

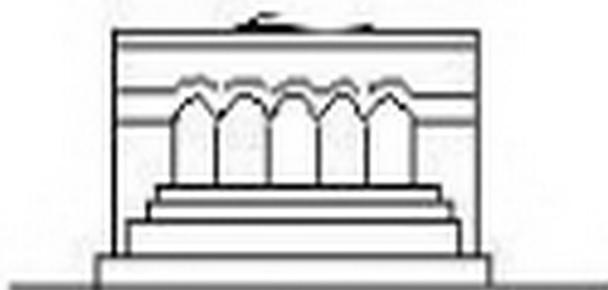
ՄԵՆԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1977

## РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ В АРМЕНИИ ЗА ПЕРИОД СОВЕТСКОЙ ВЛАСТИ

Великая Октябрьская социалистическая революция, славное шестидесятилетие которой в этом году торжественно отмечает советский народ вместе со всем прогрессивным человечеством, ознаменовала собой глубочайший переворот в экономике, в классовой структуре общества, национальных отношениях и духовной жизни нашей страны.

Великая Октябрьская социалистическая революция спасла армянский народ от физического истребления, она дала ему социалистическую государственность, благодаря которой сегодня Армения является равноправным членом Великого Союза Советских Социалистических Республик.

Великий Октябрь обеспечил быстрое и всестороннее развитие страны, небывалый подъем благосостояния нашего народа, раскрыл и развили его материальные и духовные силы и открыл светлый путь для развития науки и культуры Армении.

В дореволюционной Восточной Армении, входящей в состав царской России, не было каких-либо центров научных исследований в области физико-математических наук. В начальный период после установления в Армении Советской власти в области механики еще не велась глубокая научно-исследовательская работа. В то время передовые известные физики и механики (А. А. Акопян, А. Г. Анжур, А. М. Тер-Мхртчян и другие), главным образом, занимались педагогической работой. Они преподавали во вновь организованном Ереванском государственном университете. Ими переведено на армянский язык большое количество учебников для высшей и средней школы, они являются учителями тех ученых-механиков, которые в настоящее время плодотворно занимаются научно-исследовательской работой.

Для создания научных и педагогических кадров по различным отраслям механики в 30-х годах лучшие выпускники Ереванского государственного университета и политехнического института направлялись в крупные научные центры Москвы, Ленинграда, Киева и других городов Советского Союза, где они приобретали квалификацию и новую специализацию. Создание этих кадров обогатило Ереванский университет, Политехнический институт квалифицированными преподавателями и учеными-исследователями.

В середине тридцатых годов был основан Армянский филиал Академии наук СССР, а 29 ноября 1943 года на базе Армянского филиала АН СССР в Армении была организована Академия наук Армянской ССР.

В 1944 году в составе физического института АН Армянской ССР начал функционировать математический сектор, где велись исследования также и по некоторым отраслям механики. С июня 1946 года математический сектор стал самостоятельным сектором математики и механики. В ноябре

1955 года на базе сектора математики и механики и некоторых отделов института строительных материалов и сооружений АН Армянской ССР был организован Институт математики и механики. А с 1971 года этот институт разделился на два отдельных института: Институт математики и Институт механики.

В состав АН Армянской ССР сегодня входят Институты механики, геофизики и инженерной сейсмологии и Вычислительный центр АН Армянской ССР и ЕрГУ, где и академических условиях в настоящее время развиваются некоторые отрасли механики. Кроме указанных научно-исследовательских институтов сегодня наука о механике развивается также в многочисленных ВУЗах и в ряде отраслевых научно-исследовательских учреждениях республики.

Перейдем к краткому изложению основных достижений в различных отраслях механики.

### *Теория упругости*

С 1941 года в армянском филиале АН СССР и в Ереванском политехническом институте велись исследования по некоторым вопросам теории изгиба тонких упругих плит. Были предложены методы для расчета полигональных, эллиптических, полуэллиптических и полукруглых плит. Рассматривались случаи, когда изгибающие нагрузки приложены на некоторых частях поверхностей плит.

Изучались также некоторые вопросы применения теории функций комплексного переменного к разнообразным задачам теории упругости.

В 1947—1948 гг. в секторе математики и механики АН Армянской ССР для решения задач о кручении и изгибе призматических стержней полигонального сечения был предложен метод введения вспомогательных функций со сведением решений задач к бесконечным системам линейных уравнений, которые оказывались вполне регулярными.

Были рассмотрены многочисленные конкретные задачи по определению жесткости призматических стержней с полигональными поперечными сечениями и координат центров изгиба некоторых прокатных профилей.

В дальнейшем указанный метод был развит и применялся для решения ряда других задач плоской и пространственной теории упругости.

С 1955 года в Институте математики и механики, в Ереванском государственном университете и Политехническом институте, а с 1973 года и в Вычислительном центре АН Армянской ССР и ЕрГУ ведутся исследования по определению напряженного состояния составных тел. В ряде работ исследовались особенности напряжений около угловых точек раздела материалов и на концах разрезом. Исследования приводят к отысканию корней с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения, содержащего геометрические и физические параметры составного тела.

С 1963 года в Институте математики и механики и в Ереванском политехническом институте использованном метода парных и тройных уравне-

ний рассматривались многие смешанные и контактные задачи плоской и пространственной теории упругости. Рассматривались плоские задачи для плоскоэги, полуплоскости и полосы, а также для прямоугольных областей, имеющих внутренние ослабления в виде различным образом расположенных трещин. Рассматривались задачи о вдавливании жестких втулок в поверхности цилиндрических труб и другие задачи.

В этих исследованиях были получены эффективные решения для некоторых, нового типа, парных и тройных уравнений, содержащих специальные функции. В числе этих уравнений — парные интегральные уравнения, содержащие функции Лежандра с комплексным индексом и действительным аргументом; парные интегральные уравнения, содержащие функции Лежандра с комплексным индексом и чисто мнимым аргументом; парные рядовые уравнения, содержащие обобщенные функции из произведений экспоненциальных и тригонометрических функций; тройные рядовые уравнения с тригонометрическими функциями; парные тригонометрические уравнения; парные рядовые уравнения, содержащие полиномы Лежандра с четным или нечетным индексом и другие. Для некоторых из этих уравнений получены замкнутые решения, а решения других сведены к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

В Институте механики АН Армянской ССР и Политехническом институте некоторые смешанные задачи рассматривались с использованием метода функций комплексного переменного и метода конформных отображений.

С 1968 года в Институте математики и механики, а с 1971 года в Ереванском госуниверситете рассматриваются некоторые контактные задачи о передаче нагрузок от креплений или накладок к упругим телам. Рассмотрены различные статические и динамические задачи плоской и пространственной теории упругости, исследованы различные случаи расположения и крепления накладок. При решении задач используется метод сведения исходных интегро-дифференциальных уравнений задач к бесконечным системам линейных уравнений, которые вполне регулярны или же квазивполне регулярны. В рассмотренных задачах решения получены в таком виде, что в них контактные напряжения определяются выражениями, в которых особенности напряжений у окрестности концов накладок содержатся в явном виде.

В этих исследованиях рассмотрены случаи, когда упругое тело имеет ослабления в виде вырезов и разрезов. Исследован вопрос, каким образом при помощи выбора материалов накладок и определения мест наклейки накладок можно ослабить напряженность слабых узлов конструкций.

С 1962 года в Институте математики и механики исследуются несимметричные пространственные задачи. Предложен метод решения некоторых несимметричных задач для тел вращения и рассмотрено несколько задач.

С 1967 года в Институте математики и механики исследовались также некоторые задачи больших упругих деформаций для составных труб, полых сферы и параллелепипеда. С 1973 года в этом направлении исследования ведутся в ВЦ АН Армянской ССР и ЕрГУ.

С 1974 года в Институте механики АН Армянской ССР и Ереванском политехническом институте исследуются контактные задачи, когда контактная область заранее неизвестна и ее следует определить.

В 1973—1975 годах в Институте механики и в Ереванском педагогическом институте исследовались некоторые задачи о распространении упругих волн в упругой электропроводящей среде при наличии внешнего магнитного поля. Рассматривались случаи, когда возмущение возникает при взрыве на поверхности полупространства, а также от действия сосредоточенных, точечных импульсов в неограниченном пространстве. Рассмотрена еще одна плоская динамическая задача для анизотропной среды при наличии прямолинейного разреза полубесконечной длины, а также задача соударения упругих полуполос при наличии смешанных граничных условий на их поверхностях.

В Институте механики и в Ереванском политехническом институте рассматриваются также некоторые динамические задачи о распространении упругих волн в упругих телах.

Некоторые результаты, полученные в области теории упругости, обобщены в нескольких монографиях\*.

### *Теория оболочек и пластин*

Исследования в области теории оболочек и пластин начались выполняться с середины сороковых годов сотрудниками сектора математики и механики, Института строительных материалов и сооружений АН Армянской ССР и Ереванского политехнического института.

Рассматривались пологие цилиндрические оболочки, находящиеся под действием различных нагрузок и при различных краевых условиях. Были получены формулы для вычисления напряжений и деформаций, в которых в качестве основных частей используются результаты, полученные из теории пластин, а влияние кривизны оболочки в этих формулах учитывается при помощи дополнительных выражений в виде быстроходящихся рядов. Рассматривались различные конкретные задачи статической и динамической устойчивости цилиндрических оболочек.

В 1948 году в Институте строительных материалов и сооружений АН Армянской ССР был предложен метод расчета складчатых оболочек, где используются импульсные функции. В дальнейшем этим методом был решен ряд задач.

В Институте строительных материалов и сооружений АН Армянской ССР была предложена новая теория весьма пологих оболочек. В этом же институте с 1947 года разрабатывалась общая теория анизотропных слоистых оболочек. Изучены вопросы безмоментной теории многослойных обо-

---

\* Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. «Физматгиз», М., 1963; Сапанджян О. М. Изгиб тонких упругих плит. Изд-во «Айастан», Ереван, 1975; Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во ЕрГУ, Ереван, 1976.

лочек, когда слои симметрично собраны относительно срединной поверхности оболочки. По безмоментной теории подробно рассматривались слоистые анизотропные оболочки вращения при симметричном нагружении.

В 1956 году в Институте математики и механики АН Армянской ССР были разработаны две уточненные теории анизотропных пластин и оболочек, в которых учитываются влияния сдвигов и нормального напряжения в поперечных сечениях оболочек на напряженно-деформированное состояние оболочки.

В одной из уточненных теорий принимается, что поперечные касательные напряжения не отличаются от соответствующих напряжений, определяемых по классической теории, базирующейся на гипотезе Кирхгофа-Лява. В другой уточненной теории предполагается, что поперечные касательные напряжения по толщине оболочки или пластинки распределены по некоторому, заранее заданному (например, по параболическому) закону.

В 1963—1965 гг. в Ереванском политехническом институте было предложено еще одно уточнение классической теории пластин и оболочек. Здесь использованием осреднения некоторых характерных величин задача определения напряженного и деформированного состояний оболочек и пластин сводится к решению дифференциального уравнения с частными производными 10-го порядка. Получены также уточненные уравнения в теории пластин.

В Институте математики и механики АН Армянской ССР с использованием метода асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений теории оболочек и пластин сравнивались решения, полученные по классической теории оболочек и пластин и по уточненным теориям. Указан итерационный процесс, при помощи которого можно решить задачи теории оболочек и пластин и определить искомые величины с желаемой точностью.

В 1960—1967 гг. в Институте математики и механики исследовались задачи динамической устойчивости и флаттера для пластин и круговых цилиндрических оболочек. Эти исследования проводились как в линейной, так и в нелинейной постановках. Здесь ставились также и некоторые оптимальные задачи использования материала.

В 1956—1966 гг. изучались колебания и динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины.

В дальнейшем в Институте математики и механики АН Армянской ССР и в Ереванском политехническом институте продолжались исследования задач о статической и динамической устойчивости и о колебаниях слоистых цилиндрических оболочек.

В Институте математики и механики исследовались также различные термоупругие задачи для многослойных анизотропных оболочек и пластин. Здесь учитывалось, что упругие свойства материалов зависят от температуры.

В Институте математики и механики с 1966 года ведутся исследования о взаимодействии токопроводящей упругой оболочки и окружающего ее электромагнитного поля.

В дальнейшем методом совместного асимптотического интегрирования трехмерных уравнений электродинамики и теории упругости сформулированы гипотезы магнитоупругости для пластин и оболочек, находящихся во внешнем магнитном поле при отсутствии стороннего электрического поля. На основе гипотез магнитоупругости получены решения некоторых частных задач. Проведены многочисленные исследования по флаттеру пластин и оболочек в магнитном поле. Исследовано поведение токонесущих пластин и оболочек в магнитном поле. Показаны возможности потери устойчивости токонесущих пластин и цилиндрических оболочек в магнитном поле в некоторых случаях.

Исследованы также некоторые вопросы разномодульной теории упругости. В частности, рассматривались изгиб прямоугольной пластинки, изготовленной из разномодульного материала и другие задачи.

Проведены также исследования, посвященные вопросам теории упруго-пластических оболочек и пластин. Рассмотрены задачи упруго-пластического изгиба круглой пластинки, деформирования оболочки эллиптического поперечного сечения.

Некоторые результаты, полученные в теории анизотропных пластин и оболочек, обобщены в нескольких монографиях\*.

### *Теория пластичности*

Первые исследования в области теории пластичности проводились в Институте строительных материалов и сооружений АН Армянской ССР. Эти исследования были посвящены анализу несущей способности статически неопределимых систем.

В Секторе математики и механики АН Армянской ССР в 1953 году исследовалась устойчивость плоской формы изгиба за пределами упругости при произвольном законе упрочнения.

В Институте строительных материалов и сооружений в 1956 году исследовались некоторые вопросы предельного состояния сжатых элементов стальных конструкций. В этом же году в Институте математики и механики исследовалось упруго-пластическое состояние прямоугольного бетонного блока с учетом температуры. Исследовался также упруго-пластический изгиб балки.

В 1959 году получено решение для плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала. В этом же году рассматривалось пластическое кручение конического стержня со степенным упрочнением материала.

---

\* Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. «Физматгиз», М., 1961; Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. «Наука», М., 1967; Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. «Наука», М., 1974; Амбарцумян С. А., Бадмасарян Г. Б., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластинок. «Наука», М., 1977.

В 1960 году в Ереванском политехническом институте рассматривалась задача упруго-пластического кручения анизотропных стержней, имеющих поперечное сечение с двумя осями симметрии.

В 1960—1964 гг. в Институте математики и механики рассматривались некоторые плоские задачи теории пластичности для пластически анизотропных тел.

В 1967—1968 гг. в Ереванском политехническом институте исследовалось действие взрыва в хрупкой твердой среде и другие задачи.

В 1971 году в Институте математики и механики на основе общих теорем теории упруго-пластических сред доказаны некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тела при переменных внешних воздействиях.

В 1973 году обобщены минимальные принципы упруго-пластической краевой задачи для скоростей изменения напряжений и деформаций на случай нестационарных температурных полей.

В 1974 году рассмотрена плоская контактная задача о соударении двух твердых тел при степенном законе связи между напряжениями и деформациями.

В 1972 году в Политехническом институте рассматривались некоторые вопросы теории идеальной пластичности для анизотропных тел, имеющих различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Некоторые задачи о передаче нагрузки от степенно-упрочняющихся накладок к деформируемому основанию в виде полуплоскости, также из степенно-упрочняющегося материала, исследовались в Ереванском госуниверситете в 1975 году.

Некоторые вопросы о распределении температуры в пластинке с эллиптическим отверстием из вязко-упругого материала под действием вибрационной нагрузки исследовались в Ереванском политехническом институте в 1975 году.

А в 1975—1976 гг. в Институте механики АН Армянской ССР исследовались некоторые задачи о пластическом состоянии цилиндрических стержней при совместном изгибе и кручении, а также задачи о пластическом кручении неполного тора и сектора кольца.

### *Теория ползучести*

Первые теоретические исследования в области ползучести материалов велись в Секторе математики и механики АН Армянской ССР.

В 1947 году была разработана теория ползучести для сложного напряженного состояния, учитывающая основные свойства материала, его старение и наследственность. Эта теория в технической литературе получила название теории упруго-ползучего тела, или «наследственной теории старения». Была введена, так называемая, «функция влияния», отражающая влияние свойства ползучести на искомые величины. Эта функция была табулирована, что позволило в дальнейшем эффективно применить общие решения уравнений теории ползучести к различным конкретным задачам.

В Секторе математики и механики, а в дальнейшем в Институте математики и механики, в Ереванском политехническом институте и в Ереванском госуниверситете по теории упруго-ползучего тела был рассмотрен ряд

прикладных задач. В частности, были разработаны методы расчета температурных напряжений в сооружениях, расчета сооружения при осадке его основания с одновременным учетом явлений ползучести и старения материала.

Исследования теории ползучести проводились по следующим направлениям: линейной теории ползучести, нелинейной теории ползучести, контактным задачам теории ползучести, экспериментальным исследованиям.

По линейной теории ползучести в 1949—1952 гг. в Секторе математики и механики и Ереванском политехническом институте исследовались некоторые задачи о расчете неразрывных балок с опорами, смещающимися во времени.

В 1954—1956 гг. рассматривались некоторые плоские задачи о термонапряженном состоянии массивных блоков. Такие задачи в 1956 году исследовались также в Ереванском госуниверситете.

Далее исследовались задачи кручения и изгиба составных призматических стержней, когда модули сдвига и меры ползучести материалов различны.

Исследовалось также кручение стержня со сложным прямоугольным сечением с учетом ползучести.

В 1958 году в Институте математики и механики получены вариационные уравнения для упруго-ползучей среды. Рассмотрена задача о ползучести прямоугольного составного стержня при стесненном кручении и других задачи.

В 1974—1975 гг. в Ереванском политехническом институте исследовались устойчивость пологих гибких оболочек и некоторые другие задачи линейной теории ползучести.

В Институте математики и механики исследовались также некоторые задачи о ползучести стеклопластиков.

По нелинейной теории ползучести в 1952 году в Секторе математики и механики была разработана нелинейная теория наследственности с учетом старения материалов. В дальнейшем в Институте математики и механики для решения нелинейных уравнений ползучести был использован метод малого параметра. При этом решение уравнений представляется в виде степенного ряда и дается доказательство того, что этот ряд абсолютно и равномерно сходится в рассматриваемом интервале. Были рассмотрены и другие нелинейные задачи теории ползучести, как, например, задачи о кручении круглых валов с переменным диаметром, о кручении составных призматических стержней, а также температурные задачи для сферически-симметричных тел, цилиндрических труб и т. д.

Получены также вариационные уравнения для нелинейной теории упруго-ползучего тела.

В условиях нелинейной ползучести в Институте математики и механики рассматривалась задача квазистатического безмоментного равновесия оболочек различных типов. Рассмотрены также по различным теориям ползучести задачи неустановившейся ползучести усеченно-конических и произвольно-цилиндрических оболочек и другие задачи.

В 1976 году в Институте механики АН Армянской ССР разработана теория ползучести для неоднородно наследственно стареющих сред, неоднородность которых обусловлена переменностью возраста материала в зависимости от пространственных координат. Получена полная система исходных уравнений этой теории.

Рассмотрены некоторые конкретные задачи: о релаксации напряжений в неоднородно стареющем стержне при температурном воздействии; о кручении неоднородно-стареющего призматического стержня с круглым или кольцевым поперечным сечением, а также контактная задача для полуплоскости со стрингером из неоднородно наследственно стареющего материала и другие.

По контактным задачам первая задача решена в Институте математики и механики в 1959 году. Была решена плоская контактная задача нелинейной теории ползучести. Решение задачи было сведено к двум связанным между собой интегральным уравнениям, которые решаются последовательно. Первое из них является линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода, а второе — сингулярным интегральным уравнением второго рода.

Рассматривались также плоские контактные задачи нелинейной ползучести с учетом сил трения. Исследовалась еще плоская контактная задача ортотропных линейно-наследственных тел для одной и нескольких областей контакта.

Некоторые результаты, полученные в области теории ползучести, обобщены в монографиях\*.

По экспериментальным исследованиям по теории ползучести следует отметить, что до 1955 года они велись в лаборатории ползучести Института строительных материалов и сооружений АН Армянской ССР.

До 1955 года были установлены некоторые закономерности усадки и ползучести легких бетонов, а также ползучести тяжелого бетона при высоких напряжениях.

После 1955 года в Институте математики и механики установлены закономерности ползучести бетона при сжатии, растяжении и кручении в зависимости от многих факторов. Определено влияние масштабного фактора на ползучесть бетона. Установлены границы применимости линейной теории ползучести при сжатии и кручении в зависимости от возраста бетона в момент загрузки.

Выявлены закономерности влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от нескольких факторов.

Предложена гипотеза для объяснения причины анизотропии бетона.

Исследования ползучести связных глинистых грунтов ведутся с 1954 года. Эти работы велись вначале в Институте строительных материалов и сооружений, а через несколько лет — в Институте математики и механики АН Армянской ССР.

\* Арутюнян И. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952; Манукян М. М. Кручение тел с учетом ползучести. Изд. ЕрГУ, Ереван, 1972.

Исследовались объемная ползучесть скелета водонасыщенных и водоненасыщенных глинистых грунтов естественного и нагруженного сложения при компрессии и простом сдвиге и в условиях сложного напряженного состояния с учетом масштабного и других факторов. Исследовались также длительная прочность глинистых грунтов и другие вопросы.

Произведено исследование свойств глинистых грунтов по различным теориям ползучести и установлено, что деформации в глинистых грунтах наиболее точно отражаются в наследственной теории старения. Исследованы также некоторые другие вопросы, связанные с деформациями глинистых грунтов при изменении объема и формы, с характером изменчивости сопротивления грунтов сдвигу в зависимости от длительности действия касательных напряжений, с процессом уплотнения водонасыщенных грунтов.

Разработана методика определения компрессионной термползучести глинистых грунтов. Исследованы некоторые вопросы вибро-ползучести глинистых грунтов. Получены выражения мер ползучести.

В Институте математики и механики исследовалась также ползучесть металлов, находящихся под действием различных нагрузок и температуры. Проведено исследование закономерностей высокотемпературной ползучести для одной марки стали.

Исследовались ползучесть и некоторые вопросы по определению механических свойств конструкционных высокопрочных ориентированных стеклопластиков и других полимерных композиционных материалов, находящихся под действием различных нагрузок в зависимости от некоторых факторов. Установлено, что процесс ползучести некоторых типов ориентированных стеклопластиков вполне удовлетворительно описывается соотношениями теории упруго-ползучего тела с учетом старения материалов.

Исследована анизотропия усталостной прочности некоторых типов стеклопластиков. Исследованы некоторые вопросы, связанные с разрушением стеклопластиков. Изучалось влияние нарушения структуры некоторых стеклопластиков на их прочностные свойства. Разработан способ изготовления стеклопластиковых бесшовных труб.

В Ереванском политехническом институте проводились исследования по выявлению свойства ползучести древесины и вулканического натурального каучука. Созданы приборы для экспериментального исследования механических свойств материалов типа резины.

Некоторые результаты, полученные в области экспериментальных исследований ползучести глинистых грунтов, обобщены в монографиях\*.

### Устойчивость движения

Исследование некоторых вопросов теории устойчивости движения велось в Ереванском госуниверситете.

\* Месчян С. Р. Ползучесть глинистых грунтов. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1967; Месчян С. Р. Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения. «Недра», Москва, 1974.

В 1964—1965 гг. рассматривалась задача об управляющих телах, стабилизирующих установившееся собственно неустойчивое движение голономной механической системы. Выведены достаточные условия управляемости и стабилизируемости по одной из координат. Рассматривалась также задача об оптимальной стабилизации при неполной обратной связи.

В 1960—1961 гг. исследовались некоторые вопросы устойчивости вращательного движения волчка, содержащего жидкость.

Влияние диссипативных и гироскопических сил на управляемость и наблюдаемость механических систем исследовалось в 1966 году. А в 1970 году исследовалась задача об управлении линейной системой, описываемой одним уравнением высокого порядка.

В 1975—1976 гг. были исследованы вопросы стабилизации движения твердого тела.

В 1975 году был предложен способ построения управляющих моментов, прикладываемых к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной точки. Под действием построенных моментов осуществляется стабилизация жестко связанной с твердым телом оси по отношению к некоторой другой оси, совершающей заданное движение и проходящей через неподвижную точку.

В 1976 году исследованы некоторые вопросы оптимальной стабилизации положений относительно равновесия спутника при помощи маховиков.

В 1976 году методом использования экстремальных конструкций решена задача оптимального уклонения управляемого объекта от выпуклой области.

В 1976 году в Ленинаканском филиале ЕрПИ исследовались некоторые вопросы движения тела, лежащего на шероховатой плоскости, под действием периодических импульсных сил. Определяется средняя скорость и характер установившегося движения. В частности, показывается также, что направление движения системы может быть противоположным действию импульсов.

### *Гидро- и газодинамика*

В 1948 году в Ереванском политехническом институте исследовались вопросы об истечении жидкости через донные отверстия.

С 1959 года в Институте математики и механики АН Армянской ССР и в Ереванском госуниверситете ведутся исследования в области гидродинамики, газовой и газомангнитной динамики.

Исследованы вопросы, связанные с распространением давления в глубь сплошной среды от действия ударной волны, движущейся по поверхности полупространства. Рассмотрены случаи проникания давления в неоднородное упругое полупространство. Проведено исследование прифронтовых областей как для однородной, так и для неоднородной жидкости. Исследованы некоторые нелинейные задачи о проникании твердых тел и давлений в сжимаемую жидкую среду. Исследовалась задача о погружении конусообразного твердого тела в несжимаемую неоднородную жидкость.

В 1956—1966 гг. в Институте органической химии АН Армянской ССР исследовались некоторые гидродинамические вопросы, связанные с установившимся падением твердого шарика в вязкой жидкости, находящейся в вертикальной цилиндрической трубе.

В 1961—1965 гг. в Ереванском госуниверситете исследовалось движение газа в длинном газопроводе при различных режимах работы, а также течение вязкой жидкости в трубах с пористыми стенками. В 1971 году рассмотрена задача неустановившегося движения газа в трубе с проницаемыми стенками. В Институте математики и механики в 1963—1967 гг. рассматривались задачи о движении электропроводящей жидкости в магнитном поле, о пограничном слое в электропроводящей жидкости при наличии магнитного поля и об аэрогидродинамическом следе.

В Ереванском политехническом институте в 1967—1968 гг. рассматривалась задача о действии взрыва в органическом стекле и в хрупкой твердой среде. Там же в 1968—1970 гг. исследовались некоторые нелинейные задачи по определению окрестностей ударной волны в жидкости и особенностей распространения медленной магнитоакустической волны.

В 1960—1970 гг. в армянском филиале Закавказского НИГМИ исследовались некоторые вопросы динамической метеорологии. Эти исследования связаны с процессами испарения и конвективного теплообмена в атмосфере.

В 1973—1974 гг. в Ереванском госуниверситете исследовались неавтономное и нестационарное движения газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы.

В 1972—1974 гг. в Институте механики АН Армянской ССР выведены нелинейные уравнения для трехмерной задачи движения среды вблизи волны. Рассмотрен случай вязкотермомагнитоупругой среды.

В Ереванском госуниверситете в 1972 году трехмерные уравнения коротких волн в магнитной газодинамике выведены другим методом. Здесь же в 1975 году рассмотрена магнитогазодинамическая задача о проникании клина в жидкость, которая рассматривается в линейной и нелинейной постановках.

В Институте механики АН Армянской ССР и в Ереванском госуниверситете в 1971—1974 гг. исследовались нелинейные задачи о некоторых вопросах изучения окрестности каустики для произвольной недиссипативной среды.

В 1973—1975 гг. проводилось исследование ряда задач по распространению волн в химически активной газовой смеси при наличии диссипации.

Исследованы также задачи с сильными ударными волнами в магнитной газодинамике. В этих исследованиях дифракционные области рассчитываются применением к линеаризованным уравнениям магнитной газодинамики метода Смирнова—Соболева. В 1976 году рассмотрена задача о проникании тупого клина в идеальную электропроводящую жидкость при наличии сильной ударной волны и начального магнитного поля.

В Ереванском политехническом институте в 1976 году получены оценки для различных способов линеаризации нелинейных уравнений беззнапорной осесимметричной фильтрации.

Рассмотрены также и другие задачи.

Некоторые результаты, полученные в области гидро- и газодинамики, обобщены в монографиях\*.

Результаты исследований по механике обеспечивают ускорение научно-технического прогресса. Общеизвестно, что достижения космической техники, авиа- и судостроения, гидротехники, станко- и машиностроения, являются следствием развития механики.

Следует отметить, что развитие механики в свою очередь в некоторой степени обязано развитию и усовершенствованию математических методов и вычислительной техники.

Для получения более точных и надежных результатов в области механики, что необходимо для удлинения срока службы конструкций, экономии расходуемых материалов и повышения механических показателей конструкции, приходится учитывать влияния различных многочисленных факторов, действующих на конструкцию. Это обстоятельство усложняет постановку исследуемой задачи и для его решения требует применения новых математических методов и мощных вычислительных средств.

Следует отметить также, что вычислительные быстродействующие машины не могут заменить ученого механика, инженера-конструктора и самостоятельно решать требуемую задачу. Программирование задачи всегда можно усовершенствовать и делать его экономным и этого можно достигнуть при безусловном развитии механики, математики, физики и других смежных научных дисциплин.

Современная техника ставит перед механикой все новые и более сложные задачи, связанные с открытием новых явлений.

Новые задачи для эффективного решения требуют объединения современной экспериментальной техники с вычислительной, экспериментальных исследований с теоретическими, механики и математики, механики и физики и т. д.

Для дальнейших исследований по механике представляется важным ведение теоретических и экспериментальных исследований статических и динамических задач по упругому контакту с учетом факторов неоднородности, анизотропии, поверхностной микроструктуры контактирующих тел и температурного поля. Должны быть определены контактные напряжения, зоны контакта, сдвигения и проскальзывания, на которые обычно разделяется общая зона контакта, коэффициент трения и другие характерные механические величины.

Важными являются также исследования: поведения композитов при длительном воздействии нагрузок с учетом усталости, усадки, ползучести и температуры, планения дефектов (наличие трещин, непрочности соединения, других ослаблений) на прочность композитов и определение вида нагрузки, при котором возможна работа конструкции с данным дефектом; осо-

---

\* Багдоян А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961. Багдоян А. Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1967.

бенностей напряжений в опасных узлах конструкции: температурных напряжений в массивных анизотропных телах; определение упругих и термоупругих характеристик различных материалов для широкого диапазона изменения температуры и напряжений; определение зон пластических деформаций около жестких включений различных форм и в областях больших напряжений; взаимосвязи деформаций, термонапряжений и трещинообразования; особенностей напряжений в окрестностях острых трехмерных надразов и трещин, выходящих на свободную поверхность тела.

Следует выяснить также влияние наличия трещин и участков высоких напряжений и на усталость материала. Должны быть исследованы также взаимодействия различных полей напряжений в неоднородном теле.

Механика сегодня становится теоретической основой всех тех мероприятий и работ, которые направлены на развитие различных отраслей народного хозяйства.

А. Г. БАГДОЕВ

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ  
 В УПРУГУЮ СРЕДУ

Рассматривается задача проникания тонкого тела вращения в изотропную и анизотропную упругую среду, занимающую полупространство. Начало  $O$  цилиндрической системы координат выбирается в точке касания вершины тела в момент  $t=0$  со свободной поверхностью среды, ось  $r$  направлена вдоль указанной поверхности, ось  $x$  — перпендикулярно к ней. Обтекание тонкого тела установившимся потоком газа рассматривалось в [1]. Сверхзвуковое установившееся движение конуса в упругой среде рассмотрено в [8, 9]. Решение ряда задач проникания тонких тел в сжимаемую жидкость дано в [3—5]. Соответствующая задача статики для изотропной среды рассмотрена в [6]. Нестационарные задачи при наличии фронта разрушения исследованы в [7].

1. Для простоты вычислений предполагается, что среда обладает упругими свойствами, одинаковыми относительно каждой из координатных плоскостей [2]. Тогда упругий потенциал определяется тремя постоянными  $a, d, c$  и для закона Гука можно написать

$$\begin{aligned} z_{rr} &= a \frac{\partial u_r}{\partial r} + (c-d) \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{u_r}{r} \right) \\ z_{xx} &= a \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c-d) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad z_{rr} = d \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $u_r, u_x$  — проекции перемещений частиц среды.

Подставляя (1.1) в уравнения движения, можно получить уравнения в перемещениях.

Вначале рассмотрено решение для неограниченной среды без свободной поверхности ( $x=0$ ), в котором  $u_r, u_x$  обозначаются через  $v, u$ . После того как  $v, u$  будут найдены, решение задачи о проникании получится приближением к  $v, u$  отраженных от свободной поверхности волн. Кроме того, как и в соответствующей задаче для жидкости [3—5], тело заменяется источниками, сосредоточенными на его оси в точках  $x=x_1$ , причем решение  $v, u$  выражается через решение  $v^{(0)}, u^{(0)}$  для точечных источников в виде

$$v = \int v^{(0)} dx_1, \quad u = \int u^{(0)} dx_1 \quad (1.2)$$

Далее вводятся преобразования по Лапласу  $\bar{v}, \bar{u}$  по времени  $t$  от  $v, u$  с параметром  $s = -i\omega$  и положено

$$\bar{v}^{(0)}, \bar{u}^{(0)} = \sum_{k=1}^2 \int_0^{\bar{x}} \exp(i\beta_k |x - x_1|) A_k(\bar{x}), B_k(\bar{x}) J_{1,0}(\bar{x}r) d\bar{x} \quad (1.3)$$

где  $J_n(x)$  есть функция Бесселя. Подставляя (1.3) в уравнения в перемещениях, можно получить соотношения

$$B_k = \mp A_k i \bar{x} \beta_k \gamma_k, \quad \bar{\gamma}_k = c_1^2 \omega^2 - a^2 \beta_k^2 - d^2 = \gamma_k \omega^{-2} \\ d a^2 \beta_k^4 - \beta_k^2 [(a+d)\rho - (a^2 + d^2 - c^2)\rho^2] + (\rho - a\rho^2)(\rho - d\rho^2) = 0 \quad (1.4)$$

причем введены переменные  $x = \bar{x}/\omega$ ,  $\beta_{1,2} = \beta_{1,2}/\omega$ ,  $\rho$  — плотность. Верхние знаки выбираются при  $x > x_1$ , нижние — при  $x < x_1$ . Функции  $A_{1,2}(\bar{x})$  определяются из граничных условий на теле при  $r = r_k \{f(t) - x\}$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -f'(t) \frac{\partial r_k}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0 \quad (1.5)$$

причем  $x = f(t)$  дает закон движения вершины тела, а второе соотношение в (1.5) выражает условие отсутствия трения между телом и средой. В дальнейшем для простоты рассматривается движение с постоянной скоростью  $f'(t) = V = \text{const}$ .

2. Вначале рассмотрена задача определения  $v, u$  для изотропной среды, для которой  $a = c_1 + 2\mu = \rho a'^2$ ,  $d = \mu = \rho b^2$ . Тогда по (1.3)

$$\beta_{1,2} = (c_{1,2}^{-2} - a^2)^{1/2}, \quad B_1 = \mp A_1 i \beta_1 / a, \quad B_2 = \pm A_2 i \beta_2 / b$$

где  $c_1 = a'$  есть скорость продольных,  $c_2 = b$  — поперечных волн. Удобно ввести упругие потенциалы скоростей [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  удовлетворяет волновому уравнению для продольных волн, а  $\psi$  — волновому уравнению для поперечных волн с дополнительным слагаемым  $-\frac{\psi}{r^2}$ .

Решение указанных уравнений можно искать методом источников [5] в виде  $R = \sqrt{(x - x_1)^2 + r^2}$ ,

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{R} q(x_1, t - R/c_1) dx_1, \quad \psi = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{1}{R} p(x_1, t - R/c_2) dx_1 \quad (2.2)$$

Можно показать, что для малых  $t$  имеет место [3—5]

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{1}{R} q(x_1, t - R/c_{1,2}) dx_1 \rightarrow \frac{q(x, t)}{2\pi r} \quad (2.3)$$

Тогда из (1.5) и (2.3) получится

$$p(x, t) = -2b^2 V^{-1} S, \quad q(x, t) = \frac{\partial S}{\partial t} \left(1 - 2 \frac{b^2}{V^2}\right) \quad (2.4)$$

где  $S = \pi r^2 = S(Vt - x)$  есть площадь поперечного сечения тела. Обозначая через  $\bar{S}$  преобразование по Лапласу от  $S(Vt)$ , переходя к (2.2) к преобразованным величинам и используя формулу [5]

$$\frac{1}{R} \exp(-sR/c_{1,2}) = - \int_0^{\infty} \exp\{|x - x_1| i \bar{\beta}_{1,2}(\bar{x})\} J_0(\bar{x} r) \frac{\bar{x}}{i \bar{\beta}_{1,2}} d\bar{x}$$

можно из (2.1) и (2.2) получить значения  $\bar{v}^{(0)}, \bar{u}^{(0)}$ , причем сравнение с (1.3), (1.4) дает для изотропной среды

$$A_1 = (2\dot{b}^2 - V^2) \exp\left(-s \frac{x_1}{V}\right) \frac{\bar{S}_2}{4\pi V^2 i \bar{\beta}_1}, \quad A_2 = \pm e^{-s \frac{x_1}{V}} \frac{b^2 \bar{S}_2^2}{2\pi s V} \quad (2.5)$$

Для задачи о проникании конуса с углом полураствора  $\lambda$  имеет место

$$r_k = (Vt - x) \lambda, \quad S(Vt) = \pi \lambda^2 V^2 t^2, \quad \bar{S} = 2\pi \lambda^2 V^2 s^{-3}$$

3. Для анизотропной среды в задаче о движении тела вращения в неограниченном пространстве можно полагать в решении (1.3), (1.4)

$$A_1 = i \bar{S}_2 \bar{\beta}_1(\bar{x}) \bar{u}_1 e^{-s \frac{x_1}{V}}, \quad A_2 = -i \bar{S}_2 \bar{\beta}_2(\bar{x}) i \bar{\beta}_2(\bar{x}) s^{-1} e^{-s \frac{x_1}{V}} \quad (3.1)$$

причем  $\bar{\beta}_{1,2}$  — постоянные величины. Такой выбор  $A_{1,2}$  подсказан решением (2.5) для изотропной среды, а также поведением решения  $v^{(0)}, u^{(0)}$ , получаемого в виде оригинала из (1.3), при  $r \rightarrow 0$ , и имеет место для произвольной идеальной однородной среды, заданной дисперсионным соотношением  $\xi = \bar{\beta}_2(x)$ . Уравнения движения удовлетворяются решением (1.3), (1.4) и остается удовлетворить граничным условиям (1.5).

Подставляя (3.1) в первое уравнение (1.3), используя интегральное представление для  $J_0(x)$ , применяя к множителю при  $\bar{S}$  формулу обратного преобразования Лапласа и Фурье [10] и используя теорему о свертке, можно получить

$$v^{(0)} = \text{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x' \partial r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \int_{t_0}^{t-t_1} \beta'_k(x_k) \bar{p}_k S(Vt - Vt' - x_1) \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial t'^2} dt' \quad (3.2)$$

где  $x'_1 = t$ ,  $x'_2 = x$ ,  $\alpha_k$  находятся из уравнений Смирнова-Соболева

$$f_k(t', x_k) = 0, \quad f_k(t, x) = t - ar \sin \varphi' - \beta_k(x) |x - x_1|, \quad (k = 1, 2) \quad (3.3)$$

$t = t_0^k$  есть уравнения „точечных волн“, получаемых как огибающая (3.3) по  $x$  в виде  $f_k(t_0^k, x_0^k) = 0, \quad \frac{df_k}{dx_0^k} = 0$ .

При переходе на образующую тела вращения следует учесть, что при  $r \rightarrow 0$  отличный от нуля результат дают значения  $x, \approx x$ , тогда в (3.3)  $x_k, \beta_k$  велики, причем согласно (1.4) для  $\alpha_k = \infty$  получится

$$\bar{\gamma}_{1,2}(\bar{\alpha}) = iT_{1,2}\bar{\alpha}; \quad \bar{x}_{1,2}(\bar{\beta}) = \bar{\beta}/iT_{1,2}$$

$$T_{1,2} = \{a^2 + d^2 - c^2 \mp \sqrt{(a^2 + d^2 - c^2)^2 - 4d^2a^2}\}^{\frac{1}{2}} (2da)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

Переходя от  $v^{(m)}$  к  $v$  по формуле (1.2) и используя (2.3), можно из (3.2), (3.4) получить  $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\bar{\nu}_1}{r} VS'(Vt-x) + \frac{2\bar{\nu}_2}{r} S'(Vt-x)$ . Тогда первое граничное условие (1.5) дает

$$1 = -4\bar{\nu}_1 + 4\pi\bar{\nu}_2 V^{-1} \quad (3.5)$$

Для удовлетворения второго условия (1.5) используется следующий факт. В множителе  $\bar{\gamma}_{1,2}\bar{x}_{1,2}$  в формуле (1.3) можно учесть, что умножение  $A_k(\bar{\alpha})$  на  $\pm i\bar{\beta}_k$  и  $-i\omega$  соответствует дифференцированию  $u^{(m)}$  по  $x$  и  $t$ , или в силу того, что на теле  $v, u$  зависят лишь от аргумента  $\left(t - \frac{x}{V}\right)$  — умножению на  $-\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t}$  и  $\frac{\partial}{\partial t}$ . При этом  $\bar{x}_{1,2}(\bar{\beta})$  заменяется на  $x_{1,2}\left(\pm \frac{1}{V}\right) i \frac{\partial}{\partial t}$ , где  $x_{1,2}(\beta)$  находится по (1.4), а не по упрощенному уравнению (3.4). Кстати, при использовании (3.4) в указанном множителе в задаче § 2 получится вырождение второго граничного условия (1.5), преобразованного ниже. Взяв множители  $\bar{\gamma}_{1,2}\bar{x}_{1,2}$  за знак интеграла, можно получить для малых  $r$  значение  $\frac{\partial u}{\partial r}$ , после чего второе условие (1.5) примет вид

$$\bar{\nu}_1 - \frac{\bar{\nu}_2}{V} + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^2 \left(\frac{1}{V}\right) \frac{(-1)^{k-1} c}{\rho - aV^{-2} - d\alpha_k^2 \left(\frac{1}{V}\right)} \frac{\bar{\nu}_k}{V^{k-1}} = 0 \quad (3.6)$$

Функции (1.4) — четные, поэтому здесь написано  $\alpha_k^2 \left(\frac{1}{V}\right)$ . В изотропной среде получится  $\bar{\nu}_1 = (2b^2 - V^2)/4\pi V^2, \quad \bar{\nu}_2 = b^2/2\pi V$ , что после подстановки в (3.1) согласуется с решением (2.5).

В задаче о проникании конуса в анизотропную среду получится из (3.1)

$$A_1 = \bar{\alpha} s^{-1} \Pi_1(\alpha) \exp(-x_1 s/V), \quad A_2 = \bar{\alpha} s^{-1} \Pi_2(\alpha) (\pm i \beta_2) \exp(-x_1 s/V), \quad (3.7)$$

$$\Pi_{1,2} =: i \beta_{1,2}(\alpha) \mu_{1,2}, \quad \mu_{1,2} = 2^{-1} V^2 \bar{\mu}_{1,2}$$

Тогда из (1.1)—(1.4), производя обратное преобразование согласно (2.1), можно получить нормальное напряжение  $\sigma_{0rr}$  для «падающих» волн  $\nu$ ,  $u$ . В частности, на конусе после выделения особой части решения  $\sigma_0$  получится значение  $\sigma_{0rr}$  в виде

$$\sigma_{0rr} = \sigma + \sum_{k=1}^2 \mu_k (-1)^{k+1} c \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \left\{ \int_0^{r_{0k}^*} dx_1 \int_{t_0^k}^{t - \frac{x_1}{V}} \left( t - t' - \frac{x_1}{V} \right)^k \frac{1}{k} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\alpha_k^2 (c - d - c^{-1} a^2) \beta_k^2 + c^{-1} a \nu - d a c^{-1} \alpha_k^2}{\beta_k^2 (c - a \beta_k^2 - d \alpha_k^2) |x - x_1|} dt' - (\dots) \right\} \quad (3.8)$$

где

$$r_{0k}^* = t + \beta_k(0) x_1 \beta_k(0) \div V^{-1}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (c - d - a) + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \mu_k c \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \zeta$$

$$\beta_{1,2} = \left( t - \frac{x_1}{V} \right) / |x - x_1|; \quad \beta_1(0) = a^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_2(0) = d^{-\frac{1}{2}}$$

$$\zeta = \int_0^{r_1} \frac{|(c - d - c^{-1} a^2) T_k^2 + d a c^{-1}| \left( t - \frac{x}{V} \right)^{k+1} dx_1}{k(k+1) T_k (a T_k^2 - d) | (x - x_1)^2 T_k^2 + r^2 }$$

причем  $\zeta \sim \ln t$ . Выражение в фигурных скобках не особенно при  $x_1 = x$ , поэтому там положено  $r = 0$ . Кроме того, предположено  $V < c_{1,2}$ , что позволило [5] выбрать пределы интегрирования по  $x_1$  вышеуказанным образом.

Решение при наличии свободной поверхности можно искать таким же образом, как это сделано в § 4 для изотропной среды, причем решение на конусе записывается в виде действительных однократных интегралов. В самом деле, можно полагать  $u_r^{(0)} = u^{(0)} + u_1^{(0)}$ ,  $u_z^{(0)} = v^{(0)} + v_1^{(0)}$ , где  $u^{(0)}$ ,  $v^{(0)}$  даются (1.3), а для определения отраженных от поверхности  $x = 0$  волн  $u_1^{(0)}$ ,  $v_1^{(0)}$  следует учесть граничные условия при  $x = 0$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma_{xz} = 0$ . Взяв для  $v_1^{(0)}$ ,  $u_1^{(0)}$  формулы (1.8), где заменены  $|x - x_1|$ ,  $A_k$ ,  $B_k$  на  $(x \div x_1)$ ,  $A_k^1$ ,  $B_k^1$ , можно получить уравнения

$$\sum_1^2 \frac{(c-d)(\rho-dx^2) + da_{pk}^2}{\rho - a_{pk}^2 - dx^2} (A_{ke}^{i\bar{\beta}_k x_1} + A_{ke}^{i\beta_k x_1}) = 0$$

$$\sum_1^2 \beta_k \frac{\rho - a_{pk}^2 + (c-d)x^2}{\rho - a_{pk}^2 - dx^2} (A_{ke}^{i\beta_k x_1} - A_{ke}^{i\bar{\beta}_k x_1}) = 0$$

откуда найдутся значения  $A_k^1$  и полагая

$$A_k^1 = \bar{x} s^{-3} \sum_{p=1}^2 \Pi_k^{(p)}(x) \exp \left\{ -\frac{x_1}{V} s + i(\bar{\beta}_p - \beta_k) x_1 \right\} \quad (k=1, 2)$$

можно найти  $\Pi_{1,2}^{(p)}(x)$ . Окончательно, применяя формулу обращения преобразований Лапласа и Фурье, можно найти нормальное напряжение в отраженных волнах

$$\sigma_{xy} = - \sum_{k=1}^2 \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} i \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \int_0^{r_{pk}} \beta_{pk}^2 \Pi_k^{(p)}(\beta_{pk}) |a \sin^2 \varphi' +$$

$$+ (c-d) \cos^2 \varphi' + (c-d) \chi_k \beta_k^2 \frac{\partial \beta_{pk}}{\partial t} dx_1 \quad (3.9)$$

где

$$t - \frac{x_1}{V} - \alpha_{pk} r \sin \varphi' - \beta_k (\alpha_{pk}) x - \beta_p (\alpha_{pk}) x_1 = 0, \quad (p, k=1, 2) \quad (3.10)$$

причем  $r_{pk}$  соответствует значениям  $\alpha_{pk} = 0$  в (3.10), и на конусе можно полагать  $r=0$ ,  $r_{pk} = \frac{t - \beta_k(0)x}{V^{-1} + \beta_p(0)}$ . Удобно в (3.9) от  $x_1$  перейти согласно (3.10) к новым переменным интегрирования  $\beta_{pk} = -i\alpha_{pk}$ , тогда (3.9) при  $r=0$  запишется в виде действительных квадратур

$$- \sum_{k=1}^2 \sum_{p=1}^2 \int_0^{\beta_{pk}(0)} \frac{\beta_{pk}^2 \Pi_k^{(p)}(i\beta_{pk})}{\frac{1}{V} + \beta_p(i\beta_{pk})} \left( \frac{c_{pk}^2}{c - a_{pk}^2 + d\beta_{pk}^2} + \frac{1}{2} a + \frac{c-d}{2} \right) d\beta_{pk}$$

где  $\beta_{pk}(0)$  находятся из уравнений  $\beta_k(i\beta_{pk}(0)) = \frac{t}{x}$ .

4. Решение § 2 дает значения  $v$ ,  $u$ ,  $v_0$ ,  $\dot{\phi}_0$  в задаче о движении тела прращения в безграничной упругой изотропной среде, которые соответствуют „падающим“ на свободную границу возмущениям  $v^{(0)}$ ,  $u^{(0)}$ . Для задачи о проникании тела в среду можно полагать  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ ,  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ , где  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$  есть отраженные от поверхности  $x=0$  волны, которые определяются с помощью граничных условий

$$\text{при } x=0 \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \tau_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

Используя форму записи (1.3), (2.5) для падающих волн, можно из (4.1) отраженные волны найти в виде

$$\bar{\varphi}_1^{(0)} = \sum_{k=1}^2 \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{z}}{i\beta_k^2} \bar{q}_k \gamma_k J_0(\bar{z}r) \exp\{i x \beta_{1,2}^2(\bar{x}) + i x_1 \beta_k(\bar{x})\} d\bar{r} \quad (4.2)$$

$$\bar{\varphi}_2^{(0)} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{z}}{i\beta_k^2} \bar{q}_k \gamma_{k-1} J_0(\bar{z}r) \exp\{i x \beta_{1,2}^2(\bar{x}) + i x_1 \beta_k(\bar{x})\} d\bar{r}$$

где  $\bar{q}_{1,2}$  есть преобразования по Лапласу от  $q, p$  по  $t$ , а коэффициенты отражения плоских волн  $\gamma_{0,1,2}$  получаются из соотношений

$$\begin{aligned} \gamma_1 D &= x^2 - 4x^2 \beta_1 \beta_2, & \gamma_0 D &= -4x^2 \beta_2 x \\ \gamma_0 D &= -4\beta_1 x, & x &= b^2 - 2x^2, & D &= 4x(x^2 + 4x^2 \beta_1 \beta_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

В задаче о проникании конуса из (2.4) получится

$$\bar{q}_1 = -2x^2(2b^2 - V^2) s^{-2} e^{-s \frac{x_1}{V}}, \quad \bar{q}_2 = -4Vb^2 \pi i^2 s^{-3} e^{-s \frac{x_1}{V}}$$

Используя интегральные представления для  $J_0(\bar{z}r)$ , заменяя в интегралах (4.2) контур интегрирования по  $\bar{\alpha}$  на контуры, проходящие через точки Смирнова—Соболева, соответственно

$$\begin{aligned} T(x_k) &= t - \frac{x_1}{V} - r x_k \sin \varphi', & T(a_{1,4}) - (x + x_1) \beta_{1,2}(a_{1,4}) &= 0 \\ T(a_{2,3}) - x \beta_{1,2}(a_{2,3}) - x_1 \beta_{2,1}(a_{2,3}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

причем  $a_{1,2}$  соответствует слагаемым в  $\varphi_1$ , а  $a_{3,4}$  — в  $\varphi_2$  и на указанных контурах выражения в экспонентах в (2.7) действительны, можно получить, повторяя вычисления работы [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_1^{(0)}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{c}{\partial t} \frac{q\left(x_1, t - \frac{R}{a'}\right)}{R} - \sum_{k=1}^2 C_k \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\bar{r}} \gamma_k(a_k) \beta_k \beta_{k-1}(a_k) \frac{\partial x_k}{\partial t'} d\bar{r}' \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_2^{(0)}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \frac{p\left(x_1, t - \frac{R}{b}\right)}{R} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 C_k \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\bar{r}} \frac{\sin \varphi' (-1)^{k-1}}{\beta_k(a_{k+2})} \gamma_{k-1}(a_{k+2}) x_{k+2}^2 \frac{\partial x_{k+2}}{\partial t'} d\bar{r}' \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $C_1 = -2\pi i^2 (2b^2 - V^2)$ ,  $C_2 = -4Vb^2\pi i^2$ . Для  $r_k = \text{const}$  ( $Vt - x$ )<sup>0</sup> решение найдется из (4.5) в виде свертки, а для  $n = \frac{1}{2}$  путем дифференцирования по  $Vt$ . Основной характеристикой движения является сила сопротивления упругого полупространства, действующая на конус

$$P = - \int_0^{Vt} (\sigma_{rr})_{r=r_k} i^2 (Vt - x) dx \quad (4.6)$$

причем  $\sigma_{rr} = \sigma_{0rr} + \sigma_{1rr}$ , где  $\sigma_{0rr}, \sigma_{1rr}$  соответствуют  $\zeta_0, \zeta_0^0, \zeta_1, \zeta_1^0$ . Для  $1 < b$  интегрирование по  $x_1$  должно проводиться в пределах  $0 < x_1 < r_k^*$ , где  $r_k^*$  обращают в нуль выражения  $t - \frac{R}{c_{2,2}} - \frac{x_1}{V}$  и  $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^{-1}$ , причем можно получить после вычислений на конусе

$$\begin{aligned} \zeta^{-1} \sigma_{0rr} = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_1 = & -\frac{\lambda^2 (2b^2 - V^2)^2}{2V^2} \ln \zeta_1 + \frac{b^2 (2b^2 - V^2)}{V^2} + \\ & + b^2 \lambda^2 (2b^2 - V^2) V^{-1} \left\{ \left(t - \frac{x}{a}\right) K + \frac{1}{2} Vx \left(t - \frac{x^2}{a^2}\right) K^3 - \right. \\ & \left. - \frac{b^2 \lambda^2 (2b^2 - V^2)}{2V^2} \Pi_1 \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & -2 \frac{b^4}{V^2} - 2b^4 \lambda^2 K V^{-1} \left(t - \frac{x}{b}\right) \left(1 + \frac{V}{b}\right) - \\ & - b^4 \lambda^2 \left(t - \frac{x}{b}\right)^2 x \left(2 \frac{V}{b} + 1\right) K^3 - \frac{2}{3} V b^4 \lambda^2 x^2 K^5 \left(t - \frac{x}{b}\right)^3 - \\ & - 2b^2 \lambda^2 \left(1 - \frac{b^2}{V^2}\right) \ln \zeta_2 + \frac{\lambda^2 b^4}{V^2} \left\{ \Pi_2 + \frac{V^3 \left(t - \frac{1}{Kb}\right)^2}{3b} K^3 (2\sqrt{x^2 + r_k^2} + bt) \right\} \end{aligned}$$

$$\zeta^{-1} \sigma_{1rr} = \sigma_3 + \sigma_4, \quad \sigma_3 = C_1 \int_0^{\zeta_1^*} \frac{\chi_1(x_1)}{x + x_1} \left(1 - 2 \frac{b^2}{a^2} - b^2 \zeta_1^2\right) dx_1 +$$

$$+ C_2 \int_0^{\zeta_2^*} \frac{\chi_2(i\zeta_2) \left(1 - 2 \frac{b^2}{a^2} - b^2 \zeta_2^2\right)}{\beta_2(i\zeta_2) \left(\frac{1}{V} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \zeta_2^2}\right)} d\zeta_2 \quad (4.8)$$

$$\sigma_4 = -C_1 b^2 \int_0^{\delta_3^1} \frac{\gamma_0(i\delta_3) \delta_3^3 \sqrt{\frac{1}{b^2} + \delta_3^2}}{\delta_1(i\delta_3) \left( \frac{1}{V} + \sqrt{\frac{1}{a'^2} + \delta_3^2} \right)} d\delta_3 +$$

$$+ C_2 b^2 \int_0^{r_4} \frac{\gamma_1(i\delta_4) \left( \frac{t-x_1}{V} \right) \delta_4^2}{(x+x_1)^2} dx_1$$

$$\Pi_{1,2} = \frac{(Vt-x)^2}{x + \sqrt{x^2 + r_k^2}} K + \frac{\left(1 - \frac{V}{c_{1,2}}\right)^2}{2} + \frac{2(Vt-x)}{\sqrt{x^2 + r_k^2}} + \left(\frac{V^2}{c_{1,2}^2} - 1\right) \ln \delta_{1,2}$$

Здесь

$$K = \frac{1}{\sqrt{x^2 + r_k^2}}, \quad \delta_p = \frac{2(x + \sqrt{x^2 + r_k^2}) c_p}{(Vt-x) \sqrt{V + c_p}}, \quad p = 1, 2$$

Согласно (4.4), где  $r_k = i\delta_k$ , имеет место при  $r = 0$

$$\delta_{1,4} = \sqrt{\left(\frac{t-x_1}{x+x_1}\right)^2 - \frac{1}{c_{1,2}^2}}, \quad \delta_{2,3}^1 = \sqrt{\frac{t^2}{x^2} - \frac{1}{c_{1,2}^2}}$$

$$r_{k,4}^2 = V \frac{c_{1,2} t - x}{c_{1,2} + V}$$

причем выражения под знаком интегралов действительны. Для  $b < V < a'$  при  $0 < x < bt$  имеют место снова (4.7), (4.8), при  $bt < x < Vt$  вместо (4.7) можно получить

$$\delta^{-1} \sigma_{or} = \sigma_1 - 2 \frac{b^4}{V^2} + \frac{b^4 x^2}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right) \ln \frac{4b^3}{(V^2 - b^2)^2} -$$

$$- \frac{b^4 x^2}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right) \quad (4.9)$$

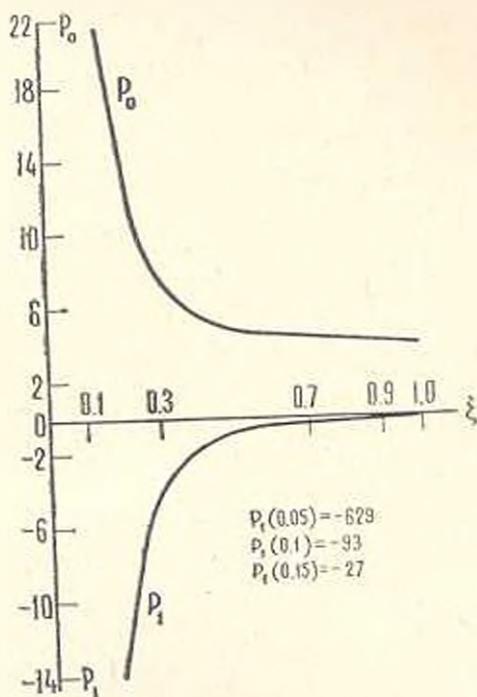
а в (4.8)  $\sigma_2 = 0$ . Для  $V > a'$  при  $0 < x < bt$  имеют место (4.7), (4.8), при  $bt < x < a't$  выполняются (4.9) и условие  $\sigma_1 = 0$ , а при  $a't < x < Vt$

$$\sigma_{or} = - \frac{x^2 (2b^2 - V^2) \left( \frac{b^2 V^2}{a'^2} + b^2 - V^2 \right)}{2V^2} \ln \frac{4a'^2}{(V^2 - a'^2)^2} -$$

$$- b^2 + \frac{b^4 x^2 \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right)}{V^2} \ln \frac{4b^3}{(V^2 - b^2)^2} + \frac{x^2 b^2}{2} \left( \frac{V^2}{a'^2} + 1 - 2 \frac{b^2}{a'^2} \right) \quad (4.10)$$

причем  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\varepsilon_4 = 0$  в (4.8). Таким образом, в линейной постановке получено решение задачи о проникании тела вращения в упругую среду, из которого для случая проникания конуса найдено распределение нормальных напряжений вдоль его образующей для различных соотношений величин  $V$ ,  $a'$ ,  $b$ . По формулам (4.7)–(4.10) были проведены расчеты для значений  $\lambda = 0, 1$ ,  $\frac{b}{V} = 2$ ,  $\frac{a'}{V} = 3.62$ ;  $\frac{b}{V} = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{a'}{V} = 1.36$ ;  $\frac{b}{V} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{a'}{V} = 0.45$ , результаты которых приведены на

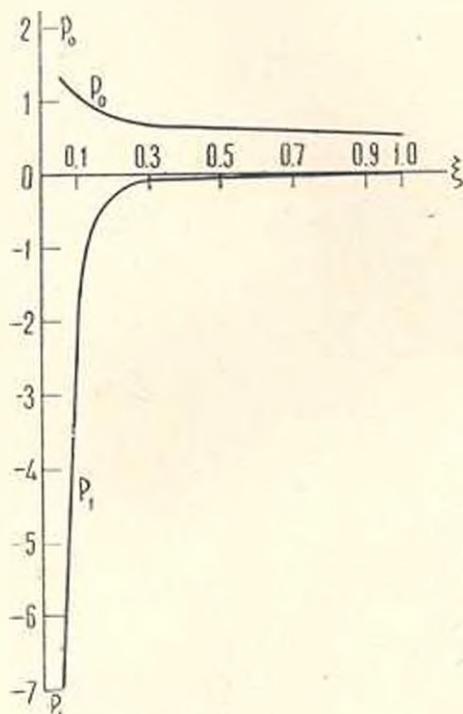
фиг. 1, фиг. 2, фиг. 3 соответственно, где даются кривые  $p_0 = -\frac{\lambda_{00}}{\rho V^2}$ ,  $p_1 = -\frac{\sigma_{1rr}}{\rho V^2}$  в функции  $\xi = \frac{x}{Vt}$ , причем для силы сопротивления соответственно получено  $(\omega^2 V^2 t^2)^{-1} P = 1.26; 0.18; 0.036$ . Как видно из



Фиг. 1.

фиг. 1, вблизи точки пересечения конуса со свободной поверхностью, то есть для малых  $x$ , получаются большие значения  $p_1$ , что связано с переходом на ось конуса. Учитывая отличные от нуля значения  $r = r_1$  для малых  $r$ , можно получить вместо (4.8) двойные интегралы, причем вычисления дают при  $x = 0$  уточненное значение  $p_1 = -16$ . Интересно, что при  $\frac{b}{V} < 1$  значения  $p_1$  невелики вплоть до поверхности  $x = 0$ .

5. В отличие от жидкости ( $b = 0$ ) при проникании тела вращения в упругую среду в  $r^{-1}\varepsilon_{rr}$  содержится немалое слагаемое  $\frac{1}{2\rho}$  ( $c - d - a$ ), в изотропной среде равное  $-b^2$ , которое содержится и в решении для сверхзвукового обтекания конуса [9]. Кроме того, согласно решениям § 2 и § 3 на теле  $v = \frac{1}{2}r_k$ , то есть деформации не малы. Тогда в узкой области  $\sim r_k$  вблизи тела следует решать нелинейные уравнения [2], в которых остаются слагаемые основного порядка.



Фиг. 2.

Вначале вблизи тела были использованы уравнения нелинейной теории упругости, которые с учетом порядка параметров можно записать в виде

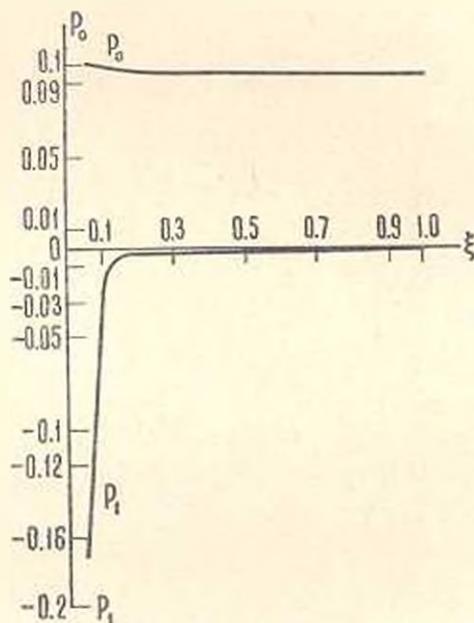
$$\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{xx}}{r} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

и в качестве примера выбрана лишь геометрическая нелинейность, то есть

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \lambda_0 (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\varepsilon_r \varepsilon_r, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \lambda_0 (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\varepsilon_\theta \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{xx} &= \lambda_0 (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), & \varepsilon_r &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2, & \varepsilon_\theta &= \frac{v}{r} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} \end{aligned}$$

После введения переменных  $v = r_k \bar{v}(\xi)$ ,  $r = r_k \xi$ ,  $u = \bar{u}(\xi) r_k \frac{\partial r_k}{\partial x}$ , где  $r$  — Эйлера координата, удалось проинтегрировать уравнения движения для  $\bar{v}$ ,  $\bar{u}$  и удовлетворить условиям на теле  $\xi = 1$ ,  $\bar{v} = 1$ ,  $\bar{v}' = \lambda$ ,  $\bar{u} = -(1 - \lambda)^2$  (где штрих означает дифференцирование), причем получится

$$\lambda = -\sqrt{2} \exp \frac{b^2}{2a'^2 T} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{T} \left( 1 + \frac{b^2}{2a'^2} \right) \right\}, \quad T = \sqrt{2 - \left( 1 + \frac{b^2}{2a'^2} \right)^2} \quad (5.2)$$



Фиг. 3.

Асимптотика полученного решения для больших  $\xi$  имеет вид

$$\bar{v} = C/\xi, \quad \bar{u}' = C_1/\xi, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2a'^2/b^2 - 1}, \quad C_1 = (\bar{u}')_0$$

и сопряжение значений  $v$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r}$  с решением (2.1), (2.2), которое для малых  $r$  имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \left( q + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{2\pi r}$$

$$\tau_{rr} \approx \lambda_0 \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + 2\nu \frac{\partial v}{\partial r} \quad (5.3)$$

дает вместо (2.4) следующие выражения:

$$q = \lambda \frac{\partial S}{\partial t}, \quad p = -\lambda S, \quad \lambda = 2C - b^2 V^{-2} (2C - C_1)$$

$$\xi = b^2 (2C - C_1) V^{-1} \quad (5.4)$$

Полагая  $C = \frac{1}{2}$ ,  $C_1 = -1$ , из (5.4) можно получить решение § 2, то

есть последовательно линейное решение, в котором на теле  $v = \frac{r_1}{2}$ .

При более точном условии  $v = r_k$  при решении линейных уравнений получаются вдвое большие значения  $\tau_\theta$ ,  $\psi_0$ , чем в § 2, причем решение § 2 предпочтительнее, поскольку обеспечивает непрерывный предельный переход к решению для жидкости [3-5], которое справедливо во всей области, и вблизи тела имеет вид

$$v_r \approx \frac{\partial v}{\partial t} + v_r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad v_r = r_k \frac{\partial r_k}{\partial t} / r, \quad v = r - \sqrt{r^2 - r_k^2} \quad (5.5)$$

Используя формулу для плотности среды в порядке 1

$$\rho \approx \rho_0 \left(1 - \frac{v}{r}\right) \left(1 - \frac{\partial v}{\partial r}\right) \quad (5.6)$$

можно видеть, что согласно (5.5) в порядке 1 получится для жидкости  $\rho \approx \rho_0$ . Возвращаясь к решению (5.4) для упругой среды можно получить на теле  $\tau_{rr} = (\lambda_0 + 2\mu) \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda_0}{2}$ . Расчеты по полученным

формулам для  $\frac{a'}{b} = 1.81$  дают  $\lambda = -1.5$ ;  $C = 1$ ;  $C_1 = -6$ . Следует,

однако, отметить, что поскольку при  $r = r_k$ ,  $v = r_k$ , из формулы (5.6)

видно, что на теле  $\rho = 0$  или  $\frac{\partial v}{\partial r} = \infty$ . Кстати, согласно (5.5) на теле

$\frac{\partial v}{\partial r} = \infty$ . Для решения (5.2)  $\frac{\partial v}{\partial r} = \lambda$  конечно, и тогда получится  $\rho = 0$

на теле. Последний вывод может относиться к случаю отхода среды

от поверхности тела, что не согласуется с фактом удовлетворения

граничных условий на теле. Поэтому в сформулированной выше задаче

проникания естественно вблизи тела рассматривать другие возможности, и

в частности, можно использовать уравнения течения, то есть предполагать, что

среда разрушается вдоль площадок скольжения [2]. Условие несжимаемости  $\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$  в

порядке 1 с учетом условия на теле дает (5.5). Кроме того, следует удовлетворить уравнениям

$$\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{xr}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_{xr}}{\tau_s}$$

где  $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}$ ,  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ , причем в основном порядке

$\varepsilon_{\theta\theta} = 2\frac{v_r}{r}$ , постоянная  $6\tau_0^2$  есть правая часть условия Мизеса,  $\Sigma = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{xx}$ . Поскольку  $\varepsilon_{rr} \approx \varepsilon - \varepsilon_{\theta\theta}$  и т. д., уравнения движения (5.1) в порядке 1 дают

$$\Sigma = 2\varepsilon_{\theta\theta} \ln r + \varphi(x, t), \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{r_0^2 - r^2}{2r} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

где удовлетворено условие  $r = r_k$ ,  $\varepsilon_{rr} = 0$ . Функцию  $\varphi(x, t)$  следует определять из условия соединения с линейным решением (5.3). Сравнивая первую формулу (5.3) с (5.5), а также записывая условие непрерывности  $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{\theta\theta} \frac{\partial r_k}{\partial x} \tau_0^2$ ,  $\varepsilon_{rr} = p \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}$  при  $r = r_k \tau_0^2$ ,  $\tau_0^2 = \text{const}$ , можно получить соотношения

$$q = \tau_1 \frac{\partial S}{\partial t}, \quad p = -\tau_1 S, \quad \tau_1 = 1 - 2 \frac{b^2}{V^2} + \frac{\tau_0^2}{14V^2} b^2 \tau_1$$

$$\tau_2 = \frac{2b^2}{V} - \frac{\tau_0^2}{14V} b^2 \tau_1, \quad \bar{\tau} = (\nu_0 + 2\mu)(1 - \bar{\tau}_1) + \lambda_0(1 - \bar{\tau}_1^{-1}) +$$

$$+ \tau_2 - 2\tau_0 \ln(\tau_2 \tau_1) \quad (5.7)$$

которые позволяют при заданном  $\tau_0^2$  определять  $\varepsilon_{xx}$  на теле, а также с учетом решений § 2 и § 4 находить решение вдали от тела, которое дается (2.2), (4.2), (4.5), где следует в  $q$  и  $p$  поставить множители  $\frac{x_1}{1 - 2b^2/V^2}$  и  $\tau_1 V 2b^2$ . Следует отметить, что значения  $u$ , или  $v$  по (5.5) одинаково пригодны как для области течения, так и для асимптотики линейного упругого решения (5.3), то есть соотношение (5.5) выполняется сквозь поверхность раздела решений  $r = r_k \tau_0^2$ . Значения  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}$  для области течения и упругой области непрерывны при  $r = r_k \tau_0^2$ , что следует из условий сохранения импульса [2] на разрыве в основном порядке в силу малости компонент скорости частиц. Таким образом, в основном порядке все величины непрерывны на поверхности  $r = r_k \tau_0^2$ , и фронт разрушения  $r = r_k \tau_0^2$  может нести разрывы параметров лишь в порядке  $(\tau_0^2 \ln \tau_0^2)$ , не влияющем на решение в основном порядке вблизи тела. Тогда упругое решение на границе  $r = r_k \tau_0^2$  должно удовлетворять условию течения и можно получить  $\tau_0^2 = \sqrt{\frac{14}{\tau_1}}$ . Откуда видно, что величины  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  также непрерывны при  $r = r_k \tau_0^2$ .

\* На поверхности  $r = r_k \tau_0^2$  с нормалью и касательное напряжение  $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta} \frac{\partial r_k}{\partial x} \tau_0^2$ .

(Записанное в интегральной форме уравнение неразрывности показывает, что для указанного выше значения  $\bar{z}_0$  в области  $r_1 < r < r_1 \bar{z}_0$  должно быть  $\rho - \rho_0 \approx \lambda$ ). Следует отметить, что в задаче о проникании, кроме  $v$ ,  $u$ , вообще говоря, нужно определить отраженные от свободной поверхности возмущения и нелинейной задаче. Однако, в силу малости  $\bar{z}_0 r_1$  и толщины слоя  $x \approx r_1$  вблизи поверхности, где имеет место двумерное по  $x, r$  решение, можно влиянием этого решения на решение задачи в целом пренебречь, и для отраженных волн считать первым исправленное линейное решение. В задаче о расклинивании среды, то есть при определении  $v$ ,  $u$ , условия на свободной поверхности отсутствуют, и приведенные оговорки не нужны.

Для хрупкой среды предполагается, что разрушение ее происходит по главным площадкам, и что позади поверхности разрушения  $r = r_1 \bar{z}_0$  среда является линейно упругой и удовлетворяющей условию  $\bar{z}_{rr} = 0$ , то есть состоит из тонких слоев, ограниченных меридиональными трещинами [7].

Поскольку  $|\bar{z}_r| \ll |\bar{z}_r|$ ,  $\bar{z}_r = \frac{\partial \bar{z}}{\partial r}$ ,  $\bar{z}_r = \frac{\partial u}{\partial x}$ , можно получить  $\bar{z}_r = -\frac{\bar{z}_0}{r_0 + 2\mu} \bar{z}$ , позади фронта разрушений, причем

$$\bar{z}_{rr} = 2\mu \frac{\partial \bar{z}}{\partial r}, \quad \bar{z}_r = \frac{2(r_0 - \mu)}{r_0 + 2\mu} \quad (5.8)$$

Из уравнений (5.1) можно получить

$$v = C_1(x, t) \ln r + C_2(x, t), \quad \bar{z}_{rr} = -\frac{2\mu_0}{r_0 + 2\mu} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{C_2(x, t)}{r} \quad (5.9)$$

где функции  $C_{1,2}$  определяются из условий на теле и при  $r = r_1 \bar{z}_0$ .

Впереди поверхности  $r = r_1 \bar{z}_0$  имеет место решение (5.3), для которого

$$v = \left( q_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) \frac{1}{2\pi r}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = q, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = p$$

где  $q_1, p_1$  также подлежат определению. Из условий непрерывности  $v, \bar{z}_{rr}, q_1$ , имеющих место при  $r = r_1 \bar{z}_0$  и основном порядке, и условий на поверхности тела  $r = r_1, v = r_1, \bar{z}_{rr} = 0$  согласно (5.9) можно получить

$$\begin{aligned} \left( q_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) \frac{1}{2\pi r_1 \bar{z}_0} &= C_1 \ln r_1 \bar{z}_0 + C_2 \\ -\frac{2\mu_0}{r_0 + 2\mu} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{C_2}{r_1} &= -\frac{\partial r_1}{\partial x} 2\mu \frac{C_1}{r_1} \\ C_1 \ln r_1 + C_2 &= r_1, \quad C_1 = -r_1/q + \ln \bar{z}_0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr} = 2\gamma_0 \varepsilon_r, \quad \varepsilon_r = -r_k \dot{r} (\gamma_0 + \ln \xi_0)$$

позади  $r = r_k \xi_0$ , а впереди фронта разрушений решение дается (2.2), (4.2), (4.5).

Условие  $\xi_0 \gg 1$ ,  $\frac{C_1}{r_k} \ll 1$  гарантирует применимость линейной теории позади  $r = r_k \xi_0$ . Значение  $\xi_0$  можно определять из условия на фронте разрушения [7]  $\varepsilon_{0s} = \varepsilon_*$ ,  $\varepsilon_s = \text{const}$ , записанного для области впереди поверхности  $r = r_k \xi_0$ , или  $\frac{2\mu}{\xi_0} \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + \ln \xi_0} = \varepsilon_*$ .

Записав уравнение ударной адиабаты в основном порядке  $e_1 - e_2 = - (v_{r1} - v_{r2}) \frac{(\varepsilon_{rr})_1 + (\varepsilon_{rr})_2}{2\gamma_0 \xi_0 \frac{\partial r_k}{\partial t}}$ , где  $e_{1,2}$  — есть внутренняя энергия, ин-

дексы 1, 2 указывают значения параметров впереди и позади  $r = r_k \xi_0$ , учитывая, еще, что при  $r = r_k \xi_0$

$$\begin{aligned} v_{r1} &= \frac{\partial r_k}{\partial t} \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 + \ln \xi_0} = v_{r2} \frac{1 + \gamma_1}{2\gamma_1}, & (\varepsilon_{rr})_1 &= 2\mu \frac{\partial v_{r1}}{\partial r}, & (\varepsilon_{rr})_2 &= 2\mu \gamma_2 \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} \\ \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} &= \gamma_1 \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} = - \frac{\gamma_1}{\xi_0 (\gamma_0 + \ln \xi_0)}, & e_1 &= e_0(T_1) + \mu \frac{2\gamma_1^2}{\xi_0^2 (\gamma_0 + \ln \xi_0)^2} \\ e_2 &= e_0(T_2) + \frac{\mu \gamma_2}{\xi_0^2 (\gamma_0 + \ln \xi_0)^2} + \varepsilon_*. \end{aligned}$$

где  $e_s$  — энергия разрушения, можно получить  $e_0(T_2) - e_0(T_1) = - \frac{\mu \gamma_1}{\xi_0^2 (\gamma_0 + \ln \xi_0)^2}$ . Как и в [7] можно показать, что поверхностная энер-

гия  $\varepsilon_s$  намного меньше диссипации тепла, и из полученного соотношения следует закон возрастания энтропии. Уравнение сохранения массы  $v_{r1} - v_{r2} = - \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \rho_1 \left( \xi_0 \frac{\partial r_k}{\partial t} - v_{r1} \right)$  следует из непрерывности перемещений  $v_1 = v_2$  лишь при выборе в качестве  $\rho_1$  „средней“ [7] плотности, при определении которой не учитывается наличие трещин, причем  $\frac{1}{\rho_{1,2}} \approx \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\partial v_{1,2}}{\partial r} + \frac{v_{1,2}}{r} \right)$  и при  $r = r_k \xi_0$ ,  $\rho_2 < \rho_0$ , в то время как для истинной плотности в разрушенной области выполняется  $\frac{1}{\rho_2} \approx \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{2\mu}{r} \right)$ , и при  $r = r_k \xi_0$ ,  $\rho_2 > \rho_0$ . Различие устраняется введением в условия при  $r = r_k \xi_0$  вместо  $\rho_2$ ,  $c \rho_2$ , где пористость  $c < 1$ , так, что при  $r = r_k \xi_0$ ,  $\rho_2 = \rho_0$ .

Пусть  $\varepsilon_* > \varepsilon_1$ . Тогда естественно считать, что имеет место область течения (5.5) за фронтом  $r = r_k \xi_0$ , для которой  $\varepsilon_{0s} = 2\varepsilon_* \ln \frac{r}{\xi_0 r_k} -$

$-\frac{\mu}{\xi_0} + 2\tau_s$ ,  $\frac{\mu}{\xi_0} = \tau_s$ , и поскольку при  $r = r_k \xi_0$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = \tau_s < \tau_s$ , то и позади  $r = r_k \xi_0$ ,  $\sigma_{\theta\theta} < \tau_s$ , то есть в области течения трещины отрыва отсутствуют. Записывая равенство кинетической энергии падающего тела  $\frac{mV^2}{2}$  сумме энергии разрушения и энергии в области течения, можно найти условие максимального погружения тела массы  $m$ ,  $\frac{mV^2}{2} > 2\tau_s v' \ln \xi_0$ ,  $v'$  — объем погруженной части тела. При  $\tau_s < \tau_s$

можно с самого начала предположить, что имеет место фронт трещины отрыва. Согласно полученному решению позади фронта трещины  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ ,  $\sigma_{rr} = -2\mu\gamma \frac{1}{\gamma_1 + \ln \xi_0} \frac{r_k}{r}$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = -\frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\gamma_1 + \ln \xi_0} \frac{r_k}{r}$  и условие отсутствия течения позади фронта трещины имеет вид  $\tau_{rr}^2 + \tau_{\theta\theta}^2 + (\sigma_{rr} - \tau_{rr})^2 < 6\tau_s^2$ , что дает условие  $\xi_0 \xi_k < 2\tau_s$ ,  $\xi_k = \sqrt{1 + \frac{\tau_s^2}{3(\lambda + \mu)^2}}$ , где  $\xi_0 = \frac{2\mu\gamma}{\sigma_s(\gamma_1 + \ln \xi_0)}$ .

Для  $\frac{\mu}{\tau_s} \sim 10$  получаются большие  $\xi_0$  и малые  $\xi_k$ . Таким образом, фронт трещины отрыва для указанного диапазона  $\frac{\mu}{\tau_s}$  имеет место лишь для весьма малых значений  $\frac{\tau_s}{\tau_s}$ . Для остальных  $\tau_s < \tau_s$  следует позади фронта трещины  $r = r_k \xi_0$  ввести фронт течения  $r = r_k \xi_1$ , причем в области трещины  $(\sigma_{rr})_1 = 2\tau_s \frac{C_1}{r}$ ,  $(\sigma_{\theta\theta})_1 = 0$ ,  $C_1 = -r_k 2\tau_s (\ln \frac{\xi_0}{\xi_1} + \gamma_1)$ , а в области течения вплоть до тела  $(\sigma_{rr})_2 = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_k \xi_1} + 2\tau_s \frac{C_1}{r_k \xi_1}$ , причем постоянные  $\xi_{0,1}$  определяются из соотношений

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{\sigma_s \xi_0}{2\tau_s}, \quad \xi_1^2 = \frac{\mu \xi_0 (\lambda + \mu)}{(\gamma_1 + \ln \frac{\xi_0}{\xi_1})(\lambda + 2\mu)\tau_s}$$

Записывая условие отсутствия трещин позади фронта течения  $r = r_k \xi_1$ , можно получить условия наличия указанной конфигурации  $\frac{1}{2} < \frac{\sigma_s}{2\tau_s} < 1 - \tau_s^2$ . Полученные неравенства для  $\tau_s$  верны и для анизотропной среды с заменой  $\mu$  на  $\frac{2\mu\gamma}{a - c + d}$ , причем для определения  $\bar{\mu}_{\tau_s}$  при наличии, например, фронта течения  $r = \xi_0 r_s$  снова имеем  $v_r = r_s \frac{\partial r_s}{\partial t} / r$ , что приводит к формуле (3.5), а в правой части (3.7) в силу (5.7)

должно стоять выражение  $-\frac{r^2 \sigma_{rr}}{d \partial S / \partial x} = -\tau_1 \frac{\xi_0^2}{4-d}$ . Отметим, что полученные значения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  в порядке 0 (1) верны и для произвольного закона проникания  $x = f(t)$ , причем при наличии течения позади  $r = r_k \xi_0$  и конуса массы  $m$ , интегрируя уравнение движения  $mf' = -P$ , можно получить значения скорости проникания  $f'$  и определить глубину проникания при  $f'(t) = 0$ ,  $f_{\max} = \left\{ m V^2 / 2\tau_1 \left( 1 + \ln \frac{r}{r_0} \right) (\lambda + k_1) \right\}^{1/2}$ ,  $V = f'(0)$ . Здесь также учтено трение среды с телом, то есть при  $r = r_k$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = k_1 \sigma_{rr}$ , что дает вместо (2.4)  $q = \frac{\partial S}{\partial t} \left( 1 - \frac{b^2}{V^2} \right) + \frac{2k_1}{V} b^2 \tau_1$ , а в (5.7)  $\sigma_{rr}$  — прежнее.

Предполагая же, что вблизи тела среда ведет себя как несжимаемая жидкость, снова имеем (5.5), и условие  $\sigma_{rr} = 0$ , после сопряжения с (5.3), снова дает линейное решение (2.2), (2.4) вдали от тела.

Вблизи тела из уравнений движения и условия непрерывного соединения с  $\sigma_{rr}$  из (5.3) можно получить для давления  $p$

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \ln \frac{r}{r_0 r_k} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r_k}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{r_k^2}{r^2} - \xi_0^{-2} \right) - \frac{b^2}{\xi_0^2}, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{r_0 b^2}{P_n}}$$

$P_n$  — давление на фронте плавления  $r = r_k \xi_0$ .

Интересно, что при проникании плоских тонких тел линейная теория всюду верна. Кроме того, учет трещины, бегущей вдоль оси  $x$  впереди тела вращения, на которой  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0$ , что в силу (5.3) дает на ней  $q = p = 0$ , не меняет линейного решения и не влияет на решение задачи. Можно определить значение  $\sigma_{rr}$  с точностью до малых второго порядка. Для задачи с фронтом течения можно записать в указанном порядке  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -2\tau_1 + \tau_1 \frac{1}{4} \frac{\xi_0^2}{r_0^2}$ ,  $\xi_0 = \frac{v_r}{r}$  и тогда, интегрируя уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} - \frac{dv_r}{dt} \approx \frac{dv_r}{dt} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

можно получить, удовлетворяя условию непрерывности  $\sigma_{rr}$  при  $r = r_k \xi_0$

$$\sigma_{rr} = 2\tau_1 \ln \frac{r}{r_k \xi_0} - \int_{r_k \xi_0}^r \left( \frac{1}{\tau_1} \sigma_{rr} \frac{1}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} - \rho \frac{dv_r}{dt} \right) dr + (\sigma_{rr})_0$$

Здесь  $v_r$ ,  $\sigma_{rr}$  даются (5.5)–(5.7),  $(\sigma_{rr})_0$  есть значение  $\sigma_{rr}$  из упругой области при  $r = r_k \xi_0$ , причем  $(\sigma_{rr})_0 = \sigma_{0rr} + \sigma_{1rr}$

$$\frac{\sigma_{0rr}}{\rho} = \chi_1 \sigma_1 + \zeta_1 \sigma_2, \quad \frac{\sigma_{1rr}}{\rho} = \chi_1 \sigma_1' + \zeta_1 \sigma_2'$$

где  $\tau_1, \xi_1$  указаны в (5.7), а с учетом трения получится в задаче проникания конуса после некоторого изменения обозначений

$$\tau_1 = 1 + \frac{b^2 \xi_0^2 \tau_1}{\rho V^2 \left(1 - 2 \frac{b^2}{V^2}\right)} + k_1 \tau_1 \frac{2 \ln \xi_0 + 1}{\rho \lambda V^2 \left(1 - 2 \frac{b^2}{V^2}\right)}$$

$$\xi_1 = 1 - \frac{\xi_0}{2\mu} \tau_1 - k_1 \tau_1 \frac{2 \ln \xi_0 + 1}{2\mu}$$

$\sigma_3$  равно сумме первых, а  $\sigma_4$  — сумме вторых слагаемых и  $\tau_1 + \tau_1^*$ , причем в порядке 1  $(\tau_{rr})_0 = \frac{\mu}{\xi_0}$ . С учетом геометрической нелинейности в  $(\tau_{rr})_0$  добавится  $-\frac{\lambda_0 - 1}{4\xi_0^2} \mu$ .

Для задачи с фронтом трещины из уравнения движения получится

$$-r_k \xi_0^3 \left(\frac{\partial r_k}{\partial x}\right)^2 \tau_{xx1} + r \tau_{rr1} = r_k \xi_0 (\tau_{rr})_1 + \int_{r_k \xi_0}^r r \left(\rho \frac{dv_{r1}}{dt} - \frac{\partial \sigma_{xr1}}{\partial x}\right) dr$$

$$\tau_{r1} = \frac{\partial r_k}{\partial t} \frac{2\tau_1}{\eta + \ln \xi_0}$$

где  $\sigma_{xr1} = \frac{2\mu \lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu} \frac{1}{\eta + \ln \xi_0} \frac{\partial r_k}{\partial x} \left(1 - \frac{r_k}{r}\right) - \frac{\left(k_1 \tau_1 - \frac{\partial r_k}{\partial x}\right)^2}{\eta + \ln \xi_0} \frac{2r_k}{r}$ , причем

из уравнения импульсов при  $r = r_k \xi_0$ ,  $(\tau_{rr})_1 = (\tau_{rr})_0 - (v_{r1} - v_r) \rho \xi_0 \frac{\partial r_k}{\partial t}$ ,  $v_r = \frac{\partial r_k}{\partial t} \frac{2\tau_1}{\eta + \ln \xi_0} (\tau_{rr})_0$  дано выше, а значения  $\tau_1, \xi_1$  получаются из условий непрерывности  $\tau_{rr}, v$  при  $r = r_k \xi_0$  и имеют вид

$$\tau_1 (\eta + \ln \xi_0) \left(1 - 2 \frac{b^2}{V^2}\right) - 2\xi_0 \tau_1 - \frac{2b^2}{V^2} \frac{2\lambda_0 \xi_0 + 4\mu \xi_0 - 2\mu}{\lambda_0 + 2\mu} + \frac{2k_1 \tau_1 b^2}{\lambda V^2}$$

$$\tau_1 (\lambda_0 + 2\mu) (\eta + \ln \xi_0) = 2\lambda_0 \xi_0 + 4\mu \xi_0 - 2\mu - 2(\lambda_0 + \mu) \frac{k_1}{\lambda}$$

Таким же образом находится  $\tau_{rr}$  поблизи поверхности  $r = r_k$  и на ней в задаче с фронтом трещины  $r = r_k \xi_0$ , позади которого имеется фронт течения  $r = r_k \xi_1$ .

\*  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  даны в (4.7), (4.8), где в  $\tau_1 - \tau_2$  следует в  $\tau_1, \tau_2$  и  $r_k$  заменить  $\lambda$  на  $\lambda \xi_0$ , а  $-b^2$  заменить на  $-\frac{b^2}{\xi_0^2}$ .

Обозначая индексом 1 величины в области трещины, а индексом 2 — в области течения, можно получить

$$(\sigma_{rr})_2 = 2\tau_x \ln \frac{r}{\xi_1 r_k} + (\sigma_{rr1})_{r=r_k \xi_1} - (v_{r2} - v_{r1})_{r=r_k \xi_1} \rho_0 \xi_1 \frac{\partial r_k}{\partial t} - \\ - \int_{\xi_1 r_k}^r \left( \frac{\partial \sigma_{xr2}}{\partial x} + \frac{\sigma_{xr}^2}{\tau_x} - \rho \frac{dv_{r2}}{dt} \right) dr + \xi_1^2 \left( \frac{\partial r_k}{\partial x} \right)^2 (\sigma_{xx2} - \sigma_{xx1})_{r=r_k \xi_1}$$

где  $\sigma_{rr1}$  дается вышеуказанной формулой, в которой уже  $\sigma_{xr1}$ ,  $v_{r1}$  и  $\sigma_{xx2}$ ,  $v_{r2}$  находятся из полученного выше в порядке 1 решения в областях 1 и 2. Кроме того,

$$\tau_1 = \frac{2(\rho_0 + \rho) \xi_0 + \frac{b^2 \rho_0 (\xi_0 - \xi_1)}{(1 - 2b^2/V^2) V^2}}{\xi_1 (\ln \xi_0 / \xi_1 + \gamma) (\rho_0 + 2\rho)} + \\ + \frac{b^2 \tau_x}{V^2 \xi_1 \mu} \frac{2\xi_1^2}{\eta} + \frac{\lambda_0 \xi_0 \xi_1}{\lambda_0 + \mu} + \frac{2b^2 k_1 \tau_x \left( \ln \xi_1 + \frac{1}{\zeta} \right)}{\lambda V^2 \left( 1 - \frac{2b^2}{V^2} \right)}$$

$$\tau_2 = \frac{2(\rho_0 + \rho) \xi_0 - \frac{1}{2} \rho_0 (\xi_0 - \xi_1)}{\xi_2 (\ln \xi_0 / \xi_1 + \gamma) (\rho_0 + 2\rho)} - \frac{\tau_x}{2\mu \zeta} \left( \frac{2\xi_1^2}{\eta} + \frac{\lambda_0 \xi_0 \xi_1}{\lambda_0 + \mu} \right) + \frac{k_2}{\mu \zeta} \tau_x \left( \ln \xi_2 + \frac{1}{\zeta} \right)$$

Для малых  $x_1$  получены также новые значения  $q = -C(Vt - x_1)$ ,  $p = -D(Vt - x_1)$ ,  $D = 0$ ,  $C = \frac{1}{\gamma} 2\tau_1 (a^{-\gamma} - b^{-\gamma}) \rho_0^2$ , при  $r \approx 0$ ,  $x \approx 0$

$\sigma_{rr} = -\tau_x \left( \frac{\xi_0 r_k}{r} \right)^2$  в упругом решении, а в области течения вблизи  $\sigma_{rr} \sim \tau_x$ .

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 5 III 1977

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅՎ

ԲԱՐՍԷՆԻ ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄԱՆ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԱՌԱՋԳԱՍԱՆ ՄԻՋՍԿՈՒՅՐԻ ՄԵՆ

Ա Վ Փ Ա Փ Ա Վ

Չիտարկվում է բարակ պտտման ժարմնի քափանցումը առանցքային կիսաառաժույթյան մեջ: Սկզբում խնդիրը լուծվում է դժարին դրվածքով իշխարող և անիզոտրոպ մեխալույզով համար:

Այնուհետև զծային տեսության օգնությամբ ստացված լուծումը ճշգրտվում է դիտարկված ինդրի լուծման համար ու զծային տեսության կիրառելիության հարվատումով:

THE PENETRATION OF A SLENDER BODY OF REVOLUTION INTO AN ELASTIC MEDIUM

A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

The problem of penetration of a slender body of revolution into an elastic medium, occupying the half-space, is considered.

At first the penetration problem for isotrop and anisotrop elastic medium is solved in linear statement. The values for displacement of medium in a closed form as well as the distribution of normal stresses  $\sigma_{rr}$  on the cone generatrix in a simple quadrature form are obtained.

The resultant linear solution shows that on the body  $\sigma_{rr}$  is equal to the shear modulus, i. e. in contrast to the solution for fluid, in an elastic medium the linear theory is not valid. Then the limitations of the linear theory are eliminated by the matching of the linear solution, valid far from the body, with the solution of nonlinear equations near the body where the medium is modelled by the Mises flow equations, for meridional cracks, or the equations for incompressible ideal fluid. The distribution of  $\sigma_{rr}$  on the body and the values for displacements far from it are obtained for all variants of medium fracture.

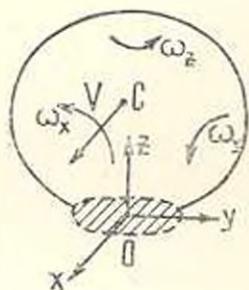
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ferrari C. Campo aerodinamico a velocita ipersonora attorno a una solido di rivoluzione. *Aerotecnica*, 1937, 17, p. 507—518.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. I, т. III, М., «Наука», 1973.
3. Григорян С. С. Некоторые вопросы газодинамики тонких тел. Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.
4. Сазомомян А. Я. Проникание. Изд. МГУ, 1974.
5. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1961.
6. Свекло В. А., Шмойлов А. Ф. Осесимметричная задача о проникании в упругое полупространство тонкой жесткой гладкой свин конической длины. *ПММ*, 1975, т. 39, вып. 4.
7. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород. *ПММ*, 1967, т. 31, вып. 4.
8. Кусукава К. К теории ударных волн. Сб. переводов, «Механика», вып. 4, 1952.
9. Аликян Ж. О. Движение жесткого конуса в упругой среде со сверхзвуковой скоростью. *Изв. АН АрмССР, Механика*, 1970, т. 23, № 1.
10. Багдоев А. Г., Мартиросян А. И. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. *Изв. АН АрмССР, Механика*, 1974, т. 27, № 3.

А. А. СПЕКТОР

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ  
 ЗАДАЧИ КАЧЕНИЯ

1. Рассматривается пространственная контактная задача качения упругого тела по основанию из того же материала. Считается, что движение происходит в режиме, когда области сцепления отсутствуют на площадке контакта. В работе найдены условия существования и единственности нелинейной задачи определения напряжений и скоростей проскальзывания на границе тела и основания; построено ее решение в виде степенного ряда. Коэффициенты ряда определяются последовательно. Рассматриваемые режимы качения реализуются, когда общая сила трения, действующая со стороны основания на тело, близка к предельному значению, определяемому законом Амонтона—Кулона. Следует отметить, что такое движение принципиально отличается от макроскальзывания, или «буксования», так как скорость проскальзывания на площадке контакта много меньше скорости качения, и их отношение имеет порядок упругих деформаций.



Фиг. 1.

Различные приближенные методы исследования пространственных задач качения имеются в работах [1—3].

2. Пусть тело катится по основанию со скоростью  $V$ . Обозначим  $\bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  абсолютную угловую скорости катящегося тела. Движение будем считать квазистатическим и установившимся по отношению к системе координат  $Oxyz$  жестко связанной с площадкой контакта. Начало системы координат  $O$  совпадает с точкой, касания тела и основания тела в недеформированном состоянии, ось  $Oz$  является внешней нормалью к основанию, ось  $Ox$  направлена в сторону качения.

На границе тела и основания, которые аппроксимируются полупространствами  $z > 0$  и  $z < 0$ , ставятся следующие граничные условия [4]:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\mu \sigma_z \frac{s_x}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \\ \tau_{yz} &= -\mu \sigma_z \frac{s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \text{ в области контакта } E \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z &= 0 \text{ вне области } E \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условия (2.1) означают, что величины касательного  $\bar{\tau}(\tau_{xz}, \tau_{yz})$  и нор-

мального  $\sigma_z$  напряжений в точках области  $E$  связаны законом Амонта-Кулона с коэффициентом трения  $\rho$ . Направление вектора  $\vec{\tau}$  совпадает с направлением скорости проскальзывания тела относительно основания  $\vec{s}(s_x, s_y)$ .

Как известно [3, 4], из-за равенства упругих постоянных тела и основания для определения нормальных напряжений получается то же уравнение, что и в статической задаче без трения, которое удовлетворяется, если

$$\sigma_z = -\sigma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad E - \text{эллипс с полуосями } a, b. \text{ Если}$$

рассматривать качение нашего тела как абсолютно твердого со скоростью  $V$  и угловой скоростью  $\omega$ , то поле его скоростей проскальзывания  $\vec{v}(v_x, v_y)$  в окрестности точки  $O$  имеет вид  $v_x = V - \omega_y l - \omega_z y$ ;  $v_y = \omega_x l + \omega_z x$ . Здесь  $l = OC$ . Обозначим через  $(u^+, v^+)$  проекции вектора упругих касательных смещений тела в точке  $(x, y)$  площадки  $E$ . Обозначим через  $(u^-, v^-)$  те же величины для основания. Тогда скорости проскальзывания  $\vec{s}$  выражаются следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} s_x &= V \left( \frac{\partial u^-}{\partial x} - \frac{\partial u^+}{\partial x} \right) + v_x \\ s_y &= V \left( \frac{\partial v^-}{\partial x} - \frac{\partial v^+}{\partial x} \right) + v_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

3. Получим систему интегральных уравнений, которой удовлетворяют функции  $s_x, s_y$ . После ее решения касательные напряжения определяются, исходя из граничных условий (2.1). Для получения уравнений следует выразить упругие смещения  $u, v$  в (2.2) через граничные напряжения [5], а затем касательные напряжения с помощью (2.1) выразить через проекции скорости проскальзывания и известное нормальное давление. В итоге получим систему

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{\rho \sigma_0 V}{G} \int_E \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \left( B_{11} \frac{s_{x'}}{\sqrt{s_{x'}^2 + s_{y'}^2}} + \right. \\ &\quad \left. + B_{12} \frac{s_{y'}}{\sqrt{s_{x'}^2 + s_{y'}^2}} \right) + v_x \\ s_y &= \frac{\rho \sigma_0 V}{G} \int_E \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \left( B_{21} \frac{s_{x'}}{\sqrt{s_{x'}^2 + s_{y'}^2}} + \right. \\ &\quad \left. + B_{22} \frac{s_{y'}}{\sqrt{s_{x'}^2 + s_{y'}^2}} \right) + v_y \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ядра  $B_{ij}$  имеют вид

$$B_{11} = \frac{\cos \theta}{\pi m R^2} (3 \sin^2 \theta - m), \quad B_{12} = \frac{\sin \theta}{\pi m R^2} (1 - 3 \cos^2 \theta)$$

$$B_{21} = -B_{12}, \quad B_{22} = \frac{\cos \theta}{\pi m R^2} (1 - m - 3 \sin^2 \theta)$$

$\theta$  — угол между вектором  $(x - x', y - y')$  и осью  $Ox$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ ,  $\frac{1}{m}$  — коэффициент Пуассона материалов. Интегралы в (3.1) понимаются в смысле главного значения.

Исследуем полученную систему. Рассмотрим семейство последовательных приближений, задаваемых формулами

$$\bar{s}_0 = \bar{v}, \quad \bar{s}_n = \frac{\nu_0 V}{G} \int_E B \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \frac{\bar{s}_{n-1}}{|\bar{s}_{n-1}|} dx' dy' + \bar{v}$$

Здесь и далее для краткости систему (3.1) будем записывать как одно векторное уравнение с матричным ядром  $B$ .

Приближения  $\bar{s}_n$  будем рассматривать в пространстве ограниченных функций, определенных на  $E$  и удовлетворяющих условию Липшица с показателем  $1/2$ . Норма в этом пространстве задается равенством

$$|\bar{s}_n| = \max_E |\bar{s}_n| + \sqrt[4]{ab} \max_E \frac{|\bar{s}_n(P) - \bar{s}_n(Q)|}{\sqrt{R}}$$

Сингулярный интегральный оператор с ядром  $B$  переводит множество функций этого пространства, обращающихся в нуль на границе  $E$ , в функции того же пространства и является ограниченным оператором. Обозначим через  $C_1$  соответствующую постоянную. В дальнейшем мы будем использовать ограниченность этого оператора в пространстве  $L_1$ . Через  $C_2$  будет обозначаться соответствующая постоянная. Упомянутые свойства многомерных сингулярных интегральных операторов исследовались в работах [6, 7]. Мы не получаем оценок для постоянных  $C_1$  и  $C_2$ ; это может быть сделано методом [6]. Основным этапом исследования системы (3.1) является нахождение условий того, что искомые функции  $s_x$  и  $s_y$  ни в каком приближении одновременно в нуль не обращаются. Это требование для наших задач является необходимым, так как рассматривается качение с проскальзыванием во всех точках  $E$ .

Справедливо следующее утверждение. Пусть

$$\gamma = \frac{\nu_0 V}{G \min |v|} < \left[ 2C_2 (l \sqrt{2} + 1) \left( 2 \frac{|\bar{v}|}{\min |v|} + 1 \right) \right]^{-1}$$

$$l = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$$

тогда для любого  $n$  выполняется неравенство

$$|\bar{s}_n| > \frac{1}{2} \min |\bar{v}| \quad (3.2)$$

Покажем, что неравенство (3.2) справедливо, если для любого  $n$ : 1) вектор-функции  $\bar{s}_n$  ограничены и удовлетворяют условию Липшица с показателем  $1/2$ , 2) этим же требованиям удовлетворяют вектор-функции  $\frac{\bar{s}_n}{|\bar{s}_n|}$  и 3) выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\bar{s}_n}{|\bar{s}_n|} \right\| \leq [2\gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1)]^{-1} \quad (3.3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |\bar{s}_n| &\geq |\bar{v}| - \frac{\gamma_0 V}{G} \left| \int_B \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \frac{\bar{s}_{n-1}}{|\bar{s}_{n-1}|} dx' dy' \right| > \\ &> \min |\bar{v}| - \frac{\gamma_0 V}{G} \left| \int_B \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \frac{\bar{s}_{n-1}}{|\bar{s}_{n-1}|} dx' dy' \right| > \\ &> \min |\bar{v}| \left[ 1 - \gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1) \left\| \frac{\bar{s}_{n-1}}{|\bar{s}_{n-1}|} \right\| \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) очевидно, что при выполнении (3.3) справедливо неравенство (3.2).

Утверждения (1—3) докажем по индукции. Пусть  $n=0$ . Из условий, наложенных на  $\bar{v}$ , вытекает неравенство

$$\left\| \frac{\bar{s}_0}{|\bar{s}_0|} \right\| = \left\| \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right\| \leq \frac{|\bar{v}|}{\min |\bar{v}|} [2\gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1)]^{-1} \quad (3.5)$$

Неравенство (3.5) и доказывает справедливость (3.3) при  $n=0$ . Справедливость утверждений (1—2) при  $n=0$  вытекает из определения векторного поля  $\bar{v}$  и условия  $\min |\bar{v}| > 0$ . Пусть теперь (1—3) выполнены при  $n=k$ . Справедливость утверждения 1) при  $n=k+1$  вытекает из определения  $\bar{s}_{k+1}$ . Справедливость 2) следует из неравенства (3.4). Для доказательства пункта 3) с помощью оценок, аналогичных (3.4), получим

$$|\bar{s}_{k+1}| \leq \min |\bar{v}| \left[ \frac{|\bar{v}|}{\min |\bar{v}|} + \gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1) \left\| \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} \right\| \right] \quad (3.6)$$

Далее из (3.3), (3.4) и (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\bar{s}_{k+1}}{|\bar{s}_{k+1}|} \right\| &\ll \frac{\|\bar{s}_{k+1}\|}{\min |\bar{s}_{k+1}|} \ll \frac{\frac{|\bar{v}|}{\min |\bar{v}|} + \gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1) \left\| \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} \right\|}{1 - \gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1) \left\| \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} \right\|} \ll \\ &\ll 2 \frac{|\bar{v}|}{\min |\bar{v}|} + 1 \ll [2\gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1)]^{-1} \end{aligned}$$

Итак, мы доказали неравенство (3.3) для  $n=k+1$ , а с ним и неравенство (3.2).

Установленное неравенство (3.2) дает возможность найти условия разрешимости системы (3.1).

Пусть наряду с условием, обеспечивающим неравенство (3.2), выполняется неравенство  $\gamma \ll \frac{1}{2C_2}$ , тогда последовательные приближения  $\bar{s}_n$  равномерно сходятся к решению системы (3.1), удовлетворяющему условию Липшица с показателем  $1/2$ .

Требования, наложенные на параметр  $\gamma$ , обеспечивают сжимающие свойства оператора правой части (3.1) и отсюда сходимость  $\bar{s}_n$  в среднем квадратичном. В силу этого и из ограниченности семейства последовательных приближений (неравенства (3.6) и (3.3)) вытекает их сходимость к функции из пространства Липшица [8]. Легко показать, что предельная функция удовлетворяет системе (3.1).

Рассмотрим множество функций нашего пространства, удовлетворяющих условию  $|\bar{s}| > r > 0$ . Пусть  $\gamma < \frac{r}{\min |\bar{v}| C_2}$ , тогда на этом множестве система (3.1) имеет не более одного решения из пространства Липшица. Наложившие условия обеспечивают сжимающие свойства оператора  $B$  на указанном множестве, откуда и вытекает единственность решения (3.1).

4. Рассмотрим теперь зависимость последовательных приближений  $\bar{s}_n$  и решения (3.1)  $\bar{s}$  от параметра  $\gamma$ . Наиболее полные результаты получаются в случае  $\omega_z = 0$ , то есть  $v_x = \text{const}$ ,  $v_y = \text{const}$ . Им мы и ограничимся.

Функции  $f_x = \frac{s_x}{|s_x^2 + s_y^2|}$  и  $f_y = \frac{s_y}{|s_x^2 + s_y^2|}$  разлагаются в ряды по степеням  $s_x - v_x$ ,  $s_y - v_y$ . Эти ряды абсолютно и равномерно сходятся при

$$(s_x - v_x)^2 + (s_y - v_y)^2 < (\sqrt{2} - 1)^2 |\bar{v}|^2 \quad (4.1)$$

Заменим в этих рядах все члены их абсолютными величинами и суммы полученных рядов при некоторых  $s_x$  и  $s_y$ , удовлетворяющих неравенству (4.1), обозначим через  $A_x$  и  $A_y$ . Справедливо следующее утверждение. Пусть

$$\gamma < [C_1(l) \sqrt{2} + 1] \max(A_1, A_2)^{-1} \quad (4.2)$$

тогда все приближения  $\bar{s}_k$  разлагаются в ряды по степеням  $\gamma$ , которые сходятся по норме пространства Липшица равномерно относительно  $\gamma$ . Если выполнены еще условия сходимости приближений  $\bar{s}_k$ , то решение системы (3.1) является аналитической функцией параметра.

Доказательство строится по индукции. Разложение  $\bar{s}_k$  и  $\bar{s}_l$  не вызывает сомнения, так как соответствующие суммы содержат конечное число членов. Разложение  $\bar{s}_{k+1}$  формально получается подстановкой ряда для  $\bar{s}_k$  в разложения  $f_x$  и  $f_y$  по  $s_x = v_x$ ,  $s_y = v_y$  и группировкой членов. Заменив в разложении  $\bar{s}_{k+1}$  коэффициенты  $r'(x, y)$  на  $\|r'\|$ , получим в силу (4.2) абсолютно сходящийся степенной ряд. Он мажорирует исследуемый ряд для  $\bar{s}_{k+1}$ .

Для нахождения коэффициентов при  $\gamma^l$  в разложении решения  $\bar{s}$  нужно учитывать следующий факт. При переходе от  $n$ -го приближения к  $n+1$ -му первые  $n$  найденных коэффициентов сохраняются. Следовательно, они сохраняются и в решении  $\bar{s}$ . Покажем это.

Доказательство проведем по индукции. Очевидно, что при переходе от  $n=0$  к  $n=1$  нулевой член разложения сохраняется. Действительно,

$$\bar{s}_1 = \bar{v} + \gamma B \left( \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right)$$

здесь

$$\gamma B \left( \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right) = \frac{\gamma^2 \alpha V}{G} \int_{\dot{E}} B \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} dx' dy'$$

Пусть теперь доказываемое справедливо при  $n=k$ , то есть

$$\bar{s}_k = \bar{s}_{k-1} + \bar{O}(\gamma^k)$$

тогда

$$\frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} = \frac{\bar{s}_{k-1}}{|\bar{s}_{k-1}|} + \bar{O}(\gamma^k)$$

Действительно, в силу (3.2),

$$\left| \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} - \frac{\bar{s}_{k-1}}{|\bar{s}_{k-1}|} \right| \leq \frac{|\bar{s}_k - \bar{s}_{k-1}|}{\min(|\bar{s}_{k-1}|; |\bar{s}_k|)} < \frac{|\bar{s}_k - \bar{s}_{k-1}|}{1/2|\bar{v}|} = \bar{O}(\gamma^k)$$

Теперь можно убедиться в справедливости доказываемого при  $n=k+1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \bar{s}_{k+1} &= \gamma B \left( \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} \right) + \bar{v} = \gamma B \left( \frac{\bar{s}_{k-1}}{|\bar{s}_{k-1}|} + O(\gamma^k) \right) + \bar{v} = \\ &= \gamma B \left( \frac{\bar{s}_{k-1}}{|\bar{s}_{k-1}|} \right) + \bar{v} + O(\gamma^{k+1}) = \bar{s}_k + O(\gamma^{k+1}) \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае  $\bar{v} = \text{const}$  коэффициенты в разложении  $\bar{s}_n$  и  $\bar{t}$  имеют весьма простой вид. Оказывается, что в этих разложениях при  $\gamma^i$  стоит полином по координатам  $x$  и  $y$  не выше  $i$ -ой степени. Коэффициенты его выражаются через полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода от аргумента  $e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}$ . Такой вид коэффициентов вытекает из свойства сингулярного интегрального оператора с ядром  $B$  переводить полином  $i$ -ой степени в полином  $i+1$ -ой степени, которое непосредственно следует из результатов [3]. Итак, решение системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений (3.1) представляется в виде ряда по степеням параметра  $\gamma$ , коэффициенты которого являются полиномами по координатам  $x$  и  $y$ . Такой же вид имеет и поле направлений проскальзывания  $\frac{\bar{s}}{|\bar{s}|}$ , которым определяются касательные напряжения. Методику построения коэффициентов этих рядов рассмотрим на следующем примере.

5. Пусть площадка контакта круговая ( $a=b$ ) и, кроме того,  $v_y=0$ . Найдем первые четыре члена в разложении искомых полей  $\bar{s}$  и  $\bar{t}$ . Первые два члена в разложении  $\bar{s}$  в точности совпадают с  $\bar{s}_1$ . Как указывалось выше, член разложения  $\bar{s}$ , пропорциональный  $\gamma^1$ , совпадает с таковым во 2-ом приближении. Для его нахождения мы по выражению  $\bar{s}_1$  определяем два члена (нулевой и первый) в разложении  $\frac{\bar{s}_1}{|\bar{s}_1|}$ . Результат воздействия оператором  $B$  (он сводится к использованию формул [3] и последующему дифференцированию) на нулевой член совпадает с  $\bar{s}_1$ . Воздействуя на первый член, мы получаем добавок, пропорциональный  $\gamma^2$ . Аналогичным образом с использованием 3-его приближения строится член, пропорциональный  $\gamma^3$ . Параллельно мы получаем и разложение  $\frac{\bar{t}}{|\bar{t}|}$ . Итоговые разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{s}_k}{x} &= 1 - \gamma \frac{\pi}{8m} (4m-3) \frac{x}{a} + \gamma^2 \frac{\pi^2}{256m^2} \left[ -2 + 3 \left( \frac{x}{a} \right)^2 + 3 \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] + \\ &+ \gamma^3 \frac{\pi^3}{(128m)^2 m} \left[ -8(2m-3) \frac{x}{a} + 3(27m-26) \frac{xy^2}{a^3} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{12} (17m-25) \frac{x^3}{a^3} \right] + \dots \end{aligned}$$

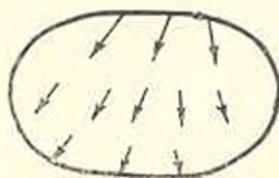
$$\begin{aligned} \frac{s_x}{v_x} = & \gamma \frac{\pi}{8m} \frac{y}{a} + \gamma^2 \frac{\pi^2}{128m^2} \frac{xy}{a^2} + \gamma^3 \frac{\pi^3}{(128m)^2 m} \left\{ [12(2m-3)(2m-1) + \right. \\ & \left. + 4] \frac{y}{a} - \frac{3}{2} [5(8m-3)(2m-3) + 7] \frac{x^2 y}{a^3} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} [40(2m-3)(3m-2) + 51] \frac{y^3}{a^3} \right\} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} = & \gamma \operatorname{sign} v_x \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \left\{ 1 - \gamma^2 \frac{\pi^2}{128m^2} \frac{y^2}{a^2} - \right. \\ & \left. - \gamma^3 \frac{\pi^3}{16(4m)^2} (10m-9) \frac{xy^2}{a^3} \right\} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & \gamma \operatorname{sign} v_x \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \left\{ \gamma \frac{\pi}{8m} \frac{y}{a} + \gamma^2 \frac{\pi^2}{128m^2} (2m-3) \frac{xy}{a^2} + \right. \\ & \left. + \gamma^3 \frac{\pi^3}{m(128m)^2} \left\{ [12(2m-3)(2m-1) + 20] \frac{y}{a} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 32(4m-3)^2 \frac{yx^2}{a^3} - \frac{1}{6} [40(2m-3)(3m-2) + 147] \frac{y^3}{a^3} \right\} \right\} + \dots \end{aligned}$$

Таблица 1

	$\gamma$	$\gamma^2$	$\gamma^3$
$s_x$	1.25	0.07	0.12
$s_y$	0.13	0.013	0.013
$\frac{s_x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	0	0.01	0.015
$\frac{s_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	0.13	0.013	0.091



Фиг. 2.

О вкладе членов приведенных разложений в величины функций  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yz}$  можно судить по табл. 1. В каждом ее столбце стоят оценки максимальных величин коэффициентов при соответствующей степени  $\gamma$  для  $\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$ . Видно, что величина проскальзывания с высокой точностью определяется первым приближением. Величина касательного напряжения близка к нулевому приближению. При точном определении напряжений проскальзывания (напряжения) следует учитывать слагаемые от приближений более высокого порядка.

Качественная картина поля проскальзываний приведена на фиг. 2. Поле проскальзываний симметрично относительно оси  $Ox$ . При постоянном  $y$  величина  $\bar{s}$  является убывающей функцией  $x$ . Величина угла между направлениями проскальзывания и качения возрастает с удалением от оси  $Ox$

являясь осью  $Oy$ . Заметим, что этот угол весьма мал и для тех значений  $\gamma$ , при которых обеспечивается полное проскальзывание, имеет порядок  $1^\circ - 3^\circ$ . Поэтому полная сила трения, действующая со стороны основания на тело весьма близка к своему предельному значению  $\frac{2}{3} \tau ab \varepsilon \varepsilon_0$ .

Всесоюзный научно-исследовательский  
конструкторско-технологический институт  
подшипниковой промышленности

Поступила 4 V 1976

Ա. Ա. ՍՊԵԿՏՐ

ՊՐԻՐՄԱՆ ՏԱՐԱՑԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԻ ԳԵՊԻՒՄ ԵՎ ՄԻՆԻ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Գիտարկվում է դյուրման տարածական կոնտակտային խնդիրը շոք շփումով: Գլորվող մարմինը և հիմքը ունեն միևնույն առաձգական (առկո-  
թյունները ենթադրվում է, որ կոնտակտի ժամանակ կցման տիրույթներ չեն առաջանում: Ստացվել են սահելու արագությունները և շոշափող լարումները կոնտակտի մակերեսի վրա: Մանրամասն ուսումնասիրվում է շրջանաձև կոն-  
տակտի մակերեսի դեպքը:

## ON A VARIANT OF A THREE-DIMENSIONAL ROLLING CONTACT PROBLEM

A. A. SPECTOR

S u m m a r y

A three-dimensional rolling contact problem of dry friction is considered. The rolling body and the foundation are of similar elastic properties. No adhesion is assumed to take place. The slip velocities and tangential tractions are found. The case of a circular contact area is discussed in detail.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский Н. Н. О перематывания упругих тел. Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 1, 1956.
2. Kalker I. I. A strip theory for rolling with slip and spin. Proc. K. Ned. Akad. Wet. Amsterdam (B), 1967, v. 70.
3. Kalker I. I. On the rolling contact of two elastic bodies in presence of dry friction. Thesis Delft. Delft Univ. Technology, 1967.

4. Калкер И. Н., де Патер А. Д. Обзор теории локального скольжения в области контакта с сухим трением. Прикл. механ., 1971, т. VII, в. 5.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., 1955, с. 128.
6. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962, стр. 52.
7. Михайлова-Губенко Н. М. Сингулярные интегралы в пространствах Лишица. Вестник АГУ, 1966, № 1.
8. Гелт Б. И. Разрешимость нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом итераций. Научн. тр. Новочеркасского политехнического института, 1955, № 26.

Л. А. АГЛАОВЯН

О ХАРАКТЕРЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОГРАНСЛОЯ  
 С ВНУТРЕННИМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫМ  
 СОСТОЯНИЕМ ПОЛОСЫ

Напряженно-деформированное состояние в тонких упругих пластинках и оболочках складывается из внутреннего и типа погранслоя напряженно-деформированных состояний. Для вычисления погранслоя и внутреннего напряженного состояния асимптотическим методом [1, 2] необходимо иметь решения некоторых плоских задач для прямоугольной области, продольные стороны которой свободны от напряжений, один торец зашпелен, а на другом торце заданы различные комбинации напряжений и перемещений. В работе получены решения более общих плоских задач, а именно: когда на продольных сторонах прямоугольника заданы значения напряжений, а на торцах — произвольные условия. Полученные решения сравниваются с решениями по классической теории изгиба и растяжения балок и обсуждаются погрешности этой теории. Исследуется характер взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием.

При удовлетворении граничным условиям часто используется принцип Сен-Венана. Если на краю заданы значения перемещений или смешанные граничные условия, то, естественно, встает вопрос, можно ли формально перенести принцип Сен-Венана на перемещения. Под этим мы подразумеваем то обстоятельство, что при определении внутреннего напряженно-деформированного состояния принимается, что перемещения кинематически эквивалентны на краю, если их интегралы по высоте поперечного сечения, имеющие ту же структуру, что и интегралы для усилий и моментов, равны. Такой подход, в частности, используется в [6]. При его справедливости истинные краевые условия можно было бы заменить смягченными. В работе доказывается ошибочность этого подхода и обсуждаются связанные с этим возможные погрешности.

1. Требуется найти решение плоской задачи теории упругости в области  $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, a], |y| \leq h, 2h \ll a\}$ , когда на продольных сторонах прямоугольника  $y = \pm h$  заданы значения напряжений

$$\sigma_{xy} = \pm \frac{\sigma}{h} X(x), \quad \tau_y = \pm Y(x) \quad \text{при } y = \pm h \quad (1.1)$$

а на торцах  $x = 0, a$  — одно из следующих типов условий

$$\sigma_x = \varphi_1(\zeta), \quad \sigma_{xy} = \varphi_2(\zeta), \quad \zeta = y/h \quad (\text{задача 1}) \quad (1.2)$$

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad \sigma_{xy} = \varphi_2(\zeta) \quad (\text{задача 2}) \quad (1.3)$$

$$\sigma_x = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta) \quad (\text{задача 3}) \quad (1.4)$$

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta) \quad \text{задача 4} \quad (1.5)$$

Во всех случаях считаем обеспеченным равновесие прямоугольника как жесткого тела.

Решение поставленных задач есть сумма решений симметричной (растяжение—сжатие) и кососимметричной (изгиб) задач. В симметричной задаче  $u, \sigma_{xx}, \sigma_y$  — четные, а  $v, \sigma_{xy}$  — нечетные по  $y$  функции, в кососимметричной — наоборот. Каждое из этих решений, в свою очередь, складывается из основного проникающего во внутрь прямоугольника решения и решения типа погранслоя. Внутреннее решение строится известным образом и имеет вид [1]

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q^{(s)} \quad (1.6)$$

где  $Q$  — любое из напряжений и безразмерных перемещений  $U = u/a$ ,  $V = v/a$ ,  $q = 2$  для  $\sigma_x$ ,  $u$ ;  $q = 1$  для  $\sigma_{xy}$ ;  $q = 0$  для  $\sigma_y$ ; для  $v$   $q = 1$  в симметричной задаче и  $q = 3$  в кососимметричной;  $\varepsilon = h/a$  — малый параметр. Для компонентов напряжений и перемещений приближения  $s$  можно получить:

симметричная задача

$$\begin{aligned} U^{(s)} &= u^{(s)}(\zeta) + u^{*(s)}, \quad \sigma_x^{(s)} = E \frac{du^{(s)}}{d\zeta} + \sigma_x^{*(s)} \\ V^{(s)} &= -v \frac{du^{(s)}}{d\zeta} \zeta + v^{*(s)}, \quad \sigma_{xy}^{(s)} = -p^{(s)} \zeta + \sigma_{xy}^{*(s)} \\ \sigma_y^{(s)} &= 1/2 (\zeta^2 - 1) \frac{dp^{(s)}}{d\zeta} + Y_1^{(s)} + \sigma_y^{*(s)} - \sigma_y^{*(s)} (\zeta = 1) \\ p^{(s)} &= -X_1^{(s)} + \sigma_{xy}^{*(s)} (\zeta = 1) \\ Eu^{(s)} &= \int_0^1 d\zeta \int_0^1 p^{(s)} d\zeta + C_1^{(s)} \zeta + C_2^{(s)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$X_1^{(0)} = 1/2 (X^+ + X^-), \quad Y_1^{(0)} = 1/2 (Y^+ - Y^-), \quad X_1^{(s)} = Y_1^{(s)} = 0 \quad (s > 0)$$

$$u^{*(s)} = \int_0^1 \left[ \frac{1}{G} \sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial V^{(s-2)}}{\partial \zeta} \right] d\zeta, \quad \sigma_x^{*(s)} = E \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \zeta} + v \sigma_y^{(s-2)} \quad (1.8)$$

$$v^{*(s)} = \int_0^1 \frac{1}{E} [\sigma_y^{(s-2)} - v \sigma_x^{*(s)}] d\zeta, \quad \sigma_{xy}^{*(s)} = - \int_0^1 \frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \zeta} d\zeta$$

$$\sigma_y^{*(s)} = - \int_0^1 \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial \zeta} d\zeta$$

кососимметричная задача

$$V^{(s)} = w^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}, \quad u^{(s)} = -\zeta \frac{dw^{(s)}}{d\xi} + u^{*(s)}$$

$$\sigma_x^{(s)} = \zeta \sigma_{xx}^{*(s)} + \sigma_x^{*(s)}, \quad \sigma_{xy}^{(s)} = 1/2 (\zeta^2 - 1) \sigma_{xy}^{*(s)} + X_2^{(s)} + \sigma_{xy}^{*(s)} - \sigma_{xy}^{*(s)} (\zeta = 1) \quad (1.9)$$

$$\sigma_y^{(s)} = 1/2 \zeta (1 - \zeta^2) q^{(s)} + \zeta Y_2^{(s)} + \sigma_y^{*(s)} - \zeta \sigma_y^{*(s)} (\zeta = 1)$$

где

$$\sigma_{xx}^{*(s)} = -E \frac{d^2 w^{(s)}}{d\xi^2}, \quad \sigma_{xy}^{*(s)} = E \frac{d^3 w^{(s)}}{d\xi^3}$$

$$\frac{1}{3} E w^{(s)} = \int_0^{\xi} d\zeta \int_0^{\zeta} d\zeta \int_0^{\zeta} q^{(s)} d\zeta + C_1^{(s)} \frac{\xi^3}{3!} - C_2^{(s)} \frac{\xi^2}{2!} + C_3^{(s)} \xi + C_4^{(s)} \quad (1.10)$$

$$q^{(s)} = Y_2^{(s)} + \frac{dX_2^{(s)}}{d\xi} - \sigma_y^{*(s)} (\zeta = 1) - \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial \xi} (\zeta = 1)$$

$$v^{*(s)} = \frac{1}{E} \int_0^{\xi} [\sigma_y^{*(s-1)} - \nu \sigma_x^{*(s-2)}] d\zeta, \quad u^{*(s)} = \int_0^{\xi} \left[ -\frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{G} \sigma_{xy}^{*(s-2)} \right] d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)} = E \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi} + \nu \sigma_y^{*(s-2)}, \quad \sigma_{xy}^{*(s)} = - \int_0^{\xi} \frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \zeta} d\zeta, \quad \sigma_y^{*(s)} = - \int_0^{\xi} \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial \zeta} d\zeta$$

$X_2^{(0)} = 1/2 (X^+ - X^-)$ ,  $Y_2^{(0)} = 1/2 (Y^+ + Y^-)$ ,  $X_2^{(s)} = Y_2^{(s)} = 0$  ( $s > 0$ )  
 $Q^{(s)} = 0$  при  $s < 0$ ,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $G$  — модуль сдвига,  $\xi = x/a$ ,  $\zeta = y/h$ . При  $s = 0$  приведенное решение совпадает с решением, получаемым по элементарной классической теории растяжения-сжатия и изгиба балок. Последующие приближения уточняют это решение. Классическая теория не учитывает вовсе и другое решение — погранслоя.

2. Уравнения теории упругости допускают еще и решение типа погранслоя — решение, быстро затухающее при удалении от торцов во внутрь полосы и удовлетворяющее условиям отсутствия напряжений на продольных сторонах. Для нахождения его вблизи торца  $\xi = 0$  в уравнениях плоской задачи вводится новая замена переменной [2—4]  $t = \xi/\varepsilon$ , и решение вновь полученных уравнений отыскивается в виде функций типа погранслоя [5]

$$R_p = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{\lambda_p + s} R_p^{(s)}(\zeta) \exp(-\lambda t) \quad (2.1)$$

где  $R_p$  — любое из напряжений и перемещений погранслоя,  $\lambda_p$  — показатели интенсивности, вещественные числа и подбираются так, чтобы после под-

становки (2.1) в уравнения плоской задачи и удовлетворения условиям отсутствия напряжений при  $z = \pm 1$  получить непротиворечивую рекуррентную систему. Эта цель достигается лишь при  $x_{z_1} = x$ ,  $x_{z_2} = x + 1$ , где  $x$  — произвольное пока число, которое определится из условия взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием.  $\lambda$  — показатель взаимности по свойству погранслоя  $\text{Re } \lambda > 0$ . В результате имеем систему

$$\begin{aligned} -\lambda z_{xp}^{(s)} + \frac{d^2 z_{yp}^{(s)}}{d\zeta^2} &= 0, & -\lambda z_{yp}^{(s)} + \frac{d^2 z_{xp}^{(s)}}{d\zeta^2} &= 0 \\ -\lambda u_p^{(s)} &= \frac{1}{E} [z_{xp}^{(s)} - \nu z_{yp}^{(s)}], & \frac{d v_p^{(s)}}{d\zeta} &= \frac{1}{E} [z_{yp}^{(s)} - \nu z_{xp}^{(s)}] \\ \frac{d u_p^{(s)}}{d\zeta} - \lambda z_p^{(s)} &= \frac{1}{G} z_{yp}^{(s)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.2) все величины можно выразить через  $z_{yp}^{(s)}$ , которая в свою очередь определяется из обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Далее, удовлетворив условиям отсутствия напряжений при  $\zeta = \pm 1$ , окончательно получим

$$z_{yp}^{(s)} = F_n A_n^{(s)}, \quad z_{xp}^{(s)} = \frac{F_n'}{\lambda_n} A_n^{(s)}, \quad z_{xp}^{(s)} = \frac{F_n''}{\lambda_n^2} A_n^{(s)} \quad (2.3)$$

$$u_p^{(s)} = \frac{1}{E} \left[ -\frac{F_n'}{\lambda_n^2} + \frac{\nu}{\lambda_n} F_n \right] A_n^{(s)}, \quad v_p^{(s)} = -\frac{1}{\lambda_n^2 E} \left[ \frac{F_n''}{\lambda_n^2} + (2 + \nu) F_n \right] A_n^{(s)}$$

в симметричной задаче

$$F_n(\zeta) = \zeta \sin \lambda_n \zeta - \text{tg } \lambda_n \cos \lambda_n \zeta; \quad \lambda_n - \text{корень уравнения } \sin 2i + 2i = 0 \quad (2.4)$$

а в кососимметричной

$$F_n(\zeta) = \sin \lambda_n \zeta - \zeta \text{tg } \lambda_n \cos \lambda_n \zeta; \quad \lambda_n - \text{корень } \sin 2i - 2i = 0 \quad (2.5)$$

Считаем, что в (2.3) и в дальнейшем там, где какая-либо функция умножается на произвол погранслоя  $A_n^{(s)}$ , производится суммирование по всем значениям немого индекса  $n$ , соответствующим всем корням  $\lambda_n$  с  $\text{Re } \lambda_n > 0$ .

Если корни трансцендентных уравнений  $\sin 2i - 2i = 0$  расположить в порядке возрастания их вещественной части, то действительная часть первого корня, соответствующая  $\text{Re } \lambda_n > 0$ , будет характеризовать быстроту затухания погранслоя. Соответственно  $\text{Re } \lambda_1 \approx 2.1062$ ,  $\text{Re } \lambda_2 \approx 3.75$  [7]. Следовательно, для того, чтобы напряженно-деформированное состояние в прямоугольнике можно было расчленить на основное и типа погранслоя, его продольный размер должен быть таким, чтобы величина  $0 \left( \exp \left( -\frac{a}{h} \text{Re } \lambda_1 \right) \right)$  была достаточно мала по сравнению с единицей.

Легко убедиться в том, что решение (2.1) для каждого « $N$ » является точным. Оно типа однородного решения П. Ф. Палковича. Функции  $F_n$ , через которые выражено решение типа погранслоя, удовлетворяют условию обобщенной ортогональности П. Ф. Палковича [8]

$$\int_0^1 [F_n F_k - \lambda^2 \lambda_k^2 F_n F_k] d\xi = 0 \quad (n \neq k) \quad (2.6)$$

Аналогичным образом строится погранслоя вблизи противоположного торца  $\xi = 1$ . Если отсчет вести от торца  $x = 0$ , данные  $R_p^{(2)}$  этого погранслоя можно получить из приведенного формальной заменой  $t$  на  $t_1 = (1/e - t) = (a - x)/h$ . Приведенные в работе формулы относятся к плоскому напряженному состоянию; при необходимости данные для плоской деформации можно получить из них известной заменой  $E$  и  $\nu$  соответственно на  $E/(1 - \nu^2)$  и  $\nu/(1 - \nu)$ .

Напряжения  $\sigma_{xp}$ ,  $\sigma_{xyp}$  погранслоя в произвольном сечении обладают важным свойством самоуравновешенности по высоте, то есть

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{xp} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \xi \sigma_{xp} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma_{xyp} d\xi = 0 \quad (2.7)$$

В справедливости (2.7) легко убедиться, если, используя (2.3), непосредственно вычислить эти интегралы и учесть, что

$$F_n(\pm 1) = F_n'(\pm 1) = 0 \quad (2.8)$$

Средние по высоте перемещения и угол поворота погранслоя отличны от нуля. Из сказанного следует, что самоуравновешенным напряжениям  $\sigma_{xp}$ ,  $\sigma_{xyp}$  вообще соответствуют несамоуравновешенные (в смысле, оговоренном в предисловии) перемещения. Поэтому, если напряжения  $\sigma_{xp}$  и  $\sigma_{xyp}$  могут на торцах равняться лишь самоуравновешенным нагрузкам, то перемещения — таким перемещениям (вообще несамоуравновешенным), которым соответствуют самоуравновешенные по высоте напряжения.

Решение поставленных задач ищем в виде

$$J = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \quad (2.9)$$

(2.9) содержит достаточное число произвольных постоянных для удовлетворения торцевым условиям (1.2) — (1.5).

3. В случае задачи 1, подставив (2.9) в (1.2), учитывая (1.6), (2.1), а также, что при  $\xi = 0$  проявляет себя погранслоя  $R_p^{(1)}$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(s)} + \sigma_x^{(s+2)} &= \frac{\sigma_x^{(s+1)}}{\xi} \\ \sigma_{xyp}^{(s)} + \sigma_{xp}^{(s+2)} &= \frac{\sigma_x^{(s+1)}}{\xi} \quad \text{при } \xi = 0 \quad (r = 0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Значение  $\kappa$  надо подобрать так, чтобы вытекающая из (3.1) последовательность граничных соотношений позволяла определить произвольные постоянные в решениях как внутренней задачи, так и погранслоя, то есть условия, вытекающие из (3.1), не должны противоречить тем дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют величины основного и типа погранслоя итерационных процессов. Такое значение  $\kappa$  назовем непротиворечивым. В нашем случае эта цель достигается, если  $\kappa = -2$ . Запишем (3.1) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(s)} &= \varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{(s)} (\xi = 0) \\ \sigma_{xyp}^{(s)} &= \varphi_2^{(s-2)} - \sigma_{xy}^{(s)} (\xi = 0) \end{aligned} \quad \text{при } t = 0 \quad (3.2)$$

Правые части (3.2) не могут быть произвольными, они должны удовлетворять условиям (2.7). В симметричной задаче тождественно выполняются два последних условия (2.7), а в задаче изгиба—первое условие. Подчиняя (3.2) остальным условиям, найдем значения постоянных внутреннего напряженного состояния

симметричная задача

$$C_1^{(s)} = \int_0^1 [\varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{(s)} (\xi = 0)] d\xi \quad (3.3)$$

кососимметричная задача

$$C_1^{(s)} = [X_2^{(s)} - \sigma_{xy}^{(s)} (\zeta = 1)]_{\zeta=0} + \int_0^1 \sigma_{xy}^{(s)} (0, \zeta) d\zeta - \int_0^1 \varphi_2^{(s-1)} d\zeta \quad (3.4)$$

$$C_2^{(s)} = \int_0^1 \zeta [\varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{(s)} (\xi = 0)] d\zeta$$

$$(\varphi_1^{(0)} = \varphi_1, \quad \varphi_2^{(0)} = \varphi_2, \quad \sigma_1^{(s)} - \sigma_2^{(s)} = 0) \quad (s \geq 0)$$

Оставшиеся произвольные постоянные в решении внутренней задачи должны быть определены из условий на противоположном торце. В частности, если на противоположном торце наложены условия, аналогичные (1.2), мы получим те же формулы для  $C_i$ , что и (3.3), (3.4), разница будет в правых частях (3.2), то есть лишь в погранслоях. Подставив (3.3) и (3.4) в (1.6)—(1.10), найдем решение внутренней задачи. Отметим, что из этого решения как частные случаи получаются все те решения, которые получены у С. П. Тимошенко [9] при помощи полиномов различных степеней.

После нахождения произвольных постоянных внутренней задачи становятся известными правые части условий (3.2). В свою очередь, совокупность функций, по которой представлено решение погранслоя, по теореме М. В. Келдыша составляет двукратно полную систему, так как краевая задача, откуда определялось (2.3), аналогична обобщенной краевой задаче на собственные значения, рассмотренной М. В. Келдышем [10]. Поэтому этих условий достаточно для определения постоянных погранслоя. Существует

много способов их определения. Их нахождение, например, можно свести к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, если разложить коэффициент при  $A_n^{(s)}$  в ряд Фурье по некоторой полной ортонормальной системе функций [11]. Матрица этой системы одна и та же для всех приближений, для каждого приближения меняется лишь вид свободных членов. Приближенный способ нахождения произвольных постоянных погранслоя указан у А. И. Лурье [12], стр. 357.

В общем случае правая часть (3.2) отлична от нуля, начиная с  $s=1$ . Поэтому фактический порядок напряжений типа погранслоя  $O(\varepsilon^{-1})$ , а перемещений  $O(\varepsilon^0)$ . Сравнивая с (1.6), можно заключить, что перемещениями типа погранслоя можно пренебречь по сравнению с перемещениями основной задачи. Напряжениями же погранслоя нельзя пренебречь.

Поскольку в случае первой краевой задачи произвольные постоянные внутренней задачи полностью определялись из интегральных граничных условий, а погранслоя выражаются самоуравновешенной частью напряжений, то отсюда следует справедливость принципа Сен-Венана для плоских задач рассмотренного класса.

4. В случае задачи 2, подставив (2.9) в (1.3), получим непротиворечивые условия, если  $\kappa = -3$ . Тогда условия (1.3) примут вид

$$\begin{aligned} au_p^{(s)} = f_1^{(s)}, \quad f_1^{(s)} = \varphi_1^{(s-2)} - au^{(s)} (\xi = 0) \\ \varphi_{\text{нр}}^{(s)} = f_2^{(s)}, \quad f_2^{(s)} = \varphi_2^{(s-2)} - \varphi_{\text{нр}}^{(s-2)} (\xi = 0) \end{aligned} \quad \text{при } l = 0 \quad (4.1)$$

Функции  $f_1^{(s)}$ ,  $f_2^{(s)}$ , как было отмечено выше, не могут быть произвольными, они должны удовлетворять условиям существования затухающего решения в полосе [13, 14] (условиям согласованности погранслоя с внутренним напряженным состоянием). Для плоского напряженного состояния в симметричной задаче имеется одно условие

$$E \int_0^1 f_1 d\xi + \nu h \int_0^1 f_2 d\xi = 0 \quad (4.2)$$

а в задаче изгиба—два:

$$\int_0^1 f_2 d\xi = 0, \quad 2E \int_0^1 f_1 d\xi + \nu h \int_0^1 f_2 d\xi = 0 \quad (4.3)$$

Удовлетворяя условиям (4.2) и (4.3), найдем симметричная задача

$$C_2^{(s)} = E \int_0^1 (\varphi_1^{(s-2)}/a) d\xi + \nu \int_0^1 \xi [\varphi_2^{(s-2)} - \varphi_{\text{нр}}^{(s-2)} (\xi = 0)] d\xi - E \int_0^1 u^{(s)} (\xi = 0) d\xi \quad (4.4)$$

несимметричная задача

$$C_1^{(s)} = [X_2^{(s)} - \sigma_{xy}^{(s)}(\zeta = 1)]_{\zeta=0} + \int_0^1 [\sigma_{xy}^{(s)}(0, \zeta) - \varphi_2^{(s-1)}] d\zeta$$

$$C_1^{(s)} = E \int_0^1 \zeta [u^{(s)}(\zeta = 0) - \varphi_1^{(s-2)}/\alpha] d\zeta - \frac{\nu}{2} \int_0^1 \zeta^2 [\varphi_2^{(s-3)} - \sigma_{xy}^{(s-3)}(\zeta = 0)] d\zeta$$
(4.5)

Оставшиеся неопределенными постоянные  $C_1^{(s)}$  симметричной задачи и  $C_2^{(s)}$ ,  $C_4^{(s)}$  задачи изгиба должны быть найдены из условий на противоположном торце. К примеру, если при  $\zeta = 1$  тоже заданы смешанные условия

$$u(1, \zeta) = \psi_1(\zeta), \quad \sigma_{xy}(1, \zeta) = \psi_2(\zeta) \quad (4.6)$$

то в симметричной задаче, поступив аналогичным образом, будем иметь

$$C_1^{(s)} = E \int_0^1 [\psi_1^{(s-2)}/\alpha - u^{(s)}(1, \zeta)] d\zeta + \nu \int_0^1 \zeta [\psi_2^{(s-4)} - \sigma_{xy}^{(s-3)}(\zeta = 1)] d\zeta -$$

$$- \int_0^1 d\zeta \int_0^{\zeta} p^{(s)} d\zeta - C_2^{(s)}$$
(4.7)

В задаче изгиба из условий (4.6) определяется значение  $C_2^{(s)}$ , а  $C_4^{(s)}$  будет характеризовать жесткое смещение.

Вернувшись снова к условиям (4.1), правые части которых уже известные величины, используя (2.3) и обобщенную ортогональность П. Ф. Папковича (2.6), находим произвольное постоянное в решении погранслоя

$$A_n^{(s)} = \frac{\lambda_n^3}{\Delta_n} \int_0^1 [\Psi_1^{(s)} F_n^+ - \lambda_n^2 F_n \Psi_2^{(s)}] d\zeta \quad (4.8)$$

где

$$\Delta_n = \int_0^1 [(F_n^-)^2 - \lambda_n^4 F_n^2] d\zeta \quad (4.9)$$

$$\Psi_1^{(s)}(\zeta) = -\frac{E}{\alpha} f_1^{(s)} + \nu \Psi_2^{(s)}, \quad \Psi_2^{(s)} = \int_0^{\zeta} f_2^{(s)} d\zeta - \int_0^1 f_2^{(s)} d\zeta \quad (4.10)$$

Следовательно, в задаче 2 для каждого  $s$  имеем замкнутое решение как внутренней задачи, так и погранслоя. Повторив ту же процедуру, что и в [15], учитывая (4.8), легко показать сходимость рядов (2.3).  $A_n^{(0)} = A_n^{(1)} = 0$ ,  $A_n^{(2)} \neq 0$ , поэтому напряжения погранслоя порядка  $O(\varepsilon^{-1})$ , а перемещения  $O(\varepsilon^2)$ .

Если отбросить вторые слагаемые в условиях (4.2) и (4.3), то это равнозначно тому, что мы при определении произвольных постоянных внутренней задачи формально считаем верным принцип Сен-Венана для перемещений тоже. Посмотрим как влияют эти члены на значения постоянных внутренней задачи. Они влияют на значения  $C_1^{(s)}$  и  $C_2^{(s)}$  и это влияние характеризуется вторыми интегралами в (4.4) и (4.5), которые отличны от нуля, начиная с  $s=3$ . При  $s < 3$  значения этих постоянных определяются из условий равенства интегралов от перемещений, с другой стороны,  $s < 3$  соответствует расчету методами сопротивления материалов, а при  $s \geq 3$  учитывается влияние поперечного сдвига и обжатия. Таким образом, если расчет вести на уровне точности гипотезы плоских сечений, то граничные условия, накладываемые на значения перемещений можно удовлетворить интегрально, при более точном расчете необходимо вводить коррективы и в граничные условия. Итак, принцип Сен-Венана в том виде, который имеет место для напряжений, строго не имеет места для перемещений.

5. В задаче 3 после подстановки (2.9) в (1.4) получим непротиворечивые граничные условия при  $x = -2$  (симметричная задача) и  $x = -4$  (кососимметричная задача). В результате имеем условия

симметричная задача

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(s)} = f_1^{(s)}, & \quad f_1^{(s)} = \varphi_1^{(s-2)} - \sigma_2^{(s)} (\xi = 0) \\ \alpha v_p^{(s)} = f_2^{(s)}, & \quad f_2^{(s)} = \varphi_2^{(s-1)} - \alpha v^{(s)} (\xi = 0) \end{aligned} \quad \text{при } t = 0 \quad (5.1)$$

кососимметричная задача

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(s)} = \psi_1^{(s)}, & \quad \psi_1^{(s)} = -\sigma_2^{(s-2)} (\xi = 0) + \varphi_1^{(s-4)} \\ \alpha v_p^{(s)} = \psi_2^{(s)}, & \quad \psi_2^{(s)} = -\alpha v^{(s)} (\xi = 0) + \varphi_2^{(s-2)} \end{aligned} \quad \text{при } t = 0 \quad (5.2)$$

Подчинив правую часть (5.1) единственному условию согласованности

$$\int_{-1}^1 \sigma_{r\theta} d\xi = 0 \quad (5.3)$$

найдем

$$C_1^{(s)} = \int_0^1 [\varphi_1^{(s-2)} - \sigma_2^{(s)} (\xi = 0)] d\xi \quad (5.4)$$

а из условий согласованности для кососимметричной задачи [13]

$$\int_0^1 \sigma_{r\theta} d\xi = 0 \quad (5.5)$$

$$(2 + \nu) h \int_0^1 \sigma_2 f_1 d\xi + 3E \int_0^1 (1 - \xi^2) f_2 d\xi = 0$$

с учетом (5.2) имеем

$$C_2^{(s)} = \int_0^1 \zeta_1^{(s-2)} d\zeta - \int_0^1 \zeta_2^{(s)}(0, \zeta) d\zeta$$

$$C_4^{(s)} = \frac{E}{2} \int_0^1 (1 - \zeta^2) [\zeta_2^{(s-3)} a - v^{(s)}(0, \zeta)] d\zeta \quad (5.6)$$

$$- \frac{2 + \nu}{10} C_2^{(s-3)} + \frac{2 + \nu}{6} \int_0^1 \zeta^3 [\zeta_1^{(s-5)} - \zeta_1^{(s-3)}(0, \zeta)] d\zeta$$

В частности,

$$C_2^{(2)} = C_2^{(1)} = C_4^{(0)} = C_4^{(1)} = C_4^{(2)} = 0 \quad (5.7)$$

$$C_2^{(2s)} = \int_0^1 \zeta_1 d\zeta, \quad C_4^{(3)} = \frac{E}{2} \int_0^1 (1 - \zeta^2) (\zeta_2/a) d\zeta$$

Влияние граничного значения  $\varphi_1$  на значение  $C_4$  сказывается при высоких приближениях, то есть в самом грубом приближении торцевые условия можно удовлетворить интегрально, однако, условие, накладываемое на перемещение  $v$ , должно быть выполнено с «весом»  $(1 - \zeta^2)$ . И в этом случае принцип Сен-Венана, формально перенесенный на случай задания торцевых перемещений, перестает быть справедливым. Определив постоянные внутренней задачи, из (5.1), (5.2), используя затем (2.3) и (2.6), находим

$$A_n^{(s)} = \frac{\lambda_n^4}{\Delta_n} \int_0^1 [F_n^* \Psi_2^{(s)} - \lambda_n^2 F_n \Psi_1^{(s)}] d\zeta \quad (5.8)$$

$$\Psi_1^{(s)} = \int_0^1 \bar{f}_1^{(s)} d\zeta - \int_0^1 \bar{f}_1^{(s)} d\zeta, \quad \bar{f}_1^{(s)} = \int_0^1 f_1^{(s)} d\zeta - \int_0^1 f_1^{(s)} d\zeta; \quad (f_1, \varphi_1) \quad (5.9)$$

$$\Psi_2^{(s)} = \int_0^1 \bar{f}_2^{(s)} d\zeta, \quad \bar{f}_2^{(s)} = -\frac{E}{\alpha} f_2^{(s)} - (2 + \nu) \bar{f}_1^{(s)}; \quad (f_2, \varphi_2)$$

Легко показать, что в симметричной задаче  $R_\sigma^{(0)} = 0$ ,  $R_\sigma^{(1)} \neq 0$ , а в косимметричной  $R_\sigma^{(0)} = R_\sigma^{(1)} = R_\sigma^{(2)} = 0$ ,  $R_\sigma^{(3)} \neq 0$ , поэтому в обоих случаях напряжения пограничного порядка  $O(\varepsilon^{-1})$ , а перемещения  $-O(\varepsilon)$ . Порядок соответствующих величин внутренней задачи приведен в п. 1. Конечно, существуют частные случаи, когда в силу обращения в нуль тех или иных компонентов мы получаем иную асимптотику.

6. Рассмотрим случай, когда при  $\xi = 0$  имеем условия (1.5), а на противоположном конце  $\xi = 1$  заданы аналогичные условия

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta) \quad \text{при } \xi = 1 \quad (6.1)$$

В силу того, что условия существования затухающего решения в этом случае не имеют простого вида, для определения произвольных постоянных внутренней задачи и пограничья используется вариационное уравнение Кастилиано [16]. Учитывая, что в нашем случае все уравнения плоской задачи и статические граничные условия удовлетворены, вариационное уравнение Кастилиано примет вид

$$\int_{-1}^{+1} [(u - \bar{u}_1) \delta z_1 + (v - \bar{v}_1) \delta z_{1,y}]_{-0} d\zeta + \int_{-1}^{+1} [(u - \bar{u}_2) \delta z_2 + (v - \bar{v}_2) \delta z_{2,y}]_{-1} d\zeta = 0 \quad (6.2)$$

Подставив значения  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_y$  в (6.2), приравняв нулю коэффициенты при вариациях  $\delta C_1^{(s)}, \delta C_2^{(s)}, \delta A_n^{(s)}, \delta B_n^{(s)}$  и присоединив к полученным уравнениям условия отсутствия жесткого смещения  $u = v = \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0$  при  $\xi = 1, \zeta = 0$  (закреплен центр тяжести и вертикальный элемент торца  $\xi = 1$ ), получим замкнутую алгебраическую систему относительно произвольных постоянных внутренней задачи и пограничья, которая будет непротиворечивой при  $\alpha = -3$ . Для симметричной задачи она имеет вид

$$C_1^{(s)} + a_n (A_n^{(s)} + B_n^{(s)}) + a_0^{(s)} = 0 \quad (6.3)$$

$$C_1^{(s)} + C_2^{(s)} + E u_n(\zeta = 0) B_n^{(s)} + E u_n^{(s)}(1, 0) - \int_0^1 d\zeta \int_0^{\xi} p^{(s)} d\zeta = 0$$

$$b_{nm} A_n^{(s)} - b_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (6.4)$$

$$b_{nm} B_n^{(s)} - c_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (6.5)$$

где

$$a_n = E \int_n^{\frac{1}{2}} u_n d\zeta, \quad u_0^{(s)} = \frac{1}{E} \int_0^{\xi} d\zeta \int_0^{\xi} p^{(s)} d\zeta$$

$$a_0^{(s)} = E \int_0^1 [u^{(s)}(\zeta = 0) + u^{(s)}(\zeta = 1) + u_0^{(s)}(\zeta = 1)] d\zeta - \\ - \frac{E}{\alpha} \int_0^1 [\bar{z}_1^{(s-2)} + \bar{z}_1^{(s-2)}] d\zeta$$

$$b_{nm} = \int_0^1 (u_n \bar{z}_m + v_n \bar{z}_m) d\zeta, \quad v_0^{(s)} = \int_0^{\xi} p^{(s)} d\zeta$$

$$\begin{aligned}
b_{0m}^{(s)} &= \int_0^1 [u^{(s)}(\xi=0) z_m + v^{(s-1)}(\xi=0) z_m] d\xi - \\
&- \frac{\nu}{E} \int_0^1 z_m d\xi C_1^{(s-1)} - \int_0^1 [z_m z_1^{(s-2)}/a + z_m z_2^{(s-2)}/a] d\xi \\
c_{0m}^{(s)} &= \int_0^1 [(u^{(s)}(\xi=1) + u_0^{(s)}(\xi=1)) z_m + (v^{(s-1)}(\xi=1) + \\
&+ v_0^{(s-1)}(\xi=1)) z_m] d\xi - \frac{\nu}{E} \int_0^1 z_m d\xi C_1^{(s-1)} - \int_0^1 (z_m z_1^{(s-2)} + z_m z_2^{(s-2)}) d\xi
\end{aligned} \tag{6.6}$$

через  $\lambda_n, \tau_n, \mu_n, \nu_n$  обозначены коэффициенты при  $A_n^{(s)}$  в выражениях соответственно для  $z_{xp}, z_{yp}, u_p, v_p$ , определяемые формулой (2.3),  $B_n^{(s)}$  — произвольная постоянная погранслоя, соответствующая краю  $\xi=1$ .  $A_n^{(s)} - B_n^{(s)} = 0$ , если  $u_0^{(s)}(1) = 0$ , и в исходном приближении погранслоя не влияет на значения постоянных внутренней задачи, однако это не означает, что погранслоем можно пренебречь вообще. В самом грубом приближении им можно пренебречь, когда определяется внутреннее напряженное состояние, вблизи же края погранслоя имеет такую же интенсивность, что и основное напряженное состояние (напряжения порядка  $O(s^{-2})$ , перемещения  $O(s^{-1})$ ). Если же  $u_0^{(s)}(1) \neq 0$ , то из (6.3) видно, что погранслоем непосредственно влияет на значения произвольных постоянных внутренней задачи. В общем, из (6.3) следует

$$C_1^{(s)} = -a^{(s)}, \quad C_2^{(s)} = a^{(s)} - b^{(s)} \tag{6.7}$$

где

$$\begin{aligned}
a^{(s)} &= u_n^{(s)} + u_n (A_n^{(s)} + B_n^{(s)}) \\
b^{(s)} &= E \left[ u_n(0) B_n^{(s)} + u^{(s)}(1, 0) + \frac{1}{E} \int_0^1 d\xi \int_0^\xi p^{(s)} d\xi \right]
\end{aligned} \tag{6.8}$$

$A_n^{(s)}, B_n^{(s)}$  определяются из систем (6.4), (6.5).

Поступив аналогичным образом, для кососимметричного случая (изгиб) получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} C_1^{(s)} - C_2^{(s)} + a^{(s)} &= 0 \\
C_1^{(s)} - 2C_2^{(s)} + b^{(s)} &= 0 \\
C_1^{(s)} - 3C_2^{(s)} + 6C_3^{(s)} + 6C_4^{(s)} + C^{(s)} &= 0 \\
C_1^{(s)} - 2C_2^{(s)} + 2C_3^{(s)} + d^{(s)} &= 0
\end{aligned} \tag{6.9}$$



$$d_{\delta m}^{(s)} = \int_0^1 (\tau_m u^{2(s)}(\xi = 1) + \tau_m v^{2(s+1)}(\xi = 1)) d\xi - \\ - \int_0^1 (\tau_m \phi_{11}^{(s-2)} + \tau_m \phi_{22}^{(s-2)}) d\xi$$

откуда следует

$$C_1^{(s)} = -6a^{(s)} + 3b^{(s)}$$

$$C_2^{(s)} = -3a^{(s)} + 2b^{(s)}$$

$$C_3^{(s)} = -\frac{1}{2}(a^{(s)} - b^{(s)})$$

$$C_4^{(s)} = -\frac{1}{2}\left(a^{(s)} + \frac{1}{3}c^{(s)} - d^{(s)}\right)$$

Случай, когда один торец заземлен, а на другом торце заданы условия типа (1.2)—(1.4), рассматриваются аналогичным образом. Часть произвольных постоянных определяется из условий при  $\xi=0$  описанным в п. 3—п. 5 образом, а остальная часть—из вариационного уравнения Кастильяно.

Автор весьма признателен А. А. Гольденвейзеру за обсуждение данной работы и ценные советы.

Институт механики АН  
Армянской ССР

Поступила 17 XI 1975

Լ. Ա. ԱՂԱՂՈՎՅԱՆ

ՇԵՐՏԻ ՆԵՐՔԻՆ ԸԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՈՒ ԴԵՖՈՐՄԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՀԵՏ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ  
ՇԵՐՏԻ ՓՈՆԵԱԶԳԻՑՈՒԹՅԱՆ ԲՆՈՒՅԹԻ ՄԱՍԻՆ

Ու մ փ ո փ ու լ մ

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծվում է տուածղականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ նրա երկայնակուն կողմերի վրա սրվում են լարումների արժեքները, իսկ ճակատների վրա՝ առաջին, երկրորդ, կամ խառը տիպի եզրային պայմաններ:

Ստացված լուծումները համեմատվում են հեծանների ծոման և ձգման դասական տեսությամբ ստացվող լուծումների հետ և բննարկվում է այդ տեսության սխալը:

Հետազոտվում է սահմանային շերտի փոխազդեցության բնույթը ներքին լարվածային ու դեֆորմացիոն վիճակի հետ:

Քննության են ենթարկվում այն սխալները, որոնք կապված են Ռեն-Վենանի սկզբունքի ձևական կիրառման հետ այն դեպքերում, երբ եզրում տրվում են տեղափոխությունների արժեքները, կամ խառը եզրային պայմաններ:

# ON INTERACTION OF THE BOUNDARY LAYER WITH THE INTERNAL STRESS-STRAIN STATE OF A STRIP

L. A. AGALOVIAN

## S u m m a r y

By the asymptotic method the plane problem in the theory of elasticity is solved for a rectangle on whose longitudinal sides the values of stresses, and on the face planes the conditions of the type of the first, second and mixed boundary-value problems are given. The resultant solutions are compared with those by the classical theory of bending and tension of beams, and the errors of the theory are discussed. The errors due to formal extensions of St. Venant's principle to the cases, where the values of displacements of mixed boundary conditions are given, are examined.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдсвейгер А. А. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ. 1962, т. 26, вып. 4.
2. Гольдсвейгер А. А. Пограничной и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки. ПММ. 1969, т. 33, вып. 6.
3. Вашик М. И. и Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. УМН. 1960, т. 15, вып. 3 (93).
4. Васильева А. Б., Бугулов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
5. Агаловян Л. А. О пограничном ортотропных пластинок. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 2.
6. Ruten H. S. Asymptotic approximation in the three-dimensional theory of thin and thick elastic shells. Nederlandse boekdrukk industrie N. Y., S-Hertogenbosch. 1971.
7. Папкоуич П. Ф. Строительная механика корабля, т. II. М.—Л., Судпромгиз. 1941.
8. Папкоуич П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
9. Тимошенко С. П. Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
10. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 1.
11. Gaydon F. A., Shepherd W. M. Generalized plane stress in a semi-infinite strip under arbitrary end-load. Proceedings of the Royal Society, 1964, Series A, vol. 281, No. 1385.
12. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
13. Гусейн-Заде М. И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ. 1965, т. 29, вып. 2.
14. Гусейн-Заде М. И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ. 1965, т. 29, вып. 4.
15. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папкоуичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными краями и о некоторых его обобщениях. ПММ. 1953, т. 17, вып. 2.
16. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М., Гостехиздат, 1947.

Г. А. АВЕТИСЯН

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ОДНОРОДНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО  
СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В УСЛОВИЯХ  
НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается неустановившаяся ползучесть по теории течения изгибаемого поперечной силой однородного призматического стержня с сечением, имеющим ось симметрии. Один из торцов стержня заделан. Изгибающая сила приложена к другому торцу стержня и направлена по его оси симметрии. На торцах стержня условия удовлетворяются в смысле Сен-Венана. В качестве конкретного примера рассмотрен поперечный изгиб стержня прямоугольного сечения.

Задача о чистом изгибе стержня, находящегося в условиях неустановившейся ползучести, исследована на основании различных теорий ползучести [1—4]. В работе [5] рассмотрена неустановившаяся ползучесть призматического стержня под комбинированным действием изгибающего и крутящего моментов и продольной силы. Задача о поперечном изгибе составного стержня решена [6] с учетом линейной ползучести [7] материалов. Изгиб железобетонной балки с учетом ползучести сжатой зоны бетона рассмотрен в работе [8]. Релаксация напряжений в изгибаемом стержне, находящемся в условиях неустановившейся ползучести, исследована в работе [9]. Поперечный изгиб однородного стержня с учетом ползучести материалов при помощи осреднения рассмотрен в [10].

1. Начало координат поместим в центре тяжести заделанного торца призматического стержня, направляя ось  $z$  параллельно образующим боковой поверхности стержня, а ось  $x$  — по оси симметрии сечения. К свободному концу стержня по оси симметрии приложена сила  $P$ .

Материал стержня принимается несжимаемым и в соотношении между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций пренебрегаются касательные напряжения.

Для распределения скоростей осевой деформации примем выражение

$$v_{zz} = A_0(z, t) x + B_0(z, t) \quad (1.1)$$

где  $A_0(z, t)$  и  $B_0(z, t)$  — пока неизвестные функции.

Соотношение (1.1) является следствием геометрической гипотезы плоских сечений.

Примем также, что

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \tau_{xy} = 0 \quad (1.2)$$

Имеем условие несжимаемости материала стержня

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0 \quad (1.3)$$

Воспользуемся квазилинейными уравнениями неустановившейся ползучести [11]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{v(\sigma_0, t)}{\sigma_0} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — тензоры напряжений и скоростей деформаций,  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{xx}}{3}$ ,  $\varepsilon_{ij}^0$  — символ Кронекера, а  $\sigma_0$  — интенсивность напряжений

$$\sigma_0 = 1 \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3(\sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2)} \quad (1.5)$$

Воспользуемся степенным законом ползучести

$$v(\sigma_0, t) = A(t) \sigma_0^n \quad (1.6)$$

где  $A(t) > 0$  и зависит также от температуры.

На основании (1.2) и (1.4) получим

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{yy} = -\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{zz} = -\frac{1}{2} [A_0(z, t) x + B_0(z, t)] \quad (1.7)$$

При помощи (1.2), (1.4) — (1.7) находим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{A(t)} [\varepsilon_{xx}^0 + 3(\varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0)]^{\frac{1-n}{n}} [A_0(z, t) x + B_0(z, t)] \quad (1.8)$$

Учитывая, что в зоне интенсивного деформирования стержня  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{yy}$  малы по сравнению с  $\varepsilon_{zz}$ , при помощи (1.5) и (1.8) получаем

$$\sigma_{zz} = [A(t)]^{-\frac{1}{n}} |A_0(z, t) x + B_0(z, t)|^{\frac{1}{n}-1} [A_0(z, t) x + B_0(z, t)] \quad (1.9)$$

$$\sigma_0 = |\sigma_{zz}| = [A(t)]^{-\frac{1}{n}} |A_0(z, t) x + B_0(z, t)|^{\frac{1}{n}} \quad (1.10)$$

Функции  $A_0(z, t)$  и  $B_0(z, t)$  определяются из условий равновесия части стержня, лежащего между произвольным и торцевым сечениями

$$\int_0^x \int_0^y \sigma_{zz} x dx dy = P(l-z) \quad (1.11)$$

$$\int_0^x \int_0^y \sigma_{zz} dx dy = 0$$

Используя здесь (1.9), находим

$$[A(t)]^{-\frac{1}{n}} \int_0^x \int_0^y |A_0(z, t) x + B_0(z, t)|^{\frac{1}{n}-1} [A_0(z, t) x + B_0(z, t)] x dx dy = P(l-z) \quad (1.12)$$

Это условие для произвольного  $z$  будет выполняться, если

$$A_0(z, t) = \alpha(t) B_0(z, t) = \gamma(t)(l-z)^n \quad (\gamma(t) > 0) \quad (1.13)$$

Внося (1.13) в (1.12) и приравнявая коэффициенты при  $(l-z)$ , получаем уравнение

$$[A(t)]^{-\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \iint \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| x \right. dx dy = P \quad (1.14)$$

Из второго уравнения (1.11) с учетом (1.9) и (1.13) будем иметь

$$\iint_Q \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \right. dx dy = 0 \quad (1.15)$$

Из (1.14) и (1.15) определяются  $\alpha(t)$  и  $\gamma(t)$ , следовательно, и  $A_0(z, t)$  и  $B_0(z, t)$ .

Тогда из (1.9), имея ввиду (1.13), получим

$$\sigma_{zz} = [A(t)]^{-\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \right. (l-z) \quad (1.16)$$

2. Уравнения равновесия для рассматриваемого случая будут

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - [A(t)]^{-\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \right. = 0$$

Первые два уравнения (2.1) показывают, что касательные напряжения не зависят от координаты  $z$ .

Введя функцию напряжений  $F(x, y, t)$ , удовлетворяем третьему уравнению (2.1)

$$\tau_{yz} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{n}{1+n} [A(t)]^{-\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \right. + f(y) \\ \tau_{xz} = - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2.2)$$

где  $f(y)$  — произвольная функция.

Из условия совместности скоростей деформаций с учетом (1.7) и (1.13) находим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = n \gamma(t) (l-z)^{n-1} \quad (2.4)$$

Два соотношения, к которым приводятся остальные условия совместности скоростей деформаций, удовлетворяются с точностью отношения порядков  $\gamma_{xy}$  и  $\gamma_{xz}$ .

Интегрируя (2.3) и (2.4), получим

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -n \gamma(t) (l-z)^{n-1} y + C(z, t) \quad (2.5)$$

где  $C(z, t)$  — произвольная функция интегрирования.

Из (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{3}{2} \frac{v(\sigma_0, t)}{\sigma_0} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{3}{2} \frac{v(\sigma_0, t)}{\sigma_0} \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2.6)$$

На основании (1.6), (1.10) и (1.13) находим

$$\frac{v(\sigma_0, t)}{\sigma_0} = [A(t)]^{\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{n-1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{n-1}{n}} (l-z)^{n-1} \quad (2.7)$$

При помощи (2.2) и (2.5)–(2.7) находим, что функция напряжений должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{n-1}{n}} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{n-1}{n} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{n-1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \frac{\partial F}{\partial x} + \\ + \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{n-1}{n}} f'(y) = \frac{2}{3} [A(t)]^{\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1-n}{n}} [-n \gamma(t) y + C_0(t)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь принято

$$C(z, t) = (l-z)^{n-1} C_0(t)$$

3. В качестве приложения рассмотрим призматический стержень прямоугольного сечения при установившейся ползучести. Учитывая симметрию поперечного сечения относительно оси  $x$  и используя (1.9) и (1.11), получаем

$$|A_0(z)|^{\frac{1}{n}} = \frac{\left( \frac{1}{n} + 2 \right) A^{\frac{1}{n}} P(l-z)}{4ba^{\frac{1}{n-1}}} \quad (3.1)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P(l-z)}{J} |x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sign} x = \frac{P(l-z)}{J} |x|^{\frac{1}{n}-1} x \quad (3.2)$$

где  $J = \frac{4ba^{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{n}+2}$  — обобщенный момент инерции сечения изгибаемого стержня.

Используя (2.2), (2.5) и (2.6), получим

$$\frac{v(z_0)}{\sigma_0} \Delta F + \frac{\sigma}{\partial x} \frac{v(z_0)}{\sigma_0} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{v(z_0)}{\sigma_0} f'(y) = \frac{2nAP^n(l-z)^{n-1}}{2J^n} y + \frac{2}{3} C(z) \quad (3.3)$$

Имеем

$$\frac{v(z_0)}{\sigma_0} = A \left| \frac{P(l-z)}{J} \right|^{n-1} |x|^{\frac{n-1}{n}} \quad (3.4)$$

Учитывая (3.4) и принимая

$$C(z) = \left| \frac{P(l-z)}{J} \right|^{n-1} C_0$$

из (3.3) находим

$$|x|^{\frac{n-1}{n}} \Delta F + \frac{n-1}{n} |x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sign} x \frac{\partial F}{\partial x} + |x|^{\frac{n-1}{n}} f'(y) = \frac{2nP}{3J} y + \frac{2C_0}{3A} \quad (3.5)$$

Граничное условие задачи записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = - \left[ \frac{P|x|^{\frac{1}{n}+1}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)J} + f'(y) \right] \frac{dy}{ds}$$

На сторонах  $y = \pm b$  (фиг. 1) контура  $\frac{dy}{ds} = 0$ , поэтому, чтобы на всем контуре было  $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$ , достаточно положить

$$\frac{P|x|^{\frac{1}{n}+1}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)J} + f'(y) = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (3.6)$$

то есть  $F = \text{const} = C$  при  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$ .

Так как рассматриваемая область односвязна, то можно принять [12]  $C=0$ .

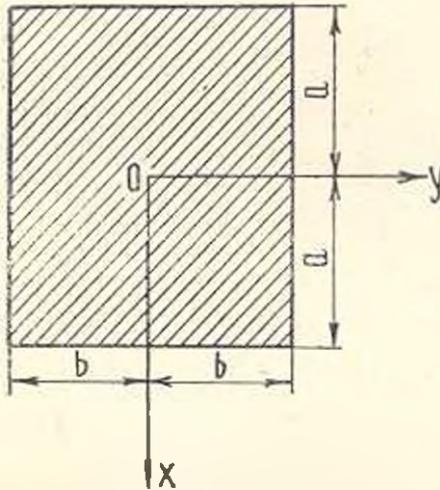
В случае, когда изгибающая сила проходит через центр изгиба, то есть изгиб не сопровождается кручением, в (3.5) для сечения с двумя осями

симметрии будем иметь  $C_0 = 0$  [12]. Тогда при помощи (3.6) окончательно находим, что функция напряжений должна удовлетворять уравнению

$$|x|^{\frac{n-1}{n}} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{n-1}{n} |x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sign} x \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2nP}{3f} y \quad (3.7)$$

и граничному условию

$$F = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad y = \pm b \quad (3.8)$$



Фиг. 1.

4. Решение уравнения (3.7), удовлетворяющее условиям (3.8), ищем в виде ряда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (4.1)$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b F(x, y) \sin \frac{k\pi}{b} y dy \quad (4.2)$$

и функции  $\varphi_k(x)$  должны быть подчинены граничному условию  $\varphi_k(\pm a) = 0$ .

Чтобы найти  $\varphi_k(x)$ , умножим уравнение (3.7) на  $\frac{1}{b} \sin \frac{k\pi}{b} y dy$  и проинтегрируем по  $y$  в интервале  $(-b, b)$ .

Используя обозначение (4.2), имеем

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} + \frac{n-1}{n} \frac{1}{x} \frac{d\varphi_k}{dx} - \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \varphi_k = (-1)^k \frac{4bnP}{3k\pi f} x^{\frac{1-n}{n}} \quad (4.3)$$

Ввиду симметричности сечения относительно  $x$  достаточно решение рассмотреть при  $x \geq 0$ .

При помощи замены переменных уравнение (4.3) приводится к неоднородному уравнению Бесселя

$$\zeta^2 \frac{d^2 u_k}{d\zeta^2} + \zeta \frac{du_k}{d\zeta} + (\zeta^2 - \nu^2) u_k = (-1)^{k+1} \frac{2P}{3\nu f_k^3} \frac{\zeta^{\nu+1}}{(\zeta^2)^{\nu-1}} \quad (4.4)$$

$$u_k = \frac{\zeta_k}{x^{2\nu}}, \quad \zeta_k = \frac{ik\pi}{b} x = ikx, \quad \nu = \frac{1}{2n} \quad (4.5)$$

Общее решение этого уравнения будет [13]

$$u_k(\zeta) = c_{1k} J_\nu(\zeta) + c_{2k} J_{-\nu}(\zeta) + u_{1k}(\zeta)$$

Здесь  $J_\nu(\zeta)$  и  $J_{-\nu}(\zeta)$  — функции Бесселя мнимого аргумента порядка  $\nu$  и  $-\nu$  соответственно, а  $u_{1k}(\zeta)$  — частное решение уравнения (4.4)

$$u_{1k}(\zeta) = (-1)^{k+1} \frac{P}{3\nu f_k^3} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) 2^\nu}{i_k^{\nu-1}} L_\nu(\zeta) \quad (4.6)$$

где  $L_\nu(\zeta)$  — функция Струве.

Согласно (4.5) будем иметь

$$\zeta_k(x) = x^\nu \left[ c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \quad (4.7)$$

Для функции напряжений получается выражение

$$F(x, y) = x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (4.8)$$

$$a_k = (-1)^k \frac{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) P}{3\nu f_k^{\nu+2}} \quad (4.9)$$

При помощи (2.2) и (4.8) находим напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{b} \left[ c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + \right. \\ & \left. + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \cos \frac{k\pi}{b} y + \frac{P}{(2\nu+1)J} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\tau_{yz} = -\nu x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + a_k L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \Big| \sin \frac{k\pi}{b} y - \\
 - x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} & \left[ c_{1k} I_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + c_{2k} I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + a_k L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Так как  $\tau_{yz}$  на линии  $x=0$  — конечная величина, то коэффициент  $c_{2k}$  должен быть равным нулю. Из условия  $F(a, y) = 0$  определяем  $c_{2k}$

$$c_{2k} = - \frac{a_k L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} a \right)}{I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} a \right)} \quad (4.12)$$

Таким образом, учитывая (4.9) и (4.12), окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \frac{2^\nu \Gamma \left( \nu + \frac{1}{2} \right) b^{\nu+2} P}{3 \sqrt{\nu} \pi^{\nu+3/2}} x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \times \\
 & \times \left[ - \frac{L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} a \right)}{I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} a \right)} I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] \sin \frac{k\pi}{b} y \\
 \tau_{xz} &= \frac{2^\nu \Gamma \left( \nu + \frac{1}{2} \right) b^{\nu+1} P}{3 \sqrt{\nu} \pi^{\nu+1/2}} x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+1}} \left[ - \frac{L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} a \right)}{I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} a \right)} \times \right. \\
 & \times \left. I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] \cos \frac{k\pi}{b} y + \frac{P}{(2\nu+1)f} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz} &= - \frac{2^\nu \Gamma \left( \nu + \frac{1}{2} \right) b^{\nu+2} P}{3 \sqrt{\nu} \pi^{\nu+3/2}} x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \times \\
 & \times \left( - \frac{L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} a \right)}{I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} a \right)} \left[ I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + \frac{x}{\nu} I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + \frac{x}{\nu} L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] \right) \Big| \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

При помощи (4.13) и (4.14) находим скорость деформации

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{xz} = & \frac{2^{\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) b^{\nu+1} AP}{J \nu \pi^{\nu+1/2}} \left[ \frac{P(l-z)}{J} \right]^{\frac{1}{2\nu}-1} \times \\ & \times x^{1-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+1}} \left[ -\frac{L_-(i_k a)}{L_-(i_k a)} L_-(i_k x) + L_+(i_k x) \right] \cos i_k y + \\ & + \frac{3}{2} \frac{PA}{(2\nu+1)J} \left[ \frac{P(l-z)}{J} \right]^{\frac{1}{2\nu}-1} x^{1-2\nu} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{yz} = & -\frac{2\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) b^{\nu+2} AP}{J \pi^{\nu+3/2}} \left[ \frac{P(l-z)}{J} \right]^{\frac{1}{2\nu}-1} \times \\ & \times x^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \left[ -\frac{L_-(i_k a)}{L_-(i_k a)} \left[ L_-(i_k x) + \frac{x}{\nu} L_-(i_k x) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ L_+(i_k x) + \frac{x}{\nu} L_+(i_k x) \right] \right] \sin i_k y \quad i_k = \frac{k\pi}{b} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Отметим, что из найденного решения при  $\nu=1$  получается классическое решение задачи Сен-Венана об изгибе консольной балки прямоугольного сечения.

Используя связь [13] между функциями  $L_+$  и  $L_-$ ,

$$L_+(x) = L_-(x) - \frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} \sin(x, u) (1+u^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} du$$

и рекуррентные соотношения [13] для  $L_+(x)$  и  $L_-(x)$ , после некоторых преобразований выражения (4.13—4.14) представляются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{xz} = & \frac{2ba^{\nu} P x^{\nu}}{3J \nu \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left[ \frac{L_-(i_k x)}{L_-(i_k a)} \int_0^{\infty} \sin(i_k a u) (1+u^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} du - \right. \\ & \left. - \left(\frac{x}{a}\right)^{\nu} \int_0^{\infty} \sin(i_k x u) (1+u^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} du \right] \cos i_k y + \\ & + \frac{P}{(2\nu+1)J} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & -\frac{2b^2 a^2 P x^{v-1}}{3j\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left\{ \frac{I_{-\nu}(i_k x)}{I_{-\nu}(i_k a)} \int_0^{\infty} \sin(i_k a u) (1+u^2)^{-\frac{1}{2}} du + \right. \\ & + \frac{i_k x}{2} \frac{1}{v} \left[ \frac{I_{-\nu-1}(i_k x)}{I_{-\nu}(i_k a)} + \frac{I_{-\nu+1}(i_k x)}{I_{-\nu}(i_k a)} \right] \int_0^{\infty} \sin(i_k a u) (1+u^2)^{-\frac{1}{2}} du \\ & \left. - \frac{2}{v} \left( v - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{x}{a} \right)^v \int_0^{\infty} \sin(i_k x u) (1+u^2)^{-\frac{3}{2}} du \right\} \sin i_k y \quad (4.18) \end{aligned}$$

5. Рассмотрим изгиб однородного стержня прямоугольного поперечного сечения со сторонами  $2a$  и  $a$  из стали марки ЭИ-69. При температуре  $t=600^\circ\text{C}$  характеристики ползучести этого материала имеют следующие значения [14]:

$$n = 3; \quad A = 1.95 \cdot 10^{8.3}$$

Используя формулу

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

и вычисляя интегралы в (4.17) и (4.18) с точностью  $10^{-4}$  для  $\frac{a}{8} < x < a$  и  $k > 1$ , получим расчетные выражения для касательных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{P^*} = & \frac{3}{\pi} \left( \frac{x}{a} \right)^{1/6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\{ \frac{I_{-1/6} \left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)}{I_{-1/6}(2k\pi)} \left[ \frac{1}{2k\pi} + \frac{0.666}{(2k\pi)^3} - \frac{0.0036}{(2k\pi)^5} \right] - \right. \\ & \left. - \left( \frac{x}{a} \right)^{1/6} \left[ \frac{1}{2k\pi \frac{x}{a}} + \frac{0.666}{\left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)^3} - \frac{0.0036}{\left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)^5} \right] \right\} \cos \frac{k\pi}{b} y + \\ & + 1.125 \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^{4/3} \right] \\ \frac{\tau_{yz}}{P^*} = & -\frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{x}{a} \right)^{5/6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left\{ \frac{I_{-1/6} \left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)}{I_{-1/6}(2k\pi)} \left[ \frac{1}{2k\pi} + \frac{0.666}{(2k\pi)^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{0.0036}{(2k\pi)^5} \right] + 4 \left( \frac{x}{a} \right)^{1/6} \left[ \frac{1}{2k\pi \frac{x}{a}} + \frac{2.666}{\left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)^3} + \frac{0.083}{\left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)^5} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ 6k\pi \frac{x}{a} \left[ \frac{I_{-7/6} \left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)}{I_{-1/6} (2k\pi)} + \frac{I_{5/6} \left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)}{I_{-1/6} (2k\pi)} \right] \times$$

$$\times \left| \frac{1}{2k\pi} + \frac{0.666}{(2k\pi)^3} - \frac{0.0036}{(2k\pi)^5} \right| \sin \frac{k\pi}{b} y$$

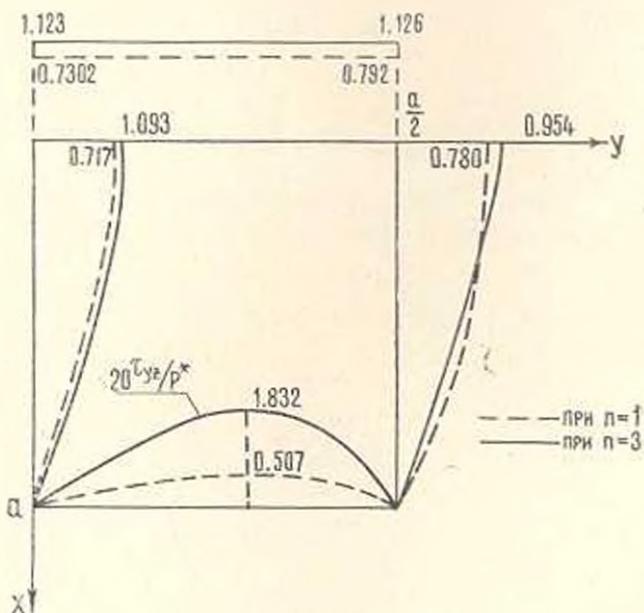
где

$$P^2 = \frac{7P}{18ab}$$

Значения  $\tau_{xz}$  при  $x = 0$  вычисляются непосредственно по (4.13).

Так как сечение стержня симметрично относительно осей  $x$  и  $y$  (фиг. 1) выражения напряжений приводятся для нижней правой четверти сечения стержня  $\left( 0 < x < a, 0 < y < \frac{a}{2} \right)$ .

На фиг. 2 приведены эпюры распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  при  $x = 0, y = 0, y = \frac{a}{2}$  и  $\tau_{xy}$  при  $x = a$ .



Фиг. 2.

Сопоставляя результаты вычисления с распределением касательных напряжений в случае упругого стержня ( $n=1$ ), замечаем, что напряжение  $\tau_{xz}$  при ползучести на осях симметрии при  $n=3$  незначительно больше соответствующего напряжения при линейной упругости. На некотором расстоянии от оси симметрии ( $y=0$ ) эта разность меняет знак.

Около нейтральной оси максимальные касательные напряжения при ползучести больше, а в зонах интенсивного деформирования около углов сечения стержня меньше соответствующих напряжений при линейной упругости.

Максимальное значение напряжения  $\tau_{yz}$  при ползучести мало, как и в случае упругого изгиба, но значительно больше (около трех раз) соответствующего значения напряжения при линейной упругости.

6. С целью установления степени точности принятого приближения и выражении для интенсивности напряжений (1.8) учтем известные из нулевого приближения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ .

При  $n=3$  из (1.8) будем иметь

$$A_0 z_{,zz}^3 + 3A_0 z_{,zz}^2 (\tau_{xz}^{\prime 2} + \tau_{yz}^{\prime 2}) - \frac{A_0(z)x}{P^3} = 0 \quad (6.1)$$

где

$$z_{,zz}^{\prime} = \frac{\partial z_{,zz}}{\partial \xi}, \quad \tau_{xz}^{\prime} = \frac{\tau_{xz}}{P^*}, \quad \tau_{yz}^{\prime} = \frac{\tau_{yz}}{P^*}, \quad P^* = \frac{7P}{18ab}$$

Уравнение (6.1) относительно  $z_{,zz}^{\prime}$  имеет действительный корень

$$z_{,zz}^{\prime} = (2A)^{-\frac{1}{3}} \left\{ \left[ \frac{A_0(z)x}{P^3} + \sqrt{\frac{A_0^2(z)x^2}{P^6} + 4A^2(\tau_{xz}^{\prime 2} + \tau_{yz}^{\prime 2})^3} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[ \sqrt{\frac{A_0^2(z)x^2}{P^6} + 4A^2(\tau_{xz}^{\prime 2} + \tau_{yz}^{\prime 2})^3} - \frac{A_0(z)x}{P^3} \right]^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (6.2)$$

Для поперечного изгиба стержня прямоугольного поперечного сечения в первом приближении относительно  $A_0(z)$  получаем уравнение

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left[ A_0(z) \zeta^2 + \sqrt{A_0^2(z) \zeta^2 + 4A^2 P^{*3} (\tau_{xz}^{\prime 2} + \tau_{yz}^{\prime 2})^3} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[ \sqrt{A_0^2(z) \zeta^2 + 4A^2 P^{*3} (\tau_{xz}^{\prime 2} + \tau_{yz}^{\prime 2})^3} - A_0(z) \zeta^2 \right]^{\frac{1}{3}} \right\} \zeta d\zeta d\eta = \frac{(2A)^{1/3} P}{2a^2} \left( \frac{l-z}{a} \right) \quad (6.3)$$

где

$$x = a\zeta, \quad y = \frac{a}{2}\eta, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq z \leq l$$

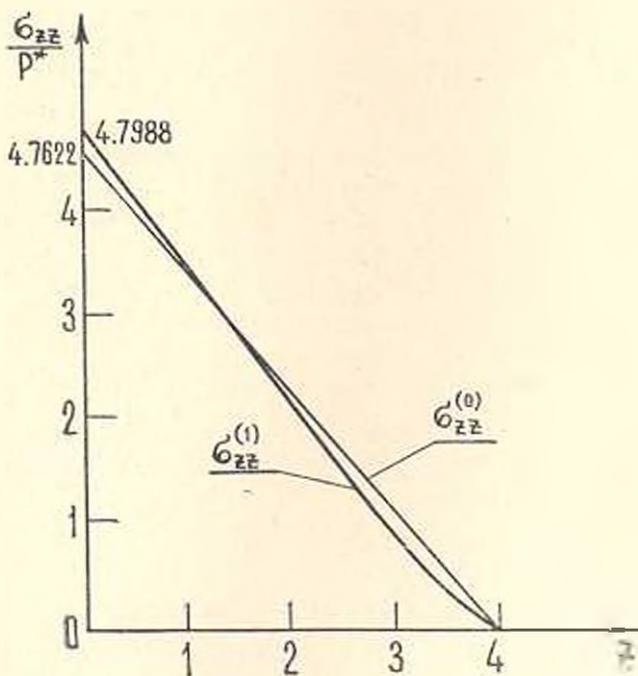
Нулевые приближения  $\tau_{xz}^{\prime}$  и  $\tau_{yz}^{\prime}$  аппроксимированы с избытком и получены следующие значения:

$$\tau_{xz} = -2.18(\zeta^2 - 1) \quad 2 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

$$\tau_{xz} = \begin{cases} 3\eta^2 & 0 \leq \eta < \frac{1}{2} \\ 1.5\zeta & \frac{1}{2} \leq \eta < \frac{3}{4} \\ \zeta [1.5 - 22.65(\eta - 0.75)^2] & \frac{3}{4} \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) с учетом (6.4) решено численно при  $\frac{l}{a} = 4; 16; 32; 64$ .

На фиг. 3 приведены графики зависимости  $\sigma_{zz}$  от  $z$  в нулевом и первом приближениях.



Фиг. 3.

Результаты вычислений показывают, что учет касательных напряжений в выражении интенсивности напряжений для коротких стержней увеличивает максимальные нормальные напряжения (3.2) менее, чем на 4%. Для длинных стержней это изменение незначительно.

## Հ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՈՉ ԿՈՅՈՒՆՈՑԱԿ ՄՈՂՔԻ ՊԼՅԻՄԱՆԵՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՀԱՄԱՍԵՌ  
ՊՐԻՉԻՄՈՒՄԻ ԶՈՂԻ ԼՈՅՆԱԿԱՆ ՄԵՌՈՒՄԸ

Ա մ փ ո ւ փ ո ւ ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է ոչ կայունացած սողքը համասեռ պրիզմատիկ ձողի լայնական ծոման դեպքում: Չողի լայնական հատվածքը ունի համաչափության մի առանցք, որով ուղղված է ծոռղ ուժը:

Օդատազործվում են ոչ կայունացած սողքի քվադրիգծային հավասարումները

$$z_{ij} = \frac{3}{2} \frac{V(z_0, t)}{c_0} (z_{ij} - z_{ij}^0)$$

որտեղ բնորոշվում է

$$V(z_0, t) = A(t) z_0^3$$

Լարումների ֆունկցիայի համար ստացվում է փոփոխական դործակիցներով երկրորդ կարգի գիֆերենցիալ հավասարում: Ուղղանկյունաձև լայնական հատվածք ունեցող ձողի ծոման դեպքում այդ հավասարումը բերվում է Բեսսելի անհամասեռ հավասարման:

Բերվում են շոշափող լարումների բաշխման դժադրերը, ՅՄ-69 մակերչի պողպատի համար, երբ ձողն ունի ուղղանկյունաձև լայնական հատվածք:

THE TRANSVERSE BENDING OF A HOMOGENEOUS  
PRISMATIC BAR UNDER UNSTEADY CREEP

H. A. AVETICIAN

## S u m m a r y

An unsteady creep for the transverse bending of a homogeneous prismatic bar of axisymmetric cross-section is treated in terms of the theory of ageing.

The quasi-nonlinear equation

$$z_{ij} = \frac{3}{2} \frac{V(z_0, t)}{c_0} (z_{ij} - z_{ij}^0)$$

is used, where

$$V(z_0, t) = A(t) z_0^3$$

is assumed.

A differential equation of the second order with variable coefficients is derived for the function of stresses. For the bending of a rectangular cross-section bar this equation is reduced to the nonhomogeneous Bessel equation.

Some graphs of shear-stress distribution are presented for ЭИ-69 steel of a rectangular cross-section.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинин Н. Н.* Основы расчета на ползучесть. М., Машгиз, 1948.
2. *Малинин Н. Н.* Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести. Инж. сб., 1951, т. 10.
3. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, 1948, № 10.
4. *Качанов Л. М.* Некоторые вопросы теории ползучести. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1949.
5. *Plechnik S., Chrzapowski M.* Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending. „Int. j. solids and struct“, 1970, т. 6, No. 4.
6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
7. *Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С.* Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 5.
8. *Манукян М. М.* Изгиб железобетонной балки с учетом неустановившейся ползучести только сжатой зоны бетона. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1960, т. 13, № 2.
9. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Релаксационная задача об изгибе призматического стержня. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 1.
10. *Манукян М. М.* Некоторые задачи нелинейной теории ползучести. диссертация, Ереван, 1964.
11. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., Изд. «Наука», 1966.
12. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1975.
13. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., изд. ИЛ, 1949.
14. *Серенсен С. В. и др.* Несущая способность и расчеты деталей машины на прочность. М., Машгиз, 1963.

Р. М. БАРСЕГЯН

## КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ И НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Задачи безнапорной установившейся и неуставившейся фильтрации жидкости (по закону Дарси) в одном пласте и в многослойных грунтах приводятся к решению нелинейных дифференциальных уравнений.

Так, например, для трехслойного грунта, когда верхний безнапорный горизонт через слабопроницаемую перемычку разделяется от нижнего напорного горизонта, при установившемся и неуставившемся режимах фильтрации имеем соответственно

$$\frac{d}{dx} \left( h \frac{dh}{dx} \right) - m^2 (h - H) + \varepsilon(x) = 0, \quad \left( m^2 = \frac{k}{kT} \right) \quad (1.1)$$

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\bar{k}}{T} (h - H) + \varepsilon(x) \quad (1.2)$$

где  $h(x, t)$  — глубина фильтрационного потока верхнего безнапорного горизонта,  $k(x)$  и  $\bar{k}(x)$  — коэффициенты фильтрации соответственно напорного горизонта и слабопроницаемой перемычки,  $T(x)$  — мощность слабопроницаемого слоя,  $H = \text{const}$  — напор нижнего напорного горизонта,  $m$  — коэффициент недостатка насыщения или отдачи грунта,  $\varepsilon(x)$  — интенсивность инфильтрации.

При осесимметричном движении вместо уравнений (1.1) и (1.2) имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( rh \frac{dh}{dr} \right) - m^2 (h - H) + \varepsilon(r) = 0 \quad (1.3)$$

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rh \frac{\partial h}{\partial r} \right) - \frac{\bar{k}}{T} (h - H) + \varepsilon(r) \quad (1.4)$$

Из уравнений (1.2) и (1.4), как частный случай, можно получить уравнение неуставившейся фильтрации в одном пласте (уравнение Буассинеска) при  $\bar{k} = 0$

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon(x) \quad (1.5)$$

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rh \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \varepsilon(r) \quad (1.6)$$

К решению уравнений (1.1) — (1.6) приводятся многообразные и практически важные вопросы фильтрации такие, как вопросы орошения и осушения земель вертикальными и горизонтальными дренами, вопросы взаимодействия совершенных и несовершенных скважин, работающих в одном безнапорном водоносном горизонте и в безнапорном горизонте, имеющем гидравлическую связь с нижележащими горизонтами, а также вопросы искусственного понижения уровня грунтовых вод, связанного с разнообразными земляными работами — например, при выемке котлованов и некоторых видов карьеров и т. д.

Как известно, точное решение уравнений (1.1) — (1.6) связано с определенными трудностями математического характера. Указанная трудность явилась стимулом для разработки приближенных методов решения этих уравнений. Наиболее эффективное приближенное решение вышеуказанных уравнений основано на приближенной их аппроксимации линейным уравнением (линеаризация).

В настоящее время существуют четыре способа линеаризации уравнений (1.1) — (1.6).

В первом способе линеаризации [1] принимается, что глубина  $h$ , стоящая множителем в первых круглых скобках уравнений (1.1) — (1.6), может быть приближенно заменена некоторой постоянной средней глубиной  $h_{\text{ср}}$ , и в результате нелинейные уравнения заменяются линейными уравнениями. Вторым способ линеаризации был предложен Н. Н. Веригиным [2], третий — И. А. Чарным [3]. Широкое применение нашел четвертый способ линеаризации, предложенный П. Я. Подубариновой-Кочиной [4] для уравнения (1.1). Преимущество четвертого способа (относительно других) численным методом доказано в работе [5].

Ниже рассматривается вопрос применения квазилинеаризации к уравнениям безнапорной установившейся и неуставившейся фильтрации жидкости в одном пласте и в гидравлически связанных водоносных горизонтах. С помощью квазилинеаризации дается строгое математическое обоснование способов линеаризации. Метод позволяет найти оценки способов линеаризации.

Рассмотрим уравнение (1.1) при отсутствии инфильтрации. С помощью подстановки  $\frac{h^2}{2} = u$  получим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \omega^2 (V\bar{u} - H) = 0 \quad (1.7)$$

которое напишем в общем виде

$$u'' = f(u) \quad (1.8)$$

Пусть требуется найти решение уравнения (1.8) с условиями

$$u(0) = u_1 = \frac{H_1^2}{2}, \quad u(i) = \frac{H_2^2}{2}$$

С помощью квазилинеаризации (1.6) из (1.8) получим следующую последовательность линейных уравнений:

$$u_{n+1} = f(u_n) + f'_u(u_n)(u_{n+1} - u_n) \quad (1.9)$$

Задача нахождения решения уравнения (1.9) для каждого  $n$  при граничных условиях

$$u_{n+1}(0) = u_1, \quad u_{n+1}(l) = u_2$$

равносильна нахождению функции  $u_{n+1}(x)$  из следующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u_{n+1} = f_0(x) + \int_0^l G(x, y) [f(u_n) + f'_u(u_n)(u_{n+1} - u_n)] dy \quad (1.10)$$

где

$$f_0(x) = \frac{H_1^2}{2} + \frac{H_2^2 - H_1^2}{2l} x$$

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x-l)}{l} & \text{при } y \leq x \\ \frac{x(y-l)}{l} & \text{при } x \leq y \end{cases}$$

Составим интегральное уравнение для разности  $(n+1)$ -го и  $n$ -го шагов

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^l G(x, y) [f(u_n) - f(u_{n-1}) + f'_u(u_n)(u_{n+1} - u_n) - f'_u(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})] dy \quad (1.11)$$

Предположим, что функция  $f(u)$  имеет частные производные по  $u$  включительно до второго порядка, тогда по формуле Тейлора второго порядка имеем

$$f(u_n) = f(u_{n-1}) + f'_u(u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) + \frac{1}{2} f''_u(\theta)(u_n - u_{n-1})^2$$

где  $\theta$  заключено между  $u_{n-1}$  и  $u_n$ . Подставляя в (1.11) вместо  $f(u_n)$  правую часть последнего равенства, получим

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^l G(x, y) \left[ f'_u(u_n)(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2} f''_u(\theta)(u_n - u_{n-1})^2 \right] dy \quad (1.12)$$

Пусть

$$\max |f'_u(u_n)| = q, \quad \max |f'_u(0)| = p$$

и замечая, что

$$\max |G(x, y)| = \frac{l}{4}$$

из (1.12) получим

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{l}{4} \int_0^l \left[ q |u_{n+1} - u_n| + \frac{1}{2} p |u_n - u_{n-1}|^2 \right] dy$$

откуда, с помощью максимизации и интегрирования имеем

$$\max |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{pl^2}{2(4 - ql^2)} \max |u_n - u_{n-1}|^2 \quad (1.13)$$

Таким образом, сходимость метода зависит от величины

$$c = \frac{pl^2}{2(4 - ql^2)} \max |u_1 - u_0| = R_0 \max |u_1 - u_0| \quad (1.14)$$

Если  $c < 1$ , то, учитывая монотонность последовательности  $\{u_n\}$ , заключаем, что она равномерно сходится к функции  $u$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ ) и, как показывает (1.13), эта сходимость будет квадратичной. Далее, так как функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$u(x) = f_0(x) + \int_0^l G(x, y) f(u) dy$$

то она является решением исходного уравнения (1.8).

Оценка погрешности при квадратичной сходимости имеет вид  $c^{2n}$  вместо  $c^n$  при обычных итерациях. Этим обстоятельством обусловлена быстрота сходимости метода.

Поэтому при этом методе в приложениях достаточно ограничиться первыми двумя шагами, а иногда даже одним первым шагом.

Из неравенств (1.13) и (1.14), учитывая монотонность последовательности  $\{u_n\}$ , а также выпуклость графиков функций  $u_n$  в интервале  $(0, l)$  при  $H_1 < H_2 < H$  или вогнутость — при  $H < H_1 < H_2$ , получим для любого  $n$  следующие оценки:

$$\max |u - u_1| \leq \frac{1}{R_0} \sum_{n=1}^{\infty} c^{2n} = \frac{1}{R_0} \frac{c^2}{1 - c^2}$$

$$\max |u - u_n| \leq \frac{1}{R_0} \sum_{n=m}^{\infty} c^{2n}$$

Докажем, что линейризованное четвертым способом уравнение

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\omega^2}{H} (u - \bar{u}_0) = 0 \quad (\bar{u}_0 = H^2) \quad (1.15)$$

которое получается из (1.7), совпадает с первым приближением последовательности (1.9). Действительно, первое приближение последовательности (1.9) есть уравнение

$$u_1' = f(u_0) + f_u'(u_0)(u_1 - u_0) \quad (1.16)$$

где  $u_0$  — некоторое нулевое приближение. Так как

$$f(u_0) = \omega^2 (\sqrt{2u_0} - H), \quad f_u'(u_0) = \frac{\omega^2}{\sqrt{2u_0}}$$

то из (1.16) получим уравнение

$$u_1' - \omega^2 (\sqrt{2u_0} - H) - \frac{\omega^2}{\sqrt{2u_0}} (u_1 - u_0) = 0$$

которое будет совпадать с (1.15), если только за нулевое приближение примем  $u_0 = \frac{H^2}{2}$ .

С помощью линеаризации четвертым способом из (1.3) (при  $\varepsilon=0$ ) получим

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{\omega^2}{H} (u_1 - \bar{u}_0) = 0$$

что совпадает с первым приближением в последовательности квазилинейных уравнений, то есть с уравнением

$$u_1' = f(u_0', u_0, r) + f_u'(u_0', u_0, r) (u_1' - u_0') + f_u''(u_0', u_0, r) (u_1 - u_0)$$

или же с уравнением

$$u_1' = \omega^2 (\sqrt{2u_0} - H) + \frac{\omega^2}{\sqrt{2u_0}} (u_1 - u_0) - \frac{1}{r} u_1'$$

при выборе нулевого приближения  $u_0 = \frac{H^2}{2}$ .

С помощью линеаризации первым способом из (1.1) ( $\varepsilon=0$ ) получим

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - \frac{\omega^2}{h_{c,p}} (h - H) = 0 \quad (1.17)$$

Тогда из первого приближения последовательности квазилинеаризованных уравнений

$$h_1' = f(h_0', h_0) + f_h'(h_0', h_0) (h_1' - h_0') + f_h''(h_0', h_0) (h_1 - h_0)$$

где  $h_0$  — нулевое приближение и

$$f_{h'} = -\frac{2h'}{h}, \quad f_h = \frac{\omega^2 H}{h^2} + \frac{(h')^2}{h^2}$$

при  $h_0 = \text{const}$  имеем

$$h_1 - \frac{\omega^2 H}{h_0^2} (h_1 - h_0) + \frac{\omega^2}{h_0} (H - h_0) = 0 \tag{1.18}$$

Уравнения (1.17) и (1.18) совпадут, если принять  $h_0 = h_{cp} = H$ . Аналогичный результат при линейзации первым способом можно получить для уравнения осесимметричного движения (1.3).

Таким образом, доказано, что для уравнений установившейся безнапорной фильтрации первый и четвертый способы линейзации являются вполне обоснованными приближенными методами решения нелинейных уравнений, так как линейризованные этими способами уравнения являются первыми приближениями в соответственных последовательностях квазилинеаризованных уравнений, решения которых быстро сходятся к решению исходного нелинейного уравнения.

Рассмотрим вопрос квазилинеаризации относительно нелинейных уравнений безнапорной неустановившейся фильтрации на примерах уравнений (1.2) и (1.4).

Напишем уравнения (1.2) и (1.4) в общем виде

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = f(h^*, h', h, z) \tag{1.19}$$

Для (1.2)  $z = x$ , а для (1.4)  $z = r$ .

Следуя методу квазилинеаризации, получим следующую последовательность линейных уравнений:

$$m \frac{\partial h_{n+1}}{\partial t} = f(h_n^*, h_n', h_n, z) + f_{h^*} (h_n^*, h_n', h_n, z) (h_{n+1}^* - h_n^*) + f_{h'} (h_n^*, h_n', h_n, z) (h_{n+1}' - h_n') + f_h (h_n^*, h_n', h_n, z) (h_{n+1} - h_n) \tag{1.20}$$

Для первого приближения из (1.20) имеем

$$m \frac{\partial h_1}{\partial t} = f(h_0^*, h_0', h_0, z) + f_{h^*} (h_0^*, h_0', h_0, z) (h_1^* - h_0^*) + f_{h'} (h_0^*, h_0', h_0, z) (h_1' - h_0') + f_h (h_0^*, h_0', h_0, z) (h_1 - h_0) \tag{1.21}$$

и так как для уравнения (1.2) ( $z = x$ )

$$f_{h^*} = kh, \quad f_{h'} = 2kh', \quad f_h = kh^* - \frac{k}{T}$$

то принимая за нулевое приближение  $h_0 = \text{const}$ , получим

$$m \frac{\partial h_1}{\partial t} = kh_0 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{k}{T} (h_1 - h_0) - \frac{k}{T} (h_0 - H) + \varepsilon(x) \tag{1.22}$$

Если в (1.22) примем  $h_0 = H$ , то полученное уравнение

$$m \frac{\partial h_1}{\partial t} = kH \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\bar{k}}{T} (h_1 - H) + \varepsilon(x)$$

совпадает с линейризованным первым способом уравнением

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = kh_{cp} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\bar{k}}{T} (h - H) + \varepsilon(x)$$

при  $h_{cp} = H$ .

Для уравнения (1.4) аналогично получим первое приближение в виде (за нулевое приближение принято  $h_0 = \text{const}$ )

$$m \frac{\partial h_1}{\partial t} = kh_0 \frac{\partial^2 h_1}{\partial r^2} + \frac{k}{r} h_0 \frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{\bar{k}}{T} (h_1 - h_0) - \frac{\bar{k}}{T} (h_0 - H) + \varepsilon(r)$$

которое тоже совпадает с линейризованным первым способом уравнением (при  $h_0 = H$ )

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = h_{cp} \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right) - \frac{\bar{k}}{T} (h - h_0) + \varepsilon(r)$$

если в последнем уравнении принять  $h_{cp} = H$ .

Совпадение линейризованных первым способом уравнений неустановившейся безнапорной фильтрации с первым приближением сходящейся последовательности квазилинейризованных уравнений дает основание считать линейризацию первым способом как обоснованный метод приближенного решения этих уравнений.

Следуя второму способу линейризации, из (1.2) и (1.4) после подстановки  $u = \frac{h^2}{2}$  получим соответственно

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = kh_{cp} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\bar{k}}{T} (2u - Hh_{cp}) + h_{cp} \varepsilon_1(x) \quad (1.23)$$

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{kh_{cp}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\bar{k}}{T} (2u - Hh_{cp}) + h_{cp} \varepsilon_1(r) \quad (1.24)$$

Чтобы получить соответствующие квазилинейризованные уравнения первого приближения, напишем уравнения (1.2) и (1.4) в общем виде, заранее переходя к функции  $u$  ( $u = \frac{h^2}{2}$ )

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = f(u'', u', u, z)$$

где для уравнения (1.2) ( $z = x$ )

$$f(u'', u', u, x) = k \sqrt{2u} u'' - \frac{\bar{k}}{T} (2u - \sqrt{2u} H) + \sqrt{2u} \varepsilon_1(x)$$

а для (4) ( $z = r$ )

$$f(u'', u', u, r) = \frac{k \sqrt{2u}}{r} u' + k \sqrt{2u} u'' - \frac{\bar{k}}{T} (2u - \sqrt{2u} H) + \sqrt{2u} \varepsilon(r)$$

Тогда обычным путем при постоянном нулевом приближении  $u_0$  находим первое приближение для (1.2)

$$m \frac{\partial u_1}{\partial t} = k \sqrt{2u_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left[ \frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{2u_0}} - \frac{\bar{k}}{T} \left( 2 - \frac{H}{\sqrt{2u_0}} \right) \right] (u_1 - u_0) - \frac{\bar{k}}{T} (2u_0 - \sqrt{2u_0} H) + \sqrt{2u_0} \varepsilon(x) \quad (1.25)$$

а для (1.4)

$$m \frac{\partial u_1}{\partial t} = k \sqrt{2u_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{k \sqrt{2u_0}}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \left[ \frac{\varepsilon(r)}{\sqrt{2u_0}} - \frac{\bar{k}}{T} \left( 2 - \frac{H}{\sqrt{2u_0}} \right) \right] (u_1 - u_0) - \frac{\bar{k}}{T} (2u_0 - \sqrt{2u_0} H) + \sqrt{2u_0} \varepsilon(r) \quad (1.26)$$

Как видно, при любом выборе начального приближения  $u_0$  уравнения (1.23) и (1.25), а также (1.24) и (1.26) не совпадают. Совпадение этих уравнений будет лишь при  $\bar{k} = 0$  и  $k = 0$ , то есть второй способ линейаризации можно считать обоснованным приближенным способом решения нелинейных уравнений (1.5) и (1.6) при  $\varepsilon = 0$ .

С помощью четвертого способа линейаризации, предложенного для уравнений установившейся безнапорной фильтрации, из (1.2) и (1.4) получим соответственно

$$\frac{m}{h} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\bar{k}}{TH} (u - u_0) + \varepsilon(x)$$

и

$$\frac{m}{h} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\bar{k}}{TH} (u - u_0) + \varepsilon(r)$$

где  $u = \frac{h^2}{2}$  и  $u_0 = \frac{H^2}{2}$ . Заменяя функцию  $h$ , входящую в левые части этих уравнений, некоторым средним значением  $h = h_{cp} = \sqrt{2u_0}$ , получим

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = k \sqrt{2u_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\bar{k} \sqrt{2u_0}}{TH} (u - u_0) + \sqrt{2u_0} \varepsilon(x) \quad (1.27)$$

и

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k \sqrt{2u_0}}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\bar{k} \sqrt{2u_0}}{TH} (u - u_0) + \sqrt{2u_0} \varepsilon(r) \quad (1.28)$$

и тогда, положив в (1.25)—(1.28)  $\bar{z}u_0 = H$ , обнаружим совпадение уравнений (1.25) и (1.27), а также (1.26) и (1.28). Следовательно, четвертый способ линеаризации является обоснованным способом приближенного решения не только для уравнений безнапорной фильтрации. Этот способ успешно можно применять и при решении нелинейных уравнений неустойчившейся фильтрации, как первое приближение сходящейся последовательности.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 19 XII 1975

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵԳՅԱՆ

ՉԻՂՈՒԿԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ԵՎ ՉԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՈՉ ԿՆՇՈՒՄԱՅԻՆ  
ՖԻԼՏՐԱՑԻՍՆԻ ՉԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՔՎԱԶԼԻՆԵԱՐԱՑՈՒՄԸ

Ա Վ Փ Ո Վ Ո Ւ Մ

Ոչ կայունացման մեկ հոդաշերտում կամ հիդրավիկորեն կայունացված քաղցրահամ միջավայրում հեղուկի ֆիլտրացիայի ոչ զծային դիֆերենցիալ հավասարումներից կարելի է անցնել զծային հավասարումների քվազիզծայնացման միջոցով: Քվազիզծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների հաջորդականության ստումանը հանդիսանում է որոնելի ոչ զծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը: Այս հանդամանքը հնարավորություն է տալիս ցնահասակի ֆիլտրացիայի տեսության մեջ լայն կիրառություն զուած զծայնացման եղանակները: Աշխատանքում ցույց է տրված, որ այդ զծայնացման եղանակները սկզբնական մոտավորության այս կամ այն ընտրության դեպքում համընկնում են կվազիզծայնացված հավասարումների հաջորդականության տեսչին մոտավորության հետ: Գծայնացման եղանակներից մեկի համար կայունացված ֆիլտրացիայի դեպքում դանված է զնահատական: Չկայունացված ֆիլտրացիայի համար քվազիզծայնացման մեթոդը թույլ է տալիս առաջարկել զծայնացման նոր եղանակներ, որոնք օգտագործման դեպքում քվազիզծայնացված հավասարումների լուծումները քավականին մոտ կլինեն խնդրի ոչ զծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը:

## QUASI-LINEAR EQUATIONS OF STABLE AND UNSTABLE NONRAMMING FILTRATION OF LIQUID

R. M. BARSEGHIAN

### S u m m a r y

Nonlinear equations of nonramming filtration of liquid are reduced to linear ones by means of quasi-linearization. It is proved that equations linearized in such a way and with adequate selection of null approach coincide with the equations linearized by various methods known in the

theory of liquid filtration. The method of linearization for a multilayer soil is estimated. New methods of linearization are suggested for non-linear equations of nonramming filtration of liquid.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., Госгеолтехнадат, 1953.
2. *Веризин Н. Н.* О неустановившемся движении грунтовых вод вблизи водохранилищ. Докл. АН СССР, 1949, т. 68, № 6.
3. *Чарный И. А.* О методах линейризации нелинейных уравнений типа уравнений теплопроводности. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 6.
4. *Полубаринова-Кочана П. Я.* О дебите скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1960, № 3.
5. *Меламед В. Г.* К расчету дебита скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1963, № 5.
6. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., Изд. Мир, 1968.