ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1977

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

С. Г. СААКЯН

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ В СРЕДЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИМПУЛЬСА

Задача для упругого однородного изотропного пространства при наличии приложенного в некоторой точке среды сосредоточенного импульса была решена Стоксом [1], а для неоднородного пространства—В. М. Бабичем [2]. Другие методы построения решения задачи в виде эффективных формул для изотропного упругого пространства указаны в работах [3, 4].

В настоящей работе рассматривается нестационарная задача определения вектора перемещения в однородном изотропном упругом пространстве, возбужденном движущимся в среде сосредоточенным импульсом.

Точное решение в виде эффективных аналитических формул получено путем построения формального решения задачи на основе интегральных преобразований Лапласа и Фурье, а затем обращением формального решения методом Каньядра [5].

§ 1. *Постановка задачи и ее решение*

Пусть в момент времени $t=0$ в начале координат по оси x действует сосредоточенный импульс, который затем движется вдоль положительной оси x с постоянной скоростью c.

Уравнения движения упругой среды и начальные условия имеют вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (c_d^2 - c_s^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + c_s^2 \Delta u_1 + \sigma_1 \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (c_d^2 - c_s^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + c_s^2 \Delta u_2 \qquad (1.1)\\
\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (c_d^2 - c_s^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + c_s^2 \Delta u_3
\end{aligned}
$$

$$
u_j\big|_{t=0} = \frac{\partial u_j}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3) \qquad (1.2)
$$

где c_d, c_s — скорости распространения продольных и поперечных волн, Δ — оператор Лапласа, $\sigma_1 = \sigma_0 H(x)\delta(ct - x)\delta(y)\delta(z)$, H — функция Хевисайда, δ — дельта-функция Дирака.

Применим к уравнениям (1.1) и к условиям (1.2) преобразование Лапласа по t и преобразование Фурье по x, y и z

$$\bar{u}_j(x, y, z, s) = \int\limits_0^{\infty} u_j(x, y, z, t)\, e^{-st} dt \tag{1.3}$$

$$\overset{*}{u}_j(\alpha, \beta, \gamma, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_j(x, y, z, s)\, e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, dx dy dz \tag{1.4}$$

$$\bar{u}_j(x, y, z, s) = \frac{1}{8\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{*}{u}_j(\alpha, \beta, \gamma, s)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\alpha d\beta d\gamma \tag{1.5}$$

После проведения обычных выкладок получим изображения перемещений по Лапласу

$$\bar{u}_j = -\frac{\sigma_0}{8\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(\alpha, \beta, \gamma, s)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\gamma d\alpha d\beta \tag{1.6}$$

где

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, s) = -[s^2 + c_s^2\alpha^2 + c_d^2(\beta^2 + \gamma^2)]/R$$

$$F_2(\alpha, \beta, \gamma, s) = (c_d^2 - c_s^2)\alpha\beta/R, \quad F_3(\alpha, \beta, \gamma, s) = (c_d^2 - c_s^2)\alpha\gamma/R \tag{1.7}$$

$$R = (s + ic\alpha)[s^2 + c_d^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)][s^2 + c_s^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)]$$

В последующих расчетах параметр преобразования Лапласа s предполагается действительным положительным числом. Для таких s известно, что если u_j существует, то оно единственно.

В плоскости комплексной переменной γ подынтегральное выражение (1.6) имеет простые полюсы

$$\gamma_d = \pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{s^2}{c_d^2}}, \qquad \gamma_s = \pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{s^2}{c_s^2}} \tag{1.8}$$

Вычисляя вычеты относительно полюсов $\gamma = \gamma_d^+$ и $\gamma = \gamma_s^+$, лежащих в верхней полуплоскости, получим

$$\bar{u}_j = -\frac{\sigma_0}{8\pi^2 s^2}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{jd}(\alpha, \beta, s)\exp[-(z\gamma_d - i\alpha x - i\beta y)]\, d\alpha d\beta + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{js}(\alpha, \beta, s)\exp[-(z\gamma_s - i\alpha x - i\beta y)]\, d\alpha d\beta\right\} \tag{1.9}$$

где

$$F_{1d}(\alpha, \beta, s) = \frac{\alpha^2}{(s + ic\alpha)\gamma_d}, \qquad F_{1s}(\alpha, \beta, s) = -\frac{\alpha^2 + s^2/c_s^2}{(s + ic\alpha)\gamma_s}$$

$$F_{2d}(\alpha, \beta, s) = \frac{\alpha\beta}{(s + ic\alpha)\gamma_d}, \qquad F_{2s}(\alpha, \beta, s) = -\frac{\alpha\beta}{(s + ic\alpha)\gamma_s} \tag{1.10}$$

$$F_{3d}(\alpha, \beta, s) = \frac{i\alpha}{s + ic\alpha}, \qquad F_{3s}(\alpha, \beta, s) = -F_{3d}(\alpha, \beta, s)$$

$$\gamma_d = \gamma_d^+, \qquad \gamma_s = \gamma_s^-$$

Переходя к цилиндрическим координатам (r, θ, z), а затем введя преобразования

$$\alpha = \frac{s}{c_d}(\omega\cos\theta - q\sin\theta), \qquad \beta = \frac{s}{c_d}(\omega\sin\theta + q\cos\theta) \tag{1.11}$$

в интегралах (1.9) получаем

$$\bar{u}_j = -\frac{S_0}{2\pi^2 c_d^2 c}\left[\bar{u}_{jd} + \bar{u}_{js}\right] \tag{1.12}$$

где

$$\bar{u}_{jd} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty K_{jd}(\omega, q, \theta)\exp\left[-\frac{s}{c_d}(zm_d - i\omega r)\right] d\omega dq \tag{1.13}$$

$$\bar{u}_{js} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty K_{js}(\omega, q, \theta)\exp\left[-\frac{s}{c_d}(zm_s - i\omega r)\right] d\omega dq \tag{1.14}$$

$$K_{1d}(\omega, q, \theta) = [l(\omega^2\cos^2\theta + q^2\sin^2\theta) + i\omega\cos\theta(\omega^2\cos^2\theta - q^2\sin^2\theta)]/Lm_d$$

$$K_{1s}(\omega, q, \theta) = -[(l + i\omega\cos\theta)(\gamma^2 + \omega^2\cos^2\theta + q^2\sin^2\theta) - 2iq^2\omega\cos\theta\sin^2\theta]/Lm_s$$

$$K_{2d}(\omega, q, \theta) = [(\omega^2 - q^2)(l + i\omega\cos\theta)\sin\theta\cos\theta + i\omega q^2\sin\theta\cos 2\theta]/Lm_d$$

$$K_{2s}(\omega, q, \theta) = -[(\omega^2 - q^2)(l + i\omega\cos\theta)\sin\theta\cos\theta + i\omega q^2\sin\theta\cos 2\theta]/Lm_s$$

$$K_{3d}(\omega, q, \theta) = [q^2\sin^2\theta + i\omega\cos\theta(l + i\omega\cos\theta)]/L \tag{1.15}$$

$$K_{3s}(\omega, q, \theta) = -K_{3d}(\omega, q, \theta), \quad L = (l + i\omega\cos\theta)^2 + q^2\sin^2\theta$$

$$m_d = \sqrt{\omega^2 + q^2 + 1}, \quad m_s = \sqrt{\omega^2 + q^2 + \gamma^2}, \quad \gamma = c_d/c_s, \quad l = c_d/c$$

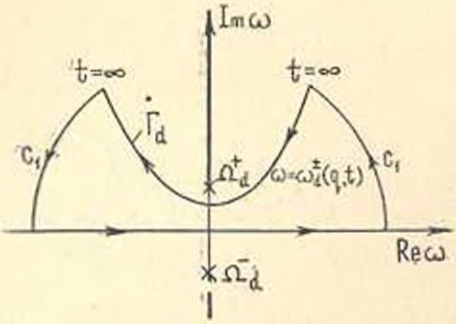
На комплексной плоскости ω подынтегральные выражения имеют простые полюсы

$$\Omega_r^{\pm} = (\pm q\sin\theta + il)/\cos\theta \tag{1.16}$$

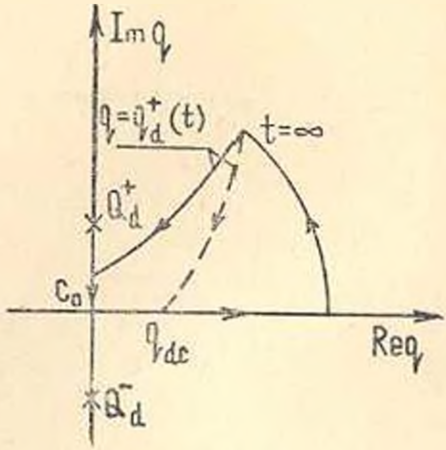
и точки ветвления

$$\Omega_d = \pm i\sqrt{q^2+1}, \quad \Omega_s = \pm i\sqrt{q^2+\gamma^2} \tag{1.17}$$

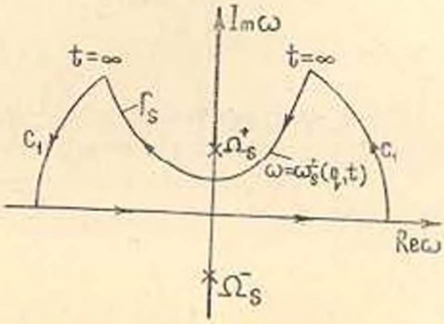
Ветви радикалов m_d и m_s фиксированы условиями $\operatorname{Re} m_d > 0$, $\operatorname{Re} m_s > 0$. При этом подынтегральные функции однозначны в плоскости ω с разрезами, как показано на фиг. 1 и 3.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

§ 2. *Переход к оригиналам продольных перемещений*

Чтобы найти оригинал изображения $\bar{u}_{jd}$, рассмотрим в плоскости ω линию Γ_d, на которой функция

$$t = \frac{1}{c_d}(zm_d - i\omega r) \tag{2.1}$$

принимает только действительные положительные значения. Разрешив относительно t, получим параметрическое уравнение одной ветви гиперболы

$$\omega_d^{\pm}(q,\ t) = \frac{c_d}{\rho^2}\left(irt \pm z\sqrt{t^2 - t_{qd}^2}\right) \quad \text{при} \quad t \in [t_{qd},\ \infty) \tag{2.2}$$

где

$$t_{qd} = t_d \sqrt{q^2+1}, \quad t_d = \rho/c_d, \quad \rho = \sqrt{r^2+z^2} \tag{2.3}$$

Вершина этой гиперболы находится в точке $\omega = ir\sqrt{q^2+1}/\rho$ и всегда лежит ниже точки ветвления Ω_d^{+}, так как $r/\rho < 1$.

Рассмотрим в плоскости ω замкнутый контур C_d, образованный линией Γ_d, действительной осью ω и дугами окружности с бесконечно большим радиусом (фиг. 1).

Полюсы $\Omega_c^{\pm}$ лежат внутри контура C_d, если

а) $\cos\theta > 0 \quad (x>0)$, б) $\dfrac{c_d r t}{\rho^2} > \dfrac{l}{\cos\theta} \quad (t > t^*$, где $t^* = \rho^2/cx)$

$$\text{г)} \quad \frac{c_d z}{\rho^2}\sqrt{t^2 - t_{qd}^2} < q\,\mathrm{tg}\,\theta \tag{2.4}$$

Условия а) и б) эквивалентны условию $q^2 > q^2_{dc}$, где

$$q^2_{dc} = (l^2\rho^2 - x^2)\, z^2/r^2 n^2, \quad n = \sqrt{y^2+z^2} \tag{2.5}$$

В зависимости от значений пространственных координат, от скорости движения импульса и от параметра q, возможны следующие случаи:

I. В области $x>0$, $l\rho - x < 0$ полюсы $\omega = \Omega_c^{\pm}$ лежат внутри C_d для $q \in [0, \infty)$, если импульс движется в среде со сверхзвуковой скоростью ($c > c_d$ или $l < 1$).

Уравнение $l\rho - x = 0$ определяет коническую поверхность, ось которой совпадает с осью x.

II. В области $x > 0$, $l\rho - x > 0$, полюсы $\omega = \Omega_c^{\pm}$ лежат внутри C_d для $q \in [q_{dc}, \infty)$ и лежат вне C_d для $q \in [0, q_{dc})$, независимо от скорости движения импульса в среде.

III. В области $x < 0$ полюсы $\omega = \Omega_c^{\pm}$ лежат вне C_d для $q \in [0, \infty)$, независимо от скорости движения импульса в среде.

Преобразуя интегралы (1.13) по действительной оси ω к интегралу по ветви гиперболы $\omega = \omega_d(q, t)$, где $\omega_d = \omega_d^{-}(q, t)$, пользуясь при этом теорией вычетов Коши и леммой Жордана, получим

$$\bar u_{jd} = \bar v_{jd} + H(x)\left[H(1-l)\,H(x-l\rho)\,\bar v_{jdc} + H(l\rho - x)\,\bar v^{*}_{jdc}\right] \tag{2.6}$$

где

$$\bar v_{jd} = \int_0^\infty \left\{ \text{v. p.} \int_{t_{qd}}^\infty \mathrm{Re}\left[K_{jd}(\omega_d, q, \theta)\frac{\partial\omega_d}{\partial t}\right] e^{-st}\,dt \right\} dq \tag{2.7}$$

$$\bar v_{jdc} = \int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{ P_{jc}(q, \theta)\exp\left[-\frac{s}{c_d}\left(z\sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} - i\Omega_c r\right)\right]\right\} dq \tag{2.8}$$

$$\overline{v}^*_{jde} = \int\limits_{q_{de}}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{P_{je}(q,\theta)\exp\left[-\frac{s}{c_d}\left(z\sqrt{\Omega_e^2+q^2+1}-i\Omega_e r\right)\right]\right\}dq \quad (2.9)$$

$$P_{1e}(q,\theta) = -\pi l^2/\cos\theta\sqrt{\Omega_e^2+q^2+1}$$

$$P_{2e}(q,\theta) = \pi l(iq - l\sin\theta)/\cos^2\theta\sqrt{\Omega_e^2+q^2+1} \quad (2.10)$$

$$P_{3e}(q,\theta) = -\pi l/2\cos\theta, \quad \Omega_e = \Omega_e^+$$

Двойной интеграл в (2.7) является несобственным. При $t = t^*$ и $q = q_{de}$ полюсы $\omega = \Omega_e^+$ лежат на контуре интегрирования $\omega = \omega_d(q, t)$ и поэтому интегрируется в смысле главного значения по Коши.

Изменяя порядок интегрирования в (2.7), получим преобразование Лапласа известной функции

$$\int\limits_0^{\infty}\left\{H(t-t_d)\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_0^{q_d}\mathrm{Re}\left[K_{jd}(\omega_d,q,\theta)\frac{\partial\omega_d}{\partial t}\right]dq\right\}e^{-st}dt \quad (2.11)$$

где

$$q_d = \sqrt{\tau^2-1}, \quad \tau = t/t_d \quad (2.12)$$

Изображения (2.7) и (2.8) обращаются также методом Каньярда. Рассмотрим в плоскости комплексной переменной q контур, на котором функция

$$t = \frac{1}{c_d}\left(z\sqrt{\Omega_e^2+q^2+1}-i\Omega_e r\right) \quad (2.13)$$

принимает действительные и положительные значения. Соотношение (2.13) определяет в плоскости комплексной переменной q параметрическое уравнение одной ветви гиперболы

$$q_d^{\pm}(t) = -il\sin\theta + \frac{l\cos\theta}{n^2}(i\xi y \pm z a_d) \quad \text{при} \quad t > t_d, \quad (2.14)$$

где

$$t_d = \frac{1}{c}\left[x + \left(\frac{c^2}{c_d^2}-1\right)^{1/2} n\right], \quad a_d = \sqrt{\xi^2-\left(\frac{c^2}{c_d^2}-1\right)n^2}, \quad \xi = ct - x \quad (2.15)$$

Гипербола (2.14) с вершиной в точке $q = -il\sin\theta + \frac{iy}{n}\sqrt{1-l^2}\cos\theta$ имеет различное расположение на плоскости комплексной переменной q в зависимости от пространственных координат и от скорости движения импульса в среде.

В области $l\rho - x < 0$ гипербола $q = q_d^*(t)$ пересекает мнимую ось ниже точки ветвления $Q_d = -il\sin\theta + i\sqrt{1-l^2}\cos\theta$ подынтегральной функции (2.8) и выше действительной оси q, если импульс движется в среде со сверхзвуковой скоростью ($c > c_d$ или $l < 1$).

Образуем замкнутый контур, составленный частью гиперболы $q = q_t(t)$, где $q_d = q_d^*(t)$, действительной положительной осью q и дополнительными линиями C_0 и C_1, как показано на фиг. 2. Применим теорию вычетов Коши к подынтегральному выражению интеграла (2.8) по этому замкнутому контуру и пользуясь тем, что действительная часть интеграла по C_0 равна нулю, получим

$$\bar{v}_{jdc} = \int_0^\infty \left\{ H(t - t_{dc}) \operatorname{Re} \left[P_{jc}(q_d, t) \frac{\partial q_d}{\partial t} \right] \right\} e^{-st}\, dt \tag{2.16}$$

В области $l\rho - x > 0$ гипербола $q = q_d(t)$ пересекает действительную ось q в точке в соответствии с нижним пределом интеграла (2.9), независимо от скорости движения импульса. При этом имеем

$$\int_0^\infty \left\{ H(t - t^*) \operatorname{Re} \left[M_{jc}(q_d, t) \frac{\partial q_d}{dt} \right] \right\} e^{-st}\, dt \tag{2.17}$$

Обращая преобразования Лапласа (2.11), (2.16) и (2.17) и пользуясь свойством линейности этого преобразования, получим

$$u_{jd} = v_{jd} + H(x)\left[H(1-l)\, H(x - l\rho)\, v_{jdc} + H(l\rho - x)\, v^*_{jdc}\right] \tag{2.18}$$

где

$$v_{jd} = H(t - t_d)\, \text{v. p.} \int_0^{q_d} \operatorname{Re} \left[K_{jd}(\omega_d, q, \theta) \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \right] dq$$

$$v_{jdc} = H(t - t_{dc}) \operatorname{Re} \left[P_{jc}(q_d, t) \frac{\partial q_d}{\partial t} \right] \tag{2.19}$$

$$v^*_{jdc} = H(t - t^*) \operatorname{Re} \left[P_{jc}(q_d, t) \frac{\partial q_d}{\partial t} \right] \tag{2.20}$$

При упрощении v_{jdc} и v^*_{jdc} заметим, что

$$\sqrt{\Omega_d^2 + q^2 + 1}\,\Big|_{q = q_d(t)} = l(\xi z + i y a_d)/n^2 \tag{2.21}$$

а для вычисления интеграла (2.19) пользуемся приемами, указанными в [6]. Преобразуем подынтегральные функции к следующему виду:

$$\operatorname{Re}\left[K_{1d}(\omega_d,\ q,\ \theta)\frac{\partial\omega_d}{\partial t}\right] = \operatorname{Re}\left\{\frac{l - i\omega_d\cos\theta}{\sqrt{\omega_d^2+q^2+1}}\frac{\partial\omega_d}{\partial t} -\right.$$

$$-\frac{1}{2\cos\theta\sqrt{\omega_d^2+q^2+1}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\arg(l + i\omega_d\cos\theta + iq\sin\theta) +\right.$$

$$\left.\left.+\arg(l + i\omega_d\cos\theta - iq\sin\theta)\right]\right\}$$

$$\operatorname{Re}\left[K_{2d}(\omega_d,\ q,\ \theta)\frac{\partial\omega_d}{\partial t}\right] =$$

$$= -\operatorname{Re}\frac{il}{2\sin\theta\sqrt{\omega_d^2+q^2+1}}\left\{\frac{\omega_d\sin\theta - q\cos\theta}{l + i\omega_d\cos\theta + iq\sin\theta} +\right.$$

$$\left.+\frac{\omega_d\sin\theta + q\cos\theta}{l + i\omega_d\cos\theta - iq\sin\theta}\right\}\frac{\partial\omega_d}{\partial t} \tag{2.22}$$

$$\operatorname{Re}\left[K_{3d}(\omega_d,\ q,\ \theta)\frac{\partial\omega_d}{dt}\right] = \frac{c_d z l}{\rho^2\sqrt{t^2-t_{0d}^2}} -$$

$$-\frac{l}{2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial t}\left[\arg(l + i\omega_d\cos\theta + iq\sin\theta) + \arg(l + i\omega_d\cos\theta + iq\sin\theta)\right]$$

где значения функции $\arg$ лежат в промежутке $(-\pi,\ \pi]$.

Вычисляя значения подынтегральных функций, после некоторых упрощений с помощью замены переменной интегрирования $q = q_d\sin\varphi$, получим

$$u_{jd} = H(t-t_d)\left\{A_j + B_j\left[\text{v. p.}\int_0^{\pi/2}\frac{a\,d\varphi}{a^2+q_d^2\cos^2(\varphi-\lambda)} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \text{v. p.}\int_0^{\pi/2}\frac{a\,d\varphi}{a^2+q_d^2\cos^2(\varphi+\lambda)}\right]\right\} +$$

$$+ H(x)\left[H(1-l)H(x-l_\rho)H(t-t_{d*}) + H(l_\rho-x)H(t-t^*)\right]C_j \tag{2.23}$$

$$(j = 1,\ 2)$$

$$u_{3d} = H(t-t_d)\left\{\frac{\pi c_d^2 at}{2\rho^3} +\right.$$

$$+\frac{c_d lr}{2\rho n}\left[\text{v. p.}\int_0^{\pi/2}\frac{an\tau\cos\lambda/x + q_d^2\cos(\varphi-\lambda)\cos\varphi}{a^2+q_d^2\cos^2(\varphi-\lambda)}\,d\varphi +\right.$$

$$\left.\left.+\ \text{v. p.}\int_0^{\pi/2}\frac{an\tau\cos\lambda/x + q_d^2\cos(\varphi+\lambda)\cos\varphi}{a^2+q_d^2\cos^2(\varphi+\lambda)}\,d\varphi\right]\right\} +$$

$$+\frac{\pi c_d^2 z\xi}{ca_d n^2} H(x)[H(1-l)\,H(x-l\rho)\,H(t-t_{dc})+H(l\rho-x)\,H(t-t^*)] \quad (2.24)$$

где

$$A_1=\frac{\pi c_d^2(\rho^2+ctx)}{2c\rho^3},\quad B_1=\frac{c_d l^2 r}{2n},\quad C_1=\frac{\pi c_d^2}{ca_d}$$
$$A_2=\frac{\pi c_d^2 yt}{2\rho^3},\quad B_2=\frac{c_d^2 lrt}{2\rho^2 n},\quad C_2=\frac{\pi c_d y\xi}{a_d n^2} \quad (2.25)$$

$$z\sin\theta=m\sin\lambda,\quad \rho\cos\theta=m\cos\lambda,\quad m=\sqrt{x^2+z^2}$$
$$z\cos\theta=n\cos\lambda,\quad \rho\sin\theta=n\sin\lambda,\quad a=(l\rho-\xi x)/n \quad (2.26)$$

Заменяя $\operatorname{tg}(\varphi-\lambda)$ и $\operatorname{ctg}(\varphi+\lambda)$ через η в первом и во втором интегралах соответственно, после интегрирования имеем

$$u_{1d}=H(t-t_d)\left\{\frac{\pi c_d^2(\rho^2+ctx)}{2c\rho^3}+\frac{c_d^2 u_d}{2ca_d}\right\}+\frac{\pi c_d^2}{ca_d}\eta(x,\ \rho,\ t,\ t_{dc},\ t^*,\ l) \quad (2.27)$$

$$u_{2d}=H(t-t_d)\left\{\frac{\pi c_d^2 rt}{2\rho^3}-\frac{c_d^2 ytu_d}{2\rho^2 a_d}\right\}-\frac{\pi c_d^2 y\xi}{ca_d n^2}\eta(x,\ \rho,\ t,\ t_{dc},\ t^*,\ l) \quad (2.28)$$

$$u_{3d}=H(t-t_d)\left\{\frac{\pi c_d^2 zt}{2\rho^3}+\frac{c_d^2 xz}{2c\rho n^2}\left(\pi+\frac{\rho\xi u_d}{xa_d}\right)\right\}+\frac{\pi c_d^2 z\xi}{ca_d n^2}\eta(x,\rho,t,t_{dc},t^*,l) \quad (2.29)$$

где

$$u_d=\operatorname{arctg}\frac{xz(n^2-\xi x)}{y\rho^2 a_d}+\operatorname{arctg}\frac{y(n^2-\xi x)}{xza_d}+$$
$$+\operatorname{arctg}\frac{y\rho^2 a_d}{xz(n^2-\xi x)}+\operatorname{arctg}\frac{xza_d}{y(n^2-\xi x)} \quad (2.30)$$

$$\eta(x,\ \rho,\ t,\ t_{dc},\ t^*,\ l)=H(x)[H(1-l)H(x-l\rho)\,H(t-t_{dc})+$$
$$+H(l\rho-x)\,H(t-t^*)] \quad (2.31)$$

§ 3. *Переход к оригиналам поперечных перемещений*

Обращение $\bar{u}_{js}$ производится таким же образом, как и для $\bar{u}_{jd}$. В плоскости комплексной переменной ω уравнение

$$t=\frac{1}{c_d}(zm_s-i\omega r) \quad (3.1)$$

определяет одну ветвь гиперболы

$$\omega_s^{\pm}(q,\ t)=\frac{c_d}{\rho^2}\left(irt\pm z\sqrt{t^2-t_{ps}^2}\right)\quad \text{при}\quad t\in[t_{ps},\ \infty) \quad (3.2)$$

где

$$t_{qs} = t_s \sqrt{q^2 + \gamma_s^2}, \quad t_s = \rho/c_s \tag{3.3}$$

с вершиной в точке $\omega = ir\sqrt{q^2 + \gamma_s^2}/\rho$. Эта гипербола не пересекает разреза в плоскости ω, проведенного между точками ветвления $\Omega_s^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + \gamma_s^2}$ подынтегральной функции u_{js}, так как $r/\rho < 1$.

Полюсы $\omega = \Omega_c^-$ лежат внутри замкнутого контура C_s, составленного ветвью гиперболы $\omega = \omega_s(q, t)$, действительной осью ω и дугами окружности с бесконечно большим радиусом (фиг. 3), если

$$\text{а)} \quad \cos\theta > 0 \quad (x > 0); \quad \text{б)} \quad \frac{c_d r t}{\rho^2} < \frac{l}{\cos\theta} \quad (t > t^*)$$
$$\text{в)} \quad \frac{c_d z}{\rho^2}\sqrt{t^2 - t_{qs}^2} < q \operatorname{tg}\theta \tag{3.4}$$

Условия б) и в) эквивалентны условию $q^2 > q_{sc}^2$, где

$$q_{sc}^2 = (l^2\rho^2 - \gamma^2 x^2)\, z^2/r^2 n^2 \tag{3.5}$$

Имеются следующие случаи:

I. В области $x > 0$, $l\rho - \gamma x < 0$ и для скоростей движения импульса в среде $c > c_s$ или $l/\gamma < 1$ полюсы $\omega = \Omega_c^{\pm}$ лежат внутри контура C_s для $q \in [0, \infty)$.

Уравнение $l\rho - \gamma x = 0$ определяет поверхность конуса, ось которого совпадает с осью x.

II. В области $x > 0$, $l\rho - \gamma x > 0$ полюсы $\omega = \Omega_c^{\pm}$ лежат внутри контура C_s для $q \in [q_{sc}, \infty)$ и лежат вне C_s для $q \in [0, q_{sc})$, независимо от скорости движения импульса в среде.

III. В области $x < 0$ полюсы $\omega = \Omega_c^{\pm}$ лежат вне контура C_s для $q \in [0, \infty)$, независимо от скорости движения импульса в среде.

Выполнив для каждой из указанных областей интегрирование подынтегральной функции $\bar{u}_{js}$ по замкнутому контуру C_s, как это сделано для u_{jd}, получим

$$\bar{u}_{js} = \bar{v}_{js} + H(x)[H(\gamma - l) H(\gamma x - l\rho)\bar{v}_{jsc} + H(l\rho - \gamma x)\bar{v}_{jsc}^*] \tag{3.6}$$

где

$$\bar{v}_{js} = \int_0^\infty \left\{ \text{v. p.} \int_{t_{qs}}^\infty \operatorname{Re}\left[K_{js}(\omega_s, q, \theta) \frac{\partial \omega_s}{\partial t} \right] e^{-st} dt \right\} dq \tag{3.7}$$

$$\bar{v}_{jsc} = \int_0^\infty \operatorname{Re}\left\{ P_{js}(q, \theta) \exp\left[-\frac{s}{c_d}\left(z\sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} - i\Omega_c r\right) \right] \right\} dq \tag{3.8}$$

$$\bar{v}^{\cdot}_{jsc} = \int\limits_{q_{sc}}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{P_{jsc}(q, \theta)\exp\left[-\frac{s}{c_d}\left(z\sqrt{\Omega_c^2+q^2+1}-i\Omega_c r\right)\right]\right\}dq \qquad (3.9)$$

$$P_{1sc}(q, \theta) = \frac{\pi(l^2-\gamma^2)}{\cos\theta\sqrt{\Omega_c^2+q^2+1}}, \qquad P_{2sc}(q, \theta) = -\frac{\pi l(iq-l\sin\theta)}{\cos^2\theta\sqrt{\Omega_c^2+q^2+\gamma^2}} \qquad (3.10)$$

$$P_{3sc}(q, \theta) = -\frac{\pi l}{2\cos\theta}, \qquad \omega_s = \omega_s^-(q, t)$$

Интеграл (3.7) имеет особенность при $t = t_{qs}$. Наличие особенности в (3.7) при $t = t_{q}$, обусловлено тем, что при $t = t^*$ и $q = q_{sc}$ полюсы $\omega = \Omega_r^-$ лежат на контуре интегрирования $\omega = \omega_s^-(q, t)$.

Поменяв порядок интегрирования в интеграле (3.7), получим

$$\int\limits_0^{\infty}\left\{H(t-t_s)\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_0^{q_s}\mathrm{Re}\left[K_{js}(\omega_s, q, \theta)\frac{\partial\omega_s}{\partial t}\right]dq\right\}e^{-st}\,dt \qquad (3.11)$$

где

$$q_s = \sqrt{\tau^2-\gamma^2} \qquad (3.12)$$

Для (3.8) и (3.9) частный контур

$$t = \frac{1}{c_d}\left(z\sqrt{\Omega_c^2+q^2+\gamma^2}-i\Omega_c r\right) \qquad (3.13)$$

в плоскости комплексной переменной ω определяет одну ветвь гиперболы

$$q_s^{\pm}(t) = -il\sin\theta + \frac{l\cos\theta}{n^2}(i\xi y \pm z a_s) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_{sc} \qquad (3.14)$$

где

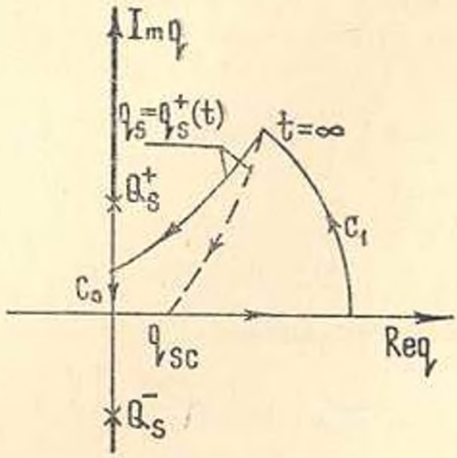
$$t_{sc} = \frac{1}{c}\left[x+\left(\frac{c^2}{c_s^2}-1\right)^{1/2}n\right], \quad a_s = \sqrt{\xi^2-\left(\frac{c^2}{c_s^2}-1\right)n^2} \qquad (3.15)$$

Гипербола $q = q_s^{\pm}(t)$ с вершиной в точке $q = -il\sin\theta + \frac{iy}{n^2}\sqrt{q^2-\gamma^2}\cos\theta$ находится выше действительной оси q, если $l\rho-\gamma x < 0$ и $c > c_s$ или $\gamma > l$. Она пересекает действительную ось q при любых значениях l в соответствии с нижним пределом интеграла (3.9), если $l\rho-\gamma x < 0$. Ни при каких значениях пространственных координат и l гипербола $q = q_s(t)$ не пересекает разреза, проведенного между точками ветвления $Q_s^{\pm} = -il\sin\theta \pm i\sqrt{\gamma^2-l^2}\cos\theta$ подынтегральной функции на комплексной плоскости q, так как $y/n < 1$.

Образуя замкнутый контур, составленный частью гиперболы $q = q_s(t)$, где $q_s = q_s^+(t)$, действительной положительной осью q и дополнительными линиями C_0 и C_1 (фиг. 4) точно так же, как и для интегралов (2.8) и (2.9), получим

$$\bar{v}_{jsc} = \int_0^\infty \left\{ H(t - t_{sc}) \operatorname{Re} \left[P_{jsc}(q_s, t) \frac{\partial q_s}{\partial t} \right] \right\} e^{-st} \, dt \tag{3.16}$$

$$\bar{v}^*_{jsc} = \int_0^\infty \left\{ H(t - t^*) \operatorname{Re} \left[P_{jsc}(q_s, t) \frac{\partial q_s}{\partial t} \right] \right\} e^{-st} \, dt \tag{3.17}$$



Фиг. 4.

Обращая изображения (3.11), (3.16) и (3.17), получаем

$$u_{js} = v_{js} + H(x) \left[H(\gamma - l) H(\gamma x - l\rho) v_{jsc} + H(l\rho - \gamma x) v^*_{jsc} \right] \tag{3.18}$$

где

$$v_{js} = H(t - t_s) \, \text{v. p.} \int_0^{q_s} \operatorname{Re} \left[K_{js}(\omega_s, q, 0) \frac{\partial \omega_s}{\partial t} \right] dq \tag{3.19}$$

$$v_{jsc} = H(t - t_{sc}) \operatorname{Re} \left[P_{jsc}(q_s, t) \frac{\partial q_s}{\partial t} \right] \tag{3.20}$$

$$v^*_{jsc} = H(t - t^*) \operatorname{Re} \left[P_{jsc}(q_s, t) \frac{\partial q_s}{\partial t} \right] \tag{3.21}$$

При упрощении алгебраических членов в (3.18), заметим, что $\sqrt{\Omega_r^2 + q^2 + \gamma^2}\,\Big|_{q = q_s} = l(\xi z + i y a_s)/n^2$, а для вычисления интеграла

(3.19) пользуемся такими же приемами, как и при вычислении интеграла (2.7). Окончательные формулы для u_{js} имеют вид

$$u_{1s} = H(t - t_s)\left\{\frac{\pi c_d^2(\rho^2 + ctx)}{2c\rho^3} + \frac{c(\gamma^2 - l^2)u_s}{2a_s}\right\} + \frac{\pi c_d(\gamma^2 - l^2)}{a_s}\eta' \tag{3.22}$$

$$u_{2s} = H(t - t_s)\left\{\frac{\pi c_d^2 rt}{2\rho^3} - \frac{c_d^2 rtu_s}{2\rho^2 a_s}\right\} - \frac{\pi c_d^2 \xi y}{ca_s n^2}\eta' \tag{3.23}$$

$$u_{3s} = H(t - t_s)\left\{\frac{\pi c_d^2 zt}{2\rho^3} + \frac{c_d^2 xz}{2c\rho n^2}\left(\pi + \frac{\rho\xi u_s}{xa_s}\right)\right\} + \frac{\pi c_d^2 z\xi}{ca_s n^2}\eta' \tag{3.24}$$

где

$$u_s = \operatorname{arctg}\frac{xz(n^2 - \xi x)}{y\rho^2 a_s} + \operatorname{arctg}\frac{y(n^2 - \xi x)}{xza_s} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{y\rho^2 a_s}{xz(n^2 - \xi x)} + \operatorname{arctg}\frac{xza_s}{y(n^2 - \xi x)} \tag{3.25}$$

$$\eta' \equiv \eta'(x, \rho, t_{sc}, t, t^*, \gamma, l) = H(x)[H(\gamma - l)H(\gamma x - l\rho)H(t - t_{sc}) +$$

$$+ H(l\rho - \gamma x)H(t - t^*)] \tag{3.26}$$

§ 4. *Компоненты перемещения*

Компоненты перемещений u_j ($j = 1, 2, 3$) являются суммой u_{jd} и u_{js}. Имеем

$$u_j = -\frac{\tau_0}{2\pi^2 c_d^2 c}\{H(t - t_d)u_{jd} + H(t - t_s)u_{js} +$$

$$+ H(x)[H(1 - l)H(x - l\rho)H(t - t_{dc}) +$$

$$+ H(l\rho - x)H(t - t^*)]u_{jdc} + H(x)[H(\gamma - l)H(\gamma x - l\rho)H(t - t_{sc}) +$$

$$+ H(l\rho - \gamma x)H(t - t^*)]u_{jsc}\} \tag{4.1}$$

где

$$u_{1d} = \frac{\pi c_d^2(\rho^2 + ctx)}{2c\rho^3} + \frac{c_d^2 u_d}{2ca_d}, \qquad u_{2d} = \frac{\pi c_d^2 rt}{2\rho^3} - \frac{c_d^2 rtu_d}{2\rho^2 a_d}$$

$$u_{3d} = \frac{\pi c_d^2 zt}{2\rho^3} + \frac{c_d^2 xz}{2c\rho n^2}\left(\pi + \frac{\rho\xi u_d}{xa_d}\right), \qquad u_{1s} = \frac{\pi c_d^2(\rho^2 + ctx)}{2\rho^3} + \frac{c(\gamma^2 - l^2)u_s}{a_s}$$

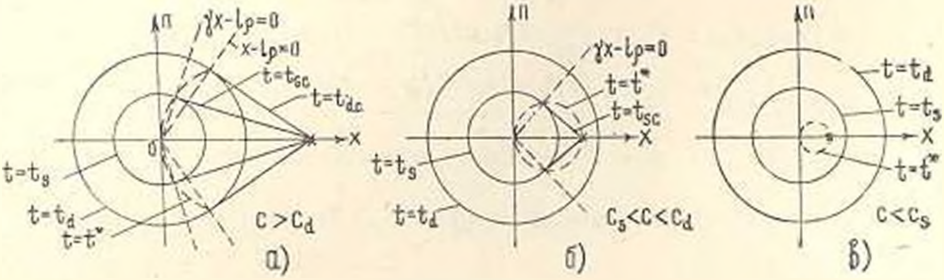
$$u_{2s} = \frac{\pi c_d^2 rt}{2\rho^3} - \frac{c_d^2 ytu_s}{2\rho^2 a_s}, \qquad u_{3s} = \frac{\pi c_d^2 zt}{2\rho^3} + \frac{c_d^2 xz}{2c\rho n^2}\left(\pi + \frac{\rho\xi u_s}{xa_s}\right)$$

$$u_{1dc} = \frac{\pi c_d^2}{ca_d}, \qquad u_{2dc} = \frac{\pi c_d y\xi}{a_d n^2}, \qquad u_{3dc} = \frac{\pi c_d^2 z\xi}{ca_d n^2}$$

$$u_{1sc} = \frac{\pi c_d (\gamma^2 - l^2)}{a_s}, \qquad u_{2sc} = \frac{\pi c_d^2 y \xi}{c a_s n^2}, \qquad u_{3sc} = \frac{\pi c_d^2 z \xi}{c a_s n^2} \tag{4.2}$$

В формуле (4.1) первых два члена представляют волны продольных и поперечных перемещений со сферическими фронтами $t = t_d$ и $t = t_s$, исходящими из начального положения приложенного импульса.

Два последних члена представляют перемещения, тесно связанные с движением импульса в среде. Причем, при сверхзвуковой скорости движения импульса в областях $x - l\rho > 0$, $x > 0$ и $\gamma x - l\rho > 0$, $x > 0$, кроме указанных волн, распространяются еще волны с коническими фронтами $t = t_{dc}$ и $t = t_{sc}$ соответственно. Позади, в областях $l\rho - x > 0$ и $l\rho - \gamma x > 0$, эти волны ограничены подвижной сферической поверхностью $t = t^*$ с центром в точке $x = cl/2$, $n = 0$ и с радиусом $cl/2$. Подвижная сферическая граница $t = t^*$ не является ни характеристической поверхностью и ни огибающей характеристических поверхностей, поэтому не является и фронтом волн перемещений (фиг. 5*а*).



Фиг. 5.

Как видно из (4.1), решение при переходе подвижной поверхности $t = t^*$ остается непрерывным. Однако, решение имеет конечный разрыв непрерывности вблизи сферических фронтов волн $t = t_d$, $t = t_s$ и бесконечный разрыв порядка — 1/2 вблизи конических фронтов волн $t = t_{dc}$, $t = t_{sc}$. Физически разрывы премещений вблизи сферических и конических фронтов волн не реальны, и, по-видимому, обусловлены тем, что вблизи фронтов волн появляются неупругие перемещения.

Волновая картина при трансзвуковой скорости движения импульса показана на фиг. 5*б*. При этом члены с коническим фронтом волн $t = t_{dc}$ равняются нулю, так как $H(1 - l) = 0$.

Наконец, при дозвуковой скорости движения импульса $H(1 - l) = 0$ и $H(\gamma - l) = 0$ и в среде распространяются только волны перемещений со сферическими фронтами $t = t_d$ и $t = t_s$ (фиг. 5*г*).

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 3 XII 1976

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՇԱՐԺՎՈՂ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑՎԱԾ ԻՄՊՈՒԼՍԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է տեղափոխության վեկտորի որոշման ոչ ստացիոնար խնդիրը համասեռ, իզոտրոպ, առաձգական տարածությունում, որը գրգռված է միջավայրում շարժվող կենտրոնացված իմպուլսով։

Խնդրի ճշգրիտ անալիտիկական լուծումը ստացվում է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների և այնուհետև Կանյարդի մեթոդով ձևական լուծման շրջման օգտագործումով։

THE SOLUTION OF A NON-STATIONARY PROBLEM FOR AN ELASTIC SPACE WITH MOVING CONCENTRATED IMPULSE IN THE MEDIUM

S. G. SAHAKIAN

S u m m a r y

The non-stationary problem to determine the displacement vector in a uniform isotropic elastic space induced by a moving concentrated impulse in the medium is considered.

The accurate analitic solution to the problem is obtained to inverse the integral transformations of Laplace and Fourier by the method of Cagniard.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М.* и др. Линейные уравнения математической физики. М., «Наука», 1964.
2. *Бабич В. М.* Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды. ПММ, 1961, т. 25, № 1.
3. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 3.
4. *Франк Ф.* и *Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XII. М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. McGraw-Hill, N. Y., 1962.
6. *Саакян С. Г.* Распространение трехмерных нестационарных волн давления в полупространстве идеальной сжимаемой жидкости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 6.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Е. В. КОВАЛЕНКО

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Рассматриваются плоские периодические контактные задачи для упругой полосы толщины h, сводящиеся к интегральным уравнениям первого рода типа свертки на конечном интервале вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, K\left(\mu, \frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \tag{0.1}$$

$$(|x| \leqslant 1, \quad \lambda > 1, \quad \mu \geqslant \mu_0 > 0, \quad \mu_0 = \text{const})$$

$$K(\mu, t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{-1} L(\mu u_k) \cos u_k t \qquad \left(t = \frac{\xi - x}{\lambda}\right) \tag{0.2}$$

Здесь встречаются два варианта: А) $u_k = \pi k$; В) $u_k = \pi(k - 1/2)$.

Для приближенного решения интегральных уравнений (0.1)—(0.2) использован метод ортогональных многочленов [1], который позволил свести их к решению эквивалентных бесконечных линейных алгебраических систем. Доказана разрешимость бесконечных систем в некоторых классах последовательностей почти при всех значениях геометрических параметров λ и μ.

В качестве примеров рассмотрены периодические задачи о действии штампов на упругую полосу: 1) лежащую без трения на недеформируемом основании в предположении двухсторонней связи нижней границы полосы с основанием; 2) жестко соединенную с недеформируемым основанием, а также 3) периодическая контактная задача о чистом сдвиге. При этом в первых двух случаях трение между штампами и полосой отсутствует, а в третьем — выполнено условие жесткого контакта.

1. *Постановка задач и вывод интегральных уравнений.* Пусть на одну из границ упругой изотропной полосы с упругими постоянными G и ν (G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона) и толщиной h действует периодическая (с периодом l) система несвязанных между собой штампов (n штук в периоде).

На противоположной грани полосы могут быть заданы любые из известных граничных условий. Требуется определить напряжения, возникающие в области контакта полосы и штампов.

Выведем интегральное уравнение задачи в случае А) (силы, приложенные к штампам, в интервалах соседних периодов имеют одинаковые направления).

Пусть в пределах k-го периода участки контакта — $[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}]$, $[a_2^{(k)}, b_2^{(k)}]$, ..., $[a_n^{(k)}, b_n^{(k)}]$. Напряжение $q(x)$ в области контакта — функция периодическая с периодом l. Перемещение точки с координатой x границы полосы от элементарной силы $q(\xi_k)\,d\xi_k = q(\xi)\,d\xi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, q(\xi)\,d\xi = q(\xi_0)\,d\xi_0,\ kl < \xi_k < (k+1)l)$ равно [1]

$$dv_k(\xi, x) = -\frac{q(\xi)\,d\xi}{2\pi\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos\left(u\frac{\xi + kl - x}{h}\right)du \qquad (1.1)$$

(Δ — некоторая комбинация упругих постоянных, определяемая конкретными задачами). Относительно функции $L(u)$ в (1.1) будем предполагать: 1) $L(u)$ — нечетная функция вещественного переменного $u \in [-\infty, \infty]$; 2) $L(u)$ обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$L(u) = Au + O(u^3)\ (u \to 0), \quad L(u) = 1 + O(e^{-pu})\ (u \to \infty,\ p > 0) \quad (1.2)$$

Общее перемещение граничной точки с координатой x вычислится по формуле

$$dv(\xi, x) = -\frac{q(\xi)d\xi}{2\pi\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(u)}{u}\left\{\cos\left(u\frac{\xi - x}{h}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\cos\left(u\frac{\xi + kl - x}{h}\right) + \cos\left(u\frac{\xi - kl - x}{h}\right)\right]\right\}du$$

Далее, суммируя по всем участкам контакта в интервале одного периода и используя равенство [2]

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x - 2\pi k)$$

($\delta(x - 2\pi k)$ — дельта-функция Дирака), получим

$$v(x) = -\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{n}\int_{a_m}^{b_m} q(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos\left(u\frac{\xi - x}{h}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{lu}{h} - 2\pi k\right)du$$

(1.3)

Здесь $a_m^{(0)} = a_m$, $b_m^{(0)} = b_m$. Положив во внутреннем нтеграле раненства (1.3) $lu/h = \beta$ с учетом соотношения [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\delta(\xi - a)\,d\xi = f(a)$$

и свойств функции $L(u)$ при $h < \infty$, $l < 0$ найдем

$$v(x) = -\frac{Ah}{\Delta l}P - \frac{1}{\pi\Delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left(\frac{2\pi kh}{l}\right)}{k}\int_{\Gamma} q(\xi)\cos\frac{2\pi k}{l}(x-\xi)\,d\xi \qquad (1.4)$$

В (1.4) обозначено

$$P = \sum_{m=1}^{n}\int_{a_m}^{b_m} q(\xi)\,d\xi, \qquad \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i]$$

На n участках контакта в пределах одного периода $v(x)$ — известная функция. Положим $v(x) = -w(x)$. Тогда из (1.4) получим интегральное уравнение для определения неизвестного контактного напряжения $q(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left(\frac{2\pi kh}{l}\right)}{k}\int_{\Gamma} q(\xi)\cos\frac{2\pi k}{l}(\xi-x)\,d\xi = \pi\Delta w(x) - \frac{\pi AhP}{l} \qquad (1.5)$$

Используя далее вторую формулу (1.2) и соотношение [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k} = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$$

запишем окончательный вид интегрального уравнения периодической контактной задачи для полосы

$$\text{A)}\quad -\int_{\Gamma} q(\xi)\ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi-x)}{l}\right|d\xi = \pi\Delta w(x) -$$

$$-\frac{\pi Ah}{l}P - \int_{\Gamma} q(\xi)N_1(\xi,\ x)\,d\xi \qquad (1.6)$$

$$N_1(\xi,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left(\frac{2\pi kh}{l}\right)-1}{k}\cos\frac{2\pi k}{l}(\xi-x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Аналогично выводится интегральное уравнение периодической контактной задачи в случае B) (силы, приложенные к штампам в интервалах соседних периодов, имеют противоположные направления)

$$\text{B)}\ -\int_{\Gamma} q(\xi)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-x)}{2l}\right|d\xi = \pi\Delta w(x) - \int_{\Gamma} q(\xi)N_2(\xi,\ x)\,d\xi \qquad (1.7)$$

$$N_2(\xi,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left[\frac{\pi h(2k-1)}{l}\right]-1}{2k-1}\cos\frac{\pi(2k-1)}{l}(x-\xi) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Рассмотрим далее случай, когда в периоде содержится один штамп. Перенося начало координат в середину периода, полагая

$$l=2b,\quad x=ax',\quad \xi=a\xi',\quad \mu=h/b,\quad \lambda=b/a$$

(a — полуширина штампа) и опуская штрихи у x и ξ, получим интегральные уравнения периодических контактных задач в случаях А) и В) в безразмерных переменных

$$\text{A)} -\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi-x)}{2\lambda}\right|d\xi=\pi f(x)-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)N_1\left(\mu,\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \tag{1.8}$$

$$N_1\left(\mu,\frac{\xi-x}{\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L(\pi k\mu)-1}{k}\cos\frac{\pi k}{\lambda}(\xi-x),\quad (|x|\leqslant 1)$$

$$f(x)=-\frac{PA\mu}{2a}+\frac{\Delta w(ax)}{a},\qquad q(a\xi)=\varphi(\xi)$$

$$\text{B)} -\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-x)}{4\lambda}\right|d\xi=\pi f(x)-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)N_2\left(\mu,\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \tag{1.9}$$

$$N_2\left(\mu,\frac{\xi-x}{\lambda}\right)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left[\dfrac{\pi(2k-1)}{2}\mu\right]-1}{2k-1}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2\lambda}(\xi-x)$$

$$(|x|\leqslant 1)$$

$$f(x)=\frac{\Delta w(ax)}{a},\qquad q(a\xi)=\varphi(\xi)$$

Исходя из соотношений (1.2), можно показать, что функция $N_i\left(\mu,\dfrac{\xi-x}{\lambda}\right)$ $(i=1,2)$ будет непрерывна и будет иметь непрерывные производные любого порядка при всех значениях $|t|=\left|\dfrac{\xi-x}{\lambda}\right|\in[0,2)$, $\mu>\mu_0>0$. Кроме того, справедлива следующая асимптотическая формула:

$$N_i(\mu,t)=O(e^{-\pi\mu\gamma_i})\qquad\left(\mu\to\infty,\ t=\frac{\xi-x}{\lambda},\quad \gamma_1=1,\quad \gamma_2=0.5\right) \tag{1.10}$$

для всех $|t|\in[0,2)$.

Таким образом, из сказанного следует, что $N_i(\mu,t)$ $(i=1,2)$ ограничена при всех $|t|\in[0,2)$, $\mu>\mu_0>0$ и стремится к нулю при $\mu\to\infty$. С учетом этого можно утверждать, что левые части в (1.8), (1.9) полностью отражают основные свойства интегральных уравнений (1.8), (1.9). При этом, очевидно, вторые слагаемые в правых частях указанных интегральных уравнений будут играть малозначительную роль при всех значениях $|t| \in [0, 2)$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$. Отсюда следует, что если точно обратить интегральные операторы

$$L_A\varphi = -\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(\xi - x)}{2\lambda} \right| d\xi$$

$$L_B\varphi = -\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi(\xi - x)}{4\lambda} \right| d\xi \tag{1.11}$$

то, по сути дела, будет качественно точно выявлено поведение решений уравнений (1.8), (1.9) для случаев A) и B) при всех $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$. На этой основе может быть развит приближенный метод решения интегральных уравнений (1.8), (1.9) для всех $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$.

Перейдем к исследованию важных вспомогательных интегральных уравнений вида

$$L_A^{\pm}\varphi = \pi g_1^{\pm}(x), \quad L_B\varphi = \pi g_2(x) \tag{1.12}$$

Будем предполагать, что $g_1^{\pm}(x)$ — соответственно четная и нечетная функции переменного x, $g_2(x)$ — нечетная функция x[1].

Произведем в уравнениях (1.12) замены переменных и введем обозначения по формулам

A) а) четный случай:

$$\beta = \frac{\sin r\xi}{\sin r}, \qquad \alpha = \frac{\sin rx}{\sin r}, \qquad r = \pi(2\lambda)^{-1} \tag{1.13}$$

$$\varphi^*(\beta) = \left(\frac{r \cos r\xi}{\sin r}\right)^{-1} \varphi(\xi), \qquad g^*(\alpha) = g_1^{+}(x) + \frac{1}{\pi} P \ln|2 \sin^2 r|$$

в) нечетный случай:

$$\beta = \frac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}, \qquad \alpha = \frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}, \qquad r = \pi(2\lambda)^{-1} \tag{1.14}$$

$$\varphi^*(\beta) = \left(\frac{r}{\operatorname{tg} r \cos^2 r\xi}\right)^{-1} \varphi(\xi), \qquad g^*(\alpha) = g_1^{-}(x)$$

B) $$\beta = \frac{\sin r\xi}{\sin r}, \qquad \alpha = \frac{\sin rx}{\sin r}, \qquad r = \pi(2\lambda)^{-1} \tag{1.15}$$

$$\varphi^*(\beta) = \left(\frac{r \cos r\xi}{\sin r}\right)^{-1} \varphi(\xi), \qquad g^*(\alpha) = g_2(x)$$

---

[1] Четный случай для задач типа B) имеет свою специфику и будет рассмотрен в последующей работе авторов.

С учетом четности и нечетности функций $g_1(x)$, $g_2(x)$ перепишем уравнения (1.12) в единой форме

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi^*(\beta)\ln|\beta-\alpha|\,d\beta = g^*(\alpha), \quad (|\alpha|\leqslant 1) \tag{1.16}$$

Таким образом, вопросы существования и единственности решения интегральных уравнений (1.12) можно решить, изучив их для уравнения (1.16).

2. *О структуре решения интегральных уравнений (1.12).* Будем искать решение интегрального уравнения (1.16) в виде

$$\varphi^*(\beta) = \omega(\beta)(1-\beta^2)^{-1/2} \tag{2.1}$$

Относительно функции $\omega(\alpha)$ будем предполагать, что она принадлежит классу $L_2^{1/2}(-1, 1)$, который представляет собой полное пространство функций с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1}\frac{[f(\alpha)]^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha$$

Теперь заметим, что для интегрального оператора, стоящего в левой части (1.16), известна замкнутая в $L_2^{1/2}(-1, 1)$ система собственных функций, которую составляют полиномы Чебышева первого рода [4]

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\ln|\beta-\alpha|\,d\beta = \frac{T_n(\alpha)}{c_n}, \qquad \left(c_0 = \frac{1}{\ln 2}, \quad c_n = n \geqslant 1\right) \tag{2.2}$$

Из замкнутости системы следует, что для любой функции $\omega(\alpha)\in L_2^{1/2}(-1, 1)$ возможно единственное представление [5]

$$\omega(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_n T_n(\alpha), \qquad (\|\omega\|_{L_2^{1/2}} = \|\omega\|_{l_2}) \tag{2.3}$$

Здесь l_2 — полное пространство последовательностей с нормой

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2, \quad (f=\{f_n\})$$

Предположим, что в (1.16) функция $g^*(\alpha)$ такова, что $g^{*\prime}(\alpha)\in L_2^{1/2}(-1, 1)$. Тогда, тем более, для $g^*(\alpha)$ возможно представление

$$g^*(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n T_n(\alpha) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.1), (2.3), (2.4) в уравнение (1.16) и используя (2.2), получим

$$\omega_n = c_n g_n \tag{2.5}$$

Теорема 1. Если $g^{*\prime}(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$, то существует единственное решение интегрального уравнения (1.16), такое что $\varphi^*(\beta)$ имеет вид (2.1), а функция $\omega(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$. Кроме того, имеет место следующее соотношение корректности:

$$\|\omega(\alpha)\|^2_{L_2^{1/2}} \leqslant c_0^2 \left(\int_{-1}^{1} \frac{g^*(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right)^2 + m\|g^{*\prime}(\alpha)\|^2_{L_2^{1/2}}, \qquad (m = \text{const}) \tag{2.6}$$

которое также можно представить в виде

$$\|\varphi^*(\alpha)\|_{L_{4/3-0}} \leqslant m_1 \|g^*(\alpha)\|_{W^1_{4+0}}, \quad (m_1 = \text{const}) \tag{2.7}$$

Здесь $L_p(-1, 1)$ — пространство функций, абсолютно суммируемых при $\alpha \in [-1, 1]$ со степенью p, $W_p^k(-1, 1)$ — пространство функций, k-ые производные которых абсолютно суммируемы при $\alpha \in [-1, 1]$ со степенью p.

Для доказательства теоремы продифференцируем (2.4) один раз по α. С учетом (2.5) будем иметь

$$g^{*\prime}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_n}{c_n} T_n'(\alpha) \tag{2.8}$$

С другой стороны, для функции $g^{*\prime}(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$ имеет место разложение

$$g^{*\prime}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n' T_n(\alpha), \quad (\{g_n'\} \in l_2) \tag{2.9}$$

Выражая в (2.8) производные от полиномов Чебышева через сами полиномы и сравнивая с (2.9), найдем

$$\omega_1 = g_0' - \frac{1}{2} g_2', \qquad \omega_{2k-1} = g_{2k}' - g_{2k+2}' \quad \omega_{2k} = g_{2k-1}' - g_{2k+1}' \tag{2.10}$$

На основании формул (2.10) и неравенства Коши-Буняковского [5], можем записать

$$\|\omega(\alpha)\|^2_{l_2} \leqslant c_0^2 g_0^2 + m\|g^{*\prime}(\alpha)\|^2_{l_2} \tag{2.11}$$

или в силу эквивалентности норм (2.3) в виде (2.6). С помощью неравенства Гельдера [5] нетрудно установить

$$\|\varphi^*(\alpha)\|_{L_{4/3-0}} \leqslant \pi\|\omega(\alpha)\|_{L_2^{1/2}}, \qquad \|g^{*\prime}(\alpha)\|_{L_2^{1/2}} \leqslant m_2\|g^{*\prime}(\alpha)\|_{L_{4+0}}$$

$$(m_2 = \text{const})$$

и тем самым убедиться в справедливости (2.7).

Следствие 1. Из (2.7) вытекает существование единственного решения $\varphi^*(\alpha)$ интегрального уравнения (1.16) в классе $L_{4/3-0}(-1, 1)$ при $g^*(\alpha) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$.

При использовании результата (2.7) следует еще иметь в виду, что если $g^*(\alpha) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$, то $g^*(\alpha) \in B_\nu(-1, 1)$, $0 < \nu < 3/4$. В справедливости этого можно также убедиться с помощью неравенства Гельдера. Здесь $B^\varkappa_k(-1, 1)$ — пространство функций, k-ая производная которых при $|\alpha| \leqslant 1$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \varkappa \leqslant 1$. Отметим еще, что если $g^*(\alpha) \in B^\varkappa_1(-1, 1)$ и $\varkappa > 0$, то, как показано в работе [6], $\omega(\alpha) \in B^\nu_0(-1, 1)$ и $\nu = \varkappa$ при $\varkappa < 1$, $\nu = 1 - 0$ при $\varkappa = 1$.

На основании фактов, доказанных для уравнения (1.16), можно теперь утверждать, что при $g_1(x), g_2(x) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$ существуют единственные решения интегральных уравнений (1.12) вида

$$\text{A)}\quad \text{a)}\qquad \varphi^+(x) = \frac{\omega_1^+(x)\cos rx}{\sqrt{\cos 2rx - \cos 2r}}$$

$$\text{b)}\quad \varphi^-(x) = \frac{\omega_1^-(x)}{\cos rx\sqrt{\cos 2rx - \cos 2r}} \tag{2.12}$$

$$\text{B)}\qquad \varphi(x) = \frac{\omega_2(x)\cos rx}{\sqrt{\cos 2rx - \cos 2r}}$$

где функции $\omega_1^\pm(x), \omega_2(x) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$, причем справедливы соотношения корректности (2.6) и (2.7). Если же $g_1(x), g_2(x) \in B^\varkappa_1(-1, 1)$ и $\varkappa > 0$, то $\omega_1^\pm(x), \omega_2(x) \in B^\nu_0(-1, 1)$ и $\nu = \varkappa$ при $\varkappa < 1$, $\nu = 1 - 0$ при $\varkappa = 1$.

Далее нам также понадобятся следующие спектральные соотношения [7, 8], получающиеся из (2.2) с учетом (1.13)—(1.15):

$$\text{A)}\quad \text{a)}\ -\int_{-1}^{1} \frac{T_{2i}\left(\dfrac{\sin r\xi}{\sin r}\right)}{\sqrt{\cos 2r\xi - \cos 2r}} \ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi - x)}{2\lambda}\right| \cos r\xi\, d\xi =$$

$$= \pi\lambda_i T_{2i}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right) \tag{2.13}$$

$$\text{b)}\quad -\int_{-1}^{1} \frac{T_{2i+1}\left(\dfrac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}\right)}{\sqrt{\cos 2r\xi - \cos 2r}} \ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi - x)}{2\lambda}\right| \frac{d\xi}{\cos r\xi} =$$

$$= \pi\lambda_i T_{2i+1}\left(\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}\right) \tag{2.14}$$

В)
$$-\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{2i+1}\left(\dfrac{\sin r\xi}{\sin r}\right)}{\sqrt{\cos 2r\xi-\cos 2r}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-x)}{4\lambda}\right|\cos r\xi d\xi=$$

$$=\pi\lambda_i T_{2i+1}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right) \qquad (2.15)$$

А) a) $\lambda_0=-(\sqrt{2}\,r)^{-1}\ln|\sin r|,\quad \lambda_i=(\sqrt{2}\,r\cdot 2i)^{-1}\ (i\geqslant 1)$ (2.16)

b) $\lambda_i=[\sqrt{2}\,r\cos r(2i+1)]^{-1}$

В) $\lambda_i=[\sqrt{2}\,r\,(2i+1)]^{-1}$

Возвращаясь к интегральным уравнениям (1.8), (1.9), перепишем их в виде

$$\text{А)}\quad L_{\text{A}}\varphi=\pi f(x)-H_{\text{A}}\varphi,\qquad \text{В)}\quad L_{\text{B}}\varphi=\pi f(x)-H_{\text{B}}\varphi \qquad (2.17)$$

$$H_{\text{A}}\varphi=\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\xi)N_1\left(\mu,\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi,\qquad H_{\text{B}}\varphi=\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\xi)N_2\left(\mu,\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \qquad (2.18)$$

Далее, если предположить, что $\varphi(x)\in L_{4/3-0}(-1,1)$, то используя свойства $N_i(\mu, t)\,(i=1, 2)$, нетрудно показать, что $H_{\text{A}}\varphi$ и $H_{\text{B}}\varphi$ вида (2.18) будут сколь угодно гладкими. Теперь на основании теоремы 1 можно сформулировать теорему.

Теорема 2. Если функция $f(x)\in W^1_{4+0}(-1, 1)$ и решения уравнений (2.17) существуют в классе $L_{4/3-0}(-1, 1)$, то при всех значениях $\lambda>1$, $\mu\geqslant\mu_0>0$ они имеют вид (2.12), причем $\omega_1^{\pm}(x)$, $\omega_2(x)\in L_2^{1,\gamma}(-1, 1)$. При этом, если $f(x)\in B_1^{\nu}(-1, 1)$ и $\varkappa>0$, то $\omega_1^{\pm}(x)$, $\omega_2(x)\in B_0^{\nu}(-1, 1)$ и $\nu=\varkappa\,(\varkappa<1)$, $\nu=1-0\,(\varkappa=1)$.

3. *Метод ортогональных полиномов.* Будем искать функции $\omega_1^{\pm}(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ в (2.12) в виде следующих рядов по полиномам Чебышева

$$\text{А)}\quad \omega_1^{+}(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k T_{2k}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right),\qquad \omega_1^{-}(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k T_{2k+1}\left(\frac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}\right) \qquad (3.1)$$

$$\text{В)}\quad \omega_2(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k T_{2k+1}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right)$$

В силу свойств функций $\omega_1^{\pm}(\xi)$, $\omega_2(\xi)$, указанных в теореме 2, ряды (3.1) сходятся по норме пространства $L_2^{1,\gamma}(-1, 1)$, а соответствующие последовательности $\{c_k\}\in l_2$. Функции $f(x)$, $N_i(\mu, t)$ $(i=1, 2)$, входящие в формулы (2.17), (2.18), разложим соответственно в одинарные и двойные ряды по указанным системам полиномов

A) a) $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{2k}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)$, b) $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{2k+1}\left(\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}\right)$ (3.2)

B) $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{2k+1}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)$$

A) a) $$N_1(\mu, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\mu, \lambda) T_{2m}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right) T_{2n}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right) \quad (3.3)$$

b) $$N_1(\mu, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\mu, \lambda) T_{2m+1}\left(\frac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}\right) T_{2n+1}\left(\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}\right)$$

B) $$N_2(\mu, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\mu, \lambda) T_{2m+1}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right) T_{2n+1}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)$$

Используя известное [3] свойство ортогональности полиномов Чебышева первого рода, получим

A) a) $e_{mn}(\mu, \lambda)=$

$$=\frac{2r^2\beta_{mn}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{N_1(\mu, t)\, T_{2m}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right) T_{2n}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)\cos r\xi \cos rx\, d\xi dx}{\sqrt{\cos 2r\xi-\cos 2r}\sqrt{\cos 2rx-\cos 2r}} \quad (3.4)$$

$$\beta_{00}=1, \quad \beta_{m0}=\beta_{0n}=2, \quad \beta_{mn}=4$$

b) $e_{mn}(\mu, \lambda)=$

$$=\frac{8r^2\cos^2 r}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{N_1(\mu, t)\, T_{2m+1}\left(\frac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}\right) T_{2n+1}\left(\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}\right) d\xi dx}{\sqrt{\cos 2r\xi-\cos 2r}\sqrt{\cos 2rx-\cos 2r}\cos r\xi \cos rx} \quad (3.5)$$

B) $e_{mn}(\mu, \lambda)=$

$$=\frac{8r^2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{N_2(\mu, t)\, T_{2m+1}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right) T_{2n+1}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)\cos r\xi \cos rx\, d\xi dx}{\sqrt{\cos 2r\xi-\cos 2r}\sqrt{\cos 2rx-\cos 2r}} \quad (3.6)$$

В силу описанных выше свойств функций $f(x)$, $N_1(\mu, t)$, $N_2(\mu, t)$ ряды (3.2) и (3.3) равномерно сходятся [9] к этим функциям при всех $|x|<1$, $|\xi|\leqslant 1$, $\lambda>1$, $\mu\geqslant\mu_0>0$.

Лемма 1. Если функция $f(x)\in W^1_{1,0}(-1, 1)$, то любому решению $\varphi(x)$ из класса $L_{(3-\varepsilon)}(-1, 1)$ уравнения A) или B) вида (2.17) соответствует последовательность чисел a_i из класса l_2, удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_n = r_n - \sum_{m=0}^{\infty} a_m c_{mn} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{3.7}$$

Здесь обозначено

$$r_n = f_n \lambda_n^{-1} \tag{3.8}$$

A) a) $c_{m0} = -(\ln|\sin r|)^{-1} e_{m0}, \quad c_{mn} = n e_{mn}$

$$\text{b)} \quad c_{mn} = \frac{1}{2}(2n+1) e_{mn} \tag{3.9}$$

$$\text{B)} \quad c_{mn} = \frac{1}{2}(2n+1) e_{mn}$$

Наоборот, если функция $f(x) \in W^1_{2,0}(-1, 1)$, то любому решению $|a_n|$ из класса l_2 системы (3.7)—(3.9) соответствует решение $\varphi(x) \in L_{4/3, 0}(-1, 1)$ уравнений A) или B) вида (2.12), (3.1).

Лемма может быть легко доказана, если использовать теорему 2 и результаты работы [10].

Лемма 2. Для коэффициентов $e_{mn}(\mu, \lambda)$ вида (3.4)—(3.6) имеют место следующие оценки:

$$\text{A) a)} \quad |e_{mn}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 m(4n^2-1)} (2D_3 + D_2 \lambda r\,\mathrm{tg}\, r), \quad (m, n \geqslant 1) \tag{3.10}$$

$$|e_{0n}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 (4n^2-1)} (2D_3 + D_2 \lambda r\,\mathrm{tg}\, r) \quad (n \geqslant 1)$$

$$|e_{m0}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^2 r D_2}{\pi^2 r^2 \lambda^2 m} \quad (m \geqslant 1), \quad |e_{00}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{2\,\mathrm{tg}^2 r D_2}{\pi^2 r^2 \lambda^2}$$

$$\text{b)} \quad |e_{mn}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 (2m+1) n(n+1)} (D_3 + \lambda r\,\mathrm{tg}\, r D_2), \quad (n \geqslant 1) \tag{3.11}$$

$$|e_{m0}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi r^3 \lambda^3 (2m+1)} (D_3 + \lambda r\,\mathrm{tg}\, r D_2)$$

$$\text{B)} \quad |e_{mn}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{2\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 (2m+1) n(n+1)} (2D_3 + \lambda r\,\mathrm{tg}\, r D_2), \quad (n \geqslant 1) \tag{3.12}$$

$$|e_{m0}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{2\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi r^3 \lambda^3 (2m+1)} (2D_3 + \lambda r\,\mathrm{tg}\, r D_2)$$

Здесь $D_2 = D_2(\mu)$ и $D_3 = D_3(\mu)$ соответственно равны

$$D_2 = \max|N_i'(\mu, t)|, \quad D_3 = \max|N_i'''(\mu, t)|, \quad \left(i = 1, 2, \ t = \frac{\xi - x}{\lambda}\right)$$

Оценки (3.10)—(3.12) получаются из (3.4)—(3.6) интегрированием по частям.

Теорема 3. Если функция $f(x) \in W^{1}_{1+0}(-1, 1)$, то оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве l_2, вполне непрерывен при всех $\lambda \in (1, \infty]$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$ и является оператором сжатия при $\mu > \mu_1 \geqslant \mu_0$, $\lambda > \lambda_0$. Постоянные μ_1, λ_0 находятся из уравнения

$$S_A^+(\mu, r) = \frac{64 \operatorname{tg}^4 r}{\pi^6}\left(1 + \frac{2\pi^2}{3}\right) D_2^2 (\ln|\sin r|)^{-2} + \frac{16 \operatorname{tg}^6 r}{\pi^3}\left(1 + \frac{2\pi^2}{3}\right) \times$$

$$\times \left(2D_3 + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} r D_2\right)^2 = 1 \tag{3.13}$$

$$S_A^-(\mu, r) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{\pi^2}\right)\left[\frac{8 \operatorname{tg}^3 r}{\pi^3}\left(D_3 + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} r D_2\right)\right]^2 = 1 \tag{3.14}$$

$$S_B(\mu, r) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{\pi^2}\right)\left[\frac{8 \operatorname{tg}^3 r}{\pi^3}\left(2D_3 + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} r D_2\right)\right]^2 = 1 \tag{3.15}$$

Для доказательства произведем в формулах (3.2) замены переменных согласно (1.11)—(1.13). Дифференцируя затем по α полученные соотношения и выражая производные от полиномов Чебышева через сами полиномы с учетом того, что $f'(x) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$, убедимся, что $\{r_n\} \in l_2$. Далее с помощью оценок (3.10)—(3.12) нетрудно показать, что при $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$.

$$\text{А)} \quad \text{a)} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2 \leqslant S_A^+(\mu, r) < \infty \tag{3.16}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2 \leqslant S_A^-(\mu, r) < \infty$$

$$\text{Б)} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2 \leqslant S_B(\mu, r) < \infty$$

Из (3.16) следует, что оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве последовательностей l_2 и является там вполне непрерывным [5] при $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$. Таким образом, бесконечная система (3.7) однозначно разрешима почти при всех λ и μ. Из (3.16) видно, что при выполнении равенств (3.13)—(3.15) указанный выше оператор будет оператором сжатия в l_2. Следовательно, при $\mu > \mu_1 \geqslant \mu_0$, $\lambda > \lambda_0$ решение бесконечной системы (3.7) в пространстве l_2 существует, единственно и может быть получено с любой степенью точности методом последовательных приближений или методом редукции [5]. Заметим, что бесконечную систему (3.7)—(3.9) можно еще представить в форме

$$a_n^* = f_n - \sum_{m=0}^{\infty} a_m^* c_{mn}^* \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.17}$$

$$a_n^* = a_n \lambda_n$$

A) a) $c_{mn}^* = (\gamma_n r \sqrt{2}\, \lambda_m)^{-1} e_{mn}$, b) $c_{mn}^* = \dfrac{1}{2}(2m+1) e_{mn}$

B) $$c_{mn}^* = \frac{1}{2}(2m+1) e_{mn}$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_n = 2 \quad (n \geqslant 1)$$

Если функция $f(x) \in W^1_{1,0}(-1, 1)$, то нетрудно показать, что $\{f_n\} \in l_1$, где l_1 — полное пространство последовательностей с нормой

$$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

Получив для c_{mn}^* оценки типа (3.10)—(3.12), можно также убедиться, что оператор, стоящий в правой части (3.17), действует в пространстве l_1. Можно доказать, что бесконечная система (3.17) квазивполне регулярна при $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$. Если существует ее ограниченное решение, то $\{a_n^*\} \in l_1$. Можно указать $\lambda_0^* > 1$ и $\mu_1^* \geqslant \mu_0 > 0$ такие, что при $\lambda > \lambda_0^*$, $\mu > \mu_1^*$ бесконечная система (3.17) вполне регулярна [10].

Важно отметить, что количество уравнений в (3.7) при заданной точности решения не превосходит некоторого N при всех $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$, а также то, что метод редукции для указанной системы сходится при $1 < \lambda < \lambda_0^*$, $\mu_0 < \mu < \mu_1^*$.

Решив систему (3.7)—(3.9), найдем затем по формулам (3.1) и (2.12) решения интегральных уравнений (2.17), (2.18), а также коэффициент при особенности и обобщенную силу по формулам

$$\chi = \lim_{x \to 1} \varphi(x) \sqrt{1 - x^2}, \qquad Q = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx \tag{3.18}$$

4. *Примеры.* В качестве примеров рассмотрим периодические задачи о действии штампов на упругую полосу: а) лежащую без трения на недеформируемом основании; б) жестко соединенную с недеформируемым основанием; в) периодическую контактную задачу о чистом сдвиге. Известно [1], что

а) $L(u) = \dfrac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}$, б) $L(u) = \dfrac{2(3-4\nu)\operatorname{sh} 2u - 4u}{2(3-4\nu)\operatorname{ch} 2u + (3-4\nu)^2 + 1 + 4u^2}$

в) $L(u) = \operatorname{th} u$

Будем рассматривать четный вариант уравнения (1.8). Положим в нем, например, $f(x)=1$. Тогда приближенное решение интегрального уравнения (1.8) может быть получено методом, изложенным в пункте 3. При этом формулы (3.18) примут вид

$$\chi=\sqrt{\frac{\operatorname{ctg} r}{2r}}\sum_{i=0}^{\infty} a_i \qquad Q=\frac{\pi a_0}{\sqrt{2r}}$$

Результаты вычислений занесем в следующую таблицу.

Таблица 1

	$\varphi(x)$					
λ	1.5					
$\mu \backslash x$	0.0	0.3	0.6	0.9	χ	P
2.0	8.407 8.410 8.407	8.559 8.562 8.556	9.261 9.269 9.261	13.848 13.849 13.848	5.405 5.406 5.407	21.842 21.846 21.841
1.0	8.685 9.019 8.444	8.809 9.110 8.592	9.437 9.651 9.285	13.937 14.045 13.860	5.419 5.435 5.407	22.230 22.700 21.893
0.5	13.108 16.355 9.347	12.892 15.935 9.419	12.525 14.918 9.895	15.627 17.003 14.185	5.682 5.900 5.457	28.807 33.814 23.209
λ	3.0					
2.0	1.511 1.511 1.511	1.571 1.572 1.571	1.828 1.828 1.828	3.213 3.213 3.213	1.374 1.375 1.374	4.533 4.533 4.532
1.0	1.547 1.588 1.516	1.606 1.646 1.576	1.861 1.898 1.832	3.249 3.291 3.218	1.386 1.400 1.376	4.606 4.690 4.543
0.5	1.971 2.171 1.628	2.019 2.213 1.685	2.245 2.423 1.935	3.668 3.855 3.330	1.522 1.582 1.412	5.464 5.860 4.771

В таблице даны значения функции $\varphi(x)$, коэффициента при особенности χ и обобщенной силы Q для трех задач. При этом коэффициент Пуассона во второй задаче $\nu=0.3$. Нужно отметить, что для достижения совпадения в третьей значащей цифре число уравнений в системе (3.7) не превосходит пяти в худшем случае $\lambda=1.5$, $\mu=0.5$.

Определив $\varphi(x)$ и Q при $f(x)=1$, найдем искомые контактные напряжения в случае плоских штампов ($\omega(x)=\delta$) по формулам

$$q(\xi)=-\frac{PA\mu}{2a}\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right)+\frac{\Delta\delta}{a}\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

$$P=\frac{\Delta\delta}{a}Q\left(1+\frac{A\mu}{2a}Q\right)^{-1}$$

В заключение отметим, что периодические контактные задачи для полосы изучались также в работе [11] с помощью метода кусочно-однородных решений. Однако, этот метод удобен лишь для случая упругого тела, а метод, изложенный в данной работе, можно использовать при исследовании периодической контактной задачи для любого линейно-деформируемого основания. Заметим также, что метод данной работы может быть применен для решения задачи о взаимодействии периодической системы накладок с упругой полуплоскостью, впервые рассмотренной в [12].

Ростовский государственный
университет

Поступила 29 XII 1976

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում են վերջավոր հաստություն ունեցող առաձգական շերտի համար երկու տեսակ հարթ պարբերական կոնտակտային խնդիրներ։ Առաջարկվում է եղանակ, որը թույլ է տալիս դիտարկված խնդիրները բերել առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների, որոնց կորիզները ռեգուլյար չեն և պարունակում են շարժվող լոգարիթմական եզակիություն և չափում չունեցող որոշ երկրաչափական λ և μ պարամետրեր։

Տրվում է այդ ինտեգրալ հավասարումները նրանց համարժեք գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների բերելու ալգորիթմը։ Ապացուցվում է անվերջ սիստեմների լուծելիությունը λ և μ պարամետրերի համարյա բոլոր արժեքներին համապատասխանող հաջորդականությունների դասերում։

Որպես օրինակներ դիտարկվել են առաձգական շերտի վրա դրոշմների ազդեցության վերաբերյալ հետևյալ պարբերական կոնտակտային խնդիրները՝ 1) երբ շերտը առանց շփման դրված է չդեֆորմացվող հիմքի վրա, 2) շերտը ամրակցված է չդեֆորմացվող հիմքին և 3) մաքուր սահքի վերաբերյալ պարբերական կոնտակտային խնդիրը։

PERIODIC CONTACT PROBLEMS FOR THE ELASTIC STRIP

V. M. ALEXÁNDROV, G. V. KOVALENKO

S u m m a r y

Two types of plane periodic contact problems for the elastic strip of "h" thickness are considered. The method of reducing these problems to the integral equations of the first kind with nonregular nuclei, having a mobile log peculiarity and nondimensional geometrical parameters λ and μ is suggested. The algorithm for transformation of these integral equations to the equivalent infinite linear algebraic system is given. The solvability of this system in corresponding classes of sequences almost for all valumes of λ and μ is proved.

Three examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
4. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 3.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959.
6. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 32, вып. 2.
7. *Попов Г. Я.* По поводу одной плоской контактной задачи для упругой полуполосы. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1966, т. XIX, № 4.
8. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
9. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.—Л., Гостехтеориздат, 1949.
10. *Александров В. М., Кучеров В. А.* О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
11. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
12. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

З. Г. ТЕР-МАРТИРОСЯН, Д. М. АХПАТЕЛОВ, Г. Е. ШАЛИМОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ

В работе рассматривается напряженное состояние однородного, изотропного массива с криволинейной границей в рамках плоской задачи теории упругости с использованием теории функций комплексных переменных. Решение задачи дается в замкнутом виде.

Рассмотрим в плоскости Z полубесконечную область S, граница которой описывается параметрическими уравнениями вида

$$
\begin{aligned}
x &= ht\left[1 + \frac{A}{r_2} + \frac{2C}{r_2^2} + \frac{K(3-t^2)}{r_2^3}\right] \\
y &= h\left[\frac{A}{r_2} + \frac{C(1-t^2)}{r_2^2} + \frac{K(1-3t^2)}{r_2^3}\right]
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

где $r_2 = 1+t^2$; t — точки границы вспомогательной полуплоскости W; x, y — декартовы координаты точек исследуемой области; h — коэффициент пропорциональности; A, C, K — действительные параметры, определяющие характер граничной поверхности области S.

Параметрические уравнения (1.1) удобны для анализа вида граничной кривой и выбора параметров A, C, K.

Так при $t \to \pm\infty$ — $x \to \pm\infty$; $y \to 0$, то есть на бесконечности асимптотой граничной кривой является ось абсцисс. При $t=0$ $x=0$; $y=h(A+C+K)$. Следовательно, если при соответствующем подборе параметров A, C, K функция имеет в точке $t=0$ единственный экстремум, то в зависимости от знака величины $(A+C+K)$ граничная кривая будет иметь вид выступа или выреза. Опуская дальнейшие подробности отметим, что исследование вида граничной кривой, то есть выбор параметров A, C, K осуществляется на основании известных методов математического анализа.

Пусть в каждой точке области S действуют объемные силы γ, направленные под углом β к оси oy. Кроме того, на некотором конечном участке $d_1 d_2$ границы исследуемой области приложена равномерно распределенная нагрузка $p = \mathrm{const}$ и $q = \mathrm{const}$, нормальная и касательная составляющие соответственно фиг. 1. Причем крайним точкам приложения нагрузки d_1 и d_2 соответствуют вполне определенные точки t_1 и t_2 границы полуплоскости W. Для удобства решения примем следующие обозначения:

$$
t_0 = (t_1 + t_2)/2, \quad l = (t_2 - t_1)/2
$$

тогда

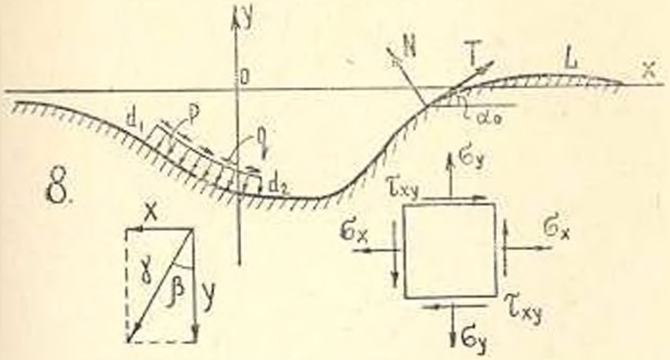
$$
t_1 = t_0 - l, \quad t_2 = t_0 + l
$$

Соотношения (1.1) вытекают из функции

$$z = \omega(w) = h\left(w + \frac{A}{r} - \frac{iC}{r^2} - \frac{K}{r^3}\right) \tag{1.2}$$

конформно отображающей нижнюю полуплоскость W на рассматриваемую полубесконечную область S, где

$$r = w - i; \quad z = x + iy; \quad w = \xi + i\eta; \quad \eta < 0; \quad i = \sqrt{-1}$$



Фиг. 1. Общая расчетная схема.

Отметим, что предлагаемая отображающая функция (1.2) позволяет описать, а, следовательно, и решить задачу о напряженном состоянии для широкого класса полубесконечных симметричных областей в виде вырезов и выступов трапецеидального сечения. Наиболее характерные области, конформное отображение которых реализуется разработанной рациональной функцией, приведены на фиг. 2. Расположение самой области, занятой

Фиг. 2. Некоторые виды криволинейных областей, конформное отображение которых реализуется предложенной функцией.

телом, для каждой граничной кривой указано штриховкой некоторой ее части. Наличие в отображающей функции трех параметров позволило получить качественно новые области, исследование напряженного состояния которых имеет практическое и теоретическое значение.

Как известно [1], решение поставленной задачи должно удовлетворять следующей системе уравнений:

уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y \tag{1.3}$$

условию совместимости

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \tag{1.4}$$

граничным условиям

$$N = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_0 - \tau_{xy} \sin 2\alpha_0$$
$$T = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 \tag{1.5}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты напряжений; X, Y — компоненты объемных сил: N, T — составляющие равномерно распределенной нагрузки; α_0 — угол между нормальной внешней нагрузкой и осью $0x$.

Решение поставленной задачи представим в виде суммы двух решений

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^r, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^r, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^r \tag{1.6}$$

Такой прием при соответствующем подборе частного решения σ_x^r, σ_y^r, τ_{xy}^r дает возможность удовлетворить неоднородным уравнениям равновесия (1.3) и свести задачу к отысканию дополнительных напряжений σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0, удовлетворяющих однородным уравнениям и новым граничным условиям.

Частное решение представим в виде

$$\sigma_x^r = y\gamma_x, \quad \sigma_y^r = y\gamma_y, \quad \tau_{xy}^r = y\gamma_{xy} \tag{1.7}$$

где $\gamma_x = \xi_1 \gamma_y$, $\gamma_y = \gamma \cos \beta$, $\gamma_{xy} = \gamma \sin \beta$, $\xi_1 = \dfrac{\mu_0}{1+\mu_0}$ — коэффициент бокового давления; μ_0 — коэффициент относительной поперечной деформации.

Компоненты дополнительных напряжений определим по известным [1] соотношениям через функции комплексного потенциала $\Phi(w)$ и $\Psi(w)$:

$$\sigma_x^0 + \sigma_y^0 = 2\left[\Phi(w) + \overline{\Phi(w)}\right]$$
$$\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 = 2\left[\frac{\overline{\omega(w)}}{\omega'(w)} \Phi'(w) + \Psi(w)\right] \tag{1.8}$$

Здесь и далее черта над некоторыми выражениями означает знак сопряженности.

Таким образом, поставленная задача сведена к отысканию двух функций комплексного потенциала.

Подставив выражение (1.7) в (1.5) и принимая во внимание вид отображающей функции, после несложных преобразований получим условие на поверхности в комплексной форме

$$N^0 + iT^0 = h\frac{A(1+t^2)^2 - C(t^4-1) - K(3t^2-1)}{(t+i)^3(t-i)^3}\left\{-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} - i\tau_{xy}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{[(t-i)^4 - A(t-i)^2 + 2Ci(t-i) + 3K](t+i)^4}{[(t+i)^4 - A(t+i)^2 - 2Ci(t+i) + 3K](t-i)^4}\right\} + p + iq \qquad (1.9)$$

Аналогичным образом записывается сопряженное условие. Условия на поверхности могут быть записаны [1] также через граничные значения искомых функций комплексного потенциала

$$N^0 + iT^0 = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{1}{\overline{\omega'(t)}}\left[\overline{\omega(t)}\Phi'(t) + \overline{\omega'(t)}\Psi(t)\right] \qquad (1.10)$$

Используя выражения (1.9, 1.10) и им сопряженные, а также свойства интегралов типа Коши, неизвестные функции комплексного потенциала определим из системы интегральных уравнений. Опуская подробности интегрирования, запишем окончательные выражения искомых функций

$$\Phi(w) = \frac{1}{F(w)}\left\{[A(w-i)^2 - 2Ci(w-i) - 3K]\overline{\Phi(-i)} - \right.$$

$$- [2K + iC(w-i)](w-i)\overline{\Phi'(-i)} -$$

$$\left. - 0.5K(w-i)^2\overline{\Phi''(-i)} - (w-i)^4[I_1(w) + G_1(w)]\right\} \qquad (1.11)$$

$$\Psi(w) = -\frac{(w-i)^4}{F(w)}\left\{\Phi(w) + \frac{A(w+i)^2 + 2Ci(w+i) - 3K}{(w+i)^4}[\Phi(-i) - \right.$$

$$- \Phi(w)] - \frac{2K - iC(w-i)}{(w+i)^3}\Phi'(-i) - \frac{0.5K}{(w+i)^2}\Phi''(-i) + I_2(w) +$$

$$\left. + G_2(w) + \frac{w(w+i)^3 + A(w+i)^2 + iC(w+i) - K}{(w+i)^3}\Phi'(w)\right\} \qquad (1.12)$$

где

$$F(w) = (w-i)^4 - A(w-i)^2 + 2Ci(w-i) + 3K$$

Функция $I_1(w)$ зависит от вида граничной поверхности области и характера объемных сил

$$l_1(w) = -\frac{l_6 + il_1}{w - i} + \frac{l_2 + il_9}{(w - i)^2} + \frac{l_{10} + il_3}{(w - i)^3} +$$

$$+ \frac{l_4(w - i) - il_5}{(w - i)^5} - \frac{l_8(w - i) - il_7}{(w - i)^7} \qquad (1.13)$$

где

$$l_1 = 2a_2a_3, \qquad l_2 = a_x(a_{10} - a_4) - a_y(a_{10} + a_4)$$

$$l_3 = a_y(a_5 + a_{11}) - a_x(a_{11} - a_5), \quad l_4 = a_1a_6, \quad l_5 = a_1a_7, \quad l_6 = a_1a_8$$

$$l_7 = a_1a_9, \qquad l_8 = a_3a_{xy}, \qquad l_9 = a_{10}a_{xy}, \qquad l_{10} = a_{11}a_{xy}$$

$$a_1 = a_x + a_y, \quad a_x = 0.5h^{*}_{xx}, \quad a_y = 0.5h^{*}_{yy}, \quad a_{xy} = h^{*}_{xy} \qquad (1.14)$$

Коэффициенты $a_1, \ldots, a_{11}$ определяются параметрами отображающей функции, то есть зависят от вида граничной кривой

$$a_3 = \frac{1}{64}[8A(A + 2C + 4) + 12C(C + 2K) + 3K(4A + 5K)]$$

$$a_4 = \frac{1}{32}[4A(2A + 3C + 2K) + 8C(2 + C) + 3K(5C + 3K)]$$

$$a_5 = \frac{1}{32}[4A(4A + 4C + 3K) + 8C(C + 2K) + K(9K + 16)]$$

$$a_6 = \frac{1}{16}[12A(2C + K) + 3K(2C + K)]$$

$$a_7 = 2AK + C^2, \quad a_8 = 2.5\,CK, \quad a_9 = 1.5\,K^2$$

$$a_{10} = \frac{1}{32}[4A(C + K) + 4C(4 + C) + 3K(3C + 2K)]$$

$$a_{11} = \frac{K}{32}[4(A + C) + 3K + 16] \qquad (1.15)$$

Вторая функция из (1.11) $G_1(\omega)$ является характеристикой поверхностной нагрузки и определяется из выражения

$$G_1(w) = -\frac{g + ip}{2\pi}\left[M_1 + \frac{A(w - i)^2 - 2Ci(w - i) - 3K}{(w - i)^4}(n_{13} -\right.$$

$$\left. - in_{14} - M_3)\right] + \frac{n_2 + in_3}{(w - i)} - \frac{n_9 + in_{10}}{(w - i)^2} - \frac{n_{11} + in_{12}}{(w - i)^3} \qquad (1.16)$$

В выражении (1.16) приняты следующие обозначения:

$$M_1 = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\eta^2 + (\zeta - t_2)^2}{\eta^2 + (\zeta - t_1)^2}\right] - i\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{t_2 - \zeta}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{t_1 - \zeta}\right)\right]$$

$$n_7 = \frac{1}{2\pi}(gm_5 + pm_6), \quad n_8 = \frac{1}{2\pi}(pm_5 - gm_6), \quad n_9 = \frac{1}{4\pi}(gm_7 - pm_8)$$

$$n_{10} = \frac{1}{4\pi}(pm_7 + gm_8), \quad n_{11} = \frac{3K}{2\pi}(gn_1 - pn_2), \quad n_{12} = \frac{3K}{2\pi}(pn_1 - gn_2)$$

$$n_{13} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + t_2^2}{1 + t_1^2}\right), \qquad n_{14} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t_2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t_1}\right) \qquad (1.17)$$

Здесь t_1 и t_2 — точки границы нижней полуплоскости, соответствующие крайним точкам приложения внешней нагрузки;

$$m = t_0^2 - l^2 - 1, \quad m_1 = m^2 + 4t_0^2, \quad n_1 = 2lm/m_1, \quad n_2 = 4lt_0/m_1$$

$$n_3 = -\frac{n_1}{m_1}[m^2 - 4(1 + l^2)], \quad n_4 = \frac{4l}{m_1^2}[4t_0^2(1 + m) - m^2]$$

$$m_2 = 3(t_0^2 - 1) + l^2, \quad m_3 = m^3 - 12mt_0^2, \quad m_4 = 2t_0(3m^2 - 4t_0^2)$$

$$n_5 = -\frac{2l}{m_1^3}(m_2m_3 + 6t_0m_4), \quad n_6 = \frac{2l}{m_1^3}(m_2m_4 - 6t_0m_3)$$

$$m_5 = An_1 - Cn_4 - Kn_5, \quad m_6 = An_2 + Cn_3 - Kn_6$$

$$m_7 = 4Cn_2 + 3Kn_3, \quad m_8 = 3Cn_1 - 3Kn_4 \qquad (1.18)$$

Таким образом, неизвестные функции, входящие в выражение первого комплексного потенциала, полностью определены.

Функции $I_2(w)$ и $G_2(w)$ из (1.12) определяются аналогичным образом:

$$I_2(w) = \frac{l_2 - il_1}{w - i} + \frac{p_1 + ip_2}{(w - i)^2} - \frac{p_5 + ip_4}{(w - i)^3} - \frac{p_3 - ip_9}{(w - i)^4} +$$

$$+ \frac{p_{10} + ip_7}{(w - i)^5} + \frac{p_5 - ip_{11}}{(w - i)^6} - \frac{p_{12} + ip_8}{(w - i)^7} \qquad (1.19)$$

Здесь постоянные коэффициенты $p_1 \ldots p_{12}$ зависят от вида граничной поверхности и характера объемных сил

$$p_1 = a_x(a_4 - a_{10}) - a_y(a_1 + a_{10}), \quad p_2 = a_x(a_5 - a_{11}) - a_y(a_5 + a_{11})$$

$$p_3 = a_2a_6, \quad p_4 = a_2a_7, \quad p_5 = a_2a_8, \quad p_6 = a_2a_9, \quad p_7 = a_3a_{xy}$$

$$p_8 = a_4a_{xy}, \quad p_9 = a_6a_{xy}, \quad p_{10} = a_7a_{xy}, \quad p_{11} = a_8a_{xy}$$

$$p_{12} = a_9a_{xy}, \quad a_2 = a_x - a_y \qquad (1.20)$$

Функция $G_2(w)$, зависящая от вида поверхностной нагрузки, определяется выражением

$$G_2(w) = \frac{g - ip}{2\pi}\left[M_1 + \frac{A(w + i)^2 + 2Ci(w + i) - 3K}{(w + i)^4}(n_{13} + \right.$$

$$\left. + in_{14} - M_1)\right] - \frac{n_7 - in_8}{w + i} + \frac{n_9 - in_{10}}{(w + i)^2} + \frac{n_{11} - in_{12}}{(w + i)^3} \qquad (1.21)$$

Принятые здесь обозначения см. по формулам (1.17, 1.18).

В найденных функциях комплексных потенциалов остались неопределенными шесть комплексных постоянных — $\Phi(-i)$, $\Phi'(-i)$, $\Phi''(-i)$ и им сопряженные, которые легко определяются из системы уравнений

$$\Phi(w)=\frac{B(w)}{F(w)},\quad \Phi'(w)=\frac{B'(w)}{F(w)}-\frac{B(w)F'(w)}{F^2(w)}$$

$$\Phi''(w)=\frac{B''(w)}{F(w)}-2\frac{B'(w)F'(w)}{F^2(w)}+\frac{B(w)}{F^2(w)}\left|2\frac{(F'(w))^2}{F(w)}-F''(w)\right| \quad (1.22)$$

и ей сопряженной.

Здесь через $B(\bar{w})$ обозначен числитель функции (1.11). Для решения системы уравнений (1.22) необходимо в функции (1.11) и ее производных положить $\bar{w}=-i$.

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии полубесконечных областей, находящихся в условиях плоской деформации, полностью решена.

Отметим, что аналогичная постановка рассмотрена также в других работах [2, 3]. Однако, полученное в настоящей работе замкнутое решение позволяет рассмотреть значительно более широкий класс полубесконечных симметричных областей трапецеидального профиля.

Ввиду сложности функций комплексного потенциала (1.11, 1.12) реализация полученного замкнутого решения осуществляется на ЭВМ. Поскольку решение замкнутое, то ЭВМ осуществляет лишь простейшие вычислительные операции, что значительно уменьшает затраты машинного времени по сравнению с численными методами. На расчет одного варианта с количеством расчетных точек порядка 150—200 требуется около двух минут машинного времени. Существенным преимуществом является также возможность исследования напряженного состояния всего класса областей, описываемых функцией (1.2), на основе единой программы.

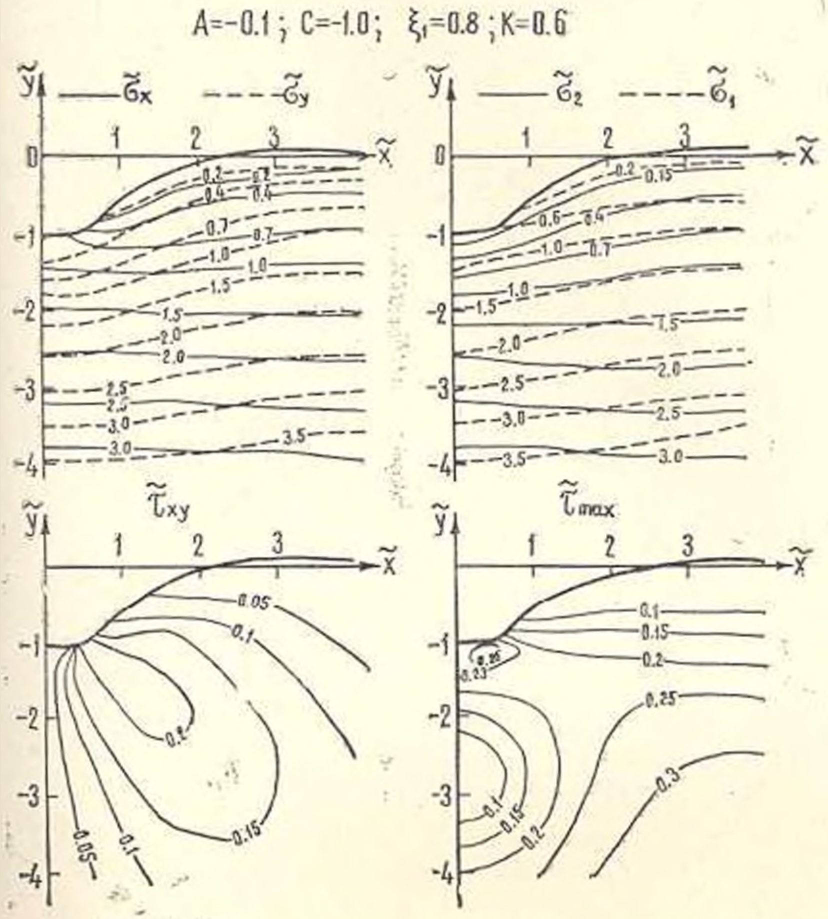
Результаты расчетов напряженного состояния полубесконечных областей в поле гравитации (фиг. 3, 4) представлены в виде изолиний компонент напряжений, построенных в относительных координатах $\bar{x}=x/H$; $\bar{y}=y/H$. Такой прием позволит определить напряженное состояние при рассмотрении реальных объектов по изолиниям относительных напряжений

$$\sigma=\gamma_1 H\bar{\sigma}$$

где $\bar{\sigma}$ — величина относительных напряжений; σ — компоненты напряжений, соответствующие реальным объектам, при заданной объемной массе γ_1 и определенной глубине выреза или высоте выступа H.

При построении изолиний сжимающие напряжения приняты положительными.

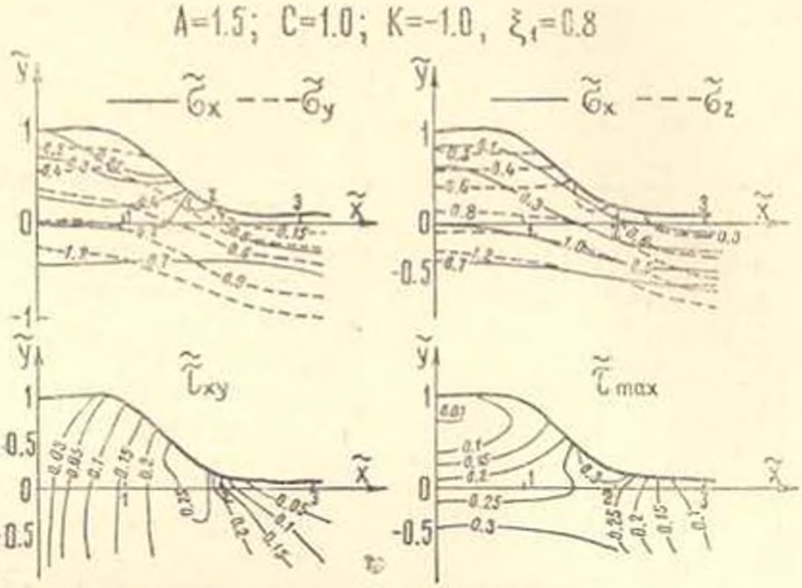
На фиг. 3 представлены изолинии всех компонент напряжений в тяжелой полуплоскости с вырезом. Граница области описывается уравнениями (1.1) при $A = -0.1$; $C = -1.0$; $K = 0.6$. В значительной части области, ограниченной по глубине сечением $\tilde{y} = -2.6$ и по простиранию $\bar{x} = 1$, горизонтальные нормальные напряжения $\bar{\sigma}_x$ превосходят по величине напряжения $\bar{\sigma}_y$. С удалением от этой зоны соотношение нормальных напряжений прихо-



Фиг. 3. Изолинии относительных компонент напряжений.

дит в соответствие с принятым коэффициентом бокового давления $\xi_1 = 0.8$. Очаги концентрации касательных $\bar{\tau}_{xy}$ и максимальных касательных $\bar{\tau}_{max}$ напряжений примыкают к участкам границы, обладающим наибольшей кривизной. Выявление очагов концентрации позволяет судить о местоположении потенциальных зон ослабления, в которых возможна потеря прочности. На оси симметрии в глубине области ($\bar{y} = -2.7$) имеет место зона деконцентрации максимальных касательных напряжений, характеризующаяся гидростатическим распределением напряжений.

На фиг. 4 приведены изолинии напряжений в тяжелой полуплоскости с выступом. Согласно характеру изолиний, напряжения $\tilde{\sigma}_y$ под гребнем выступа практически соответствуют распределению напряжений в тяжелой полуплоскости. Под подошвой выступа, вблизи точки перегиба наблюдается некоторая концентрация этих напряжений. Этой же зоне присуща существенная концентрация и остальных компонентов напряжений.



Фиг. 4. Распределение напряжений в тяжелой полуплоскости с выступом.

Проведенный анализ показывает существенное влияние фактора криволинейности на величины и характер распределения напряжений в полубесконечных симметричных областях. Неучет этого фактора и применение упрощенных расчетных методов может приводить к существенным погрешностям при определении напряженного состояния.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 17 III 1975

Զ. Գ. ՏԵՐ-ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Դ. Մ. ԱԽՊԱՏԵԼՈՎ, Գ. Ե. ՇԱԼԻՄՈՎ

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԵՎ ԾԱՎԱԼԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է համասեռ և կորագիծ եզրագծով սահմանափակված կիսաանվերջ հարթության լարվածային վիճակի խնդիրը ծանրության և մակերևութային ուժերի ազդեցության դեպքում։

Խնդրի լուծումը կառուցվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի շրջանակներում, ընդ որում օգտագործվում են կոնֆորմ արտապատկերումը և Կոշիի տիպի ինտեգրալը։ Նախօրոք հեղինակների կողմից նախկինում շարադրված մեթոդով ծավալային ուժերը փոխարինվում են մակերևույթային ուժերով։

Աշխատանքում արտապատկերող ֆունկցիան ընտրվում է այնպես, որ այն թույլ է տալիս հետազոտել սիմետրիկ կիսահարթությունների լայն ընտանիք հանվածքի և լցվածքի ձևով։

Ստացված արդյունքները կարող են օգտագործվել գեոմեխանիկայի մի քանի խնդիրները լուծելու համար, այդ թվում նաև լեռնային զանգվածների որոշ ձևերի կայունությունը գնահատելու համար։

A STRESSED STATE IN SEMI-INFINITE REGIONS SUBJECT TO BODY AND SURFACE FORCES

Z. G. TER-MARTIROSYAN, D. M. AKHPATELOV, G. E. SHALIMOV

Summary

A problem is solved for a stressed state in a homogeneous isotropic elastic curvilinear semi-plane subject to body and surface forces. It is solved in terms of a plane problem of the elasticity theory by means of the Kolosov-Muskhelishvili complex potentials method, employing conformal mapping and the properties of Cauchy integrals. Making use of the method previously described by the authors, the body forces are first replaces by surface forces. The investigated region is mapped onto a lower semi-plane. The mapping function is selected to enable a wide set of symmetrical semi-planes having cuts and convexities to be investigated. The equations of the complex potentials are obtained in the closed form and are used to express the stress components in the familiar way. It is suggested that the stressed state of the region being investigated be analyzed by calculating the stresses at certain points in the region, making use of the obtained formulas, and by plotting isolines and stress curves.

The results obtained can be employed for solving certain problems in geomechanics that pertain to the evaluation of the stability of rock masses.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. Н.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. «Наука», 1966.
2. *Ахпателов Д. М., Тер-Мартиросян З. Г.* О напряженном состоянии весомых полубесконечных областей. Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 3.
3. *Тер-Мартиросян З. Г., Ахпателов Д. М.* Напряженное состояние криволинейных полубесконечных областей в поле гравитации. Доклады АН СССР, 1975, т. 220, № 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

В. С. САРКИСЯН, В. Г. МХИТАРЯН, А. О. ОВСЕПЯН

К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ С ВДАВЛИВАНИЕМ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ШТАМПОВ В ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Контактная задача нелинейной установившейся теории ползучести о вдавливании штампа произвольной конфигурации в полуплоскость без учета сил трения впервые поставлена и решена в работе [1]. При этом для материала полуплоскости принимается данная Ю. Н. Работновым в [2] и развитая Н. Х. Арутюняном в [3] для стареющих материалов степенная зависимость между напряжениями и деформациями, имеющая следующий вид:

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\varepsilon_i(t) = \sigma_i(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau$$

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\varepsilon_i(t) = K_0\varepsilon_i^{\mu}(t) \tag{1}$$

Здесь $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала [3], $\varphi^*[\varepsilon_i(t)]$ — функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями, которая определяется из опыта, τ_1 — возраст материала, t — время, K_0 и $\mu(0<\mu<1)$ — физические константы материала, также определяемые из опыта, а $\varepsilon_i(t)$ и $\sigma_i(t)$ — известные выражения интенсивностей деформаций и напряжений соответственно. Физический закон между интенсивностями напряжений и деформаций (1) подтвержден на основе ряда экспериментальных исследований [4, 5, 6, 7] для таких материалов, как алюминиевые сплавы, медь, малоуглеродистая сталь и др.

Далее в работе [8] рассмотрена та же самая контактная задача с учетом сил трения, но для полуплоскости, находящейся в условиях установившейся нелинейной ползучести, когда

$$\sigma_i = K_0\varepsilon_i^{\mu} \quad (0<\mu<1) \tag{2}$$

При исследовании этих задач важную роль сыграл обобщенный принцип суперпозиции для перемещений, на основании которого их решение сводилось к решению интегрального уравнения Абеля с постоянными пределами. Решение последнего уравнения было построено известным методом М. Г. Крейна [9].

К такому же интегральному уравнению приводится также решение контактной задачи о вдавливании штампа в линейно-упругую полуплоскость, модуль упругости которой по глубине изменяется по степенному закону. Решение этого интегрального уравнения при помощи аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра дано в работе [10].

Решение интегрального уравнения Абеля, а также обобщенного уравнения методами краевой задачи Римана-Гильберта для аналитических функций построено в работах [11—15].

Во всех указанных работах решение интегрального уравнения Абеля с постоянными пределами, соответствующего упомянутой контактной задаче для одного участка контакта, построено в замкнутой форме в квадратурах или в виде ряда. При рассмотрении же разбираемой задачи в случае двух участков контакта, даже симметрично расположенных, возникают значительные математические трудности, вследствие чего замкнутое ее решение до сих пор неизвестно.

Последнее обстоятельство побудило построить приближенное решение этой контактной задачи в случае двух участков контакта [16]. В указанной работе обсуждается контактная задача о вдавливании двух симметрично расположенных штампов в упругую полуплоскость с модулем упругости, изменяющимся по степенному закону по глубине, без учета сил трения. При помощи аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра решение исходного интегрального уравнения в [16] сведено к эквивалентной квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Настоящая работа посвящена исследованию контактной задачи нелинейной установившейся ползучести о вдавливании двух симметрично расположенных штампов общей конфигурации в полуплоскость, для которой справедлив степенной закон (1). При помощи опять-таки аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра исходное интегральное уравнение сводится к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Способом, отличным от изложенного в [16], проводится полное исследование бесконечной системы на регулярность. Отдельно рассматриваются случаи симметричного и кососимметричного нагружения штампов. Когда имеются два одинаковых симметрично нагруженных штампа с плоскими основаниями, более подробно обсуждается вопрос определения важных механических характеристик — закона распределения контактных напряжения и меры погружения штампов в основание. В этом же случае получены числовые результаты.

Отметим, что как в работах [17—19], рассматриваемую здесь задачу можно интерпретировать как задачи нелинейной теории упругости при степенном законе связи между напряжениями и деформациями.

Отметим еще, что можно исходить из нелинейной установившейся теории ползучести согласно [1]. Тогда решение разбираемой контактной задачи сводится к совместному решению двух раздельных интегральных уравнений. Однако первое из них учитывает влияние ползучести материала на распределение контактных давлений и представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, решаемое в замкнутой форме [1]. Второе интегральное уравнение определяет контактное давление в зависимости от пространственной координаты и представляет собой, как уже указывалось, линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода со степенным ядром, называемое нами интегральным уравнением Абеля с постоянными пределами. На этих вопросах здесь, однако, останавливаться не будем и будем обсуждать только случай установившейся ползучести.

§ 1. *Постановка задачи и вывод основных интегральных уравнений*

Пусть имеется деформируемая полуплоскость, находящаяся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями. Пусть далее два одинаковых штампа, основание которых описываются функцией $f(x)$, под действием прижимающей силы P и опрокидывающего момента M вдавливаются в такую полуплоскость. Контактные участки обозначим через $[-a, -b]$ и $[b, a]$ $(b<a)$. При этом будем рассматривать два случая нагружения штампов. В первом случае штампы нагружены симметрично, вследствие чего будем предполагать, что они соединены между собой абсолютно жестким стержнем, нагруженным посередине силой P. Можно также считать, что в середине каждого штампа действует прижимающая сила $P/2$. В случае кососимметричного нагружения будем считать, что штампы опять соединены между собой абсолютно жестким стержнем, к которому приложен момент M.

Очевидно, что общий случай нагружения штампов исчерпывается указанными двумя случаями. Отметим, что в обоих случаях не учитываются тангенциальные контактные напряжения.

Рассмотрим сначала случай симметричного нагружения штампов. Тогда согласно известным результатам [1] для определения давления под штампами будем иметь следующее интегральное уравнение:

$$\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\frac{p(y)\,dy}{|x-y|^{1-\mu}}=\left[\frac{\delta-f(x)}{A}\right]^{m}\quad x\in[-a,\ -b]+[b,\ a] \tag{1.1}$$

Здесь μ — показатель ползучести, подчиненный условию $0.5<\mu<1$, $m=1/\mu$, δ — мера погружения штампов в основание, подлежащая определению. Кроме того,

$$A=(2\mu-1)\sin(\pi\sqrt{2\mu-1}/2\mu)/(1-\mu)\,[KI(\mu)]^{m}$$

$$I(\mu)=4\left[m\sqrt{2\mu-1}\right]^{\mu}\int_{0}^{\pi/2}\left[\cos(m\sqrt{2\mu-1}\,\theta)\right]^{\mu}\cos\theta\,d\theta$$

K — физическая константа материала полуплоскости, $f(x)$ — четная функция: $f(-x)=f(x)$.

При этом имеет место условие равновесия штампов

$$\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)p(x)\,dx=P$$

приводящееся вследствие четности давления $(p(-x)=p(x))$ к следующему:

$$2\int_b^a p(x)\,dx = P \tag{1.2}$$

В случае кососимметричного нагружения штампов будем иметь интегральное уравнение

$$\left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a\right)\frac{p(y)\,dy}{|x-y|^{1-\mu}} = f_0(x) \tag{1.3}$$

где

$$f_0(x) = \left[\frac{f(x) - \alpha x}{A}\right]^{\mu} \text{ при } x \in [b,\ a]$$

и при $x \in [-a,\ -b]$ она продолжается нечетным образом, α — угол поворота штампов, подлежащий определению. Последнее после решения задачи определяется из моментного условия равновесия штампов,

$$\left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a\right) xp(x)\,dx = M$$

приводящееся вследствие нечетности давления $(p(-x) = -p(x))$ к следующему:

$$2\int_b^a xp(x)\,dx = M \tag{1.4}$$

Далее перейдем к безразмерным координатам ξ, η

$$\xi = \frac{2}{1-k}\left(\frac{x}{a} - \frac{1+k}{2}\right), \qquad \eta = \frac{2}{1-k}\left(\frac{y}{a} - \frac{1+k}{2}\right) \qquad \left(k = \frac{b}{a}\right)$$

и введем обозначения

$$\varphi(\xi) = \frac{p(x)}{P}, \qquad h(\xi) = \frac{1}{P}\left[2\frac{\delta - f(x)}{(1-k)\,aA}\right]^{\mu}$$

$$\varphi_*(\xi) = \frac{p(x)}{M}, \qquad g(\xi) = \frac{1}{M}\left[2\frac{f(x) - \alpha x}{(1-k)\,aA}\right]^{\mu}, \qquad x = a\left(\frac{1-k}{2}\xi + \frac{1+k}{2}\right)$$

соответственно случаям симметричного и кососимметричного нагружения штампов. Тогда уравнение (1.1) с учетом четности решения и правой части принимает вид

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{|\xi-\eta|^{1-\mu}} + \frac{1}{(\xi+\eta+c)^{1-\mu}}\right]\varphi(\eta)\,d\eta = h(\xi) \tag{1.5}$$

а условие (1.2) — вид

$$\frac{a(1-k)}{2}\int_{-1}^{1}\psi(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\qquad\left(c=2\frac{1+k}{1-k},\quad \nu=1-\mu\right)\tag{1.6}$$

Уравнение же (1.3) при этом перейдет в следующее:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{|\xi-\eta|^{\nu}}-\frac{1}{(\xi+\eta+c)^{\nu}}\right]\varphi_{*}(\eta)\,d\eta=g(\xi)\tag{1.7}$$

а условие (1.4) — в

$$\frac{a^{2}(1-k)}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-k}{2}\xi+\frac{1+k}{2}\right)\psi_{*}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\tag{1.8}$$

Таким образом, рассматриваемые задачи сведены к решению интегральных уравнений (1.5) и (1.7) при условиях (1.6) и (1.8) соответственно.

§ 2. *Сведение основных интегральных уравнений к бесконечным системам*

Сначала приступим к решению интегрального уравнения (1.5). При этом важную роль будет играть интегральное соотношение [10]

$$\int_{-1}^{1}\frac{C_m^{\nu/2}(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{\nu}(1-\eta^{2})^{(1-\nu)/2}}=\frac{\pi\Gamma(m+\nu)}{\cos\frac{\pi\nu}{2}\,\Gamma(\nu)\,m!}\,C_m^{\nu/2}(\xi)\tag{2.1}$$

где $(m=0,1,2,\ldots)$ $C_m^{\nu/2}(\eta)$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(\xi)=(1-\xi^{2})^{(\nu-1)/2}$, а $\Gamma(x)$ — известная гамма-функция Эйлера.

Решение интегрального уравнения (1.5) представим в виде

$$\psi(\xi)=\rho(\xi)\sum_{m=0}^{\infty}X_m\varphi_m(\xi)\tag{2.2}$$

Здесь

$$\varphi_n(\xi)=\left[\frac{n!\,(n+\nu/2)\,\Gamma^{2}(\nu/2)}{\pi 2^{1-\nu}\,\Gamma(n+\nu)}\right]^{1/2}C_n^{\nu/2}(\xi)\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

ортонормированная с весом $\rho(\xi)$ система функций

$$\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_m(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$$

обладающая согласно (2.1) свойством

$$\int_{-1}^{1} \rho(\eta)\,\varphi_n(\eta)\,\frac{d\eta}{|\xi-\eta|^{\nu}} = \frac{1}{\lambda_n}\,\varphi_n(\xi) \tag{2.3}$$

$$\lambda_n = \cos\frac{\pi\nu}{2}\,\Gamma(\nu)\,n!/\pi\Gamma(n+\nu) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\dots)$$

Подставляя (2.2) в (1.5) и учитывая (2.3), на основе известной процедуры для определения неизвестных коэффициентов будем иметь следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\dots) \tag{2.4}$$

где

$$K_{mn} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\rho(\xi)\,\rho(\eta)}{(c+\xi+\eta)^{\nu}}\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_m(\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{2.5}$$

$$h_n = \lambda_n \int_{-1}^{1} h(\xi)\,\rho(\xi)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi \tag{2.6}$$

$$(n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\dots)$$

Отметим, что бесконечную систему вполне аналогичной структуры можно получить и в случае кососимметричного нагружения штампов, исходя при этом из уравнения (1.7).

Теперь заметим, что из (1.6) и представления (2.2) непосредственно находим:

$$X_0 = 2^{1-1.5\nu}\sqrt{\pi\nu\Gamma^{3}(\nu)}\,/a\,(1-k)\,\Gamma^{2}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \tag{2.7}$$

Далее бесконечную систему (2.4) запишем в виде

$$X_0 + \lambda_0 \sum_{m=0}^{\infty} K_{0m} X_m = h_0 \tag{2.8}$$

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n - \lambda_n X_0 K_{n0} \tag{2.9}$$

$$(n = 1,\ 2,\dots)$$

Если размеры участка контакта a и b заданы, то из системы (2.9) можно определить коэффициенты $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, выраженные через $h_n (n = 1,\ 2,\dots)$, которые в свою очередь зависят от неизвестной постоянной δ. Подставив выражение этих коэффициентов в соотношение (2.8), получим уравнение, откуда может определяться δ.

§ 3. *Исследование бесконечной системы (2.9)*

Для исследования бесконечной системы (2.9) преобразуем выражение интеграла

$$I_n(\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{\rho(\eta)\varphi_n(\eta)\,d\eta}{(\xi+\eta+c)^{\nu}} \tag{3.1}$$

Имеем [20]

$$C_n^{\nu/2}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+\nu)}{2^{-1+\nu/2}\Gamma^2(\nu/2)\,n!}(\sin\theta)^{1-\nu}\int_0^{\theta}\frac{\cos[(n+\nu/2)\varphi]\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1-\nu/2}}$$

$$(0<\theta<\pi)$$

Тогда

$$\rho(\cos\theta)\,\varphi_n(\cos\theta) = A_n\int_0^{\theta}\frac{\cos[(n+\nu/2)\varphi]\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1-\nu/2}} \tag{3.2}$$

$$A_n = [2(n+\nu/2)\Gamma(n+\nu)/\pi\Gamma^2(\nu/2)\,n!]^{1/2}$$

В формуле (3.1) сделаем замену переменной $\eta=\cos\theta$ и воспользуемся представлением (3.2). Затем проинтегрируем ее по частям. Тогда после несложных выкладок получим

$$I_n(\xi) = \frac{A_n}{n+\dfrac{\nu}{2}}\int_0^{\pi}\sin\left(n+\frac{\nu}{2}\varphi\right)g(\xi,\varphi)\,d\varphi \tag{3.3}$$

где

$$g(\xi,\varphi) = \frac{\sin\varphi}{(c+\xi-1)^{\nu}(1+\cos\varphi)^{1-\nu/2}} -$$

$$-\nu\sin\varphi\int_{\varphi}^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{(c+\xi+\cos\theta)^{\nu+1}(\cos\varphi-\cos\theta)^{1-\nu/2}} \tag{3.4}$$

Далее из (2.5) и (3.3) находим

$$K_{nm} = \int_{-1}^{1}\rho(\xi)\varphi_n(\xi)I_m(\xi)\,d\xi =$$

$$= B_m\int_0^{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\varphi_n(\xi)g(\xi,\varphi)\,d\xi\right]\sin\left(m+\frac{\nu}{2}\right)\varphi\,d\varphi \tag{3.5}$$

$$B_m = \frac{A_m}{m + \frac{\nu}{2}} \left| \frac{2\Gamma(m+\nu)}{\pi\Gamma^2(\nu/2)\, m!\, (m+\nu/2)} \right|^{1/2} \quad (m,\ n = 1, 2, \dots)$$

Очевидно, что $B_m = O(m^{-1-\nu/2})$ при $m \to \infty$.
Из (3.6) по неравенству Коши-Буняковского будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} |K_{nm}| \leqslant \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} \int_{-1}^{1} \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) \sin\left(m + \frac{\nu}{2}\right) \varphi d\xi d\varphi \right]^2} \leqslant \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \times$$

$$\times \sqrt{2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} E_n(\varphi) \sin m\varphi d\varphi \right]^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} F_n(\varphi) \cos m\varphi d\varphi \right]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \sqrt{\int_0^{\pi} \left[\int_{-1}^{1} \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) d\xi \right]^2 d\varphi}$$

где

$$E_n(\varphi) = \cos \frac{\nu}{2} \varphi \int_{-1}^{1} \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) d\xi$$

$$F_n(\varphi) = \sin \frac{\nu}{2} \varphi \int_{-1}^{1} \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) d\xi$$

Подробное исследование структуры последних интегралов приводит к неравенству

$$\lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} |K_{nm}| \leqslant B_n \lambda_n \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \sqrt{\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\pi} |H(x, \varphi)| dx \right]^2 d\varphi}$$

$$H(x, \varphi) = \nu(\nu + 1) \sin \varphi \times$$

$$\times \int_{\varphi}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1-\nu/2}} \int_{x}^{\pi} \frac{\sin t dt}{(c + \cos \theta + \cos t)^{\nu+2} (\cos x - \cos t)^{1-\nu/2}}$$

$$B_n \lambda_n = \left| \frac{n!}{\pi\Gamma(n+\nu)(n+\nu/2)} \right|^{1/2} \frac{\cos \frac{\pi\nu}{2} \Gamma(\nu)}{\pi\Gamma(\nu/2)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Легко убедиться, что

$$B_n\lambda_n = O(n^{-1/2}) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

откуда вытекает квазивполне регулярность бесконечной системы (2.9). Полная же регулярность имеет место при соблюдении условия

$$\sup_n \left\{ B_n\lambda_n \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 H} \right\} < 1$$

$$H = \sqrt{\int_0^\pi \int_0^\pi H^2(x, y)\, dx dy}$$

§ 4. *Пример и числовые результаты*

В качестве примера рассмотрим случай симметричного вдавливания двух одинаковых штампов с плоскими основаниями в степенно упрочняющуюся полуплоскость. Тогда $f(x)=0$ и уравнение (1.5) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{|\xi-\eta|^\nu} + \frac{1}{(\xi+\eta+c)^\nu} \right] \varphi(x)\, d\eta = \frac{1}{P} \left[\frac{2\delta}{a(1-k)A} \right]^{\mu} \tag{4.1}$$

Уравнение (2.8) и бесконечная система (2.9) в данном случае соответственно будут

$$X_0 + \lambda_0 \sum_{m=0}^{\infty} K_{0m} X_m = h_0 \tag{4.2}$$

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n - \lambda_n X_0 K_{n0} \tag{4.3}$$

где согласно (2.6)

$$h_0 = \frac{\lambda_0}{P} 2^{1.5\nu-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu\Gamma^2(\nu)}} \left[\frac{2\delta}{(1-k)aA} \right]^{\mu}$$

$$h_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Числовые расчеты были проведены на ЭВМ «Наири-2», когда $\nu=0.3$ и $k=0.3$, или $k=0.6$. При двух указанных значениях параметра k сначала были вычислены значения ядра K_{nm} по формуле (2.5), ограничиваясь значениями $n, m=0, 1, 2, 3, 4$. Приняв во внимание, что в разбираемом случае полуширина контактного участка a заранее задана, значение коэффициента X_0 из (2.7) можно считать известным. При известном X_0 далее были решены укороченные системы (4.3), состоящие из трех и четырех уравнений. Решение последних приведено в табл. 1.

Таблица 1

	$n=3,\ k=0.3$	$n=4,\ k=0.3$	$n=3,\ k=0.6$	$n=4,\ k=0.6$
X_0	0.50924	0.50924	0.89117	0.89117
X_1	0.01114	0.01088	0.00833	0.00829
X_2	0.03016	0.02701	0.02267	0.02081
X_3	0.01815	0.01827	0.01362	0.01364
X_4		0.06516		0.05195

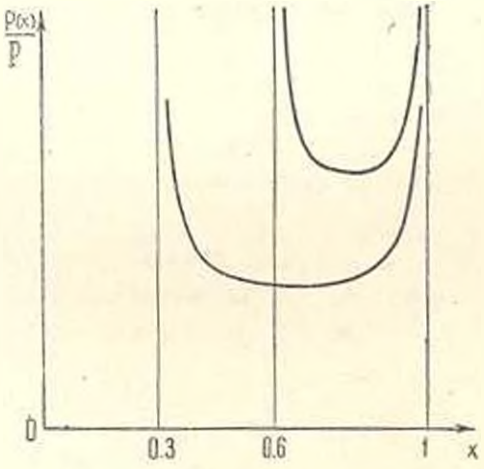
После того, как известны коэффициенты $\{X_n\}_{n=0}^{4}$, из (4.2) можно определить до сих пор неизвестную константу λ:

$$\lambda = 15.56427\, K^{-10/7} \exp\left(\frac{10}{7} \ln P\right) \quad \text{при} \quad k = 0.3$$

$$\lambda = 221.55874\, K^{-10/7} \exp\left(2.5 \ln P\right) \quad \text{при} \quad k = 0.6$$

Тогда нормальное давление под штампами согласно (2.2) выразится формулой

$$\frac{p(x)}{P} = \left|\frac{2}{1-k}\right|^{\frac{\nu-1}{2}} [(1-x)(x-k)]^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{m=0}^{4} X_m \varphi_m \left|\frac{2}{1-k}x - \frac{1+k}{1-k}\right| \qquad (4.4)$$



Фиг. 1.

Затем при помощи приведенной выше таблицы, формулы (4.4) и табл. 2 построены графики нормального давления (фиг. 1).

Таблица 2

$p(x)/P$				
x	$k = 0.3$	x	$k = 0.3$	$k = 0.6$
0.32	0.89367	0.62	0.41442	1.19200
0.34	0.67487	0.64	0.41583	0.90761
0.36	0.57111	0.66	0.41689	0.78760
0.38	0.50994	0.68	0.41759	0.72876
0.40	0.47094	0.70	0.41795	0.70035
0.42	0.44543	0.72	0.41807	0.68848
0.44	0.42881	0.74	0.41614	0.68553
0.46	0.41831	0.76	0.41840	0.68690
0.48	0.41212	0.78	0.41918	0.68977
0.50	0.40895	0.80	0.42097	0.69253
0.52	0.40789	0.82	0.42437	0.69454
0.54	0.40821	0.84	0.43021	0.69607
0.56	0.40939	0.86	0.43965	0.69832
0.58	0.41101	0.88	0.45933	0.70357
0.60	0.41277	0.90	0.47679	0.71617
		0.92	0.51125	0.74274
		0.94	0.55577	0.79615
		0.96	0.56938	0.90510
		0.98	0.86005	1.16686

Авторы искренне признательны Н. Х. Арутюняну и С. М. Мхитаряну за неоднократное ценное обсуждение работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 20 I 1977

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԵՐԿՈՒ ՄԻԱՏԵՍԱԿ ԴՐՈՇՄՆԵՐԻ ՃՆՇՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է կիսահարթության համար սիմետրիկ դասավորված երկու դրոշմների ճնշման կոնտակտային խնդիրը, երբ լարումների և դեֆորմացիաների միջև տեղի ունի աստիճանային կապ։ Խնդիրը լուծված է օրթոգոնալ բազմանդամների օգտագործման եղանակով և լուծումը բերված է գծային հավասարումների անվերջ համակարգի։ Դիտարկված է թվային օրինակ։

ON THE CONTACT PROBLEM OF NONLINEAR STEADY CREEP WITH TWO IDENTICAL PUNCHES PRESSED IN A SEMI-PLANE

B. S. SARKISIAN, V. G. MKHITARIAN, L. O. OVSEPIAN

Summary

The contact problem for a semi-plane with two identical punches is considered. The power law is assumed to hold between stresses and strains. The initial integral equation is solved by the method of orthogonal polynomials. A particular case is examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, № 5.
2. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, 1948, № 10.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
4. *Turner F., Blomquist K.* A study of the applicability of Rabotnov's creep parameter for aluminium alloy. J. Aeronaut. Sci., 1956, XXIII, № 12.
5. *Жуков А. М., Работнов Ю. Н., Чуриков Ф. С.* Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести. Инженерный сборник, 1953, т. XVII.
6. *Jonson A.* The plastic, creep and relaxation of properties of metals. Aircraft Engineering, 1949, XXI, № 239.
7. *Odqvist F.* Engineering theories of metallic creep. Memorie Symposium la plasticita nella Scienza della costruzioni in onore d. Danusso, Bologna, 1956.
8. *Арутюнян Н. Х.* и *Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, № 5.
9. *Гохберг И. Ц.* и *Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., «Наука», 1967.
10. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
11. *Carleman T.* Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. Math. Z., 1922, Bd. 15.
12. *Сахалюк К. Д.* Обобщенное интегральное уравнение Абеля. ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4.
13. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
14. *Самко С. Г.* Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши. ДАН СССР, 1967, т. 176, № 5.
15. *Самко С. Г.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования. Диф. урав., 1968, т. 4, № 2.
16. *Слабодянюк А. П.* Вдавливание двух штампов в неоднородную полуплоскость. ПМ, 1973, т. 9, вып. 1, № 11.
17. *Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян Л. О.* Передача нагрузки от степенно-упрочняющейся накладки к деформируемому основанию. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 27, № 5.

18. *Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян Л. О.* Периодическая контактная задача для полуплоскости со степенно-упрочняющимися накладками. Ученые записки ЕГУ, № 2, 1975.
19. *Мхитарян В. Г.* О передаче нагрузки от двух степенно-упрочняющихся накладок к деформируемому основанию и связанном с ней нелинейным интегральным уравнением. Ученые записки ЕГУ, № 3, 1976.
20. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Физматгиз», 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

А. Ф. ДАЩЕНКО, Г. Я. ПОПОВ

К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

1. Целью данной статьи является показать, что в некоторых случаях использование известной [1] теории кручения подкрепленных стержней может привести к неточным результатам, указать причину этих неточностей и наметить путь их устранения, оставаясь в рамках основных положений этой теории.

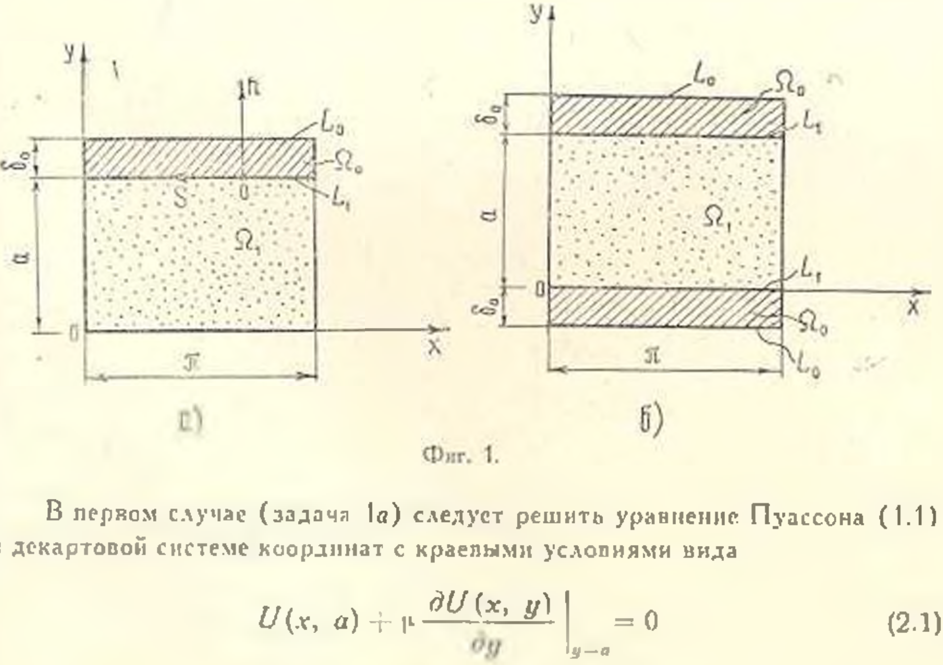
Рассмотрим несколько типичных задач, используя упомянутую теорию, сводящую, как известно, проблему кручения стержней с подкреплением к краевой задаче

$$\Delta U = -2G_1 \tag{1.1}$$

$$\left[U + \mu \frac{\partial U}{\partial n}\right]_\Gamma = 0, \qquad \mu = \delta_0 \frac{G_0}{G_1} \tag{1.2}$$

Δ — двумерный оператор Лапласа, G_0, G_1 — модули сдвига покрытия и основного материала, Γ — односвязный контур профиля, n — нормаль к контуру, δ_0 — толщина покрытия.

2. Пусть область поперечного сечения стержня представляет собой прямоугольник с одной подкрепленной стороной (фиг. 1*а*) и с двумя подкрепленными сторонами (фиг. 1*б*).



Фиг. 1.

В первом случае (задача 1*а*) следует решить уравнение Пуассона (1.1) в декартовой системе координат с краевыми условиями вида

$$U(x, a) + \mu \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\bigg|_{y=a} = 0 \tag{2.1}$$

$$U(x, 0) = U(0, y) = U(\pi, y) = 0 \tag{2.2}$$

Во втором случае (задача 1б) — то же уравнение, но с краевыми условиями вида

$$U(x, a) + \mu \left.\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\right|_{y=a} = 0 \tag{2.3}$$

$$U(x, 0) - \mu \left.\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \tag{2.4}$$

$$U(0, y) = U(\pi, y) = 0 \tag{2.5}$$

Решение уравнения Пуассона в обоих случаях ищем в виде

$$U(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sh} ny + B_n \operatorname{ch} ny + \frac{4G_1}{n^3} \right) \sin nx, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{2.6}$$

При этом краевые условия на гранях $x=0$ и $x=\pi$ удовлетворяются автоматически. Реализуя оставшиеся граничные условия (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4), определяем неизвестные коэффициенты A_n и B_n в (2.6). При этом для задачи 1а получаем

$$A_n = \frac{4G_1}{n^3} \frac{\operatorname{ch} na + \mu n \operatorname{sh} na - 1}{\operatorname{sh} na + \mu n \operatorname{ch} na}, \quad B_n = -\frac{4G_1}{n^3} \tag{2.7}$$

а для задачи 1б

$$A_n = \frac{4G_1}{n^3} \frac{\operatorname{ch} na + \mu n \operatorname{sh} na - 1}{\operatorname{sh} na + 2\mu n \operatorname{ch} na + \mu^2 n^2 \operatorname{sh} na} \tag{2.8}$$

$$B_n = -\frac{4G_1}{n^3} \frac{\mu n (1 + \operatorname{ch} na) + \operatorname{sh} na}{\operatorname{sh} na + 2\mu n \operatorname{ch} na + \mu^2 n^2 \operatorname{sh} na} \tag{2.9}$$

Крутильную жесткость C, связывающую крутящий момент M и угол закручивания θ на единицу длины, определим по известной формуле

$$C = 2 \int_0^{\pi}\int_0^{a} U(x, y)\, dx dy \tag{2.10}$$

При этом для задачи 1а получаем

$$C = \frac{32G_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left| \frac{2(1 - \operatorname{ch} na) + (na - \mu n) \operatorname{sh} na + \mu n^2 a \operatorname{ch} na}{\operatorname{sh} na + \mu n \operatorname{ch} na} \right| \tag{2.11}$$

Для задачи 1б имеем формулу

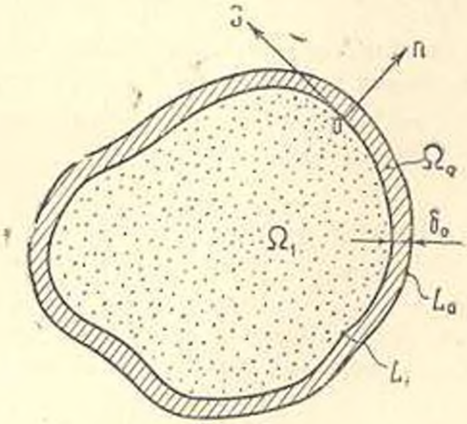
$$C = \frac{32G_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left| \frac{2(1 - \operatorname{ch} na) + (\mu^2 n^2 a + a - 2\mu) n \operatorname{sh} na + 2\mu n^2 a \operatorname{ch} na}{\operatorname{sh} na + 2\mu n \operatorname{ch} na + \mu^2 n^2 \operatorname{sh} na} \right| \tag{2.12}$$

3. Область поперечного сечения стержня представляет собой половину круга (фиг. 2) с подкреплением по полуокружности. В полярных координатах краевая задача (1.1) и (1.2) представляется в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)U(r,\theta)=-2G_1 \tag{3.1}$$

$$\left[U(r,\theta)+\mu\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial r}\right]_{r=\rho}=0 \tag{3.2}$$

$$U(r,0)=U(r,\pi)=0 \tag{3.3}$$



Фиг. 2.

Следуя работе [3], решение уравнения (3.1) примем в виде

$$U(r,\theta)=\sum_{n=1,3}^{\infty}\Psi_n(r)\sin n\theta \tag{3.4}$$

что позволяет автоматически удовлетворить краевому условию (3.3). При этом на основании (3.1) для $\Psi_n(r)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Psi_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Psi_n}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\Psi_n=-\frac{8G_1}{\pi n} \tag{3.5}$$

решение которого имеет вид

$$\Psi_n(r)=A_n r^n+\frac{8G_1 r^2}{\pi n(n^2-4)} \tag{3.6}$$

Реализуя граничное условие (3.2), находим неизвестную постоянную A_n

$$A_n=-\frac{8G_1(\rho+2\mu)}{\pi n(n^2-4)(\rho+\mu n)}\rho^{2-n} \tag{3.7}$$

Крутильная жесткость C согласно формулам (2.10), (3.4), (3.6) и (3.7) будет иметь вид

$$C=\frac{32G_1}{\pi}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{\rho^4}{n^2(n^2-4)}\left[\frac{1}{4}-\frac{\rho+2\mu}{\rho+\mu n}\,\frac{1}{n+2}\right] \tag{3.8}$$

Проведем анализ полученных выражений для жесткости (2.11), (2.12) и (3.8). При $\mu=0$ (подкрепление отсутствует) получаем выражения, численная реализация которых приводит к известным результатам [1]. При стремлении $\mu\to\infty$ подкрепление становится абсолютно жестким и поэтому C должно стремиться к ∞. Однако, полученные формулы для жесткостей всех рассмотренных задач стремятся к конечным величинам. Покажем как, оставаясь в рамках основных положений теории [1], устранить выявленное противоречие на примере рассмотренных выше задач.

4. Рассмотрим сначала прямоугольную область (фиг. 1*а*, *б*). Следуя работе [1], при реализации граничного условия на контуре L_1 (фиг. 1*а*) в выражении (4.8), § 4, гл. VI не будем пренебрегать членом $G_0\delta_0^2$, тогда граничное условие на контуре L_1 примет вид

$$U_1(x,\ y)+\mu\frac{\partial U_1(x,\ y)}{\partial n}=G_0\delta_0^2 \tag{4.1}$$

Перейдем теперь к определению жесткости C скручиваемого стержня (фиг. 1*а*). Принимая во внимание, что в области усиливающего покрытия справедливы следующие равенства [1]:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x}=\frac{\partial U_0}{\partial n}\cos(n,\ x),\qquad \frac{\partial U_0}{\partial y}=\frac{\partial U_0}{\partial n}\cos(n,\ y) \tag{4.2}$$

и используя известную формулу для жесткости C при кручении [1]

$$C=\frac{1}{\theta}\iint\limits_{\Omega_i}\left[x\tau_{yz}^{(i)}-y\tau_{xz}^{(i)}\right]dxdy\qquad (i=0,\ 1) \tag{4.3}$$

получим

$$C=2\iint\limits_{\Omega_1}U_1(x,\ y)\,dxdy-\int\limits_{L_1}U_1(s,\ 0)\left[x\cos(n,\ x)+y\cos(n,\ y)\right]ds-$$

$$-\iint\limits_{\Omega_0}\frac{\partial U_0}{\partial n}\left[x\cos(n,\ x)+y\cos(n,\ y)\right]dnds \tag{4.4}$$

Здесь $\dfrac{\partial U_0}{\partial n}$ согласно [1] есть

$$\frac{\partial U_0}{\partial n}=-2G_0n+\frac{G_0}{G_1}\,\frac{\partial U_1(s,\ n)}{\partial n}\bigg|_{n=0} \tag{4.5}$$

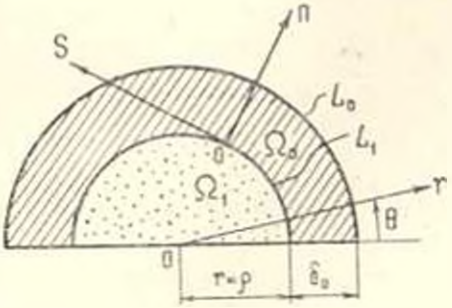
Преобразуя второй и третий интегралы выражения (4.4), при этом принимая во внимание (4.1) и пренебрегая членами с δ_0^3, имеем

$$C = 2\iint\limits_{\Omega_1} U_1(x, y)\,dxdy + \frac{\delta_0^2 G_0}{2G_1}\int\limits_0^a \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y}\Bigg|_{y=0} dx \tag{4.6}$$

Аналогично можно получить и формулу для жесткости скручиваемого стержня, поперечное сечение которого показано на фиг. 1б. Она имеет вид

$$C = 2\iint\limits_{\Omega_1} U_1(x, y)\,dxdy + \delta_0^2 \frac{G_0}{G_1}\int\limits_0^a \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y}\Bigg|_{y=a} dx \tag{4.7}$$

5. Приведем аналогичные построения для случая произвольного подкрепленного профиля (фиг. 2) и, в частности, профиля, показанного на фиг. 3 (полуокружность с подкрепленной криволинейной частью контура).



Фиг. 3.

Тогда на основании [1] уравнение Пуассона в криволинейной системе координат (s, n) имеет вид

$$\Delta U_i = \frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial U_i}{\partial s}\right] + \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial U_i}{\partial n}\right]\right\} = -2G_i \tag{5.1}$$

$$i = 0,\ 1$$

Здесь

$$H_1 = 1 + \frac{n}{\rho}, \quad H_2 = 1$$

граничные условия

$$U_0(s, \delta_0) = 0, \quad \text{на} \quad L_0 \tag{5.2}$$

$$U_0(s, 0) = U_1(s, 0) \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{G_0}\left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)_{n=0} = \frac{1}{G_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_{n=0}$$

Если принять во внимание [1], что для покрытия $\dfrac{\partial U_0}{\partial s} = 0$, то уравнение (5.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial U_0}{\partial n}\right] = -2G_0H_1H_2 \tag{5.4}$$

Проинтегрировав уравнение (5.4), получим

$$U_0 = -G_0\frac{(\rho+n)^2}{2} + \rho B_0 \ln(\rho+n) + E_0 \tag{5.5}$$

где B_0 и E_0 — постоянные интегрирования, которые находим из граничных условий (5.3) и в результате чего имеем

$$E_0 = U_1(s,\ 0) + G_0\frac{\rho^2}{2} - \rho\ln\rho B_0 \tag{5.6}$$

$$B_0 = \frac{G_0}{G_1}\frac{\partial U_1(s,n)}{\partial n}\bigg|_{n=0} + G_0\rho \tag{5.7}$$

Используя (5.2), (5.6), (5.7) и пренебрегая членами с δ_0^3, находим из (5.5)

$$U_1(s, 0) + \left(\delta_0 - \frac{\delta_0^2}{2\rho}\right)\frac{G_0}{G_1}\frac{\partial U_1(s,\ n)}{\partial n}\bigg|_{n=0} = G_0\delta_0^2 \quad \text{на} \quad L_0 \tag{5.8}$$

Определяем выражение C скручиваемого стержня (фиг. 2)

$$C = 2\iint\limits_{\Omega_1} U_1(s,\ n)\,d\Omega_1 - \int\limits_{L_1} U_1(s,\ 0)\left[x\cos(n,\ x) + y\cos(n,\ y)\right]ds -$$

$$-\iint\limits_{\Omega_0}\frac{\partial U_0}{\partial n}\left[x\cos(n,\ x) + y\cos(n,\ y)\right]\frac{\rho+n}{\rho}\,dnds \tag{5.9}$$

Здесь $d\Omega_1$ — элемент площади, в криволинейных координатах он равен $\left(1+\frac{n}{\rho}\right)dnds$

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} = -G_0(\rho+n) + \frac{\rho}{\rho+n}B_0 \tag{5.10}$$

Несложно видеть, что если в выражениях (5.9) и (5.10) ρ устремить к бесконечности, то придем к выражениям (4.4) и (4.5). Так же, как и в п. 4, преобразуем выражение (5.9), в результате чего имеем

$$C = 2\iint\limits_{\Omega_1} U_1(s,\ n)\,d\Omega_1 - \delta_0^2\frac{G_0}{G_1}\int\limits_{L_1}\frac{\partial U_1(s,\ n)}{\partial n}\bigg|_{n=0} ds \tag{5.11}$$

Теперь принимая во внимание (4.1), (4.6), (4.7), (5.8) и (5.11), получаем жесткость C скручиваемых стержней фиг. 1а, б и фиг. 2.

Случай 1а

$$C=\frac{32\,G_1}{\pi}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left|\frac{2\,(1-\operatorname{ch} na)+(a-\mu)\,n\operatorname{sh} na+\mu n^2 a\operatorname{ch} na}{\operatorname{sh} na+\mu n\operatorname{ch} na}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu\delta_0 n^2(\operatorname{ch} na-1)}{2(\operatorname{sh} na+\mu n\operatorname{ch} na)}\right|+\frac{4\delta_0 G_1}{\pi}\mu\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left|\frac{2\,(1-\operatorname{ch} na)+\mu n^2\delta_0\operatorname{ch} na}{\operatorname{sh} na+\mu n\operatorname{ch} na}\right| \qquad (5.12)$$

Случай 1б

$$C=\frac{32\,G_1}{\pi}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left|(\mu\delta_0 n^2-2)\frac{(\operatorname{ch} na-1)+\mu n\operatorname{sh} na}{\operatorname{sh} na+2\mu n\operatorname{ch} na+\mu^2 n^2\operatorname{sh} na}+na\right|+$$

$$+\frac{16\delta_0 G_1}{\pi}\mu\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{\mu\delta_0 n^2}{2}-1\right)\frac{\operatorname{ch} na-1+\mu n\operatorname{sh} na}{\operatorname{sh} na+2\mu n\operatorname{ch} na+\mu^2 n^2\operatorname{sh} na} \qquad (5.13)$$

$$C=\frac{32\,G_1}{\pi}\sum_{n=1,3}^{\infty}\left|\frac{\mu\delta_0\rho^3}{2n^2(\rho+\mu n)(n+2)}-\frac{(\rho+2\mu)\rho^4}{n^2(n+2)(n^2-4)(\rho+\mu n)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho^5}{4n^2(n^2-4)}\right|+\frac{16\delta_0 G_1}{\pi}\mu\sum_{n=1,3}^{\infty}\left|\frac{\mu\delta_0\rho}{2n(\rho+\mu n)}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\rho+2\mu)\rho^2}{n(n^2-4)(\rho+\mu n)}+\frac{2\rho^2}{n^2(n^2-4)}\right| \qquad (5.14)$$

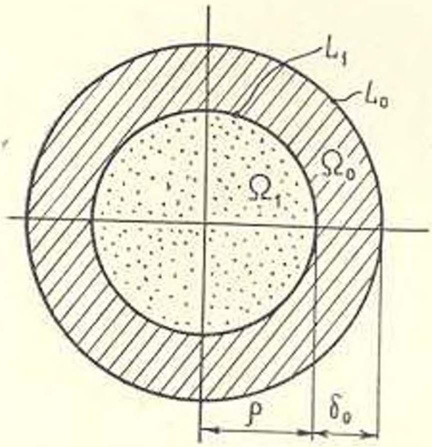
Совершая в полученных выражениях для жесткостей (5.12), (5.13) и (5.14) предельный переход при $\mu\to\infty$, получаем $C\to\infty$ и, следовательно, снимается отмеченное выше противоречие. Однако, любопытно отметить, что если контур профиля целиком подкреплен, то теория, приведенная в работе [1], не приводит к указанному противоречию (кручение призматического стержня прямоугольного сечения с тонким усиливающим покрытием; кручение полого цилиндра с поперечным сечением, ограниченным двумя неконцентрическими окружностями с тонким усиливающим покрытием; кручение полого круглого цилиндра с усиливающими тонкими покрытиями на его внешней и внутренней поверхностях). В этих случаях она дает достаточно точные для практики результаты, но при этом должно выполняться не только ограничение на толщину покрытия, указанное в работе [1], но и на отношение модулей сдвига $K=\dfrac{G_0}{G_1}$ покрытия и основного материала. И это естественно, если учесть, что пренебрегаемый в [1] член $G_0\delta_0^2$ не будет малым при очень больших G_0, даже если δ_0 мало. Более того, если δ_0 и K достаточно малы, то и для профилей, частично подкрепленных, в том числе и для рассмотренных выше, результаты по этой теории достаточно точны и не входят в противоречие со здравым смыслом, так как G_0 нельзя считать при малых K большим. Предлагаемое здесь уточнение не только устраняет противоречия, но и расширяет диапазон применимости изложенной в работе [1] теории.

Чтобы проиллюстрировать все эти рассуждения, рассмотрим пример кручения круглого подкрепленного стержня (фиг. 4). Для простоты рассуждений примем $\rho = 1$. Тогда функция напряжения $U(r)$ данной задачи с учетом описанного выше обобщения имеет вид:

$$U(r) = G_1\left(\frac{G_0}{G_1}\frac{\delta_0^2}{2} + \frac{G_0}{G_1}\delta_0 + \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right) \qquad (5.15)$$

без учета обобщения

$$U(r) = G_1\left(\frac{G_0}{G_1}\delta_0 + \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right) \qquad (5.16)$$



Фиг. 4.

Принимая во внимание (5.15), (5.16) и (5.10), жесткость скручиваемого стержня C соответственно равна

$$C = 4\pi G_1\left(\frac{3}{4}\frac{G_0}{G_1}\delta_0^2 + \frac{1}{2}\frac{G_0}{G_1}\delta_0 + \frac{1}{8}\right) \qquad (5.17)$$

и

$$C = 4\pi G_1\left(\frac{1}{2}\frac{G_0}{G_1}\delta_0 + \frac{1}{8}\right) \qquad (5.18)$$

Известно [2] также точное решение задачи о кручении кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем из другого материала. Если в этом решении радиус армированного стержня принять равным единице, а радиус кругового цилиндра $1+\delta_0$, то формула для жесткости имеет вид

$$C = 4\pi G_1\left[\frac{G_0}{G_1}\frac{(1+\delta_0)^4}{8} - \frac{G_0}{8G_1} + \frac{1}{8}\right] \qquad (5.19)$$

Несложно видеть, что асимптотическое представление этого решения по δ_0 (с точностью до δ_0^2) имеет вид (5.17). Вычисляем жесткость C по формулам (5.17), (5.18) для $\delta_0 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.50$, $G_0/G_1 = 10$ и сравниваем полученные результаты с точным решением (5.19).

Таблица

Толщина покрытия δ_0	$C/4=G_1$, $\rho=1$, $G_0/G_1=10$			Отклонение от точного решения	
	согласно настоящей работе форм. (5.17)	согласно работе [1] форм. (5.18)	точное решение [2] форм. (5.19)	по формуле (5.18)	по формуле (5.17)
0.05	0.3937	0.3750	0.3943	4.8 %	0.2 %
0.10	0.7000	0.6250	0.7051	11.3 %	0.7 %
0.15	1.0437	0.8750	1.0612	17.5 %	1.6 %
0.20	1.4250	1.1250	1.4670	23.3 %	2.8 %
0.25	1.8437	1.3750	1.9267	28.6 %	4.3 %
0.30	2.3000	1.6250	2.4451	33.5 %	5.9 %
0.50	4.5000	2.6250	5.2031	49.5 %	13.5 %

Результаты вычислений сводим в таблицу. Из таблицы видно, что при значениях δ_0, выходящих за рамки ограничений, указанных в работе [1], погрешность соответствующего решения (5.18) значительна, в то же время решение (5.17), полученное с учетом члена G_0/ω^2, дает достаточно точные для практики результаты. Следует отметить, что изложенные выше построения, связанные с учетом членов порядка G_0/ω^2, на случай кручения подкрепленного стержня многосвязного профиля трудности не представляют.

Одесский государственный
университет
Одесский политехнический
институт

Поступила 26 IV 1976

Ա. Ֆ. ԴԱՇՉԵՆԿՈ, Գ. ՅԱ. ՊՈՊՈՎ

ԱՄՐԱՑՈՒՄՆԵՐՈՎ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ Ն. Խ. Հարությունյանի և Բ. Լ. Աբրահամյանի «Առաձգական մարմինների ոլորումը» գրքում բերված ամրացումներով ձողերի ոլորման մոտավոր տեսությունը կարելի է ճշգրտել: Այդ կապակցությամբ ավելի ճիշտ են նկարագրված նշված տեսության կիրառության շրջանակները և տրված է նրա որոշ ընդհանրացումը, որի օգնությամբ կարելի է դուրս գալ նշված տեսության կիրառության շրջանակից և դիտարկել խնդիրներ նաև այնպիսի դեպքերի համար, որոնց համար նշված տեսությունը կիրառելի չէ:

ON THE THEORY OF TORSION OF FASTENED BARS

A. F. DASCHENKO, G. Y. POPOV

S u m m a r y

The paper is intended to show that a perfunctory usage of the theory of torsion of fastened bars presented in the book by N. Ch. Arutunian and B. L. Abramian "Torsion of Elastic Bodies", M. 1963. may result in some inaccuracies and paradoxes. Due to the above the present study offers a more accurate description of the applicability range of the said theory somewhat generalizing it.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд-во «Наука», 1966.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М., изд-во «Мир», 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

Р. М. БАРСЕГЯН

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ГРУНТАХ

В отличие от основных уравнений теории фильтрационной консолидации, базирующихся на законе Дарси—Герсеванова [1, 2], в работе [3] получена система уравнений неустановившейся фильтрации жидкости в деформируемых грунтах, базирующаяся на законе Дарси. При выводе вышеуказанной системы уравнений учитывается собственный вес грунта.

Ниже дается решение системы основных уравнений, приведенных в [3], при следующих предположениях, часто применяемых в практике, а именно $\alpha = \text{const}$, $a = \text{const}$, коэффициент фильтрации не зависит от z, вместо переменного коэффициента пористости берется некоторый осредненный коэффициент ε_{cp}. Тогда вместо основной системы уравнений теории фильтрационной консолидации получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{(1+\varepsilon_{cp})^2 + a(l-z)(\gamma-\gamma_{ck})}{a\gamma} k \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

Представляет интерес решение уравнения (1.1) для случая устройства водохранилища при условиях

$$H(z, 0) = \frac{l-H_1}{l} z + H_1 + h_0, \quad H(l, t) = l + h_0 = H_2, \quad H(0, t) = H_1 \tag{1.2}$$

Если величины H_1 и h_0 будут заданными функциями от времени, то нужно интегрировать уравнение (1.1) со следующими условиями:

$$H(z, 0) = \frac{l-H_1}{l} z + H_1 + h_0, \quad H(l, t) = l + h_0(t) = \varphi(t)$$

$$H(0, t) = H_1(t) \tag{1.3}$$

где H_1 и h_0 в начальном условии являются значениями соответственно функций $H_1(t)$ и $h_0(t)$ при $t=0$, l — мощность слоя грунта, h_0 — глубина воды в водохранилище.

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (\alpha + \beta z) \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \tag{1.4}$$

где

$$\alpha = \frac{k(1+\varepsilon_{cp})^2}{a\gamma} + \frac{k(\gamma-\gamma_{ck})l}{\gamma}, \qquad \beta = \frac{k(\gamma_{ck}-\gamma)}{\gamma}$$

Применяя к уравнению (1.4) и к условиям (1.3) преобразование Лапласа по времени, после подстановки $\alpha+\beta z=x$ получим задачу (1.5)—(1.6)

$$\frac{d^2h}{dx^2}-\frac{ph}{\beta^2 x}=-\frac{\psi(x)}{\beta^2 x} \tag{1.5}$$

$$h|_{x=\alpha}=\overline{H}_1(p), \quad h|_{x=\alpha+\beta l}=\overline{\varphi}(p) \tag{1.6}$$

где

$$\psi(x)=H\left(\frac{x-\alpha}{\beta},\ 0\right), \quad h(x,\ p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}H\,dt$$

$$\overline{H}_1(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}H_1(t)\,dt, \quad \overline{\varphi}(t)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt$$

Для однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.5), линейно независимыми решениями являются

$$h_1=\sqrt{x}\,J_1(\theta) \quad \text{и} \quad h_2=\sqrt{x}\,Y_1(\theta)$$

где $\theta=\frac{2i\sqrt{px}}{\beta}$, а $J_1(\theta)$ и $Y_1(\theta)$ — функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго рода.

Общее решение уравнения (1.5) дается формулой

$$\begin{aligned} h=\sqrt{x}\Big\{J_1(\theta)\Big[C_1-\pi\int\psi(x)\sqrt{x}\,Y_1(\theta)\,dx\Big]+\\ +Y_1(\theta)\Big[C_2+\pi\int\psi(x)\sqrt{x}\,J_1(\theta)\,dx\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Подставляя в (1.7)

$$\psi(x)=H\left(\frac{x-\alpha}{\beta},\ 0\right)=\frac{(l-H_1)(x-\alpha)}{l\beta}+H_1+h_0=xv+w$$

где

$$v=\frac{l-H_1}{l\beta}, \quad w=\frac{\alpha(H_1-l)}{l\beta}+H_1+h_0$$

после вычисления интегралов и с помощью граничных условий (1.6) получим

$$\begin{aligned} h=\frac{xv+w}{p}+\frac{\sqrt{x}}{\Delta p\sqrt{\alpha(\alpha+\beta l)}}\Big\{\sqrt{\alpha+\beta l}\,[p\overline{H}_1(p)-\\ -\alpha v-w][Y_1(\theta_2)J_1(\theta)-J_1(\theta_2)Y_1(\theta)]+\\ +\sqrt{\alpha}\,[p\overline{\varphi}(p)-(\alpha+\beta l)v-w][J_1(\theta_1)Y_1(\theta)-Y_1(\theta_1)J_1(\theta)]\Big\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\Delta = J_1(\theta_1)\,Y_1(\theta_2) - J_1(\theta_2)\,Y_1(\theta_1)$$

$$\theta_1 = \frac{2i\sqrt{p\alpha}}{\beta}, \quad \theta_2 = \frac{2i\sqrt{p(\alpha+\beta l)}}{\beta}$$

Из (1.7) с помощью граничных условий

$$h\big|_{x=\alpha} = \frac{H_1}{p} \quad \text{и} \quad h\big|_{x=\alpha+\beta l} = \frac{H_2}{p}$$

которые получаются из условий (1.2) после применения к ним преобразования Лапласа, имеем

$$h = \frac{xv+w}{p} + \frac{\sqrt{x}}{\Delta p\sqrt{\alpha(\alpha+\beta l)}}\{\sqrt{\alpha+\beta l}\,(H_1 - \alpha v - w)[Y_1(\theta_2)\,J_1(\theta) -$$

$$- J_1(\theta_2)\,Y_1(\theta)] + \sqrt{\alpha}[H_2 - (\alpha+\beta l)v - w][J_1(\theta_1)\,Y_1(\theta) - Y_1(\theta_1)\,J_1(\theta)]\} \tag{1.9}$$

Для перехода от решения (1.8) к оригиналу, воспользуемся теоремой разложения. С этой целью представим решение (1.8) в виде

$$h = \frac{xv-w}{p} + \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$$

где

$$\Phi(p) = \frac{\sqrt{x}}{p\sqrt{\alpha(\alpha+\beta l)}}\{\sqrt{\alpha+\beta l}(p\overline{H}_1 - \alpha v - w)[Y_1(\beta_0\theta_1)\,J_1(\theta) -$$

$$- J_1(\beta_0\theta_1)\,Y_1(\theta)] + \sqrt{\alpha}[p\overline{\varphi} - (\alpha+\beta l)v - w][J_1(\theta_1)\,Y_1(\theta) - Y_1(\theta_1)\,J_1(\theta)]\}$$

$$\Psi(p) = J_1(\theta_1)\,Y_1(\beta_0\theta_1) - Y_1(\theta_1)\,J_1(\beta_0\theta_1)$$

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{\alpha+\beta l}{\alpha}}$$

Пусть функции $\overline{H}_1(p)$ и $\overline{\varphi}(p)$ такие, что $\Phi(p)$ является обобщенным полиномом (то есть $\Phi(p)$ разлагается в ряд по степеням p) и степень этого полинома меньше степени обобщенного полинома $\Psi(p)$ (эти условия, очевидно, выполняются при постоянных граничных условиях задачи), тогда по теореме разложения

$$H(x, t) = xv + w + L^{-1}\left|\frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}\right| = xv + w + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(p_n)}{\Psi'(p_n)}e^{p_n t}$$

где p_n — корни уравнения

$$J_1(\theta_1)\,Y_1(\beta_0\theta_1) - Y_1(\theta_1)\,J_1(\beta_0\theta_1) = 0 \tag{1.10}$$

$$\theta_1 = \frac{2i\sqrt{p\alpha}}{\beta}$$

После вычисления $\Psi'(p)$ и некоторых преобразований из (1.9) получим решение задачи в виде

$$H(x,\, t) = xv + w -$$

$$- \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta l)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha+\beta l}\, f_1(t)\, \Delta_{1n} + \sqrt{\alpha}\, f_2(t)\, \Delta_{2n}}{J_1^2(\theta_1^n) - J_1^2(\beta_0\theta_1^n)}\, J_1(\theta_1^n)\, J_1(\beta_0\theta_1^n)\, e^{-\frac{(\theta_1^n)^2}{4a}} \qquad (1.11)$$

где

$$f_1(t) = \frac{(\theta_1^n\beta)^2}{4a} H_1(t) + lv + w, \qquad f_2(t) = \frac{(\theta_1^n\beta)^2}{4a} \varphi(t) + (\alpha+\beta l)\, v + w$$

$$\Delta_{1n} = J_1(\beta_1\theta_1^n)\, Y_1(\beta_0\theta_1^n) - Y_1(\beta_1\theta_1^n)\, J_1(\beta_0\theta_1^n)$$

$$\Delta_{2n} = J_1(\theta_1^n)\, Y_1(\beta_1\theta_1^n) - Y_1(\theta_1^n)\, J_1(\beta_1\theta_1^n)$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{x}{\alpha}}, \qquad \theta_1^n = \frac{2i\sqrt{p_n a}}{\beta}$$

В решении (1.11) ряд быстро сходится и поэтому для практических целей достаточно удовлетвориться первыми несколькими членами ряда (иногда одним только первым членом). Ниже в табл. 1 приводятся первые шесть корней уравнения (1.10) для значения β_0 от 1.1 до 3.0.

Таблица 1

β_0	θ_1^1	θ_1^2	θ_1^3	θ_1^4	θ_1^5	θ_1^6
1.1	31.4270	62.8370	94.2510	125.6660	157.0041	188.4615
1.2	15.7277	31.4259	47.1305	62.8368	78.5438	94.2511
1.3	10.4993	20.9578	31.4250	41.8947	52.3626	62.8341
1.4	7.8875	15.7250	23.5758	31.4245	42.0652	51.4834
1.5	6.3219	12.5861	18.8628	25.1427	31.4239	37.7057
1.6	5.2792	10.4942	15.7228	20.9552	26.2387	32.8842
1.7	4.5349	9.0003	13.4803	17.9641	22.5514	28.1293
1.8	3.9770	7.8801	11.7985	15.7211	19.6185	24.4642
1.9	3.5433	7.0090	10.4907	13.9767	17.6562	22.0176
2.0	3.1966	6.3123	9.4445	12.5812	15.7199	18.8595
2.5	2.1567	4.2233	6.3066	8.3954	10.5009	12.5081
3.0	1.6350	3.1790	4.7380	6.3020	7.8750	9.3810

В табл. 2 приведен первый корень для достаточно обширных значений β_0. Эти корни находятся графически.

Таблица 2

β_0	4	5	6	7	8	9	10	11	19	39
θ_1^1	1.1120	0.8472	0.6864	0.5780	0.4998	0.4406	0.3941	0.3566	0.2035	0.1336

В частном случае при постоянных граничных условиях $H_1 = \mathrm{const}$, $q = H_2 = \mathrm{const}$ (см. условие (1.2)) из (1.7) получим

$$h = \frac{xv + w}{p} + \frac{\sqrt{x}}{\Delta p \sqrt{\alpha(\alpha + \beta l)}} \{ \sqrt{\alpha + \beta l}\,(H_1 - \alpha v - w)\,[Y_1(\theta_2)\, J_1(\theta) -$$

$$- J_1(\theta_2)\, Y_1(\theta)] +$$

$$+ \sqrt{\alpha}\,[H_2 - (\alpha + \beta l)v - w][J_1(\theta_1)\, Y_1(\theta_1) - Y_1(\theta_1)\, J_1(\theta)]\}$$

Представим решение h в виде

$$h = \frac{xv + w}{p} + \frac{\Phi_1(p)}{\Psi_1(p)}$$

где

$$\Phi_1(p) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta l)}} \{ \sqrt{\alpha + \beta l}\,(H_1 - \alpha v - w)\,[Y_1(\theta_2)\, J_1(\theta) -$$

$$- J_1(\theta_2)\, Y_1(\theta)] +$$

$$+ \sqrt{\alpha}\,[H_2 - (\alpha + \beta l)v - w]\,[J_1(\theta_1)\, Y_1(\theta) - Y_1(\theta_1)\, J_1(\theta)]\}$$

$$\Psi_1(p) = p\,[J_1(\theta)\, Y_1(\theta_2) - Y_1(\theta_1)\, J_1(\theta_2)]$$

Функции $\Phi_1(p)$ и $\Psi_1(p)$ являются обобщенными полиномами, поэтому по теореме разложения имеем

$$H(x,\ t) = xv + w + L^{-1}\left[\frac{\Phi_1(p)}{\Psi_1(p)}\right] = xv + w + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(p_n)}{\Psi_1'(p_n)}\, e^{p_n t}$$

где p_n — корни уравнения $\Psi_1(p) = 0$.

Корни уравнения $\Psi_1(p) = 0$ являются: $p = 0$ — нулевой корень и бесчисленное множество корней характеристического уравнения, совпадающего с уравнением (1.10).

Для нулевого корня $p = 0$ имеем

$$\frac{\Phi_1(0)}{\Psi_1'(0)} = \lim_{p \to 0} \frac{\Phi_1(p)}{\Psi_1'(p)}$$

Разлагая в ряды бесселевые функции и производные от них, входящие в $\Phi_1(p)$ и $\Psi_1'(p)$, после некоторых преобразований получим

$$\lim_{p \to 0} \frac{Y_1(\theta)\, J_1(\theta_1) - J_1(\theta)\, Y_1(\theta_1)}{(p \cdot \Delta)'} = \frac{x - \alpha}{\beta l} \sqrt{\frac{\alpha + \beta l}{x}}$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{J_1(\theta)\, Y_1(\theta_2) - Y_1(\theta)\, J_1(\theta_2)}{(p \cdot \Delta)'} = \frac{\alpha + \beta l - x}{\beta l} \sqrt{\frac{\alpha}{x}}$$

и поэтому

$$\lim_{p\to 0}\frac{\Phi_1(p)}{\Psi_1(p)}=\frac{(H_1-H_2)(\alpha-x)}{\beta l}+H_1-xv-w$$

Прибавляя к полученному выражению для нулевого корня выражение оригинала части преобразованной функции, соответствующего корням характеристического уравнения, получим

$$H(x,\ t)=\frac{(H_1-H_2)(\alpha-x)}{\beta l}+H_1+$$

$$+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta l)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q}{J_1^2(\theta_1^n)-J_1^2(\beta_0\theta_1^n)}J_1(\theta_1^n)J_1(\beta_0\theta_1^n)e^{-\frac{(\theta_1^n\beta)^2}{4\tau}} \tag{1.12}$$

где

$$Q=\sqrt{\alpha+\beta l}\,(H_1-\alpha v-w)F_1(\theta^n,\ \theta_2^n)+$$

$$+\sqrt{\alpha}\,[H_2-(\alpha+\beta l)v-w]\,F_2(\theta^n,\ \theta_1^n)$$

$$F_1(\theta^n,\ \theta_2^n)=Y_1(\theta_2^n)J_1(\theta^n)-J_1(\theta_2^n)Y_1(\theta^n)$$

$$F_2(\theta^n,\ \theta_1^n)=J_1(\theta_1^n)Y_1(\theta^n)-Y_1(\theta_1^n)J_1(\theta^n)$$

$$\theta_2^n=\frac{2i\sqrt{p_n(\alpha+\beta l)}}{\beta}$$

Если не ввести собственный вес грунта, то, как известно, уравнение движения жидкости в деформируемых грунтах (уравнение консолидации) будет

$$\frac{\partial H}{\partial t}=c\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \tag{1.13}$$

которое получается из уравнения (1.4) при $\beta=0$.

Найдем решение уравнения (1.13) с условиями (1.2). С помощью преобразования Лапласа по времени из (1.13) и (1.2) получим:

$$c\frac{d^2H}{dz^2}-ph+H(z,\ 0)=0 \tag{1.14}$$

$$h|_{z=0}=\frac{H_1}{p},\quad h|_{z=l}=\frac{H_2}{p},\quad \text{где}\quad H(z,\ 0)=\frac{l-H_1}{l}z+H_1+h_0=\delta z+\varepsilon$$

Решение задачи (1.14) имеет вид

$$h=\frac{\delta z+\varepsilon}{p}+(H_2-\delta l-\varepsilon)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{c}}\,z}{p\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{c}}\,l}+(H_1-\varepsilon)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{c}}\,(l-z)}{p\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{c}}\,l} \tag{1.15}$$

Переходя в (1.15) к оригиналу, получим

$$H(z,\ t) = \delta z + \varepsilon - (H_2 - \delta l - \varepsilon)\,\frac{\sqrt{c}}{l}\int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{c}}} \theta_0\left(\frac{u\sqrt{c}}{2l},\ \frac{tc}{l^2}\right) du -$$

$$-(H_1 - \varepsilon)\frac{\sqrt{c}}{l}\int\limits_0^{\frac{l-z}{\sqrt{c}}} \theta_0\left(\frac{u\sqrt{c}}{2l},\ \frac{tc}{l^2}\right) du \qquad (1.16)$$

где θ_0 — тета-функция.

Имея решения одной и той же задачи с учетом собственного веса грунта (1.12) и без его учета (1.16), можно с помощью сравнения этих решений установить необходимость учета собственного веса грунта при рассмотрении задач фильтрации в деформируемых грунтах.

Приведем решения этих задач для малых t (больших p).

С помощью известных асимптотических разложений бесселевых функций для больших значений аргумента z

$$J_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right) \qquad Y_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$|z| \gg 1$$

из (1.9) после некоторых преобразований получим

$$h = \frac{xv + w}{p} + \sqrt{\frac{x}{\alpha}}(H_1 - \alpha v - w)\,\frac{\theta_1\sqrt{\beta_0}}{\sqrt{\theta\theta_2}}\,\frac{\sin(\theta_2 - \theta)}{p\sin(\beta_0 - 1)\,\theta_1} -$$

$$-\sqrt{\frac{x}{\alpha + \beta l}}[H_2 - (\alpha + \beta l)\,v - w]\sqrt{\frac{\beta\theta_1}{\theta}}\,\frac{\sin(\theta_1 - \theta)}{p\sin(\beta_0 - 1)\,\theta_1}$$

или же

$$h = \frac{xv + w}{p} + \sqrt[4]{\frac{\alpha}{x}}\,(H_1 - \alpha v - w)\,\frac{\sin\gamma_2\sqrt{p}}{p\sin\gamma_0\sqrt{p}} -$$

$$-\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\alpha + \beta l}}[H_2 - (\alpha + \beta l)\,v - w]\,\frac{\sin\gamma_1\sqrt{p}}{p\sin\gamma_0\sqrt{p}} \qquad (1.17)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{2l}{\beta}\left(\sqrt{\alpha + \beta l} - \sqrt{\alpha}\right), \qquad \gamma_1 = \frac{2l}{\beta}\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{x}\right)$$

$$\gamma_2 = \frac{2l}{\beta}\left(\sqrt{\alpha + \beta l} - \sqrt{x}\right)$$

Для перехода от преобразованного решения (1.17) к оригиналу заметим, что числитель и знаменатель в выражениях, входящих в (1.17),

$$\frac{\Phi_1(p)}{\Psi_0(p)} = \frac{\sin\gamma_0\sqrt{p}}{p\sin\gamma_0\sqrt{p}}, \qquad \frac{\Phi_2(p)}{\Psi_0(p)} = \frac{\sin\gamma_1\sqrt{p}}{p\sin\gamma_0\sqrt{p}}$$

не являются обобщенными полиномами после разложения их в ряды. Но их можно привести к обобщенным полиномам, разделив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{p}$.

Воспользуемся теоремой разложения

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_1(p)}{\Psi_0(p)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_1(p_n)}{\Psi'_0(p_n)}e^{p_n t}, \qquad L^{-1}\left[\frac{\Phi_2(p)}{\Psi_0(p)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_2(p_n)}{\Psi'_0(p_n)}e^{p_n t}$$

так как корни $\Psi_0(p)$ являются $p=0$ (нулевой корень) и

$$p_n = -\frac{\beta^2\pi^2 n^2}{4(\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha})^2} \quad (n=1, 2,\ldots)$$

то

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_1(p)}{\Psi_0(p)}\right] = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha}}\pi n e^{-\frac{\beta^2\pi^2 n^2 t}{4(\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha})^2}}$$

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_2(p)}{\Psi_0(p)}\right] = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha}}\pi n e^{-\frac{\beta^2\pi^2 n^2 t}{4(\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha})^2}}$$

Для нулевого корня $p=0$ воспользуемся отношениями, которые с помощью вышеуказанного способа представлены в виде обобщенных полиномов относительно p. Тогда

$$\lim_{p\to 0}\frac{\Phi_1(p)}{\Psi_0(p)} = \frac{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha}}, \qquad \lim_{p\to 0}\frac{\Phi_2(p)}{\Psi_0(p)} = \frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha}}$$

Окончательное решение задачи можно написать так:

$$\begin{aligned} H = xv + w &+ \sqrt[4]{\frac{\alpha}{x}}(H_1 - xv - w)\left\{\frac{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha}}\pi n e^{-\frac{\beta^2\pi^2 n^2 t}{4(\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha})^2}}\right\} - \\ &- \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\alpha+\beta l}}[H_2 - (\alpha+\beta l)v - w]\left\{\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha}}\pi n e^{-\frac{\beta^2\pi^2 n^2 t}{4(\sqrt{\alpha+\beta l}-\sqrt{\alpha})^2}}\right\} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Для задачи без учета собственного веса грунта из (1.15) при малых t (больших p) имеем следующее асимптотическое представление:

$$h = \frac{\delta z + \varepsilon}{p} + (H_2 - \delta l - \varepsilon) e^{-\sqrt{p}\frac{l-z}{\sqrt{c}}} + (H_1 - \varepsilon) e^{-\sqrt{p}\frac{z}{\sqrt{c}}}$$

оригинал которого есть функция

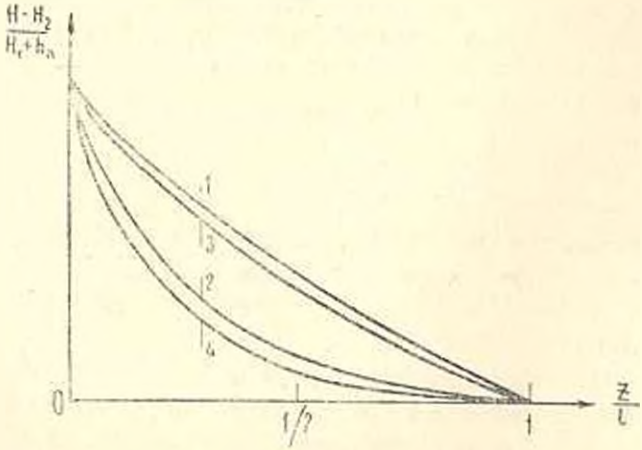
$$H = \delta z + \varepsilon + (H_2 - \delta l - \varepsilon)\,\mathrm{erfc}\,\frac{l-z}{2\sqrt{ct}} + (H_1 - \varepsilon)\,\mathrm{erfc}\,\frac{z}{2\sqrt{ct}} \quad (1.19)$$

Асимптотические решения (1.18) и (1.19) пригодны для малых значений времени.

Рассмотрим численный пример для следующих расчетных параметров:

$$H_1 = 45\ м,\ h_0 = 5\ м,\ H_2 = 15\ м,\ \gamma = 1\ г/см^3,\ \gamma_{ск} = 2.65\ г/см^3$$

$$\varepsilon_{ср} = 0.8,\ k = 1\ см/сут,\ a = 0.0002\ см^2/г,\ l = 10\ м$$



Фиг. 1.

Результаты вычислений по формулам (1.12) (график 1) и (1.16) (график 2) приведены на фиг. 1 для значения времени $t = 1$ сут. Графики 3 и 4, построенные для $t = 1$ сут. по формулам (1.18) и (1.19) почти совпадают с графиками соответственно функций (1.12) и (1.16).

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 19 XII 1975

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ԲՆԱՀՈՂԵՐՈՒՄ ՋՐԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՄԻԱՉԱՓ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Միաչափ ֆիլտրացիայի հիմնական հավասարումները սեղմելի հողում ստացվել են Դարսու օրենքի հիման վրա, որոնք տարբերվում են այն հավասարումներից, որոնք ստացվում են Դարսի-Գերսևանովի օրենքի միջոցով։ Գործնականում թույլատրելի որոշ ենթադրությունների հիման վրա կատարվում է ստացված հավասարումների ձևափոխություն, որից հետո բերվում են նոր ստացված և մինչև այժմ ընդունված հավասարումների լուծումների համեմատությունը։ Թվային օրինակի վրա երևում է, որ միևնույն խնդրի երկու լուծումների մեջ կա զգալի տարբերություն։

THE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL PROBLEM ON UNSTEADY FILTRATION OF WATER IN DEFORMED SOILS

R. M. BARSEGHIAN

S u m m a r y

In deducing the principal equations of a one-dimensional problem on filtration of water in deformed soils the Darci law is taken as the basic law of filtration whereas the Darci-Gersevanov law is applied in soil mechanics at present.

On certain assumptions admitted in practice, the system of principal equations is reduced to one equation whose solution is presented in the paper. To compare the results the solution of the equation is given, on the same assumption, obtained on the basis of Darci-Gersevanov's law. A numerical example is used to show a considerable discrepancy in the solutions for these equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов. т. 2. М., Госстройиздат, 1961.
2. *Цытович Н. А.* Механика грунтов. М., Изд. «Высшая школа», 1973.
3. *Барсегян Р. М.* К одномерной задаче неустановившейся фильтрации воды в деформируемых грунтах. ДАН СССР, 1974, т. 214, № 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

С. В. АЛЕКСАНДРОВСКИЙ, П. Ф. УРЕНЕВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦЕНТРАЛЬНО-ОБЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ВЫСОКОПРОЧНОГО БЕТОНА

Надежность оценки напряженно-деформированного состояния предварительно напряженных железобетонных конструкций зависит от точности оценки влияния на него ползучести и усадки бетона.

С привлечением нелинейной теории ползучести бетона авторами было проведено экспериментально-теоретическое изучение напряженно-деформированного состояния центрально-обжатых элементов из высокопрочного бетона с учетом его ползучести и усадки.

Экспериментальные исследования проводили на образцах из бетона М 800*. Все образцы изготовляли в стальных формах одновременно, из одного замеса и хранили в одинаковых температурно-влажностных условиях при температуре, близкой к комнатной, с отклонениями от нее в пределах $\pm$ 3°С.

Бетон приготовляли на портландцементе Новоздолбуновского завода активностью 60.6 *МПа*. В качестве крупного заполнителя применяли гранитный щебень фракций 5—15 *мм*, плотностью 2640 $кг/м^3$. Мелкий заполнитель — Москворецкий песок с модулем крупности 1.91 и плотностью 2650 $кг/м^3$. Состав бетона по массе — 1:0.72:1.67; В/Ц = 0.304.

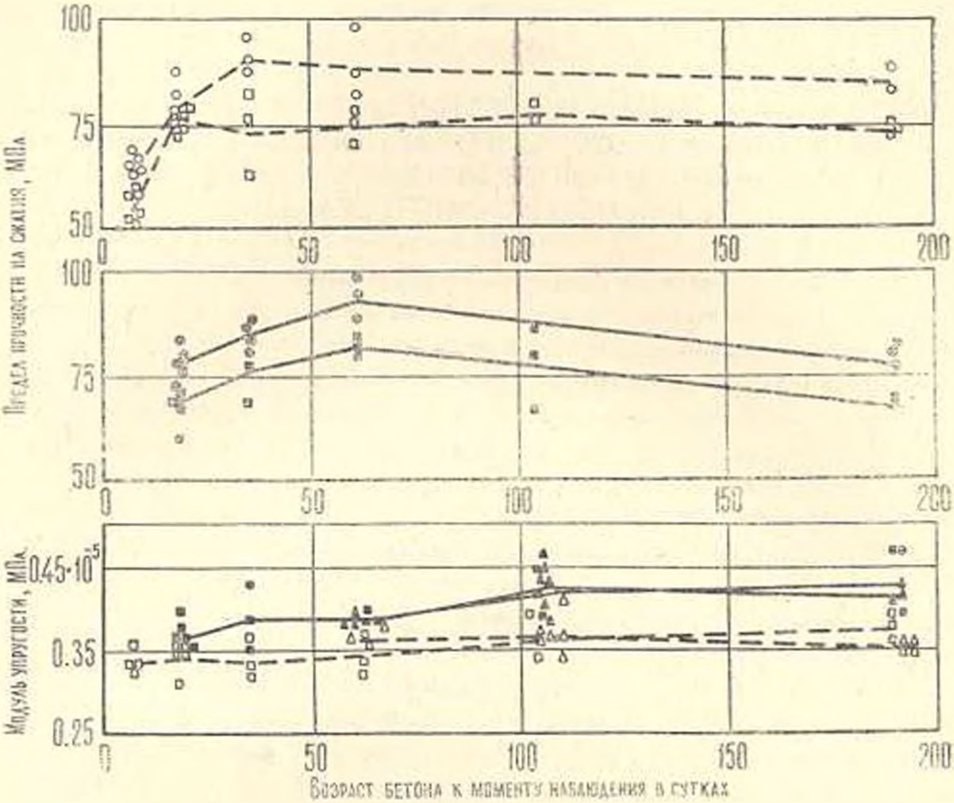
Опыты проводили как на свободно высыхающих, так и на полностью гидроизолированных образцах. Гидроизоляцию применяли для исключения влажностных деформаций бетона, а также для моделирования условий в массивных конструкциях. Изоляция состояла из трех слоев парафина и двух слоев полиэтиленовой пленки со смазкой техническим вазелином между ними.

Характеристики физико-механических свойств бетона определяли при кратковременных испытаниях кубов и призм в различных возрастах бетона (фиг. 1).

Ползучесть исследуемого бетона изучали в соответствии с требованиями методических рекомендаций [1] на призмах с размерами $7 \times 7 \times 60$ *см*, которые загружали длительной постоянной нагрузкой в рычажных установках при напряжениях в долях от призменной прочности бетона, составивших 0.25 и 0.42. Деформации бетона измеряли индикаторами часового типа с точностью $2 \cdot 10^{-5}$. Центрирование образцов производили по геометрической оси через шары в лунках стальных оголовков. В тех редких

* Экспериментальная часть работы выполнена совместно с канд. техн. наук Г. Н. Окуневым, за что авторы выражают ему свою благодарность.

случаях, когда деформации бетона на взаимно противоположных гранях отличались более, чем на 20%, образцы отбраковывались.



Фиг. 1. Изменение физико-механических свойств исследованного бетона во времени — призмы 7×7×60 *см*; ○ — кубы 10×10×10 *см*; — призмы 10×10×40 *см*.
Примечание: залитые значки и сплошные линии — изолированные образцы; незалитые значки и пунктирные линии — неизолированные образцы.

Деформации ползучести находили вычитанием из полных деформаций загруженных образцов их упругих деформаций при загружении и средних температурно-усадочных деформаций, определяемых в предположении аддитивности усадки и ползучести на незагруженных образцах — эталонах: трех изолированных и трех неизолированных.

По результатам длительных испытаний образцов при двух уровнях напряжений были построены экспериментальные кривые относительных деформаций ползучести (фиг. 2*a*), по которым затем определяли кривые мер линейных $S(t-\tau_1)$ и нелинейных $S_н(t-\tau_1)$ деформаций ползучести [2] (фиг. 2*б*, *в*). Экспериментальные кривые мер ползучести аппроксимировались в форме:

$$
\begin{aligned}
S(t-\tau_1) &= \Delta\Phi\left[1-e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}\right]+\Delta S\left[1-e^{-\alpha_2(t-\tau_1)}\right]\\
S_н(t-\tau_1) &= \Delta\Phi_н\left[1-e^{-\gamma_{1н}(t-\tau_1)}\right]+\Delta S_н\left[1-e^{-\alpha_{2н}(t-\tau_1)}\right]
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

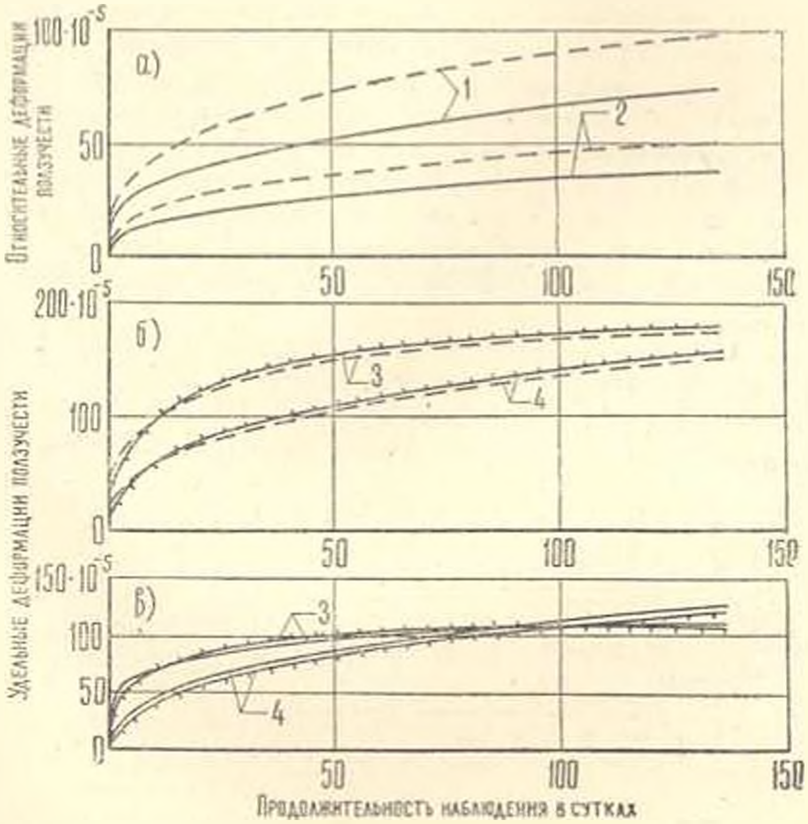
при значениях параметров, указанных в табл. 1.

Таблица 1

Значение параметров, входящих в формулу 1

Вид бетона	Предельные значения составляющих мер ползучести 10^5				Параметры α и $\alpha_н$ в $(сут)^{-1}$			
	$\Delta\Phi$	ΔS	$\Delta\Phi_н$	$\Delta S_н$	α_1	α_2	$\alpha_{1н}$	$\alpha_{2н}$
Без изоляции	165	50	90	90	0.0075	0.4	0.022	0.25
С изоляцией	120	37	80	70	0.01	0.266	0.007	0.63

Аппроксимирующие кривые мер ползучести были близки к опытным и имели среднеквадратическое отклонение ординат до 5%, фиг. 2б.



Фиг. 2. Относительные (а) и удельные деформации ползучести по отношению к постоянному уровню напряжений $\eta = \frac{\sigma_б}{R_{пр}}$ = const: неизолированный (б) и изолированный (в) образцов: б — нелинейные $S_н(t-\tau_1)$ и в — линейные $S(t-\tau_1)$

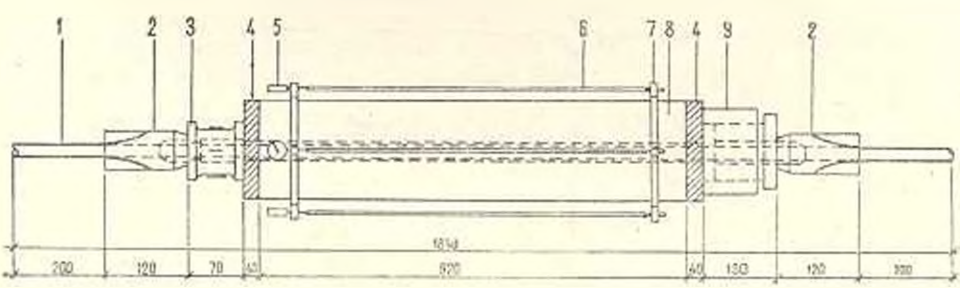
Экспериментальные кривые: — — — неизолированный бетон; ——— изолированный бетон; · · · соответствующие аппроксимирующие кривые.

Ползучесть арматуры не исследовалась. Ее влияние на потери напряжений устраняли путем предварительной вытяжки арматуры до напряжений, равных 0.9 от нормативного предела прочности. После вытяжки арматура имела модуль упругости $E_a = 0.192 \cdot 10^6$ *МПа*. Вытяжка арматуры повысила ее предел упругости на 54% и поэтому во всех преднапряженных образцах арматура работала только в упругой стадии.

Исследование напряженно-деформированного состояния центрально-обжатых элементов из высокопрочного бетона проводили на образцах с размерами 10×10×100 *см*, изолированных и не изолированных от высыхания. Образцы представляли собой бетонные призмы со стальными оголовками толщиной 4 *см*. Предварительно напряженная арматура из стали класса А-У ∅ 28 *мм* располагалась без сцепления с бетоном в канале = ∅ 34 *мм*, по оси призмы. Натяжение арматуры проводилось методом «на упоры» на горизонтальной машине Амслер-500.

Величины потерь усилий в предварительно напряженной арматуре от ползучести и усадки бетона были малы по сравнению с усилиями в ней ($\approx$ 10%), поэтому требовалась большая точность их измерения. Для этого вели одновременный четырехкратный контроль за усилиями в арматуре: по шкале горизонтальной машины, с помощью электротензодатчиков, наклеенных на арматуре; тарированному электротензометрическому динамометру и по деформациям бетона в момент его обжатия, измеряемым с помощью индикаторов часового типа. Электротензометрический динамометр представлял собой полый цилиндр из Ст. 45 с наклеенными тензодатчиками. Перед установкой динамометра производилась его тарировка на прессе, результаты которой учитывались при контроле усилия предварительного напряжения арматуры.

Усилие натяжения арматуры передавали на бетон через анкера, динамометр и резьбовую муфту, при помощи которой выбирался зазор от удлинения арматуры при натяжении. Схема центрально-обжатого образца приведена на фиг. 3. Анкера представляли собой цилиндры из Ст. 3, которые



Фиг. 3. Схема центрально-обжатого образца: 1 — арматура ∅ 28 *мм*; 2 — опрессованный цилиндр; 3 — электротензометрический динамометр; 4 — стальной оголовок; 5 — индикатор часового типа; 6 — удлинитель *l* = 700 *мм*; 7 — рамка для крепления индикаторов; 8 — бетонная призма 10×10×100 *см* с отверстием по оси; 9 — резьбовая муфта.

одевали на арматуру и опрессовывали в специальных штампах на прессе, в результате чего происходило полное заполнение периодического профиля арматуры, обжимаемой сталью. Результаты пробных испытаний анкеров на выдергивание показали, что их разрушение происходит из-за разрыва арматуры вне зоны анкеровки.

Начальные уровни обжатия бетона в опытах составляли в долях от призменной прочности: для изолированного бетона: 0.431; 0.511: 0.55: 0.57, а для неизолированного бетона: 0.46; 0.52; 0.56; 0.60.

Деформации бетона предварительно напряженных образцов измеряли стационарно установленными индикаторами часового типа с точностью $1.43 \cdot 10^{-5}$.

По деформациям бетона предварительно напряженных образцов (за вычетом деформаций упругого обжатия) подсчитывались опытные величины потерь предварительного напряжения по формуле:

$$\sigma_{\text{а}}(t) = \frac{\Delta\varepsilon_{\text{б}}(t) E_{\text{а}} m_{\text{б}}}{1 + \mu_{\text{м}} n_{\text{м}} m_{\text{м}} + \dfrac{kE_{\text{а}}F_{\text{а}}}{l_{\text{а}}}} \left(1 + \mu_{\text{б}} n_{\text{б}} m_{\text{б}} + \mu_{\text{м}} n_{\text{м}} m_{\text{м}} + \frac{kE_{\text{а}}F_{\text{а}}}{l_{\text{а}}}\right) \qquad (1.2)$$

где $\Delta\varepsilon_{\text{б}}(t)$ — экспериментальные величины деформаций бетона образцов от его ползучести;

$$\mu_{(\ )} = \frac{F_{\text{а}}}{F_{(\ )}}, \qquad n_{(\ )} = \frac{E_{\text{а}}}{E_{(\ )}}, \qquad m_{(\ )} = \frac{l_{(\ )}}{l_{\text{а}}}$$

k — тарировочная постоянная муфты, характеризующая ее деформативные свойства.

Определялись также «конечные» значения потерь предварительного напряжения арматуры по разности начального и конечного усилия в арматуре N_{03}, определяемого экспериментально, путем растяжения образца до $\sigma_{\text{б}} = 0$ по формуле

$$\sigma_{\text{а}} = \frac{N_{01} - N_{03}}{F_{\text{а}}} \qquad (1.3)$$

где

$$N_{01} = N_{60} + \varepsilon_{60} \frac{l_{\text{б}}}{l_{\text{а}}} E_{\text{а}} F_{\text{а}} + N_{60} \left(\frac{l_{\text{м}}}{F_{\text{м}} E_{\text{м}} l_{\text{а}}} + \frac{k}{l_{\text{а}}} \right)$$

Здесь N_{60} — экспериментальная величина усилия в бетоне в момент обжатия; ε_{60} — деформация упругого обжатия бетона. Конечные величины потерь, подсчитанные по формулам 2 и 3, отличались не более, чем на 5%.

Кривые деформаций ползучести бетона предварительно напряженных образцов показаны на фиг. 4.

Теоретические значения потерь предварительного напряжения вычисляли по нелинейной теории упруго-ползучего тела. Исследования проводили на бетоне зрелого возраста ($\tau \geqslant 44$ сут.) и, как видно из фиг. 1 и 2, изменение характеристик его прочностных и деформативных свойств было незначительным (до 10%): поэтому в расчетах они принимались постоянными и равными: для изолированного бетона $R_{\text{пр}} = 74.7$ *МПа*; $E_{\text{б}} = 4.05 \cdot 10^{4}$ *МПа*; для изолированного бетона $R_{\text{пр}} = 72.8$ *МПа*: $E_{\text{б}} = 3.56 \cdot 10^{4}$ *МПа*.

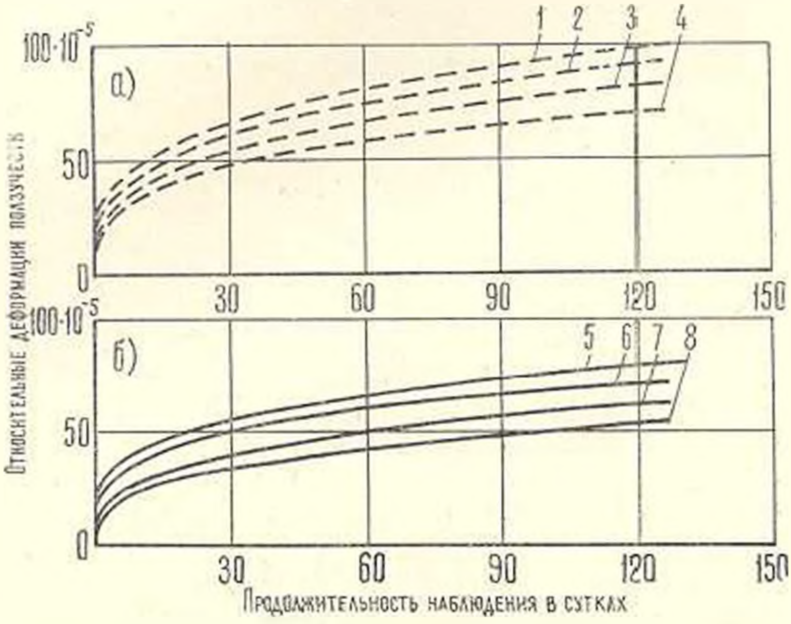
Связь между напряжениями и деформациями в бетоне принималась в форме интегрального уравнения [2]

$$\varepsilon_б(t) E_б = \sigma_б(t) + \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) K_л(t-\tau)\, d\tau + \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) f\left[\frac{\sigma_б(\tau)}{\sigma_0}\right] K_н(\tau-\tau_1)\, d\tau \qquad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} K_л(t-\tau) &= -\frac{E_б}{R_{пр}} \frac{\partial}{\partial\tau} S(t-\tau) \\ K_н(\tau-\tau_1) &= -\frac{E_б}{R_{пр}} \frac{\partial}{\partial\tau} [S_н(t-\tau_1) - S_н(\tau-\tau_1)] \end{aligned} \qquad (1.5)$$

— соответственно линейное и нелинейное ядра ползучести, а σ_0 — единичные напряжения в выбранной системе единиц измерений. При этом (в запас) принято в духе теории старения, что нелинейная составляющая деформаций ползучести полностью необратима, то есть величина потерь усилия обжатия несколько преувеличивалась.



Фиг. 4. Деформации центрально-обжатых образцов после обжатия бетона (за вычетом деформаций усадки): неизолированный бетон (*а*); изолированный бетон (*б*); 1 — $\eta_0 = 0.61$; 2 — $\eta_0 = 0.56$; 3 — $\eta_0 = 0.52$; 4 — $\eta_0 = 0.48$; 5 — $\eta_0 = 0.60$; 6 — $\eta_0 = 0.55$; 7 — $\eta_0 = 0.51$; 8 — $\eta_0 = 0.45$.

Уравнения равновесия усилий и совместности деформаций в образцах были получены с учетом неравенства длин бетона и арматуры в связи с наличием стальных проставок между анкерами арматуры и бетонным образцом:

$$
\begin{aligned}
&N_{б}(t) = N_{а}(t) = N_{пр}(t) = N(t) \\
&\Delta_{0} = \Delta l_{а}(t) + \Delta l_{б}(t) + \Delta l_{р}(t) + \Delta l_{м}(t)
\end{aligned}
\qquad (1.6)
$$

где $N_{(\ )}(t)$ — усилие к текущему моменту времени t, соответственно, в бетоне, и арматуре и проставке: Δ_{0} — абсолютная начальная деформация удлинения арматуры от усилия предварительного напряжения. $\Delta l_{(\ )}(t)$ — абсолютная деформация к текущему моменту времени t, соответственно: *а* — арматуры; *б* — бетона; *р* — резьбовой муфты; *м* — сплошных проставок.

Абсолютные деформации проставок вычислялись раздельно для резьбовой муфты $\Delta l_{р}(t)$ и для частей проставки сплошного сечения (оголовков, динамометра, анкеров): $\Delta l_{м}(t)$.

Уравнения (1.6), с учетом (1.4) можно привести к одному нелинейному интегральному уравнению, устанавливающему связь между начальным усилием обжатия Q и текущим усилием в образце $N(t)$ с учетом ползучести бетона:

$$
Q = N(t) + \int_{\tau_1}^{t} N(\tau) K_1(t-\tau)\, d\tau + \int_{\tau_1}^{t} N(\tau)\, f\left|\frac{N(\tau)}{N_0}\right| K_2(\tau-\tau_1)\, d\tau \qquad (1.7)
$$

здесь

$$
Q = \frac{N_{01}}{1 + \mu_{м} n_{м} m_{м} + \mu_{б} n_{б} m_{б} + \dfrac{kE_{а}F_{а}}{l_{а}}} \qquad (1.8)
$$

а

$$
K_1(t-\tau) = \frac{\mu_{б} n_{б} m_{б}}{1 + \mu_{б} n_{б} m_{б} + \mu_{м} n_{м} m_{м} + \dfrac{kE_{а}F_{а}}{l_{а}}} K_3(t-\tau) \qquad (1.9)
$$

$$
K_2(\tau-\tau_1) = \frac{\mu_{б} n_{б} m_{б}}{1 + \mu_{б} n_{б} m_{б} + \mu_{м} n_{м} m_{м} + \dfrac{kE_{а}F_{а}}{l_{а}}} K_4(\tau-\tau_1) \qquad (1.10)
$$

— соответственно, линейное и нелинейное ядра; а

$$
f\left|\frac{N(\tau)}{N_0}\right| = \frac{N(\tau)}{N_0}
$$

где N_0, с учетом указанного выше выбора σ_0, численно равно $F_{б}$.

После ряда преобразований уравнение (1.7) было приведено к виду, удобному для его вычисления по методу последовательных приближений

$$
N(t) = N_1(t) - \int_{\tau_1}^{t} N_1(\tau)\, f\left|\frac{N_1(\tau)}{N_0}\right| Z(t-\tau)\, d\tau \qquad (1.11)
$$

где

$$N_1(t) = Q\left[1 - \int_{\tau_1}^{t} H_1(t-\tau)\,d\tau\right] \tag{1.12}$$

— решение соответствующего линейного интегрального уравнения с ядром $K_1(t-\tau)$, получаемого из (1.7) при $K_2(\tau-\tau_1)=0$, принимаемое в дальнейшем за первое приближение:

$$Z(t-\tau) = K_2(\tau-\tau_1)\left[1 - \int_{\tau}^{t} H_1(t-\xi)\,d\xi\right] \tag{1.13}$$

— ядро интегрального уравнения (1.11);

$$H_1(t-\tau) = D_1 e^{-\rho_1(t-\tau)} + D_2 e^{-\rho_2(t-\tau)} \tag{1.14}$$

— резольвента ядра $K_1(t-\tau)$;

ρ_1 и ρ_2 — корни характеристического уравнения:

$$\rho^2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + A_1 + A_2)\rho + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1) = 0 \tag{1.15}$$

$$D_1 = \frac{(A_1 + A_2)(A_1 + A_2 - \rho_2) + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2}{\rho_1 - \rho_2} \tag{1.16}$$

$$D_2 = -\frac{(A_1 + A_2)(A_1 + A_2 - \rho_1) + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2}{\rho_1 - \rho_2} \tag{1.17}$$

$$A_1 = \frac{\alpha_1 \Delta\Phi E_б \mu_б n_б m_б}{R_{пр}\left(1 + \mu_м n_м m_м + \mu_б n_б m_б + \frac{kE_a F_a}{l_a}\right)} \tag{1.18}$$

$$A_2 = \frac{A_1}{\alpha_1 \Delta\Phi}\,\alpha_2 \Delta S \tag{1.19}$$

α_1, α_2, $\Delta\Phi$, ΔS — параметры меры ползучести $S(t-\tau)$ (табл. 1).

Полное решение нелинейного интегрального уравнения (1.7) равно

$$N(t) = \lim_{n\to\infty} N_n(t) \tag{1.20}$$

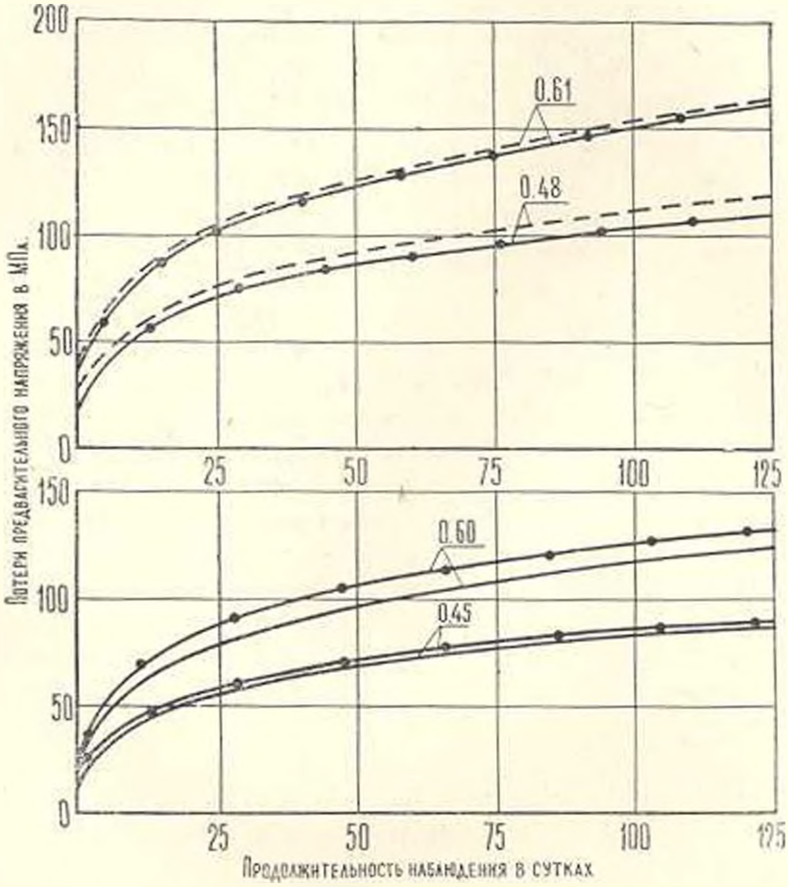
где «n»-ое приближение:

$$N_n(t) = N_1(t) - \int_{\tau_1}^{t} N_{n-1}(\tau) f\left[\frac{N_{n-1}(\tau)}{N_0}\right] Z(t-\tau)\,d\tau \tag{1.21}$$

Теоретические же величины самих потерь усилий предварительного натяжения арматуры от усадки и ползучести бетона определяли по формуле, аналогичной (1.3):

$$\Delta N_{н}(t) = N_{01} - N(t)\left(1 + \mu_{б} n_{б} m_{б} + \mu_{н} n_{н} m_{н} + \frac{kE_{а}F_{а}}{l_{н}}\right) \quad (1.22)$$

По вышеприведенным формулам были рассчитаны теоретические потери усилий обжатия от ползучести бетона изолированных и не изолированных от высыхания образцов, по которым были вычислены соответствующие потери напряжений и сравнены с опытными данными, подсчитанными по формуле (1.2) (фиг. 5 и табл. 2).



Фиг. 5. Кривые потерь напряжений в арматуре центрально-обжатых образцов 10×10×100 см при $l_{б} = 0.7 l_{н}$.

——— экспериментальные кривые; — — — теоретические кривые по нелинейной теории упруго-ползучего тела *а*) неизолированный бетон; *б*) изолированный бетон.

Примечание: цифры на кривых указывают начальный уровень напряжений обжатия бетона в долях от $R_{пр}$.

В табл. 2 $\sigma_{п}^{т}$, $\sigma_{п}^{0}$ — потери предварительного напряжения в *МПа* соответственно: теоретическое по теории упруго-ползучего тела и опытные, найденные по формуле (1.2), а $\delta = \dfrac{\sigma_{п}^{т} - \sigma_{п}^{0}}{\sigma_{п}^{0}}$ в %. Как видно из фиг. 5, ординаты теоретических и опытных кривых потерь усилия обжатия от пол-

Таблица 2

Сравнение теоретических и экспериментальных величин потерь напряжений предварительного обжатия бетона от его ползучести

Вид бетона	Начальный уровень обжатия $\tau_0 = \frac{\sigma_б}{R_{пр}}$	Потери напряжений $\sigma_п$	Величины потерь $\sigma_п$ в *МПа* при продолжительности наблюдений в *сут*				
			5	15	30	70	126
Неизолированный	0.48	$\sigma_п^т$	45.3	62.5	74.7	98.7	119.1
		$\sigma_п^о$	38.3	55.7	73.4	91.1	110.2
		δ	18.2	12.2	1.8	8.3	8.1
	0.61	$\sigma_п^т$	62.8	87.7	104.2	136.4	162.8
		$\sigma_п^о$	61	87	106.3	134.9	160.1
		δ	3	0.8	−2	1.1	1.7
Изолированный	0.45	$\sigma_п^т$	32.9	45	54.6	73.2	87.3
		$\sigma_п^о$	35.2	46.6	59.1	71.7	89.4
		δ	−6.5	−3.4	−7.6	−2	−2.3
	0.60	$\sigma_п^т$	49.4	66	79.2	105.1	124.4
		$\sigma_п^о$	62.8	76.9	92.9	111	133.6
		δ	−21	−14	−15	−5.3	−7

зучести бетона отличаются друг от друга не более, чем на 15%. Таким образом, разработанный метод оценки потерь предварительного напряжения арматуры от ползучести высокопрочного бетона дает надежные результаты, основан на точном учете физико-механических и реологических свойств бетона и арматуры и может быть рекомендован, как «точный» метод при расчете преднапряженных конструкций и сооружений. В дальнейшем на основе этого «точного» метода следует разработать инженерный метод расчета потерь предварительного напряжения от ползучести бетона, наиболее полно учитывающий физико-механические и реологические свойства бетона и арматуры.

НИИЖБ Госстроя СССР

Поступила 15 VII 1976

Ս. Վ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎՍԿԻ, Պ. Ֆ. ՈՒՐԵՆՅՈՎ

ԲԱՐՁՐ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԲԵՏՈՆԻՑ ԿԵՆՏՐՈՆԱՃՐՋԱՍԵՂՄՎԱԾ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾ-ԴԵՖՈՐՄԱՑՎԱԾ ՎԻՃԱԿԻ ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ԵՎ ՏԵՍԱԿԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ս. Վ. Ալեքսանդրովսկու ոչ գծային սողքի տեսության հիման վրա բերված են փորձնական և տեսական ուսումնասիրության արդյունքները կենտրոնային շրջանեղմված ամրաթել բետոնե էլեմենտների դեֆորմացված լարվածային վիճակի ճշգրիտ հաշվարկի համար։ Այդ հաշվարկի փորձնական ստուգումը ցույց է տալիս նրա բարձր ճշտությունը և հուսալիությունը։

EXPERIMENTAL AND TEORETICAL RESEARCH IN STRESS-STRAIN RELATIONS FOR HIGH-STRENGTH CONCRETE AXIALLY TENSIONED ELEMENTS

S. V. ALEXANDROVSKY, P. F. URENEV

Summary

The results of experimental and theoretical investigation are presented and a precise method to estimate stress-strain relations is developed for high-strength concrete axially tensioned elements in terms of the theory of creep suggested by S. V. Alexandrovsky.

An experimental verification of this calculation method confirmed its high accuracy and reliability.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методические рекомендации по исследованию усадки и ползучести бетона. М., НИИЖБ Госстроя СССР, 1975.
2. *Александровский С. В.* Об одной интересной форме уравнений теории упруго-ползучего тела. Проблемы ползучести и усадки бетона. Материалы Второго Всесоюзного совещания. Ереван, 1974, подготовленные к печати НИИЖБ Госстроя СССР, Стройиздат, М., 1974.
3. *Дмитриев С. А., Калатуров Б. А.* Расчет предварительно-напряженных железобетонных конструкций. Стройиздат, 1965.