ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1977

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

С. С. ШАГИНЯН

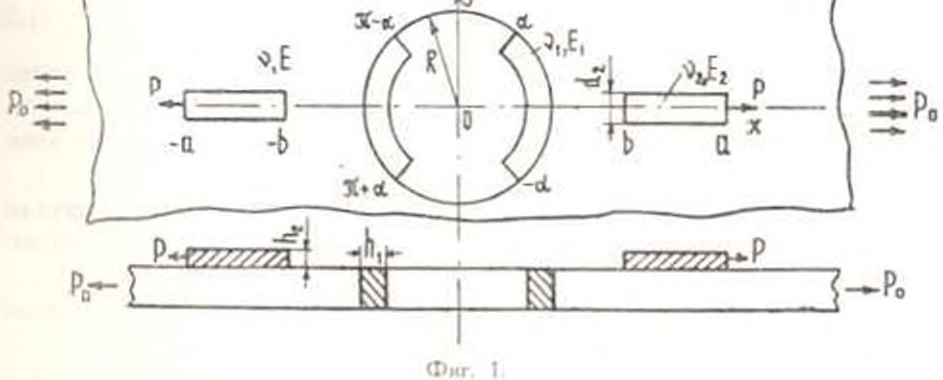
О ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, УСИЛЕННОЙ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

В настоящей работе излагается решение двух плоских контактных задач для пластины с круговым отверстием, когда последняя усилена системой тонких упругих накладок. На основе известных предположений [1—3] решение указанных задач сведено к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений при определенных граничных условиях. С помощью аппарата ортогональных многочленов Чебышева для поставленных задач получено эффективное решение, содержащее в явном виде характерные особенности контактных напряжений вблизи концов прикрепленных накладок.

1. Пусть упругий лист в виде тонкой бесконечной пластины с круговым отверстием радиуса $R = 1$, что не нарушает общности, усилен системами упругих накладок (стрингеров) таким образом, как это показано на фиг. 1 и 2. Пусть, далее, этот лист деформируется силами P, действующими соответственно на концах упругих прямолинейных накладок, расположенных симметрично относительно начала координат, и подвержен на бесконечности одностороннему растяжению в направлении оси стрингеров силами интенсивности P_0.

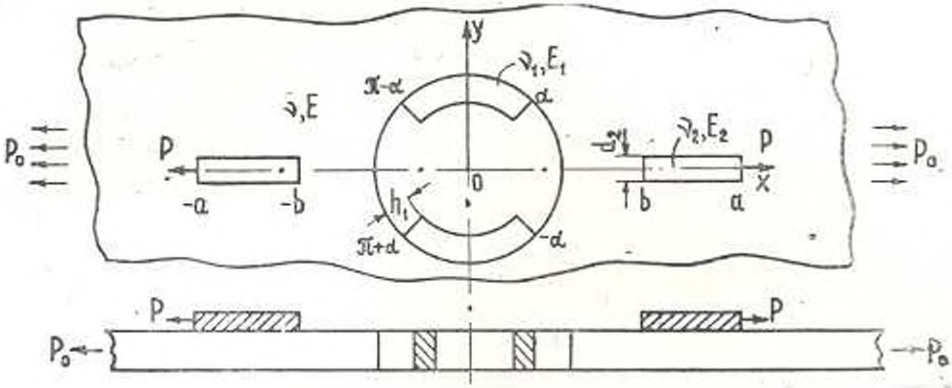
Цель работы заключается в определении закона распределения контактных напряжений под накладками.

В дальнейшем задачу, показанную на фиг. 1, кратко будем именовать первой, а на фиг. 2 — второй контактной задачей соответственно.



Фиг. 1.

Условимся все физические и геометрические величины, относящиеся к криволинейным накладкам, обозначать индексом 1, к прямолинейным накладкам — индексом 2 и, наконец, к основанию, то есть к пластине с круговым отверстием, без индекса.



Фиг. 2.

Не останавливаясь здесь на подробностях, сразу приведем, следуя работам [3—10], определяющие уравнения, из которых будут определяться неизвестные контактные напряжения, действующие под упругими накладками. Эти уравнения записываются в виде системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{gathered}
\int_b^a \left[\frac{1}{t-x} + K_{11}(t, x) \right] \varphi'(t)\, dt + \int_L K_{12}(x, \theta_0)\, \psi'(\theta_0)\, d\theta_0 = \lambda^* \varphi(x) + P_0 f_1(x) \\
\int_b^a K_{21}(t, \theta)\, \varphi'(t)\, dt + \int_L \left[\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} + K_{22}(\theta, \theta_0) \right] \psi'(\theta_0)\, d\theta_0 = \lambda^{**} \psi(\theta) + \\
+ P_0 f_2(\theta)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

при граничных условиях

$$\varphi(b) = 0, \quad \varphi(a) = P/d_2 \tag{1.2}$$

$$\psi(\theta) = 0 \text{ на концах линии } L \tag{1.3}$$

Отметим, что при выводе системы уравнений (1.1) использованы свойства периодичности и симметричности касательных контактных напряжений. При этом, интегралы от ядер Гильберта и Коши следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Для первой контактной задачи линия интегрирования L представляет собой интервал $-\alpha < \theta < \alpha < \pi/2$, а для второй задачи — интервал $0 < \alpha < \theta < \pi - \alpha$.

Здесь параметры λ^*, λ^{**} зависят от геометрических и упругих характеристик стрингеров и пластины и имеют значения

$$\lambda^* = \frac{2\pi(1+\varkappa)\,\mu\,(\mu_2+\lambda_2)}{\varkappa d_2 h_2 \mu_2 (2\mu_2 + 3\lambda_2)}, \qquad \lambda^{**} = \frac{4\pi\mu}{(\varkappa+1)\, h_1 (2\mu_1 + \lambda_1)}$$

где λ, μ — параметры Ламе, $\varkappa=(3-\nu)/(1+\nu)$. ($\nu$ — коэффициент Пуассона), d_2 и h_2 — соответственно ширина и высота прямолинейных накладок, h_1 — ширина криволинейных накладок. Далее

$$K_{11}(t, x)=\frac{1}{x+t}+\frac{\varkappa^2+1}{\varkappa}\frac{t}{x^2t^2-1}+\frac{2t}{x^2(x^2t^2-1)}-$$

$$-t\left(\frac{x^2-1}{x^2}+\frac{t^2-1}{t^2}\right)\frac{x^2t^2+1}{(x^2t^2-1)^2}+\frac{(t^2-1)(x^2+1)(x^2t^2+1)}{\varkappa t x^2(1-x^2t^2)^2}+$$

$$+\frac{2t(t^2-1)(x^2-1)(3+x^2t^2)}{\varkappa(1-x^2t^2)^3}-\frac{1}{\varkappa t x^2}, \quad b\leqslant t,\ x\leqslant a$$

$$K_{12}(x, \theta_0)=\left[\frac{x-\cos\theta_0}{x^2-2x\cos\theta_0+1}-\frac{x+\cos\theta_0}{x^2+2x\cos\theta_0+1}\right]\sin\theta_0+$$

$$+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{(x^2+1)\sin 2\theta_0}{x^4-2x^2\cos 2\theta_0+1}+$$

$$+\frac{2\sin\theta_0}{\varkappa+1}\left[\frac{(x^2+1)\cos\theta_0+2x}{(x^2+2x\cos\theta_0+1)^2}+\frac{(x^2+1)\cos\theta_0-2x}{(x^2-2x\cos\theta_0+1)^2}\right]$$

$$b\leqslant x\leqslant a, \quad \theta_0\in L$$

$$K_{21}(t, \theta)=\frac{(\varkappa+1)^2}{4\varkappa}\cos\theta\ln\frac{t^2-2t\cos\theta+1}{t^2+2t\cos\theta+1}+\frac{(\varkappa+1)^2}{2\varkappa}\frac{t\sin^2\theta}{t^2-2t\cos\theta+1}+$$

$$+\frac{(\varkappa+1)^2}{2\varkappa}\frac{t\sin^2\theta}{t^2+2t\cos\theta+1}+\frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa}\sin\theta\,\mathrm{arctg}\frac{2t\sin\theta}{t^2-1}-$$

$$-\frac{\varkappa^2-1}{\varkappa}\frac{t(t^2-1)\cos^2\theta}{t^4-2t^2\cos 2\theta+1}+$$

$$+\frac{2t[1-\varkappa-(1+\varkappa)t^2][(t^4-1)\cos 2\theta-2t^2]}{\varkappa(t^4-2t^2\cos 2\theta+1)^2}, \quad b\leqslant t\leqslant a, \quad \theta\in L$$

$$K_{22}(\theta, \theta_0)=\sin(\theta-\theta_0)\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\theta-\theta_0}{2}\right|+\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\theta-\theta_0}{2}-$$

$$-\frac{\pi(\varkappa-1)}{2(\varkappa+1)}\cos(\theta-\theta_0)\,\mathrm{sign}(\theta-\theta_0), \quad \theta, \theta_0\in L$$

$$f_1(x)=-\frac{\pi(\varkappa+1)}{4\varkappa d_2}\left[\varkappa+1-\frac{2(\varkappa+2)}{x^2}+\frac{6}{x^4}\right], \quad b\leqslant x\leqslant a$$

$$f_2(\theta)=-\frac{\pi(\varkappa+1)^2}{\varkappa d_2}\cos 2\theta, \quad \theta\in L$$

Нетрудно видеть, что ядра K_{ij} $(i, j=1, 2)$ в соответствующих областях непрерывны и имеют там же квадратично суммируемые частные производные первого порядка.

Контактные напряжения под накладками обеих задач даются формулами

$$q(x) = \varphi'(x), \quad (b < x < a), \quad \tau(\theta) = \frac{2\pi d_2}{(\varkappa + 1)^2}\psi'(\theta), \quad \theta \in L$$

Здесь $q(x)$ — контактное напряжение, действующее под прямолинейными накладками, $\tau(\theta)$ — под криволинейными накладками.

Таким образом, решение поставленных контактных задач сведено к решению системы уравнений (1.1) при граничных условиях (1.2) и (1.3).

2. Займемся сначала решением первой контактной задачи. Решение (1.1) для этого случая представим в виде

$$\varphi'(x) = \left|1 - \left(\frac{2x - a - b}{a - b}\right)^2\right|^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} y_m T_m\left(\frac{2x - a - b}{a - b}\right), \quad b < x < a$$

$$\psi'(\theta) = \frac{\sec\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} z_{2m-1} T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right), \quad -\alpha < \theta < \alpha$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева первого рода, а y_n $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ и z_{2m-1} $(m = 1, 2, \ldots)$ — неизвестные коэффициенты, которые подлежат определению. Обычным способом [4—8] определение неизвестных коэффициентов y_m $(m = 1, 2, \ldots)$ и z_{2m-1} $(m = 1, 2, \ldots)$ можно свести к решению бесконечных систем линейных уравнений. Не останавливаясь на подробностях, сразу приведем окончательный вид этой системы

$$\begin{aligned} y_n + \sum_{m=1}^{\infty} y_m (A_{mn} + B_{mn}) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} z_{2m-1} = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots \\ z_{2n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} z_{2m-1} (E_{mn} + F_{mn}) + \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} y_m = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.4}$$

где введены обозначения

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^2 (a - b)} \int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2x - a - b}{a - b}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2x - a - b}{a - b}\right)^2}\, dx \times$$

$$\times \int_b^a K_{11}(t, x)\left[1 - \left(\frac{2t - a - b}{a - b}\right)^2\right]^{-1/2} T_m\left(\frac{2t - a - b}{a - b}\right) dt$$

$$m, n = 1, 2, \ldots$$

$$B_{mn}=\frac{2\lambda^*}{\pi^2 m}\int_b^a U_{m-1}\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)U_{n-1}\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)\times$$

$$\times\left[1-\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)^2\right]dx,\quad m,\,n=1,\,2,\ldots$$

$$C_{mn}=\frac{4}{\pi^2(a-b)}\int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)^2}\,dx\,\times$$

$$\times\int_{-\alpha}^{\alpha}K_{12}(x,\,\theta_0)\frac{\sec\dfrac{\theta_0}{2}}{\sqrt{2\cos\theta_0-2\cos\alpha}}\,T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)d\theta_0$$

$$m,\;n=1,\,2,\ldots$$

$$a_n=\frac{4P_0}{\pi^2(a-b)}\int_b^a f_1(x)\,U_{n-1}\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)^2}\,dx\,+$$

$$+\int_b^a\left[\frac{4\lambda^*c}{\pi^2(a-b)}-\frac{2\lambda^*y_0}{\pi^2}\arccos\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)\right]\times$$

$$\times\,U_{n-1}\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)^2}\,dx\,-$$

$$-\frac{4y_0}{\pi^2(a-b)}\int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)^2}\,dx\,\times$$

$$\times\int_b^a K_{11}(t,\,x)\left[1-\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2}dt,\quad n=1,\,2,\ldots$$

$$D_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2\cos\theta-2\cos\alpha}\,\sec\frac{\theta}{2}\,d\theta\,\times$$

$$\times\int_b^a K_{21}(t,\,\theta)\left[1-\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2}T_m\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)dt$$

$$m,\;n=1,\,2,\ldots$$

$$E_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2\cos\theta-2\cos\alpha}\,\sec\frac{\theta}{2}\,d\theta\,\times$$

$$\times \int_{-\alpha}^{\alpha} K_{22}(\theta, \theta_0) \frac{\sec \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{2\cos\theta_0 - 2\cos\alpha}} T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) d\theta_0$$

$$m,\ n = 1,\ 2, \ldots$$

$$F_{mn} = \frac{\lambda^{**}\csc\alpha}{\pi^2(2m-1)} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) \times$$

$$\times U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)(2\cos\theta - 2\cos\alpha)\sec^2\frac{\theta}{2}\, d\theta, \qquad m,\ n = 1,\ 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{P_0}{\pi^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_2(\theta)\, U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}\,\sec\frac{\theta}{2}\, d\theta -$$

$$-\frac{y_0}{\pi^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}\,\sec\frac{\theta}{2}\, d\theta \times$$

$$\times \int_b^a K_{21}(t, \theta)\left|1 - \left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)^2\right|^{-1/2} dt, \quad n = 1,\ 2, \ldots$$

Здесь $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x)/\sin\arccos x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева второго рода, а постоянные c и y_0 определяются из граничных условий (1.2), (1.3) и имеют значения

$$c = P/d_0, \quad y_0 = 2P/\pi d_0 (a - b)$$

Перейдем теперь к решению второй контактной задачи. С помощью функционального соотношения

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \operatorname{ctg}\frac{\theta_0-\theta}{2}\, T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-2\theta_0}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi-2\alpha}{4}\right)\frac{\sec\frac{\pi-2\theta_0}{4}}{\sqrt{2\sin\theta_0 - 2\sin\alpha}}\, d\theta_0 =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\csc\frac{\pi-2\alpha}{4}\, U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-2\theta}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi-2\alpha}{4}\right)\sec\frac{\pi-2\theta}{4}$$

$$m = 1,\ 2, \ldots, \quad (\alpha < \theta < \pi - \alpha)$$

которое весьма просто получается из соответствующего функционального соотношения, приведенного в работах [7, 10], и представляя искомые функции в виде разложений

$$\varphi'(x) = \left|1 - \left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)^2\right|^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m T_m\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right), \quad b < x < a$$

$$\psi'(\theta) = \frac{\sec\frac{\pi - 2\theta}{4}}{\sqrt{2\sin\theta - 2\sin\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} z_{m-1/2} T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi - 2\theta}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi - 2\alpha}{4}\right)$$

$$\alpha < \theta < \pi - \alpha$$

для определения неизвестных коэффициентов $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{z_{2m-1}\}_{m=1}^{\infty}$ получим бесконечную систему линейных уравнений со структурой, похожей системе бесконечных уравнений (1.4) первой контактной задачи.

3. Исследование полученных бесконечных систем можно провести совершенно аналогичным способом, как это сделано в работах [4—8]. При этом можно показать такие интервалы изменения значений параметров λ^* и λ^{**}, для которых написанные системы уравнений вполне регулярны.

Далее, можно показать, что свободные члены этих систем стремятся к нулю при $n \to \infty$ не медленнее, чем n^{-1}.

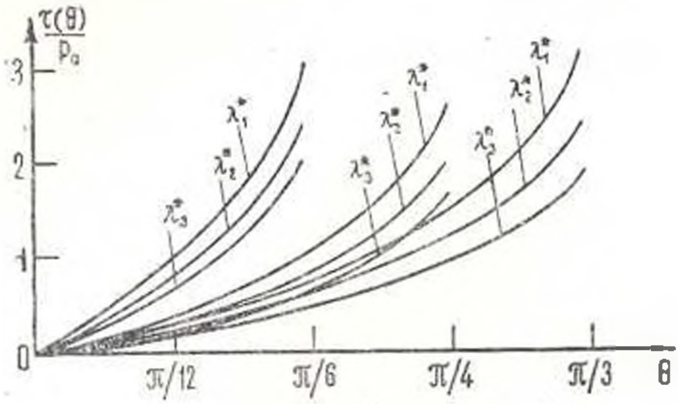
Перейдем к обсуждению числовых результатов. Численная реализация полученных формул произведена на ЭВМ «Наири-2» в случае, когда прямолинейные накладки отсутствуют, а пластина, усиленная на круговой границе симметрично расположенными криволинейными накладками, деформируется односторонне растягивающими усилиями P_0, равномерно распределенными на бесконечности. При этом предполагалось, что ширина криволинейных накладок $h_1 = 0.25$ см, а в качестве материала основания для обеих задач взят алюминий (катанный) с упругими постоянными $E = 0.69 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu = 0.3$. Остальные параметры варьировались различными способами. Эти вариации включали выбор материала накладок, а также длины участков контакта. Параметр λ^* в обеих задачах давался формулой

$$\lambda^* = \frac{\pi(1+\nu_1)(1-2\nu_1)E}{2(1-\nu_1)h_1E_1}$$

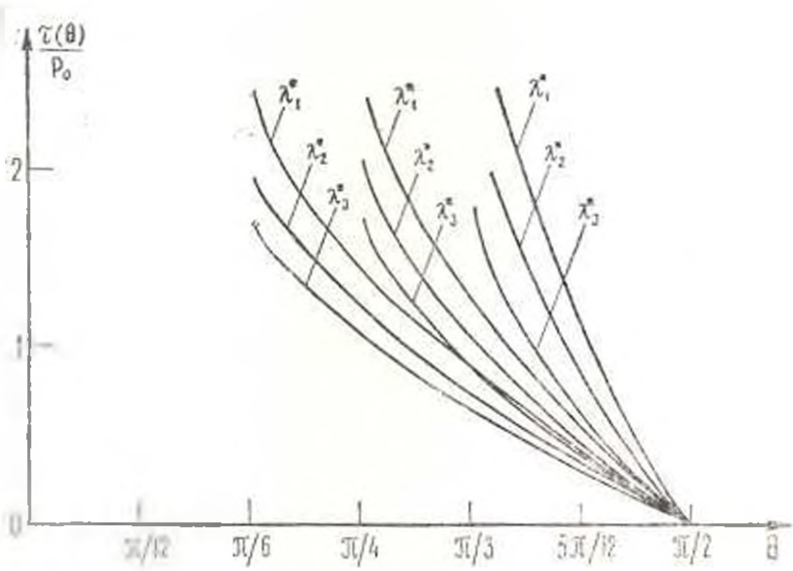
и принимал три значения в зависимости от выбора материала накладок. Значению $\lambda_1^* = 1.7442$ соответствует углеродистая сталь с упругими постоянными $E_1 = 2.1 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu_1 = 0.24$; значению $\lambda_2^* = 2.8316$ соответствует медь с упругими постоянными $E_1 = 1.1 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu_1 = 0.31$ и, наконец, $\lambda_3^* = 4.2494$ — дюралюминий (катанный) с упругими постоянными $E_1 = 0.71 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu_1 = 0.32$.

На фиг. 3 и 4, соответствующих первой и второй контактным задачам, показаны закономерности изменения контактного напряжения в зависимости от материалов контактирующих пар и длин участков контакта. Было замечено следующее: с возрастанием значений параметра λ^*, то есть, когда материал накладок становится более податливым, контактное напряжение под упругими криволинейными накладками уменьшается. Этот факт становится более наглядным, когда увеличивается длина участка контакта.

Далее, определены значения нормального напряжения $\sigma_\theta(r, \theta)$ в точке $M(R, \pi/2)$ для различных контактирующих пар и длин участков кон-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

такта. Эти результаты приведены в табл. 1 и 2, соответствующих первому и второму контактным задачам.

Таблица 1

λ^*	τ_0		
	$\alpha=\pi/6$	$\alpha=\pi/4$	$\alpha=\pi/3$
1.7442	2.5882	2.2339	1.9722
2.8316	2.6337	2.3486	2.1720
4.2494	2.6799	2.4552	2.3440

Таблица 2

λ^*	τ_0		
	$\alpha=\pi/6$	$\alpha=\pi/4$	$\alpha=\pi/3$
1.7442	0.3483	0.2329	−0.0407
2.8316	0.7167	0.6124	0.3198
4.2494	1.0506	0.9768	0.6819

Резюмируя анализ полученных числовых данных, можно утверждать, что усиление круговой границы пластины упругими накладками положительно влияет на напряженное состояние пластины в целом. При этом эффективность усиления пластины с круговым отверстием указанным образом более очевидна в случае второй контактной задачи.

Автор благодарен С. М. Мхитаряну за постановку задачи и обсуждение результатов.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 18 VII 1976

Ս. Ս. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկված են երկու կոնտակտային խնդիրներ կլոր անցքով սալի համար, երբ վերջինս ուժեղացված է բարակ առաձգական վերադիրների համակարգով։ Հիմնվելով հայտնի ենթադրությունների վրա [1—3], դիտարկված խնդիրների լուծումները բերված են սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների լուծմանը։ Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների օգտագործմամբ ստացված են այդ որոշիչ հավասարումների էֆեկտիվ լուծումները, որոնք բացահայտ տեսքով պարունակում են կոնտակտային լարումների բնորոշ եզակիությունները առաձգական վերադիրների ծայրակետերի շրջակայքում։

Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար ստացված են թվային արդյունքներ, որոնք ներկայացված են գրաֆիկների և աղյուսակների տեսքով։

TWO CONTACT PROBLEMS FOR A PLATE WITH A CIRCULAR HOLE REINFORCED BY ELASTIC STIFFENERS

S. S. SHAHINIAN

S u m m a r y

The paper deals with contact problems for an infinite plate with a circular hole reinforced by some elastic stiffeners of a small thickness.

The solutions of these problems are reduced to a solution of systems of singular integro-differential equations. The solutions of these equations are found as series over Chebishev polynomials of the first kind.

Quite regular or quasi-quite infinite systems of linear algebraic equations are obtained for the unknown coefficients of the series.

A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

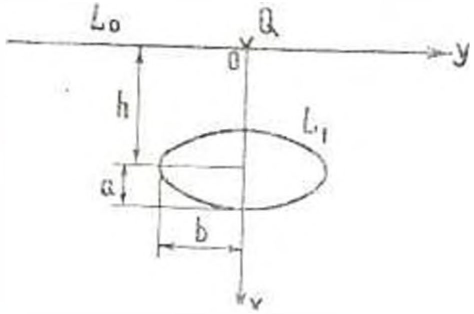
1. *Melan E.* Ein Beitrag zur theorie geschweisster Verbindungen. Ing.-Arch., 1932. Bd. 3, No. 2.
2. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
3. *Шагинян С. С.* Передача нагрузок от кольцевой накладки к плоскости с круговым отверстием. МТТ, 1972, № 5.
4. *Arutunian N. K., Mkhitarian S. M.* Some Contact Problems for a semi-plane with Elastic Stiffeners. Frendsin Elasticity and Thermoelasticity. Witold Novocki Anniversary volume. Wolters-Nordorff publ., 1971.
5. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
6. *Агаян К. Л.* Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. МТТ, 1972, № 5.
7. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на своей границе упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 1.
8. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной упругими накладками. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 3.
9. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
10. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, А. П. КРАВЧЕНКО, В. Н. ЛОЖКИН

ДЕЙСТВИЕ ТОЧЕЧНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА НА ГРАНИЦЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

1. Рассмотрим обобщенное плоское напряженное состояние тонкой пьезоэлектрической пластинки с эллиптическим отверстием, которая в срединной плоскости занимает область S, представляющую собой полуплоскость с эллиптическим вырезом. Обозначим расстояние между центром отверстия и границей полуплоскости через h, полуоси эллипса — через a и b, контур эллиптического отверстия — через L_1, границу полуплоскости — через L_0 (фиг. 1). Пластинка подвергается действию точечного положительного заряда интенсивности Q, находящегося в произвольной точке z_0 прямолинейной границы L_0.



Фиг. 1.

Задача об определении электроупругого состояния такой пластинки приводится к определению функций комплексных переменных $\varphi_j(z_j)$ $(j=1, 2, 3)$, удовлетворяющих на контурах L_n $(n=0,1)$ граничным условиям вида [3]

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j(z_j)=f_{1n},\qquad 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\varphi_j(z_j)=f_{2n}$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}m_{ij}\varphi_j(z_j)=f_{3n} \tag{1.1}$$

Здесь f_{jn} — функции, которые характеризуют воздействие заряда на контуры L_0 и L_1; комплексные величины μ_j и m_{ij} характеризуют свойства материала пластинки.

Функции $\varphi_j(z_j)$ определены в областях S_j, получаемых из заданной области путем использования аффинных преобразований вида $z_j=x+\mu_j y$.

Функции $\varphi_j(z_j)$ будем искать в виде

$$\varphi_j(z_j) = \varphi_j^0(z_j) + \varphi_{j0}(z_j) + \varphi_{j1}(z_j) \tag{1.2}$$

где $\varphi_j^0(z_j)$ — функции, определяющие электроупругое состояние сплошной пластинки*); $\varphi_{j0}(z_j)$ — функции, голоморфные в полуплоскостях S_j, а $\varphi_{j1}(z_j)$ — функции, голоморфные в областях вне эллипсов L_{j1}.

Функции, определяющие электроупругое состояние сплошной пластинки и удовлетворяющие граничным условиям (1.1) на L_0, выберем такими:

$$\varphi_j^0(z_j) = A_j \ln(z_j - z_{j0}) + \varphi_j^*(z_j) \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi_j^*(z_j)$ — аналитические функции, однозначные в областях S_j; z_{j0} — точки в тех же областях, соответствующие точке z_0.
Преобразуем граничные условия (1.1) к следующему виду:

$$\varphi_j(z_j) - \sum_{n=1}^{3} l_{jn} \overline{\varphi_n(z_n)} = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.4}$$

Здесь

$$l_{1n} = -\{[\mu_2 m_{31} - \mu_3 m_{21}] + [\mu_3 - \mu_2]\overline{m}_{n1} + [m_{21} - m_{31}]\overline{\mu}_n\}\,\Delta^{-1}$$

$$l_{2n} = -\{[\mu_3 m_{11} - \mu_1 m_{31}] + [\mu_1 - \mu_3]\overline{m}_{n1} + [m_{31} - m_{11}]\overline{\mu}_n\}\,\Delta^{-1} \tag{1.5}$$

$$l_{3n} = -\{[\mu_1 m_{21} - \mu_2 m_{11}] + [\mu_2 - \mu_1]\overline{m}_{n1} + [m_{11} - m_{21}]\overline{\mu}_n\}\,\Delta^{-1}$$

$$\Delta = \mu_2 m_{31} + \mu_1 m_{21} + \mu_3 m_{11} - \mu_2 m_{11} - \mu_3 m_{21} - \mu_1 m_{31}$$

Граничные условия (1.4) на прямолинейной границе примут вид

$$A_j \ln(z_j - z_{j0}) + \varphi_j^*(z_j) - \sum_{n=1}^{3} l_{jn}\left[\overline{A}_n \ln\left(\frac{\overline{\mu}_n}{\mu_j} z_j - \overline{z}_{n0}\right) + \overline{\varphi_n^*(z_n)}\right] = 0 \tag{1.6}$$

Введем обозначения

$$s_{nj} = \frac{\overline{\mu}_n}{\mu_j} \tag{1.7}$$

Из граничных условий (1.6) получим

$$\varphi_j^*(z_j) = \sum_{n=1}^{3} l_{jn} \overline{A}_n \ln(s_{nj} z_j - \overline{z}_{n0}) \tag{1.8}$$

Функции $\ln(s_{nj} z_j - \overline{z}_{n0})$ являются голоморфными в областях S_j. Учитывая это, из условий однозначности напряжений, перемещений, элек-

*) Решение задачи для сплошной полуплоскости дано в работе Н. А. Вековищевой [1]. Приведенные в [1] формулы для напряжений и индукции не удовлетворяют условиям на прямолинейной границе. В связи с этим в данной работе получены другие формулы, которые удовлетворяют всем граничным условиям.

тростатической индукции и потенциала электрического поля, возникающих в полуплоскости, получим следующие соотношения для определения комплексных постоянных A_j [3]:

$$\mathrm{Jm}\sum_{j=1}^{3} A_j = 0, \qquad \mathrm{Jm}\sum_{j=1}^{3} \mu_j A_j = 0$$

$$\mathrm{Jm}\sum_{j=1}^{3} \mu_j^2 A_j = -\frac{Q}{16\pi^2}(g_{11}\beta_{12}^T - g_{21}\beta_{11}^T)\left(s_{11}^D\beta_{11}^T + \frac{1}{4\pi}g_{11}^2\right)^{-1}$$

$$\mathrm{Jm}\sum_{j=1}^{3} m_{j1}A_j = \frac{Q}{4\pi} \tag{1.9}$$

$$\mathrm{Jm}\sum_{j=1}^{3} \mu_j m_{j1}A_j = \frac{Q}{4\pi}\left(s_{11}^D\beta_{12}^T + \frac{1}{4\pi}g_{11}g_{21}\right)\left(s_{11}^D\beta_{11}^T + \frac{1}{4D}g_{11}^2\right)^{-1}$$

$$\mathrm{Jm}\sum_{j=1}^{3} \mu_j^{-1}\left(s_{22}^D - \frac{1}{4\pi}g_{12}m_{j1}\right)A_j = -\frac{Q}{16\pi^2}g_{12}$$

где s_{ij}^D, β_{mn}^T и g_{mi} — материальные константы пьезоэлектрической пластинки.

После нахождения коэффициентов A_j из системы (1.9) функции (1.3) становятся известными, что позволяет определить механические и электрические величины, характеризующие электроупругое состояние сплошной пьезоэлектрической пластинки по формулам [3]

$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} \mu_j^2 \varphi_j'(z_j), \qquad \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} \varphi_j'(z_j)$$

$$\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} \mu_j \varphi_j'(z_j) \tag{1.10}$$

$$D_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} \mu_j m_{j1}\varphi_j'(z_j), \qquad D_y = -2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} m_{j1}\varphi_j'(z_j)$$

2. В случае, если точечный заряд приложен к точке границы полуплоскости $z_0 = 0$, функции $\varphi_j^0(z_j)$ принимают более простой вид

$$\varphi_j^0(z_j) = \frac{Q}{2\pi}K_j \ln z_j \tag{2.1}$$

где

$$K_j = A_j - \sum_{n=1}^{3} l_{jn}\overline{A}_n$$

Здесь коэффициенты A_j находятся из системы (1.9) с точностью до множителя $\dfrac{Q}{2\pi}$.

Представим функции $\varphi_{j1}(z_j)$ в виде

$$\varphi_{j1}(z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kj}}{[\zeta_j(z_j - h)]^k} \tag{2.2}$$

Здесь α_{kj} — произвольные комплексные постоянные, подлежащие определению.

Предположим, что функции $\varphi_{j1}(z_j)$ известны. Тогда из граничных условий (1.4) методом Н. И. Мусхелишвили [7] на прямолинейной границе полуплоскости найдем

$$\varphi_{j2}(z_j) = \sum_{n=1}^{3} l_{jn} \bar{\varphi}_{n1}(s_{nj} z_j) \tag{2.3}$$

Здесь коэффициенты l_{jn} и s_{nj} вычисляются по формулам (1.5) и (1.7).

Функции (1.2) примут вид

$$\varphi_j(z_j) = \frac{Q}{2\pi} K_j \ln z_j + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_{kj}}{[\zeta_j(z_j)]^k} + \sum_{n=1}^{3} \frac{l_{jn}\bar{\alpha}_{kn}}{[\bar{\zeta}_n(z_j)]^k} \right\} \tag{2.4}$$

Здесь функции $\zeta_j(z_j)$, $\bar{\zeta}_n(z_j)$ связаны с z_j при помощи следующих неявных зависимостей:

$$z_j - h = R_j \left(\zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j} \right), \qquad s_{nj} z_j - h = \bar{R}_n \left(\bar{\zeta}_n + \frac{\bar{m}_n}{\bar{\zeta}_n} \right) \tag{2.5}$$

$$(n,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

При этом

$$R_j = \frac{a - i\mu_j b}{2}, \qquad m_j = \frac{a + i\mu_j b}{a - i\mu_j b}$$

Функции $\ln z_j$, $[\bar{\zeta}_\nu(z_j)]^{-k}$ являются голоморфными внутри эллипсов $L_{j\nu}$. Поэтому их можно внутри эллипсов, включая и их границы, разложить в ряды по полиномам Фабера. Будем иметь

$$\ln z_j = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)} P_n(z_j), \qquad [\bar{\zeta}_\nu(z_j)]^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn}^{(\nu, j)} P_n(z_j) \tag{2.6}$$

Здесь

$$P_n(z_j) = \zeta_j^n + \frac{m_j^n}{\zeta_j^n}$$

Принимая во внимание разложения (2.6), из граничных условий (1.4) на контуре отверстия, где $\zeta = \zeta_j = \sigma$, методом рядов получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных α_{kj}:

$$\alpha_{kj} + \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{3}\left[l_{jn} m_j^k A_{pk}^{(n,j)} \alpha_{pn} - \sum_{m=1}^{3} l_{jm}\bar{l}_{mn}\overline{A_{pk}^{(n,m)}}\,\bar{\alpha}_{pn}\right] =$$

$$= -Q_1\left[K_j m_j^k C_k^{(j)} - \sum_{n=1}^{3} l_{jn}\bar{K}_n\overline{C_k^{(n)}}\right] \qquad (2.7)$$

где $Q_1 = \dfrac{Q}{2\pi}$.

Таким же образом, как и в работе [4], можно доказать, что система (2.7) является квазирегулярной при любой близости отверстия к границе полуплоскости и имеет единственное решение [2]. Следовательно, ее можно решать методом редукции.

Получив решение системы (2.7), найдем приближенные значения функций $\varphi_j(z_j)$, а следовательно, и значения механических напряжений и электростатической индукции, возникающих в полуплоскости.

При проведении численных расчетов было принято, что пластинка изготовлена из кристалла бифталата калия [1], для которого комплексные параметры μ_j получаются такими:

$$\mu_1 = i\,0.831 \qquad \mu_2 = 0.685 + i\,0.783 \qquad \mu_3 = -0.685 + i\,0.783$$

В широких пределах варьировались расстояния h между центром эллиптического отверстия и границей полуплоскости, а также отношение $c=b/a$.

В полученном решении граничные условия на границе полуплоскости L_1 удовлетворялись точно, а на контуре эллиптического отверстия — приближенно, так как бесконечная система (2.7) при проведении расчетов была урезана. Количество уравнений при ее решении варьировалось от восемнадцати до пятидесяти четырех. Оно увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контуре L_2 не удовлетворялись с точностью до 3% от интенсивности заряда.

В табл. 1 приведены значения механических напряжений σ_θ и электростатической индукции D_θ, возникающих на площадках, нормальных к контуру кругового отверстия, для разных расстояний между центром отверстия и границей полуплоскости.

В табл. 2 даны значения напряжений σ_x, σ_y и индукции D_x в точках перемычки (в этих точках напряжения τ_{xy} и индукция D_y равны нулю) и значения σ_x и D_x на границе полуплоскости, где σ_y, τ_{xy} и D_y равны нулю.

Максимальные значения напряжений σ_θ и индукции D_θ, возникающих на площадках, нормальных к контуру кругового и эллиптических отверстий, для разных расстояний между центром отверстия и границей полуплоскости приведены в табл. 3.

Во всех таблицах значения механических напряжений даны с точностью до $10^3\,\dfrac{Q}{2\pi}$, а значения электростатической индукции — с точностью до $\dfrac{Q}{2\pi}$.

Таблица 1

h / $\theta°$	10		5		4		3		2.5		2	
	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ
0	−0.04	0	−0.07	0	−0.10	0	−0.14	0	−0.17	0	−0.28	0
15	0.11	0.09	0.18	0.16	0.21	0.18	0.27	0.21	0.31	0.24	0.37	0.27
30	0.42	0.17	0.72	0.29	0.89	0.34	1.22	0.41	1.39	0.46	1.62	0.51
45	0.09	0.22	0.36	0.40	0.50	0.47	0.66	0.58	0.96	0.65	1.56	0.73
60	−1.09	0.26	−1.68	0.48	−1.88	0.58	−2.02	0.71	−2.12	0.81	−2.27	0.93
75	−1.86	0.29	−3.36	0.55	−3.92	0.67	−4.60	0.84	−5.04	0.97	−5.45	1.13
90	−2.18	0.30	−4.19	0.60	−5.09	0.75	−6.46	0.98	−7.26	1.15	−8.13	1.38
105	−2.22	0.32	−4.5[illegible]	0.66	−5.81	0.83	−7.66	1.13	−9.04	1.36	−10.93	1.71
120	−1.66	0.32	−3.94	0.69	−5.26	0.90	−7.58	1.28	−9.44	1.60	−11.65	2.11
135	−0.22	0.29	−1.06	0.68	−1.78	0.91	−3.62	1.36	−5.39	1.78	−8.16	2.52
150	0.47	0.23	0.92	0.56	1.01	0.77	0.92	1.22	0.26	1.69	−1.92	2.64
165	0.23	0.13	0.66	0.32	0.97	0.45	1.65	0.74	2.28	1.08	3.16	1.86
180	0.05	0	0.32	0	0.62	0	1.40	0	2.52	0	5.21	0

Таблица 2

	h / x	$c=1/1$						$c=1/2$	$c=2/1$
		10	5	4	3	2.5	2	3	3
$y=0$	$1/4(h-a)$	−2.90	−6.49	−8.61	−12.82	−17.00	−25.30	−25.53	−12.58
σ_x	$1/2(h-a)$	−1.41	−2.97	−3.81	−5.36	−6.82	−9.74	−10.35	−4.76
	$3/4(h-a)$	−0.79	−1.23	−1.34	−1.50	−1.71	−2.40	−2.62	−1.22
	$h-a$	−0.00	−0.01	−0.01	−0.04	−0.04	−0.17	−0.10	0.00
$y=0$	$1/4(h-a)$	−0.01	−0.15	−0.31	−0.79	−1.46	−3.17	−2.44	−1.84
σ_y	$1/2(h-a)$	−0.01	−0.09	−0.16	−0.32	−0.48	−0.74	−0.81	−0.27
	$3/4(h-a)$	−0.02	−0.00	0.09	0.50	1.07	2.47	1.55	1.47
	$h-a$	0.05	0.32	0.62	1.40	2.52	5.21	4.34	3.22
$x=0$	$1/4(h-a)i$	−0.02	−0.20	−0.42	−1.12	−2.12	−4.88	−3.59	−2.98
σ_y	$1/2(h-a)i$	0.00	−0.03	−0.09	−0.36	−0.82	−2.34	−1.70	−1.47
	$3/4(h-a)i$	0.02	0.13	0.22	0.41	0.52	0.38	0.34	0.20
	$(h-a)i$	0.01	0.17	0.34	0.79	1.30	2.23	1.66	1.39
$y=0$	$1/4(h-a)$	−0.75	−1.68	−2.24	−3.35	−4.45	−6.63	−6.67	−3.29
D_x	$1/2(h-a)$	−0.37	−0.82	−1.08	−1.58	−2.07	−3.02	−3.11	−1.47
	$3/4(h-a)$	−0.23	−0.49	−0.62	0.87	−1.09	−1.51	−1.66	−0.69
	$h-a$	−0.00	−0.00	−0.00	−0.00	−0.00	−0.01	−0.00	−0.00
$x=0$	$1/4(h-a)i$	−1.04	−2.56	−3.15	−4.74	−6.34	−9.56	−9.52	−4.79
D_y	$1/2(h-a)i$	−0.52	−1.19	−1.59	−2.42	−3.26	−4.96	−4.89	−2.51
	$3/4(h-a)i$	−0.35	−0.89	−1.08	−1.65	−2.24	−3.47	−3.38	−1.77
	$(h-a)i$	−0.26	−0.60	−0.81	−1.26	−1.73	−2.72	−2.62	−1.40

Таблица 3

c \ h	10		5		4		3	
	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ
$c=1/1$	−2.22	0.32	−4.59	0.69	−5.81	0.91	−7.66	1.36
$c=2/1$	−3.64	0.45	−6.49	0.93	−7.77	1.16	−9.07	1.61
$c=1/2$	−1.58	0.28	−3.84	0.76	−5.73	1.15	−9.63	2.24

Как показывают расчеты, с приближением отверстия к границе полуплоскости сильно возрастает концентрация механических напряжений и электростатической индукции около контуров и в зоне между контурами. Особенно большие напряжения σ_θ возникают в точках перемычки, близких к точке приложения электрического заряда, когда $c < 1$.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила 20 IV 1970

Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄԻԱՆՍԿԻ, Ա. Պ. ԿՐԱՎՉԵՆԿՈ, Վ. Ն. ԼՈԺԿԻՆ

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՑՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ՊՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵԶՐԱԳԾԻ ՎՐԱ ԿԵՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԼԻՑՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Տրվում է էլիպսական անցքով թուլացված բարակ պյեզոէլեկտրական սալի ընդհանրացված հարթ լարված վիճակի խնդրի լուծումը: Էլիպսական անցքը տեղավորված է սալի ուղղագիծ եզրի մոտ։

Խնդրի լուծումը բերվում է ֆունկցիոնալային գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծման:

Բերված են սալի էլեկտրաառաձգական վիճակի թվային ուսումնասիրությունները:

ON ACTION OF ELECTRICAL POINT CHARGE ON THE BOUNDARY OF PIEZOELECTRICAL HALF-PLANE WEAKENED BY AN ELLIPTIC HOLE

A. S. KOSMODAMIANSKY, A. P. KRAVCHENKO, V. N. LOZHKIN

Summary

A solution is given to the problem of a generalised plane strained state of a thin piezoelectrical plate with an elliptic hole placed near rectilinear boundary.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вековищева И. А.* Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. Прикл. механ., 1975, т. 11, № 2.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. ИФМЛ, 1962.
3. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. Прикл. механ., 1975, т. 11, в. 5.
4. *Космодамианский А. С.* Квазирегулярность бесконечных систем в задачах о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями. Прикл. механ., 1965, т. 1, в. 10.
5. *Калоеров С. А., Космодамианский А. С.* О действии сосредоточенных сил в анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием. Теорет. и прикл. механ., 1970, в. 1.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехтеориздат, 1957.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во «Наука», 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ НАИМЕНЬШЕГО ОБЪЕМА ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Задачи проектирования трехслойных конструкций наименьшего объема в рамках теории идеально-пластического материала при кусочно-линейных поверхностях текучести рассматривались во многих работах (напр., [1]—[5] и др.).

Проектированию однослойных конструкций наименьшего объема на основе теории идеальной пластичности посвящено сравнительно мало исследований ([6]—[8] и др.).

Наиболее полное представление о современном состоянии оптимального проектирования тонкостенных конструкций можно составить с помощью работ [9]—[11].

В настоящей статье рассматривается осесимметричная задача проектирования круглой однослойной пластинки наименьшего объема в рамках деформационной теории произвольно упрочняющегося материала при заданной изгибающей нагрузке. Нахождение оптимизирующей толщины пластинки сводится к решению краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Следуя [13], путем введения неизвестной постоянной и специальных обозначений, решение отмеченной краевой задачи сводится к решению задачи Коши для линейной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Показывается, что для защемленных по контуру пластинок рассматриваемая задача не имеет решения, то есть не существует такого совместного поля перемещений, которое при данном уровне упрочнения одновременно удовлетворяло бы уравнению равновесия и достаточному условию минимальности объема пластинки [3]. Задача же шарнирно опертых пластинок имеет решение, причем не только при свободном опирании, но и при наличии опорных моментов, приложенных в положительном направлении.

В качестве примера рассмотрен случай шарнирно опертой пластинки, несущей равномерно распределенную поперечную нагрузку и положительные равномерно распределенные по контуру изгибающие моменты. Решение получается для произвольно упрочняющегося материала, обсуждение же вопроса экономии материала производится при линейном упрочнении.

1. Известно [3], что постоянство работы напряжений на деформации единичного объема является достаточным условием для обеспечения наименьшего объема пластинки. Это условие в случае осесимметричного поперечного изгиба пластинки можно записать в виде

$$\frac{M_1\varkappa_1 + M_2\varkappa_2}{h} = \text{const} > 0 \qquad (1.1)$$

где h—толщина, M_1, M_2 и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$— изгибающие моменты и соответствующие кривизны.

В рамках деформационной теории произвольно упрочняющегося материала имеем [13]

$$M_1 = -\left(\varkappa_1 + \frac{\varkappa_2}{2}\right) J(P_\varkappa), \quad M_2 = -\left(\varkappa_2 + \frac{\varkappa_1}{2}\right) J(P_\varkappa) \tag{1.2}$$

где

$$J(P_\varkappa) = h^3 F(h\sqrt{P_\varkappa}), \qquad F(h\sqrt{P_\varkappa}) = \frac{\sqrt{3}}{(h\sqrt{P_\varkappa})^3} \int\limits_0^{\frac{h\sqrt{P_\varkappa}}{\sqrt{3}}} \tau_i \varepsilon_i \, d\varepsilon_i \tag{1.3}$$

Здесь ε_i и τ_i — интенсивности деформаций сдвигов и касательных напряжений, $P_\varkappa$— неотрицательная квадратичная форма

$$P_\varkappa = \varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 \tag{1.4}$$

С учетом (1.2)—(1.4) условию (1.1) можно придать вид

$$(h\sqrt{P_\varkappa})^2 F(h\sqrt{P_\varkappa}) = \text{const} > 0 \tag{1.5}$$

Имея в виду неотрицательность F, условие (1.5) можно заменить идентичным, но более простым условием

$$h\sqrt{P_\varkappa} = \sqrt{3}\,\varepsilon_i\big|_{z=\pm h/2} = \sqrt{3}\,\varepsilon_1 = \text{const} > 0 \tag{1.6}$$

Кроме простоты, условие (1.6) имеет еще одно важное преимущество по сравнению с условием (1.5) .Оно заключается в том, что условие (1.6) не зависит от физико-механических свойств материала, в силу чего оно позволяет получить решение задачи в общем случае, при произвольном упрочнении. Замена условия (1.5) условием постоянства интенсивности деформаций сдвигов крайних плоскостей пластинки $\varepsilon_i/z = \pm h/2 = \varepsilon_1$ представляется целесообразной, так как при упрочнении материала значение интенсивности сдвигов является прочностной характеристикой пластинки и исходным данным для определения допускаемого значения $h\sqrt{P_\varkappa}$.

Таким образом, для обеспечения наименьшего объема пластинки достаточно, чтобы интенсивность деформаций сдвигов ε_i на крайних плоскостях пластинки $z = \pm h/2$ приняла постоянное значение ε_1.

С учетом этого обстоятельства, задаче проектирования пластинки наименьшего объема можно придать следующую формулировку: для данной изгибающей нагрузки и постоянного значения ε_1 определить ту толщину h, при которой удовлетворяются уравнение равновесия и соответствующие краевые условия пластинки.

Внеся значения изгибающих моментов (1.2) в дифференциальное уравнение равновесия пластинки

$$\frac{dM_1}{dr} + \frac{M_1 - M_2}{r} = -\frac{1}{r}\int_0^r qr\,dr \tag{1.7}$$

и имея в виду, что F постоянна, получим

$$\frac{d}{dr}\left[h^3\left(\varkappa_1 + \frac{\varkappa_2}{2}\right)\right] + \frac{h^3}{2r}(\varkappa_1 - \varkappa_2) - \frac{1}{Fr}\int_0^r qr\,dr = 0 \tag{1.8}$$

С помощью (1.6), исключив толщину h из (1.8) и учитывая, что в осесимметричном случае изгиба круглых пластинок

$$\varkappa_1 = \frac{d^2w}{dr^2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}, \qquad \varkappa_1 = \frac{d}{dr}(r\varkappa_2) = \varkappa_2 + r\frac{d\varkappa_2}{dr} \tag{1.9}$$

где $w(r)$ — прогиб пластинки, находим

$$\begin{aligned} 3\left[9\varkappa_2\frac{d\varkappa_2}{dr} + 5r\left(\frac{d\varkappa_2}{dr}\right)^2 + 3r\varkappa_2\frac{d^2\varkappa_2}{dr^2} + 2r^2\frac{d\varkappa_2}{dr}\frac{d^2\varkappa_2}{dr^2}\right]\left(3\varkappa_2 + 2r\frac{d\varkappa_2}{dr}\right) - \\ -4\left(3\frac{d\varkappa_2}{dr} + r\frac{d^2\varkappa_2}{dr^2}\right)\left[3\varkappa_2^2 + 3r\varkappa_2\frac{d\varkappa_2}{dr} + r^2\left(\frac{d\varkappa_2}{dr}\right)^2\right] + \\ + \frac{4\left[3\varkappa_2^2 + 3r\varkappa_2\frac{d\varkappa_2}{dr} + r^2\left(\frac{d\varkappa_2}{dr}\right)^2\right]^{5/2}}{3\sqrt{3}\,F\varepsilon_s^2 r}\int_0^r qr\,dr = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Следуя [13], положим

$$r = Ce^{-\rho}, \quad \frac{h_0}{2\varepsilon_s}\varkappa_2 = -\varkappa, \quad \frac{d\varkappa}{d\rho} = v \tag{1.11}$$

где ε_s — предел упругих деформаций материала, C — неизвестная постоянная, h_0 — толщина пластинки в ее центре $r=0$ $(\rho=\infty)$. С учетом (1.11), вместо нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (1.10), получим следующую систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{d\varkappa}{d\rho} = v \\ &\frac{dv}{d\rho} = v\,\frac{30\varkappa^2 - 39\varkappa v + 10v^2 + (\overline{P}_\varkappa)^{5/2}\,\frac{\overline{q}}{v}\,e^{-2\rho}}{15\varkappa^2 - 24\varkappa v + 8v^2} = \varphi(\varkappa, v) \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\overline{q} = \frac{8\varepsilon_s^2 C^2 q_{кр}\,e^{2\rho}}{3\sqrt{3}\,Fh_0\varepsilon_s^2}\int_\rho^\infty \frac{q}{q_{кр}}\,e^{-2\rho}\,d2\rho, \qquad \overline{P}_\varkappa = 3\varkappa^2 - 3\varkappa v + v^2 \tag{1.13}$$

q_{cp} — среднее значение распределенной нагрузки.

В центре пластинки ($r=0$, $\rho=\infty$) кривизны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ отрицательны и равны между собой, вследствие чего из (1.9) следует, что $v=0$ и относительная кривизна $\varkappa=\varkappa_0=\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_2}$ положительна.

Таким образом, представление (1.12) позволяет краевую задачу формально свести к задаче Коши с начальными условиями

$$\rho=\infty,\quad \varkappa=\varkappa_0,\quad v=0 \tag{1.14}$$

Как нетрудно заметить, численное интегрирование уравнений (1.12) при начальных условиях (1.14), заданных для бесконечно удаленной точки, невозможно реализовать. С целью нахождения начальных условий при конечном ρ решение (1.12) в окрестности $\rho=\infty$ представим в виде

$$\begin{aligned} \varkappa &= \varkappa_0 + b_1 e^{-2\rho} + \cdots \\ v &= b_2 e^{-2\rho} + \cdots \end{aligned} \tag{1.15}$$

Нагрузку пластинки представим в виде

$$q(r)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n\left(\frac{r}{a}\right)^n \tag{1.16}$$

где a — радиус пластинки.

С учетом (1.11), (1.13) и (1.16) имеем

$$\bar{q}(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{q}_n e^{-(n+2)\rho},\qquad \bar{q}_n=\frac{16\varepsilon_*^2 q_{cp} a^2}{3\sqrt{3}(2+n)Eh_0^2\varepsilon_1^3}\,\frac{q_n}{q_{cp}}\left(\frac{C}{a}\right)^{n+2} \tag{1.17}$$

Подставляя (1.15) в (1.12) и приравнивая коэффициенты при $e^{-2\rho}$, для b_1 и b_2 с учетом (1.17) получим

$$b_1=\frac{3\sqrt{3}}{40}\sqrt[3]{\varkappa_0\bar{q}_0},\qquad b_2=-2b_1 \tag{1.18}$$

где

$$\bar{q}_0=\frac{C^2}{3\sqrt{3}Eh_0^2\varepsilon_1\varkappa_0^3}\,q_0 \tag{1.19}$$

С учетом (1.18) и (1.15) для больших ρ имеем

$$\begin{aligned} \varkappa &= \varkappa_0+\frac{3\sqrt{3}}{40}\sqrt[3]{\varkappa_0\bar{q}_0}\,e^{-2\rho}+\cdots \\ v &= -\frac{3\sqrt{3}}{20}\sqrt[3]{\varkappa_0\bar{q}_0}\,e^{-2\rho}+\cdots \end{aligned} \tag{1.20}$$

Теперь для некоторого достаточно большого ρ_1 из (1.20) можно определить $\varkappa_1$ и v_1.

Перепишем уравнения (1.12) в конечных разностях

$$\Delta\varkappa = v\Delta\rho, \quad \Delta v = \varphi(\varkappa, v)\,\Delta\rho \tag{1.21}$$

В качестве начальных условий имеем

$$\rho = \rho_1, \quad \varkappa = \varkappa_1, \quad v = v_1 \tag{1.22}$$

Задаваясь некоторым значением безразмерного $\overline{q}_0$ и отношения $\dfrac{C}{a}$, с помощью (1.21) и (1.22) вычисляем последовательные значения $\varkappa$ и v до тех пор, пока не удовлетворится граничное условие пластинки.

В случае защемления это условие имеет вид

$$\varkappa = 0, \quad \left(\frac{dw}{dr}\bigg|_{r=a} = -\frac{2\varepsilon_s}{h_0} r\varkappa\Big|_{r=a} = 0\right) \tag{1.23}$$

В случае шарнирного опирания

$$\frac{3\varkappa - 2v}{(\overline{P}_\varkappa)^{3/2}} - \overline{M}_1 = 0, \quad \left(M_1\Big|_{r=a} = \frac{q_0}{\overline{q}_0} C^2 \overline{M}_1\Big|_{r=a} = 0\right) \tag{1.24}$$

При шарнирном опирании, когда по шарнирно-опертому краю пластинки приложены постоянные равномерно распределенные изгибающие моменты с интенсивностью M_1^*, граничное условие будет

$$\frac{3\varkappa - 2v}{(\overline{P}_\varkappa)^{3/2}} = \overline{M}_1^* \tag{1.25}$$

Пусть граничное условие удовлетворяется при $\rho = \rho_a$. Тогда, согласно (1.11),

$$\frac{C}{a} = e^{\rho_a} \tag{1.26}$$

Значение e^{ρ_a}, вообще говоря, не будет совпадать с первоначальным значением C/a. Этого можно добиться, решая трансцендентное уравнение

$$\frac{C}{a} = e^{\rho_a\left(\frac{C}{a}\right)} \tag{1.27}$$

для чего следует повторить решение для разных первоначальных значений C/a.

Заметим, что этот вопрос в случае равномерной нагрузки решается очень просто. Тогда не нужно задаваться первоначальным значением неизвестного отношения C/a, оно определяется непосредственно из (1.26), без решения трансцендентного уравнения.

После определения неизвестной постоянной C из (1.19) для толщины пластинки в ее центре находим

$$h_0 = \frac{C}{\varkappa_0}\sqrt{\frac{2\overline{q}_0}{3\sqrt{3}E\varepsilon_s q_0}} \tag{1.28}$$

Толщина же произвольного сечения пластинки с помощью (1.6) определится формулой

$$h(\rho) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\overline{P}_x}}\varkappa_0 h_0 \tag{1.29}$$

Имея значения толщины произвольного сечения, для объема пластинки $V_{\text{вер}}$ получим

$$V_{\text{вер}} = 2\sqrt{3}\pi\sqrt{\frac{2q_0}{3\sqrt{3}F\varepsilon_s q_0}}\,C^3\int_{\rho_a}^{\infty} e^{-2\rho}(\overline{P}_x)^{-1/2}d\rho \tag{1.30}$$

Прогибы пластинки вычисляются по формуле [14]

$$w(\rho) = \frac{2\varepsilon_s}{h_0}C^2\int_{\rho_a}^{\infty}\varkappa e^{-2\rho}d\rho \qquad (\rho_a \leqslant \rho \leqslant \infty) \tag{1.31}$$

где для $\varkappa$ при больших ρ можно использовать асимптотическое разложение (1.20).

В нижеприведенной таблице приведены результаты вычисления значений некоторых расчетных величин пластинки при постоянной нагрузке q_0 для трех случаев: $z_s = 0$, $(\varkappa_0 = 0.5)$, $z_s = \dfrac{h}{8}$, $\left(\varkappa_0 = \dfrac{2}{3}\right)$ и $z_s = \dfrac{h}{4}$, $(\varkappa_0 = 1)$, где z_s — толщина зоны пластических деформаций*.

Следует отметить, что эта таблица носит относительный характер и представляет собой общее решение задачи при произвольном упрочнении материала. В каждом конкретном случае для данного закона упрочнения и заданного значения $h\sqrt{Px} = \sqrt{3}\,\varepsilon_1$ с помощью этой таблицы можно определить все необходимые величины. Это делается следующим порядком. С самого начала определяется неизвестная постоянная C. Затем с помощью (1.3) и (1.28) вычисляется значение толщины пластинки в ее центре h_0. Далее, используя формулы пересчета

$$\begin{gathered}\varkappa_1 = -\frac{2\varepsilon_s}{h_0}(\varkappa - v), \qquad \varkappa_2 = -\frac{2\varepsilon_s}{h_0}\varkappa, \qquad h = \sqrt{3}\,\varkappa_0 h_0 \overline{h} \\ M_1 = \frac{q_0}{q_0}C^2\overline{M}_1, \qquad M_2 = \frac{q_0}{q_0}C^2\overline{M}_2, \qquad w = \frac{2\varepsilon_s}{h_0}C^2\overline{w}\end{gathered} \tag{1.32}$$

определяются кривизны $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, толщина h, изгибающие моменты M_1, M_2 и прогиб w произвольного сечения пластинки ρ $\left(\text{или } \dfrac{r}{a} = e^{\rho_a - \rho}\right)$.

Как видно из третьих и четвертых столбцов табл. 1, при удалении от центра пластинки $\rho = \infty$ значения $\varkappa$, начиная от $\varkappa_0 > 0$, монотонно возрас-

* Вычисления проводились на машине «Наири-2». Машинное время—12 мин. В таблице приведены результаты вычислений только для некоторых ρ.

Таблица 1

$\varkappa_0=0.5,\ \rho_a=0.0674,\ \frac{C}{a}=1.0697,\ \overline{q}_0=10$								$\varkappa_0=1,\ \rho_a=0.045,\ \frac{C}{a}=2.1598,\ \overline{q}_0=10$							
ρ	$\frac{r}{a}$	$\varkappa$	$-v$	$\overline{h}$	$\overline{M}_1$	$\overline{M}_2$	$\overline{w}$	ρ	$\frac{r}{a}$	$\varkappa$	$-v$	$\overline{h}$	$\overline{M}_1$	$\overline{M}_2$	$\overline{w}$
3	0	0.5	0	1.154	2.309	2.309	0.275	3.0	0	1.003	0.006	0.578	0.571	0.571	0.133
2.4	0.097	0.501	0.003	1.149	2.287	2.283	0.274	2.6	0.160	1.007	0.015	0.569	0.562	0.560	0.131
2.0	0.145	0.503	0.006	1.141	2.259	2.250	0.271	2.0	0.292	1.025	0.051	0.549	0.527	0.519	0.125
1.7	0.195	0.506	0.011	1.129	2.218	2.202	0.267	1.8	0.357	1.038	0.081	0.535	0.503	0.490	0.120
1.4	0.264	0.510	0.021	1.109	2.143	2.114	0.260	1.6	0.436	1.058	0.129	0.514	0.466	0.448	0.113
1.0	0.394	0.524	0.052	1.050	1.939	1.879	0.241	1.4	0.533	1.092	0.215	0.481	0.412	0.388	0.102
0.8	0.481	0.537	0.084	0.996	1.759	1.675	0.223	1.3	0.569	1.116	0.285	0.458	0.376	0.348	0.095
0.6	0.587	0.559	0.145	0.912	1.491	1.381	0.196	1.2	0.651	1.149	0.388	0.428	0.332	0.301	0.085
0.4	0.717	0.600	0.283	0.774	1.096	0.965	0.153	1.1	0.719	1.196	0.552	0.390	0.278	0.245	0.073
0.2	0.876	0.693	0.778	0.522	0.518	0.407	0.081	1.0	0.795	1.264	0.842	0.339	0.214	0.181	0.058
0.1	0.968	0.824	2.456	0.266	0.139	0.093	0.024	0.9	0.878	1.375	1.482	0.267	0.136	0.107	0.038
0.08	0.987	0.890	4.645	0.166	0.055	0.033	0.010	0.8	0.970	1.617	4.273	0.146	0.042	0.028	0.011
0.068	0.999	0.992	25.964	0.036	0.003	0.001	0.001	0.79	0.980	1.665	5.274	0.127	0.031	0.021	0.007
0.0674	1	1.021	255.1	0.004	0	0	0	0.77	1.0	1.812	11.075	0.072	0.010	0.006	0

тают, а значения v, наоборот, убывают и при некоторых умеренных $\varkappa$ стремятся к минус бесконечности. Это означает, что нигде невозможно удовлетворить условие жесткого защемления $\varkappa=0$.

Таким образом, для защемленной однослойной пластинки невозможно найти такое совместное поле перемещений, которое при данном постоянном уровне упрочнения материала на крайних плоскостях $z=\pm h/2$ удовлетворило бы уравнению равновесия. Следовательно, достаточное условие минимума объема (1.6) для защемленной пластинки является нереализуемым ограничением, тем самым оправдывается известное сомнение, высказанное в работе [3], относительно существования конструкций такого рода вообще.

Что касается случая свободного шарнирного опирания, то, как нетрудно заметить из шестых столбцов таблицы, поставленная задача имеет решение, так как можно удовлетворить условию равенства нулю изгибающего момента $M_1 = \frac{q}{q_0} C \cdot \overline{M}_1$.

Здесь уместно отметить, что относительный изгибающий момент $\overline{M}_1 = (3\varkappa - 2v)/(3\varkappa^2 - 3\varkappa v + v^2)^{3/2}$ монотонно убывает и стремится к нулю за счет того, что знаменатель $(3\varkappa^2 - 3\varkappa v + v^2)^{3/2}$ возрастает гораздо быстрее, чем его числитель $3\varkappa - 2v$. При этом любопытна следующая деталь, что v от умеренных значений стремится к минус бесконечности настолько быстро, что длина участка больших кривизн $\varkappa_1$, для которых не допустима геометрически линейная постановка, составляет всего лишь 0,01 часть диаметра пластинки. Поэтому полученное решение шарнирно-опертой пластинки можно считать негодным лишь в очень узкой полосе вблизи у опорной кромки, где обычно не пользуются классическим решением и, учитывая перерезывающие усилия и некоторые конструктивные соображения, утолщают пластинку. Имея в виду то обстоятельство, что в силу наличия неизвестной постоянной C краем пластинки может служить любое ρ, легко заключить, что можно удовлетворить также условию опирания (1.25), когда на краю пластинки приложены изгибающие моменты M_1^0. Очевидно, что этот случай свободен от отмеченного выше недостатка, связанного с появлением больших значений кривизны $\varkappa_1$ вблизи у опорной кромки пластинки.

2. В случае линейного упрочнения

$$\sigma_i = E\varepsilon_i \left[1 - \lambda\left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right)\right] \tag{2.1}$$

где E — модуль Юнга, λ — параметр упрочнения материала, для постоянной F из (1.3) получим

$$F = \frac{E}{12(1-\nu^2)}\left[1 - \lambda\left(1 - \frac{3\varepsilon_s}{2\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_s^3}{2\varepsilon_1^3}\right)\right] \tag{2.2}$$

Через ν обозначен коэффициент Пуассона.

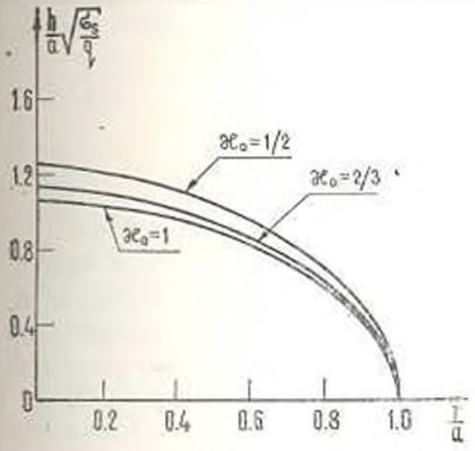
Ограничиваясь случаем равномерно распределенной нагрузки q_0, с учетом (1.17) имеем

$$\bar{q}_0 = \frac{q_0 C^2}{3\sqrt{3}\, F h_0^2 \varepsilon_s \varkappa_0^2} \tag{2.3}$$

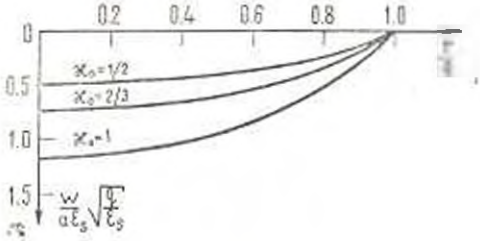
Рассмотрим следующий численный пример:

$$\frac{q}{E} = 10^{-5}, \quad \lambda = 0.95, \quad \nu = 0.5 \tag{2.4}$$

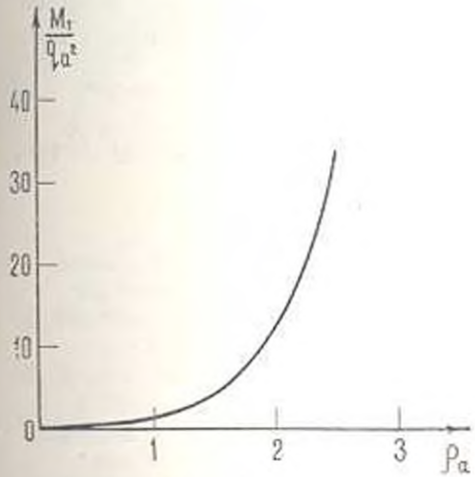
На основании таблицы и формул пересчета (1.32) на фиг. 1 и 2 построены графики изменения толщины и прогиба пластинки для трех случаев ($\varkappa_0 = 0.5$, $2/3$ и 1).



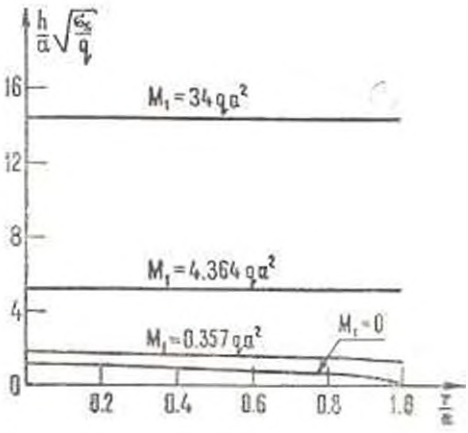
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



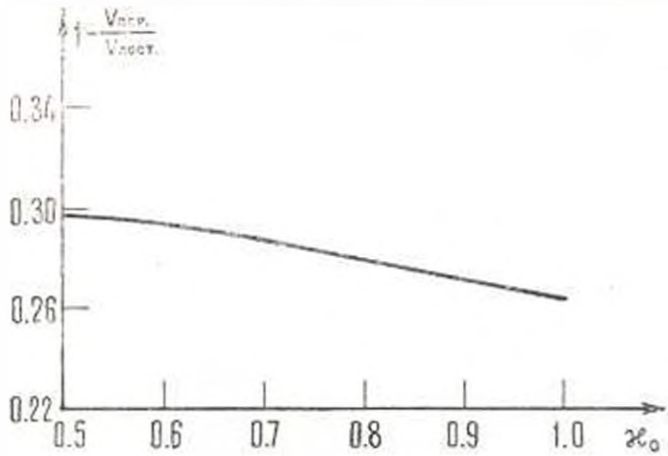
Фиг. 4.

На фиг. 3 построен график зависимости между опорным моментом и соответствующим значением ρ_a, принимаемым в качестве координаты края пластинки.

С увеличением значения опорного момента при неизменной поперечной нагрузке оптимизирующая толщина стремится к постоянной величине. Этот очевидный факт при $\varkappa_0 = 0.5$ проиллюстрирован на фиг. 4.

Как показывают вычисления, при одинаковой относительной глубине проникания пластической зоны $z_*/h = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\varkappa_0$ оптимальная пластинка всегда в центре толще, чем пластинка постоянной толщины, то есть

$$h_0^{опт} > h_{пост} \tag{2.5}$$



Фиг. 5.

На фиг. 5 показано изменение экономии в объеме оптимальной пластинки $\eta = 1 - V_{опт}/V_{пост}$ в зависимости от $\varkappa_0$. Как и следовало ожидать, при возрастании $\varkappa_0$ (то есть z_*/h) величина экономии материала уменьшается.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 III 1976

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՆՅՈՒԹԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻՑ ԴՈՒՐՍ ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԾԱՎԱԼԻ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Տրված ծռող բեռի համար կամայական ամրապնդվող նյութի դեֆորմացիոն տեսության շրջանակներում դիտարկվում է ամենափոքր ծավալի կլոր սալի նախագծման խնդիրը։ Օպտիմալ հաստության որոշումը բերվում է երկրորդ կարգի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման համար եզրային խնդրի լուծմանը։ Անհայտ հաստատունի ներմուծման և հատուկ նշանակումների միջոցով նշված եզրային խնդրի լուծումը բերվում է առաջին կարգի երկու գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի համար Կոշու խնդրի լուծմանը։

Ցույց է տրվում, որ եզրագծով ամրակցված սալի համար դիտարկվող խնդիրը լուծում չունի, իսկ հոդակապորեն հենված սալի խնդիրը լուծում ունի, ընդ որում ոչ միայն ազատ հենման, այլև դրական ուղղությամբ կիրառված հենարանային ծռող մոմենտների առկայության դեպքում։

Դիտարկվում է թվային օրինակ։

ON ONE PROBLEM FOR A CIRCULAR PLATE OF THE SMALLEST VOLUME BEYOND ELASTICITY OF MATERIAL

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

The problem of designing a one-layer circular plate of the smallest volume under a specified bending load for arbitrary hardened material is considered in terms of the deformation theory. The determining of the optimum thickness is reduced to the solution of a boundary problem for a non-linear differential equation of the second order.

By introducing an unknown constant and special designations, the solution of the above problem is reduced to that of the Cauchy problem for a linear system of two differential equations of the first order.

For plates fastened along the contour the problem in question is shown to have no solution.

The problem of hinge-supported plates may be solved not only for free-support conditions, but for supporting moments, applied in positive direction, as well.

A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Друккер Д., Шилд Р.* Границы для проектирования конструкций минимального веса. Сб. Механика, 1958, 3 (49).
2. *Фрайбергер В.* О проектировании цилиндрических слоистых оболочек минимального веса. Сб. Механика, 1958, 3 (49).
3. *Шилд Р.* Методы оптимального проектирования конструкций. Сб. Механика, 1962, 2 (72).
4. *Шамиев Ф. Г.* О проектировании оболочек минимального веса. Изв. АН АзССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1963, № 5.
5. *Шилд Р.* Методы оптимального проектирования при действии ряда независимых систем нагрузок. Сб. Механика, 1964, 2 (84).
6. *Прагер В.* Проектирование пластинок наименьшего веса. Сб. Механика, 1956, 6 (40).
7. *Гопкинс и Прагер.* Пределы экономии материала в пластинках. Сб. Механика, 1956, 6 (40).
8. *Дехтярь А. С., Ворнак М. Ш.* Оптимизационная задача для пластинки переменной толщины. Изв. высш. учебн. завед. «Стр-во и архит.», 1974, № 9.
9. *Рейтман М. И., Шапиро Г. С.* Теория оптимального проектирования в строительной механике теории упругости и пластичности. Сб. «Итоги науки». Упругость и пластичность. ВИНИТИ АН СССР, 1966.

10. *Чжи С. Я., Пратер В.* Последние достижения в оптимальном проектировании конструкций. Сб. Механика. 1969, 6 (118).
11. *Чирас А. А., Боркаускас Э., Каркаускас Р. П. Л.* Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Стройиздат. 1974.
12. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
13. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
14. *Киракосян Р. М.* Упруго-пластический осесимметричный изгиб круглой защемленной пластинки под действием конусообразно распределенной переменной нагрузки. Изв. АН АрмССР. Механика, 1972, т. XXV, № 1.

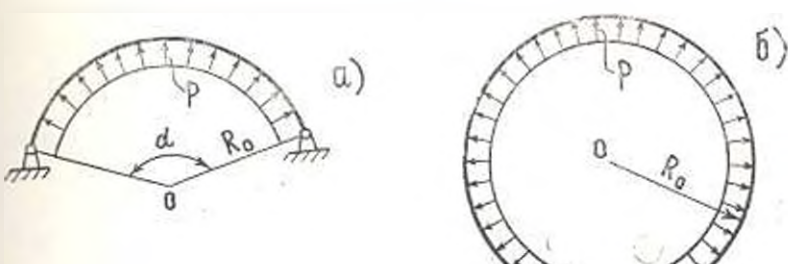
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

А. А. ЧАХОЯН

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

1. В некоторых практических случаях представляет интерес задача о колебаниях мягкой цилиндрической оболочки, подверженной внутреннему давлению, в частности, это относится к гибкому ограждению аппарата на воздушной подушке. Ниже рассматривается задача о свободных колебаниях такой оболочки, которая считается безмоментной и нерастяжимой, кроме того, будем пренебрегать весом оболочки. Поперечное сечение оболочки показано на фиг. 1а, причем невозмущенной формой сечения оболочки служит дуга окружности, определяемая радиусом R_0 и центральным углом α; полученные ниже результаты относятся, в частности, к случаю $\alpha=2\pi$ (фиг. 1б). Величину давления p будем считать неизменной в процессе колебаний. Хотя в принципе можно было бы учесть изменение давления, возникающее в связи с изменением внутреннего объема оболочки, однако это привело бы к поправкам второго порядка малости. Считая задачу плоской, отнесем все рассуждения к оболочке, размер которой вдоль образующей равен единице.



Фиг. 1.

На фиг. 2 показан элемент оболочки A_0B_0 в состоянии равновесия, причем φ — полярная координата точки A_0, $N_0=pR_0$ — окружное нормальное усилие. В смещенном положении элемента (AB) на элемент действуют усилия N_0+N и $N_0+N+\frac{\partial N}{\partial \varphi}d\varphi$, где N — динамическая добавка, возникающая при колебаниях оболочки. Обозначив через u и v радиальное и тангенциальное перемещения точки A, можно найти угол поворота касательной в этой точке

$$\eta = \frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v\right) \tag{1.1}$$

Кроме того, запишем условия нерастяжимости [1]

$$u = -\frac{\partial v}{\partial \varphi} \tag{1.2}$$

Дифференциальные уравнения колебаний элемента оболочки в проекциях на направления u и v имеют вид

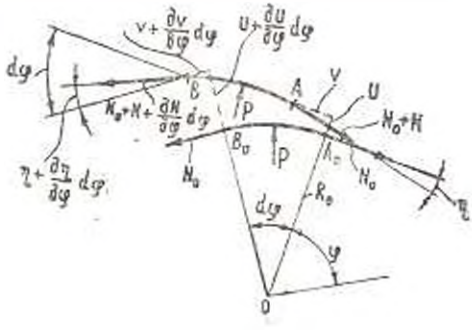
$$\rho R_0 d\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = pR_0 d\varphi \cos\eta - (N_0 + N)\sin\eta -$$

$$-\left(N_0 + N + \frac{\partial N}{\partial \varphi} d\varphi\right)\sin\left(d\varphi - \eta - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} d\varphi\right)$$

$$\rho R_0 d\varphi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -pR_0 d\varphi \sin\eta - (N_0 + N)\cos\eta +$$

$$+\left(N_0 + N + \frac{\partial N}{\partial \varphi} d\varphi\right)\cos\left(d\varphi - \eta - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} d\varphi\right)$$

где ρ — приведенная плотность (масса оболочки на единицу площади ее срединной поверхности).



Фиг. 2.

После упрощений имеем

$$\rho R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -N + N_0 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \qquad \rho R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial \varphi} \tag{1.3}$$

Исключая отсюда N, с учетом (1.1) и (1.2) получаем дифференциальное уравнение относительно перемещения v в виде

$$\rho R_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial \varphi^2}\right) + p\left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right) = 0$$

Принимая по методу Фурье

$$v(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\varphi)\, T_n(t) \tag{1.4}$$

получим

$$\rho R_0 \left(V_n - \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} \right) \frac{d^2 T_n}{dt^2} + p \left(\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} \right) T_n = 0$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + k_n T_n = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + 2\beta_n \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} - (2\beta_n - 1)\, V_n = 0 \tag{1.6}$$

где

$$2\beta_n = 1 + \rho \frac{R_0 k_n^2}{p}$$

k_n — постоянная разделения, имеющая смысл собственной частоты. Решения дифференциальных уравнений (1.5) и (1.6) имеют вид

$$T_n = D_{1n} \sin k_n t + D_{2n} \cos k_n t \tag{1.7}$$

$$V_n = C_{1n} \sin z_{1n}\varphi + C_{2n} \cos z_{1n}\varphi + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n}\varphi + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n}\varphi \tag{1.8}$$

где

$$z_{1n} = \sqrt{\sqrt{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1} + \beta_n}\,, \qquad z_{2n} = \sqrt{\sqrt{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1} - \beta_n} \tag{1.9}$$

Постоянные интегрирования C_{1n}, C_{2n}, C_{3n} и C_{4n} можно определить из граничных условий.

2. Для закрепленной неполной оболочки граничные условия $v_n(0, t) = v_n(\alpha, t) = 0$ и $u_n(0, t) = u_n(\alpha, t) = 0$ с учетом (1.2) и (1.4) приводят к однородной системе уравнений

$$C_{2n} + C_{4n} = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} + C_{3n} z_{2n} = 0$$

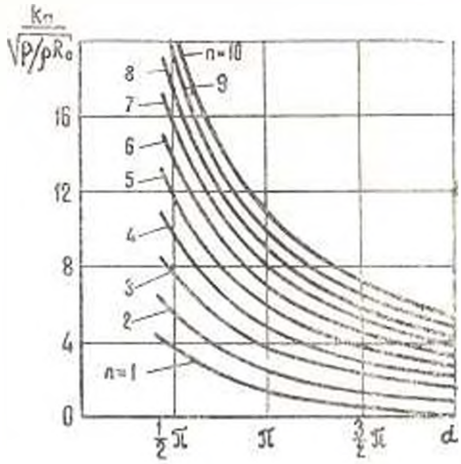
$$C_{1n} \sin z_{1n}\alpha + C_{2n} \cos z_{1n}\alpha + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n}\alpha + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n}\alpha = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} \cos z_{1n}\alpha - C_{2n} z_{1n} \sin z_{1n}\alpha + C_{3n} z_{2n} \operatorname{ch} z_{2n}\alpha + C_{4n} z_{2n} \operatorname{sh} z_{2n}\alpha = 0$$

Из условия существования нетривиального решения получим

$$2 z_{1n} z_{2n} (\cos z_{1n}\alpha \operatorname{ch} z_{2n}\alpha - 1) + (z_{1n}^2 - z_{2n}^2) \sin z_{1n}\alpha \operatorname{sh} z_{2n}\alpha = 0 \tag{2.1}$$

Выражая z_{1n} и z_{2n} через k_n, получаем трансцендентное уравнение относительно k_n. Результаты решения уравнения показаны на фиг. 3, где n — номер частоты (вычисления были выполнены на ЭЦВМ «Наири-К»).



Фиг. 3.

3. Для свободной оболочки (фиг. 1б) граничные условия переходят в условия периодичности

$$v(0,\ t)=v(2\pi,\ t),\quad u(0,\ t)=u(2\pi,\ t)$$
$$\gamma_1(0,\ t)=\gamma_1(2\pi,\ t),\quad N(0,\ t)=N(2\pi,\ t)$$

Второе из этих условий, согласно (1.2), принимает вид $\frac{\partial v}{\partial\varphi}(0,\ t)=$ $=\frac{\partial v}{\partial\varphi}(2\pi,\ t)$. Согласно (1.1), третье условие приводит к равенству $\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}(0,\ t)=\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}(2\pi,\ t)$. Аналогично с помощью (1.3) можно записать четвертое условие в виде $\frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}(0,\ t)=\frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}(2\pi,\ t)$. Учитывая (1.4) и (1.8), получим две системы уравнений

$$\begin{aligned} &C_{1n}\sin 2\pi z_{1n}+C_{2n}(\cos 2\pi z_{1n}-1)=0\\ &C_{1n}(\cos 2\pi z_{1n}-1)-C_{2n}\sin 2\pi z_{1n}=0\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &C_{3n}\,\mathrm{sh}\,2\pi z_{2n}+C_{4n}(\mathrm{ch}\,2\pi z_{2n}-1)=0\\ &C_{3n}(\mathrm{ch}\,2\pi z_{2n}-1)+C_{4n}\,\mathrm{sh}\,2\pi z_{2n}=0\end{aligned}\tag{3.2}$$

Система (3.2) при $k_n\neq 0$ имеет только тривиальное решение $C_{3n}=$ $=C_{4n}=0$, а из условия существования нетривиального решения системы (3.1)

$$\begin{vmatrix}\sin 2\pi z_{1n} & \cos 2\pi z_{1n}-1\\ \cos 2\pi z_{1n}-1 & -\sin 2\pi z_{1n}\end{vmatrix}=0$$

получаем уравнение

$$\cos 2\pi z_{1n} = 1 \tag{3.3}$$

Следовательно, $z_{1n} = n$, где n — целое положительное число. Для собственных частот свободных колебаний получим

$$k_n = n \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{p}{\rho R_0}} \tag{3.4}$$

Когда $n = 1$, получается $k_1 = 0$. В этом случае имеем $u = -C_{11}D_{21}\cos\varphi + C_{11}D_{11}\sin\varphi$, $v = C_{11}D_{11}\sin\varphi + C_{21}D_{21}\cos\varphi$ и оболочка движется как твердое тело. Для больших номеров

$$k_n \approx n \sqrt{\frac{p}{\rho R_0}} \tag{3.5}$$

4. Таким образом, вопрос о собственных частотах решается с помощью трансцендентного уравнения (2.1) (см. также график на фиг. 3) или формулами (3.4). Во всех случаях собственные частоты пропорциональны квадратному корню из величины внутреннего давления p.

Ленинградский кораблестроительный
институт

Поступила 29 III 1976

Ա. Ա. ՉԱԽՈՅԱՆ

ՆԵՐՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՆԵՐՔՈ ԱՆՄՈՄԵՆՏ
ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բերվում է ներքին ճնշման տակ գտնվող անկշիռ փափուկ գլանային թաղանթի ազատ տատանումների վերաբերյալ խնդրի լուծումը։ Թաղանթը ենթադրվում է անձգելի։ Խնդրի հարթ դրվածքում ստացվել են թաղանթի տատանումների սեփական հաճախականությունների որոշման համար արտահայտություններ։

NATURAL VIBRATION OF AN IMPONDERABLE CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO INNER PRESSURE

A. A. CHAKHOYAN

S u m m a r y

The solution to a problem of natural vibration of an imponderable soft cylindrical shell subjected to inner pressure is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, Г. С. БЕЗИРГЕНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОЙ ОБЛАСТИ В СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД В БЫСТРОТОКАХ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРОДОЛЬНЫМ УКЛОНОМ

Рассматривается задача о движении несжимаемых сред в лотках с криволинейной формой дна при наличии свободной поверхности и малой глубины потока. Выведены уравнения планового течения бурного потока над криволинейным дном, а затем проведено исследование окрестности слабых прыжков, образующихся в потоке. Выведено также уравнение, описывающее волновую окрестность для произвольной недиссипативной среды в трехмерной задаче. Вопросам исследования волновой зоны для задачи установившегося движения сжимаемой жидкости посвящены работы [1, 3]. Движение бурных потоков с прямолинейным дном рассмотрено в [2—4]. Криволинейность формы дна в той или иной постановке учтена в [5, 6, 7].

1. *Вывод уравнений планового движения*

Рассматривается задача о движении потока несжимаемой жидкости в криволинейном русле при наличии свободной поверхности. Для простоты рассматривается цилиндрическая форма русла и вводятся криволинейные ортогональные координаты $q_{1,2,3}$, где направление отсчета q_2 совпадает с осью цилиндрической поверхности, q_1 отсчитывается вдоль направляющей L цилиндрической поверхности, q_3 есть расстояние по нормали к указанной кривой. Пусть $\bar{r}=(x, y, z)$ есть радиус-вектор точки, а $\bar{r}_0$ соответствует радиусу-вектору точек кривой L. Тогда $\bar{r}=\bar{r}_0(q_1, q_2)+\bar{n}(q_1)q_3$, где $\bar{n}$ есть вектор единичной нормали на L. Тогда имеем параметры Ламэ $H_1=\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_1}\right|$, $H_2=\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_2}\right|$, $H_3=1$, причем можно считать $H_2=1$. Вводя еще выражение H_1 для кривой L, $H_1^0=\left|\frac{\partial\bar{r}_0}{\partial q_1}\right|$ и используя формулу $\frac{\partial\bar{n}}{\partial q_1}=\frac{1}{R}\bar{e}$, где $\bar{e}$ — единичный вектор касательной к кривой L, R — ее радиус кривизны, можно в силу $\frac{\partial\bar{r}_0}{\partial q_1}=H_1^0\bar{e}$ найти

$$H_1=H_1^0\left(1+\frac{q_3}{R}\right)$$

Пусть v_i есть компоненты скорости по осям q_i $(i=1, 2, 3)$. Тогда имеет место условие обтекания русла

$$q_3 = 0, \quad v_3 = 0 \tag{1.1}$$

Отсюда можно предположить, как и для прямолинейных форм русла, что v_3 мало по всей глубине потока. При отсутствии диссипации движение будет потенциальным, причем

$$v_i = \frac{\partial \Phi}{H_i \partial q_i} \tag{1.2}$$

Кинематическое условие на поверхности жидкости $q_3 = h$ имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_3} = \frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1}\frac{\partial h}{H_1 \partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\frac{\partial h}{\partial q_2} \tag{1.3}$$

Кроме того, имеет место уравнение Лапласа

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_2^2} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1 \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}\right) = 0 \tag{1.4}$$

и интеграл Бернулли

$$\frac{P - P_0}{\rho} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_3}\right)^2\right\} + U = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

причем потенциал силы тяжести имеет вид

$$U = -g\int_0^{q_1} H_1^0 \sin \nu \, dq_1 + g \cos \nu \, q_3$$

Здесь $\nu = \nu(q_1)$ есть острый угол касательной к кривой русла с горизонтальной осью x, P—давление, P_0—атмосферное давление, ρ—плотность. Записывая для всего потока малой глубины h

$$\Phi = \varphi(q_1, q_2) - \frac{q_3^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0 + \frac{q_3^3}{6}\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial q_3^3}\right)_0 \tag{1.6}$$

и подставляя в (1.4), можно получить соответственно в порядках $O(1)$

$$\frac{1}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1^0}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0 = 0$$

и $O(q_3)$

$$\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial q_3^3}\right)_0 = \frac{2}{H_1^0 R}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1^0}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} - \frac{1}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1^0 R}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right)$$

Условие (1.3) дает в порядке $O(h^2 u)$

$$\frac{\partial (hu)}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{\partial (hv)}{\partial q_2} - \frac{2h}{R}u\frac{\partial h}{H_1^0 \partial q_1} -$$

$$-\frac{1}{2}h^2\left(\frac{2}{R}\frac{\partial u}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{u}{R}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Из (1.2) и (1.6) можно записать при $q_3 = h$ в порядке $0(h^2u^2)$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{H_1\partial q_1}\right)^2 = u^2\left(1 - \frac{2h}{R}\right) + \frac{u}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{h^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_3^2}\right)_0\right\}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right)^2 = v^2 + v\frac{\partial}{\partial q_2}\left\{h^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_3^2}\right)_0\right\}, \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)^2 = h^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_3^2}\right)_0^2$$

Здесь $u = \dfrac{1}{H_1^0}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1}$, $v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_2}$ — компоненты скорости планового движения по осям q_1, q_2. Тогда из (1.5), взятого на поверхности жидкости, вдоль которой $P = P_0$, можно, дифференцируя по q_1, q_2, найти уравнения в порядке $O(h^2u^2)$

$$u\frac{\partial u}{H_1^0\partial q_1} + v\frac{\partial u}{\partial q_2} - \frac{1}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h}{R}u^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{u}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1} + v\frac{\partial}{\partial q_2}\right)h^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_3^2}\right)_0\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{h^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_3^2}\right)_0^2\right\} + \frac{1}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}(gh\cos\nu) - g\sin\nu = 0$$

$$u\frac{\partial v}{H_1^0\partial q_1} + v\frac{\partial v}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h}{R}u^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left\{\left(\frac{u}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1} + v\frac{\partial}{\partial q_2}\right)h^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_3^2}\right)_0\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left\{h^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_3^2}\right)_0^2\right\} + \frac{\partial gh\cos\nu}{\partial q_2} = 0 \tag{1.8}$$

Дифференцируя (1.5) по q_3, можно получить распределение давления по глубине, линейное относительно q_3, $P - P_0 = \rho(h - q_3)\left(g\cos\nu - \dfrac{u^2}{R}\right)$. Полученные уравнения можно упростить, оставляя в них члены порядка $O(hu^2)$ в уравнениях движения и $O(h^2u)$ в уравнении неразрывности. Тогда (1.8) даст уравнения движения

$$u\frac{\partial u}{H_1^0\partial q_1} + v\frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(gh\cos\nu - \frac{u^2h}{R}\right) - g\sin\nu = 0$$

$$u\frac{\partial v}{H_1^0\partial q_1} + v\frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(gh\cos\nu - \frac{u^2h}{R}\right) \tag{1.9}$$

а (1.7) дает уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(hu)}{H_1^0\partial q_1} + \frac{\partial(hv)}{\partial q_2} - \frac{2h}{R}u\frac{\partial h}{H_1^0\partial q_1} = 0 \tag{1.7}$$

Для конечных значений числа Фруда $\mathrm{Fr} = \frac{u^2}{gh\cos\nu}$ для основного одномерного потока имеет место $u^2 \sim h$, слагаемые, содержащие $\frac{h}{R}$, можно отбросить, и уравнения (1.9) по форме совпадут с уравнениями для прямолинейного русла. Для больших Fr, то есть $u^2 = O(1)$, можно получить вместо (1.7') в порядке $O(h)$

$$\frac{\partial (hu)}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{\partial (hv)}{\partial q_2} = 0 \tag{1.10}$$

причем (1.9) снова имеют место в порядке $O(hu^2)$.

Следует отметить, что второе уравнение (1.9) можно заменить на условие потенциальности

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1^0}\frac{\partial v}{\partial q_1} \tag{1.9'}$$

Уравнения (1.9), (1.9'), (1.10) можно записать в виде

$$u\frac{\partial u}{H_1^0\partial q_1} + v\frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1^0}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(gh\cos\nu - \frac{h}{R}u^2\right) - g\sin\nu = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{\partial v}{H_1^0\partial q_1} \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial (hu)}{H_1^0\partial q_1} + \frac{\partial (hv)}{\partial q_2} = 0$$

2. Условия на слабых и сильных скачках

Уравнение нелинейной характеристической кривой получается, как обычно, путем замены $\frac{\partial}{H_1^0\partial q_1} \to n_1\frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial q_2} \to n_2\frac{\partial}{\partial \xi}$, где $\xi = \mathrm{const}$ есть уравнение характеристики, $n_{1,2}$ — компоненты единичного вектора нормали к ней. Кроме того, можно ввести нормальную к характеристике, или волне, компоненту вектора скорости частицы $V_n = un_1 + vn_2$, которая связана с нормальной скоростью волны соответствующей нестационарной задачи равенством $V_n = -C_n$. Тогда из (1.11) можно получить

$$V_n^2 - 2V_n\frac{n_1}{R}hu - h\left(g\cos\nu - \frac{u^2}{R}\right) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{h}{n_1 V_n}\frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} \tag{2.1}$$

Из уравнений (1.11) можно получить лучевое решение, то есть линейное решение на волне. Пусть имеет место $u = u_0 + u_1$, $v = v_1$, $h = h_0 + h_1$, где u_1, v_1, h_1 — малые возмущения основного потока u_0, v_0, h_0 -

Переходя к переменным ξ, q_1, где $\xi = q_2 - q_2(q_1)$, причем $\xi = 0$ дает уравнение линейной волны, можно из (1.11) найти

$$h_1 = -\frac{u_0\left(1-\frac{2h_0}{R}\right)}{g\cos\nu - \frac{u_0^2}{R}}\,u_1, \qquad H_1^0\frac{\partial u_1}{\partial\xi} = \frac{\partial v_1}{\partial q_1} - q_2'\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \tag{2.2}$$

$$h_0\frac{\partial u_1}{H_1^0\partial q_1} - h_0\frac{q_2'}{H_1^0}\frac{\partial u_1}{\partial\xi} + h_0\frac{\partial v_1}{\partial\xi} + h_1\frac{du_0}{H_1^0 dq_1} +$$

$$+ u_1\frac{dh_0}{H_1^0 dq_1} + u_0\frac{\partial h_1}{H_1^0\partial q_1} - u_0\frac{q_2'}{H_1^0}\frac{\partial h_1}{\partial\xi} = 0$$

Приравнивая члены, содержащие производные по ξ, можно получить соотношения

$$v_1 = -\frac{H_1^0}{q_2'}u_1, \quad \frac{q_2'}{H_1^0} = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{h_0\left(g\cos\nu - \frac{u_0^2}{R}\right)}{u_0^2\left(1-\frac{2h_0}{R}\right)}} \tag{2.3}$$

которые согласуются с (2.1), где $n_1 = \sin\alpha$, $n_2 = \cos\alpha$, α — угол первой характеристики $\xi = 0$ с осью q_1. Из (2.2) можно найти

$$\frac{\partial u_1}{H_1^0\partial q_1}\left(h_0 - u_0^2\frac{1-\frac{2h_0}{R}}{g\cos\nu - \frac{u_0^2}{R}} - \frac{H_1^{0^2}h_0}{q_2'^2}\right) =$$

$$= -\frac{u_1}{H_1^0}\frac{d}{dq_1}\left(h_0 - u_0^2\frac{1-\frac{2h_0}{R}}{g\cos\nu - \frac{u_0^2}{R}}\right) + \frac{u_1h_0}{2H_1^0}\frac{d}{dq_1}\left(\frac{H_1^0}{q_2'}\right)^2$$

Используя еще (2.3), можно окончательно найти лучевое решение в виде

$$u_1^{(1)} = \frac{\text{const}}{(\operatorname{ctg}\alpha)^{3/2}\sqrt{h_0}} \tag{2.4}$$

Теперь можно показать, что $u_1^{(1)}$ удовлетворяет уравнению сохранения энергии возмущений в волне для установившегося течения [3, 8]

$$\frac{h_0\Sigma\Phi^2\overline{H}_1^2}{V_0} = \text{const} \tag{2.4'}$$

Здесь Φ есть величина лучевого решения для возмущенной скорости частицы, которая в силу (2.3) в данной задаче совпадает с проекцией u' возмущенной скорости на нормаль к волне; $\overline{H}_1$ и $\Sigma = \overline{H}_2$—соответственно параметры Ламэ для координаты ξ, отсчитываемой по нормали к волне, и координаты σ, представляющей координату (время пробега волны) вдоль лучей, определяемых из уравнений $\frac{dx_i}{d\sigma} = \Delta_{\alpha_i}$ или в координатах q_1, q_2

$$\frac{H_1^2 dq_1}{d\sigma} = \Delta_{\alpha_1}, \quad \frac{dq_2}{d\sigma} = \Delta_{\alpha_2}, \quad \Delta = \alpha_1 u_0 - V_0 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

причем компоненты единичного вектора нормали к волне

$$n_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, \quad n_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

V_0 есть значение V_n в линейной задаче, то есть для невозмущенного потока, для которого

$$u_0 n_1 = V_0, \quad V_0 = \sqrt{\frac{h_0\left(g\cos\nu - \frac{u_0^2}{R}\right)}{1 - \frac{2h_0}{R}}} \tag{2.3'}$$

Кроме того, имеет место

$$\Delta_{\alpha_1} = u_0 n_2^2, \quad \Delta_{\alpha_2} = -u_0 \cos\alpha \sin\alpha$$

Тогда $\overline{H}_2$ имеет вид

$$\overline{H}_2 = V = \sqrt{\Delta_{\alpha_1}^2 + \Delta_{\alpha_2}^2} = u_0 \cos\alpha$$

Кроме того, можно показать из уравнений лучей, что, поскольку $u_0 = u_0(q_1)$, $h_0 = h_0(q_1)$, имеет место $\overline{H}_1 = \cos\alpha$. Отсюда, с учетом равенства $\frac{u_1^{(+)}}{\sin\alpha} = \Phi$ видно, что уравнение сохранения энергии возмущений в волне (2.4') дает соотношение (2.4). Из (2.1) и соотношений на характеристике $u_2 = u_1 \operatorname{ctg}\alpha$, $h_1 = -\frac{h_0}{V_0 \sin\alpha} u_1$ можно получить в первом порядке по u_1

$$V_n = V_0 + V_1$$

$$V_1 = -u_1 \frac{2V_0 \frac{h_0 u_0}{R} n_1 \left(1 - \frac{h_0}{R} n_1^2\right) + \frac{h_0}{2}\left(g\cos\nu - \frac{u_0^2}{R}\right)\left(1 - \frac{2h_0}{R} n_1^2\right)}{n_1 V_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{R}\right)}$$

Если ввести нормальную к волне составляющую возмущенной скорости $u' = u_1 (\sin\alpha)^{-1}$, можно записать

$$-V_1 + u' = (\lambda + 1)\,u', \quad \lambda + 1 = \frac{\dfrac{3}{2} - \dfrac{h_0}{R}\sin^2 \alpha}{1 - \dfrac{h_0}{R}} \tag{2.5}$$

Рассмотрим условия на поверхности разрыва или прыжке. Как известно, закон сохранения энергии там не выполняется, что относится и к интегралу (1.5).

Уравнения (1.10) и (1.9), имеют дивергентную форму и из них можно получить условия непрерывности массы и касательной к скачку скорости частицы φ_t. Что касается первого уравнения (1.9), то его комбинирование с (1.10) не дает дивергентную форму за счет слагаемого с $\frac{1}{R}$. Естественнее всего получить уравнение сохранения импульса на прыжке, приравнивая изменение количества движения по нормали к скачку импульса сил давления P. Тогда получим указанные уравнения сохранения массы и импульса в виде

$$[hv_n] = 0, \quad [v_t] = 0, \quad \left[hv_n^2 + \frac{gh^2}{2}\cos\nu - \frac{h^2}{2}\frac{u^2}{R} \right] = 0$$

В дальнейшем изучается задача о малых возмущениях одномерного потока $u = u_0$, $v = 0$, $h = h_0$, имеющего место в канале с параллельными стенками $q_2 = \pm b$, $b = \text{const}$, причем $u = u_0 + u_1$, $h = h_0 + h_1$, $v = v_1$, индекс 1 относится к возмущенному потоку, ограниченному стенками $q_2 = \pm b + \varepsilon\varphi(q_1)$, где ε мало. Полагая $v_n = V_{ск} + u'$, где u' есть возмущенное значение v_n позади скачка, из первого и третьего условий на скачке можно получить в порядке u' соотношение $V_{ск}^2 = \dfrac{h_0\left(g\cos\nu - \dfrac{u_0^2}{R}\right)}{1 - \dfrac{h_0}{R}}$, что отличается от выражения V_n из (2.3') для нормальной скорости волн линейной задачи. Тем более отличаются значения $V_{ск}$ и значения $\dfrac{V_n + V_0 - u'}{2}$ в порядке u', где $u' - V_n$ есть нормальная скорость характеристики, даваемая (2.1), (2.5). Вместе с тем нормальная скорость ударной волны должна в первом порядке равняться среднему арифметическому из нормальных скоростей волн впереди и позади нее. Однако, третье условие на прыжке можно сохранить, если отбросить всюду $\frac{h_0}{R}$ по сравнению с 1. Тогда получится в первом порядке $V_{ск} = V_0 - \frac{3}{4}u'$, что удовлетворяет указанным условиям, поскольку в (2.3') $V_n = \sqrt{h_0\left(g\cos\nu - \dfrac{u_0^2}{R}\right)}$ и в (2.5)

$\lambda + 1 \approx \frac{3}{2}$. Интересно, что если в третьем условии на прыжке последний член взять в виде $-\frac{h^2 + h_0^2}{2R} u^2$, то получится без отбрасывания $\frac{h_0}{R}$ в линейной задаче $V_{ск} = V_в$, но в первом порядке по u' нужное соотношение снова выполнится лишь для $\frac{h_0}{R} \ll 1$. Если же определять третье уравнение на прыжке комбинированием первого уравнения (1.9) и уравнения (1.10), в котором в порядке $O(h)$ произвольно добавлено $-\frac{h}{R} u \frac{\partial h}{H_1 \partial q_1}$, то последнее слагаемое в третьем уравнении на прыжке примет вид $-\frac{h^2 u^2}{R}$, и тогда получится в линейной задаче $V_{ск}^2 = \dfrac{h_0\left(g\cos\nu - \dfrac{2u_0^2}{R}\right)}{1 - \dfrac{2h_0}{R}}$, то есть $V_{ск} \neq V_в$. Таким образом, такая дивергентная форма для уравнения сохранения нормального импульса, полученная из (1.9), (1.10) не дает правильной формулы для $V_в$ даже в линейной задаче, а для получения написанного выше третьего уравнения следует в (1.10) добавить слагаемое $h^2 \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{u}{R}\right)$.

Разумеется, желательно более детально изучить условия на прыжке для сильных разрывов, в особенности с точки зрения их структуры, получаемой из (1.7), (1.8), причем (1.7), (1.8) содержат производные второго порядка, что указывает на наличие диссипативного характера структуры скачка в отличие от прямолинейного русла, для которого в порядке $O(h^3)$ существенны дисперсионные явления.

3. *Нелинейные уравнения в окрестности волны*

Значения Φ из (2.4′) и $\lambda + 1$ следует подставить в общие уравнения движения вблизи волны [3, 4]. Указанные уравнения проще всего получить из уравнения характеристики в нелинейной постановке

$$\bar{v}\,\mathrm{grad}\, f - C_n\,|\,\mathrm{grad}\, f\,| = 0 \tag{3.1}$$

где $\bar{v} = \{v_i\}$, $(i = 1, 2, 3)$, дает скорости частиц, $f = \tau - \tau(\alpha_1, \alpha_2)$, $f = 0$ есть уравнение нелинейной характеристики, нормальная скорость которой есть $C_n = -V_n$, $\tau = 0$ соответствует линейной характеристике. Уравнение характеристик записывается в криволинейных ортогональных координатах τ, α_1, α_2, причем $\tau = \mathrm{const}$ дает волну, α_1 отсчитывается вдоль лучей, из которых состоит волна $\tau = 0$, α_2 — вдоль линий на волне, ортогональных лучам. Обозначая через $H_{1,2,3}$ соответствующие параметры Ламэ, можно получить уравнение характеристик, в котором вектор скорости есть $v_1 = V_0 + u'$, $v_2 \approx V_2$, $v_3 \approx V_3$,

$$\frac{1}{H_1}(V_0 + u') - V_2 \frac{\partial\tau}{H_2\partial a_1} - V_3 \frac{\partial\tau}{H_3\partial a_2} + \frac{C_n}{H_1}\sqrt{1 + \left(\frac{H_1\partial\tau}{H_3\partial a_2}\right)^2} = 0 \qquad (3.2)$$

Здесь учтено, что, как видно из линейного решения, при малых $\tau \sim \varepsilon$, $\frac{\partial\tau}{\partial a_1} \sim \varepsilon$, $\frac{\partial\tau}{\partial a_2} \sim \sqrt{\varepsilon}$, поэтому под знаком корня отброшено $\left(\frac{\partial\tau}{\partial a_1}\right)^2$, и, кроме того, в качестве V_2, V_3 взяты значения невозмущенных компонент скорости. Уравнение характеристики в линейной задаче имеет вид

$$\Delta = 0, \quad \Delta = \alpha_1 V_0 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \frac{c_n(\alpha_2, \alpha_3)}{H_1}, \quad \frac{1}{H_1} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \qquad (3.2')$$

откуда в силу малости α_2, α_3 можно получить $c_n(0, 0) = -V_0$,

$$\Delta_{\alpha_2} \approx V_2 + \frac{\partial c_n}{H_1\partial\alpha_2}, \quad \Delta_{\alpha_3} \approx V_3 + \frac{\partial c_n}{H_1\partial\alpha_3}, \quad \Delta_{\alpha_3\alpha_3} = \left(H_1^2 c_n + \frac{\partial^2 c_n}{\partial\alpha_3^2}\right)\frac{1}{H_1}$$

Записывая в линейной задаче $c_n = -V_0 + \frac{\partial c_n}{\partial\alpha_2}\alpha_2 + \frac{\partial c_n}{\partial\alpha_3}\alpha_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c_n}{\partial\alpha_3^2}\alpha_3^2$, учитывая, что по определению вектора $\{\alpha_i\}$ имеет место $\alpha_2 = -\frac{\partial\tau}{H_2\partial a_1}$, $\alpha_3 = -\frac{\partial\tau}{H_3\partial a_2}$, а также используя нелинейное уравнение для $C_n = -V_0$ в порядке ε $C_n = c_n + \lambda u'$, можно (3.2) записать в виде

$$\Delta_{\alpha_2}\frac{\partial\tau}{H_2\partial a_1} + \Delta_{\alpha_3}\frac{\partial\tau}{H_3\partial a_2} - \frac{\Delta_{\alpha_3\alpha_3}}{2H_3^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial a_2}\right)^2 - \frac{\lambda + 1}{H_1}u' = 0$$

Как видно из уравнений лучей линейной задачи в координатах τ, a_1, a_2

$$\frac{H_1 d\tau}{d\sigma} = \Delta_{\alpha_1}, \quad \frac{H_2 da_1}{d\sigma} = \Delta_{\alpha_2}, \quad \frac{H_3 da_2}{d\sigma} = \Delta_{\alpha_3}$$

в силу того, что лучи совпадают с линиями a_1, имеет место $\Delta_{\alpha_1} \approx 0$, $\Delta_{\alpha_3} \approx 0$, и уравнение нелинейных характеристик примет вид $\Delta_{\alpha_2} = V_2$,

$$\Delta_{\alpha_2}\frac{\partial\tau}{H_2\partial a_1} - \frac{\Delta_{\alpha_3\alpha_3}}{2H_3^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial a_2}\right)^2 - \frac{\lambda + 1}{H_1}u' = 0 \qquad (3.3)$$

Нелинейное уравнение вблизи волны, для которого (3.3) есть уравнение характеристик, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial\tau\partial\sigma} + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha_3\alpha_3}\frac{\partial^2 u'}{H_3^2\partial a_2^2} - \frac{\partial u'}{\partial\tau}\frac{d\ln\Phi}{d\sigma} = -\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\lambda + 1}{H_1}u'\frac{\partial u'}{\partial\tau}\right) \qquad (3.4)$$

Здесь учтено, что согласно уравнению лучей $da_1 = \frac{d\sigma}{H_2}\Delta_{\alpha_2}$, и добавлено в (3.4) слагаемое $\frac{\partial u'}{\partial \tau}$, не влияющее на уравнение характеристик для (3.4), причем Φ есть значение u' в линейной одномерной по τ задаче, то есть лучевое решение. Для рассматриваемой выше двумерной постановки переменная α_1 выпадает из уравнения (3.4), и можно найти нелинейное уравнение вблизи волны

$$\frac{\partial u'}{\partial \tau} + \frac{\lambda + 1}{\overline{H}_1} u' \frac{\partial u'}{\partial \tau} - u' \frac{d \ln \Phi}{d \tau} = 0 \qquad (3.5)$$

или переходя от временной координаты τ к q_1 по формуле $\frac{H_1^0 dq_1}{d\tau} = V_n \cos\alpha$, где $V_n = u_0 \cos\alpha$ есть проекция скорости на направление луча, можно получить из (3.5)

$$\frac{\partial u'}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{\lambda + 1}{V_n \cos^2\alpha} u' \frac{\partial u'}{\partial \tau} - u' \frac{d \ln \Phi}{H_1^0 d q_1} = 0 \qquad (3.5')$$

Здесь $(\lambda + 1)$ и Φ даются уравнениями (2.5) и (2.4). Уравнение (3.5′) получено также более длинным путем прямым вычислением из (1.11).

4. *Изучение окрестностей слабых скачков*

Решение уравнения (3.5′) имеет вид

$$u' = \Phi f(\zeta), \quad \tau = b - f(\zeta)\beta(q_1) + \zeta, \quad \beta(q_1) = \int_0^{q_1} \Phi \frac{\lambda + 1}{u_0 \cos^3 \alpha} H_1^0 dq_1$$

причем $\zeta = \mathrm{const}$ есть уравнение нелинейных характеристик [9]. Функция $f(\zeta)$ определяется из граничного условия на стенке в линейной постановке

$$v_1 = u_0 \varepsilon \frac{\varphi'(q_1)}{H_1^0}.$$

Здесь $q_2 = b + \varepsilon\varphi(q_1)$ $(\varepsilon > 0)$ есть уравнение стенки, и так как

$$\tau = \xi = q_2 - q_2(q_1), \quad q_2(q_1) = -\int_0^{q_1} H_1^0 \operatorname{tg} \alpha \, dq_1, \quad u' = \frac{u_1}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{\cos \alpha}$$

можно записать условие на стенке в параметрическом виде

$$f(\zeta) = \frac{u_0(q)\varepsilon\varphi'(q)}{\cos\alpha(q)\Phi(q)H_1^0}, \quad \varepsilon\varphi(q) - q_2(q) = f(\zeta)\beta(q) + \zeta \qquad (4.1)$$

При $f'(\zeta) < 0$ характеристики могут образовать огибающую

$$-f'(\zeta) = \frac{1}{\beta(q_1)}$$

причем $f(\zeta)$ дается (4.1). Для $\varphi(q) = Cq^n$, $1 < n < 2$, $C < 0$ огибающая начинается в точке $q_1 = 0$, $q_2 = b$, и можно считать для малых q

$$\zeta = \int_0^q H_1^0 \operatorname{tg} \alpha \, dq$$

Из (4.1) имеем

$$f(\zeta) = -Kq^{n-1}, \quad K = -\frac{u(0)\, \varepsilon C n}{\cos \alpha(0) \Phi(0) H_1^0}$$

и условие огибающей дает

$$q^{2-n} = (n-1) B, \quad B = \frac{K \beta(q_1)}{H_1^0 \operatorname{tg} \alpha}$$

В частности, для $n = \frac{3}{2}$ уравнение огибающей имеет вид

$$\sqrt{q} = \frac{1}{2} B, \quad \zeta = H_1^0 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{4} B^2, \quad \tau_0 = b - H_1^0 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{4} B^2$$

Для $n = 2$ огибающая начинается на линии $\tau = b$, $\zeta_0 = 0$, в точке, в которой $f'(\zeta_0) = -\frac{1}{\beta(q_1)}$, а далее $\tau - b$ имеет снова второй порядок по ε. Для получения однозначного решения нужно ввести разрыв, проходящий между характеристикой $\tau = b$ и огибающей. Пусть характеристики, пересекающие разрыв, впереди и позади него имеют уравнения

$$\tau = \tau_2 = -f(\zeta_2) \beta(q_1) + \zeta_2, \quad \tau = \tau_1 = -f(\zeta_1) \beta(q_1) + \zeta_1$$

На разрыве $\tau_1 = \tau_2$ и имеет место $\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} u' d\tau = 0$, где интегрирование ведется в данном сечении $q_1 = \text{const}$. Заменяя τ через ζ из уравнений характеристик можно получить

$$\frac{f^2(\zeta_1) - f^2(\zeta_2)}{2} \beta(q_1) + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(\zeta) d\zeta = 0$$

Кроме того, имеет место

$$-\beta(q_1) = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{f(\zeta_1) - f(\zeta_2)}$$

что дает обратную величину наклона секущей к кривой $f(\zeta)$. Отсюда получается закон равенства площадей под секущей и кривой $f(\zeta)$ [9]

$$\frac{f(\zeta_1)+f(\zeta_2)}{2}(\zeta_1-\zeta_2)=\int\limits_{\zeta_2}^{\zeta_1} f(\zeta)\,d\zeta \tag{4.2}$$

Если впереди волны возмущения отсутствуют

$$f(\zeta_2)=0, \quad -f(\zeta_1)=\sqrt{\frac{-2\int\limits_0^{\zeta_1} f(\zeta)\,d\zeta}{\beta(q_1)}}$$

Для $n=\frac{3}{2}$ получится на ударной волне

$$\sqrt{q}=\frac{3}{4}B, \quad \tau=b-\frac{3}{16}H_1^0\,\mathrm{tg}\,\alpha B^2$$

то есть ударная волна проходит между огибающей и первой характеристикой $\tau=b$. Подобным же образом можно исследовать более сложные задания граничных условий методом [9]. Можно также рассмотреть задачу о движении жидкого металла в лотке с криволинейной формой дна в магнитном поле. Трехмерные уравнения бесконечно проводящей несжимаемой среды имеют вид

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0, \qquad v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right)}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho}\left(B_j\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)-g\delta_{i3}, \qquad \frac{\partial B_j}{\partial x_j}=0, \qquad v_j\frac{\partial B_i}{\partial x_j}=B_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

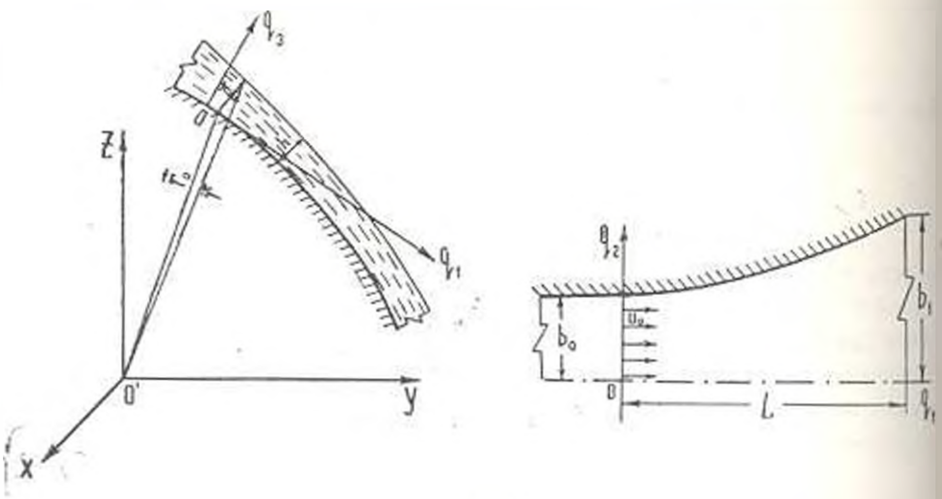
где $\{B_i\}$ есть вектор магнитной индукции, магнитная проницаемость принята равной единице, $\delta_{ij}=1$, $i=j$; $\delta_{ij}=0$, $i\neq j$, g — ускорение силы тяжести. Написанной системе уравнений удовлетворяет решение для вмороженного поля

$$B_i=Cv_i, \quad C=\frac{B_0}{u_0}$$

где C—const, которое естественно вытекает из уравнения индукции и является обязательным для одномерного движения. Указанное решение будет справедливо, если невозмущенное магнитное поле $\overline{B}_0$ направлено вдоль дна, если же $\overline{B}_0$ перпендикулярно дну, то указанное решение не имеет места и, вообще говоря, по-видимому, невозможен переход к плановой задаче. Если подставить B_i через v_i в уравнения движения, можно получить

$$v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(1-\frac{B_0^2}{4\pi\rho u_0^2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(P+C^2\frac{v^2}{8\pi}\right)}{\partial x_i}-g\delta_{i3}$$

Переходя к криволинейным координатам и считая v_3 малым, можно получить для $P+C^2\frac{v^2}{8\pi}$ вышеуказанный, линейный по q_3, закон, и тогда уравнения планового потока совпадут с (1.11), где нужно умножить значение g на $\left(1-\frac{B_0^2}{4\pi\rho u_0^2}\right)^{-1}$.



Фиг. 1.

Следует отметить, что можно получать уравнения планового движения из трехмерных уравнений в координатах q_i, $i=1, 2, 3$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial q_i}-g\,f_i(q_1,\ q_2)\,H_i,\quad f_i=\cos(q_i,\ z)$$

где $T=\frac{1}{2}(H_1^2\dot q_1^2+H_2^2\dot q_2^2+H_3^2\dot q_3^2)$, причем компоненты скорости $v_i=H_i\dot q_i$. Записывая, как и прежде, $H_3=1$, $H_{1,2}=H^0_{1,2}(q_1,\ q_2)+H'_{1,2}(q_1,\ q_2)\,q_3$, и предполагая v_3 малым, из уравнений в проекции на ось q_3 можно получить распределение давления по глубине быстротока

$$P-P_0=\rho\left(-gf_3+\frac{v_1^2H_1'}{H_1^0}+\frac{v_2^2H_2'}{H_2^0}\right)(q_3-h)$$

Далее P подставляется в уравнения движения, записанные в проекции на оси q_1, q_2, и производится интегрирование этих уравнений (осреднение) по q_3 от $q_3=0$ до $q_3=h$. Для рассматриваемой в данной работе задачи $H_3=1$, $H_2'=0$, $v_1=u$, $v_2=v$, $H_1'=H_1^0\frac{1}{R}$, $f_3=\cos\nu$, $f_1=-\sin\nu$, и тогда получатся уравнения после осреднения

$$h\left(u\frac{\partial u}{\partial q_1}+H_1^0 v\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)=-\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{\frac{1}{2}\left(g\cos\nu-\frac{u^2}{R}\right)h^2\right\}-gh\sin\nu H_1^0$$

$$h\left(\frac{u}{H_1^0}\frac{\partial v}{\partial q_1}+v\frac{\partial v}{\partial q_2}\right)=-\frac{\partial}{\partial q_2}\left\{\frac{1}{2}\left(g\cos\nu-\frac{u^2}{R}\right)h^2\right\}$$

В левых частях уравнений отброшены слагаемые $\frac{1}{2}\frac{h^2}{R}H_1^0 v\frac{\partial u}{\partial q_2}$, $\frac{u}{H_1^0}\frac{h^2}{2R}\frac{\partial v}{\partial q_1}$ соответственно по сравнению с первыми двумя слагаемыми. С другой стороны, не осредняя уравнения по q_2, а полагая в них $q_2=0$, можно получить уравнения (1.11). Записывая первые слагаемые в правых частях новых уравнений в виде

$$h\frac{\partial h}{\partial q_{1,2}}\left(g\cos\nu-\frac{u^2}{R}\right)+\frac{1}{2}h^2 g\frac{\partial\cos\nu}{\partial q_{1,2}}-\frac{1}{2}h^2\frac{\partial\frac{u^2}{R}}{\partial q_{1,2}}$$

$$\left(\frac{\partial\nu}{\partial q_1}=\frac{H_1^0}{R},\quad \frac{\partial\nu}{\partial q_2}=0\right)$$

можно видеть, что третьи слагаемые можно отбросить по сравнению с левыми частями уравнений, а второе слагаемое, фигурирующее в первом уравнении, значительно меньше $gh\sin\nu$. Тогда, отбрасывая указанные слагаемые, в пределах точности $\frac{h}{R}\ll 1$ можно как новые уравнения, так и (1.11) записать в одном и том же виде, который совпадает с уравнениями для постоянного уклона, где заменено $g\cos\nu$ на $\left(g\cos\nu-\frac{u^2}{R}\right)$. Поэтому обе формы записи уравнений одинаково приемлемы. Следует отметить, что из новой формы записи уравнений, после комбинирования с (1.10), получается уравнение импульсов на прыжке. Кстати, для новых уравнений имеет место

$$V_0^2=\frac{h_0\left(g\cos\nu-\frac{u_0^2}{R}\right)}{1-\frac{h_0}{R}},\qquad V_1+u'=u'\frac{3-\frac{h_0}{R}\sin^2\alpha}{2-\frac{h_0}{R}}$$

и условия на прыжке дают $V_*=V_0-\frac{u'}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{h_0}{2R}\frac{4-\sin^2\alpha}{1-\frac{h_0}{R}}\right)$, то есть формула для скорости ударной волны в первом порядке по u' снова выполняется лишь при отбрасывании членов порядка $\frac{h_0}{R}$ по сравнению с 1.

Институт механики АН Армянской ССР
НИИВПиГ

Поступила 2 VII 1976

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Գ. Ս. ԲԵԶԻՐԳԱՆՅԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԹԵՔՈՒՄՈՎ ԱՐԱԳԱՀՈՍՔԵՐՈՒՄ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԽՆԴՐՈՒՄ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է փոփոխական երկայնական թեքումով փոքր խորությամբ ունեցող արագահոսքերում անսեղմելի միջավայրերի շարժման խնդիրը։

Ստացված են նկարագրված միջավայրերի պլանային շարժման հավասարումները, որոնցում պարունակվում է հատակի կորության պարամետրը։ Ստացված և լուծված է նաև ալիքների առաջացման շրջակայքում պարզեցված ու գծային հավասարումը։

INVESTIGATION OF WAVE REGION IN A STEADY PROBLEM OF INCOMPRESSIBLE MEDIUM MOTION IN RAPIDS WITH VARIABLE LONGITUDINAL INCLINATION

A. G. BAGDOEV, G. S. BESIRGANIAN

S u m m a r y

The problem of motion of incompressible media in tray channels of curvelinear bottom shape with a free surface and a small depth of the flow is considered. The equations of plane motion of turbulent flow over the curvelinear bottom are derived and the vicinity of weak jumps, appearing in the flow, is examined. Also, the equation, describing the wave neighbourhood for arbitrary nondissipative medium in the three-dimensional problem, specifying coefficients for the two-dimensional problem of medium motion in rapids with a variable longitudinal inclination, is derived. The conditions on jumps are dealt with in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* Затухание стационарных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1962, № 1.
2. *Емцев Б. Т.* Двухмерные бурные потоки. М., «Энергия», 1967.
3. *Багдоев А. Г.* Обзор работ по гидродинамике, выполненных в Арм. ССР с 1971 по 1975 гг. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 1.
4. *Багдоев А. Г., Безирганян Г. С.* Исследование сверхкритического течения. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2.
5. *Симонян В. Г.* Определение профиля водосливной плотины. Mezinarodni konferance o dydraulikém Vyzkumu Vysoké učeni v Brně, 1969.
6. *Емцев Б. Т.* Метод гидравлического расчета криволинейных переходных участков открытых водосбросов. Труды координационных совещаний по гидротехнике, «Энергия», Ленинградское отделение, 1969, вып. 52.
7. *Гиргидов А. Д.* Движение жидкости по криволинейным поверхностям с постоянной глубиной. Изв. ВНИИГ, 1965, т. 78.
8. *Bretherton F. P., Garret C. Y. R.* Wavetrains in inhomogeneous moving media. Proceed. Roy. Soc., A 302, 1968, 529—554.
9. *Whitham G. B.* The behaviour of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis. Proceed. Roy. Soc., 1950, A 201, 89.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

Г. А. ЗАГОРОДНАЯ, В. М. ФРИДМАН

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА Л. В. КАНТОРОВИЧА В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Излагается вариационный метод решения задачи об упруго-пластической деформации для упрочняющегося материала. Для решения общей задачи теории пластичности предлагается видоизмененный метод Л. В. Канторовича, в котором перемещения и напряженное состояние представляются в виде разложения в ряд по координатным функциям. Коэффициенты разложения зависят от времени (параметра нагружения). Совокупность коэффициентов разложения (векторная функция времени) находится путем приближенного численного решения начальной задачи.

Такой подход для решения конкретной задачи об изгибе балки в первом приближении использован, например, Ю. Н. Работновым [1].

Ниже дается обобщенная формулировка метода и приводится пример решения задачи об упруго-пластическом деформировании осесимметрично нагруженного цилиндра постоянной толщины.

1. Уравнения пластического течения упруго-пластического тела из упрочняющегося материала в общем виде записываются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div} \dot{\underline{\underline{x}}} + \dot{\underline{f}} = 0 \\
&\operatorname{def} \dot{\underline{u}} - B(\underline{x})\, \dot{\underline{x}} = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где

$$
B(\underline{x})\, \dot{\underline{x}} = \begin{cases} B_0 \dot{\underline{x}} + F(T)\, \dot{T} \underline{\xi} & \text{при } \dot{T} > 0 \quad \text{(нагружение)} \\ B_0 \dot{\underline{x}} & \text{при } \dot{T} \leqslant 0 \quad \text{(разгрузка)} \end{cases}
$$

$\underline{x}$ — тензор напряжений, $\underline{u}$ — вектор перемещений, $\underline{f}$ — вектор объемной силы, B_0 — оператор упругих констант, $\underline{\xi} = \operatorname{dev} \underline{x}$ — девиаторная часть тензора напряжений, $T^2 = \frac{1}{2} \underline{\xi} \cdot\cdot \underline{\xi}$ — интенсивность напряжений сдвига, $F(T)$ — функция, характеризующая упруго-пластические свойства материала.

Условия на границе тела можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&\underline{X} - \underline{F} = 0 \ \text{на} \ \Gamma_1 \\
&\underline{U} - \underline{E} = 0 \ \text{на} \ \Gamma_2
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

причем $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ — суммарная поверхность всей рассматриваемой области Ω.

В начальный момент времени при $t=0$ во всей области величины

$$\underline{\underline{x}}=0 \quad \text{и} \quad \underline{u}=0 \tag{1.3}$$

Можно показать, что система уравнений (1.1) при краевых условиях (1.2) равносильна условию стационарности функционала [2]:

$$I(\underline{\underline{\dot{x}}}, \underline{\dot{u}})=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[(-\operatorname{div}\underline{\underline{\dot{x}}}+2\underline{\dot{f}})\cdot\underline{\dot{u}}+\underline{\underline{\dot{x}}}\cdot\cdot\left[\operatorname{def}\underline{\dot{u}}-\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}})\,\underline{\underline{\dot{x}}}\right]\right]d\Omega+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_1}(\underline{\dot{X}}-2\underline{\dot{F}})\cdot\underline{\dot{U}}\,d\Gamma-\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_2}\underline{\dot{X}}\cdot(\underline{\dot{U}}-2\underline{\dot{E}})\,d\Gamma \tag{1.4}$$

Рассматривая только случай нагружения во всей области Ω, для вариации функции (1.4) получим

$$\delta I(\underline{\underline{\dot{x}}}, \underline{\dot{u}})=\int\limits_{\Omega}\left[(-\operatorname{div}\underline{\underline{\dot{x}}}-\underline{\dot{f}})\cdot\delta\underline{\dot{u}}+\delta\underline{\underline{\dot{x}}}\cdot\cdot\left[\operatorname{def}\underline{\dot{u}}-\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}})\,\underline{\underline{\dot{x}}}\right]\right]d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1}(\underline{\dot{X}}-\underline{\dot{F}})\cdot\delta\underline{\dot{U}}\,d\Gamma-\int\limits_{\Gamma_2}\delta\underline{\dot{X}}\cdot(\underline{\dot{U}}-\underline{\dot{E}})\,d\Gamma=0 \tag{1.5}$$

Из (1.5) очевидно, что если выполнено уравнение равновесия, закон пластического течения (1.1) и краевые условия (1.2), то вариация $\delta I(\underline{\underline{\dot{x}}}, \underline{\dot{u}})=0$. Справедливо также обратное утверждение о том, что выполнение условия (1.5) равносильно системе уравнений (1.1) и краевым условиям (1.2).

Для отыскания решения напряженное состояние $\underline{\underline{\dot{x}}}$ и перемещение $\underline{\dot{u}}$ будем аппроксимировать независимо и одновременно:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{x}}&=\underline{\underline{x}}_e+\sum_{i=-k}^{n}\alpha_i(t)\,\underline{\underline{x}}_i\\ \underline{u}&=\underline{u}_e+\sum_{i=-r}^{n}\beta_i(t)\,\underline{u}_i\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ — функции только времени t; $\underline{\underline{x}}_i$ и $\underline{u}_i$ — координатные функции, а функции $\underline{\underline{x}}_e$ и $\underline{u}_e$ представляют собой решение „упругой“ задачи

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\underline{\underline{\dot{x}}}_e-\underline{\dot{f}}&=0\\ \operatorname{def}\underline{\dot{u}}_e-\underline{\underline{B}}_e\,\underline{\underline{\dot{x}}}_e&=0\end{aligned} \tag{1.7}$$

причем

$$\underline{\dot{X}}_e-\underline{\dot{F}}=0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ и } \underline{\dot{U}}_e-\underline{\dot{E}}=0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{1.8}$$

В силу начальных условий (1.3) имеем

$$\alpha_i(0)=0, \quad \beta_i(0)=0 \tag{1.9}$$

Для простоты будем считать, что решение «упругой» задачи известно. Для производных, имея в виду (1.6), можно записать:

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}_* + \sum_{i=-k}^{n} \alpha_i \underline{\underline{x}}_i \tag{1.10}$$

$$\underline{u} = \underline{u}_* + \sum_{i=-r}^{n} \beta_i \underline{u}_i$$

и для вариаций

$$\delta \underline{\underline{x}} = \sum_{i=-k}^{n} \delta\alpha_i \underline{\underline{x}}_i \quad \text{и} \quad \delta \underline{u} = \sum_{i=-r}^{n} \delta\beta_i \underline{u}_i \tag{1.11}$$

Координатные функции $\underline{\underline{x}}_i$ и $\underline{u}_i$ выберем таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

а) $$\operatorname{div} \underline{\underline{x}}_i = \begin{cases} 0 & \text{для } i = -k, \dots, -1, 0 \\ \neq 0 & \text{для } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{1.12}$$

б) $$\operatorname{def} \underline{u}_i = \begin{cases} 0 & \text{для } i = -r, \dots, -1, 0 \\ \neq 0 & \text{для } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{1.13}$$

в) однородным краевым условиям, то есть

$$\underline{\underline{X}}_i = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \underline{U}_i = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{1.14}$$

Подставляя ряды (1.10), (1.11) в условие стационарности (1.5) и учитывая краевые условия (1.8) и (1.14), а также условия (1.7), (1.12) и (1.13), получим

$$\delta I(\underline{\underline{x}}, \underline{u}) = \int_V \Big\{ -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{div} \underline{\underline{x}}_i \cdot \sum_{j=-r}^{n} \delta\beta_j \underline{u}_j + \sum_{i=-k}^{n} \delta\alpha_i \underline{\underline{x}}_i \cdot\cdot \Big[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \operatorname{def} \underline{u}_j - F(T)T\underline{\underline{\xi}} - \sum_{j=-k}^{n} \alpha_j B_0 \underline{\underline{x}}_j \Big] \Big\} d\Omega \tag{1.15}$$

Приравняем нулю коэффициенты при вариациях $\delta\alpha_i$ и $\delta\beta_i$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_V \operatorname{div} \underline{\underline{x}}_i \cdot \underline{u}_j \, d\Omega = 0 \quad \text{для} \quad j = -r, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_V \operatorname{def} \underline{u}_i \cdot\cdot \underline{\underline{x}}_j \, d\Omega - \sum_{i=-k}^{n} \int_V B_0 \underline{\underline{x}}_i \cdot\cdot \underline{\underline{x}}_j \, d\Omega - \tag{1.16}$$

$$- \int_V F(T)T\underline{\underline{\xi}} \cdot\cdot \underline{\underline{x}}_j \, d\Omega \quad \text{для} \quad j = -k, \dots, n$$

Из первого уравнения (1.16) в силу (1.13) и (1.14) получаем

$$\alpha_i = 0 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.17}$$

Из второго уравнения (1.16), вводя функцию $\varphi(2T^2) = \dfrac{F(T)}{2T}$ и учитывая для неположительных индексов выражения (1.13) и (1.17), после ряда преобразований получим

$$\sum_{i=-k}^{0} (A_{ij} + B_{ij})\alpha_i + \gamma_j = 0 \qquad \text{для } j = -k, \ldots, -1, 0 \tag{1.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\beta_i - \sum_{i=-k}^{0} (A_{ij} + B_{ij})\alpha_i - \gamma_j = 0 \quad \text{для } j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.19}$$

где

$$
\begin{aligned}
A_{ij} = A_{ji} &= \int_{\Omega} \varphi(\underline{\xi} \cdot\cdot \underline{\xi})\, \psi_i \psi_j \, d\Omega \\
B_{ij} = B_{ji} &= \int_{\Omega} \underline{x}_i \cdot\cdot B_0 \underline{x}_j \, d\Omega \\
C_{ij} &= \int_{\Omega} \operatorname{def} \underline{u}_i \cdot\cdot \underline{x}_j \, d\Omega \\
\gamma_j &= \int_{\Omega} \varphi(\underline{\xi} \cdot\cdot \underline{\xi})\, \psi_j \psi_e \, d\Omega
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

причем

$$\psi_j = \underline{\xi} \cdot\cdot \underline{\xi}_j, \quad \psi_e = \underline{\xi} \cdot\cdot \underline{\xi}_e \tag{1.21}$$

В системе (1.18), (1.19) коэффициенты B_{ij}, C_{ij} определены, если выбраны координатные функции $\underline{x}_i$ и $\underline{u}_i$, а A_{ij} и γ_j являются функциями только девиаторной части напряженного состояния и, следовательно, зависят только от коэффициентов $\alpha_{-k}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0$. Поэтому система уравнений (1.18) решается независимо от (1.19). Решение начальной задачи (1.18), (1.19) может быть найдено известными численными методами.

Для $i = 0, -1, \ldots, -k$ выполняется условие $\operatorname{def} \underline{u}_i = 0$, то есть для этих индексов $\underline{u}_i$ представляют собой жесткие смещения. Коэффициенты β_i при этих смещениях, естественно, остаются неопределенными.

Окончательно для напряженного состояния и перемещения можно записать:

$$
\begin{aligned}
\underline{x} &= \underline{x}_* + \sum_{i=-k}^{m} \alpha_i(t)\, \underline{x}_i \\
\underline{u} &= \underline{u}_* + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)\, \underline{u}_i
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

2. Рассмотрим приложение изложенного здесь метода к задаче о вращающемся цилиндре постоянной толщины, нагруженном осесимметрично по внутренней и наружной поверхностям. Как в упругой задаче, предполагается, что поперечные сечения цилиндра, достаточно удаленные от его торцов, остаются плоскими и что осевая относительная деформация по всему цилиндру постоянна. Упругое решение задачи известно.

Координатные функции для определения напряженного состояния ($i = -k, \ldots, 1, 0$), согласно (1.12) и (1.14), должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{d(r\sigma_{ri})}{dr} - \sigma_{\theta i} = 0 \tag{2.1}$$

и краевым условиям

$$\sigma_{ri} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и при} \quad r = 1 \tag{2.2}$$

Для торцов цилиндра, как и в упругой области, положим

$$\int_{S_\tau} \sigma_{zi}\, dS_\tau = 0 \tag{2.3}$$

где S_τ — площадь торца.

Условиям (2.2) удовлетворяет, например, функция

$$\sigma_{ri} = \frac{1-r_0}{i\pi r} \sin \frac{i\pi(r-r_0)}{1-r_0} \tag{2.4}$$

Из (2.1) получаем

$$\sigma_{\theta i} = \cos \frac{i\pi(r-r_0)}{1-r_0} \tag{2.5}$$

и требование (2.3) приводит к выражению

$$\sigma_{zi} = \mu(\sigma_{ri} + \sigma_{\theta i}) \tag{2.6}$$

Для положительных i выберем

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ri} &= -\frac{(i-1)\pi}{1-r_0} \sin \frac{(i-1)\pi(r-r_0)}{1-r_0} \\
\sigma_{\theta i} &= \frac{1}{r} \cos \frac{(i-1)\pi(r-r_0)}{1-r_0} \\
\sigma_{zi} &= \mu(\sigma_{ri} + \sigma_{\theta i})
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Координатные функции для перемещений u_i находятся путем решения статической задачи под действием выбранных объемных нагрузок, но для упругого тела более простого, чем рассматриваемое, полагая, например, модуль упругости E равным единице, а коэффициент поперечной деформации μ равным нулю [3].

Дифференциальное уравнение, выражающее условие равновесия элемента цилиндра и объемных нагрузок $p_i(r)$, записывается в виде

$$\frac{d(r\sigma_{ri})}{dr}-\sigma_{\theta i}=-p_i(r) \tag{2.8}$$

При $E=1$ и $\mu=0$ получим

$$\sigma_{ri}=\varepsilon_{ri}, \quad \sigma_{\theta i}=\varepsilon_{\theta i} \tag{2.9}$$

Учитывая далее, что

$$\varepsilon_{ri}=\frac{1}{b}\frac{du_{ri}}{dr} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\theta i}=\frac{1}{b}\frac{u_{ri}}{r} \tag{2.10}$$

где b — наружный радиус цилиндра, после подстановки (2.9) в (2.8), а затем в (2.1) будем иметь:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru_{ri})}{dr}\right]=-b\frac{p_i(r)}{r} \tag{2.11}$$

Интегрируя (2.11) дважды и определяя постоянные интегрирования из условия однородности краевых условий тензора напряжений для рассматриваемого тела, то есть полагая при $r=r_0$ и $r=1$

$$\varepsilon_{ri}=\sigma_{ri}=\frac{1}{b}\frac{du_{ri}}{dr}=0$$

получим

$$\frac{1}{b}u_{ri}=\frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} r\int_{r_0}^{r}\frac{p_i(r)}{r}\,dr\,dr+\frac{1}{2}C_1r+\frac{C_2}{r}$$

где

$$C_1=\frac{2C_2}{r_0^2}, \qquad C_2=-\frac{1}{2}\int_{r_0}^{1}\left(r+\frac{1}{r}\right)p_i(r)\,dr$$

Возьмем в качестве $p_i(r)$ функцию

$$p_i(r)=\left\{\frac{1}{r}+\left[\frac{(i-1)\pi}{1-r_0}\right]^2 r\right\}\cos\frac{(i-1)\pi(r-r_0)}{1-r_0}+$$

$$+\frac{(i-1)\pi}{1-r_0}\sin\frac{(i-1)\pi(r-r_0)}{1-r_0}$$

Тогда постоянные интегрирования будут равны

$$C_1 = \frac{1}{r_0}, \qquad C_2 = \frac{1}{2} r_0$$

и функция

$$u_{ri} = b \cos \frac{(i-1)\pi (r - r_0)}{1 - r_0} \quad (\text{для } i = 1, 2, \dots, n)$$

Для ε_{ri} и $\varepsilon_{\theta i}$ по (2.10) получим

$$\varepsilon_{ri} = -\frac{(i-1)\pi}{1 - r_0} \sin \frac{(i-1)\pi (r - r_0)}{1 - r_0}$$

$$\varepsilon_{\theta i} = \frac{1}{r} \cos \frac{(i-1)\pi (r - r_0)}{1 - r_0}.$$

На торцах однородное краевое условие записывается в виде

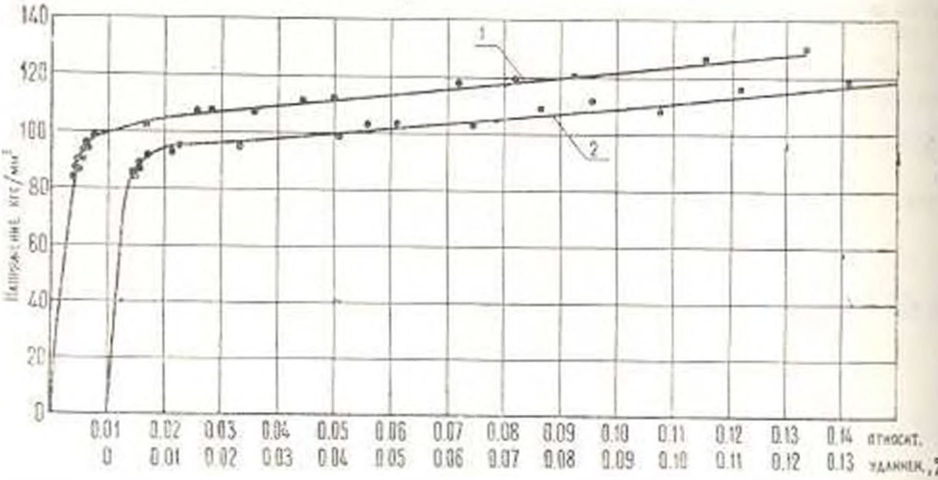
$$\int\limits_{S_\tau} \varepsilon_{zi} dS_\tau = \int\limits_{S_\tau} \varepsilon_{zi} dS_\tau = 0$$

Полагая, как и в упругой зоне, ε_{zi} независящим от радиуса и постоянным по длине цилиндра, получим $\varepsilon_{zi} = 0$.

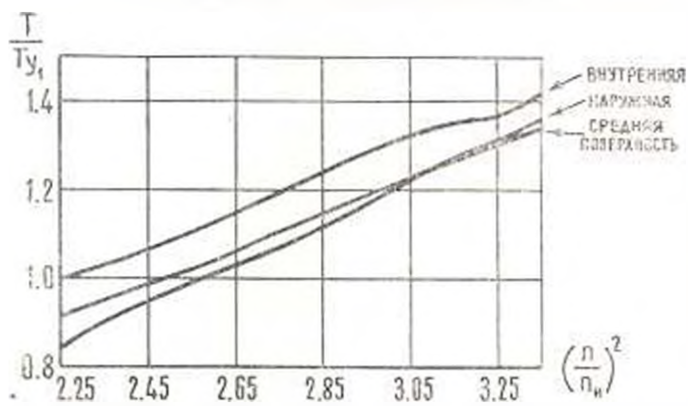
Диагональные компоненты тензоров напряжений и деформаций для всех индексов равны нулю.

Рассмотренная задача реализована на ЭВМ. Производились, в частности, расчеты бандажных колец роторов современных мощных турбогенераторов. Бандажное кольцо представлялось в виде цилиндра, нагруженного собственной центробежной силой и центробежной силой обмотки, равномерно распределенной по внутренней поверхности. Производились расчеты для определения достаточного числа учитываемых координатных функций в напряжениях и деформациях, которые показали, что число членов ряда достаточно брать равным трем-четырем. Погрешность для интенсивности касательных напряжений во всем диапазоне нагружения не превышала 3—5%.

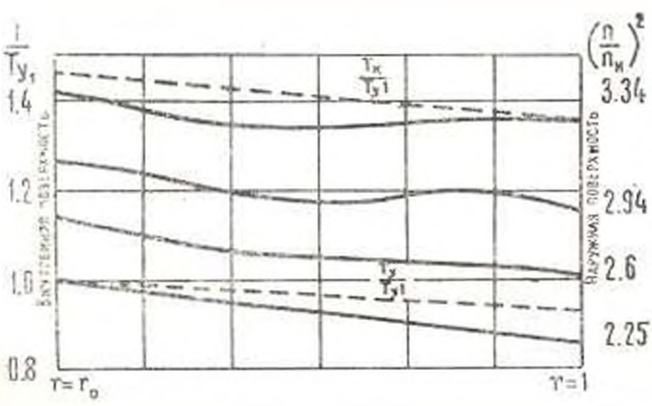
Истинная диаграмма растяжения материала бандажного кольца, полученная на образцах, вырезанных из наружной и внутренней поверхностей, представлена на фиг. 1. Результаты расчета бандажного кольца ротора турбогенератора мощностью 300 тыс. *квт* представлены на фиг. 2—4, где обозначено через n — скорость вращения, $n_н = 3000$ *об/мин* — номинальная скорость вращения, T_s, T_{s_1} и $T_к$ — интенсивности напряжений сдвига при пределе пропорциональности, то же на внутренней поверхности и при начале разрушения. Пластическое течение, как видно из фиг. 3, начинается с внутренней поверхности и наступает при скорости вращения 4500 *об/мин*. Окончание счета происходит вследствие достижения интенсивности касательных напряжений предельного значения на наружной поверхности кольца при скорости вращения 5470 *об/мин*, а коэффициент запаса по предельной нагрузке для данного бандажного кольца при разгонной скорости вра-



Фиг. 1. Истинная диаграмма растяжения образца из бандажной стали, 1 — внутренняя, 2 — наружная поверхности.

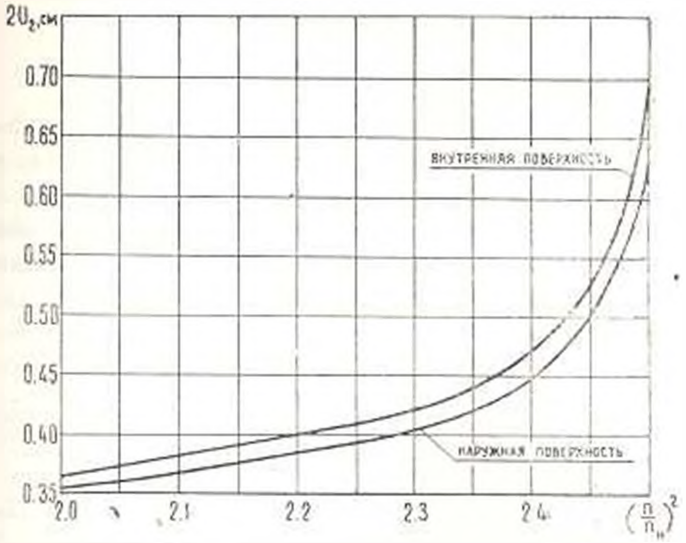


Фиг. 2. Изменение интенсивности касательных напряжений в бандажном кольце от скорости вращения.



Фиг. 3. Распределение интенсивности касательных напряжений по сечению бандажного кольца при различных скоростях вращения.

щения 3600 *об/мин* оказался равным 2.3, что на 40% больше, чем при расчете по максимальным эквивалентным напряжениям.



Фиг. 4. Приращения диаметров бандажного кольца.

Одновременно вычислялась и радиальная деформация кольца. Приращения внутреннего и наружного диаметров кольца в зависимости от скорости вращения даны на фиг. 4, из которой видно, что почти сразу за скоростью вращения 4500 *об/мин*, соответствующей началу пластического течения, наблюдается резкое возрастание радиальной деформации.

Ленинградский политехнический
институт им. М. И. Калинина

Поступила 22 III 1976

Գ. Ա. ԶԱԽԱՐՈՎԱՅԱ, Վ. Ս. ՆԻԿԻՖՈՐՈՎ

ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՀՈՍՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ Լ. Վ. ԿԱՆՏՈՐՈՎԻՉԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՆ

Ամփոփում

Ամրապնդվող նյութի համար առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիայի խնդրի լուծման համար առաջարկվում է Լ. Վ. Կանտորովիչի ձևափոխված եղանակը: Տեղափոխությունները և լարումները ներկայացվում են ըստ կոորդինատային ֆունկցիաների վերլուծությունների տեսքով: Տրվում են եղանակի ընդհանրացված ձևակերպումը և սանդղափոխության ձևով բեռնված հաստատուն հաստությամբ պլանի առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիայի խնդրի լուծման օրինակը:

MODIFICATION OF L. V. KANTOROVITCH METHOD IN THE THEORY OF PLASTIC FLOW

G. A. ZAGORODNAYA, V. M. FRIDMAN

S u m m a r y

The modified L. V. Kantorovitch method of solving the problem of plasto-elastic deformation for strain-hardening material is proposed. The shifts and stressed states are expressed as a series in coordinate functions. The generalized formulation of the method and the example of solving the problem of plasto-elastic deformation of axial-symmetrically loaded cylinder of constant thickness are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Теория ползучести элементов конструкций. «Наука», 1966, 637—640.
2. *Sanders I. L., Mc Comb H. G., Schlechte F. R.* A variational theorem for creep with applications to plates and columns. NACA, Rep. No. 1342, 1957.
3. *Фридман В. М., Чернина В. С.* Видоизменение метода Бубнова—Галеркина—Ритца, связанное со смешанным вариационным принципом в теории упругости. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 1.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

Г. Г. ЕГИЯН

О ПРИБЛИЖЕННОМ УПРАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

В работе рассматривается нелинейная управляемая система с квадратическим критерием качества, подвергаемая малым случайным возмущениям. Предлагается метод построения приближенного синтеза оптимального управления, основанный на том, что уравнение Беллмана, соответствующее рассматриваемой задаче, имеет малый параметр, и решение его ищется в виде разложения по этому параметру. Даются оценки погрешности нулевого и первого приближений к оптимальному управлению при некоторых предположениях о функциях, присутствующих в соответствующем разложении функции Беллмана. Настоящая работа продолжает исследования [1—6].

1. Несмотря на довольно обширную библиографию по стохастическим управляемым системам, существует ограниченное количество работ, где дается точное решение задачи синтеза оптимального управления. Ввиду этого многие работы посвящены приближенному синтезу оптимального управления. В работах [2, 3, 5, 6] рассмотрены приближения к оптимальному управлению для систем с малыми случайными возмущениями, интенсивность шума которых не зависит от фазовых координат. Кроме того, в указанных работах предполагается, что решение соответствующей детерминированной задачи известно.

В настоящей работе рассматриваются системы, в которых интенсивность шума нелинейно зависит от фазовых координат, вида

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + B(t)u(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma(x, t)\,\xi(t)$$

$$x(0) = x_0 \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.1}$$

Здесь $x \in E^n$, $u \in E^m$, где E^l — евклидово пространство размерности l. $B(t)$ — матрица размером $n \times m$ имеет измеримые и ограниченные элементы на интервале $[0, T]$. Вектор $f(x, t) \in E^n$ и матрица $\sigma(x, t)$ размером $n \times n$ измеримы по совокупности аргументов и удовлетворяют глобальному условию Липшица по x и оценке на рост

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| + |\sigma(x_1, t) - \sigma(x_2, t)| \leqslant c_1 |x_1 - x_2| \tag{1.2}$$

$$|f(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leqslant c_1 (1 + |x|) \tag{1.3}$$

Здесь и далее c_i — некоторые положительные постоянные, а знак $|\ \ |$ означает евклидову норму соответствующего вектора или матрицы. Кроме того, в (1.1) число T и вектор $x_0 \in E^n$ заданы, $\varepsilon \geqslant 0$—

параметр, $\xi(t)$ — n-мерный векторный винеровский процесс такой, что

$$\xi(0)=0,\quad M\xi(t)=0,\quad M\xi(t)\xi'(t)=It$$

где M — знак математического ожидания, I — единичная матрица, штрих— знак транспонирования.

Задача Коши (1.1) при $u\equiv 0$, удовлетворяющая сформулированным нами требованиям, имеет единственное решение [7]. Требуется определить управление u, зависящее от текущего времени t и фазового вектора $x(t)$, которое минимизирует функционал $J(0,u)$, где

$$J(t,u)=M\left[x'(T)H_1x(T)+\int_t^T\left(x'(\tau)H_2(\tau)x(\tau)+u'(\tau)H_3(\tau)u(\tau)\right)d\tau\right] \tag{1.4}$$

Здесь заданные матрицы H_1, $H_2(t)$ — неотрицательно определенны, $H_3(t)$ — положительно определена, элементы матрицы $H_2(t)$ и $H_3(t)$ — измеримы и ограничены на интервале $0\leqslant t\leqslant T$.

Пусть $V(t,x)$ — функция, равная минимальному значению функционала $J(t,u)$ при условии, что процесс (1.1) начинается в момент t из точки x, и допустим, что $V(t,x)$ удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\begin{aligned}-\frac{\partial V}{\partial t}=\min_u\Big[&x'(t)H_2(t)x(t)+u'(t)H_3(t)u(t)+\\&+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'(f(x,t)+B(t)u(t))+\\&+\frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma(x,t)\sigma'(x,t)\frac{\partial^2V}{\partial x^2}\Big]\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $\partial V/\partial t$ — частная производная по времени, $\partial V/\partial x$ — вектор первых частных производных по компонентам вектора x, $\partial^2V/\partial x^2$ — матрица вторых частных производных по компонентам вектора x, Sp — след матрицы.

Из (1.5) будем иметь выражение для оптимального управления $g(t,x)$

$$g(t,x)=-\frac{1}{2}H_3^{-1}(t)B'(t)\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.6}$$

Обозначим

$$D(t)=B(t)H_3^{-1}(t)B'(t) \tag{1.7}$$

Подставив (1.6) в (1.5), учитывая (1.7), получим задачу Коши для функции Беллмана $V(t,x)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+x'H_2x-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'D\frac{\partial V}{\partial x}+f'(x,t)\frac{\partial V}{\partial x}+\\&+\frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma\sigma'\frac{\partial^2V}{\partial x^2}=0,\quad V(T,x)=x'H_1x\end{aligned} \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) для функции $V(t, x)$ есть нелинейное параболическое уравнение в частных производных с растущими коэффициентами и граничной функцией. В соответствии с вышесказанным функция $V(t, x)$ ищется в виде

$$V(t, x) = S(t, x) - \varepsilon S_1(t, x) - \varepsilon^2 S_2(t, x) \cdots \tag{1.9}$$

Функция $S(t, x)$ в (1.9) есть функция Беллмана для детерминированной задачи, которая получается из задачи (1.1), (1.4) при $\varepsilon = 0$. Все функции $S_i(t, x)$ находятся из уравнений, которые получаются подстановкой (1.9) в (1.8) и приравниванием членов с одинаковой степенью ε.

Оптимальное управление в соответствии с (1.9) и (1.6) будет выражаться формулой

$$g(t, x) = -\frac{1}{2} H_3^{-1}(t) B'(t) \left[\frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial S_1(t, x)}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2(t, x)}{\partial x} + \cdots \right] \tag{1.10}$$

а i-е приближение к оптимальному управлению будет искаться в виде

$$u_i(t, x) = -\frac{1}{2} H_3^{-1}(t) B'(t) \left[\frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial S_1(t, x)}{\partial x} + \cdots + \varepsilon^i \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x} \right] \tag{1.11}$$

2. В этом параграфе будут даны оценки погрешности нулевого приближения. Нулевое приближение к $g(t, x)$ в соответствии с (1.11) будет

$$u_0(t, x) = -\frac{1}{2} H_3^{-1}(t) B'(t) \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} \tag{2.1}$$

Функция $S(t, x)$ согласно параграфу 1 должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + x'H_1(t)x - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(t, x)}{\partial x}\right)' D(t) \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + f'(x, t) \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} = 0, \quad S(T, x) = x'H_2x \tag{2.2}$$

Задача Коши (2.2) имеет единственное решение [5]. Для того, чтобы показать, что формула (2.1) задает нулевое приближение к $g(t, x)$, необходимо оценить разность $J(0, g) - J(0, u_0)$. С этой целью введем в рассмотрение функции $Q(t, x)$ и $R(t, x)$ при помощи равенств

$$V(t, x) = S(t, x) + Q(t, x) \tag{2.3}$$

$$J(t, u_0) = S(t, x) + R(t, x) \tag{2.4}$$

Как видно из (2.3), (2.4), нам необходимо оценить разность $Q(0, x_0) - J(0, x_0)$. Прежде, чем продолжать наши рассуждения, примем, что

$$\left|\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x^2}\right| \leqslant c_2 \tag{2.5}$$

Из (2.5) и (2.2) следует, что вектор первой частной производной по компонентам вектора x удовлетворяет оценке

$$\left|\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\right| \leqslant c_2(1 + |x|) \tag{2.6}$$

Подставим (2.3) в (1.8) и учтем (2.2). Получим уравнение для функции $Q(t,x)$

$$\frac{\partial Q(t)}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)' D\frac{\partial S}{\partial x} + f'(x,\ t)\frac{\partial Q}{\partial x} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)' D\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma(x,\ t)\,\sigma'(x,t)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma(x,\ t)\,\sigma'(x,\ t)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0$$

$$Q(T,\ x) = 0 \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) представляет собой уравнение Беллмана для следующей задачи оптимального управления:

$$\dot y(t) = f(y,\ t) - \frac{1}{2}D(t)\frac{\partial S(y,\ t)}{\partial y} + B(t)\,\omega(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma(y,\ t)\,\xi(t) \tag{2.8}$$

$$y(0) = x_0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$Q(t,\ y) = \min_{\omega} G(t,\ \omega)$$

$$G(t,\ \omega) = M\int_t^T\left[\frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma(y(\tau,\ \omega),\ \tau)\,\sigma'(y(\tau,\ \omega),\ \tau)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^2 S(y(\tau,\ \omega),\ \tau)}{\partial y^2} + \omega'(\tau)H_2(\tau)\,\omega(\tau)\right]d\tau \tag{2.9}$$

где $y(t,\ \omega)$ — значение фазового вектора y в момент времени t при управлении $\omega(t)$.

Существование решения задачи (2.8), (2.9) следует из существования решения задачи Коши (2.2). Пусть $\omega_0(t)$ — оптимальное управление для задачи (2.8), (2.9). Обозначим

$$M\int_0^T \omega_0'(\tau)\,H_2(\tau)\,\omega_0(\tau)\,d\tau = \alpha \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует оценка

$$M\int_0^T \omega_0'(\tau)\,\omega_0(\tau)\,d\tau \leqslant a\lambda^{-1} \tag{2.11}$$

где число $\lambda > 0$ является минимальным собственным значением положительно определенной матрицы H_3.

Введем еще одно обозначение

$$\gamma(\omega) = M\int_0^T \frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma(y(\tau,\ \omega),\ \tau)\,\sigma'(y(\tau,\ \omega),\ \tau)\frac{\partial^2 S(y(\tau,\ \omega),\ \tau)}{\partial y^2}\,d\tau \tag{2.12}$$

Ясно, что

$$\alpha + \gamma(\omega_0) - \gamma(0) \leq 0$$

Далее

$$\alpha - |\gamma(\omega_0) - \gamma(0)| \leqslant 0$$

Откуда

$$\alpha - |\gamma(\omega_0)| - |\gamma(0)| \leqslant 0 \tag{2.13}$$

Кроме того, имеем

$$|Q(0,\ x_0)| \leqslant \alpha + |\gamma(\omega_0)| \tag{2.14}$$

Оценим величины α и $|\gamma(\omega_0)|$ в формуле (2.14). Из (2.12), (1.3), (2.5) следует, что справедлива оценка

$$|\gamma(\omega_0)| \leqslant \varepsilon c_3\left(1 + \int_0^T M|y(t,\ \omega_0)|^2\,dt\right) \tag{2.15}$$

Аналогично для $|\gamma(0)|$ имеем

$$|\gamma(0)| \leqslant \varepsilon c_3\left(1 + \int_0^T M|y(t,\ 0)|^2\,dt\right) \tag{2.16}$$

Из уравнения (2.8) и соотношений (1.3), (1.7), (2.6), (2.11) имеем

$$M|y(t,\ \omega_0)|^2 \leqslant c_4\left(1 + \alpha + |x_0|^2 + \int_0^t M|y(\tau,\ \omega_0)|^2\,d\tau\right) \tag{2.17}$$

Применив к (2.17) лемму Гронуолла—Беллмана [7], получим

$$M|y(t,\ \omega_0)|^2 \leqslant c_5(1 + \alpha + |x_0|^2) \tag{2.18}$$

Из (2.15) и (2.18) имеем

$$|\gamma(\omega)| \leqslant \varepsilon c_6(1 + \alpha + |x_0|^2) \tag{2.19}$$

Аналогично получим

$$|\gamma(0)| \leqslant \varepsilon c_8 (1 + |x_0|^2) \tag{2.20}$$

Подставив (2.19), (2.20) в (2.13), заключаем, что

$$\alpha \leqslant \frac{2\varepsilon c_6}{1 - \varepsilon c_0} (1 + |x_0|^2) \tag{2.21}$$

Потребуем, чтобы $\varepsilon c_6 < 1$, тогда подставив (2.21) и (2.19), где уже учтено (2.21), в (2.14), получим оценку $Q(0, x_0)$

$$|Q(0, x_0)| \leqslant \varepsilon c_7 (1 + |x_0|^2) \tag{2.22}$$

Теперь обратимся к оценке $R(0, x_0)$. Заметим, что сумма $S(t, x) + R(t, x)$ есть значение функционала (1.4) на траекториях системы (1.1), в которую подставлено управление (2.1). Следовательно, эта сумма удовлетворяет соответствующему обратному уравнению Колмогорова [7]. Запишем его

$$\frac{\partial (S + R)}{\partial t} + f'(x, t) \frac{\partial (S + R)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (S + R)}{\partial x} \right)' D \frac{\partial S}{\partial x} +$$

$$+ x' H_0 x - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)' D \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} \varepsilon Sp \sigma\sigma' \frac{\partial^2 (S + R)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.23}$$

С учетом формулы (2.2) для $S(t, x)$ из (2.23) получим уравнения для $R(t, x)$

$$\frac{\partial R(t, x)}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R(t, x)}{\partial x} \right)' D(t) \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + f'(x, t) \frac{\partial R(t, x)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} Sp \sigma(x, t) \sigma'(x, t) \frac{\partial^2 S(t, x)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{2} Sp \sigma(x, t) \sigma'(x, t) \frac{\partial^2 R(t, x)}{\partial x^2} = 0$$

$$R(T, x) = 0 \tag{2.24}$$

Если сравнить (2.24) с уравнением (2.7) для $Q(t, x)$, то можно сделать вывод, что $R(t, x) - Q(t, x)/\omega = 0$. Поэтому

$$R(t, x) = M \int_t^T \frac{1}{2} \varepsilon Sp \sigma(x(\tau, 0), \tau) \sigma'(x(\tau, 0), \tau) \frac{\partial^2 S(x(\tau, 0), \tau)}{\partial x^2} d\tau$$

где $x(t, 0)$ — значение фазового вектора в момент t при управлении, равном нулю.

Отсюда

$$R(0, x_0) = \gamma(0)$$

и

$$|R(0, x_0)| \leqslant \varepsilon c_9 (1 + |x_0|^2) \tag{2.25}$$

Из (2.22) и (2.25) вытекает требуемая оценка

$$|Q(0,\ x_0) - R(0,\ x_0)| \leqslant \varepsilon c_7 (1 + |x_0|^2) \qquad (2.26)$$

Итак, для всех ε, если управлять исходной системой (1.1) не оптимальным образом, а с помощью управления (2.1), то ошибка по функционалу не превосходит (2.26) при сделанном нами допущении.

3. В этом параграфе рассмотрим вопрос о первом приближении u_1 к оптимальному управлению $g(t,\ x)$. В соответствии с (1.11) будем иметь

$$u_1(t,\ x) = -\frac{1}{2} H_2^{-1}(t)\, B'(t) \left[\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial S_1(t,\ x)}{\partial x} \right] \qquad (3.1)$$

Как и в случае нулевого приближения, представим $V(t,\ x)$ и $J(t,\ u_1)$ в виде равенств

$$V(t,\ x) = S(t,\ x) + \varepsilon S_1(t,\ x) + Q_1(t,\ x) \qquad (3.2)$$

$$J(t,\ u_1) = S(t,\ x) + \varepsilon S_1(t,\ x) + R_1(t,\ x) \qquad (3.3)$$

Разность $Q_1(t,\ x) - R_1(t,\ x)$ и оценивает погрешность первого приближения по функционалу. Следовательно, необходимо оценить функции $R_1(t, x)$ и $Q_1(t, x)$.

Подставив (3.2) в (1.8), приравнивая в соответствии с (1.9) члены с одинаковой степенью ε, учитывая уравнение (2.2) для функции $S(t,\ x)$, получим уравнения для $S_1(t,\ x)$ и $Q_1(t,\ x)$. Запишем их

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S}{\partial x} + f'(x,\ t)\frac{\partial S_1}{\partial x} - \frac{1}{2} Sp\, \sigma\sigma' \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0$$

$$S_1(T,\ x) = 0 \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S_1}{\partial x} +$$

$$+ f'(x,\ t)\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2} Sp\, \sigma\sigma' \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} Sp\, \sigma\sigma' \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0$$

$$Q_1(T,\ x) = 0 \qquad (3.5)$$

Из (3.4) видно, что функция $S_1(t,\ x)$ является функцией Беллмана на траекториях неуправляемого процесса

$$\dot{y}(t) = f(y,\ t) - \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial S(y,\ t)}{\partial y}$$

$$y(0) = x_0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (3.6)$$

и имеет вид

$$S_1(t,\ y) = \int_t^T \frac{1}{2} Sp\, \sigma(y(\tau),\ \tau)\, \sigma'(y(\tau),\ \tau) \frac{\partial^2 S(y(\tau),\ \tau)}{\partial y^2}\, d\tau \qquad (3.7)$$

где $y(t)$—значение фазового вектора в момент t. Решение задачи (3.6), (3.7) следует из решения задачи Коши (2.2).

Предположим теперь, как и в случае нулевого приближения,

$$\left| \frac{\partial^2 S_1(t,\ x)}{\partial x^2} \right| \leqslant c_8 \tag{3.8}$$

Тогда соответственно будет

$$\left| \frac{\partial S_1(t,\ x)}{\partial x} \right| \leqslant c_8 (1 + |x|) \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.5). Из него следует, что $Q_1(t,\ x)$ является функцией Беллмана для стохастической задачи

$$\dot{z}(t) = f(z,\ t) - \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial S(z,\ t)}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{2} D(t) \frac{\partial S_1(z,\ t)}{\partial z} +$$

$$+ B(t) \mu(t) + \sqrt{\varepsilon}\, \sigma(z, t)\, \xi(t)$$

$$z(0) = x_0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.10}$$

с функционалом

$$G_1(t,\ \mu) = M \int_t^T \Big[\frac{\varepsilon^2}{2} Sp\, \sigma(z(\tau,\ \mu),\ \tau)\, \sigma'(z(\tau,\ \mu),\ \tau) \frac{\partial^2 S_1(z(\tau,\ \mu),\ \tau)}{\partial z^2} -$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\frac{\partial S_1(z(\tau,\ \mu),\ \tau)}{\partial z} \right)' D(\tau) \frac{\partial S_1(z(\tau,\ \mu),\ \tau)}{\partial z} + \mu'(\tau) H_2(\tau) \mu(\tau) \Big] d\tau \tag{3.11}$$

где $z(t,\ \mu)$ — значение фазового вектора z в момент t при управлении $\mu(t)$.

Существование решения задачи (3.10), (3.11) следует из существования решения задач Коши (2.2), (3.4). Действуя далее так же, как и в параграфе первом с учетом оценок (3.8) и (3.9), получим следующие соотношения:

$$| Q_1(0,\ x_0) | \leqslant \varepsilon^2 c_9 (1 + |x_0|^2) \tag{3.12}$$

$$| G_1(0,\ 0) | \leqslant \varepsilon^2 c_9 (1 + |x_0|^2) \tag{3.13}$$

где $G_1(0,\ 0)$ — значение функционала (3.11) в момент $t = 0$ при управлении $\mu(t) = 0$.

Перейдем теперь к оценке $R_1(0,\ x_0)$. Нетрудно заметить, что сумма $S(t,\ x) + \varepsilon S_1(t,\ x) + R_1(t,\ x)$ есть значение функционала (1.4) на траекториях системы (1.1), в которую подставлено управление (3.1). Следовательно, эта сумма удовлетворяет соответствующему обратному уравнению Колмогорова. Из этого уравнения, приравнивая члены с одинаковой степенью ε, учитывая формулы (2.2) для $S(t,\ x)$ и (3.4) для $S_1(t,\ x)$, получим уравнение для функции $R_1(t,\ x)$

$$
\frac{\partial R_1(t,\ x)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S_1}{\partial x} +
$$

$$
+ f'(x,t)\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2}\, Sp\sigma\sigma' \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} +
$$

$$
+ \frac{\varepsilon^2}{2}\, Sp\sigma\sigma' \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} = 0
$$

$$
R_1(T,\ x) = 0 \tag{3.14}
$$

Сравнивая уравнение (3.14) с уравнением (3.5) для функции $Q_1(t,\ x)$, можно сделать вывод, что $R_1(t,\ x) = Q_1(t,\ x)|_{\varepsilon=0}$. Поэтому справедливо равенство

$$
R_1(t,\ x) = G_1(t,\ 0) \tag{3.15}
$$

Из (3.15) и (3.13) следует оценка

$$
|R_1(0,\ x_0)| \leqslant \varepsilon^2 c_9 (1 + |x_0|^2) \tag{3.16}
$$

Имея в виду (3.12) и (3.16), окончательно получим оценку первого приближения

$$
|Q_1(0,\ x_0) - R_1(0,\ x_0)| \leqslant \varepsilon^2 c_9 (1 + |x_0|^2) \tag{3.17}
$$

Таким образом, если системой (1.1) управлять не оптимальным образом, а с помощью управления (3.1), оценка по функционалу с учетом допущений (2.5), (3.8), не будет превосходить (3.17).

Замечание 1. Если предположить, что функция $f(x,\ t)$ непрерывна вместе со своими частными производными по x до четвертого порядка, то согласно работе [5] функция Беллмана для детерминированной задачи $S(t,\ x)$ также непрерывна вместе со своими частными производными по x до четвертого порядка. Присоединив к этому предположению предположения о том, что интенсивность шума $\sigma(x,\ t)$ имеет ограниченную непрерывную частную производную по x второго порядка и что частная производная функции $S(t,\ x)$ по x четвертого порядка ограничена, придем к выводу, что согласно формуле (3.7) будет выполняться допущение (3.8) для функции $S_1(t,\ x)$. Таким образом, допущение (2.5) и высказанные выше три предположения достаточны для справедливости получаемых в предлагаемой работе результатов.

Замечание 2. Аналогично находятся оценки погрешности высших приближений к $g(t,\ x)$ и доказывается, что они — величины порядка ε^{l+1}, где l — порядок приближения, при введении необходимых предположений о функциях S_i и величине параметра ε.

4. Пример. Рассмотрим управляемый гиростат, закрепленный в некоторой точке O своей неизменяемой части. Предполагается, что внешние силы, действующие на гиростат или все равны нулю или имеют результирующий момент относительно точки O, равный нулю. Кроме того, предположим, что момент сил сопротивления, действующий на изменяемую часть гиростата, состоит из основной компоненты, меняющейся пропорционально угловой скорости изменяемой части гиростата относительно его неизменяемой части ω, и малой случайной компоненты, которая также зависит от ω и параметра ε.

С учетом сказанного уравнения движения гиростата запишем в виде [8—10]

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2 p_3 - z_3 p_2 && (123) \\ J_1(\dot\omega_1 + \dot p_1) &= -u_1 - k_0(1 + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma_1 \dot\xi_1)\,\omega_1 && (123) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

где p_i — проекция угловой скорости неизменяемой части гиростата на i-ю ось, z_i — проекция момента количества движения гиростата относительно точки O на i-ю ось, J_i — момент инерции изменяемой части относительно i-й оси, u_i — проекция вектора момента управления на i-ю ось, ω_i — проекция вектора угловой скорости изменяемой части ω на i-ю ось, σ_i — константа, ε — параметр, ξ_i — скалярный винеровский процесс.

Будем искать такое управление u, которое минимизирует функционал $G(0, u)$ на траекториях системы (4.1), где

$$G(t, u) = M\left[\int_t^T q(\tau)\, u'(\tau)\, u(\tau)\, d\tau + p'(T)\, p(T)\right] \qquad (4.2)$$

Здесь $q(t)$ — некоторая положительная функция времени. Имеют место соотношения

$$z_i = N_i p_i + J_i \omega_i \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (4.3)$$

$$N_i = A_i + J_i \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (4.4)$$

где N_i — момент инерции всего гиростата относительно i-й оси, A_i — момент инерции неизменяемой части гиростата относительно i-й оси.

Из (4.3) имеем

$$\omega_i = \frac{z_i - N_i p_i}{J_i} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (4.5)$$

С учетом (4.4) и (4.5) система (4.1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2 p_3 - z_3 p_2 && (123) \\ A_1 \dot p_1 &= z_2 p_3 - z_3 p_2 + u_1 + k_0(1 + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma_1 \dot\xi_1)\frac{z_i - N_i p_i}{J_i} && (123) \\ & \qquad 0 \le t \le T \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Обозначим функцию Беллмана задачи (4.6), (4.2) через $V(t, x)$ и будем искать ее в виде

$$V(t, x) = S(t, x) + \varepsilon S_1(t, x) + \varepsilon^2 S_2(t, x) + \cdots \qquad (4.7)$$

где x — вектор фазовых координат, состоящий из компонент p_1, p_2, p_3, z_1, z_2, z_3.

Уравнение Беллмана будет выглядеть так

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial V}{\partial p_1}(z_2p_3 - z_3p_2) + \frac{1}{A_2}\frac{\partial V}{\partial p_2}(z_3p_1 - z_1p_3) +$$

$$+ \frac{1}{A_3}\frac{\partial V}{\partial p_3}(z_1p_2 - z_2p_1) - \frac{1}{4q(t)}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{k_0}{A_1J_1}(z_1 - N_1p_1) + \frac{\partial V}{\partial p_2}\frac{k_0}{A_2J_2}(z_2 - N_2p_2) +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial p_3}\frac{k_0}{A_3J_3}(z_3 - N_3p_3) + \frac{\partial V}{\partial z_1}(z_2p_3 - z_3p_2) +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial z_2}(z_3p_1 - z_1p_3) + \frac{\partial V}{\partial z_3}(z_1p_2 - z_2p_1) +$$

$$+ \varepsilon\sum_{i=1}^{3}\frac{z_i^2(z_i - N_ip_i)^2}{2J_i^2A_i^2}\frac{\partial^2 V}{\partial p_i^2} = 0 \qquad V(T, x) = p'p \qquad (4.8)$$

а оптимальное управление g_i находится по формуле

$$g_i(t, x) = -\frac{1}{2A_i q(t)}\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad i = 1, 2, 3 \qquad (4.9)$$

Для случая, когда $A_1 = A_2 = A_3 = A$, $J_1 = J_2 = J_3 = J$, а, следовательно, и $N_1 = N_2 = N_3 = N$, уравнение для функции Беллмана детерминированной задачи $S(t, x)$ имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial p_1}(z_2p_3 - z_3p_2) + \frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial p_2}(z_3p_1 - z_1p_3) +$$

$$+ \frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial p_3}(z_1p_2 - z_2p_1) - \frac{1}{4q(t)A^2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial S}{\partial p_i}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial p_1}\frac{k_0}{AJ}(z_1 - Np_1) + \frac{\partial S}{\partial p_2}\frac{k_0}{AJ}(z_2 - Np_2) +$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial p_3}\frac{k_0}{AJ}(z_3 - Np_3) + \frac{\partial S}{\partial z_1}(z_2p_3 - z_3p_2) +$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial z_2}(z_3p_1 - z_1p_3) + \frac{\partial S}{\partial z_3}(z_1p_2 - z_2p_1) = 0$$

$$S(T, x) = p'p \qquad (4.10)$$

Будем искать функцию $S(t, x)$ в виде

$$S(t, x) = \varphi_1(t)\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + 2\varphi_2(t)\sum_{i=1}^{3} p_iz_i + \varphi_3(t)\sum_{i=1}^{3} z_i^2 \qquad (4.11)$$

Подставив (4.11) в (4.10) и сгруппировав члены, содержащие $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{3} 2p_i z_i$, $\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2$, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi_i(t)$

$$\dot\varphi_1(t) = \frac{1}{A^2 q(t)}\varphi_1^2(t) + \frac{2k_0 N}{AJ}\varphi_1(t) \qquad \varphi_1(T) = 1 \tag{4.12}$$

$$\dot\varphi_2(t) = \frac{1}{A^2 q(t)}\varphi_1(t)\varphi_2(t) - \frac{k_0}{AJ}\varphi_1(t) + \frac{k_0 N}{AJ}\varphi_2(t) \qquad \varphi_2(T) = 0 \tag{4.13}$$

$$\dot\varphi_3(t) = \frac{1}{A^2 q(t)}\varphi_2(t) - 2\frac{k_0}{AJ}\varphi_2(t) \qquad \varphi_3(T) = 0 \tag{4.14}$$

Из уравнений (4.12), (4.13), (4.14) могут быть найдены функции $\varphi_i(t)$, если вид функции $q(t)$ конкретно задан. Дадим оценку погрешности нулевого приближения к $g(t, x)$. В качестве нулевого приближения возьмем

$$u_{0i} = -\frac{1}{2Aq(t)}\frac{\partial S(t, x)}{\partial p_i} = -\frac{\varphi_1 p_i + \varphi_2 z_i}{Aq(t)} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4.15}$$

Представим функции $V(t, x)$ и $G(t, u_0)$ в виде

$$V(t, x) = S(t, x) + Q(t, x) \tag{4.16}$$

$$G(t, u_0) = S(t, x) + R(t, x) \tag{4.17}$$

Подставив (4.15) в (4.8) и учитывая (4.10) и (4.11), получим уравнение для функции $Q(t, x)$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial p_1}(z_2 p_3 - z_3 p_2) + \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial p_2}(z_3 p_1 - z_1 p_3) +$$

$$+ \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial p_3}(z_1 p_2 - z_2 p_1) - \frac{1}{4q(t)A^2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial Q}{\partial p_i}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{2q(t)A^2}\sum_{i=1}^{3}(\varphi_1 p_i + \varphi_2 z_i)\frac{\partial Q}{\partial p_i} + \frac{\partial Q}{\partial p_1}\frac{K_0}{AJ}(z_1 - Np_1) -$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial p_2}\frac{k_0}{AJ}(z_2 - Np_2) + \frac{\partial Q}{\partial p_3}\frac{k_0}{AJ}(z_3 - Np_3) -$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial z_1}(z_2 p_3 - z_3 p_2) - \frac{\partial Q}{\partial z_2}(z_3 p_1 - z_1 p_3) +$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial z_3}(z_1 p_2 - z_2 p_1) - s\sum_{i=1}^{3}\frac{s_i^2(z_i - Np_i)^2}{2J^2A^2} +$$

$$+ \frac{s\varphi_1(t)}{2A^4J^2}\sum_{i=1}^{3} s_i^2(z_i - Np_i)^2 = 0 \qquad Q(T, x) = 0 \tag{4.18}$$

Таким образом, уравнение (4.18) является уравнением Беллмана для системы

$$\dot{y}_1 = y_2 r_3 - y_3 r_2 \qquad (123)$$

$$\dot{r}_1 = \frac{1}{A}\left[y_2 r_3 - y_3 r_2 + \mu_1 - \frac{k_0}{J}(1 + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma_1 \dot{\xi}_1)(y_1 - N r_1) - \right. \qquad (4.19)$$

$$\left. - \frac{1}{2q(t) A^2} (\varphi_2 r_1 + \varphi_2 y_1) \right] \qquad (123)$$

$$y_i(0) = z_i(0) \quad r_i(0) = p_i(0) \quad i = 1, 2, 3 \quad 0 < t \leqslant T$$

где y_i, r_i — фазовые координаты, μ — вектор управления, с функционалом

$$M\left[\int_0^T \left(q(t)\mu'(t)\mu(t) + \frac{\varepsilon\varphi_1(t)}{A^2 J^2} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^2 (y_i - N r_i)^2 \right) dt \right]$$

Так же, как и в параграфе 2, применив ту же процедуру оценивая, приходим к выводу

$$| Q(0,\ x(0) | < \varepsilon c_{10} \left[1 + \sum_{i=1}^{3} (p_i^2(0) + z_i^2(0)) \right]$$

и

$$| R(0,\ x(0) | < \varepsilon c_{10} \left[1 + \sum_{i=1}^{3} (p_i^2(0) + z_i^2(0)) \right]$$

то есть получаем оценку погрешности нулевого приближения к оптимальному управлению

$$| V(0,\ x(0)) - G(0,\ u_0) | < \varepsilon c_{10} \left[1 + \sum_{i=1}^{3} (p_i^2(0) + z_i^2(0)) \right]$$

Рассуждая так же, как и в параграфе 3, можно получить соответствующую оценку погрешности первого приближения. Если рассмотренный случай дополнить условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то функция $V(t,\ x)$ допускает явное представление в виде

$$V(t,\ x) = \varphi_1(t) \sum_{i=1}^{3} p_i^2 + 2\varphi_2(t) \sum_{i=1}^{3} p_i z_i + \varphi_3(t) \sum_{i=1}^{3} z_i^2 \qquad (4.20)$$

В самом деле, подставив (4.20) в (1.8), учитывая, что $A_i = A$, $N_i = N$, $J_i = J$, $\sigma_i = \sigma$, $i = 1,2,3$, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi_i(t)$

$$\dot{\varphi}_1(t) = \frac{1}{A^2 q(t)} \varphi_1^2(t) + \frac{2k_0 N}{AJ} \varphi_1(t) - \frac{\varepsilon\sigma^2 N^2}{A^2 J^2} \varphi_1(t)$$

$$\varphi_1(T) = 1$$

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{1}{A^2 q(t)} \psi_2(t) \psi_3(t) - \frac{k_0}{AJ} \psi_1(t) + \frac{k_0 N}{AJ} \psi_2(t) + \frac{\varepsilon\sigma^2 N}{A^2 J^2} \psi_1(t)$$

$$\psi_2(T) = 0$$

$$\dot{\psi}_3(t) = \frac{1}{A^2 q(t)} \psi_2^2(t) - \frac{2k_0}{AJ} \psi_2(t) - \frac{\varepsilon\sigma^2}{A^2 J^2} \psi_1(t)$$

$$\psi_3(T) = 0$$

Рассмотренный пример интересен тем, что, несмотря на то, что в данном случае глобальное условие Липшица не выполняется, метод, примененный в настоящей работе, позволяет построить нулевое и первое приближение к оптимальному управлению и для этого случая, получив при этом оценки погрешности, соответствующие результатам предлагаемой работы.

Автор выражает благодарность В. Б. Колмановскому за внимание к работе.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 4 V 1976

Գ. Գ. ԵՂՅԱՆ

ՈՐՈՇ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է պարամետրերի պատահական փոքր գրգռումների դեպքում ոչ գծային համակարգերի սինթեզման մոտավոր եղանակ:

Ենթադրվում է, որ համակարգի շարժման հավասարումը պարունակում է փոքր ոչ գծային անդամներ: Այդ դեպքում օպտիմալ խնդրին համապատասխանող Բելմանի հավասարումը ունի փոքր պարամետր և նրա լուծումը կառուցվում է ըստ այդ պարամետրի վերլուծության տեսքով:

Առաջարկված եղանակի սխալի համար տրվում են գնահատականներ և եղանակի կիրառելիության համար ընդունելի փոքր պարամետրի արժեքների համար սահմանվում է վերին սահման:

ON APPROXIMATE CONTROL OF CERTAIN STOCHASTIC SYSTEMS

G. G. EGHIAN

Summary

The paper proposes an approximate way to design a nonlinear control system with minor random disturbances of its parameters. The system evolution equations are assumed to contain small nonlinear terms.

Then the Bellman equation for the corresponding optimal problem has a small parameter and is solved by expansion of this parameter. The method errors are estimated and the upper-bound of the small parameter values to which the method is applicable is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fleming W. H.* Some markovian optimisation problems. J. Math., Mech., 1963, 12.
2. *Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л.* Лекции «Задачи оптимального управления при неполной информации». Тр. IV Всесоюзной зимней школы по математическому программированию и сложным вопросам. М., Изд-во ЦЭМИ АН СССР, вып. 1, 1971.
3. *Солянник А. И., Черноусько Ф. Л.* Приближенный метод синтеза оптимального управления систем, подверженных случайным возмущениям. ПММ, 1972, т. 36, № 5.
4. *Колмановский В. Б.* О приближенном синтезе некоторых стохастических квазилинейных систем. Автоматика и телемеханика, 1975, № 1.
5. *Fleming W. H.* Stohastic control for small noise intensitiers. Siam J. Control, 1971, 9, 3.
6. *Благусь А. С.* Приближенное решение уравнения Беллмана для одного класса задач оптимального управления конечным состоянием. ПММ, 1973, т. 36, вып. 3.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
8. *Леви-Чивита Т., Амальди Ч.* Курс теоретической механики, М., т. 2, ч. 2, 1951.
9. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростата. ПММ, 1961, т. 25, № 1.
10. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, № 3.