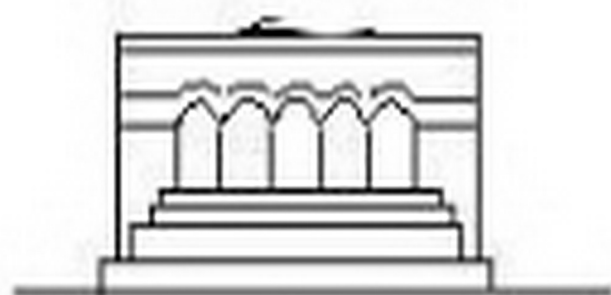


ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

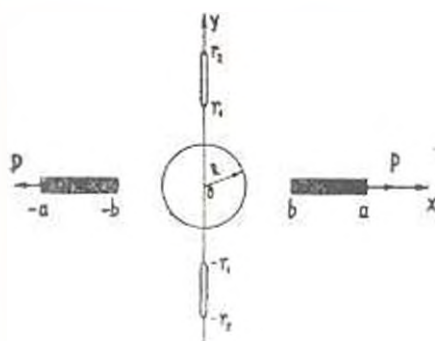


1977

С. С. ШАГИНЯН

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СТРИНГЕРОВ К БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ, РАССЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ДВУМЯ СИММЕТРИЧНЫМИ РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

1. Пусть бесконечная пластинка с круговым отверстием радиуса R , ослабленная двумя радиальными симметричными разрезами, не выходящими на свободную границу кругового отверстия, подкреплена симметрично расположенными и достаточно тонкими упругими стрингерами из одинакового материала. Пусть далее, к концам стрингеров приложены равные по величине и противоположные по направлению силы P (фиг. 1). При нулевом напряженном состоянии на бесконечности требуется найти закон распределения контактных напряжений вдоль линии крепления стрингеров с пластиной и определить коэффициенты интенсивностей разрывающего напряжения в концевых точках симметрично расположенных разрезов.



фиг. 1.

Вследствие симметрии задачи рассмотрим только правую часть данной области. Очевидно, что функцию планирования этой задачи можно представить в следующем виде:

$$V(r) = V^q(r, 0) + V^p(r, 0), \quad r > R$$

где смещения $V^q(r, 0)$ обусловлены действием единичных сосредоточенных нагрузок q , приложенных в симметричных точках пластины с круговым отверстием без разрезов, а упругие смещения $V^p(r, 0)$ обусловлены наличием симметрично расположенных разрезов в пластине, ослабленной круговым отверстием.

Эти перемещения даются формулами [1, 2]

$$V_s^q(r, 0) = \frac{\alpha q}{2\pi\mu(1+\alpha)} \left\{ \ln \frac{r+t}{|r-t|} + \frac{\alpha^2+1}{2\alpha} \ln \frac{rt+R^2}{rt-R^2} - \right. \\ \left. - \frac{R^4 t}{r(r^2 t^2 - R^4)} - \frac{R^4 r}{t(r^2 t^2 - R^4)} + \frac{2R^2 r t}{r^2 t^2 - R^4} + \right. \\ \left. + \frac{R^2(R^2 - t^2)(R^2 - r^2)(r^2 t^2 + R^4)}{\alpha r t (r^2 t^2 - R^4)^2} + \frac{R^2}{\alpha r t} \right\}, \quad R \leq r < \infty, \quad t > R$$

$$V_r^p(r, 0) = \frac{1}{2\mu} \int_0^s G_R(r, s) \chi_t(s) ds, \quad R \leq r < \infty$$

где

$$G_R(r, s) = -\frac{4}{\pi} \frac{s^3 r}{r^2 s^2 + R^4} + \frac{2(\alpha-1)}{\pi} \frac{r^3 s}{r^2 s^2 + R^4} + \\ + \frac{2(\alpha-1)R^2}{\pi} \frac{rs}{r^2 s^2 + R^4} + \frac{4}{\pi} \frac{rs}{r^2 + s^2} - \frac{1+\alpha}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2R^2 rs}{r^2 s^2 - R^4} \right) - \\ - \frac{1+\alpha}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{r^2 - s^2}{2rs} \right) - \frac{4R^2}{\pi rs} + \frac{4s}{\pi r} - \\ - \frac{2(\alpha-1)}{\pi} \frac{r}{s} - \frac{1+\alpha}{\pi}, \quad R \leq r < \infty, \quad r_1 < s < r_2$$

а функция $\chi_t(s)$ дается формулой

$$\chi_t(s) = \left[1 - \left(\frac{2s - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} x_m T_m \left(\frac{2s - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \right), \quad r_1 < s < r_2$$

Коэффициенты χ_n удовлетворяют бесконечным системам линейных уравнений

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m = e_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Вид ядра и свободного члена последней системы приведены в работе [2]. В этих выражениях μ и α — упругие постоянные материала пластины. Решение указанной бесконечной системы представим в виде

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(k)} e_k(t), \quad t > R$$

где последовательность чисел $\{\varepsilon_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ является решением бесконечной системы

$$\xi_n^{(k)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \xi_m^{(k)} = \delta_{nk}, \quad n, k = 1, 2, \dots$$

где

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

Если теперь вместо внешних единичных сосредоточенных сил q взять распределенную касательную нагрузку интенсивности $q(t)$, то в этом случае роль функции $\chi_n(s)$ будет играть функция $\chi^*(s)$, которая будет даваться формулой

$$\chi^*(s) = d_s \sum_{k=1}^{\infty} h_k(s) \int_0^a r_k(t) q(t) dt$$

Входящая в это выражение функция $h_k(s)$ имеет вид

$$h_k(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^{(k)} \left[1 - \left(\frac{2s - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \right)^2 \right]^{-1/2} T_m \left(\frac{2s - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

а постоянная d_s — ширина упругих стрингеров.

На основе этих формул горизонтальные смещения точек положительной полуоси ($r \geq R$) абсцисс будут

$$\begin{aligned} V(r) = & \frac{\gamma d_s}{2\pi\mu(1+\nu)} \int_0^a \left[\ln \frac{r+t}{|r-t|} + \frac{x^2+1}{2x} \ln \frac{rt+R^2}{rt-R^2} + \right. \\ & - \frac{R^4 t}{r(r^2 t^2 - R^4)} - \frac{R^4 r}{t(r^2 t^2 - R^4)} + \frac{2R^2 r t}{r^2 t^2 - R^4} + \\ & + \frac{R^2(t^2 - R^2)(r^2 - R^2)(r^2 t^2 + R^4)}{x r t (r^2 t^2 - R^4)^2} + \left. \frac{R^2}{x r t} \right] q(t) dt + \\ & + \frac{1}{2\mu} \int_0^a G_R(r, s) \chi^*(s) ds, \quad R \leq r < \infty \end{aligned}$$

Подставив в эту формулу значение функции $\chi^*(s)$, получим

$$\begin{aligned} V(r) = & \frac{\gamma d_s}{2\pi\mu(1+\nu)} \int_0^a \left[\ln \frac{r+t}{|r-t|} + \frac{x^2+1}{2x} \ln \frac{rt+R^2}{rt-R^2} + \right. \\ & + R^2 \left(\frac{r^2 - R^2}{r^2} + \frac{t^2 - R^2}{t^2} \right) \frac{rt}{r^2 t^2 - R^4} + \end{aligned}$$

$$+ R^2 \frac{(t^2 - R^2)(r^2 - R^2)(r^2 t^2 - R^4)}{x r t (r^2 t^2 - R^4)^2} + \frac{R^2}{x r t} \left| q(t) dt + \right. \\ \left. + \frac{\theta_2}{2\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} h_k^*(r) \int_b^a e_k(t) q(t) dt \right.$$

где обозначено

$$h_k^*(r) = \int_b^a G_R(r, s) h_k(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как функция влияния этой задачи уже найдена, запишем, не останавливаясь на подробностях, основное определяющее уравнение поставленной контактной задачи. Оно имеет вид

$$\int_b^a \left[\frac{1}{t-r} + K_R(r, t) + \frac{x(x+1)}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e_k(t) \frac{h_k^*(r)}{dr} \right] \theta'(t) dt = \theta(r) \quad (1.1) \\ b < r < a$$

К этому уравнению должны быть добавлены граничные условия

$$\theta(b) = 0, \quad \theta(a) = P/d, \quad (1.2)$$

выражающие условие равновесия стрингеров.

Отметим, что первый интеграл в левой части (1.1) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Контактное напряжение дается формулой

$$q(r) = \theta'(r), \quad b < r < a$$

Постоянная величина λ является комбинацией упругих и геометрических характеристик пластины и стрингеров и имеет вид

$$\lambda = \frac{2\pi\mu(1+x)}{x d_s h_s E_s}$$

где параметры h_s и E_s — соответственно высота и модуль Юнга стрингеров.

Функция $K_R(r, t)$, входящая в состав ядра сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1), выражается формулой

$$K_R(r, t) = \frac{1}{r+t} - R^2 \frac{x^2+1}{x} \frac{t}{r^2 t^2 - R^4} + \frac{2R^4 t}{r^2 (r^2 t^2 - R^4)} - \\ - R^2 t \left(\frac{r^2 - R^2}{r^2} + \frac{t^2 - R^2}{t^2} \right) \frac{r^2 t^2 + R^4}{(r^2 t^2 - R^4)^2} + \\ + \frac{2R^2 (t^2 - R^2)(r^2 t^2 + R^4)}{x t (r^2 t^2 - R^4)^2} + \frac{2R^2 t (R^2 - t^2)(R^2 - r^2)}{x (r^2 t^2 - R^4)^2} -$$

$$-\frac{R^2(t^2 - R^2)(r^2 - R^2)(r^2t^2 + R^4)}{\pi r^2 t (r^2 t^2 - R^4)^2} - \frac{4R^2 t (t^2 - R^2)(r^2 - R^2)(r^2 t^2 + R^4)}{\pi (r^2 t^2 - R^4)^3} - \frac{R^2}{\pi r^2 t}, \quad b \leq r, t \leq a$$

2. Решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) представим в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода

$$\psi(r) = \left[1 - \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right)^2 \right]^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} y_m T_m \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right), \quad b < r < a$$

где $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Известным способом [1—6], не останавливаясь здесь на подробностях, для определения коэффициентов разложения $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$y_n + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{mn} + B_{mn} + C_{mn}) y_m = (a_n - b_n - A_{0n} - C_{0n}) y_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

где введены обозначения

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^2 (a - b)} \int_b^a U_{n-1} \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right)^2} dr \times \\ \times \int_b^a K_R(r, t) \left[1 - \left(\frac{2t - a - b}{a - b} \right)^2 \right]^{-1/2} T_m \left(\frac{2t - a - b}{a - b} \right) dt \\ m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$$

$$B_{mn} = \frac{2i}{\pi^2 m} \int_b^a U_{n-1} \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right) U_{m-1} \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right) \left[1 - \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right)^2 \right] dr, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

$$C_{mn} = \frac{4(\alpha + 1)}{\pi \alpha (a - b)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_b^a \frac{dh_k(r)}{dr} U_{n-1} \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right) \times \\ \times \sqrt{1 - \left(\frac{2r - a - b}{a - b} \right)^2} dr \int_b^a e_k(t) \left[1 - \left(\frac{2t - a - b}{a - b} \right)^2 \right]^{-1/2} \times \\ \times T_m \left(\frac{2t - a - b}{a - b} \right) dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{2\lambda}{\pi} \int_b^a U_{n-1} \left(\frac{2r-a-b}{a-b} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2r-a-b}{a-b} \right)^2} dr, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2\lambda}{\pi^2} \int_b^a \arccos \left(\frac{2r-a-b}{a-b} \right) U_{n-1} \left(\frac{2r-a-b}{a-b} \right) \times \\ \times \sqrt{1 - \left(\frac{2r-a-b}{a-b} \right)^2} dr, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x) \sin \arccos x$ ($n = 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева второго рода.

Коэффициент y_0 определяется из граничных условий (1.2) и имеет значение

$$y_0 = 2P/\pi d_s(a-b)$$

Без особого затруднения можно показать, что для любого значения параметра λ полученная бесконечная система квазивполне регулярна, а для некоторого диапазона изменения значений этого параметра она вполне регулярна. Кроме того, можно показать, что свободный член этой системы убывает со скоростью не медленнее, чем λ^{-1} .

Определим коэффициенты интенсивностей разрывающего напряжения $\alpha_n(r, \pi/2)$ в концевых точках симметрично расположенных разрезов. Аналогично тому, как это сделано в работе [2], для коэффициентов интенсивностей разрывающего напряжения в этом случае будем иметь

$$N(r_1) = \lim_{r \rightarrow r_1 + 0} \alpha_0(r, \pi/2) \sqrt{r_1 - r} = \\ = -\sqrt{r_2 - r_1} d_s \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} z_{km}^{(k)} \int_b^a e_k(t) q(t) dt$$

$$N(r_2) = \lim_{r \rightarrow r_1 + 0} \alpha_1(r, \pi/2) \sqrt{r - r_2} = \\ = \sqrt{r_2 - r_1} d_s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} z_{km}^{(1)} \int_b^a e_k(t) q(t) dt$$

Автор благодарен С. М. Мхитаряну за постановку задачи и внимание к работе.

Ս. Ս. ՇԱՀԻՆԻԱՆ

ՈՒԺԻ ՓՈԽԱՆՑՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԱՍԱՎՈՐՎԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐԻՑ
ԿՐՐ ԱՆՑՔՈՎ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՃԵՂՔԵՐՈՎ
ԲՈՒՂԱՑՎԱՆ ԱՆՎԵՐՋ ՈՍԿԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում դիտարկված է հարթ կոնսակտային խնդիր կլոր անցքով սալի համար, երբ վերջինս թուլացված լինելով երկու շառավղային մեղրերով, ուժեղացված է սիմետրիկ դասավորված առաձգական վերադիրներով: Խնթադրվում է, որ արտաքին ուժերը կենտրոնացված բևեռի տեսքով կիրառված են վերադիրների ծայրերում առանցքային տարբեր ուղղություներով:

Դիտարկված խնդրի լուծումը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում բերված է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը: Չեբիշևի օրթոգոնալ բաղաձնդամների օգնությամբ ստացված է այդ հավասարման էֆեկտիվ լուծումը:

LOAD TRANSFER FROM TWO SYMMETRICAL STIFFENERS TO AN INFINITE PLATE WITH A CIRCULAR HOLE WEAKENED BY TWO SYMMETRICAL RADIAL CUTS

S. S. SHAHINIAN

S u m m a r y

In the present paper the problem of load transfer from two symmetrical stiffeners to an infinite plate with a circular hole, weakened by two symmetrical radial cuts, not extending beyond the free circular boundary, is considered.

The problem is defined in the form of singular integro-differential equation under definite boundary conditions.

The solution is presented in the form of expansion by Chebishev polynomials of the first kind. As to the unknown expansion coefficients, a quasi-quite regular infinite system of linear algebraic equations is obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шагинян С. С. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной упругими накладками. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 3.
2. Мхитарян С. М., Шагинян С. С. О напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, ослабленной двумя радиальными разрезами. Докл. АН Арм. ССР, 1976, т. 63, № 4.
3. Шагинян С. С. Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на своей границе упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1.

- 4 Arutunian N. K., Mkhtartun S. M. Some contact problems for a semiplane with elastic stiffeners. *Fronts in elasticity and thermoelasticity*. Witold Novacki Anniversary volume. Walters-Nordorff publ., 1971.
- 5 Арутуниан Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. *ИММ*, 1972, т. 36, № 7.
- 6 Моларь Г. А., Попов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. *ИММ*, 1971, т. 35, № 1.

А. И. КАЛАНДИЯ

К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ПОЛУКРУГЛОЙ ПЛИТЫ

Классические методы потенциала и интегральных уравнений весьма удобны для исследования граничных задач теории упругости. Аппарат теории потенциала становится особенно полезным и для практических целей, когда интегральные уравнения задачи (регулярные или сингулярные) удастся построить непосредственно для искомых элементов упругих полей, имеющих, разумеется, вполне определенный физический смысл (компоненты смещения, вектора напряжения либо тензора напряжений на границе среды).

Идея конструирования таких уравнений в задачах о трещинах нормального разрыва, насколько нам известно, впервые была осуществлена в работе Бюкнера [1]. Исходя из элементарного решения уравнений упругости, соответствующего «сосредоточенному» в точке разреза нормальному смещению, названный автор построил комплексные потенциалы в виде интегралов типа Коши, приводящих задачу к сингулярному интегральному уравнению первого рода. Искомой функцией в интегральном уравнении Бюкнера служат неизвестные вдоль берегов разреза нормальные смещения. Впоследствии этот метод, который мы будем в дальнейшем называть методом функции влияния, неоднократно применялся для определения интенсивности напряжений на концах трещин в работах самого Бюкнера и ряда других авторов (напр., [2]).

Метод функции влияния в идейном отношении содержится в опубликованной почти одновременно с [1] статье автора [4], посвященной определению поля напряжений в изгибаемой нормальными усилиями тонкой пластинке в форме полукруга. К сожалению, подбор элементарных решений, используемых в [4], вряд ли может считаться удачным, ибо, во-первых, не вполне ясен смысл комплексного «элемента» $p(x)$, называемого обобщенной нагрузкой, а во-вторых, быть может, именно поэтому интегральные уравнения задачи ([4], стр. 165, уравнения (3.10)) мало удобны как в смысле исследования, так и в смысле их фактического решения. Сравнительно низкая точность численных результатов [4] объясняется тем, что используемая там схема решения сингулярных интегральных уравнений применительно к уравнениям вида (3.10), вообще говоря, некорректна¹.

Иными словами, в основе работ [1] и [4] заложена одна и та же идея, но техника ее осуществления во второй из работ далеко не совершенна.

¹ Содержание статьи [4] воспроизведено в книге автора ([5], § 29), а также в английском переводе последней ([6], § 28). В формулах [4] для найденных приближенных значений изгибающего момента и прогиба имеются опечатки, о чем сказано в [5], стр. 185 (сноска). Но там же (стр. 184, сноска) ошибочно утверждается, что эти приближения обладают приемлемой точностью.

Ниже, на том же примере изгибаемого полукруга, дана реализация метода функции влияния, свободная от указанных недостатков.

Изгиб полукруга при смешанных условиях

В рамках теории Кирхгофа-Лява рассматривается тонкая пластинка в форме полукруга, изгибаемая равномерно распределенными по ее срединной поверхности нормальными усилиями интенсивности q . Дуговая часть границы предполагается жестко закрепленной, а прямолинейная часть — свободной²⁾. Расположим срединную поверхность пластинки на плоскости переменного $z = x + iy$ так, чтобы она занимала верхнюю половину единичного круга с центром в начале координат и введем обозначения: S^+ — область, занятая упругой средой, γ^+ — верхняя полуокружность, l — диаметр круга, $-1 < x < 1$, S — вся внутренность единичного круга, γ — ее граница: $\psi(x, y)$ будет, как обычно, обозначать искомые прогибы точек срединной поверхности.

Тогда мы будем иметь следующую задачу (напр., [5], стр. 20—21):

$$\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_0(t) \quad \text{на } \gamma^+$$

$$\frac{d}{dt} [-x\overline{\varphi(t)} + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] = h_0(t) \quad \text{на } l$$

причем

$$f_0(t) = -\frac{\partial w_0}{\partial t}, \quad x = \frac{3-\nu}{1-\nu}$$

$$h_0(t) = \frac{1}{2(1-\nu)} \left| G(w_0) + i \int_0^t H(w_0) dt \right|$$

Здесь φ и ψ — искомые функции от комплексного аргумента z , голоморфные в S^+ , t — аффикс точки на $\gamma^+ + l$, G и H — известные дифференциальные операции, связанные с задачей изгиба (напр., [5], стр. 14), w_0 — какое-либо частное решение уравнения изгиба, ν — коэффициент Пуассона.

В качестве частного решения w_0 будем брать функцию (D — цилиндрическая жесткость)

$$w_0(x, y) = \frac{q}{64D} (z\bar{z} - 1)^2, \quad q = \text{const}, \quad (z = x + iy) \quad (1.1)$$

дающую решение задачи об изгибе сплошного круга, закрепленного по всему краю. В силу определения операций G и H , вдоль диаметра l

²⁾ Изгибу полукруга при различных крайних условиях посвящено немало работ различных авторов. Рассматриваемый здесь случай закрепления границы рассматривался в работах О. М. Сапонджия [10, 11, 12].

$$G = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad H = \frac{d\Delta}{dn} - (1 - \nu) \frac{d}{dx} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

и потому в нашем случае

$$G(w_0) = 2\nu[(3\nu + 1)t^2 - 1 - \nu], \quad H(w_0) = 0 \quad \text{на } l$$

$$\lambda = \frac{q}{32D} \quad (1.2)$$

На основании предыдущих формул, если принять также во внимание, что, согласно (1.1), $f_n(t) = 0$, граничные условия задачи примут вид

$$\varphi(t) + t\varphi'(t) - \psi(t) = 0 \quad \text{на } \gamma \quad (1.3)$$

$$-\chi\psi(t) - t\psi'(t) - \psi(t) = h(t) + c \quad \text{на } l \quad (1.4)$$

где c — произвольная вещественная постоянная,

$$h(t) = \frac{\lambda}{1 - \nu} \left[-\frac{3\nu + 1}{3} t^3 - (1 + \nu)t \right] \quad (1.5)$$

Приступая к решению задачи, введем в рассмотрение зависящие от точки l из l аналитические функции $\varphi(z, t)$, $\psi(z, t)$, регулярные в области S всюду, за исключением точки $z = t$, и допускающие в окрестности указанной точки представление

$$\varphi(z, t) = \frac{p(t)}{z - t} + \varphi_0(z, t) \quad (1.6)$$

$$\psi(z, t) = p(t) \left[\frac{-\chi}{z - t} + \frac{\varepsilon}{(z - t)^2} \right] + \psi_0(z, t)$$

где $p(t)$ — некоторая вещественная функция точки t на l , а φ_0 , ψ_0 — голоморфные в круге S функции для любого l из отрезка $l^{(1)}$.

Потребуем от функций φ и ψ , чтобы они удовлетворяли граничному условию (1.3) на всей окружности γ . Тогда для функций φ_0 , ψ_0 будем иметь задачу

$$\varphi(z, t) = p(t) \ln(z - t) + \varphi_0(z, t) \quad (1.7)$$

$$\psi(z, t) = \overline{p(t)} \ln(z - t) - \frac{p(t)t}{z - t} + \psi_0(z, t)$$

не вполне удачным, как указано во введении. Представления (1.6) и (1.7) существенно отличаются по смыслу друг от друга, хотя с формальной точки зрения разница не столь значительна: представления (1.6) можно получить из (1.7), если коэффициенты при логарифмах заменить, соответственно, на $-p(t)$ и $\chi p(t)$ и, продифференцировав равенства по z , поменять местами переменные z и t (здесь при этом аргумент функции $p(t)$, разумеется, не следует).

¹⁾ Представления (1.6) предлагаются вместо ранее используемых (напр., [3], стр. 177; обозначения здесь несколько изменены)

$$\varphi_0(z, t) + \overline{\varphi_0(z, t)} + \overline{\psi_0(z, t)} = f_d(z, t) \quad (1.8)$$

при

$$f_0(z, t) = -p(t) \left[\frac{1}{z-t} - \frac{zt}{1-zt} + \frac{tz(1-z^2)}{(1-zt)^2} \right]$$

$$\overline{f_0(z, t)} = -p(t) \left[\frac{z}{1-zt} - \frac{z}{z-t} + \frac{z^2-1}{z(z-t)^2} \right]$$

Задача (1.8) — первая основная задача для круга, решается, как известно, в замкнутом виде. Решение дается формулами ([7], § 80).

$$\varphi_0(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_0 d\zeta}{\zeta - z} - \overline{a_1} z$$

$$\psi_0(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f_0} d\zeta}{\zeta - z} \frac{\varphi_0(z, t)}{z} + \frac{a_1}{z}$$

$$a_1 = \overline{a_1} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_0 d\zeta}{\zeta^2}$$

Интегралы типа Коши в правых частях легко вычисляются на основании интегральной формулы и теоремы Коши о голоморфных функциях. В самом деле, при $|z| < 1$, $-1 \leq t \leq 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta-t)(\zeta-z)} = 0; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z}{1-zt} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{z}{1-zt}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zt(1-z^2)}{(1-zt)^2} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{z(1-z^2)}{(1-zt)^2}; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z(\zeta-t)^2} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 0$$

$$a_1 = \frac{p(t)}{4\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{zt}{1-zt} - \frac{z(1-z^2)}{(1-zt)^2} \right] \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \frac{z-1}{2} p(t)$$

Внося явные выражения для φ_0 , ψ_0 в (1.6), находим пару функций $\varphi(z, t)$, $\psi(z, t)$, определяющих функцию влияния нашей задачи,

$$\varphi(z, t) = p(t) \left[\frac{1}{z-t} + M(z, t) \right] \quad (1.9)$$

$$\psi(z, t) = -p(t) \left[\frac{z}{z-t} - \frac{z}{(z-t)^2} + N(z, t) \right]$$

$$M(z, t) = \frac{zt}{1-zt} + \frac{z(z^2-1)}{(1-zt)^2} - \frac{z-1}{2} z$$

$$N(z, t) = \frac{z}{1-zt} - \frac{1}{z} \frac{d}{dz} M(z, t) - \frac{z-1}{2z}$$

Положим теперь

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \bar{\varphi}(z, t) dt, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{\bar{z}} \bar{\psi}(z, t) dt \quad (1.10)$$

Легко видеть, что функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ кусочно-голоморфны в круге S , голоморфны в любой конечной области плоскости z , не содержащей точек вещественной оси. Точнее, φ и ψ складываются из интегралов типа Коши по конечному и бесконечному отрезкам оси z , взаимно дополняющим друг друга до полной прямой. В дальнейшем нет нужды рассматривать эти функции вне области S^* , занятой упругой средой. Как видно из построения, потенциалы (1.10) удовлетворяют при любом $p(x)$ граничному условию (1.3) и, следовательно, удовлетворяют условию закрепления дуги γ^+ с точностью до аддитивной постоянной для прогибов $w(x, y)$.

Выясним, прежде всего, смысл функции $p(x)$, представляющей собой плотность интегральных представлений (1.10). С этой целью вычислим предельные значения выражения

$$\Omega(z, z) = \bar{\varphi}(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z)$$

слева, то есть из S^* на l . Из (1.10) и (1.9), на основании известных формул Сохоцкого-Племеля (напр., [5], стр. 16) следует

$$\operatorname{Im} \Omega^+(t, t) = -\frac{1+x}{2} i p(t) \quad \text{на } l \quad (1.11)$$

С другой стороны, дифференцируя по y формулу

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2 \operatorname{Re} [z \bar{\varphi}(z) + \bar{\psi}(z)], \quad \bar{\psi}(z) = \bar{\psi}'(z)$$

дающую общее решение уравнения изгиба, находим

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2iy(x^2 - y^2 - 1) + 2 \operatorname{Re} \{i\Omega^+(z, \bar{z})\}$$

Отсюда, вдоль диаметра l

$$\frac{dw}{dn} = -\frac{\partial w}{\partial y} = 2 \operatorname{Re} \{i\Omega^+(t, t)\}$$

и сопоставление двух предыдущих равенств дает

$$\frac{dw}{dn} = (1+x) i p(t) \quad \text{на } l \quad (1.12)$$

Следовательно, значения функции $p(x)$ с точностью до постоянного множителя дают малые углы (точнее, тангенсы малых углов), составляемые изогнутой срединной поверхностью пластинки с плоскостью hox вдоль диаметра l . Угол наклона вдоль l — неизвестная функция от точки x .

Установление механического смысла функции $p(x)$ имеет определяющее значение для фактического решения задачи.

На основании тех же формул (1.9) и (1.10) составим теперь выражение

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$$

и, используя формулы Сохоцкого-Племеля, вычислим предельные значения, когда точка z из S^+ стремится к точке x , расположенной на l . Приравняв эти предельные значения к правой части (1.4), получим соотношение для функции $p(x)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K(x, t) p(t) dt = h(x) + c \quad \text{на } l \quad (1.13)$$

$$K(x, t) = \frac{2x}{x-t} + k_0(x, t)$$

$$k_0(x, t) = xM(x, t) + N(x, t) - x \frac{\partial}{\partial x} M(x, t)$$

Функции M и N определены вслед за формулами (1.9).

Уравнение (1.13) — сингулярное интегральное уравнение первого рода, и есть основное соотношение нашей задачи. После элементарных преобразований выражения для $k_0(x, t)$ оно может быть приведено к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) p(t) dt = f(x) + c \quad (1.14)$$

где

$$k(x, t) = -\frac{1}{2x} \left[\frac{(1+x^2)x + (x-1)t}{1-xt} - (x-1) \frac{x-t + x(1-x^2)}{(1-xt)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(x-t)(1-x^2)}{(1-xt)^3} - \frac{(x-1)^2}{2} x \right] \quad (1.15)$$

$$f(x) = \frac{1}{6(3+v)} [3v + 1)x^3 - 3(1+v)x] \quad (1.16)$$

Хорошо известно, что теория одномерных сингулярных интегральных уравнений давно приобрела (не без усилия советских математиков) законченный вид, основные ее результаты в классическом рассмотрении вопроса изложены в монографиях [8, 9]. Определяющие положения этой теории, например, возможности приведения к уравнению Фредгольма, существование решения в данном классе функций и т. п., по отношению к уравнению (1.14) перестают, к сожалению, быть справедливыми из-за особого характера его ядра, общего для всех почти ядер, получаемых при методе функции влияния. Ядро уравнения (1.14) имеет, помимо сингулярности при $x=t$,

характерной для ядер типа Коши вообще и неподвижную сингулярность того же порядка на концах отрезка. Точнее, функция $k(x, t)$, как видно из (1.15), регулярна по x и t в промежутке I и обращается в бесконечность при $x=t=\pm 1$. Напомним, что в существующей теории сингулярных уравнений функция $k(x, t)$, то есть регулярная часть ядра, предполагается непрерывной по обоим переменным на отрезке $[-1, 1]$.

Вопросами общей теории особых уравнений с ядрами (1.15) здесь заниматься не будем. Основой для дальнейших рассмотрений послужит способ приближенного решения класса сингулярных уравнений, изложенный в [5], § 13. Особый характер ядра (1.15) не может быть препятствием применению способа к уравнению (1.14), тем более, что класс функций, в котором следует искать решение $p(x)$, полностью определен в соответствии с (1.12).

Согласно приему, указанному в [5], § 13, п. 3, будем разыскивать решение уравнения (1.14), ограниченное на обоих концах отрезка, в виде интерполяционного многочлена Лагранжа L_n , построенного по чебышевским узлам ($x = \cos \theta$)

$$p(x) \simeq L_n[p; x] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n p(x_k) \frac{(-1)^{k+m} \sin \theta_k \sin(n+1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_k} \quad (1.17)$$

$$x_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = \frac{m\pi}{n+1}, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

Способ приводит решение уравнения (1.14) к системе линейных уравнений относительно значений искомого $p(x)$ в заданных узлах

$$\sum_{m=1}^n z_{m1} p_m - c = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (1.18)$$

где

$$z_{m1} = \frac{\sin \theta}{n+1} \left[\frac{z_{m1}}{\cos \theta - \cos \theta_m} + \frac{1}{2} k(x_m, t) \right]$$

$$f_m = f(x_m), \quad x_m = t_m, \quad z_{m1} = \frac{1 - (-1)^{m+1}}{2}$$

Функции $k(x, t)$ и $f(x)$ определяются формулами (1.15) и (1.16), а c — произвольная пока вещественная постоянная, фигурирующая в правой части (1.14).

Разумеется, при построении приближенного решения мы предполагаем, что уравнение допускает одно единственное решение данного класса функций. Поэтому постоянная c должна быть определена однозначно из условия ограниченности решения на отрезке $[-1, 1]$. Условие это в нашем случае принимает вид (см. [8], § 105)

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) + c - R[p; x]}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad R[p; x] = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) p(t) dt$$

Если записать предыдущее уравнение в дискретной форме, то получим еще одно линейное уравнение

$$\sum_{v=1}^n \alpha_{n+1,v} p_v - c = f_{n+1} \quad (1.18')$$

при

$$\begin{aligned} x_{n+1,v} &= \frac{\sin \vartheta_v}{2n(n+1)} \sum_{j=1}^n k(x_j, t_v), \quad f_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) \\ x_m &= \cos \vartheta_m, \quad \vartheta_m = \frac{2m-1}{2n} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.19)$$

которое и следует присоединить к системе (1.18). Совокупность уравнений (1.18) и (1.18') дает полную систему для определения всех неизвестных p_k и c .

Если решить эту систему и функцию $p(x)$ из (1.17), составленную по решению p_k , подставить в (1.10), получим приближенное решение задачи $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$. Оно будет удовлетворять граничному условию на γ^+ в точности, а на γ^- — приближенно. Как показывают вычисления, приемлемые результаты достигаются даже при весьма небольших n .

Вычислим, к примеру, изгибающий момент в середине γ^+ и прогиб в точке $z=0$. Для вычисления момента $G_0 = -DG$ воспользуемся формулой ([5], стр. 15).

$$G_n(w) = G_n(w_0) + 2(1-\nu) D \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dz} \left[-x_0(z) + z \overline{x_0'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] \right\} \quad z \text{ на } \gamma^+ \quad (1.20)$$

Если вместо w_0 внести сюда (1.1), а вместо φ и ψ — представления (1.10), то после элементарных вычислений формула примет вид

$$G_n = -\frac{q}{8} + \frac{q}{4} \operatorname{Re} \left\{ \sigma^2 \frac{d}{dz} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{z}{\sigma-t} + \frac{\sigma}{1-\sigma t} + \frac{1-\sigma^2}{\sigma(\sigma-t)^2} + \frac{1-z}{2\sigma} \right] p(t) dt \right\}$$

Отсюда, в середине дуги γ^+ , то есть при $z=i$, имеем

$$G_0 = -\frac{q}{8} - \frac{q}{4} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{(1+z)(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{4(1-3t^2)}{(1+t^2)^3} + \frac{1-z}{2} \right] p(t) dt \quad (1.21)$$

при $z=i$

Функция $\chi(z)$, необходимая для определения прогибов ω , находится из второй формулы (1.10) обычным интегрированием

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 P(z, t) p(t) dt + A \quad z \text{ в } S' \quad (1.22)$$

$$P(z, t) = (z-1) \ln \frac{1-zt}{z-t} + \frac{z^2-zt-t^2}{t(z-t)} + \\ + \frac{(1-z)t^2+1}{t^2(1-zt)} + \frac{t^2-1}{t^2(1-zt)^2} \quad (1.23)$$

A — произвольная вещественная постоянная. В равенстве (1.23) под $\ln(1-zt)$ и $\ln(z-t)$ при фиксированном t подразумеваются вполне определенные ветви соответствующих многозначных функций.

Постоянная A должна быть определена из граничного условия задачи:¹⁾

$$w(x, y) = 2 \operatorname{Re} \{z\bar{\varphi}(z) + \chi(z)\} = 0 \quad \text{на } \gamma$$

что в точке $0=i$ дает

$$A = -\operatorname{Re}\{z\bar{\varphi}(z) + \chi^*(z)\} \quad (\text{при } z=i)$$

Здесь $\chi^*(z)$ обозначает правую часть (1.22) без A .

Если подставить сюда представления (1.10) и (1.22) для φ и χ^* , то после элементарных преобразований формула примет весьма простой вид

$$A = \frac{x-3}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 p(t) dt$$

После определения A функция $\chi(z)$ будет определена равенством (1.22) однозначно и формула

$$w(x, y) = \frac{\lambda}{2} (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2 \operatorname{Re}\{z\bar{\varphi}(z) + \chi(z)\}$$

даст значения прогибов в любой точке срединной поверхности. Для точек диаметра l

$$w(x, y) = \frac{\lambda}{2} (x^2 - 1)^2 + 2 \operatorname{Re}\{t\bar{\varphi}^*(t) + \chi^*(t)\} \quad (t \text{ на } l)$$

В частности, прогиб в точке $x=y=0$ равен

$$w(0, 0) = \frac{\lambda}{2} + 2A + 2 \operatorname{Re} \chi^*(0)$$

Вычисляя правую часть предыдущей формулы, найдем

$$w(0, 0) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \{3-x + 2(1-x) \ln|t|\} p(t) dt \quad (1.24)$$

¹⁾ Напомним, что равенство (1.3) означает условия: $\frac{dw}{dn} = \frac{dw}{ds} = 0$.

Решая систему линейных уравнений для $n=10$, $\nu=1/2$ (значит, $\kappa=5$) и применяя к правым частям равенств (1.21), (1.24) квадратурную формулу типа Гаусса

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \theta_k f(\cos \theta_k), \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

находим

$$G_n|_{z=1} = -0.1250 q, \quad w(0, 0) = 0.0265 \frac{q}{D}$$

Подробный анализ решения позволяет полагать, что найденные приближения для G_n и w близки к их истинным значениям.

Математический институт
им. А. М. Физмат АН
Грузинской ССР

Получила 10 II 1976

Ա. Ի. ԿԱԼԱՆԴԻԱ

ԿՐԻՍԻՆՔԱՆՈՋԻՆԻ ՍԱՆԻ ՄԵԹՈԴԵ ՆԵՐՏԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅՈՒ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Խոսքը եզրափակն պայմանների դեպքում բարակ սալերի ծածկան օրինակի վրա արվում է որոշ դասի երկչափանի խնդիրների լուծման մեթոդի իրագործումը: Մեկնողը հիմնվում է Կուրսովի—Մուսխելիշվիլու պոտենցիալների հատուկ ձևի ներկայացումների և սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների նկատմամբ հալանի մոտավոր եղանակների հետագա կիրառման վրա:

ON THE INFLUENCE FUNCTION METHOD IN THE THEORY OF ELASTICITY

A. I. KALANDIYA

S u m m a r y

By the influence function we call a special method of reducing a boundary value problem to the operator equation, the solution of which has quite a definite physical sense. The method is especially useful in applications, if the solutions of integral equation serves as the unknown element of the field, which can be regarded as one of the boundary conditions for the elliptic equation under consideration.

In two-dimensional problems of the theory of elasticity this method was used in simultaneously published works [1, 4], in which plane problems on the gap of normal crack and bending of thin plates are regarded respectively within the frames of Kirghof-Love theory.

This work is devoted to the revision of the solution given in [4] and contains the realization of the method, which ensures the effective and correct scheme of calculation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bueckner H. F. Some Stress Singularities and their Computation by means of Integral Equations, in "Boundary Problems in Differential Equations", Univ. Wisconsin Press, Madison, 1960, pp. 215—230.
2. Bueckner H. F., Glaeser I. The Stress Concentration of a Notched Rotar Subjected to Centrifugal Forces, ZAMM, 1966, 46 (5), 265—273.
3. Bueckner H. F. On a Class of Singular Integral Equations. Journ. of Math. Anal. and Appl., 1966, 14(3), 392—426.
4. Коландия А. Н. Об одном способе решения задач теории упругости для полукруга. Проблемы механики сплошной среды (К семидесятилетию акад. Н. Н. Мусхелишвили). М., Изд. АН СССР, 1961, стр. 161—169.
5. Коландия А. Н. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
6. Kolandiya A. I. Mathematical Methods of Two-Dimensional Elasticity. Moscow, "Mir Publishers", 1975.
7. Мусхелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5-ое. М., «Наука», 1966.
8. Мусхелишвили Н. Н. Сингулярные интегральные уравнения, изд. 3-ое. М., «Наука», 1968.
9. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений, изд. 2-ое. «Наука», 1970.
10. Сапонджян О. М. Применение метода дополнительных воздействий к решению задачи об изгибе плиты, плоской задачи и задачи о кручении призматических стержней. ПММ, 1949, т. 13, вып. 5.
11. Сапонджян О. М. Изгиб полукруглой плиты. Сб. трудов Ереванского политехнического института, 1950, № 4.
12. Сапонджян О. М. Изгиб тонких упругих плит. Ереван, изд-во «Айастан», 1975.

Գ. Ա. ՄՈՎՏԻՍՅԱՆ, Դ. Յ. ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

В работах [1, 2, 5] доказывалось, что в задачах устойчивости цилиндрической оболочки с упругим наполнителем жесткостные характеристики которого на несколько порядков уступают соответствующим параметрам оболочки, влиянием напряжений на поверхности контакта между оболочкой и наполнителем можно пренебречь.

В настоящей работе с учетом указанного обстоятельства исследуется устойчивость при чистом изгибе ортотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем, модуль упругости которого много меньше модулей упругости оболочки.

1. Пусть ортотропная цилиндрическая оболочка с изотропным наполнителем подвергается действию изгибающих моментов M , приложенных в диаметральной плоскости (фиг. 1).

Дифференциальные уравнения устойчивости оболочки с наполнителем имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} + \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + X = 0 \\ & (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} + \left(C_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v + \frac{C_{66}}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} + Y = 0 \\ & \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \right. \\ & \left. + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - T_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - T_2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2S \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} + \frac{C_{22}}{R} \right] w - Z = 0 \quad (1.1) \end{aligned}$$

где u, v, w — перемещения возмущенного состояния, X, Y, Z — изменения нагрузки, связанные с воздействием упругого наполнителя в процессе потери устойчивости, T_1, T_2, S — докритические усилия в срединной поверхности оболочки,

$$\begin{aligned} C_{jk} &= B_{jk} h, \quad D_{jk} = C_{jk} \frac{h^3}{12} \\ B_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ B_{66} &= G_{12}, \quad B_{12} = \nu_1 B_{22} = \nu_2 B_{11} \end{aligned} \quad (1.2)$$

E_1, E_2, ν_1, ν_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона материала оболочки по главным направлениям упругости α и β , G_{12} — модуль сдвига.

2. Учитывая, что в процессе выпучивания на оболочку действует радиальная нагрузка от наполнителя Z , в уравнениях устойчивости (1.1) для компонентов нагрузки X, Y будем иметь

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad (1.3)$$

Для определения радиальной нагрузки Z будем исходить из следующих соображений.

Исследование устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем при осевом сжатии показывает, что радиальное взаимодействие наполнителя приближенно можно представить в виде

$$Z = -k_0 w \quad (1.4)$$

где коэффициент k_0 определяется из решения задачи Ляме для полого изотропного цилиндра и имеет вид

$$k_0 = \frac{2(1+\nu_0) \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right]}{1 - \nu_0 + (1+\nu_0) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2} \frac{G_1}{R} \quad (1.5)$$

Здесь G_1 и ν_0 — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала наполнителя, R_0 — радиус внутренней цилиндрической поверхности наполнителя, R — радиус срединной поверхности оболочки (фиг. 1).

На фиг. 2 приведены результаты указанного приближенного и полученного на основании [4, 5] точного решения задачи устойчивости при осевом сжатии, когда $\frac{l}{R} = 2$, $\nu_0 = 0.5$, $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.28$, $\frac{G_m}{E_1} =$

$= 0.4$, $\frac{G_0}{E_1} = 8 \cdot 10^{-3}$. Как видно из фиг. 2, для критической нагрузки

$p_{cr} = \frac{P(1-\nu_1\nu_2)}{E_1 h}$ приближенное решение дает близкие к точному результаты.

В связи с этим ниже при решении задачи устойчивости цилиндрической оболочки с упругим наполнителем при чистом изгибе изгибающие моменты заменяются статически эквивалентной осевой нагрузкой и считается возможным представить выражение Z в виде (1.4).

2. Рассмотрим устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки с упругим наполнителем при чистом изгибе.

Считая, что для потери устойчивости внешняя нагрузка полностью воспринимается оболочкой, для внутренних сил оболочки T_1, T_2, S будем иметь [3]

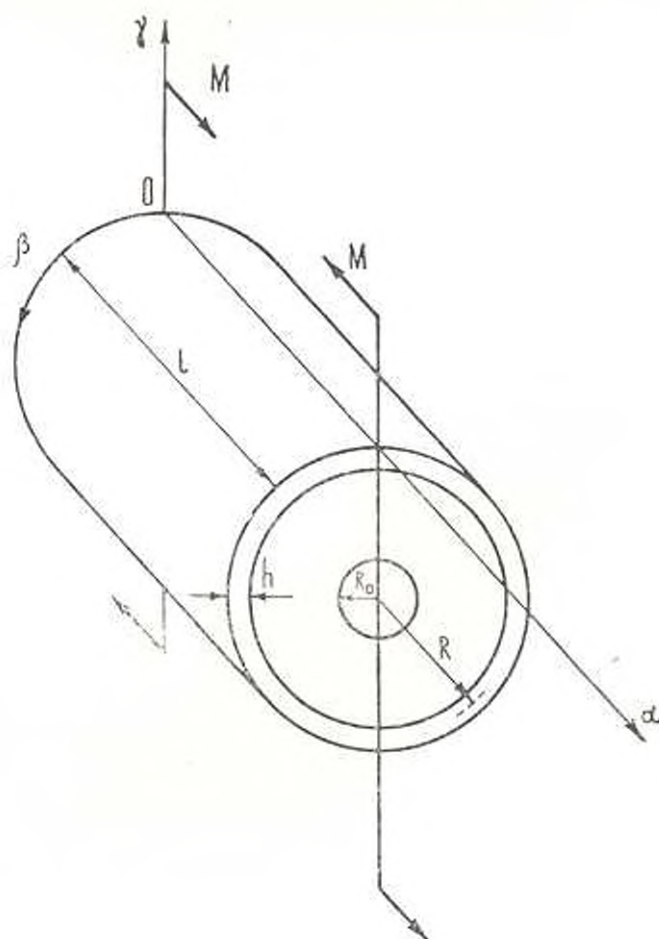
$$T_1 = -\frac{M}{\pi R^2} \cos \frac{\beta}{R}, \quad T_2 = 0, \quad S = 0 \quad (2.1)$$

Принимая, что торцевые сечения оболочки оперты шарнирно, представим решение дифференциальных уравнений устойчивости (1.1) в виде рядов

$$\begin{aligned}
 u &= \cos \lambda_m z \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin \mu_n \beta \\
 v &= \sin \lambda_m z \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos \mu_n \beta \\
 w &= \sin \lambda_m z \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \mu_n \beta
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\lambda_m = \frac{\pi m}{l}, \quad \mu_n = \frac{n}{R} \tag{2.3}$$



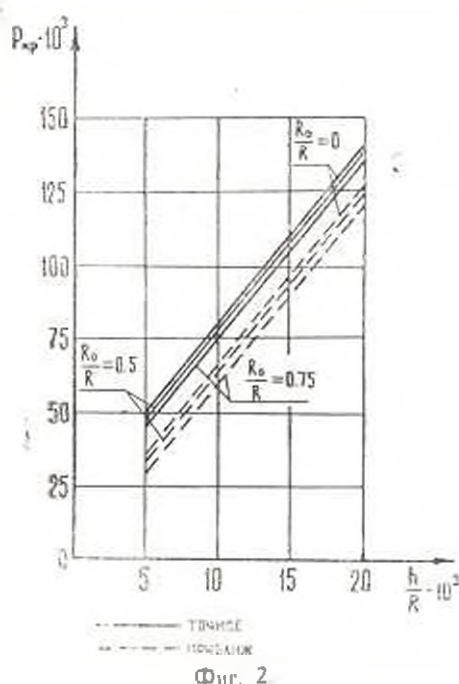
Фиг. 1.

Подставляя (1.3), (2.1) и (2.2) в уравнения устойчивости (1.1), получим

$$-(C_{11}\lambda_m^2 + C_{55}\mu_n^2)U_n - (C_{12} + C_{56})\lambda_m\mu_n V_n + \frac{C_{13}}{K}\lambda_m W_n = 0$$

$$-(C_{12} + C_{66}) \lambda_m \mu_n U_n - (C_{22} \mu_n^2 + C_{66} \lambda_m^2) V_n - \frac{C_{23}}{R} \mu_n W_n = 0 \quad (2.4)$$

$$-\frac{C_{12}}{R} \lambda_m U_n - \frac{C_{23}}{R} \mu_n V_n + \left[D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + \right. \\ \left. + D_{22} \mu_n^4 - \frac{C_{23}}{R^2} - k_0 \right] W_n - \frac{M}{2R^2} \mu_n^2 (W_{n-1} + W_{n+1}) = 0$$



Фиг. 2

Исключив из системы (2.4) U_n и V_n , получим следующую систему алгебраических уравнений относительно W_{n-1} , W_n , W_{n+1} :

$$\left[-\frac{C_{12}}{R} \frac{\Delta_1}{\Delta} \lambda_m - \frac{C_{23}}{R} \frac{\Delta_2}{\Delta} \mu_n + \left[D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + D_{22} \mu_n^4 - \frac{C_{23}}{R^2} - k_0 \right] \right] W_n - \frac{M}{2R^2} \mu_n^2 (W_{n-1} + W_{n+1}) = 0 \quad (2.5)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{C_{12}}{R} \lambda_m (C_{22} \mu_n^2 + C_{66} \lambda_m^2) - \frac{C_{23}}{R} \mu_n^2 (C_{12} + C_{66}) \lambda_m \\ \Delta_2 = (C_{11} \lambda_m^2 + C_{66} \mu_n^2) \frac{C_{23}}{R} \mu_n - (C_{12} + C_{66}) \lambda_m^2 \mu_n \frac{C_{23}}{R} \quad (2.6)$$

$$\Delta = (C_{11} \lambda_m^2 + C_{66} \mu_n^2) (C_{22} \mu_n^2 + C_{66} \lambda_m^2) - (C_{12} + C_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2$$

Вводя в (2.5) безразмерный параметр нагрузки

$$\bar{M} = \frac{M}{\pi R^2} \frac{1}{B_{11} h} \quad (2.7)$$

будем иметь

$$W_{n-1} + \Delta(m, n) W_n + W_{n+1} = 0 \quad (2.8)$$

где

$$\Delta(m, n) = \frac{2}{M l_{\text{тн}} R^2} \left\{ \frac{C_{12} l_m \Delta_1 + C_{22} l_n \Delta_2}{\Delta} \frac{R}{B_{11} h} - \left[D_{11} l_m^4 + 2(D_{12} - 2D_{66}) k_m^2 p_m^2 + D_{22} l_n^4 + \frac{C_{22}}{R^2} - k_0 \right] \frac{R_0^2}{B_{11} h} \right\} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.6) в (2.9), с учетом (1.2), (1.5) и (2.3) для $\Delta(m, n)$ получим

$$\Delta(m, n) = \frac{2}{n^2 \bar{M}} \left\{ \frac{\bar{\nu} + k(\bar{\nu} - 1)^2}{2(k + \bar{\nu}) + k\bar{\nu}(\bar{\nu} - 2\bar{\nu})} \bar{\nu} - \frac{1}{12} \left[\left(\pi m n \frac{h}{l} \right)^2 (\bar{\nu} + 2\bar{\nu} + 4k(1 - \bar{\nu}^2)) + \bar{\nu} \left(n^2 \frac{h}{R} \right)^2 \right] - \bar{\nu} + z \right\} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \left(\frac{\pi m}{n} \frac{R}{l} \right)^2 \\ E_1 &= E, \quad \nu_1 = \nu, \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \bar{\nu}, \quad \frac{G_{12}}{E_1} = k \\ z &= - \frac{2(1 + \nu_0) \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right]}{1 - \nu_0 + (1 + \nu_0) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2} \frac{G_0}{E} \frac{R}{h} (1 - \bar{\nu}^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Критическое значение изгибающих моментов находим из условия равенства нулю определителя бесконечной системы алгебраических уравнений (2.8).

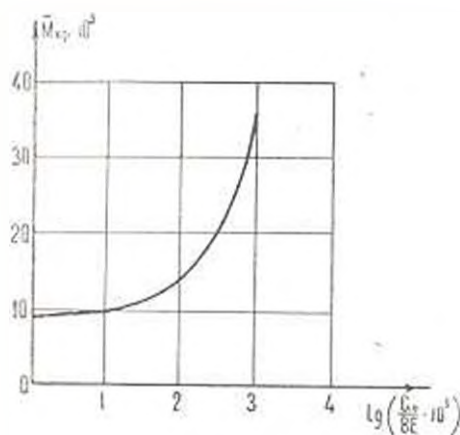
3. Приведем результаты численного решения при

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{100}, \quad \bar{\nu} = 1.44, \quad k = 0.4, \quad \nu = 0.2, \quad \nu_0 = 0.5 \quad \text{и} \quad n = 3$$

В табл. 1 приведены критические значения безразмерного параметра $\bar{M}_{\text{кр}}$, а также соответствующие числа полн $m_{\text{кр}}$ в зависимости от отношения $\frac{G_0}{E}$.

На фиг. 3 приведен график зависимости между $\bar{M}_{кр}$ и $\lg\left(\frac{G_0}{8E} \cdot 10^5\right)$.

Как видно из графика, с усилением наполнителя критическое значение изгибающего момента, а также число волн вдоль образующей оболочки увеличивается.



Фиг. 3.

Заметим, что значения $\bar{M}_{кр}$, вычисленные при различных значениях $\frac{l}{R}$ (2; 3; 4; 5), почти не изменяются.

Таблица 1

$\frac{G_0}{E}$	$\bar{M}_{кр}$	$m_{кр}$
0	0.00941	13
0.00008	0.00947	13
0.0008	0.01007	13
0.008	0.01476	16
0.08	0.03704	25

Таблица 2

$\frac{G_0}{E}$	$\bar{p}_{кр}$	$\bar{N}_{кр}$
0.00001333	0.00641	0.01006
0.00006667	0.00657	0.01014
0.00016667	0.00681	0.01027

В табл. 2 приводятся значения $\bar{M}_{кр}$ при чистом изгибе, а также значения безразмерного параметра $\bar{p}_{кр} = \frac{P}{B_{12}h}$ при осевом равномерном сжатии оболочки при $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$, $k = 1.667$, $k = 0.4$, $\frac{R}{l} = 0.3$, $\nu = 0.2$, $\chi_0 = 0.5$.

С учетом (2.1) из табл. 2 следует, что критические максимальные осевые усилия при чистом изгибе несколько больше критических осевых усилий при равномерном сжатии.

Следует отметить, что такой же результат для оболочки без наполнителя приводится в [3].

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 1 VI 1976

Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ, Գ. Զ. ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ

ԱՆԻՍՈՏՐՈՓԱՆ ԼՅԱՆՈՎ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿՈՆՍՏԱՆԹ ԲԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՐԵՆՈՒԹՅԱՆ
ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱՔՈՒՐ ՆՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ընդունվում է, որ թաղանթի և առաձգական լցանի միջև գոյություն ունի նորմալ տեղափոխմանը շահմանափակ շառավղային փոխազդեցություն և սրտչվում է ձողո ժամենաի կրիտիկական արժեքը:

ON STABILITY OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL
WITH ELASTIC FILLER UNDER PURE BENDING

G. A. MOVSISIAN, G. Z. MIKHAELIAN

S u m m a r y

The radial interaction alone parallel to normal displacement is assumed to exist between shell and filler.

The critical values of bending moments are found from the condition where the determinant of an infinite system of algebraic equations is equal to zero.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Варвак А. П. Влияние упругого заполнителя на устойчивость цилиндрической оболочки (осесимметричная задача). Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Баку, 1966.
2. Власов В. В. Исследование устойчивости цилиндрических оболочек с пустотелым заполнителем при осевом сжатии. Прикл. механ., 1971, 18, № 7.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. «Наука», 1967.
4. Setde Paul. The Stability under Axial Compression and Lateral Pressure of Circular cylindrical Shells with a Soft Elastic Core. „J. Aerospace Sci.", 1962, 29, № 7.
5. Yuo J. C. Buckling of Axially Compressed Long Cylindrical Shells with Elastic Core. „Trans. ASME", 1962, E29, № 2.

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПО ДВУМ ПРОТИВОПО- ЛОЖНЫМ СТОРОНАМ, С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Устойчивости пластинок за пределами упругости материала в различ-
 ных постановках посвящено много исследований ([1]—[5] и др.).

В настоящей статье на основе системы дифференциальных уравнений
 устойчивости неупругих пластинок [9], учитывающих влияние деформаций
 поперечных сдвигов [6], рассматривается задача устойчивости прямоуголь-
 ной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам.
 Рассматриваются различные варианты краевых условий на ненагруженных
 сторонах пластинки. Аналогичная задача для упругих пластинок рассма-
 трена в работе [10].

1. Пусть в прямоугольной пластинке постоянной толщины h , отнесен-
 ной к системе декартовых координат x, y , z , равномерным сжатием вдоль
 оси ox реализовано безмоментное состояние за пределами упругости ма-
 териала

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_z = p \\ \epsilon_x &= -\epsilon_y, \quad \epsilon_z = \frac{\epsilon_y}{2}, \quad \epsilon_{xz} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ — компоненты напряжения и деформации,
 σ_z и ϵ_z — интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига.

Система дифференциальных уравнений устойчивости рассматриваемой
 неупругой пластинки при учете влияния поперечных сдвигов [6], в рамках
 деформационной теории пластичности [1] и применимости гипотезы не-
 прерывного нагружения выпучиваемой пластинки [7], примет следующий
 вид:

$$\begin{aligned} & \frac{ph}{J_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ & a_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{12}{h^3} J_2 \left(\frac{4a_{11}}{a_{22}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{12}{h^3} J_2 \psi - \frac{36}{h^3} J_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \\ & a_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{12}{h^3} J_2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{12}{h^3} J_2 \varphi - \frac{36}{h^3} J_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$a_{11} = \frac{4}{9e_l} \left| 3p + \frac{9}{4} e_l^2 \frac{d}{de_l} \left(\frac{\sigma_l}{e_l} \right) \right| \quad (1.3)$$

$$a_{22} = \frac{4p}{3e_l}, \quad a_{12} = \frac{a_{22}}{2}, \quad a_{33} = \frac{a_{22}}{4}$$

w — прогиб пластинки, φ и ψ — функции, характеризующие распределение деформаций поперечных сдвигов в срединной плоскости пластинки. J_1 и J_2 — постоянные, определяемые по выбранному закону изменения этих деформаций по толщине пластинки [6].

Пусть пластинка шарнирно оперта по двум противоположным сторонам $x=0$, $x=a$.

Граничные условия этих сторон имеют вид

при $x=0, \quad x=a$

$$w=0, \quad \psi=0 \quad (1.4)$$

$$M_x = -\frac{h^3}{12} \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{a_{22}}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4 \frac{J_1}{a_{22}} \left(a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{a_{22}}{2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

Решение системы (1.2), удовлетворяющее граничным условиям (1.4), ищем в виде [10]

$$w = W(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\varphi = F(y) \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (1.5)$$

$$\psi = U(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Обычным методом, исключая из системы (1.2) функции F и U , приходим к следующему уравнению для прогибов:

$$a_{22} \frac{J_1}{J_2} \frac{d^4 W}{dy^4} + \left| -a_{22} + \gamma_1^2 \frac{J_1}{J_2} \left(a_{22} - 4a_{11} + \frac{48p}{h^3} \frac{J_1}{J_2} \right) \right| \frac{d^2 W}{dy^2} +$$

$$+ \gamma_1^2 \left| 2a_{22} - \frac{60p}{h^2} \frac{J_1}{J_2} + \gamma_1^2 \frac{J_1}{J_2} \left| 5a_{11} - 2a_{22} + \frac{96p}{h^2} \frac{J_1}{J_2} \left(1 - 2 \frac{a_{11}}{a_{22}} \right) \right| \right| \frac{d^2 W}{dy^2} +$$

$$+ \gamma_1^2 \left(1 + \frac{J_1}{J_2} \gamma_1^2 \right) \left(\frac{12p}{h^2} - a_{11} \gamma_1^2 + \frac{48p}{h^2} \frac{J_1}{J_2} \gamma_1^2 \frac{a_{11}}{a_{22}} \right) W = 0 \quad (1.6)$$

В случае, когда края пластинки $y=0$, $y=b$ совершенно свободны, критическое значение напряжения p_c определится из условия равенства нулю последнего члена уравнения (1.6)^{*)}, то есть

^{*)} Это следует из решения устойчивости шарнирно опертой бесконечной полосы [9].

$$\rho_0 = \frac{a_{11}\gamma^2 h^2}{12 \left(1 + 4k\gamma^2 \frac{a_{11}}{a_{22}} \right)} \quad (1.7)$$

Естественно, в остальных всех случаях граничных условий на краях $y=0$, $y=b$ можно положить

$$p = 2\rho_0, \quad \alpha > 1 \quad (1.8)$$

Имея в виду (1.8) и то обстоятельство, что в (1.6) W участвует лишь в четных производных, характеристическое уравнение представим в виде

$$Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 = 0 \quad (1.9)$$

где

$$Z = h^2 \omega^2 \quad (1.10)$$

$$a_1 = 10 + 9 \left(1 - 4\gamma + \frac{2a_{11}\gamma}{5 + 2\beta\gamma} \right)$$

$$a_2 = \beta \left[20 - 25 \frac{\gamma^3}{5 + 2\beta\gamma} + 3 \left| 5\gamma - 2 + \frac{4a_{11}\gamma(1 - 2\gamma)}{5 + 2\beta\gamma} \right| \right] \quad (1.11)$$

$$a_3 = \gamma\beta^3(\alpha - 1)(\beta + 10)$$

$$\beta = \gamma^2 h^2, \quad \gamma = \frac{a_{11}}{a_{22}}$$

Пользуясь выражениями (1.1), легко получить интервал изменения

$$\frac{1}{4} < \gamma < 1 \quad (1.12)$$

Нетрудно заметить, что при отыскании нижнего критического напряжения, при котором обычно $\alpha = 1$,

$$0 < \beta < 1 \quad (1.13)$$

Из условия положительности свободного члена a_3 следует, что уравнение (1.9) имеет по крайней мере один отрицательный действительный корень $Z_1 < 0$. Согласно обозначению (1.10), этому корню соответствуют фундаментальные решения уравнения (1.6) типа

$$\sin \omega_1 y \quad \text{и} \quad \cos \omega_1 y, \quad \omega_1 = h \sqrt{-Z_1} \quad (1.14)$$

Вычисления показывают, что минимумы безразмерной функции

$$\Phi(Z) = Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 \quad (1.15)$$

во всех возможных интервалах параметров

$$1 < \alpha \leq 10, \quad 0 < \beta < 1, \quad 1/4 < \gamma \leq 1 \quad (1.16)$$

отрицательны

$$-187.94 \leq \Phi_{\text{сн}} \leq -33.25 \quad (1.17)$$

и достигаются при положительных $z = z_0(z, \beta, \gamma)$

$$Z_0 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} > 0 \quad (5.50 < z_0 < 7.66) \quad (1.18)$$

Из этого следует, что остальные два корня уравнения (1.9), вообще, независимо от степени развития пластического деформирования, являются различными положительными числами.

Фундаментальные решения дифференциального уравнения (1.6), соответствующие положительным корням Z_1 и Z_2 , с учетом (1.10) будут

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \omega_1 y, \quad \operatorname{ch} \omega_1 y, \quad \operatorname{sh} \omega_2 y, \quad \operatorname{ch} \omega_2 y \\ \omega_1 = \frac{1}{h} \sqrt{Z_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{h} \sqrt{Z_2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Решая уравнение (1.9), для ω_3 получим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{h} \left| 2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos\left(\frac{\zeta}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{a_1}{3} \right|^{1/2} \\ \omega_2 &= \frac{1}{h} \left| 2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos \frac{\zeta}{3} - \frac{a_1}{3} \right|^{1/2} \\ \omega_3 &= \frac{1}{h} \left| -2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos\left(\frac{\zeta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \right|^{1/2} \\ \xi &= -\frac{a_1^2}{3} + a_2, \quad \cos \zeta = -\frac{q}{2 \sqrt{-(\xi/3)^3}}, \quad q = 2 \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения, на основе выполненного анализа, представим в виде

$$\begin{aligned} W(y) = C_1 \sin \omega_1 y + C_2 \cos \omega_1 y + C_3 \operatorname{sh} \omega_2 y + \\ + C_4 \operatorname{ch} \omega_2 y + C_5 \operatorname{sh} \omega_3 y + C_6 \operatorname{ch} \omega_3 y \end{aligned} \quad (1.21)$$

где C_i — произвольные постоянные.

С учетом (1.21) из (1.8) получим неоднородные дифференциальные уравнения относительно F и Ψ . Не вдаваясь в подробности, приводим общие решения этих уравнений^{*}

$$\begin{aligned} F(y) = C_1 A_1 \sin \omega_1 y - C_2 A_1 \cos \omega_1 y + C_3 A_2 \operatorname{sh} \omega_2 y + C_4 A_2 \operatorname{ch} \omega_2 y + \\ + C_5 A_3 \operatorname{sh} \omega_3 y + C_6 A_3 \operatorname{ch} \omega_3 y \\ \Psi(y) = C_1 B_1 \cos \omega_1 y - C_2 B_1 \sin \omega_1 y + C_3 B_2 \operatorname{ch} \omega_2 y + C_4 B_2 \operatorname{sh} \omega_2 y + \\ + C_5 B_3 \operatorname{ch} \omega_3 y + C_6 B_3 \operatorname{sh} \omega_3 y \end{aligned} \quad (1.22)$$

^{*} Возникающие дополнительные постоянные равны нулю, в чем легко убедиться подстановкой полученных решений в систему (1.6).

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{12J_1(\omega_1^2 + \omega_4^2)} \left[\beta^{3/2} \left(\frac{36p}{h^2} k - a_{11} \right) - \gamma a_{22} \omega_1^2 h^3 \right] \\ A_2 &= \frac{1}{12J_1(\omega_2^2 - \omega_4^2)} \left[\beta^{3/2} \left(\frac{36p}{h^2} k - a_{11} \right) - \gamma a_{22} \omega_2^2 h^3 \right] \\ A_3 &= \frac{1}{12J_1(\omega_3^2 - \omega_4^2)} \left[\beta^{3/2} \left(\frac{36p}{h^2} k - a_{11} \right) - \gamma a_{22} \omega_3^2 h^3 \right] \\ B_1 &= -\frac{\gamma}{\omega_1} \left(A_1 - \frac{ph\gamma}{J_2} \right), \quad B_2 = \frac{\gamma}{\omega_2} \left(A_2 - \frac{ph\gamma}{J_2} \right) \\ B_3 &= \frac{\gamma}{\omega_3} \left(A_3 - \frac{ph\gamma}{J_2} \right), \quad \omega_4^2 = -3\gamma^2 - 4\gamma^2\gamma + \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (1.23)$$

С учетом (1.5), (1.21) и (1.22) из соответствующих выражений для изгибающих и крутящих моментов находим

$$\begin{aligned} M_y &= (C_1 M_1 \sin \omega_1 y + C_2 M_1 \cos \omega_1 y + C_3 M_2 \operatorname{sh} \omega_2 y + \\ &+ C_4 M_2 \operatorname{ch} \omega_2 y + C_5 M_3 \operatorname{sh} \omega_3 y + C_6 M_3 \operatorname{ch} \omega_3 y) \sin \gamma x \\ H &= (C_1 H_1 \cos \omega_1 y - C_2 H_1 \sin \omega_1 y + C_3 H_2 \operatorname{ch} \omega_2 y - \\ &+ C_4 H_2 \operatorname{sh} \omega_2 y + C_5 H_3 \operatorname{ch} \omega_3 y + C_6 H_3 \operatorname{sh} \omega_3 y) \frac{a_2}{24} \cos \gamma x, \quad N_x = J_2 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{a_{22} h^3}{24} (2\omega_1^2 + \gamma^2) - \frac{3}{2} a_{22} J_1 \frac{e_i}{p} (2B_1 \omega_1 + \gamma A_1) \\ M_2 &= -\frac{a_{22} h^3}{24} (2\omega_2^2 - \gamma^2) + \frac{3}{2} a_{22} J_1 \frac{e_i}{p} (2B_2 \omega_2 - \gamma A_2) \\ H_1 &= -\gamma \omega_1 h^3 + 18 J_1 \frac{e_i}{p} (A_1 \omega_1 + \gamma B_1) \\ H_2 &= -\gamma \omega_2 h^3 + 18 J_1 \frac{e_i}{p} (A_2 \omega_2 - \gamma B_2) \\ H_3 &= -\gamma \omega_3 h^3 + 18 J_1 \frac{e_i}{p} (A_3 \omega_3 - \gamma B_3) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Имея выражения фундаментальных решений, можно для каждого конкретного случая крепления ненагруженных краев пластинки записать матрицу, собственные числа которой являются критическими значениями сжимающего напряжения.

2. В качестве примеров рассмотрим следующие три варианта граничных условий:

3 Известия АН Армянской ССР. Механика, № 2

- а) край $y = 0$ шарнирно оперт ($w = M_y = \varphi = 0$)
 а край $y = b$ — свободен ($M_y = \varphi = H = 0$) (2.1)

- б) край $y = 0$ шарнирно оперт, а край $y = b$ жестко заделан

$$\left(w = \varphi = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3\tau_z}{p} \frac{h}{2} = 0 \right) \quad (2.2)$$

- в) край $y = 0$ свободен, а край $y = b$ жестко заделан (2.3)

Записывая соответствующие граничные условия для каждого варианта, получим однородную систему шести уравнений относительно шести постоянных интегрирования C . Критические значения напряжения получаются как собственные числа определителя этой системы.

В случае а) определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & M_1 & 0 & M_2 & 0 & M_3 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & A_3 \\ M_1 \sin \omega_1 b & M_1 \cos \omega_1 b & M_2 \sin \omega_2 b & M_2 \cos \omega_2 b & M_3 \sin \omega_3 b & M_3 \cos \omega_3 b \\ B_1 \cos \omega_1 b & -B_1 \sin \omega_1 b & B_2 \cos \omega_2 b & -B_2 \sin \omega_2 b & B_3 \cos \omega_3 b & -B_3 \sin \omega_3 b \\ H_1 \cos \omega_1 b & -H_1 \sin \omega_1 b & H_2 \cos \omega_2 b & -H_2 \sin \omega_2 b & H_3 \cos \omega_3 b & -H_3 \sin \omega_3 b \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Если везде жесткости поперечных деформаций сдвигов считать бесконечно большими, то получится решение задачи по классической постановке.

В нижеприведенной таблице представлены значения критического напряжения по классической ($p_{кл}$) и уточненной ($p_{ут}$) теориям.

Расчеты проводились для случая линейного упрочнения материала, когда

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{h^2}{10}, \quad \left[f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right] \quad (2.5)$$

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}, \quad \lambda = \frac{1}{6}, \quad G = 7 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2, \quad \tau_s = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$$

Таблица 1

случай а)			случай б)			случай в)		
$P_{кл}$ в 10^3 кг/см^2	$P_{ут}$	$P_{кл}/P_{ут}$	$P_{кл}$	$P_{ут}$	$P_{кл}/P_{ут}$	$P_{кл}$	$P_{ут}$	$P_{кл}/P_{ут}$
192.88	123.43	1.56	440.93	264.17	1.67	250.82	134.09	1.91

Как видно из третьих столбцов таблицы, при рассмотренных граничных условиях пластинки учет влияния поперечных сдвигов уменьшает нижние критические нагрузки примерно в полтора—два раза.

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍԻԱՆ

ԵՐԿՈՒ ՀԱՆԴԻՊԱԿԱՑ ԵԶՐԵՐՈՎ ՀՈՒԿԱԿԱՊՈՐԵՆ ՀԵՆՎԱՆ ՈՉ ԱԲԷԶԻԱԿԱՆ ՈՒՂԱԿԱՅԱՆ ՈՍԱԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԻ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Ո

Ոչ առածգական սարկի կայունությունը ուսումնասիրելու համար ստացված դիֆերենցիալ հավասարումների սխառնմի հիման վրա [9], որը հաշվի է առնում լայնական սահմանի ղեֆորմացիաների ազդեցությունը, դիտարկվում է երկու հանդիպական նզրերով լողակապորեն հենված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը:

Դիտարկվում են սալի չբեռնված կողերի եզրային պայմանների մի քանի տարբերականքներ:

ON STABILITY OF NON-ELASTIC RECTANGULAR PLATES HINGE-SUPPORTED ON TWO OPPOSITE SIDES WITH DUE REGARD TO THE EFFECT OF TRANSVERSAL DISPLACEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

In terms of a system of differential equations of stability of non-elastic plates [9], regarding the effect of transversal deformation displacements the problem of stability of non-elastic rectangular plates hinge-supported on their two opposite sides is considered.

Various cases of boundary conditions on non-loaded sides of the plates are dealt with.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л. Гостехиздат, 1946.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М. Физматгиз, 1969.
3. Хорн М. Устойчивость упруго-пластичных конструкций. Механика, № 1, 1967.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. Физматгиз, 1967.
5. Амбарцумян С. А. Об устойчивости неупругих пластин с учетом деформации по поперечным сдвигам. ПММ, 1963, т. XXVII, в. 4.
6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М. Физматгиз, 1967.
7. Shanley F. R. Inelastic column theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, 1947, v. XIV, No. 5.
8. Работнов Ю. Н., Шестерихин С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, в. 3.
9. Киракосян Р. М. Об устойчивости пластинки за пределами упругости с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4.
10. Мелконян А. П., Хачатрян А. А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально-анизотропных пластинок. Прикл. металл. АН УССР, 1966, т. II, в. 2.

Г. Б. ВЕРМИШАН, Б. А. МЕЛТОНЯН

КРУЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ОРТОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Исследовано кручение ортотропного вязко-упругого призматического стержня некругового сечения при действии вибрационной нагрузки. Прилагаемая нагрузка меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой.

Эта задача для изотропного однородного и составного стержня рассматривалась в работах [1, 2].

Показано, что составляющие комплексного модуля существенно зависят от частоты колебания и температуры, при этом за счет работы диссипативных сил происходит выделение тепла. Для определения температуры получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находят экспериментальным путем.

В предельном стационарном случае вопрос сводится к решению дифференциального уравнения эллиптического типа.

Принято, что на боковой поверхности стержня температура неизменна и равна температуре окружающей среды. Кроме того, предполагается, что температура вдоль оси стержня не изменяется.

1. Рассмотрим кручение ортотропного призматического стержня из вязко-упругого материала, на одном основании которого действуют усилия, меняющиеся по гармоническому закону, статически эквивалентные некоторому крутящему моменту.

Пусть компоненты деформации в поперечном сечении стержня изменяются следующим образом:

$$\tau_{xz} = x'' (\partial z / \partial x - y) \cos \omega t, \quad \tau_{yz} = x'' (\partial z / \partial y + x) \cos \omega t \quad (1.1)$$

Тогда компоненты напряжения будут равны

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0 \cos (\omega t - \varphi_1), \quad \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^0 \cos (\omega t - \varphi_2) \quad (1.2)$$

Здесь x'' — угол закручивания, $\varphi(x, y)$ — некоторая функция, подлежащая определению, φ_1 и φ_2 — сдвиг фаз между деформацией и напряжением в двух перпендикулярных направлениях, которые примем за оси координат. В дальнейшем индекс 1 соответствует направлению оси ox , а индекс 2 — оси oy . Остальные компоненты деформации и напряжения отсутствуют.

Связь между компонентами напряжения и деформации для ортотропного вязко-упругого тела возьмем в виде

$$\tau_{xz} = \int_{-\infty}^t K_1(T, t-\tau) \gamma_{xz}(\tau) d\tau, \quad \tau_{yz} = \int_{-\infty}^t K_2(T, t-\tau) \gamma_{yz}(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

Подставляя значения γ_{xz} , γ_{yz} из (1.1) в (1.3) и вводя переменную $\zeta = t - \tau$, имеем

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \gamma^0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \left\{ \left| \operatorname{Re} \int_0^{\infty} K_1(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right| \cos \omega t + \right. \\ & \left. + \left| \operatorname{Im} \int_0^{\infty} K_1(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right| \sin \omega t \right\} \\ \tau_{yz} = & \gamma^0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \left\{ \left| \operatorname{Re} \int_0^{\infty} K_2(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right| \cos \omega t + \right. \\ & \left. + \left| \operatorname{Im} \int_0^{\infty} K_2(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right| \sin \omega t \right\} \quad (1.4) \end{aligned}$$

Введем комплексные модули [3] в двух перпендикулярных направлениях

$$\begin{aligned} E_j(T, \omega) &= \int_0^{\infty} K_j(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta = E_j'(T, \omega) + iE_j''(T, \omega) = \\ &= E_j(T, \omega) \cos \varphi_j + iE_j(T, \omega) \sin \varphi_j \quad (j=1, 2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) получаем

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \gamma^0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) [E_1'(T, \omega) \cos \omega t + E_1''(T, \omega) \sin \omega t] \\ \tau_{yz} = & \gamma^0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) [E_2'(T, \omega) \cos \omega t + E_2''(T, \omega) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Устанавливается связь между амплитудами напряжения и деформации

$$\tau_{xz}^0 = \gamma^0 (\partial \varphi / \partial x - y) E_1(T, \omega), \quad \tau_{yz}^0 = \gamma^0 (\partial \varphi / \partial y + x) E_2(T, \omega) \quad (1.7)$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для $E_j(T, \omega)$ и $E_j'(T, \omega)$ можно воспользоваться линейной аппроксимацией. При этом $E_j(T, \omega)$ можно считать постоянным

$$E_j(T, \omega) = A_j, \quad E_j'(T, \omega) = B_j + C_j T \quad (j=1, 2) \quad (1.8)$$

Так как обычно $E_1(T, \omega) \ll E_2(T, \omega)$, то величиной $E_1(T, \omega)$ по сравнению с $E_2(T, \omega)$ можно пренебречь. Из уравнений равновесия и совместности получаем, что искомая функция $\varphi(x, y)$ в области S поперечного сечения стержня удовлетворяет уравнению

$$E_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.9)$$

а на границе L области S удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2 \cos(n, y) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1 \cos(n, x) = 0 \quad (1.10)$$

Путем аффинного преобразования области S на S'

$$x = x_1, \quad y = \sqrt{\delta} y_1, \quad \delta = E_2/E_1 \quad (1.11)$$

уравнение (1.9) и граничное условие (1.10) преобразуются соответственно к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y_1^2} = 0 \text{ на } S' \quad (1.12)$$

$$\frac{d\varphi^*}{dn_1} = \sqrt{\delta} [y_1 \cos(n_1, x_1) - x_1 \cos(n_1, y_1)] \text{ на } L'$$

где L' — граница области S' , n_1 — внешняя нормаль к L' . Как получено в работе [1], функции $\varphi^*(x_1, y_1)$ дается по формуле

$$\varphi^* = \operatorname{Re} f(\zeta), \quad f(\zeta) = \frac{\sqrt{\delta}}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{\omega_1(z) \overline{\omega_2(z)}}{z - \zeta} dz, \quad z = e^{i\theta} \quad (1.13)$$

где $\omega_1(\zeta)$ — функция, отображающая область S' плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$ на круг $|\zeta| \leq 1$ плоскости $\zeta = z + i\eta$.

Вычислим момент, действующий на основание стержня

$$\begin{aligned} M &= \iint_S (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy = \\ &= \iint_S [x \tau_{yz}^0 \cos(\omega t - \varphi_2) - y \tau_{xz}^0 \cos(\omega t - \varphi_1)] dx dy = \\ &= \varepsilon^0 \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \cos(\omega t - \varphi_2) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \cos(\omega t - \varphi_1) \right] dx dy = \\ &= \varepsilon^0 \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) \cos \varphi_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \cos \varphi_1 \right] dx dy \right\} \cos \omega t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x^0 \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) \sin \varphi_1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \sin \varphi_1 \right] dx dy \right\} \sin \omega t = \\
& = x^0 \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right] dx dy \right\} \cos \omega t + \\
& + x^0 \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - \right. \right. \\
& \left. \left. - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right] dx dy \right\} \sin \omega t = M_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (1.14)
\end{aligned}$$

где M_0 — амплитуда момента M , а φ_0 — соответствующий сдвиг фаз. На основании этого получаем

$$\begin{aligned}
M_0 = x^0 & \left\{ \left| \iint_S \left(x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right) dx dy \right|^2 + \right. \\
& \left. + \left| \iint_S \left(x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right) dx dy \right|^2 \right\}^{1/2} \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Из (1.15) получаем

$$x^0 = M_0^2 / Q \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned}
Q = & \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right] dx dy \right|^2 + \\
& + \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right] dx dy \right|^2 \quad (1.17)
\end{aligned}$$

Учитывая (1.11) и переходя к плоскости $\zeta = z + iy$, получаем

$$\begin{aligned}
Q = & \left\{ \iint_{|\zeta| < 1} \left[\sqrt{2} |\omega_1(\zeta)|^2 |\omega_1'(\zeta)|^2 - \operatorname{Im} (\omega_1(\zeta) \overline{\omega_1'(\zeta)}) f'(\zeta) \right] E_1(T, \omega) d\bar{\zeta} d\zeta \right|^2 + \\
& + \left\{ \iint_{|\zeta| < 1} \left[\sqrt{2} |\omega_1(\zeta)|^2 \left[(\operatorname{Re} \omega_1(\zeta))^2 \frac{E_2(T, \omega)}{E_2(T, \omega)} + (\operatorname{Im} \omega_1(\zeta))^2 \frac{E_1(T, \omega)}{E_1(T, \omega)} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{E_2(T, \omega)}{E_2(T, \omega)} + \frac{E_1(T, \omega)}{E_1(T, \omega)} \right) \operatorname{Im} (\omega_1(\zeta) \overline{\omega_1'(\zeta)}) f'(\zeta) \right] E_2(T, \omega) d\bar{\zeta} d\zeta \right|^2 \quad (1.18)
\end{aligned}$$

где $\omega_1(\zeta)$ — отображающая функция области S' на единичный круг $|\zeta| < 1$, $f(\zeta)$ определяется по формуле (1.13).

Работа, совершаемая при вязко-упругой деформации, будет равна [1]

$$W = \pi \chi^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 E_1(T, \omega) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 E_2(T, \omega) \right] \quad (1.19)$$

откуда на основании (1.14) и (1.16) после перехода к плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ будем иметь

$$W = \frac{\pi M_0^2 E_1(T, \omega)}{Q |\omega_1(\zeta)|^4} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_1(T, \omega)}{E_1(T, \omega)} + [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_2(T, \omega)}{E_2(T, \omega)} \right\} \quad (1.20)$$

где

$$\Phi(\zeta) = f'(\zeta) \overline{\omega_1(\zeta)} - i V \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \overline{\omega_1(\zeta)} |\omega_1(\zeta)|^2 \quad (1.21)$$

Интенсивность выделения тепла совершаемой работы за один цикл при деформации вязко-упругого тела будет

$$q = \frac{2\pi k M_0^2 E_1(T, \omega)}{2Q |\omega_1(\zeta)|^4} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_1(T, \omega)}{E_1(T, \omega)} + [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_2(T, \omega)}{E_2(T, \omega)} \right\} \quad (1.22)$$

Здесь k — величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ — коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. Для установления максимального нагрева будем полагать этот коэффициент постоянным и равным единице. Функция $\Phi(\zeta)$ дается по формуле (1.21).

Для стационарного случая уравнение теплопроводности в области S принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q(x, y, T)}{a_1 c_1} = 0 \quad (1.23)$$

где a_1 и a_2 — коэффициенты температуропроводности в двух перпендикулярных направлениях, которые можно считать независимыми от изменения температуры, c_1 — теплоемкость, q — интенсивность выделения тепла.

Граничные условия для температуры $T(x, y)$ таковы:

$$T = T_0 \quad \text{на } L \quad (1.24)$$

то есть температура на боковой поверхности стержня равна температуре окружающей среды.

Принято, что

$$a_2/a_1 = E_2/E_1 \quad (1.25)$$

то есть отношение коэффициентов температуропроводности в двух направлениях равно отношению модулей накопления в соответствующих направлениях

Если учесть это предположение, принять во внимание формулы (1.11), (1.22) и перейти к плоскости $\zeta = \bar{\zeta} + i\eta$, уравнение теплопроводности (1.23) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{\zeta}^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{i E_1(T^*, \omega)}{Q |\omega_1(\zeta)|^2} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_1(T^*, \omega)}{E_1(T^*, \omega)} + \right. \\ \left. + [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_2(T^*, \omega)}{E_2(T^*, \omega)} \right\} = 0 \quad (1.26)$$

$$\eta = i \omega k M_0^2 / 2 a_1 c_1 \quad (1.27)$$

при граничном условии

$$T^* = T_0 \text{ на окружности } |\zeta| = 1 \quad (1.28)$$

Используя (1.8) и вводя новую переменную

$$u(\bar{\zeta}, \eta) = T^*(\bar{\zeta}, \eta) - T_0 \quad (1.29)$$

из (1.26) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f_0(\bar{\zeta}, \eta) u = -F_0(\bar{\zeta}, \eta) \quad (1.30)$$

при граничном условии

$$u = 0 \text{ на окружности } |\zeta| = 1 \quad (1.31)$$

Здесь

$$f_0(\bar{\zeta}, \eta) = \frac{i A_2}{Q |\omega_1(\zeta)|^2} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{C_1}{A_1} + [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{C_2}{A_2} \right\} \quad (1.32)$$

$$F_0(\bar{\zeta}, \eta) = \frac{i A_1}{Q |\omega_1(\zeta)|^2} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{B_1 - C_1 T_0}{A_1} + [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{B_2 + C_2 T_0}{A_2} \right\}$$

Уравнение (1.30) при граничном условии (1.31) встречается при решении задачи для изотропного вязко-упругого стержня [1] с той разницей, что функции $f_0(\bar{\zeta}, \eta)$ и $F_0(\bar{\zeta}, \eta)$ в данном случае имеют более сложный вид.

Ищем решение уравнения (1.30) при граничном условии (1.31) в виде

$$u(\bar{\zeta}, \eta) = \iint_{|\xi| < 1} G(\bar{\zeta}, \eta; x, y) \mu_0(x, y) dx dy \quad (1.33)$$

где $G(\bar{\zeta}, \eta; x, y)$ — функция Грина уравнения Лапласа для круга $|\xi| < 1$, а $\mu_0(x, y)$ — произвольная неизвестная функция, непрерывная и имеющая непрерывные производные в круге.

После подстановки (1.33) в (1.30) для нахождения $\mu_0(x, y)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu_0(x, y) = F_0(x, y) + \iint_{|\xi| < 1} K_0(x, y; \bar{\xi}, \eta) \mu_0(\bar{\xi}, \eta) d\bar{\xi} d\eta \quad (1.34)$$

где

$$K_0(x, y; \xi, \eta) = f_0(x, y) G(x, y; \xi, \eta) \quad (1.35)$$

Легко показать, что интеграл

$$\int_{|\xi| \leq 1} \int_{|\eta| \leq 1} |K_0(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta dx dy < C < +\infty \quad (1.36)$$

Для этого оценим данный интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi| \leq 1} \int_{|\eta| \leq 1} |K_0(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta dx dy = \\ & = \int_{|\xi| \leq 1} |f_0(x, y)|^2 dx dy \int_{|\eta| \leq 1} |G(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta < \\ & \leq N^2 \int_{|\xi| \leq 1} dx dy \int_{|\eta| \leq 1} |G(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = \\ & = \frac{N^2}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \ln \frac{1 - 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2}{\rho^2 - 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2} \right|^2 \rho_0 d\rho_0 d\theta_0 \quad (1.37) \end{aligned}$$

Оценим внутренний интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \ln \frac{1 - 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2}{\rho^2 - 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2} \right|^2 \rho_0 d\rho_0 d\theta_0 < \\ & < 4\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{n(n+1)(n+2)} + 4\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{2n-2}}{n(n+1)(n+2)} + 3\pi \quad (1.38) \end{aligned}$$

Подставляя (1.37) в (1.36), получаем

$$\int_{|\xi| \leq 1} \int_{|\eta| \leq 1} |K_0(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta dx dy < \frac{N^2}{8} \left(\frac{\pi^4}{45} + \frac{17}{24} \right) \quad (1.39)$$

где N — верхняя грань функций $f_0(x, y)$.

2. Для решения интегрального уравнения (1.34) его ядро заменим вырожденным. Разложим ядро в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций

$$\{\varphi_k(x, y), \varphi_m(\xi, \eta)\} \quad (k, m = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

в виде

$$K_0(x, y; \xi, \eta) = \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km} \varphi_k(x, y) \varphi_m(\xi, \eta) \quad (2.2)$$

Для коэффициентов A_{km} получаем следующее выражение:

$$A_{km} = \iint_{|z| \leq 1} \left\{ \iint_{|\xi| \leq 1} K_0(x, y; \xi, \eta) \varphi_k(x, y) dx dy \right\} \varphi_m(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.3)$$

После несложных преобразований интегральное уравнение принимает вид

$$\mu_0(x, y) - \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km} \varphi_k(x, y) \iint_{|\xi| \leq 1} \varphi_m(\xi, \eta) \varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta = F_0(x, y) \quad (2.4)$$

Как известно [4], решение интегрального уравнения с вырожденным ядром можно свести к решению линейной системы алгебраических уравнений.

После некоторых вычислений получаем [1]

$$\mu_0(x, y) = F_0(x, y) + \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^N X_m A_{km} \right\} \varphi_m(x, y) \quad (2.5)$$

где постоянные X_k определяются из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m - \sum_{k=1}^N A_{mk} X_k = F_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

где

$$F_m = \iint_{|\xi| \leq 1} F_0(x, y) \varphi_m(x, y) dx dy \quad (2.7)$$

Подставляя полученное значение для $\mu_0(x, y)$ из (2.5) в (1.33) и учитывая (1.29), находим решение задачи в следующей форме:

$$T^*(\xi_0, \eta_0) = T_0 \iint_{|\xi| \leq 1} F_0(\xi, \eta) G(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) d\xi d\eta + \sum_{k=1}^N Y_k \left\{ \iint_{|\xi| \leq 1} G(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) \varphi_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \quad (2.8)$$

$$Y_k = \sum_{m=1}^N X_m A_{km} \quad (2.9)$$

3. В качестве примера рассмотрим стержень, область S поперечного сечения которого ограничена эпитрохидным овалом, параметрическое уравнение которого имеет вид

$$x = R \left(\cos \psi + \frac{a}{3} \cos 3\psi \right), \quad y = \sqrt{6} R \left(\sin \psi + \frac{a}{3} \sin 3\psi \right) \quad (3.1)$$

$$R > 0; \quad 0 < a < 1$$

После аффинного преобразования (1.11) области S на S^* (3.1) преобразуется к виду

$$x_1 = R \left(\cos \vartheta + \frac{2}{3} \cos 3\vartheta \right), \quad y_1 = R \left(\sin \vartheta + \frac{2}{3} \sin 3\vartheta \right) \quad (3.2)$$

Отображающая функция области S^* плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$, ограниченной овалом (3.2), на единичный круг плоскости $z = z_1 + iz_2$ имеет вид

$$z_1 = w_1(z) = R \left(z + \frac{2}{3} z^3 \right) \quad (3.3)$$

Тогда $f_0(z, \eta)$ и $F_0(z, \eta)$ в полярной системе координат даются в виде

$$\begin{aligned} f_0(\rho, \vartheta) &= \frac{\mu A_2 R^4}{2Q} \left\{ \frac{4x^2 (g_1 - g_2) (2x^4 + \rho^2 + x^2 \rho^6 \cos 2\vartheta)}{1 + 2x\rho^2 \cos 2\vartheta + x^2 \rho^4} + \Psi_0(\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_2(\rho) \cos 2\vartheta + \Psi_4(\rho) \cos 4\vartheta + \Psi_6(\rho) \cos 6\vartheta + \Psi_8(\rho) \cos 8\vartheta \right\} \\ F_0(\rho, \vartheta) &= \frac{\mu A_2 R^4}{2Q} \left\{ \frac{4x^2 (\rho_1 - \rho_2) (2x^4 + \rho^2 + x^2 \rho^6 \cos 2\vartheta)}{1 + 2x\rho^2 \cos 2\vartheta + x^2 \rho^4} + \chi_0(\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \chi_2(\rho) \cos 2\vartheta + \chi_4(\rho) \cos 4\vartheta + \chi_6(\rho) \cos 6\vartheta + \chi_8(\rho) \cos 8\vartheta \right\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = C_1/A_1, \quad \rho_2 = C_2/A_2, \quad g_1 = (B_1 + C_1 T_0)/A_1, \quad g_2 = (B_2 + C_2 T_0)/A_2 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\rho) &= (g_1 + g_2) \left[\left(1 + \frac{4x^2}{9} \right) \rho^2 - \frac{4x^2}{3} \rho^4 + \frac{16x^2}{9} \rho^6 + \frac{x^4}{9} \rho^{10} \right] - \\ &\quad - 2(g_1 - g_2) \left(\frac{4}{3} \rho^2 - \rho^4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(\rho) &= -(g_1 + g_2) (3\rho^2 - 6\rho^4 + x^2 \rho^6 - 2x^2 \rho^8) \frac{4x}{9} + \\ &\quad + (g_1 - g_2) \left(\rho^2 - \frac{16x^2}{9} \rho^4 + \frac{5x^2}{3} \rho^6 \right) \end{aligned}$$

$$\Psi_4(\rho) = \frac{x^4}{9} [2x(g_1 + g_2)(3\rho^2 - 2) + (g_1 - g_2)(15 - 4x^2 \rho^2 + 7x^2 \rho^4)]$$

$$\Psi_6(\rho) = \frac{x^6 \rho^8}{9} (g_1 - g_2) (7 + x^2 \rho^4); \quad \Psi_8(\rho) = \frac{x^8}{9} (g_1 - g_2) \rho^2 \quad (3.6)$$

$\chi_2(\rho)$ получается из $\Psi_1(\rho)$ при замене g_1 и g_2 соответственно на ρ_1 и ρ_2 .

Ортонормированную систему функций (2.1) возьмем в виде

$$\left\{ \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} \varphi^k \cos k\vartheta, \quad \sqrt{\frac{2(m-1)}{\pi}} \varphi^m \cos m\vartheta_0 \right\} \quad (3.7)$$

$$(k, m = 1, 2, \dots)$$

Согласно формуле (2.3) для коэффициентов Фурье получается выражение

$$\begin{aligned} A_{km} = & \frac{\mu R^4 \sqrt{m-1}}{2\pi Q \sqrt{k+1}} \left\{ \frac{1}{9} (\nu_1 + \nu_2) \left(\frac{9 + 4x^2}{(2k-4)(2k+6)} - \frac{12x^2}{(2k+6)(2k+8)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{16x^2}{(2k+8)(2k+10)} + \frac{x^4}{(2k+12)(2k+14)} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{x}{3} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{4}{(2k-4)(2k+6)} - \frac{3}{(2k+6)(2k+8)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{6}{(2k+2)(2k+4)} - \frac{6x^2}{(2k+6)(2k+8)} \right) \right\} \zeta_{km}^{(0)} + \\ & + \left\{ \frac{4x}{9} (\nu_1 + \nu_2) \left(\frac{3p}{(p+4)(p+6)(p+8)} + \frac{x^2(p+4)}{(p+8)(p+10)(p+12)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{9} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{9}{(p+4)(p+6)} - \frac{16x^2}{(p+6)(p+8)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{15x^2}{(p+8)(p+10)} \right) \right\} \zeta_{km}^{(2)} + \left\{ \frac{2x^2(\nu_1 + \nu_2)(p-12)}{9(p+6)(p+8)(p+10)} + \right. \\ & \left. + \frac{7}{9} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{15}{(p+6)(p+8)} - \frac{4x^2}{(p+8)(p+10)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{7x^2}{(p+10)(p+12)} \right) \right\} \zeta_{km}^{(4)} + \frac{x^2}{9} (\nu_2 - \nu_1) \left\{ \frac{7}{(p+8)(p+10)} + \right. \\ & \left. + \frac{x^2}{(p+12)(p+14)} \right\} \zeta_{km}^{(6)} + \frac{x^2(\nu_1 - \nu_2)}{9(p+10)(p+12)} \zeta_{km}^{(8)} \quad (3.8) \end{aligned}$$

где

$$\zeta_{km}^{(0)} = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \pi, & k = m \end{cases}, \quad \zeta_{km}^{(i)} = \begin{cases} 0, & m \neq |k \pm i| \\ \pi/2, & m = |k \pm i| \end{cases} \quad (i = 2, 4, 6, 8; m, k = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

для краткости обозначено $p = k + m$.

После некоторых вычислений находим из (2.8) решение в следующей форме:

$$T^*(p, \vartheta) = T_0 + \Phi_*(\varphi, \vartheta) + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2(1-\nu^2)}}{V\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\sqrt{k+1}} \varphi^k \cos k\vartheta \quad (3.10)$$

ГАС

$$Y_k = \sum_{m=1}^N A_{km} X_m \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_6(z, 0) = & \frac{\pi A_2 R^4}{2Q} \left[\frac{4z^2}{9} (g_1 - g_2) \left| \frac{z(1-z^6)}{36} - \right. \right. \\ & - \frac{1}{4z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k} \rho^{2k}}{k+1} \left(\frac{1-\rho^{2k+2}}{3k+1} - \frac{z^2(1-\rho^{2k+6})}{3k+9} \right) \Bigg] + \\ & + (g_1 + g_2) \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{2z^2}{27} + \frac{z^4}{324} \right) - \left(1 + \frac{4z^2}{9} \right) \frac{z^4}{4} + \frac{4z^2 \rho^6}{27} - \frac{z^2 \rho^8}{9} - \right. \\ & - \frac{z^2 \rho^{12}}{324} + \frac{4z^2 \rho^4}{3} \cos 2i \left(\frac{z^2}{180} - \frac{1}{12} + \frac{\rho^2}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^2 \rho^4}{45} - \frac{z^2 \rho^6}{36} \right) - \\ & - \left. \frac{z^2 \rho^4}{9} \cos 4i \right] \Bigg] + \frac{\pi A_2 R^4 (g_1 - g_2)}{18Q} \left[3z \left(\frac{1-z^2}{12} - \frac{1-z^4}{4} \right) + \right. \\ & + \frac{z^2}{4} \cos 2i \left[(1-z^6) \left(\frac{3z^2}{2} - 2z^2 \rho^4 + \frac{3z^2 \rho^6}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{9}{2} (1-z^2) - 4z^2 (1-z^6) + \frac{5z^4}{2} (1-z^2) - \frac{3}{2} (1-z^6) + 2z^2 (1-z^8) - \\ & - \left. \frac{3z^4}{2} (1-z^{10}) \right] + \frac{z \rho^6}{8} \cos 4i \left[(1-z^6) \left(\frac{3z^2}{2} - \frac{z^2 \rho^4}{3} + \frac{z^2 \rho^6}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{15}{2} (1-z^2) - z^2 (1-z^6) + \frac{7z^4}{6} (1-z^2) - \\ & - \frac{3}{2} (1-z^{10}) + \frac{z^2}{3} (1-z^{12}) - \frac{z^2}{2} (1-z^{14}) \Bigg] + \frac{z^2 \rho^6}{12} \cos 6i \left[(1-z^{12}) \left(\frac{z^2}{2} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{z^2 \rho^4}{18} \right) + \frac{7}{2} (1-z^2) + \frac{z^2}{6} (1-z^6) - \frac{1}{2} (1-z^{10}) - \frac{z^4}{18} (1-\rho^{18}) \Bigg] + \\ & + \frac{z^3 \rho^8}{16} \cos 8i \left[\frac{1}{2} (1-z^2) + \frac{z^2}{18} (1-z^{18}) - \frac{1}{18} (1-z^{10}) \right] \quad (3.12) \end{aligned}$$

Постоянные X_m определяются из уравнения (2.6), где F_m даны в виде

$$\begin{aligned} F_2 = & \frac{1}{2Q} \frac{6\pi z_1 A_2 R^4}{2Q} \left[\frac{2}{9} (z_1 + z_2) \left(1 + \frac{4z^2}{15} \right) + \right. \\ & + (z_1 - z_2) \left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{18} - \frac{z^4}{3} + \frac{z^2}{4} \right) \Bigg] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_4 &= \frac{\sqrt{10\pi\alpha^2\mu}A_2R^4}{2Q} \left| \frac{\alpha(\nu_1 + \nu_2)}{90} + (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha^2}{6} - \frac{2\alpha^8}{11} + \frac{2\alpha^{10}}{13} \right) \right| \\
 F_6 &= \frac{\sqrt{14\pi\alpha^2\mu}A_2R^6}{2Q} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{1}{18} - \frac{\alpha^2}{162} - \frac{\alpha^{11}}{8} + \frac{\alpha^{13}}{9} \right) \\
 F_8 &= \frac{\sqrt{18\pi\alpha^2\mu}A_2R^4}{2Q} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{1}{162} - \frac{2\alpha^{14}}{21} + \frac{2\alpha^{16}}{23} \right) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$F_m = -\frac{2\mu A_2 R^{4+2m-2}}{Q} \sqrt{2\pi(m+1)} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{1}{5m+2} - \frac{\alpha^2}{5m+6} \right) \quad (3.14)$$

($m \neq 2, 4, 6, 8$)

Подставляя из (3.10) в (1.18), получаем уравнение для нахождения параметра Q .

Температуру на оси стержня, то есть при $\rho=0$, обозначим через T_1 . Тогда из (3.10) и (3.12) получаем

$$T_1 = T_0 + \frac{\mu A_2 R^4}{2Q} \left| (g_1 + g_2) \left(\frac{1}{4} - \frac{2\alpha^2}{27} + \frac{\alpha^4}{324} \right) + (g_1 - g_2) \frac{\alpha(2\alpha^2 - 9)}{162} \right| \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (1.18), после вычисления получаем уравнение для нахождения Q в виде

$$Q = 4\pi\alpha^2 R^8 A_1^2 (I^2 - \beta^2), \quad \alpha^2 = M_0^2 / 4\pi\alpha^2 R^8 A_1^2 (I^2 + \beta^2) \quad (3.16)$$

где

$$I = \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{9} + \frac{\alpha^4}{108} \quad (3.17)$$

$$\beta = \frac{l}{2} [(g_1 + g_2) + (\nu_1 + \nu_2) T_1] + \frac{\alpha}{12} [(g_1 - g_2) + (\nu_1 - \nu_2) T_1] \quad (3.18)$$

β выражается через неизвестную величину T_1 . Для нахождения β из (3.15) и (3.18) получаем следующее уравнение:

$$\beta^3 - b_1 \beta + I^3 - b_2 = 0 \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{l}{2} [(g_1 + g_2) + (\nu_1 + \nu_2) T_0] + \frac{\alpha}{12} [(g_1 - g_2) + (\nu_1 - \nu_2) T_0] \\
 b_2 &= b_1 I^2 + \frac{\mu A_2}{8\pi\alpha^2 A_1^2 R^4} \left[\frac{l}{2} (\nu_1 + \nu_2) + \right. \\
 &\left. + \frac{\alpha}{12} (\nu_1 - \nu_2) \right] \left| (g_1 + g_2) \left(\frac{1}{4} + \frac{2\alpha^2}{27} + \frac{\alpha^4}{324} + \frac{\alpha(2\alpha^2 - 9)}{162} (g_1 - g_2) \right) \right| \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Решая уравнение (3.19) и подставляя значение β в (3.16), получаем Q . Используя (3.18), находим T_1 , то есть температуру на оси стержня.

Из (3.15), (3.16) и (3.18) можно получить

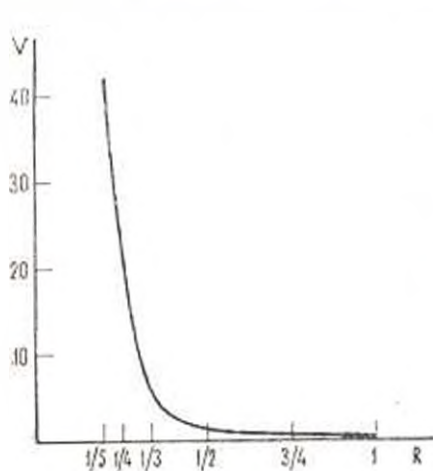
$$M_0 = H \sqrt{\nu [I^2 + (b_1 + \nu_1 \nu)^2]} \quad (3.21)$$

где

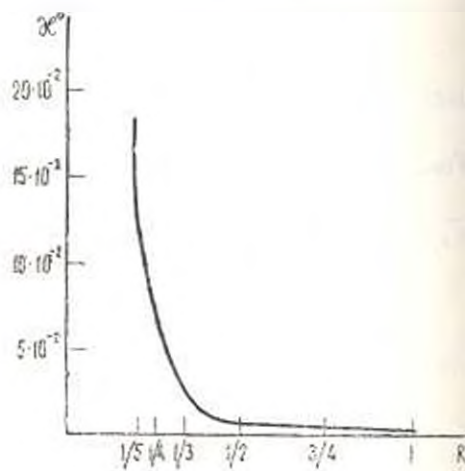
$$H = \left| \frac{16 \pi^{1/2} a_1 c_1 A^2 R^4}{\lambda \omega k_{\tau_0} A_2} \right|^{1/2}, \quad \tau_1 = \frac{l}{2} (i_1 + i_2) + \frac{\pi}{12} (i_1 - i_2) \\ \tau_2 = (g_1 + g_2) \left(\frac{1}{4} + \frac{2x^2}{27} + \frac{x^4}{324} \right) + (g_1 - g_2) \frac{x(2x^2 - 9)}{162} \quad (3.22)$$

Здесь $\nu = T_1 - T_0$ — перепад температур, M_0 — амплитуда момента M .

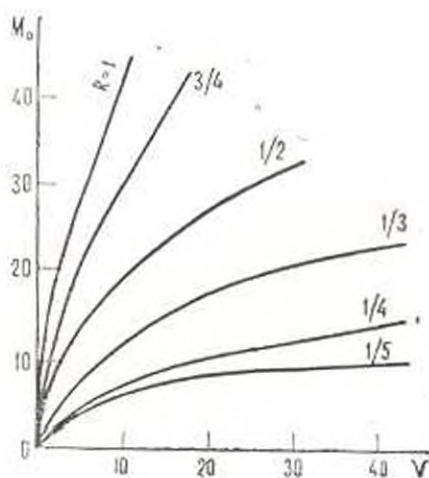
Заметим, что в полученном решении, если принять $|E_1| = |E_2|$, получается решение для изотропного вязко-упругого стержня.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На основании формул (3.15)—(3.18) и (3.21) построен график. На фиг. 1 показано соотношение между перепадом температур τ и величиной R , входящей в уравнение овала, на фиг. 2 — связь между углом закручивания α и величиной R , на фиг. 3 — соотношение между амплитудой момента и перепадом температур.

Ниже даны значения T , и κ^0 в зависимости от R . При этом использованы данные, соответствующие одному из видов полиэтилена [5]

$A_1 = 2A_2$, $B_1 = 2B_2$, $C_1 = 2C_2$, $A_3 = 3.4 \cdot 10^4$ кл/см², $B_3 = 3.87 \cdot 10^2$ кл/см², $C_3 = 3.87$ кл/см² град, $k = 0.000234$ ккал/клм, $u, v = 0.28$ ккал/мчас град

$$\eta = 100 \text{ цг}, T_0 = 20^\circ, M_0 = 10 \left[\frac{\text{кл}}{\text{см}^2} \right] \text{ см}, \lambda = 0.25, \mu = 2$$

$R = 1$	$3/4$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$
$T_1 = 20.0782$	20.2471	21.2512	26.3342	40.0192	68.8750
$\kappa^0 = 2.6 \cdot 10^{-4}$	$8.22 \cdot 10^{-4}$	$4.16 \cdot 10^{-3}$	$2.106 \cdot 10^{-2}$	$6.656 \cdot 10^{-2}$	$16.25 \cdot 10^{-2}$

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Если полученное решение для ортотропного стержня сравнить с решением для изотропного стержня, можно заметить, что в решение для ортотропного стержня входит слагаемое, появляющееся за счет анизотропии.

Если $|E_1| > |E_2|$, то температура в стержне больше, чем при $|E_1| < |E_2|$.

Ериванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 22 IV 1970

Կ. Բ. ՎԵՐԵՇԵԱՆ, Ռ. Ա. ՈՒՆՏԵՅԱՆ

ՄԱՍՈՒՑԻՆ ԱՌԱՋԿԱԿԱՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՊՐԻՋԻՄՏԻՆԻ ԶՈՂԻ ՈՒՈՐՈՒՄԸ ՎԵՐԵՄՈՒՆՈՆ ՈՒԺԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկված է մածուցիկ-առաձուլական օրթոտրոպ ու կլոր կտրվածքով պրիզմատիկ ձողի ոլորումը վիբրացիան ուժի ազդեցության տակ: Ազդող բևոր փոխվում է հաստատուն ամպլիտուդայով, հարմանիկ օրենքով:

Կոմպլեքս մոդուլի բաղադրիչները կապեն կախված են տատանման հաճախականությունից և ջերմաստիճանից, որի հետևանքով դիսսիպատիվ ուժերի աշխատանքի շնորհիվ տեղի է ունենում ջերմության անջատում:

Դիտարկված է ջերմաստիճանի բաշխումը սահմանային ստացիոնար ղեպքում:

Ընդունված է, որ ձողի կոդմնային մակերևույթի վրա ջերմաստիճանը անփոփոխ է և համասար է միջավայրի ջերմաստիճանին: Բացի այդ, ընդունված է, որ ձողի առանցքի երկայնքով ջերմաստիճանը չի փոխվում:

ON TWISTING OF AN ORTHOTROPIC VISCOUS-ELASTIC PRISMATIC ROD UNDER VIBRATIONAL LOAD

G. B. VERMISHIAN, B. A. MELTONIAN

Summary

The twisting of an orthotropic viscous-elastic prismatic rod of non-circular cross-section under vibrational load has been studied. The applied load changes according to the harmonic law with a constant amplitude. The components of the complex modulus essentially depend on the frequency of vibration and temperature, with heat being evolved due to dissipative forces. The distribution of temperature in boundary stationary case has been considered. The temperature on the boundary surface of the rod has been taken invariable and equal to the ambient temperature. Besides, the temperature along the rod's axis is assumed to be invariable.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вермишян Г. Б., Галич А. А. Кручение вязко-упругого призматического стержня при действии вибрационной нагрузки. Изв. АН СССР, МГТ, 1972, № 5.
2. Вермишян Г. Б. Кручение вязко-упругого составного призматического стержня под действием вибрационной нагрузки. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 1.
3. Галич А. А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
4. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
5. Галич А. А., Перлов Н. П. Изгиб балки из полимерного материала под действием вибрационной нагрузки. Инж. ж. МГТ, 1963, № 4.

А. М. СИМОНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕТЬЕЙ СТАДИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ХРОМО-НИКЕЛЕВОЙ СТАЛИ ПРИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ ТЕМПЕРАТУРЫ

Детали машин и энергетических установок, эксплуатируемых в условиях высоких температур, обычно находятся в нестационарном тепловом поле. Вследствие этого вопрос прогнозирования ползучести при нестационарных температурных режимах на основе аппроксимаций ползучести при строго постоянных температурах имеет актуальность.

В ряде экспериментальных исследований [1—4 и др.] показано, что факт циклических теплосмен приводит к ускоренной ползучести. Однако, в работе [5] показано, что для слабо упрочняющихся материалов уравнение теории течения дает вполне удовлетворительное предсказание ползучести при нестационарных температурных режимах и, следовательно, теплосмены не приводят к ускорению ползучести. Аналогичное утверждение делается и в работе [6], где показано, что скорость установившейся ползучести не зависит от истории изменения напряжения и температуры. В работе [7] было показано, что в случае очень медленных изменений температуры гонимостенных образцов колебания температуры не вызывают ускоренной ползучести, вследствие чего делается вывод, что причиной ускоренной ползучести при теплосменах является возникновение температурных напряжений. Итак, вероятно, можно считать, что в первых двух стадиях ползучести температурные колебания при незначительных возникающих температурных напряжениях не должны приводить к ускоренным деформациям ползучести.

Настоящая работа посвящена исследованию ползучести стали X18H10T при многоступенчатых изменениях температуры в третьей стадии, то есть в условиях, когда ускоренная ползучесть имеет место и без колебаний температуры.

1. О методике экспериментальных исследований

Испытания проводились на цилиндрических образцах с диаметром 8 мм из стали X18H10T. Образцы вытачивались при непрерывной подаче масла на обрабатываемую поверхность, что препятствовало возникновению местных температурных градиентов и остаточных напряжений. Эксперименты были проведены при температурах в диапазоне 680—720 °С, при этом явление окалинообразования не учитывалось, так как, согласно [8], окалинообразование образцов из стали X18H10T с диаметром 8 мм может привести лишь к 0.06% уменьшения первоначальной площади поперечного сечения образцов.

Температура измерялась в непосредственной близости от поверхности образца и регулировалась путем периодического включения и выключения нагревательных устройств и печи, при этом имели место колебания $\pm 2^\circ\text{C}$ с периодом около 2 мин. «Ступенчатое» изменение температуры осуществлялось с максимальной скоростью $\sim 4^\circ/\text{мин}$. Как известно [9], температурное поле $T(r, t)$ в длинном цилиндре с радиусом R при начальной постоянной температуре T_0 и при заданной скорости k изменения температуры поверхности определяется по формуле

$$T(r, t) = T_0 + k \left(t + \frac{R^2 - r^2}{4\chi} \right) + \frac{2k}{\alpha\chi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 z_n^2 t} \frac{J_0(r z_n)}{z_n^2 J_1(R z_n)} \quad (1.1)$$

где χ — коэффициент тепловой диффузии, J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, z_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(R z_n) = 0$. При установившемся тепловом потоке имеет место

$$T(r, t) = T_0 + k \left(t + \frac{R^2 - r^2}{4\chi} \right) \quad (1.2)$$

Принимая, что в процессе изменения температуры действует упругий закон, получим следующее выражение для температурных напряжений

$$\sigma_r = \frac{E\alpha k}{8\chi} (R^2 - 2r^2) \quad (1.3)$$

что для стали X18H10T при данных $E(700^\circ) = 1.5 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $R = 4 \text{ см}$, $\alpha(700^\circ\text{C}) = 18.6 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$, $k = 4 \frac{^\circ\text{рад}}{\text{мин}}$, $\chi = 0.654 \text{ см}^2/\text{сек}$ дает $\sigma_{r_{\text{min}}} = -\sigma_r(r = R) = -92 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_{r_{\text{max}}} = \sigma_r(r = 0) = 92 \text{ кг/см}^2$. Это предельные значения температурных напряжений, которые могли возникнуть в образце лишь в течение 5–10 мин при изменении температуры и на порядок меньше прилагаемых к образцу растягивающих напряжений. Отметим, что при мгновенном изменении температуры поверхности на 20°C температурные напряжения могли достигнуть значения $\alpha \cdot 20^\circ\text{C} \cdot E = 560 \text{ кг/см}^2$.

Таким образом, при увеличении скорости изменения температуры k температурные напряжения, пропорционально зависящие от k , могут оказаться существенными и, кроме того, согласно принципу Онзагера [11], скорость изменения температуры влияет на реологические свойства материалов.

Поскольку, как показано в [10], основной причиной разброса экспериментальных данных является неточность температуры проведения эксперимента, температура у каждого испытуемого образца контролировалась с помощью одного и того же милливольтметра с учетом поправок на термопары.

2. О теоретических предположениях

Как показано в работе [12], деформации ползучести $\varepsilon_c(t)$ стали X18H10T при постоянных напряжениях и температуре аппроксимируются уравнением

$$\varepsilon_c(t) = \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \alpha t + \varepsilon_{III}(t) \quad (2.1)$$

где первый член (β — ползучесть) представляет собой затухающие деформации ползучести, частично обратимые при разгрузке, αt — деформации ползучести с постоянной скоростью, $\varepsilon_{III}(t)$ — деформации ползучести с возрастающей скоростью, являющиеся причиной возникновения третьей стадии ползучести. В работе [13] показано, что в случае уменьшения температуры β -ползучесть не является обратимой и было предложено уравнение, учитывающее «замораживание» этой доли ползучести при уменьшении температуры, вырождающееся при отсутствии уменьшения температуры в обычное наследственное уравнение с экспоненциальным ядром. В условиях проведенных в настоящей работе экспериментов β -ползучесть была незначительной и завершалась уже в начальной стадии эксперимента, что облегчало ее учет. Скорость установившейся ползучести во второй стадии, аналогично [6], принята зависящей лишь от действующего напряжения $\sigma(t)$, независимо от истории нагружения. Деформации с возрастающей скоростью $\varepsilon_{III}(t)$, как показано в [12, 14], аппроксимируются выражением

$$\varepsilon_{III}(t) = F(\sigma, T) t^3 \quad (2.2)$$

$$F(\sigma, 700^\circ\text{C}) = k\sigma^{13.3}$$

Исследования деформации $\varepsilon_{III}(t)$ при 700°C и при одноступенчатых возрастаниях и убываниях во времени напряжений [14], а также при неравномерно-циклических приложениях напряжения, чередующихся с полной разгрузкой [12], и при неравномерно-циклических ступенчато-изменяющихся напряжениях [15] показали, что выражение (2.2) для случая переменных напряжений может быть обобщено в виде

$$\varepsilon_{III}(t) = 3k \int_0^t \sigma^{\lambda-1}(\tau) \left| \int_0^{\tau} \sigma^{\nu}(\xi) d\xi \right|^{\frac{1}{\nu}} d\tau \quad (2.3)$$

где $\lambda = 10$, $\nu = 165$. Легко видеть, что при $\lambda = \nu = 4.4(3)$ выражение (2.3) является обобщением (2.2) согласно гипотезе уравнивания состояния [16]. Существенным здесь является пытающийся из (2.3) и экспериментально подтвержденный в [12] факт о том, что при действии некоторого постоянного напряжения, чередующегося с полной разгрузкой (отдыхом), деформации ε_{III} (до 5—6%) определялись лишь продолжительностью нахождения образца под нагрузкой независимо от наличия, продолжительности отдыхов и равномерности циклов. Следует отметить, однако, что отсюда нельзя делать вывод о независимости долгодечности стали от наличия отдыхов, поскольку, как показано в [17], нагружение, чередующееся с разгрузкой для той же стали лишь при несколько более низких температурах

сокращает срок службы, то есть, вообще говоря, достигнутые деформации ползучести не определяют однозначно вопрос о разрушении.

Для обобщения (2.2) на случай переменных температур, в случае подобия кривых ползучести $\varepsilon_{\text{пл}}(t)$, естественным представляется операции, использованные в (2.3), применить не только к $\varepsilon_{\text{пл}}(t)$, но и вообще к функции $F(\sigma, T)$: при этом получим

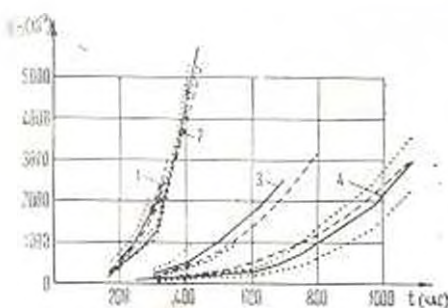
$$\varepsilon_{\text{пл}}(t) = 3 \int_0^t F^{\frac{1}{1-n}}[\sigma(\tau), T(\tau)] \left\{ \int_0^t F^{\frac{n}{1-n}}[\sigma(\tau), T(\tau)] d\tau \right\}^n d\tau \quad (2.4)$$

3. Обсуждение экспериментальных данных

Эксперименты были проведены при напряжении 9.3 кг/мм^2 при 700°C и 720°C , при напряжении 11.15 кг/мм^2 при 680°C и 700°C , при напряжении 9.3 кг/мм^2 и согласно двум различным программам неравномерно-циклических ступенчатых изменений температуры от 700°C до 720°C и обратно, а также при напряжении 11.15 кг/мм^2 согласно двум программам неравномерно-циклических изменений температуры от 680°C до 700°C и обратно. Продолжительность цикла изменялась в процессе опыта в пределах от 24 до 96 час. На основе 4—17 испытаний для каждой пары постоянных σ и T получены нижеследующие значения $F(\sigma, T)$:

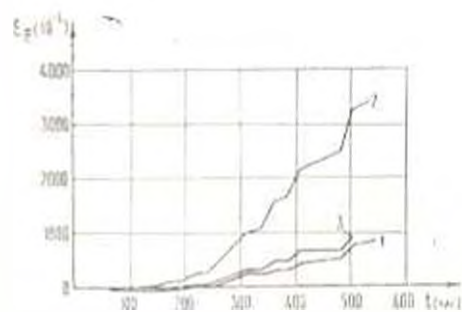
$$\begin{aligned} F(9.3 \text{ кг/мм}^2, 700^\circ\text{C}) &= \exp(-23.553) \text{ час}^{-1} \\ F(9.3 \text{ кг/мм}^2, 720^\circ\text{C}) &= \exp(-21.258) \text{ час}^{-1} \\ F(11.15 \text{ кг/мм}^2, 680^\circ\text{C}) &= \exp(-24.465) \text{ час}^{-1} \\ F(11.15 \text{ кг/мм}^2, 700^\circ\text{C}) &= \exp(-21.132) \text{ час}^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

На фиг. 1 приведены усредненные экспериментальные кривые (сплошные линии) и теоретические кривые (штриховые линии), подсчитанные по формуле (2.2) при значениях (3.1); пунктирными линиями ограничены области нахождения соответствующего математического ожидания с определенной вероятностью (0.9 для кривых 1 и 3, 0.683 для кривых 2 и 4).



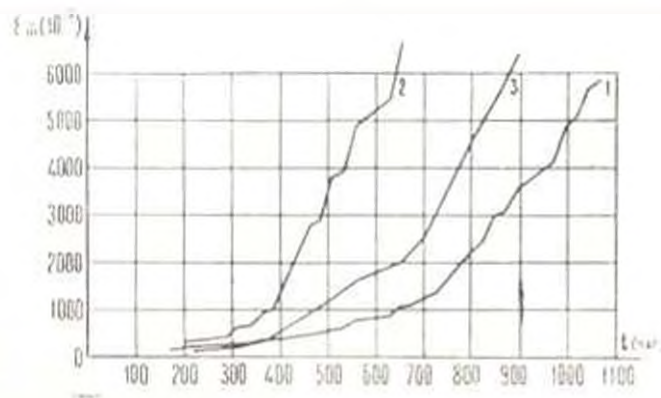
Фиг. 1. Кривые ползучести
1) при $\sigma = 11.15 \text{ кг/мм}^2$, $T = 700^\circ\text{C}$
2) при $\sigma = 9.3 \text{ кг/мм}^2$, $T = 720^\circ\text{C}$
3) при $\sigma = 9.3 \text{ кг/мм}^2$, $T = 700^\circ\text{C}$
4) при $\sigma = 11.15 \text{ кг/мм}^2$, $T = 680^\circ\text{C}$

На фиг. 2—5 приведены экспериментальные кривые (1) деформаций $\varepsilon_{\text{пл}}(t)$ при многоступенчатых изменениях температуры, а также теоретические кривые (2), построенные согласно (2.4). Легко видеть, что во всех

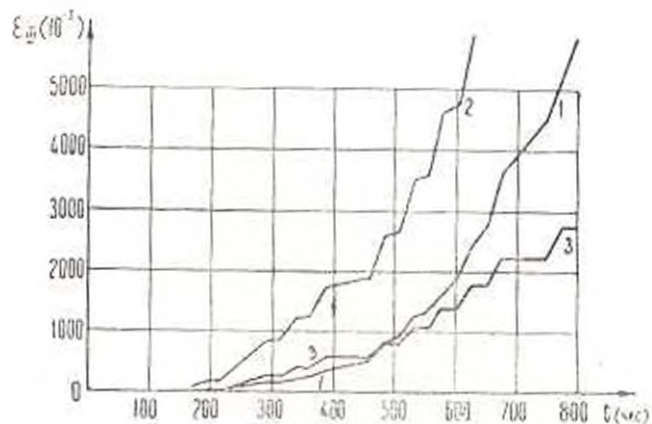


Фиг. 2.

Кривые ползучести $\epsilon_{III}(t)$ при напряжении 11.15 кг/мм^2 и при изменяющихся температурах от 700°C до 680°C и обратно.

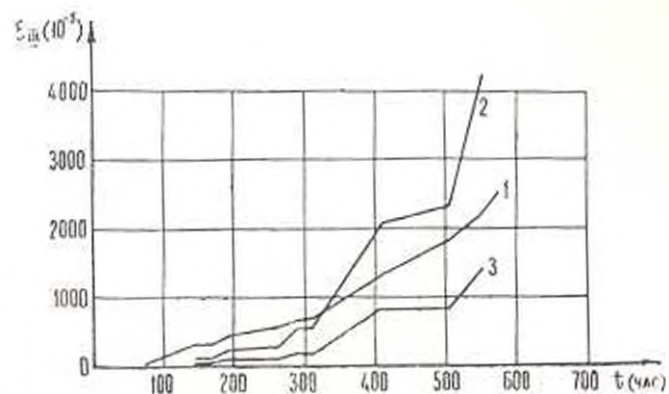


Фиг. 3.



Фиг. 4.

Кривые ползучести $\varepsilon_{кр}(t)$ при напряжении 9.3 кПа и при изменениях температуры от 700°C до 720°C и обратно.



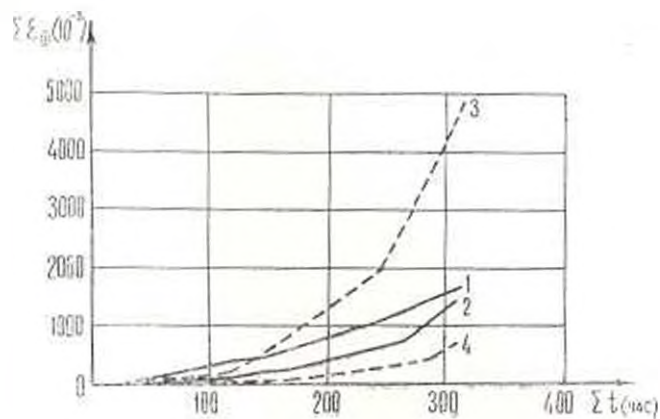
Фиг. 5.

рассмотренных случаях уравнение (2.4) предсказывает более интенсивную ползучесть, чем наблюдается в действительности, и, следовательно, в известной мере, можно гарантировать, что время достижения некоторой деформации ползучести будет не меньше предсказанной уравнением (2.4). Пересечение усредненной кривой (1) с осью t , имеющее место на фиг. 2, означает тот факт, что в данном случае колебания температуры привели к скоростям ползучести даже меньшим установившимся. Линиями (3) на фиг. 2—5 показаны теоретические кривые $\varepsilon_{III}(t)$, построенные при пренебрежении ползучестью на ступенях меньшей температуры и при пренебрежении влиянием ее на последующие деформации ε_{III} , что, как показано [12], соответствует замене ползучести на ступенях меньшей температуры полной разгрузкой.

Легко видеть, что при пренебрежении ползучестью на ступенях меньшей температуры приходим к более точному описанию экспериментальных данных. Отсюда естественным было бы предположить, что при многоступенчатых изменениях температуры следует определять общую продолжительность нахождения образца на ступенях более высокой температуры ($\Sigma t_{2, \dots, n}$) и затем соответствующую деформацию ползучести брать из кривой $\varepsilon_{III}(t = \Sigma t_{2, \dots, n})$ при этой постоянной температуре. Однако, как будет показано ниже, такое предположение неверно.

На фиг. 6 и 7 приведены экспериментальные и построенные согласно (2.4) теоретические кривые в координатных осях $\Sigma t_{2, \dots, n}$ (доля деформации ε_{III} , накопленная при 720°C и при $\sigma = 9.3 \text{ кг/мм}^2$) — $\Sigma t_{2, \dots, n}$ (общая продолжительность нахождения образца при 720°C и $\sigma = 9.3 \text{ кг/мм}^2$, а также в координатных осях $\Sigma t_{2, \dots, n} - \Sigma t_{2, \dots, n}$, то есть в соответствующих координатах при 700°C и $\sigma = 9.3 \text{ кг/мм}^2$ для двух программ многоступенчатого изменения температуры. Из сравнения кривых можно заключить, что доли деформаций, накапливаемые в образце на ступенях $T = 700^\circ\text{C}$, отнюдь не являются пренебрежимо малыми в сравнении с деформациями, накапливаемыми при 720°C , несмотря на то, что в условиях постоянных температур (фиг. 1) деформации ε_{III} при 720°C существенно велики в сравнении с деформациями ползучести ε_{III} при 700°C . При этом (фиг. 6, 7) деформации ползучести при 700°C почти в два раза превосходят подсчитанные по формуле (2.4), а при 720°C , наоборот, значительно меньше теоретических.

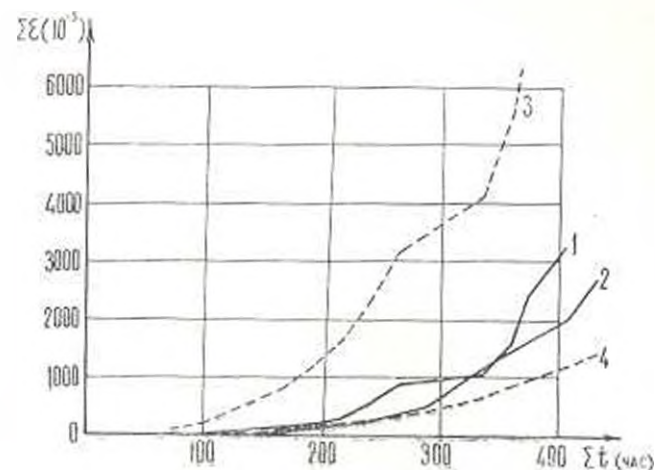
Таким образом, в условиях постоянных напряжений деформации ползучести в третьей стадии при низких температурах упрочняют материал с точки зрения сопротивляемости ползучести при более высоких температурах, а деформации ползучести при высоких температурах, наоборот, разупрочняют материал с точки зрения сопротивляемости ползучести при более низких температурах. Необходимо отметить, что этот вывод касается лишь деформаций с возрастающей скоростью, соответствующих третьей стадии ползучести, и для ползучести в первых двух стадиях, как показано, например, в [13], имеет место противоположный эффект, а именно, при уменьшении температуры деформации ползучести почти останавливаются и затем, ускоряясь, протекают со скоростью, меньшей соответствующей скорости на второй стадии ползучести, что, в известной мере, аналогично



Фиг. 6.

Сравнение долей деформаций $\epsilon_{\text{кр}}$ накопленных при данной температуре и условиях ее ступенчатых изменений.

1 и 2 — экспериментальные, 3 и 4 — теоретические кривые соответственно при 720 °С и при 700 °С.



Фиг. 7.

инкубационном периоде, наблюдавшемся при частичных разгрузках [18, 19].

Рассмотрим эти эффекты, исходя из физических представлений. Как указано в работе [16, стр. 224], скорость ползучести может быть определена как функция текущих напряжений и температуры, а также некоторых величин, определяющих структуру материала в текущий момент, в числе которых, несомненно, являются плотность линейных дислокаций и плотность препятствующих их движению закреплений в виде границ зерен, пересечений дислокаций или точечных дефектов (внедренные или испорченные атомы на поверхности движения дислокаций и т. д.).

В первой стадии ползучести накопление препятствий, сопровождающее деформации ползучести, оказывается более эффективным, чем размножение самих дислокаций^{*)}, причем этот процесс тем интенсивнее, чем выше температура. Вследствие этого при понижении температуры в процессе опыта от значения T_1 до T_2 ($T_1 > T_2$) структура материала, образовавшаяся во время ползучести при T_1 , оказывается более жесткой, чем та, которая могла образоваться во время ползучести при T_2 , чем и определяется замедление ползучести в первой стадии при уменьшении температуры.

В третьей стадии ползучести в местах скопления дислокаций концентрируются вакансии [21], ослабляющие границы зерен и способствующие трещинообразованию. Этот процесс диффундирования препятствий, способствующий более интенсивному движению и размножению дислокаций, естественно, протекает тем интенсивнее, чем выше температура. Таким образом, ползучесть в третьей стадии при высокой температуре должна разупрочнять материал с точки зрения сопротивляемости ползучести больше, чем при относительно низкой, что и было здесь получено экспериментально. Отметим, что эта интерпретация вполне уязвывается с экспериментальным результатом о повышении долговечности кристалла с увеличением размера зерна [17] и с тезисом Бейли, указывающим, что длительное разрушение, сопровождающееся продолжительной третьей стадией ползучести, происходит между зернами кристалла [22, стр. 265].

4 Основные выводы

1. В третьей стадии высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали теплосмекты, сопровождающиеся возникновением незначительных температурных напряжений, в процессе испытания не приводят к дополнительному росту скорости ползучести.

2. Основное операторное уравнение ползучести, хорошо описывающее деформации ползучести при переменных напряжениях, предсказывает более интенсивный рост ползучести в третьей стадии, чем это имеет место в действительности.

3. Деформации ползучести в третьей стадии при относительно низких температурах являются более благоприятными с точки зрения последую-

^{*)} Как известно [20] линейные дислокации способны неограниченно размножаться с помощью, например, источника Фрейли-Рида.

щей сопротивляемости материала ползучести, чем аналогичные деформации при относительно высоких температурах.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 3 VI 1976

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ԽՐՈՄԱՆԻԿԵԼԱՅԻՆ, ՊՈԼՊԻԼՆԻ ԲԱՐՁՐՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՍՈՎԷԻ ԵՐՐՈՐԴ-
ՓՈԼԻԷ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԶԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ԲԱԶՄԱՍՏԻՃԱՆ
ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳԵՊԷՐՈՒՄ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Իրաարկվում է X18H10T պողպատի սողքը չերմաստիճանային փոփոխությունների և անփոփոխ լարումների ազդեցության դեպքում:

Յույց է տրված, որ երրորդ փուլում համեմատորար ցածր չերմաստիճաններում առաջացած սողքի դեֆորմացիաները ավելի են բարձրացնում նյութի դիմադրողականությունը քան թե համեմատաբար բարձր չերմաստիճաններում առաջացած սողքի դեֆորմացիաները, որը հակառակն է սողքի առաջին երկու փուլերում տեղի ունեցած երևույթներին: Տրված է համեմատությունը հեղինակի կողմից անցյալում առաջարկված օպերատորային հավասարման կիրառման եղանակի օգնությամբ ստացված արդյունքների հետ:

AN INVESTIGATION ON THIRD STAGE OF HIGH-TEMPERATURE CREEP OF CHROME-NICKEL STEEL IN CONDITIONS OF STEP CHANGES IN TEMPERATURES

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

The creep of steel X18H10T on constant strain of tension and repeated variable temperature in conditions of accelerated creep is investigated. The operating equation to describe creep at variable temperatures is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковал Р. Г., Хейт В. Б. Влияние циклических перегрузок на скорости ползучести и время до разрушения никонеля при 925° и 980°. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. М.—А., Госэнергоиздат, 1960.
2. Гусов А. Б. Поведение жаропрочных материалов при циклических температурах и напряжениях. Сб. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. М.—А., Госэнергоиздат, 1960.
3. Смит Г., Гаустон Е. Опыты по изучению влияния переменных напряжений и температур на длительную прочность сталей. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. М.—А., Госэнергоиздат, 1960.

4. Гварниери Г. Характеристики длительной прочности листовых материалов при циклических нагрузках и температурах. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. М.—Л., Госэнергиздат, 1960.
5. Соснин О. В. О ползучести слабо упрочняющихся материалов при нестационарных температурно-силовых режимах. Проблемы прочности, 1972, № 1.
6. Герберт Д. С., Армстронг А. И. Испытание на ползучесть сплавов никоник при изменяющихся напряжениях и температуре. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. М.—Л., Госэнергиздат, 1960.
7. Brophy G. R., Furman D. E. The Cyclic Temperature Acceleration of Strain in Heat-Resisting Alloys. Trans. ASM, 1942, v. 30.
8. Никитин В. И., Комиссарова Н. И., Панкратьева Н. В. Экспериментальная проверка параметрического метода расчета жаростойкости материалов при переменной температуре. Физико-химическая механика материалов, 1973, т. 9, № 5.
9. Кирслоу Г., Ексер А. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
10. Mathonet J., Caubo M. The temperature, a scattering parameter of the creep-rupture test-results. „Met. Repts. C.R.M. Benolux“, 1973, № 34.
11. Lemaitre Jean, Hulley Jean Claude, Polscella Humbert. Influence du parametre vitesse de temperature sur le comportement des solides elasto-visko-plastiques. „C. r. Acad. sci.“, 1963, v. 267, № 15.
12. Симонян А. М. Исследование высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали в условиях ступенчатых изменений напряжения. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, XXVII, № 4.
13. Симонян А. М. Исследование ползучести стали X18H10T при переменных температурах. Известия АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 2.
14. Симонян А. М. Исследование ползучести стали X18H10T при больших деформациях. Проблемы прочности, 1973, 6.
15. Симонян А. М. Исследование высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали при циклических изменениях напряжения. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. XXIX, № 3.
16. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
17. Куроп В. Д., Мельников Г. П., Соколов А. А. Влияние структуры материала на длительную прочность. Научные труды ин-та механики МГУ, 1973, № 23.
18. Davies P. W., Nelves G., Williams K. R., Wilshire B. Stress-change experiments during high-temperature creep of copper, iron and zinc. „Metal. Sci. J.“, 1973, 7, May.
19. Vidal G. Sur le fluage periodique des alliages resistants a chaud. Revue de Metallurgie, 1956, v. 53, № 7.
20. Коттрелл А. Х. Строение металлов и сплавов. М., Металлургиядат, 1961.
21. Трунин Н. И., Миркин И. А. Исследование разрушения стали при ползучести. Металловедение и обработка металлов, 1958, № 11.
22. Олинк И. А., Иванова В. С., Бурацкий В. В., Геминюл В. Н. Теория ползучести и длительной прочности металлов. М., Металлургиядат, 1959.

К. С. КАРАПЕТЯН, Р. А. КОТИКЯН, Р. М. АГАДЖАНИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТИМЫХ ДЕМОРМАЦИЙ ДЛИТЕЛЬНО РАСТЯНУТОГО БЕТОНА ПОСЛЕ ЕГО РАЗГРУЗКИ

Исследования, посвященные изучению обратимости упруго-мгновенных деформаций и деформаций ползучести после разгрузки длительно нагруженного бетона, пока весьма малочисленны. При этом существующие исследования, в основном, относятся к изучению обратимости деформаций бетона после предшествующего длительного сжатия.

В настоящей работе приводятся результаты большой серии опытов по исследованию обратимости упруго-мгновенных деформаций и деформаций ползучести длительно растянутого бетона в зависимости от возраста (τ) и уровня напряжения (σ , R_n) в момент длительного нагружения. На длительное растяжение опытные образцы загружались как постоянными, так и ступенчато-возрастающими растягивающими напряжениями.

Испытанию подвергались большие восьмерки сечением 10×10 см, высотой 60 см, изготовленные из тяжелого бетона. Для приготовления бетона применялись: базальтовый щебень, кварцевый песок и портланд-цемент Аракатского завода (г. Ереван) марки 500. Состав бетона (по массе) 1:2, 13:2,91, В Ц = 0,635.

Для постановки намеченных программой опытов из пяти замесов бетона было изготовлено 150 восьмерок и необходимое количество кубиков с ребром 10 см. Образцы бетонировались в вертикальных формах с продолжительностью вибрации 30 сек. После расформовки образцов, которая осуществлялась через 2 сут, все они находились в помещении лаборатории, где проводились длительные опыты, в процессе которых температура воздуха составляла $T = 21 \pm 3^\circ \text{C}$, а относительная влажность $\mu = 70 \pm 10\%$.

Для исследования ползучести бетона при постоянных и ступенчато-возрастающих растягивающих напряжениях образцы были загружены на длительное растяжение в возрасте 7, 28, 91 и 286 сут. Образцы, загруженные в каждом возрасте, принадлежали одному замесу бетона. После наблюдений за длительными деформациями все образцы были разгружены и велись наблюдения за восстановлением упруго-мгновенных деформаций и деформаций ползучести. Обратимые деформации ползучести образцов, загруженных в возрасте 7 сут, не измерялись.

Результаты исследования ползучести бетона по данным этих опытов рассмотрены в работе [4], где была подробно описана и методика этих опытов.

Как известно, в процессе длительного сжатия или растяжения под действием внешней нагрузки физико-механические свойства бетона изменяются [2—3, 5—6]. Обратимость упруго-мгновенных деформаций и деформаций

ползучести тесно связана с изменением физико-механических свойств бетона, вызванным не только его твердением, но и длительным нагружением.

Влияние длительного растяжения на прочность и модуль деформаций бетона изучалось в работах [2, 5—6]. Опыты показали, что длительное растяжение может привести как к увеличению, так и к снижению прочности и модуля деформаций бетона при растяжении.

В наших опытах после разгрузки образцов и измерения обратимых упруго-мгновенных деформаций и деформаций ползучести все образцы были испытаны на растяжение до разрушения с целью изучения влияния длительного растяжения на прочность и модуль деформаций бетона. Обратимость деформаций бетона тесно связана с закономерностями влияния длительного нагружения на его физико-механические свойства. Учитывая это, мы сперва рассмотрим результаты опытов о влиянии длительного растяжения на прочность и модуль деформаций бетона.

Экспериментальные данные подвергались статической обработке по методике [8]. Показатели точности в большинстве случаев не превышали 7%. Кривые полных деформаций образцов при испытании до разрушения аппроксимировались корреляционным уравнением

$$\varepsilon = \frac{a \tau / R_p}{1 - b \tau / R_p} \quad (1.1)$$

Опытные постоянные a и b определялись путем приведения уравнения (1.1) к линейному, учитывая, что между обратными значениями ε и τ / R_p существует линейная зависимость. При этом было установлено, что корреляция между обратными значениями ε и τ / R_p является существенно линейной.

Модули полных деформаций по касательной определялись по формуле

$$E = \frac{R_p}{a} \left(1 - b \frac{\varepsilon}{R_p} \right)^2 \quad (1.2)$$

Прочностные показатели исследованного бетона по данным испытаний всех образцов приведены в табл. 1, откуда ясно видны и уровни напряжений образцов, нагруженных как постоянными, так и ступенчато возрастающими растягивающими напряжениями. Отметим, что в возрасте 7 и 28 сут ступенчатое повышение нагрузки производилось равными ступенями через каждые 15 сут, а в возрасте 286 сут — через 45 сут. Что касается образцов, нагруженных в возрасте 91 сут ступенчато-возрастающими нагрузками 0.2—0.4; 0.2—0.5—0.8 и 0.2—0.3—0.6—0.8, то в этих случаях каждая последующая ступень нагрузки прикладывалась через 30 сут после приложения предыдущей до этого ступени.

По данным табл. 1 нагружение образцов в возрасте 7 сут длительной растягивающей постоянной нагрузкой не сказалось отрицательно на прочности бетона на растяжение. Наоборот, прочности образцов, нагруженных уровнями напряжений 0.2 и 0.4, возросли соответственно на 18 и 10%. Что касается образцов, нагруженных уровнями напряжений 0.6 и 0.8, то в этих случаях длительное растяжение практически не сказалось на прочности бе-

тона. При загрузке бетона в возрасте 7 сут ступенчато-растягивающими напряжениями по режимам 0.2—0.4—0.6 и 0.2—0.4—0.6—0.8 положительный эффект длительного растяжения больше, чем при загрузке уровнями напряжений 0.6 и 0.8. Все это весьма закономерно и объясняется тем, что при загрузке бетона в молодом возрасте (7 сут) благодаря дальнейшему интенсивному росту его прочности во времени, уровень напряжения быстро падает. При этом во всех случаях до загрузки последней ступени ступенчато-возрастающей нагрузки уровень напряжения в режимных образцах будет меньше, чем в образцах, загруженных сразу максимальными уровнями напряжений.

Таблица 1

Влияние длительного растяжения на прочность бетона

Возраст бетона (сут) в момент длительного нагружения в сут	Время нахождения образцов под длительной нагрузкой в сут	Возраст бетона к моменту испытания до разрушения в сут	Уровень напряжения от длительной растягивающей нагрузки	R_p в кгс/см^2	Соотношение прочностей образцов, подорванных и неподвергнутых длительному растяжению
7	258	283	0	12.7	1.00
			0.2	15.0	1.18
			0.4	14.0	1.10
			0.6	12.8	1.01
			0.8	12.9	1.02
			0.2—0.4	13.2	1.01
			0.2—0.4—0.6	14.4	1.13
			0.2—0.4—0.6—0.8	15.3	1.22
28	588	764	0	15.8	1.00
			0.2	14.6	0.92
			0.4	12.0	0.76
			0.6	13.5	0.85
			0.2—0.4	14.1	0.90
			0.2—0.4—0.6	12.8	0.81
91	523	824	0	15.4	1.00
			0.2	14.3	0.93
			0.4	15.1	1.00
			0.6	14.5	0.94
			0.8	15.1	1.00
			0.9	15.7	1.02
			0.2—0.4	16.0	1.04
			0.2—0.5—0.8	15.6	1.01
			0.2—0.6—0.8	13.9	0.90
			0.2—0.3—0.6—0.8	18.3	1.19
286	321	822	0	15.4	1.00
			0.2	15.3	0.99
			0.4	14.0	0.91
			0.6	15.4	1.00
			0.8	15.1	0.98
			0.2—0.4	14.7	0.95
			0.2—0.4—0.6	15.7	1.02
			0.2—0.4—0.6—0.8	15.7	1.02

Как и следовало ожидать, при загрузке бетона в более позднем возрасте положительный эффект длительного растяжения уменьшается и наблюдается спад его прочности на растяжение. Однако, в большинстве случаев снижение прочности незначительно, о чем свидетельствуют прочно-

стые показатели образцов, загруженных в возрасте 29, 91 и 286 сут (табл. 1).

Рассмотрим теперь, как влияет длительное растяжение на модуль полных деформаций бетона при растяжении. По данным табл. 2 длительное растяжение как постоянным, так и ступенчато-возрастающими напряжениями привело к существенному изменению модуля полных деформаций бетона при растяжении.

Таблица 2
Влияние длительного растяжения на модуль деформации бетона при растяжении

Возраст в сут	Уровень напряже- ния от длительной растягивающей на- грузки	Модуль полных дефор- маций в тис. см ² при уровне напряжения				Отношение модуля полных де- формаций образцов, подвергнутых длительному растяжению, к мо- дулю полных деформаций образ- цов, не подвергнутых длительно- му растяжению при уровне на- пряжения			
		0	0,25	0,50	0,75	0	0,25	0,50	0,75
7	0	191	137	92	56	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,2	236	218	159	109	1,50	1,59	1,73	1,95
	0,4	241	193	150	113	1,25	1,41	1,63	2,02
	0,6	251	201	157	118	1,31	1,47	1,71	2,11
	0,8	164	147	131	116	0,85	1,07	1,42	2,07
	0,2-0,4	313	240	176	122	1,64	1,75	1,91	2,18
	0,2-0,4-0,6	244	149	158	122	1,28	1,45	1,72	2,13
	0,2-0,4-0,6-0,8	247	257	171	137	1,29	1,51	1,85	2,45
28	0	230	140	160	138	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,2	280	223	172	138	1,22	1,57	1,98	1,90
	0,4	255	169	143	96	1,15	1,05	0,90	0,73
	0,6	224	185	150	119	0,97	0,97	0,94	0,88
	0,2-0,4	260	215	175	138	1,13	1,13	1,09	1,00
	0,2-0,4-0,6	230	214	199	185	1,00	1,13	1,24	1,31
91	0	250	238	209	190	1,00	1,04	1,00	1,00
	0,2	250	210	166	120	1,12	0,96	0,79	0,63
	0,4	280	239	202	168	1,12	1,04	0,97	0,88
	0,6	214	190	167	146	0,86	0,83	0,80	0,77
	0,8	200	162	128	98	0,80	0,71	0,61	0,52
	0,9	201	180	161	144	0,80	0,79	0,77	0,76
	0,2-0,4	260	210	166	127	1,04	0,92	0,79	0,67
	0,2-0,5-0,8	200	184	169	155	0,80	0,80	0,81	0,92
	0,2-0,6-0,8	210	194	179	165	0,84	0,85	0,86	0,87
	0,2-0,3-0,6-0,8	254	218	185	155	1,02	0,95	0,89	0,82
286	0	250	209	209	190	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,2	280	230	180	149	1,12	1,00	0,86	0,78
	0,4	320	270	230	192	1,28	1,18	1,10	1,01
	0,6	250	240	230	221	1,00	1,05	1,10	1,16
	0,8	222	210	200	190	0,89	0,92	0,96	1,00
	0,2-0,4	240	234	188	142	1,16	1,02	0,89	0,75
	0,2-0,4-0,6	260	214	172	136	1,01	0,93	0,82	0,72
	0,2-0,4-0,6-0,8	250	220	209	190	1,00	1,00	1,00	1,00

Как видно из табл. 2, при загрузении образцов в возрасте 7 сут постоянными растягивающими нагрузками модуль деформаций бетона больше всего вырос в случае тех образцов, для которых уровень напряжения в момент длительного растяжения составлял 0,2. При этом, положительный эффект длительного растяжения тем больше, чем выше уровень

5 Известия АН Армянской ССР, Механика, № 2

кратковременной растягивающей нагрузки при испытании до разрушения. Рост модуля деформаций бетона наблюдается и по данным испытаний образцов, нагруженных уровнями напряжений 0,4, 0,6 и 0,8, однако, положительный эффект длительного растяжения с повышением уровня напряжения уменьшается. Согласно данным табл. 2, влияние длительного растяжения существенно зависит также и от режима нагружения образцов. При нагружении образцов ступенчато-возрастающими растягивающими нагрузками прирост модуля деформаций гораздо больше, чем при нагружении постоянными растягивающими нагрузками.

Рассматривая модули деформаций образцов, нагруженных в возрасте 28 сут уровнем напряжения 0,2, нетрудно заметить, что в этом случае положительный эффект длительного растяжения намного меньше, чем в случае нагружения образцов в возрасте 7 сут тем же уровнем напряжения. Нагружение же образцов сразу уровнями напряжений 0,4 и 0,6 в возрасте 28 сут приводит к некоторому снижению модуля деформаций бетона, а при ступенчатом повышении растягивающей нагрузки по режимам 0,2—0,4 и 0,2—0,4—0,6 модуль деформаций бетона возрастает.

Рассмотрим теперь, как влияет длительное растяжение на модуль деформаций бетона при $t=91$ сут (табл. 2). В этом случае независимо от уровня напряжения и режима нагружения всегда наблюдается спад модуля деформаций. При $t=91$ сут наблюдается некоторое различие во влиянии разных режимов нагружения ступенчато-возрастающими растягивающими напряжениями. Так, например, при режиме 0,2—0,3—0,6—0,8 отрицательное влияние длительного нагружения на модуль деформаций несколько меньше, чем при нагружении по режимам 0,2—0,5—0,8 и 0,2—0,6—0,8. Таким образом, и в этом случае отрицательное влияние длительного растяжения при ступенчатом повышении напряжения несколько меньше, чем при нагружении бетона сразу постоянной растягивающей нагрузкой, величина которой равна максимальной нагрузке при ступенчатом нагружении.

Рассматривая, наконец, данные модулей деформаций образцов, нагруженных на длительное растяжение в возрасте 286 сут, нетрудно заметить, что в этом случае отрицательное влияние длительного растяжения на модуль деформаций бетона оказалось не больше, а меньше, чем в случае образцов, нагруженных в возрасте 91 сут. Следует заметить, что в некоторых случаях благодаря длительному растяжению модуль деформаций бетона возрос.

Поскольку длительное растяжение оказывает влияние на прочность и деформативность бетона, то это не может не отразиться и на закономерности обратимости как упруго-мгновенных деформаций, так и деформаций ползучести. Приведенный анализ о влиянии длительного растяжения на прочность и деформативность бетона позволит нам познать закономерности обратимости упруго-мгновенных деформаций и деформаций ползучести.

Для анализа опытных данных обратимости деформаций ползучести бетона после его разгрузки из-под длительной растягивающей нагрузки соответствующие кривые представлены на фиг. 1—3. Одновременно в табл. 3 приводятся и другие данные, которые помогут этому анализу. Ог-

метим, что приведенные в табл. 3 значения деформаций ползучести (ε_n) соответственно $t=250$ сут, а обратимые деформации ползучести (ε_{no}) — $t=120$ сут.

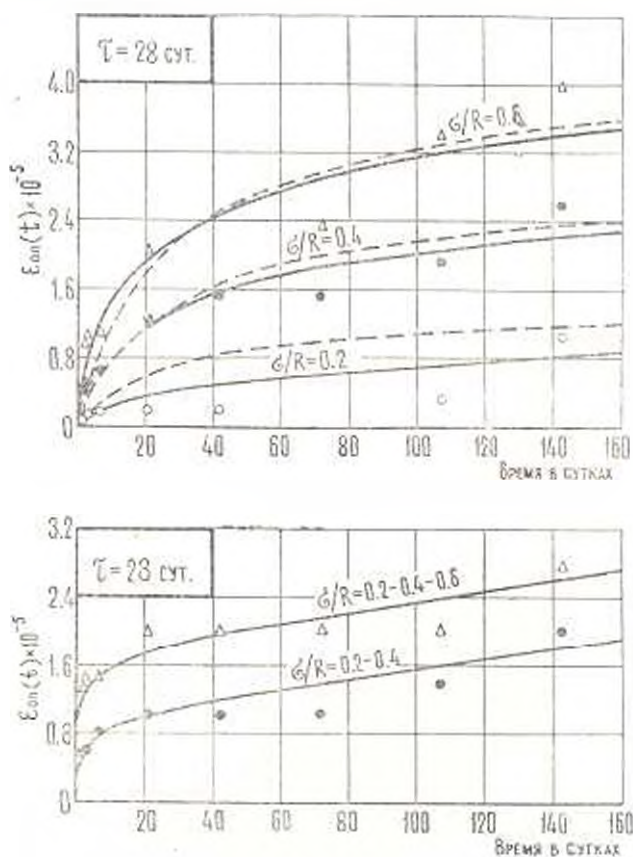
Таблица 3

(Обратимые деформации и деформации ползучести бетона после его разгрузки)

t в сут	Показатели	Значения показателей, когда в момент длительного нагружения постоянными нагрузками уровень напряжения составлял					Значения показателей, когда уровень напряжения в режущих образцах с момента нагружения изменялся по режиму			
		0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.2—0.4	0.2—0.4—0.6	0.2—0.4—0.6—0.8	
7	$\varepsilon_v \cdot 10^5$	0.64	1.28	1.92	2.55	—	—	—	—	
	$\varepsilon_{yo} \cdot 10^5$	0.81	1.89	2.76	5.61	—	1.47	2.83	3.68	
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$	8.82	17.70	28.40	36.02	—	—	—	—	
	$\varphi_t = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	13.82	13.86	13.80	14.10	—	—	—	—	
	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	1.34	2.69	4.03	5.37	—	—	—	—	
28	$\varepsilon_{yo} \cdot 10^5$	1.50	2.54	4.51	—	—	2.54	4.31	—	
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$	9.36	19.45	32.13	50.55	—	—	—	—	
	$\varepsilon_{no} \cdot 10^5$	0.74	2.04	3.20	—	—	1.58	2.40	—	
	$\varphi_t = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	6.98	7.23	7.97	9.41	—	—	—	—	
	$\varphi_t = \varepsilon_{no} / \varepsilon_y$	0.49	0.80	0.71	—	—	0.62	0.56	—	
91	$\varepsilon_{yo} / \varepsilon_y$	1.19	0.94	1.12	—	—	—	—	—	
	$\varepsilon_{no} / \varepsilon_n$	0.08	0.10	0.10	—	—	—	—	—	
	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	1.24	2.48	3.72	4.95	5.57	—	—	—	
	$\varepsilon_{yo} \cdot 10^5$	1.04	2.44	4.09	5.80	—	2.61	—	—	
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$	2.65	5.56	9.43	15.40	19.65	—	—	—	
286	$\varepsilon_{no} \cdot 10^5$	0.64	1.36	2.52	3.04	4.80	1.20	—	—	
	$\varphi_t = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	2.14	2.24	2.54	3.11	3.53	—	—	—	
	$\varphi_t = \varepsilon_{no} / \varepsilon_{yo}$	0.62	0.56	0.62	0.68	—	0.46	—	—	
	$\varepsilon_{yo} / \varepsilon_y$	0.84	0.98	1.09	1.11	—	—	—	—	
	$\varepsilon_{no} / \varepsilon_n$	0.24	0.24	0.27	0.26	0.24	—	—	—	
286	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	1.18	2.36	3.54	4.78	—	—	—	—	
	$\varepsilon_{yo} \cdot 10^5$	1.09	1.88	3.65	5.47	—	2.61	3.47	4.86	
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$	1.29	2.82	5.24	9.60	—	—	—	—	
	$\varepsilon_{no} \cdot 10^5$	1.04	1.88	2.92	3.86	—	1.66	2.66	3.76	
	$\varphi_t = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	1.09	1.20	1.48	2.03	—	—	—	—	
286	$\varphi_t = \varepsilon_{no} / \varepsilon_{yo}$	0.95	1.00	0.80	0.71	—	0.64	0.77	0.77	
	$\varepsilon_{yo} / \varepsilon_y$	0.92	0.80	1.03	1.14	—	—	—	—	
	$\varepsilon_{no} / \varepsilon_n$	0.81	0.67	0.57	0.40	—	—	—	—	

По данным образцов, нагруженных на длительное растяжение в возрасте 28 сут, при разгрузке обратимые упруго-мгновенные деформации бетона в большинстве случаев получались больше, чем соответствующие упруго-мгновенные деформации в момент нагружения на длительное растя-

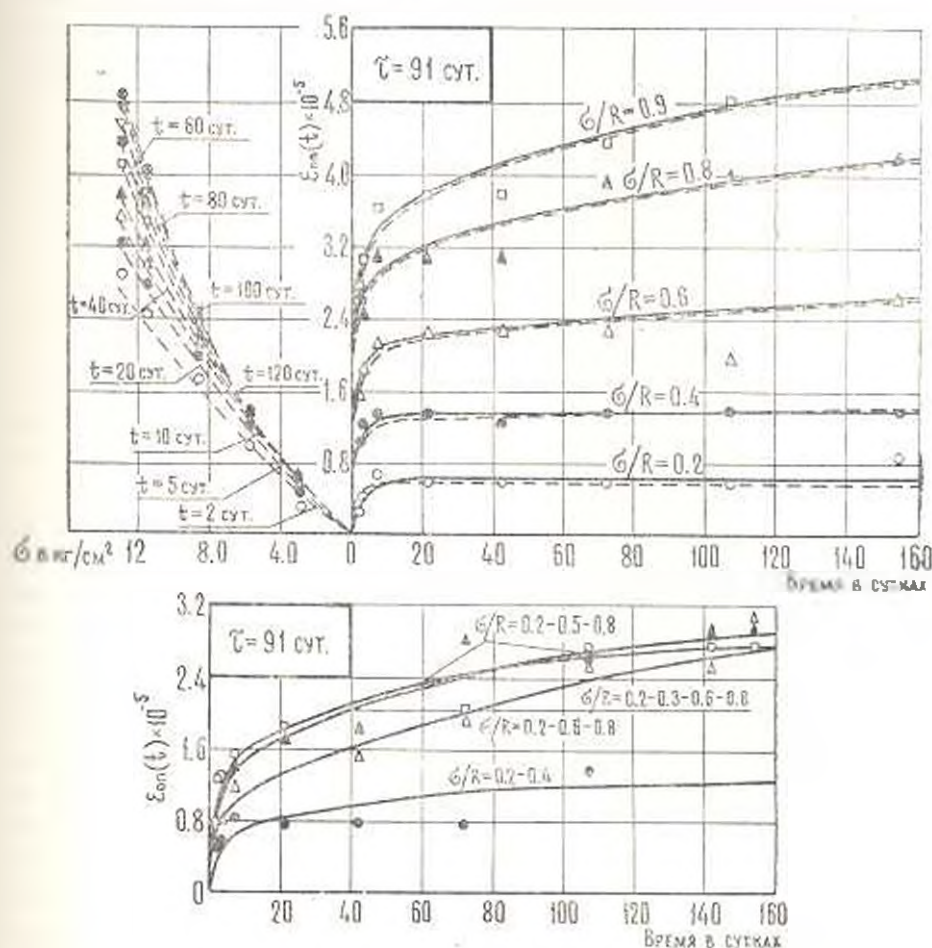
жение (табл. 3). При этом нетрудно заметить, что в этом случае закономерная связь между обратимыми упруго-мгновенными деформациями и ранее действующими напряжениями не наблюдается. По данным же образцов, загруженных в возрасте 91 и 286 сут. степень обратимости упруго-мгновенных деформаций получилась тем больше, чем выше был уровень растягивающего напряжения в момент длительного нагружения. При этом отношение обратимых упруго-мгновенных деформаций к упруго-мгновенным деформациям в зависимости от уровня предшествующего растягивающего напряжения может быть меньше, равно и больше единицы.



Фиг. 1.

Рассматривая верхний график фиг. 1, нетрудно заметить, что обратимость деформаций ползучести образцов, загруженных постоянными напряжениями в возрасте 28 сут. тем больше, чем выше уровень напряжения в момент длительного нагружения. Сказанное в полной мере относится и к тем образцам, которые были загружены в возрасте 91 и 286 сут. Из сравнения же соответствующих кривых обратимых деформаций ползучести, представленных на двух графиках фиг. 1—3, можно заключить, что обратимость деформаций ползучести образцов, загруженных постоянными растягивающими нагрузками, больше образцов, которые загружались ступенчато-возрастающими растягивающими нагрузками. Это явление

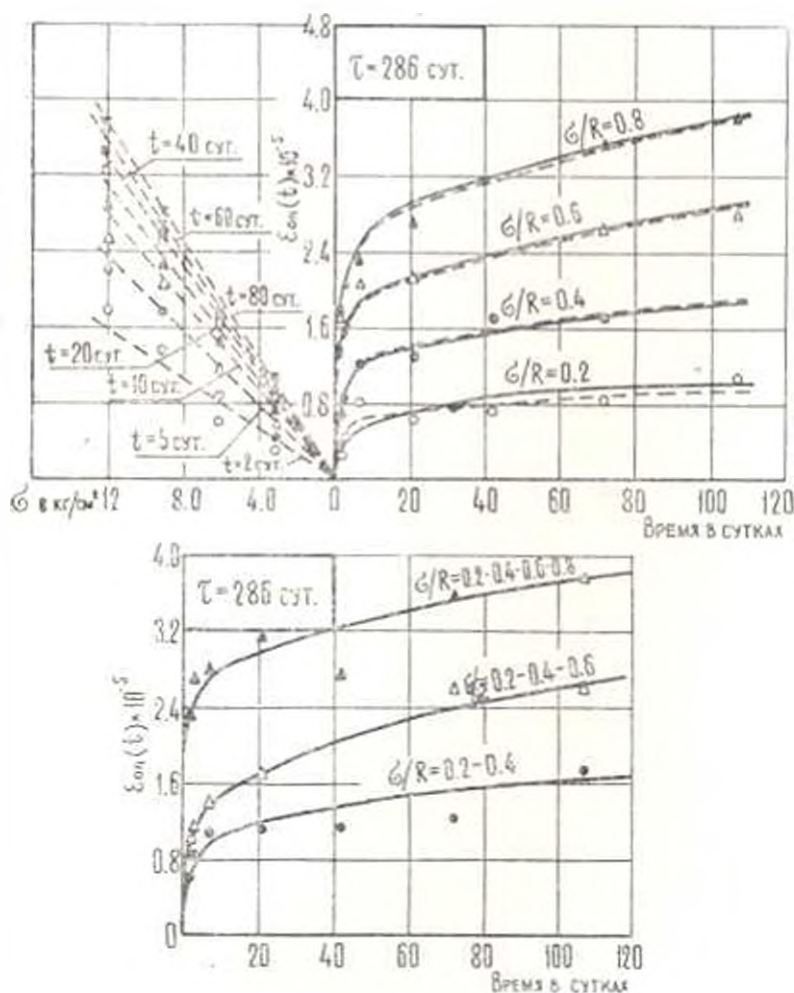
связано с тем, что, как уже было показано, длительное растяжение в зависимости от возраста и уровня напряжения в момент длительного нагружения может привести как к повышению прочности и модуля деформации бетона, так и к их снижению. При прочих равных условиях отрицательное влияние длительного растяжения в случае нагружения постоянными нагрузками больше, а положительный эффект меньше, чем при нагружении ступенчато-возрастающими нагрузками. Это обстоятельство и обуславливает то, что во всех случаях благодаря более высокому модулю деформации обратимые деформации после разгрузки образцов, нагруженных ступенчатой нагрузкой, получаются меньше.



Фиг. 2.

По данным табл. 3 при $\tau = 28$ сут отношение обратимых деформаций ползучести к деформациям ползучести практически не зависит от уровня предшествующего растягивающего напряжения. Сказанное в полной мере сохраняется и при $\tau = 91$ сут. Однако, при $\tau = 286$ сут $\epsilon_{обн}/\epsilon_n$ уже существенно зависит от уровня напряжения и чем выше последний, тем относительно меньше обратимые деформации ползучести. Из сравнения отношений

$\varepsilon_{\text{по}}/\varepsilon_{\text{и}}$ образцов, загруженных в различном возрасте, можно также заключить, что чем старше бетон к моменту длительного нагружения, тем относительно больше обратимые деформации ползучести бетона после его разгрузки.



Фиг. 3.

Как известно, характеристикой ползучести бетона принято считать отношение деформаций ползучести к соответствующим упруго-мгновенным деформациям в момент длительного нагружения ($\varphi_t = \varepsilon_{\text{по}}/\varepsilon_{\text{и}}$). В табл. 3 нами введено новое понятие характеристики обратимых деформаций ползучести, которая представляет собой отношение обратимых деформаций ползучести к обратимым упруго-мгновенным деформациям ($\varphi_t^* = \varepsilon_{\text{по}}^*/\varepsilon_{\text{и}}^*$). Из данных табл. 3 следует, что характеристика обратимых деформаций ползучести (φ_t^*) меньше, чем характеристика ползучести (φ_t), причем их чувствительная разница при $\tau = 28 \text{ сут}$ с увеличением τ уменьшается. Так, напри-

мер. при уровне напряжения 0.4 и $t = 28$ сут $\sigma_1/\sigma_2 = 9$, а при том же уровне напряжения, но при $t = 286$ сут — 1.2.

По данным табл. 3, независимо от возраста к моменту длительного нагружения (t), характеристика ползучести (φ_t) бетона при растяжении с увеличением уровня напряжения возрастает. Что касается характеристики обратимых деформаций ползучести, то сказанное сохраняется только при $t = 28$ сут, а при $t = 91$ и 286 сут уже наблюдается обратная картина.

Для описания кривых обратимых деформаций ползучести бетона после разгрузки из-под различных постоянных растягивающих напряжений мы воспользовались зависимостями теории упруго-ползучего тела Н. Х. Арутюняна [1]. В результате описания семейства экспериментальных кривых обратимых деформаций ползучести для $t = 28, 91$ и 286 сут получены следующие зависимости:

$$10^3 \cdot \varepsilon_{po}(t, 28) = 0.42 [1 - 0.5 (e^{-0.06t} + e^{-0.0278t})] \sigma \quad (1.3)$$

$$10^3 \cdot \varepsilon_{po}(t, 91) = 0.241 (1 - e^{-0.11t}) \left[\left(0.275 + \frac{4.14}{t} \right) \sigma + \right. \\ \left. + (0.0235 + 0.0001846) \sigma^2 \right] \quad (1.4)$$

$$10^3 \cdot \varepsilon_{po}(t, 286) = 0.40 [1 - 0.5 (e^{-0.053t} + e^{-0.0078t})] \sigma \quad (1.5)$$

Кривые обратимых деформаций ползучести, построенные по формулам (1.3), (1.4) и (1.5), на фиг. 1—3 представлены пунктиром и, как видим, их расхождение с экспериментальными кривыми в большинстве случаев весьма незначительно.

Из приведенных формул следует, что при $t = 28$ и 286 сут зависимость между обратимыми деформациями ползучести и предшествующими растягивающими напряжениями имеет линейный характер, а при $t = 91$ сут — нелинейный характер. Для $t = 91$ и 286 сут такие зависимости при различных σ на левых частях графиков фиг. 2 и 3 представлены пунктиром и, как видно, отклонение экспериментальных точек от кривых, построенных по этим зависимостям, незначительно.

Механизм обратимости упруго-мгновенных деформаций и деформаций ползучести еще раскрыт недостаточно. По существующим представлениям в момент длительного нагружения бетона сжимающей нагрузкой заполнитель бетона деформируется упруго и по мере увеличения деформаций ползучести цементного камня происходит перераспределение напряжений с цементного камня на заполнитель, в результате чего упругие деформации заполнителя со временем увеличиваются. При разгрузке бетона упруго-деформированный заполнитель стремится восстановить свою первоначальную форму, однако, этому препятствует затвердевший во времени цементный камень и поэтому последний в местах контакта с заполнителем испытывает растягивающие напряжения, которые и приводят к восстановлению деформаций [7]. При этом, благодаря растягивающим напряжениям, в цементном камне образуются и развиваются микротрещины, которые облегчают обратимые деформации упруго-деформированного заполнителя и бетона в целом.

По мнению авторов, немаловажную роль в обратимости деформаций бетона играют и усадочные деформации. Дело в том, что благодаря усадке, еще до момента загрузки бетона в цементном камне в местах контакта с заполнителем образуются усадочные микротрещины, количество и раскрытие которых тем больше, чем больше возраст бетона к моменту загрузки. При разгрузке длительно сжатого бетона наличие микротрещин облегчает обратимость деформаций упруго-деформированного заполнителя и бетона в целом. Причем под воздействием обратимых деформаций заполнителя раскрытие этих микротрещин может возрасти и даже могут образоваться новые микротрещины.

В случае же загрузки бетона длительной растягивающей нагрузкой раскрытие усадочных микротрещин увеличивается и образуются новые микротрещины, которые после разгрузки смыкаются и тем самым облегчают обратимость деформаций упруго-деформированного заполнителя и бетона в целом.

Как уже было показано, чем старше бетон к моменту длительного растяжения, тем относительно больше восстанавливаются деформации ползучести после его разгрузки. Объясняется это тем, что чем старше бетон, тем больше как количество, так и раскрытие микротрещин. Следует также отметить, что обратимость деформаций облегчается и в том случае, когда по разным причинам модуль деформаций бетона во времени снижается. В частности, спад модуля деформации может быть вызван неблагоприятными температурно-влажностными условиями, а также длительным растяжением бетона.

Основные выводы

1. Длительное нагружение как постоянными, так и ступенчато-возрастающими растягивающими напряжениями в зависимости от уровня напряжения и возраста к моменту приложения нагрузки может привести как к повышению, так и к снижению прочности и модуля деформации бетона при растяжении.

2. При разгрузке длительно растянутого бетона упруго-мгновенные деформации относительно больше восстанавливаются, чем деформации ползучести. Обратимость деформаций длительно растянутого бетона зависит от возраста бетона к моменту длительного нагружения, уровня напряжения, режима нагружения и др.

3. С увеличением возраста бетона процент обратимости как упруго-мгновенных деформаций, так и деформаций ползучести увеличивается.

4. Влияние уровня растягивающего напряжения в момент нагружения на обратимость деформаций ползучести тесно связано с возрастом бетона. При $t=91$ сут степень обратимости деформаций ползучести не зависит от уровня напряжения, а при более старом возрасте чем больше уровень напряжения, тем меньше процент обратимости деформаций ползучести.

5. Обратимость деформаций ползучести зависит от режима нагружения бетона на длительное растяжение. После предшествующего длительного растяжения ступенчато-возрастающей нагрузкой обратимые деформации

ции ползучести меньше, чем после предшествующего длительного растяжения постоянной нагрузкой, величина которой равна конечному значению ступенчатой нагрузки.

6. Характеристика обратимых деформаций ползучести ϵ_p^* существенно меньше, чем характеристика ползучести бетона ϵ_p . С увеличением возраста бетона к моменту длительного растяжения разницы ϵ_p^* и ϵ_p уменьшается.

7. Влияние уровня предшествующего растягивающего напряжения на характеристику обратимых деформаций ползучести бетона существенно зависит от возраста к моменту длительного растяжения. При $\tau = 28$ сут с увеличением уровня напряжения σ_p^* увеличивается, а при $\tau \geq 91$ сут уменьшается.

Институт механики
АН Армянской ССР

Получила 8 VII 1976

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ի. Ս. ԿՐՏԻՍՅԱՆ, Խ. Դ. ԱՂԱՋԱՆՅԱՆ

ԵՐԿԱՐԱՏԵԿ ԶԻՎԱԾ ԲԵՏՈՆԻ ՀԱԿԱԲԱՐՁՆԵՐ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՆՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԲԵՌՆԱԹԱՓՈՒՄԻՑ ՀԵՏՈ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Աշխատանքը նվիրված է երկուրորտե ձգված բետոնի առաձգա-ակնթաթ-թային և սողքի վերականգնման դեֆորմացիաների էքսպերիմենտալ հետա-զոտմանը կախված բետոնի հասակից և բեռնավորման մոմենտի հարաբե-րական լարումներից: Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ երկարատև ձգված բետոնի առաձգա-ակնթաթթային դեֆորմացիաները համեմատաբար ավելի շատ են վերականգնվում, քան սողքի դեֆորմացիաները:

Հասակի մեծացման հետ առաձգա-ակնթաթթային և սողքի վերականգն-ման դեֆորմացիաները փոքրանում են:

Սողքի վերականգնման դեֆորմացիաները կախված են բետոնի երկա-րատև բեռով բեռնավորման սեփմից: Առաջնային աճող ձգող բեռով բեռնավորվելիս, սողքի վերականգնման դեֆորմացիաները ավելի փոքր են, քան հաստատուն ձգող բեռով բեռնավորվելու դեպքում: Վերականգնման սող-քի դեֆորմացիաների բնութագիրը ϵ_p^* -ն էսայես փոքր է սողքի դեֆորմա-ցիաների բնութագրից՝ ϵ_p -ից: Հարյուրերական լարումների սպիցսությունը սողքի վերականգնվող դեֆորմացիաների բնութագրի վրա էական կախված է բեռնավորման մոմենտում բետոնի հասակից: $\tau = 28$ օրի դեպքում հարաբե-րական լարումների մեծացման հետ ϵ_p^* -ն փոքրանում է, իսկ երբ $\tau \geq 91$ օրից՝ մեծանում է:

INVESTIGATION OF REVERSIBLE STRAINS IN PROTRACTEDLY TENSILE-STRESSED CONCRETE SUBSEQUENT TO ITS UNLOADING

K. S. KARAPETIAN, R. A. KOTIKIAN, R. M. AGADJANJAN

Summary

The paper is devoted to the investigation of reversible elastoinstantaneous strains (ε_{in}) and creep strains (ε_{cr}) in protractedly tensile-stressed concrete, depending on its age (τ) and stress level (τR_p) at the instant of protracted loading.

The results obtained show that after concrete unloading the elastoinstantaneous strains are recovered to a relatively greater degree than those of creep. The greater the age of concrete by the instant of protracted loading, the higher reversibility percentage of both ε_{in} and ε_{cr} .

The characteristics of reversible creep strains, ε_{cr}^* , are substantially below those of concrete creep. As τ increases, the difference between ε_{cr}^* and ε_{cr} decreases.

The influence of the preceding tensile stress level upon ε_{cr}^* depends significantly on τ . At $\tau = 28$ days, the higher the stress, the larger ε_{cr}^* , and at $\tau > 91$ days it decreases.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крикorian Н. А. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л. Гостехиздат, 1952.
2. Карапетян К. С. Влияние длительного сжатия на прочность и деформативность бетона. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1964, т. 12, № 6.
3. Карапетян К. С. О влиянии длительного нагружения на прочность и деформативность бетона. Докл. АН АрмССР, 1970, т. 51, № 2.
4. Котикян Р. А. Ползучесть бетона при постоянных и ступенчато-возрастающих растягивающих напряжениях. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 1.
5. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние длительного растяжения на прочность и деформативность бетона. Известия АН АрмССР, Механика, 1971, т. 24, № 6.
6. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние длительного растяжения на прочность и деформативность бетона в зависимости от масштабного фактора. Сб. научных трудов «Проблемы ползучести и усадки бетона», ЦНИИС Минтрансстроя СССР, М., 1974, вып. 77.
7. Карапетян К. С., Котикян Р. А., Шаладжян Р. М. Исследование обратимости деформаций после разгрузки длительно обжатого бетона. «Проблемы ползучести и усадки бетона», ЦНИИЖБ Госстроя СССР, Ин-т механики АН АрмССР, МИСИ, Ленинград, 1974.
8. Митропольский Г. К. Техника статистического оценивания. М., 1961.