$$PdU + dPU + \iint\limits_S d\sigma y dS = 0 \tag{1.8}$$

Здесь $U = U(P, z)$ — прогиб оси стержня ($U > 0$), z — координата оси невыпученного стержня, которая отсчитывается от его середины.

Прогибы стержня будем считать малыми. Тогда кривизну стержня $\varkappa$ заменим на U''_{zz}. Используя формулы (1.2)—(1.4) и (1.6), после интегрирования в уравнении (1.8) получим дифференциальное уравнение для прогибов в упруго-пластической области

$$A_1 \frac{\partial^3 U}{\partial z^2 \partial P} + \left(B \frac{\partial^3 U}{\partial z^2 \partial P} + D\right) \sqrt{1 - C\left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^2 \partial P}\right)^{-1}} +$$

$$+ F + P\frac{dU}{dP} + U = 0$$

где

$$A_1 = \frac{16}{3} a^4 \frac{EE'(E + E')}{(E - E')^2}, \qquad B = -\frac{32}{3} a^4 \frac{EE'\sqrt{EE'}}{(E - E')^2}$$

$$C = \frac{E - E'}{4EE'a^3}$$

$$D = \frac{2a\sqrt{EE'}}{3(E - E')}$$

$$F = -\frac{a(E + E')}{E - E'}$$

На участках стержня, где разгрузка не произошла, уравнение для прогибов оси стержня будет

$$A_2 \frac{\partial^3 U}{\partial z^2 \partial P} + P\frac{\partial U}{\partial P} + U = 0$$

где

$$A_2 = \frac{4a^3E}{3}$$

В полученных уравнениях малым прогибом U можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми, входящими в уравнения. Введем новые функции $W(P, z) = \frac{\partial U}{\partial P}$ в упруго-пластической области и $V(P, z) = \frac{\partial U}{\partial P}$ в пластической области. Тогда уравнения, описывающие процесс деформирования стержня, запишутся так:

в упруго-пластической области

$$A_1 \dot{W}_{zz} + (B\dot{W}_{zz} + D)\sqrt{1 - C(\dot{W}_{zz})^{-1}} + F + PW = 0 \tag{1.9}$$

в пластической области

$$A_2 \dot{V}_{zz} + PV = 0 \tag{1.10}$$

Условие (1.7), при котором рассматривается уравнение (1.9), принимает вид

$$\dot{W}_{zz} > \frac{1}{4a^3E} \tag{1.11}$$

В дальнейшем рассматривается симметричное выпучивание стержня, при котором сечения полностью пластические расположены по краям стержня на интервалах $(-l, -b)$ и (b, l), а сечения, в которых произошла разгрузка, расположены на интервале $(-b, b)$. При этом $z = \pm b$ есть граница между пластическими и упруго-пластическими сечениями. С учетом сделанных предположений уравнение (1.9) следует рассматривать на интервале $(0, b)$, а уравнение (1.10) — на интервале (b, l).

К уравнениям (1.9) и (1.10) добавляем краевые условия

$$\dot{W}_z(P, 0) = 0 \tag{1.12}$$

$$V(P, l) = 0 \tag{1.13}$$

Далее, требование гладкости прогиба дает два условия

$$W(P, b) = V(P, b) \tag{1.14}$$

$$\dot{W}_z(P, b) = \dot{V}_z(P, b) \tag{1.15}$$

И, наконец, в сечении стержня $z = b$ величина η, определяемая формулой (1.6), равна a, откуда следует, что

$$\dot{W}_{zz}(P, b) = \frac{1}{4a^3E} \tag{1.16}$$

Таким образом, процесс деформирования стержня определяется уравнениями (1.9), (1.10) и краевыми условиями (1.12) — (1.16) с дополнительным условием (1.11). Поставленная задача имеет тривиальное решение: $b = 0$, $V = 0$. Это решение соответствует основному процессу, то есть нагружению без выпучивания. Далее, равноактивная бифуркация означает существование отличного от нуля решения при $b = 0$. Это возможно при нагрузке

$$P = \frac{a^4\pi^2 E'}{3l^2} = P^* \tag{1.17}$$

которая является касательно-модульной критической нагрузкой.

Ниже будет показано, что при нагрузке $P < P^*$ поставленная задача (1.9) — (1.16) не имеет отличного от нуля решения, а при нагрузке $P > P^*$ существует нетривиальное решение (неравноактивная бифуркация).

§ 2. *Преобразование уравнений и доказательство существования решения при* $b > 0$

Уравнения (1.9) и (1.10) после умножения их соответственно на $4a^3E'(A_1)^{-1}$ и $4a^3E'(A_2)^{-1}$ приобретают следующий безразмерный вид:

$$\begin{gathered} w''_{xx} + (hw''_{xx} + d)\sqrt{1 - c\,(w''_{xx})^{-1}} + p_1^2 w + f = 0 \\ w = w(p_1, x), \quad p_1 > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant q \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$v''_{xx} + p_2^2 v = 0, \quad v = v(p_2, x), \quad p_2 > 0, \quad q \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.2}$$

Здесь новые функции и новые переменные связаны со старыми соотношениями

$$w = \frac{4a^3E'}{l^3}\,\overline{W}, \quad v = \frac{4a^3E'}{l^3}\,V, \quad x = \frac{z}{l}, \quad q = \frac{b}{l}$$

Краевые условия (1.12)—(1.16) для новых функций принимают вид

$$\begin{gathered} w'_x(p_1, 0) = 0, \quad w''_{xx}(p_1, q) = 1, \quad v(p_2, 1) = 0 \\ v(p_2, q) = w(p_1, q), \quad v'_x(p_2, q) = w'_x(p_1, q) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Условие существования области разгрузки (1.11) запишется так:

$$w''_{xx}(p_1, x) \geqslant 1 \tag{2.4}$$

Безразмерные коэффициенты, входящие в уравнения (2.1) и (2.2), равны

$$h = \frac{B}{A_1} = -\frac{2\sqrt{\nu}}{1+\nu}, \quad \nu = \frac{E'}{E}$$

$$d = \frac{D4a^3E'}{A_1} = \frac{\sqrt{\nu}\,(1-\nu)}{2(1+\nu)}, \quad c = C4a^3E' = 1-\nu$$

$$f = \frac{F}{A_1} 4a^3 E' = -\frac{3}{4}(1-\nu) \tag{2.5}$$

$$p_1^2 = P \frac{3l^2 (1-\nu)^2}{16a^4 (1+\nu) E'}$$

$$p_2^2 = P \frac{3l^2}{4a^4 E'}$$

Преобразуем красвые условия (2.3). После подстановки условия $w''_{xx}(p_1, q) = 1$ в уравнение (2.1) получим

$$w(p_1, q) = -\frac{(1-\nu)^2}{4(1+\nu)p_1^2} = k \tag{2.6}$$

Учитывая это, краевые условия (2.3) можно переписать так:

для уравнения (2.1)

$$w'_x(p_1, 0) = 0, \quad w(p_1, q) = k \tag{2.7}$$

для уравнения (2.2)

$$v(p_2, 1) = 0, \quad v(p_2, q) = k \tag{2.8}$$

совместное краевое условие

$$w'_x(p_1, q) = v'_x(p_2, q) \tag{2.9}$$

Равенство $v''_{xx}(p_1, q) = w''_{xx}(p_1, q) = 1$ является следствием условий (2.7), (2.8) и уравнений (2.1), (2.2).

Решение уравнения (2.2) с краевыми условиями (2.8) имеет вид

$$v(p_2, x) = k \frac{\sin p_2(1-x)}{\sin p_2(1-q)} \tag{2.10}$$

Перейдем к доказательству существования решения уравнения (2.1) с краевыми условиями (2.7) и с условием (2.4). Задача (2.1), (2.7) равносильна операторному уравнению

$$w = Tw \tag{2.11}$$

с оператором, который определяется формулой

$$Tw(p_1, x) = k \frac{\cos p_1 x}{\cos p_1 q} + \int_0^q G(x, \xi, p_1)\, \Psi[w''_{\xi\xi}(p_1, \xi)]\, d\xi$$

где

$$\Psi(w'') = -(hw'' + d)\sqrt{1 - c(w'')^{-1}} - f \tag{2.12}$$

$G(x, \xi, p_1)$ — функция Грина задачи

$$w'' + p_1 w = 0, \quad w'(0) = w(q) = 0$$

Эта функция Грина выражается формулой

$$G(x, \xi, p_1) = \begin{cases} -\dfrac{\cos p_1\xi \sin p_1(q - x)}{p_1 \cos p_1 q}, & \xi \leqslant x \\ -\dfrac{\cos p_1 x \sin p_1(q - \xi)}{p_1 \cos p_1 q}, & \xi \geqslant x \end{cases}$$

Для доказательства существования решения уравнения (2.11) используем принцип сжатых отображений [5]. Рассмотрим банахово пространство R функций $w(p_1, x)$, заданных на множестве $\Omega = \{(p_1, x): 0 < p_1 \leqslant r, 0 \leqslant x \leqslant q\}$ (r — любое фиксированное положительное число) и имеющих на множестве Ω непрерывные производные w'_x и w''_{xx}. Норму в пространстве R определим выражением

$$\|w\| = \sup_{p_1, x \in \Omega} |w''_{xx}(p_1, x)| + \sup_{p_1, x \in \Omega} |w'_x(p_1, x)| + \sup_{p_1, x \in \Omega} |w(p_1, x)|$$

В пространстве R выделим замкнутое множество $M = \{w : w \in R, w''_{xx} > 1\}$. Отметим, что условие (2.4) вытекает из принадлежности функции w множеству M.

Функция Ψ, определяемая соотношением (2.12), обладает следующими свойствами, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\Psi(1) = \Psi'(1) = \frac{3 + 6\nu - \nu^2}{4(1 + \nu)} = L \tag{2.13}$$

$$0 < \Psi'(t) \leqslant L, \quad \text{при} \quad t \geqslant 1 \tag{2.14}$$

$$\frac{3}{4} < L < 1 \tag{2.15}$$

Покажем, что при малых q оператор T является сжимающим на множестве M. Для этого оценим норму разности $Tw - Tu$. Используя (2.14), получим для $w, u \in M$

$$\sup|Tw - Tu| = \sup\left|\int_0^q G[\Psi(w'') - \Psi(u'')]\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|w - u\| L \sup \int_0^q |G|\,d\xi \tag{2.16}$$

В дальнейшем будем считать, что $rq < \dfrac{\pi}{2}$. Тогда, интегрируя функцию Грина, продолжим оценку (2.16)

$$\sup|Tw - Tu| \leqslant \|w - u\| L \frac{q^2}{2 \cos rq} \tag{2.17}$$

Аналогично находим, что

$$\sup |(Tw - Tu)''_x| \leq \|w - u\| L \frac{q}{\cos rq} \tag{2.18}$$

И, наконец,

$$\sup |(Tw - Tu)''_{xx}| \leq \|w - u\| \frac{L}{\cos rq} \tag{2.19}$$

Складывая оценки (2.17)—(2.19), получим

$$\|Tw - Tu\| \leq \|w - u\| \frac{L}{\cos rq} \left(1 + q + \frac{q^2}{2}\right)$$

Из последнего неравенства и неравенства (2.15) следует, что при достаточно малых q оператор T будет сжимающим на множестве M.

Проверим, что оператор T преобразует множество M в себя. Пусть $w \in M$. Тогда, используя (2.13)—(2.15), получим

$$(Tw)''_{xx} = -kp_1^2 \frac{\cos p_1 x}{\cos p_1 q} + \int_0^q G''_{xx} \Psi(w''_{\xi\xi})\, d\xi + \Psi(w''_{xx}) \geq$$

$$\geq -kp_1^2 \frac{\cos p_1 x}{\cos p_1 q} + L \int_0^q G''_{xx} d\xi + L = \frac{\cos p_1 x}{\cos p_1 q} \geq 1$$

Из принципа сжатых отображений следует, что при достаточно малых q на множестве M существует единственное решение уравнения (2.11).

Покажем, что при значениях q, удовлетворяющих неравенству $p_2 q < \frac{\pi}{2}$, решение уравнения (2.11) лежит в более узком множестве

$$N = \left\{ w : w \in R,\ 1 \leq w''_{xx} \leq \frac{\cos p_2 x}{\cos p_2 q} \right\}$$

Для этого достаточно проверить, что оператор T преобразует множество N в себя. Используем еще раз свойства (2.13) и (2.14). Для $w \in N$ имеем

$$(Tw)''_{xx} \leq -kp_1^2 \frac{\cos p_1 x}{\cos p_1 q} + L \int_0^q G''_{xx} w''_{\xi\xi} d\xi + Lw''_{xx} \leq$$

$$\leq -kp_1^2 \frac{\cos p_1 x}{\cos p_1 q} + L \int_0^q G''_{xx} \frac{\cos p_2 \xi}{\cos p_2 q} d\xi + L \frac{\cos p_2 x}{\cos p_2 q} = \frac{\cos p_2 x}{\cos p_2 q}$$

Таким образом, при достаточно малых значениях q краевая задача (2.1), (2.7) с условием (2.4) имеет в пространстве R единственное решение $w(p_1, x)$. Это решение определено, по крайней мере, для тех p_1, которые удовлетворяют неравенству $p_1 q \leq rq < \frac{\pi}{2}$. При выполнении условия $p_2 q < \frac{\pi}{2}$ имеет место оценка

$$1 \leq w^{\cdot}_{xx} \leq \frac{\cos p_2 x}{\cos p_2 q} \tag{2.20}$$

§ 3. *Определение критической нагрузки*

Покажем, что неиспользованное еще условие (2.9) не выполняется при

$$p_2 < \frac{\pi}{2} \tag{3.1}$$

Из формул (2.10), (2.6) и (2.5) следует, что

$$w^{\cdot}_x (p_2, q) = \frac{\operatorname{ctg} p_2 (1 - q)}{p_2} \tag{3.2}$$

Представляя производную $w^{\cdot}_x$ в виде интеграла от $w^{\cdot}_{xx}$ и используя (2.7), получим

$$w^{\cdot}_x (p_1, q) = \int\limits_0^q w^{\cdot}_{tt}(p_1, t)\, dt \tag{3.3}$$

На основании формул (3.2) и (3.3) условие (2.9) можно записать теперь так

$$\int\limits_0^q w^{\cdot}_{xx} (p_1, x)\, dx - \frac{\operatorname{ctg} p_2 (1 - q)}{p_2} = 0 \tag{3.4}$$

Пусть $0 < p_2 < \frac{\pi}{2}$, тогда $\frac{\operatorname{ctg} p_2 (1 - q)}{p_2} > \frac{\operatorname{tg} p_2 q}{p_2}$ и из уравнения (3.4) получаем, что

$$\int\limits_0^q w^{\cdot}_{xx}\, dx > \frac{\operatorname{tg} p_2 q}{p_2}$$

Последнее неравенство противоречит условию (2.20), откуда следует, что условие (2.9) не выполняется при $p_2 < \frac{\pi}{2}$.

Докажем, что уравнение (3.4) разрешимо относительно p_2 при достаточно малых q. Для этого рассмотрим вспомогательные уравнения

$$\Phi_1 (p_2, q) \equiv q - \frac{\operatorname{ctg} p_2 (1 - q)}{p_2} = 0 \tag{3.5}$$

$$\Phi_2(p_2, q) = \frac{\operatorname{tg} p_2 q}{p_2} - \frac{\operatorname{ctg} p_2(1-q)}{p_2} = 0 \tag{3.6}$$

Применяя к уравнениям (3.5) и (3.6) теорему о неявной функции, находим, что в некоторой окрестности точки $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ существуют решения $p_2^{(1)}(q)$ и $p_2^{(2)}(q)$ уравнений (3.5) и (3.6) такие, что $p_2^{(1)}(0) = p_2^{(2)}(0) = \frac{\pi}{2}$. Выразим величину p_1 через p_2 (по формулам (2.5)). Тогда левая часть уравнения (3.4) будет функцией p_2 и q, которую мы обозначим через $\Phi(p_2, q)$. На основании (2.20) эта функция удовлетворяет неравенствам

$$\Phi_1(p_2, q) < \Phi(p_2, q) < \Phi_2(p_2, q)$$

Функция Φ непрерывна по переменной p_2. По теореме об обращении в нуль непрерывной на отрезке функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков, следует, что уравнение (3.4) имеет решение $p_2(q)$, заключенное между $p_2^{(1)}(q)$ и $p_2^{(2)}(q)$ и определенное в той же окрестности, в которой определены решения уравнений (3.5) и (3.6). Это решение удовлетворяет условию $p_2(0) = \frac{\pi}{2}$.

Принимая во внимание формулы (3.1), (2.5) и выражение (1.17) для нагрузки P^*, можно утверждать, что при $P < P^*$ возможен только основной процесс деформирования стержня (с сохранением прямолинейной формы), а неравноактивная бифуркация процесса (с возникновением зоны разгрузки) возможна лишь при $P > P^*$. Таким образом, доказано, что равноактивная бифуркация, которая возможна при $P = P^*$, есть наиболее ранняя бифуркация в истории внешнего нагружения стержня.

Автор приносит благодарность профессору В. Д. Клюшникову за постановку данной задачи и за большое внимание, проявленное к подготовке этой статьи.

Московский институт
стали и сплавов

Поступила 20 VII 1976

Ս. Ա. ԳՈՒԿՈՎՍԿԻ

ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՁՈՂԻ ՍԵՂՄՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԻ ԲԻՖՈՒՐԿԱՑԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դեֆորմացիայի ընթացքի բիֆուրկացիայի ընդհանուր հայտանիշի շրջանակներում ուսումնասիրվում է ուղղաձիգ ձողի սեղմման ընթացքի կայունությունը։ Ցույց է տրված, որ բիֆուրկացիայի հավասար ակտիվության դեմքը ամենավաղ երևույթն է արտաքին բեռնավորման ընթացքում և ն

համապատասխանում է շոշափող մոդուլային բեռին։ Ոչ հավասար ակտիվ բիֆուրկացիան հնարավոր է շոշափող մոդուլայինից մեծ բեռնվածության ժամանակ։

BIFURCATION OF THE COMPRESSION PROCESS OF AN ELASTIC-PLASTIC ROD

S. A. GUKOVSKY

Summary

Stability of the compression process of a straight-line rod is studied within the frame of common criterion of bifurcation of the deformation process. It is shown that the equiactive bifurcation moment is the earliest one in the process of external loading. This moment corresponds to the tangent-module loading. Unequiactive bifurcation can occur under the loading higher than the tangent-module one.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клюшников В. Д.* Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.
2. *Клюшников В. Д.* Развитие теории устойчивости конструкций за пределом упругости и критерий бифуркации процесса деформирования. Прикл. механика, 1975, т. XI, в. 6.
3. *Клюшников В. Д.* Неустойчивость пластических конструкций (Обзор). В сб. Новое в зарубежной науке, серия «Механика». Проблемы теории пластичности», М., Изд. «Мир», 1976
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., Изд. «Наука», 1967.
5. *Красносельский М. А.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., Изд «Наука», 1966.
6. *Chwalla E.* Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sit. Akad. der Wissenschaften in Wien Kl., Abt. IIa, 137.Bd., 8.H., 1928.
7. *Jezek K.* Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. Wien, 1937.

К. А. ЛУРЬЕ, А. В. ФЕДОРОВ

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

по поводу статьи К. А. Лурье, А. В. Федорова «Условие Вейерштрасса в оптимальных задачах сверхзвуковой газовой динамики слабо неоднородных потоков», опубликованной в «Известиях АН Армянской ССР. Механика». 1976, т. 29, № 6

В предлагаемом в нашей статье [1] построении условия Вейерштрасса имеются неточности, которые не влияют на окончательный результат (2.11). При выводе (2.11) главная часть приращения δI выделяется по параметру ε, а параметр k_0 считается фиксированным. При этом приращения газодинамических функций на ударной волне d_1b_1 (фиг. 2) имеют порядок $\sqrt{\varepsilon}$ на расстоянии $O(1)$ от точки d_1 (2.9). Этот результат получен на основании теории Уитхема, которая представляет собой метод первого порядка точности по величинам возмущений. Если считать основные возмущения (v или $u-w_1$) имеющими порядок k_0, то при $\varepsilon\to 0$, $k_0 = \mathrm{const}$ приращения газодинамических функций могут быть вычислены с помощью теории Уитхема лишь в малой части полосы $d_1b_1b_2d_2$ (фиг. 2), примыкающей к точке d_1; в оставшейся части области $d_1b_1b_2$ упомянутые приращения следует считать равными нулю. Приведенные соображения не учтены в статье. Процесс вывода (2.11) может быть изменен, например, следующим образом. Предположим, что стационарный контур описывается уравнением $y = \delta_0 Y(x)$, где δ_0 — малый параметр задачи; кроме того, предположим что $|y'(x)| \leqslant O(\delta_0)$. Параметры ε и k_0 будем считать пропорциональными определенным степеням δ_0, и главную часть δI будем выделять по δ_0. Связь между k_0 и δ_0 выберем так, чтобы на участке d_1d_2 величины $y'(x) = O(\delta_0^{l_1})$ и $\delta y'(x) \sim \dfrac{k_0}{2y_1}$ имели один порядок по δ_0, то есть положим $k_0 = \delta_0^{l_1-1}$. Предположим далее, что функция $F_0(r)$ в области $d_1b_1b_2$ удовлетворяет неравенству $F_0' > O(\delta_0^{l_2})$, $l_2 > 0$. Функция $F_1(r)$ характеризуется параметром $k_1 = k_0\sqrt{y_1}$ при $r < r < r_0$ ((2.4) и фиг. 5); $F_1 = O(k_1\varepsilon)$ при $r > r_0$. Сила S_0 ударной волны на участке d_2b_1 на основании (2.9) имеет порядок $S_0 \sim \sqrt{\varepsilon k_1}\sqrt{y}\sqrt{y^{l_0}-y_1}$. Будем считать, что параметр $\varepsilon(\delta_0)$ удовлетворяет соотношению $\sqrt{\varepsilon k_1} = o(\delta_0^{2l_1})$. Поскольку порядок основных возмущений есть $F_0'\sqrt{y}$ [2], приращения газодинамических величин равны нулю в области $d_2b_2b_3$ (так как члены порядка $F_1 = O(k_1\varepsilon) = o(F_0')$ отброшены в теории Уитхема). В полосе $d_1b_1b_2d_2$ упомянутые приращения равны нулю для значений $y > y_{кр}$, при которых $S_0(y) \leqslant O(\delta_0^{2l_1})$. Последнее неравенство приводит к оценке $(y_{кр} - y_1) \sim k_2\varepsilon\delta_0^{4l_1-l_2}$. Ширина полосы $d_1b_1b_2d_2$ (расстояние по x при

$y = \text{const}$) при $y \leqslant y_{кр}$ на основании (2.7) не превосходит величины порядка $\varepsilon k_1 \delta_0^{3l_1+1}$. Таким образом, двойной интеграл по S в (2.2) сводится к интегралу по области площадью порядка $\varepsilon^2 k_1^2 \delta_0^{6l_1+1}$. Величины DZ_1 и DZ_2 из (2.2) могут быть представлены в виде (вариация $\delta\varphi$ равна нулю, так как $\delta\varphi = O(S_0^3)$)

$$DZ_1 \sim \frac{v\delta v\,(v\delta u - u\delta v)}{w^2\,(v+\delta v)}; \quad vDZ_2 \sim \frac{\delta\varphi}{\rho^2\,(v+\delta v)}\left[\frac{v\delta\rho}{\rho} + \delta v\left(1 - \frac{\varkappa p}{\rho w^2}\right)\right]$$

Поскольку входящие в эти формулы приращения не превосходят величины порядка $\delta_0^{l_1}$ и $|v| \leqslant O(\delta_0)$, интеграл по S в (2.2) оценивается величиной

$$\iint\limits_S \left| h_{1y} DZ_1 - \frac{h_{2y}}{y'} DZ_2 \right| |y' \rho v|\, dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ak_1^2 \varepsilon^2}{\delta_0^{6l_1+1-l_1}} \left[|h_{1y}|_{max}\, \delta_0^2 + |h_{2y}|_{max}\right] = \varepsilon^2 f_1(\delta_0),$$

где $f_1(\delta_0)$ учитывает, в частности, и зависимость $|h_{1y}|_{max}$ и $|h_{2y}|_{max}$ от δ_0. Интеграл по контуру ab имеет порядок $\varepsilon\gamma(\delta_0)\,Df\,\delta_0^{l_1} \equiv f_2(\delta_0)\varepsilon$. Для получения условия (2.11) достаточно выбрать $\varepsilon = \varepsilon(\delta_0)$ так, чтобы выполнялось соотношение $f_1(\delta_0)\,\varepsilon(\delta_0) = o(f_2(\delta_0))$.

В заключение рассмотрим вопрос о предельном переходе от нелинейной модели возмущенного течения к линейной схеме звукового возмущения. В предложенном выше способе вывода условия Вейерштрасса параметры ε и k_0 считаются связанными с параметром δ_0, и главная часть δJ выделяется по δ_0. Что касается условия Лежандра, то там главная часть δJ выделяется по параметрам ε и $\delta y' \sim \frac{k_0}{2g_1}$. Поэтому указанный выше предельный переход должен быть произведен при $\varepsilon \to 0$, $k_0 \to 0$ и фиксированном значении δ_0. Этот переход, однако, неосуществим в рамках теории Уитхема, поскольку последняя представляет собой метод первого порядка точности по величинам возмущений. Для того, чтобы провести указанный предельный переход, необходима более точная теория тонких тел, чем теория Уитхема.

Ленинградский физико-технический
институт им. А. Ф. Иоффе

Поступила 10 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье К. А., Федоров А. В.* Условие Вейерштрасса в оптимальных задачах сверхзвуковой газовой динамики слабо неоднородных потоков. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 6.
2. *Witham G. B.* The flow pattern of a supersonic projectile. Comm. Pure Appl. Math., 5 (1952), 301–348.