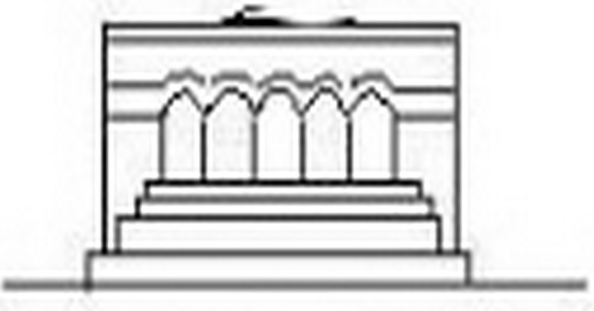
ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1976

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 6, 1976 Механика

К. Г. ГУЛЯН

К РЕШЕНИЮ ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СТРИНГЕРА ДВУМ КЛИНОВИДНЫМ УПРУГИМ ПЛАСТИНАМ

Контактные задачи о передаче нагрузки от накладок (стрингеров) малой толщины упругим телам в последнее время, ввиду их большой практической ценности, получили значительное развитие. Достаточно полная библиография работ по указанной области теории упругости содержится в [1]. Здесь же вкратце остановимся на некоторых работах, посвященных задачам о передаче нагрузки от стрингера клиновидной упругой пластине.

Первой работой, относящейся к передаче нагрузки от стрингера клиновидной упругой пластине, по-видимому, следует считать работу [2]. В этой работе в рамках известных физических предположений, предложенных в [3], получено эффективное решение в замкнутой простой форме задачи о передаче нагрузки от полубесконечного стрингера упругой пластине в виде полуплоскости, представляющей частный случай клиновидной пластины. Основой классифицирования указанной задачи в ряду задач для клиновидной пластины может послужить еще тот факт, что в [2] исследование ведется при помощи интегрального преобразования Меллина, являющегося основным математическим аппаратом в граничных задачах теории упругости для клиновидных бесконечных областей. Эта же самая задача впоследствии была рассмотрена в работах [4, 5].

Замкнутое решение, доведенное до числовых результатов, задачи о передаче нагрузки от полубесконечного стрингера клиновидной пластине с произвольным углом раствора построено в работе [6]. Здесь, как в [2], решение задачи сводится к решению определенного разностного уравнения для преобразования Меллина от неизвестного тангенциального контактного напряжения. Методика решения этого уравнения во многом аналогична методике, изложенной в [2]. Эта же самая задача повторно была рассмотрена в работе [7], где окончательное решение выражено в квадратурах.

К обсуждаемому кругу задач примыкают также задачи о контакте полубесконечных балок с упругим клином, которым посвящены работы [8, 9, 10].

Контактная задача о передаче нагрузки от накладки конечной длины клину с произвольным углом раствора исследована в нашей работе [11]. Эта же самая задача в случае стрингера переменного поперечного сечения накладки рассмотрена в [12]. В другой нашей работе [13] рассматривается задача о передаче нагрузки двум одинаковым клиновидным упругим пластинам от накладки конечной длины, вдоль которой они соединены между собой.

В настоящей работе приводится исследование двух контактных задач о передаче нагрузки от полубесконечной накладки двум одинаковым клиновидным упругим пластинам с произвольным углом раствора. В первой задаче предполагается, что грани клиньев свободны от напряжений, а во второй задаче — они защемлены.

Отметим, что первая задача ранее была рассмотрена в работе [14]. При помощи известных представлений перемещений интегралами Меллина решение исходной задачи в этой работе сведено к некоторому разностному уравнению, после чего записано его общеизвестное решение в квадратурах без дальнейшего их исследования в смысле возможного упрощения. Последнее необходимо для выяснения структуры и закономерностей изменения важных механических характеристик — тангенциальных и нормальных контактных напряжений. Кроме того, отсутствие такого исследования затрудняет получение числовых результатов.

В настоящей же работе исследование упомянутых выше задач проводится методом, в сущности отличным после некоторого этапа от предложенного в [14] и представляющим некоторое развитие методов, изложенных в [2] и [6]. Исходным пунктом у нас служит построение функций влияния для клина с произвольным углом раствора от единичных радиальных и тангенциальных сосредоточенных сил. После этого на основе построенных функций влияния обе поставленные задачи формулируются в виде систем интегро-дифференциальных уравнений при определенных граничных условиях. Затем при помощи преобразования Меллина эти системы преобразуются в системы разностных уравнений, к которым применяется метод работ [2] и [6] в несколько видоизмененной форме. Таким способом удается получить замкнутое и эффективное решение разбираемых задач, допускающих числовые реализации. Получены простые расчетные формулы для тангенциальных и нормальных контактных напряжений в окрестности концов накладки. Исходя из этих формул, проведены вычисления и на основе этих числовых результатов построены графики тангенциальных и нормальных контактных напряжений.

§ 1. *Постановка задач и вывод определяющих уравнений*

Пусть две клиновидные пластины, изготовленные из одинакового материала и с одинаковым углом раствора, сцеплены между собой посредством упругой полубесконечной накладки.

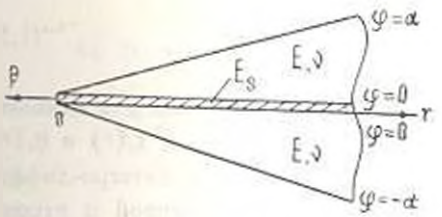
В первой задаче предполагается, что грани $\varphi = -\alpha$ и $\varphi = \alpha$ клиньев свободны от внешних напряжений, а во второй задаче — они защемлены. Кроме того, пусть в первой задаче к концу накладки приложена горизонтальная сосредоточенная сила P (фиг. 1), а во второй задаче — она приложена на расстоянии a от концов накладки (фиг. 2).

Основные предположения сводятся к следующему.

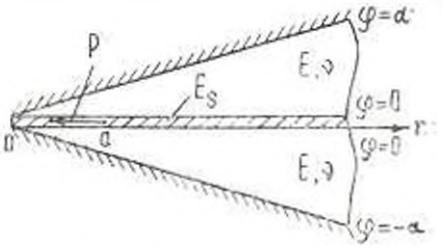
Вследствие малости толщины накладки считается, что ее толщина в процессе деформации не изменяется.

С другой стороны, считается, что под действием только горизонтальных напряжений накладка находится в одноосном напряженном состоянии.

Относительно клиньев же считается, что они находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии. Требуется определить законы распределения нормальных и тангенциальных напряжений вдоль линии соединения накладки с гранями клина.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Очевидно, что при исследовании этих задач нельзя пренебречь нормальными контактными напряжениями. Они здесь учитываются согласно только что упомянутой гипотезе о постоянстве вертикальных упругих перемещений на линии соединения стрингера с клиньями.

Исходя из этих предположений, находим, что как в первой, так и во второй задаче на линии сцепления накладки с гранями клина должны выполняться условия

$$\frac{du_r^{(2)}}{dr} = \varepsilon_r^{(1)}, \qquad u_r^{(2)} = 0 \quad (0 < r < \infty) \tag{1.1}$$

Здесь $u_r^{(2)}$ и $u_\varphi^{(2)}$ — соответственно радиальные и тангенциальные перемещения граничных точек упругих клиньев, лежащих на грани $\varphi = 0$, а $\varepsilon_r^{(1)}$ — осевая деформация накладки.

Нормальные и тангенциальные контактные напряжения, подлежащие определению, обозначим $q(r)$ и $\tau(r)$ соответственно. Теперь в случае первой задачи, составив уравнение равновесия для некоторой части накладки и воспользовавшись законом Гука, будем иметь

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{du_r^{(1)}}{dr} = \frac{1}{E_s A_s}\left| P - 2h\int_0^r \tau(r_0)\,dr_0 \right| \tag{1.2}$$

где E_s — модуль упругости накладки, A_s — площадь прямоугольного поперечного сечения накладки, h — ширина накладки.

Аналогичным образом в случае второй задачи будем иметь

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{du_r^{(1)}}{dr} = \frac{1}{E_s A_s}\left| PH(r-a) - 2h\int_0^r \tau(r_0)\,dr_0 \right| \tag{1.3}$$

Здесь $H(r-a)$ — функция Хевисайда.

Легко видеть, что функция $\tau(r_0)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^b \tau(r_0)\,dr_0 = -\frac{P}{2h} \tag{1.4}$$

Далее, введя безразмерные величины

$$\tau(r) = \frac{P}{2h}\,\tau_0(r), \quad q(r) = \frac{P}{2h}\,q_0(r) \tag{1.5}$$

и приняв во внимание известные выражения функций влияния для клиньев, находим, что условия (1.1) сводят определение функций $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$ (вследствие (1.2) и (1.3)) к решению следующих систем интегро-дифференциальных уравнений, относящихся соответственно к первой и второй задачам:

$$\frac{1}{4\pi Ehi}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^b\left|\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s\frac{\sin 2\alpha s - s\sin 2\alpha}{s(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)}\,ds\right|\tau_0(r_0)\,dr_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dr}\int_0^b\left|\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s\frac{(1-\nu)\sin^2\alpha s + s[(1+\nu)s+2]\sin^2\alpha}{s(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)}\,ds\right| q_0(r_0)\,dr_0\right\} =$$

$$= \frac{1}{E_s A_*}\left|1 - \int_0^r \tau_0(r_0)\,dr_0\right| \tag{1.6}$$

$$-\frac{1}{4\pi Ehi}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^b\left|\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s\frac{(1-\nu)\sin^2\alpha s + s[(1+\nu)s-2]\sin^2\alpha}{s(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)}\,ds\right|\tau_0(r_0)\,dr_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{d}{dr}\int_0^b\left|\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s\frac{\sin 2\alpha s + s\sin 2\alpha}{s(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)}\,ds\right| q_0(r_0)\,dr_0\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi Ehi}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^b\left|\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s\frac{2\varkappa\sin 2\alpha s + 2s\sin 2\alpha}{s[4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1-\varkappa)^2]}\,ds\right|\tau_0(r_0)\,dr_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dr}\int_0^b\left|\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s\frac{2\varkappa(1-\nu)\sin^2\alpha s - 2s[(1+\nu)s+2]\sin^2\alpha}{s[4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2]}\,ds\right| q_0(r_0)\,dr_0\right\} =$$

$$= -\frac{1}{E_s A_*}\left|H(r-a) - \int_0^r \tau_0(r_0)\,dr_0\right| \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{2\pi Ehi}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^b\left|\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s\frac{2\varkappa(1-\nu)\sin^2\alpha s - 2s[(1+\nu)s-2]\sin^2\alpha}{s[4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2]}\,ds\right|\tau_0(r_0)\,dr_0 - \right.$$

$$-\frac{d}{dr_0}\int_0^{r_0}\left[\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s\frac{2\varkappa\sin 2\alpha s-2s\sin 2\alpha}{s\left[4\varkappa\sin^2\alpha s+4s^2\sin^2\alpha-(1+\varkappa)^2\right]}\,ds\right]q_0(r_0)\,dr_0=0$$

Применив к уравнениям системы (1.6) преобразование Меллина, после несложных выкладок получим систему разностных уравнений для изображений

$$\begin{aligned}L_{11}^{(1)}(\alpha,s)\,T_0(s+1)+L_{12}^{(1)}(\alpha,s)\,Q_0(s+1)&=-\lambda\frac{T_0(s+2)}{s+1}\\ L_{21}^{(1)}(\alpha,s)\,T_0(s+1)-L_{22}^{(1)}(\alpha,s)\,Q_0(s+1)&=0\end{aligned}\qquad(1.8)$$

где

$$L_{11}^{(1)}(\alpha,s)=\frac{\sin 2\alpha s-s\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha s-s^2\sin^2\alpha}$$

$$L_{12}^{(1)}(\alpha,s)=\frac{(1-\nu)\sin^2\alpha s+s\left[(1+\nu)s+2\right]\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha s-s^2\sin^2\alpha}$$

$$L_{21}^{(1)}(\alpha,s)=\frac{(1-\nu)\sin^2\alpha s+s\left[(1+\nu)s-2\right]\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha s-s^2\sin^2\alpha}$$

$$L_{22}^{(1)}(\alpha,s)=\frac{\sin 2\alpha s+s\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha s-s^2\sin^2\alpha}\qquad(1.9)$$

$$T_0(s)=\int_0^1 r_0^{s-2}\tau_0(r_0)\,dr_0,\qquad Q_0(s)=\int_0^1 r_0^{s-1}q_0(r_0)\,dr_0,\qquad \lambda=\frac{2Eh}{E_*A_*}$$

Из условия (1.4) непосредственно следует, что

$$T_0(1)=1\qquad(1.10)$$

В случае системы уравнений (1.7) для изображений получим следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned}L_{11}^{(2)}(\alpha,s)\,T_0(s+1)+L_{12}^{(2)}(\alpha,s)\,Q_0(s+1)&=-\lambda_1\frac{T_0(s+2)}{s+1}+\lambda_1\frac{a^{s+1}}{s+1}\\ L_{21}^{(2)}(\alpha,s)\,T_0(s+1)-L_{22}^{(2)}(\alpha,s)\,Q_0(s+1)&=0\end{aligned}\qquad(1.11)$$

где

$$L_{11}^{(2)}(\alpha,s)=\frac{2\varkappa\sin 2\alpha s+2s\sin 2\alpha}{4\varkappa\sin^2\alpha s+4s^2\sin^2\alpha-(1+\varkappa)^2}$$

$$L_{12}^{(2)}(\alpha,s)=\frac{2\varkappa(1-\nu)\sin^2\alpha s-2s\left[(1+\nu)s+2\right]\sin^2\alpha}{4\varkappa\sin^2\alpha s+4s^2\sin^2\alpha-(1+\varkappa)^2}$$

$$L_{21}^{(2)}(\alpha, s) = \frac{2\varkappa(1-\nu)\sin^2\alpha s - 2s[(1+\nu)s - 2]\sin^2\alpha}{4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2}$$

$$L_{22}^{(2)}(\alpha, s) = \frac{2\varkappa\sin 2\alpha s - 2s\sin 2\alpha}{4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2} \tag{1.12}$$

$$h_1 = \frac{Eh}{E_2 A_2}, \qquad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

Из второго уравнения системы (1.8) можем записать

$$Q_0(s+1) = \frac{L_{21}^{(2)}(\alpha, s)}{L_{22}^{(2)}(\alpha, s)} T_0(s+1) \tag{1.13}$$

Подставив выражение $Q_0(s+1)$ из (1.13) в (1.8), будем иметь

$$\frac{T_0(s+2)}{T_0(s+1)} = -\frac{E_2 A_2}{2Eh}\frac{s+1}{s} F_1(s) \tag{1.14}$$

Здесь

$$F_1(s) = s\frac{-b\sin^4\alpha s + 4\sin^2\alpha s + cs^2\sin^2\alpha s + ds^4 - es^2}{(\sin 2\alpha s + s\sin 2\alpha)(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)} \tag{1.15}$$

$$b = 4 - (1-\nu)^2, \quad c = 2(1-\nu^2)\sin^2\alpha, \quad d = (1+\nu)^2\sin^4\alpha, \quad e = 4\sin^2\alpha$$

Из (1.13) согласно (1.10) получим

$$Q_0(1) = \int_0^\infty q_0(r_0)\,dr_0 = -\frac{2\sin^2\alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \tag{1.16}$$

Обращаясь ко второй системе (1.11), последовательно находим

$$Q_0(s+1) = \frac{L_{21}^{(2)}(\alpha, s)}{L_{22}^{(2)}(\alpha, s)} T_0(s+1) \tag{1.17}$$

$$\frac{T_0(s+2)}{T_0(s+1)} = -\frac{E_2 A_2}{2Eh}\frac{s}{s-1} F_2(s) + \frac{a^{s+2}}{T_0(s+1)} \tag{1.18}$$

где

$$F_2(s) = -\frac{(s^2-1)[-b\varkappa^2\sin^4\alpha s + 4\varkappa^2\sin^2\alpha s - c\varkappa s^2\sin^2\alpha s + ds^4 - es^2]}{s(\varkappa\sin 2\alpha s - s\sin 2\alpha)\left|\varkappa\sin^2\alpha s + s^2\sin^2\alpha - \left(\frac{1-\varkappa}{2}\right)^2\right|} \tag{1.19}$$

В случае второй задачи условие (1.16) приобретает вид

$$Q_0(1) = \int_0^\infty q_0(r_0)\,dr_0 = \frac{2\sin^2\alpha}{2\alpha\varkappa - \sin 2\alpha} \tag{1.20}$$

Следовательно, рассматриваемые задачи сводятся к решению разностных уравнений (1.14) и (1.18) при условии (1.10).

§ 2. *Решение разностных уравнений*

Сначала рассмотрим уравнение (1.14). Введем новую функцию формулой

$$T_0\left(s+\frac{3}{2}\right)=H(s)\,U(s),\qquad H(s)=\left|\frac{E_2A_2}{2Eh}F_1(0)\right|^{s+\frac{1}{2}}\frac{\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\cos\pi s}\tag{2.1}$$

Учитывая (2.1), уравнение (1.14) представим в виде

$$\frac{U\left(s+\frac{1}{2}\right)}{U\left(s-\frac{1}{2}\right)}=f(s),\qquad f(s)=\frac{F_1(s)}{F_1(0)},\qquad F_1(0)=\frac{4}{2\alpha-\sin 2\alpha}\tag{2.2}$$

Так как $f(s)$—целая функция, то на основании известной теоремы Вейерштрасса имеет место формула

$$f(s)=\frac{F_1(s)}{F_1(0)}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-s^2/\bar{s}_k^2)(1-s^2/s_k^2)}{(1-s^2/\bar{t}_k^2)(1-s^2/t_k^2)}\tag{2.3}$$

Здесь s_k — нули функции $-b\sin^2\alpha s+4\sin^2\alpha s-cs^2\sin^2\alpha s+ds^2-es^2$, а t_k — нули функции $(\sin 2\alpha s+s\sin 2\alpha)(\sin^2\alpha s-s^2\sin^2\alpha)$ в комплексной плоскости s, для которых $\operatorname{Im}(s_k,\ t_k)>0$, $\operatorname{Im}(s_k,\ t_k)>0$, $\operatorname{Re}s_k<\operatorname{Re}s_{k+1}$, $\operatorname{Re}t_k<\operatorname{Re}t_{k+1}$. При этом каждый нуль записывается столько раз, какова его кратность.

Легко показать, что для функции $U(s)$ будет иметь место представление

$$U(s)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+s_k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+t_k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+s_k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+t_k\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{t_k}{\bar{s}_k}\right)^{2s}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+\bar{s}_k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+\bar{t}_k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+\bar{s}_k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+\bar{t}_k\right)}\left(\frac{\bar{t}_k}{\bar{s}_k}\right)^{2s}\tag{2.4}$$

Это бесконечное произведение сходится в полосе $\frac{1}{2}\leqslant\operatorname{Re}s\leqslant\frac{1}{2}+$

Из (2.4) следует, что функция $U(s)$ удовлетворяет условиям

$$U(s)\,U(-s)=1, \qquad U(0)=U\left(\frac{1}{2}\right)=U\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \tag{2.5}$$

Очевидно, что функция $H(s)$ регулярна в полосе $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re} s<\frac{1}{2}$.

С другой стороны, поскольку согласно (2.4) полюсы функции $U(s)$ расположены в области $|\operatorname{Re} s|>\frac{1}{2}$, то функция $T_0\left(s+\frac{3}{2}\right)$ будет регулярной в полосе $a<\operatorname{Re} s<\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$.

Отметим, что, как в работе [6], для функции $U(s)$ имеет место асимптотическое равенство

$$e^{-\varepsilon|\sigma|}\,|U(s)|\to 0 \quad \text{для всех } \varepsilon>0, \text{ когда } |\operatorname{Im} s|\to\infty \tag{2.6}$$

В дальнейшем нам понадобится интегральное представление для функции $U(s)$, что согласно [6] имеет вид

$$\ln U(s)=\int_{\frac{1}{2}}^{s}\ln f(z)\,dz+i\int_{0}^{\infty}\frac{\ln f(s+it)-\ln f(s-it)}{1+e^{2\pi t}}\,dt \tag{2.7}$$

Обратимся теперь к уравнению (1.18). Соответствующее однородное уравнение, как и выше, запишется в виде

$$\frac{U\left(s+\frac{1}{2}\right)}{U\left(s-\frac{1}{2}\right)}=f(s) \tag{2.8}$$

где положено

$$T_0\left(s+\frac{3}{2}\right)=H(s)\,U(s), \qquad H(s)=\left|\frac{E_s A_s}{2Eh}F_2(0)\right|^{s-\frac{1}{2}}\frac{s-\frac{1}{2}}{\sin\pi s}$$
$$f(s)=\frac{F_2(s)}{F_2(0)}, \qquad F_2(0)=\frac{16\,(\varkappa^2\alpha^2-\sin^2\alpha)}{(1+\varkappa)^2\,(2\varkappa\alpha-\sin 2\alpha)} \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.8) строится вполне аналогичным способом. Легко проверить, что функция $H(s)$ из (2.9) регулярна в полосе $0<\operatorname{Re} s<1$, в то время как полюсы функции $U(s)$ расположены в области $|\operatorname{Re} s|>\frac{1}{2}$.

Из сказанного выше следует, что функция $T_0\left(s+\frac{3}{2}\right)$ будет регулярной в полосе $a<\operatorname{Re} s<b$, $-\frac{1}{2}<a<0$, $\frac{1}{2}<b<1$. В данном

случае для функции $U(s)$ имеет место то же самое асимптотическое равенство (2.6).

После того, как известно решение однородного уравнения (2.8), при помощи интегрального преобразования Лапласа можно получить решение неоднородного уравнения (1.18). С этой целью можем записать, что

$$-\frac{E_s A_s}{3Eh}\frac{s}{s-1}F_0(s)=\frac{T_0^*(s+2)}{T_0^*(s+1)} \tag{2.10}$$

где $T_0^*(s+1)$ — решение указанного однородного уравнения.

Подставляя теперь выражение (2.10) в (1.18), будем иметь уравнение

$$\frac{T_0(s+2)}{T_0^*(s+2)}=\frac{T_0(s+1)}{T_0^*(s+1)}+\frac{a^{s+1}}{T_0(s+2)} \tag{2.11}$$

что после некоторых преобразований перейдет в следующее:

$$R(s+2)-R(s+1)=\varkappa(s+1) \tag{2.12}$$

где

$$R(s)=\frac{T_0(s)}{T_0^*(s)},\qquad \varkappa(s)=\frac{a^s}{T_0^*(s+1)} \tag{2.13}$$

Построив решение последнего уравнения при помощи двустороннего преобразования Лапласа, решение исходного уравнения (2.11) можно представить формулой

$$T_0(s+1)=-\frac{T_0^*(s+1)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\omega}}{e^{\omega}-1}\Phi(\omega)\,e^{-\omega(s+1)}\,d\omega \tag{2.14}$$

где

$$\Phi(\omega)=\int_{c-1-i\infty}^{c-1+i\infty}\frac{a^{s+1}}{T_0^*(s+2)}\,e^{\omega(s+1)}\,ds\qquad (b-1<c<2,\quad 0<b<1) \tag{2.15}$$

§ 3. *Основные свойства решений и числовые результаты*

Решения поставленных задач теперь могут быть получены при помощи формулы обращения Меллина. Для напряжения $\tau_0(r)$ находим

$$\tau_0(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_L r^{-s}\,T_0(s)\,ds \tag{3.1}$$

Здесь L берется в виде бесконечной прямой, параллельной мнимой оси плоскости комплексной переменной s и лежащей в полосе регулярности функции $T_0(s)$.

Учитывая формулы (2.1), в первой задаче для тангенциальных и нормальных контактных напряжений соответственно будем иметь

$$\tau_0(r) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{E_2 A_2}{2Eh} F_1(0)\right]^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{3}{2}} \int_L \left[\frac{E_2 A_2}{2Eh}\frac{F_1(0)}{r}\right]^s \frac{\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\cos \pi s} U(s)\,ds \qquad (3.2)$$

$$(0 < r < \infty)$$

$$q_0(r) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{E_2 A_2}{2Eh} F_1(0)\right]^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{3}{2}} \int_L \left[\frac{E_2 A_2}{2Eh}\frac{F_1(0)}{r}\right]^s \times$$

$$\times \frac{L_{21}^{(1)}\left(\alpha,\ s+\frac{1}{2}\right)}{L_{22}^{(1)}\left(\alpha,\ s+\frac{1}{2}\right)} \frac{\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\cos \pi s} U(s)\,ds \qquad (3.3)$$

В последней формуле

$$\frac{L_{21}^{(1)}(\alpha, s)}{L_{22}^{(1)}(\alpha, s)} = \frac{(1-\nu)\sin^2 2\alpha s - s^2[(1+\nu)s-2]\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha s - s\sin 2\alpha}$$

Для вычисления интегралов, входящих в (3.2) и (3.3), применяется теорема о вычетах.

Отметим, что в последних формулах при малых $r(r<1)$ путь интегрирования L замыкается слева, а при больших $r(r>1)$ — справа. Из этих формул находим, что если первый полюс функции $U(s)$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} s = -\frac{3}{2}$, то как $\tau_0(r)$, так и $q_0(r)$ на конце линии контакта имеют логарифмическую особенность для угла α_{cr}, который определяется из условия

$$\alpha_{cr} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\nu}} \qquad (3.4)$$

Если же $\operatorname{Re} s < -\frac{3}{2}$ и $\alpha < \alpha_{cr}$, то они ограничены в точке $r = 0$. При $\operatorname{Re} s > -\frac{3}{2}$ и $\alpha > \alpha_{cr}$ они в этой точке имеют особенности порядка

$$\tau_0(r) = O(r^{\alpha_1 - 1}), \quad q_0(r) = O(r^{\alpha_1 - 1}), \quad \alpha_1 = \operatorname{Re} s_k, \quad (0 < \operatorname{Re} s_k < 1)$$

Отметим, что значения параметра α_1 при различных углах раствора даются табл. 1.

Таблица 1

α		$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
α_1	ν_1	1	0.719562	0.700768	0.5
	ν_2	1	0.727221	0.708571	0.5
	ν_3	1	0.732658	0.712947	0.5

При этом, когда $\alpha=\pi$, нормальные и тангенциальные контактные напряжения содержат осциляционные множители в виде косинусов и синусов, аналогично известному решению В. А. Абрамова [15].

Обращаясь теперь к интегралам (3.2) и (3.3), в результате вычисления необходимых вычетов подынтегральных функций получим при малых $r(r<1)$ следующие разложения*:

$$\tau_0(r)=\sum_{k=1,2,\ldots} r^{s_k-1}\operatorname{Re}(2B_0 r^{i\gamma s_k})+\sum_{n=1,2,\ldots}\sum_{k=1,2,\ldots} r^{n-1}\operatorname{Re}(2B_n r^{s_k})+$$

$$+\sum_{m=-2,-3,\ldots}(-1)^{m+1}A_m r^{m+2}$$

$$q_0(r)=\sum_{k=1,2,\ldots} r^{s_k-1}\operatorname{Re}[2B_0 L(s_k-s_k)r^{i\gamma s_k}]+$$

$$+\sum_{n=1,2,\ldots}\sum_{k=1,2,\ldots} r^{n-1}\operatorname{Re}[2B_n L(s_k-s_k-n)r^{s_k}]-$$

$$+\sum_{m=-2,-3,\ldots}(-1)^{m+1}L(s_k,\ m+1)A_m r^{m+2} \tag{3.5}$$

где

$$B_n=\frac{1}{n!}\left|\frac{E_2A_2}{2Eh}F_1(0)\right|^{s_k-n}\frac{\pi(s_k+n)}{\sin\pi s_k}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(t_k+s_k+n-1)\Gamma(\bar{s}_k-s_k-n)\Gamma(\bar{t}_k+\bar{s}_k+n+1)}{\Gamma(1+2s_k+n)\Gamma(t_k-s_k-n)\Gamma(s_k+s_k+n+1)\Gamma(\bar{t}_k-\bar{s}_k-n)}\times$$

$$\times\left(\frac{t_k\bar{t}_k}{s_k\bar{s}_k}\right)^{(2s_k+2n+2)}$$

$$A_m=(m+1)\left|\frac{E_2A_2}{2Eh}F_1(0)\right|^{m+1}U\left(m+\frac{1}{2}\right),\qquad L(s,s)=\frac{L_{11}^{(1)}(s,s)}{L_{22}^{(1)}(s,s)}$$

При больших же $r(r>1)$ будем иметь

$$\tau_0(r)=\sum_{n=0,1,2,\ldots}\sum_{k=1,2,\ldots} r^{-n-2}[(-1)^{n+1}A_n+\operatorname{Re}[2D_n r^{-t_k}]]$$

$$q_0(r)=\sum_{n=0,1,2,\ldots}\sum_{k=1,2,\ldots} r^{-n-2}[(-1)^{n+1}L(s,\ n+1)A_n+$$

$$+\operatorname{Re}[2D_n L(s,\ t_k+n+1)r^{-t_k}]] \tag{3.6}$$

где

---

* В этих разложениях $s\neq\frac{1}{2}$. При $s=\frac{1}{2}$ у подынтегральных функций появляются двойные полюсы и соответствующие разложения здесь не приводятся.

$$D_n = -\frac{1}{n!}\left|\frac{E_0 A_0}{2Eh}F_1(0)\right|^{t_k+n+1}\frac{\pi(t_k+n+1)}{\sin\pi t_k}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(s_k+t_k+n+1)\,\Gamma(\bar{s}_k+\bar{t}_k+n+1)\,\Gamma(\bar{t}_k-t_k-n)}{\Gamma(s_k-t_k-n)\,\Gamma(2t_k+n+1)\,\Gamma(s_k-t_k-n)\,\Gamma(\bar{t}_k+t_k+n+1)}\times$$

$$\times\left(\frac{t_k\bar{t}_k}{s_k\bar{s}_k}\right)^{2n_k-2n+1}$$

Для получения числовых результатов, которые осуществлены на «Напри-2», были рассмотрены три случая компановки стрингера с упругими клиньями. При этом считалось, что стрингер изготовлен из легированной стали с упругими константами $E_0 = 2.1\cdot10^4$ кг/см², $\nu_0 = 0.30$, а клинья изготовлены из прокатного цинка, прокатной меди и свинца с упругими константами соответственно $E = 0.84\cdot10^4$ кг/см²; $1.1\cdot10^4$ кг/см², $0.17\cdot10^4$ кг/см²; $\nu = 0.27$, 0.34, 0.42. Случаи сочетания материалов стрингера и клиньев в указанной последовательности будем именовать случаями I, II и III. В этих случаях по формулам (3.5) и (3.6) были вычислены тангенциальные и нормальные контактные напряжения при малых и больших r ($r<1$; $r>1$), когда угол раствора клиньев $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$, π.

Для иллюстрации приведем здесь выражения функций $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$ в случае 1 при $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\tau_0(r) = 1.526 - 1.059\,r + 0.172\,r^2 - 0.019\,r^3 + 0.001\,r^4 - 0.00004\,r^5 - \cdots$$
$$q_0(r) = -1.526 + 2.796\,r - 0.781\,r^2 + 0.067\,r^3 - 0.003\,r^4 + 0.0002\,r^5 - \cdots \qquad (r<1)$$

$$\tau_0(r) = 1.945\,r^{-2} - 2.549\,r^{-3} + 11.003\,r^{-4} - 135.953\,r^{-5} + \cdots$$
$$q_0(r) = -1.631\,r^{-3} + 16.944\,r^{-4} - 209.367\,r^{-5} + \cdots \qquad (r>1)$$

Эти функции в остальных случаях имеют аналогичную структуру.

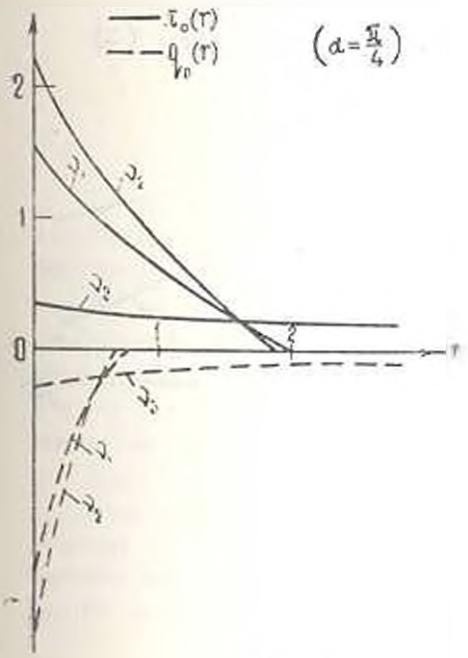
Исходя из последних, построены графики функций $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$, показывающие закономерности их изменения. На фиг. 3, 4, 5 и 6 приведены графики напряжений $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$ при малых r и при различных углах α. В результате сравнения этих графиков можно сделать следующие выводы:

а) с увеличением E (α-постоянно) коэффициенты интенсивности напряжений вблизи конца $r=0$ увеличиваются;

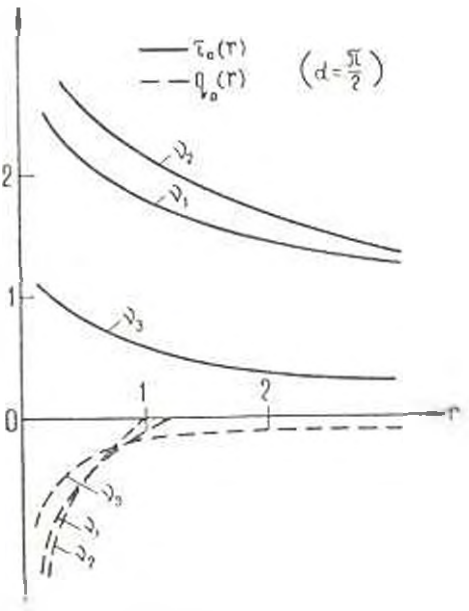
б) значения нормальных напряжений $q_0(r)$ ($0<r<\infty$) на линии контакта значительно меньше значений тангенциальных напряжений $\tau_0(r)$.

Далее, на фиг. 7, 8 и 9 приведены графики напряжений $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$ при различных E. Сопоставление этих графиков показывает, что:

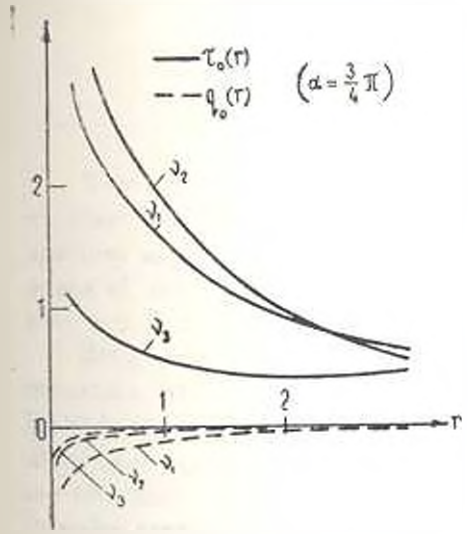
а) с возрастанием значений α ($\alpha\neq\pi$) при одинаковых E коэффициенты интенсивности напряжений $\tau_0(r)$ вблизи конца $r=0$ увеличиваются, а для коэффициентов интенсивности напряжений $q_0(r)$ имеет место обратный эффект;



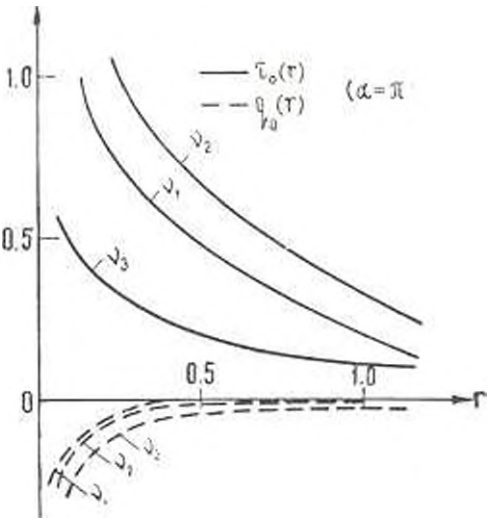
Фиг. 3.



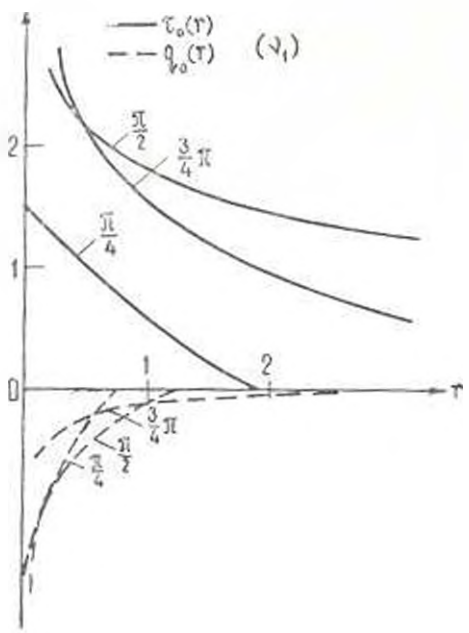
Фиг. 1.



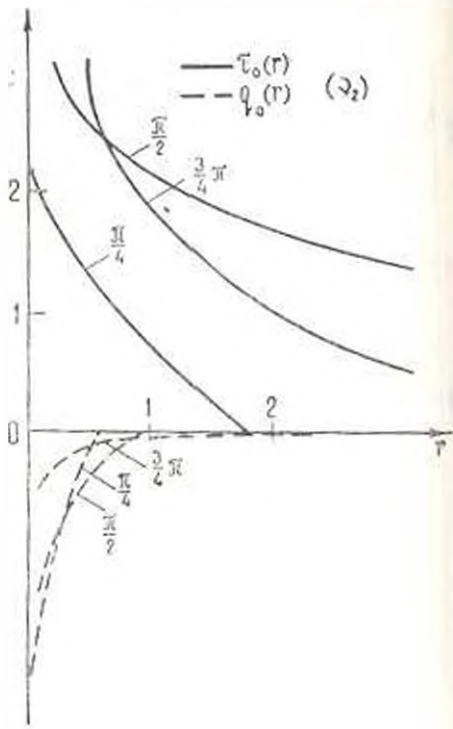
Фиг. 5.



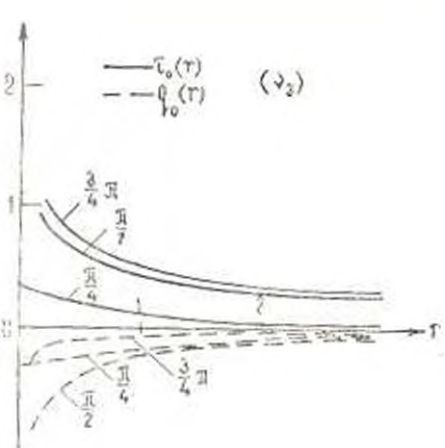
Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

б) при $\alpha = \pi$ коэффициенты интенсивности напряжений резко уменьшаются.

В заключение автор благодарит С. М. Мхитаряна за ценные замечания.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 13 VII 1976

Կ. Գ. ԳՈՒԼՅԱՆ

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ԱՄՐԱՆԱԿԻՑ ԵՐԿՈՒ ՍԵՊԱՁԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐԻՆ ԲԵՌԻ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է կիսաանվերջ վերադրից կամայական անկյան բացվածքով երկու սեպաձև առաձգական սալերին բեռի փոխանցման երկու կոնտակտային խնդիրներ։ Ենթադրված է, որ առաջին խնդրում սեպի եզրերը ազատ են արտաքին լարումներից, իսկ երկրորդում՝ ամրացված են։ Երկու խնդիրներն էլ մաթեմատիկորեն ձևակերպված են որոշակի եզրային պայմաններով ինտեգրո-դիֆֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների տեսքով։ Այնուհետև Մելլինի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ այդ սիստեմները բերված են տարբերական հավասարումների սիստեմների։

Դրված խնդիրների համար ստացված են փակ լուծումներ։

Առաջին խնդրում շոշափող և նորմալ կոնտակտային լարումների համար վերադրի ծայրակետերի շրջակայքում ստացված են պարզ հաշվարկային բանաձևեր։ Ելնելով բանաձևերից, կառուցված են շոշափող և նորմալ կոնտակտային լարումները նկարագրող գծագրերը։

ON THE SOLUTION OF TWO CONTACT PROBLEMS ON THE TRANSFER OF LOAD FROM A SEMI-INFINITE STIFFENER TWO WEDGESHAPED ELASTIC PLATES

K. G. GULIAN

S u m m a r y

Two contact problems on the transfer of load from semi-infinite stiffener to the similar wedgeshaped elastic plates with an arbitrary aperture angle are examined. In the first problem it is assumed that the edges of the wedge are free from stress while in the second problem they are fastened.

Both problems are formulated as systems of integral-differential equations under definite boundary conditions. Then with the help of Mellin's transformation these systems are converted into systems of difference equations. Closed and effective solutions of the problems are obtained which permit numerical realizations. Simple calculating formulas are derived for tangent and normal contact stresses in the vicinity of the wedge terminals. Calculations are given resulting from these formulas and on the basis of these numerical results graphs of tangent and normal contact stresses are drawn.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муки Р., Стернберг Е.* Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана). Прикл. механика. Тр. Америк. о-ва. инж.-механ., сер. Е, 1967, т. 31, № 3.
2. *Kotter W. T.* On the Diffusion of Load from a Stiffener into a Sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 164.
3. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingr.-Arch, 1932, Bd. 3. Heft 2, s. 123.
4. *Киланлия А. И.* О напряженном состоянии в пластинках, усиленных ребрами жесткости. ПММ. 1969, т. 33, вып. 3, 538—543.
5. *Вилюбова В. А., Попов Г. Я.* Контактная задача для упругой полуплоскости и сцепленного с ней полубесконечного упругого стержня. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2, 354—358.
6. *Alblas J. B., Kuypers W. J.* On the Diffusion of Load from a Stiffener into an Inginite Wuggeshaped Plate. Applied Scientific Research, Series A, 1965—1966, vol. 15, № 6, p. 429.
7. *Бинцури Р. Д.* Контактная задача для клина с упругим креплением. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 4, 797—800.
8. *Тихоненко Л. Я.* Плоская контактная задача для упругого клина и сцепленного с ним полубесконечного упругого стержня. В сб. Устойчивость и прочность элементов конструкций. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.
9. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
10. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
11. *Гулян К. Г.* О двух плоских контактных задачах для клина с накладками. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5, 46—56.
12. *Нуллер Б. М.* Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5, 98—100.
13. *Гулян К. Г.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к двум клиновидным упругим пластинам. Докл. АН АрмССР, 1974, LIX, № 4.
14. *Нуллер Б. М.* Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
15. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд. «Наука», 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 6, 1976 Механика

Ш. М. ХАЧАТРЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в плоской задаче для анизотропной полосы. Считается, что плоскость полосы совпадает с плоскостью упругой симметрии материала. На продольных сторонах полосы заданы значения напряжений, а на торцах — различные комбинации торцевых условий.

Применяется асимптотический метод интегрирования, и решение задачи представляется в виде суммы двух решений — незатухающего и типа погранслоя. Показывается возможность сращивания этих двух решений на торцах.

Обсуждается применимость прикладных и асимптотического методов для анизотропных материалов. Показано, что применимость этих методов может существенно зависеть от величины отношения упругих коэффициентов. Анализируется влияние отдельных коэффициентов упругости на применимость гипотезы о недеформируемых нормалях.

1. Рассматривается плоская задача для анизотропной полосы $\Omega=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant a, \quad |y|\leqslant h, \ h\ll a\}$, на продольных сторонах $y=\pm h$ которой заданы значения напряжений

$$\sigma_{xy}=\pm\frac{a}{h}X(x), \qquad \sigma_{y}=\pm Y(x) \text{ при } y=\pm h \tag{1.1}$$

а на торцах $x=0$, a—произвольные пока торцевые условия.

Считаем обеспеченным равновесие прямоугольника как жесткого тела. Предполагаем также, что плоскость упругой симметрии совпадает с плоскостью xy, то есть практически в этой плоскости имеем общую анизотропию.

Для решения задачи используется асимптотический метод интегрирования [1]. Вводя безразмерную координатную систему $\xi=x/a$, $\zeta=y/h$, преобразовав соответствующие уравнения теории упругости анизотропного тела, получим систему, содержащую малый параметр $\varepsilon=h/a$ при производных. Решение подобного рода сингулярно возмущенных уравнений складывается [1—3] из двух типов решений — внутреннего, то есть незатухающего при удалении от границы в глубь области решения, и типа погранслоя.

Решение анизотропной полосы известным для изотропного и ортотропного случаев приемом не представляется в виде суммы двух решений—симметричного и кососимметричного, так как в этом случае симметричным и кососимметричным внешним воздействиям не соответствуют такие же напряженно-деформированные состояния.

Внутреннее решение ищем в виде [1]

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(s)} \tag{1.2}$$

Q — любое из напряжений или безразмерных перемещений $U = u/a$, $V = v/a$, $Q^{(s)} = 0$ при $s < 0$, q — целое число и выбирается следующим образом:

$$\begin{aligned} &q = 2 \text{ для } \sigma_x,\ U, \quad q = 1 \text{ для } \sigma_{xy} \\ &q = 3 \text{ для } V, \qquad q = 0 \text{ для } \sigma_y \end{aligned} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2) в уравнения теории упругости, с учетом (1.3) получим систему

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s)}}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_y^{(s-2)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_x^{(s-2)} + a_{22}\sigma_y^{(s-4)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-3)} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \xi} = a_{16}\sigma_x^{(s-2)} + a_{26}\sigma_y^{(s-3)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)}$$

Интегрируя систему (1.4) по ξ, получим

$$V^{(s)} = w^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}, \qquad U^{(s)} = -\frac{dw^{(s)}}{d\xi}\eta + u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}$$

$$\sigma_x^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\frac{du^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2 w^{(s)}}{d\xi^2}\eta + \sigma_1^{*(s)}$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2 w^{(s)}}{d\xi^2}\frac{\eta^2}{2} - p^{(s)}\eta + \sigma_{xy0}^{(s)} + \sigma_{xy}^{*(s)} \tag{1.5}$$

$$\sigma_y^{(s)} = -\frac{1}{2}q^{(s)}\eta^2 + \frac{dp^{(s)}}{d\xi}\frac{\eta^2}{2} - \frac{d\sigma_{xy0}^{(s)}}{d\xi}\eta + \sigma_{y0}^{(s)} + \sigma_y^{*(s)}$$

$w^{(s)}$, $u^{(s)}$, $\sigma_{xy0}^{(s)}$ и $\sigma_{y0}^{(s)}$ — неизвестные функции от ξ и подлежат определению, а величины со звездочками — известные функции от ξ, η и определяются следующим образом:

$$v^{*(s)} = \int_0^{\eta} (a_{12}\sigma_x^{(s-2)} + a_{22}\sigma_y^{(s-4)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-3)})\, d\eta$$

$$u^{*(s)} = \int_0^{\eta} \left(a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-3)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \xi} \right) d\eta$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}}\left(\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi} - a_{12}\sigma_y^{(s-2)} - a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)}\right) \tag{1.6}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = -\int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi}\,d\xi, \qquad \sigma_y^{*(s)} = -\int_{0}^{\xi}\frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial \xi}\,d\xi$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим, что $u^{(s)}$ и $w^{(s)}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{(s)}}{d\xi^2} = p^{(s)} \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{3a_{11}}\frac{d^4w^{(s)}}{d\xi^4} = q^{(s)} \tag{1.8}$$

где

$$p^{(s)} = -X_1^{(s)} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi = 1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi = -1)\right)$$

$$q^{(s)} = Y_2^{(s)} + \frac{dX_2^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{2}\left|\sigma_y^{*(s)}(\xi = 1) - \sigma_y^{*(s)}(\xi = -1)\right| +$$

$$+ \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi = 1)}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi = -1)}{\partial \xi}\Bigg|$$

$$X_1^{(s)} = 1/2\left(X^{+(s)} + X^{-(s)}\right), \qquad X_2^{(s)} = 1/2\left(X^{+(s)} - X^{-(s)}\right) \tag{1.9}$$

$$Y_1^{(s)} = 1/2\left(Y^{-(s)} - Y^{+(s)}\right), \qquad Y_2^{(s)} = 1/2\left(Y^{-(s)} + Y^{+(s)}\right)$$

$$X^{+(0)} = X^{+}, \quad Y^{+(0)} = Y^{+}, \quad X^{-(s)} = Y^{-(s)} = 0, \quad s > 0$$

$\sigma_{xy0}^{(s)}$ и $\sigma_{y0}^{(s)}$ определяются следующим образом:

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = X_2^{(s)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi = 1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi = -1)\right) - \frac{1}{2a_{11}}\frac{d^3w^{(s)}}{d\xi^3}$$

$$\sigma_{y0}^{(s)} = Y_1^{(s)} - \frac{1}{2}\frac{dp^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{2}\left(\sigma_y^{*(s)}(\xi = 1) + \sigma_y^{*(s)}(\xi = -1)\right) \tag{1.10}$$

Таким образом, все величины будут определены, если известны $u^{(s)}$, $w^{(s)}$. Последние определяются по формулам

$$\frac{1}{a_{11}}u^{(s)} = u_0^{(s)} + C_1^{(s)}\xi + C_2^{(s)} \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{3a_{11}}w^{(s)} = w_0^{(s)} + C_3^{(s)}\frac{\xi^3}{6} + C_4^{(s)}\frac{\xi^2}{2} + C_5^{(s)}\xi + C_6^{(s)} \tag{1.12}$$

$$u_0^{(s)} = \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} p^{(s)}\,d\xi, \qquad w_0^{(s)} = \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} q^{(s)}\,d\xi$$

При $s=0$ уравнения (1.7) и (1.8) можно получить, если принять известную гипотезу о недеформируемых нормалях. Для каждого приближения s для определения $u^{(s)}$ и $w^{(s)}$ решаются одни и те же уравнения (1.7), (1.8) и меняется лишь вид нагрузки. В частности,

$$p^{(0)} = -X_1, \qquad p^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{a_{16}}{a_{11}}\left(-Y_2 + \frac{dX_2}{d\xi}\right)$$

$$p^{(2)} = \left(\frac{1}{6}\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{1}{6}\frac{a_{66}}{a_{11}}\right)\frac{d^2X_1}{d\xi^2} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{dY_1}{d\xi}$$

$$q^{(0)} = Y_2 + \frac{dX_2}{d\xi}, \qquad q^{(1)} = -\frac{2}{3}\frac{a_{16}}{a_{11}}\frac{d^2X_1}{d\xi^2} \tag{1.13}$$

$$q^{(2)} = \left(\frac{4}{15}\frac{a_{16}^2}{a_{11}^2} - \frac{3}{10}\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{2}{5}\frac{a_{66}}{a_{11}}\right)\frac{d^2Y_2}{d\xi^2} +$$

$$+\left(\frac{1}{30}\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{1}{5}\frac{a_{66}}{a_{11}} + \frac{4}{5}\frac{a_{16}^2}{a_{11}^2}\right)\frac{d^2X_2}{d\xi^2}$$

Из (1.9), (1.13) видно, что величина вносимой поправки зависит не только от изменяемости внешней нагрузки, но и от отношения упругих коэффициентов. В частности, если $a_{16}/a_{11} = O(\varepsilon^{-1})$, то вносимая поправка от первого приближения будет порядка первого члена и асимптотика (1.3), а следовательно, и гипотеза о недеформируемых нормалях перестанут быть верными для анизотропного случая. В изотропном и ортотропном случаях $p^{(1)} = q^{(1)} = 0$ и вносимая поправка будет сказываться со второго приближения, то есть гипотеза о недеформируемых нормалях в изотропном случае имеет большую точность, нежели в анизотропном случае.

Формулы (1.9), (1.13) показывают, что характер внутреннего напряженного состояния может существенно зависеть от отношений a_{12}/a_{11} и здесь первостепенную важность имеет отношение a_{12}/a_{11}. Влияние остальных отношений коэффициентов упругости будет существенным, если $a_{16}/a_{11} = O(\varepsilon^{-2})$, $a_{26}/a_{11} = O(\varepsilon^{-3})$, $a_{22}/a_{11} = O(\varepsilon^{-4})$, то есть поправку к внутреннему напряженному состоянию, определяемому прикладной теорией, в первую очередь нужно связывать с более точным учетом сдвиговых факторов [4].

В вышеуказанных предельных случаях или надо отыскать другую асимптотику, которая в исходном приближении будет резко отличаться от асимптотики, соответствующей гипотезе недеформируемых нормалей, или решить задачу другим способом как существенно двухмерную.

Формулы (1.11) и (1.12) показывают, что произволов внутренней задачи недостаточно для удовлетворения условиям при $x=0$, a в каждой точке торца. Чтобы удовлетворять торцевым условиям достаточно точно, необходимо иметь решение типа погранслоя.

2. Для построения погранслоя вблизи торца $\xi=0$ в уравнениях теории упругости сделаем новую замену переменных $t=\xi/\varepsilon$. Этим преобразованием выделяется дифференцирование в продольном направлении [3].

Решение вновь полученных уравнений ищем в виде функций типа погранслоя [5]

$$R_p = \sum_{s=0}^{N} \varkappa_p^s R_p^{(s)}(\zeta) \exp(-\lambda t) \tag{2.1}$$

где R_p—любое из напряжений и перемещений, $\varkappa_p$—показатель интенсивности, λ=const характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния. Для погранслоя, соответствующего краю $\xi=0$, $\mathrm{Re}\lambda>0$.

Числа $\varkappa_p$ выбираются так, чтобы получить непротиворечивую систему [5, 6]. Этому условию удовлетворяют

$$\varkappa_{\sigma_j} = \varkappa, \qquad \varkappa_{u_j} = \varkappa + 1 \tag{2.2}$$

здесь σ_j—любое из напряжений, u_j—любое из безразмерных перемещений, $\varkappa$ определится при рассмотрении вопроса взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием.

В результате имеем следующую систему относительно величин $R_p^{(s)}$:

$$-\lambda\sigma_{zp}^{(s)} + \frac{d\tau_{xyp}^{(s)}}{d\zeta} = 0, \qquad -\lambda\tau_{xyp}^{(s)} + \frac{d\sigma_{yp}^{(s)}}{d\zeta} = 0$$

$$-\lambda u_p^{(s)} = a_{11}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{12}\sigma_{yp}^{(s)} + a_{16}\tau_{xyp}^{(s)} \tag{2.3}$$

$$\frac{dv_p^{(s)}}{d\zeta} = a_{12}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{22}\sigma_{yp}^{(s)} + a_{26}\tau_{xyp}^{(s)}$$

$$\frac{du_p^{(s)}}{d\zeta} - \lambda v_p^{(s)} = a_{16}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{26}\sigma_{yp}^{(s)} + a_{66}\tau_{xyp}^{(s)}$$

решением которой является

$$\sigma_{xp}^{(s)} = \frac{F_n''}{\lambda_n^2} A_n^{(s)}, \qquad \tau_{xyp}^{(s)} = \frac{F_n'}{\lambda_n} A_n^{(s)}, \qquad \sigma_{yp}^{(s)} = A_n^{(s)} F_n(\zeta)$$

$$u_p^{(s)} = -\left(a_{11}\frac{F_n''}{\lambda_n^2} + a_{12}\frac{F_n}{\lambda_n} + a_{16}\frac{F_n'}{\lambda_n^2}\right) A_n^{(s)} \tag{2.4}$$

$$v_p^{(s)} = -\left|a_{11}\frac{F_n'''}{\lambda_n^3} + (a_{12}+a_{66})\frac{F_n'}{\lambda_n^2} + a_{26}\frac{F_n}{\lambda_n} + 2a_{16}\frac{F_n''}{\lambda_n^3}\right| A_n^{(s)}$$

$F_n(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{11}F_n^{IV} + 2\lambda_n a_{16}F_n''' + \lambda_n^2(a_{66}+2a_{12})F_n'' + 2\lambda_n^3 a_{26}F_n' + \lambda_n^4 a_{22}F_n = 0 \tag{2.5}$$

и условиям

$$F_n(\pm 1) = F_n'(\pm 1) = 0 \tag{2.6}$$

являющимся следствием из условий $\sigma_{xp} = \tau_{xyp} = 0$ при $\xi = \pm 1$. В зави-

симости от вида корней соответствующего (2.5) характеристического уравнения [7]

а) $\varkappa + i\beta, \quad \varkappa - i\beta$, б) $\alpha_1 + i\beta_1, \quad \alpha_2 + i\beta_2 \quad (\beta, \beta_1, \beta_2 > 0)$

возможны следующие решения задачи (2.5)—(2.6):

а) $$F_n(z) = e^{\varkappa\lambda_n z}(\cos\beta\lambda_n \sin\beta\lambda_n z - z\sin\beta\lambda_n \cos\beta\lambda_n z) \tag{2.7}$$

где λ_n—корень уравнения

$$\sin 2\beta\lambda_n - 2\beta\lambda_n = 0 \tag{2.8}$$

и

$$F_n(z) = e^{\varkappa\lambda_n z}(\sin\beta\lambda_n \cos\beta\lambda_n z - z\cos\beta\lambda_n \sin\beta\lambda_n z) \tag{2.9}$$

$$\sin 2\beta\lambda_n + 2\beta\lambda_n = 0 \tag{2.10}$$

б) $$F_n(z) = \frac{1}{D_{11}^{(n)}}\Big[(D_{11}^{(n)}\cos\beta_1\lambda_n z + D_{12}^{(n)}\sin\beta_1\lambda_n z)\, e^{\alpha_1\lambda_n z} +$$

$$+ (D_{13}^{(n)}\cos\beta_2\lambda_n z + D_{14}^{(n)}\sin\beta_2\lambda_n z)\, e^{\alpha_2\lambda_n z}\Big] \tag{2.11}$$

$$[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2]\cos 2(\beta_1 - \beta_2)\lambda_n -$$

$$- [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2]\cos 2(\beta_1 + \beta_2)\lambda_n - 4\beta_1\beta_2 \operatorname{ch} 2(\alpha_1 - \alpha_2)\lambda_n = 0 \tag{2.12}$$

Через $D_{11}^{(n)}$ обозначены алгебраические дополнения первой строки следующей матрицы:

$$\begin{vmatrix} d_{11}^{(n)} & d_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & d_{14}^{(n)} \\ d_{21}^{(n)} & d_{22}^{(n)} & d_{23}^{(n)} & d_{24}^{(n)} \\ d_{31}^{(n)} & d_{32}^{(n)} & d_{33}^{(n)} & d_{34}^{(n)} \\ d_{41}^{(n)} & d_{42}^{(n)} & d_{43}^{(n)} & d_{44}^{(n)} \end{vmatrix}$$

где

$$d_{11}^{(n)} = e^{\alpha_1\lambda_n}\cos\beta_1\lambda_n, \qquad d_{12}^{(n)} = e^{\alpha_1\lambda_n}\sin\beta_1\lambda_n,$$

$$d_{13}^{(n)} = e^{\alpha_2\lambda_n}\cos\beta_2\lambda_n, \qquad d_{14}^{(n)} = e^{\alpha_2\lambda_n}\sin\beta_2\lambda_n,$$

$$d_{21}^{(n)} = e^{-\alpha_1\lambda_n}\cos\beta_1\lambda_n, \qquad d_{22}^{(n)} = -e^{-\alpha_1\lambda_n}\sin\beta_1\lambda_n,$$

$$d_{23}^{(n)} = e^{-\alpha_2\lambda_n}\cos\beta_2\lambda_n, \qquad d_{24}^{(n)} = -e^{-\alpha_2\lambda_n}\sin\beta_2\lambda_n,$$

$$d_{31}^{(n)} = e^{\alpha_1\lambda_n}(\alpha_1\cos\beta_1\lambda_n - \beta_1\sin\beta_1\lambda_n), \qquad d_{32}^{(n)} = e^{\alpha_1\lambda_n}(\alpha_1\sin\beta_1\lambda_n + \beta_1\cos\beta_1\lambda_n)$$

$$d_{33}^{(n)} = e^{\alpha_2\lambda_n}(\alpha_2\cos\beta_2\lambda_n - \beta_2\sin\beta_2\lambda_n), \quad d_{34}^{(n)} = e^{\alpha_2\lambda_n}(\alpha_2\sin\beta_2\lambda_n + \beta_2\cos\beta_2\lambda_n)$$

$$d_{41}^{(n)} = e^{-\alpha_1\lambda_n}(\alpha_1\cos\beta_1\lambda_n + \beta_1\sin\beta_1\lambda_n)$$

$$d_{42}^{(n)} = e^{-\alpha_1\lambda_n}(-\alpha_1\sin\beta_1\lambda_n + \beta_1\cos\beta_1\lambda_n)$$

$$d_{43}^{(n)} = e^{-\alpha_2\lambda_n}(\alpha_2\cos\beta_2\lambda_n + \beta_2\sin\beta_2\lambda_n)$$

$$d_{44}^{(n)} = e^{-\alpha_2\lambda_n}(-\alpha_2\sin\beta_2\lambda_n + \beta_2\cos\beta_2\lambda_n)$$

Считаем, что в (2.4) и в дальнейшем там, где какая-либо функция умножается на произвол погранслоя $A_n^{(k)}$, производится суммирование по всем значениям немого индекса n, соответствующего всем корням λ_n. Min Re λ_n практически будет характеризовать быстроту затухания погранслоя. Это затухание будет медленнее, чем в изотропном и ортотропном случаях, так как α, α_i отличны от нуля.

В табл. 1 приведены упругие коэффициенты и значения параметров α_i, β_i, входящих в уравнение (2.12), для материалов СВАМ 5:1 и СВАМ 15:1. Упругие постоянные взяты из [8], где φ—угол между главными направлениями анизотропии и координатными осями. В табл. 2 приведены значения первых нескольких корней $\lambda_n = x_n + iy_n$ трансцендентного уравнения (2.12) для этих материалов.

Напряжения σ_{xpx}, σ_{xyp} в произвольном поперечном сечении самоуравновешены, то есть

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{xp}d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{xp}d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1}\sigma_{xyp}d\zeta = 0 \tag{2.13}$$

перемещения же аналогичным равенствам, вообще говоря, не удовлетворяют. (2.13) легко установить, если непосредственно вычислить эти интегралы и учесть (2.6).

Аналогичным образом строится погранслой вблизи торца $\xi = 1$. Если отсчет вести от $x = 0$, данные $R_p^{(2)}$ этого погранслоя получаются из приведенного формальной заменой t на $t_1 = 1/\varepsilon - t = (a - x)/h$.

Приведенные выше результаты относятся к плоскому напряженному состоянию. Известной заменой упругих коэффициентов a_{ij} на $\beta_{ij} = a_{ij} - (a_{i3}a_{j3})/a_{33}$ $(i, j = 1, 2, 6)$ можно получить данные для плоской деформации. Отметим также, что решение типа погранслоя в нашем случае одновременно является точным решением.

Интеграл задачи представим в виде

$$J = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \tag{2.14}$$

Представление (2.14) содержит достаточное число произволов для удовлетворения торцевым условиям.

Таблица 1

Материал	$a_{11}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{22}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{12}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{66}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{16}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{26}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	τ_1	β_1	τ_2	β_2
СВАМ 5:1 $\varphi=45^\circ$	0.675	0.675	−0.374	0.832	0.0887	0.0887	0.61128	0.79142	−0.74269	0.66964
СВАМ 15:1 $\varphi=30^\circ$	0.430	0.400	−0.280	1.660	0.304	0.050	−0.78453	1.34211	0.07689	0.61518

Таблица 2

n	СВАМ 5:1 $\varphi=45^\circ$		СВАМ 15:1 $\varphi=30^\circ$	
	x_n	y_n	x_n	y_n
1	1.717576	1.640117	1.979940	1.115331
2	2.868292	2.704967	3.260595	1.676184
3	5.182160	4.849278	5.960421	2.866730

3. Пусть на торце $x=0$ заданы значения напряжений

$$\sigma_x = \varphi_1(\zeta), \quad \sigma_{xy} = \varphi_2(\zeta) \tag{3.1}$$

Подставляя (2.14) в (3.1), учитывая (1.2), (2.1) и что при $\xi=0$ проявляет себя первый погранслой, получим

$$\begin{aligned} &\sigma_{xp}^{(s)} + \sigma_x^{(s+2-i)} = \varphi_1^{(s+i)} \\ &\sigma_{xyp}^{(s)} + \sigma_{xy}^{(s+1-i)} = \varphi_2^{(s+i)} \end{aligned} \quad \text{при } \xi = 0 \ (i = 0) \tag{3.2}$$

Условия (3.2) будут непротиворечивыми, то есть позволяют последовательно определить постоянные в решениях внутренней задачи и погранслоя, если $s \geqslant -2$. Запишем условия (3.2) в виде

$$\sigma_{xp}^{(s)} = \varphi_1^{(s+2)} - \sigma_x^{(s)}(\xi = 0), \quad \sigma_{xyp}^{(s)} = \varphi_2^{(s+2)} - \sigma_{xy}^{(s+1)}(\xi = 0) \tag{3.3}$$

Правые части (3.3) должны удовлетворять условиям (2.13), откуда находим следующие значения произволов внутренней задачи:

$$C_1^{(s)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [\varphi_1^{(s)} - \sigma_x^{(s)}(\xi = 0)]\, d\zeta$$

$$C_2^{(s)} = X_2^{(s)}(0) - \frac{1}{2}(\sigma_{xp}^{(s)}(0, 1) + \sigma_{xp}^{(s)}(0, -1)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sigma_{xy}^{(s)}(\xi = 0)\, d\zeta - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_2^{(s-1)}\, d\zeta$$

$$C_4^{(s)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [\sigma_x^{(s)}(\xi = 0) - \varphi_1^{(s-2)}]\, d\zeta \tag{3.4}$$

$$(\varphi_i^{(0)} = \varphi_i, \quad \varphi_i^{(s)} \equiv 0, \quad s \leqslant 0, \quad i = 1, 2)$$

Если на краю $\xi=1$ также заданы значения напряжений, то от этих условий вытекают те же значения произволов внутренней задачи, так как считается обеспеченным равновесие прямоугольника как жесткого тела. Перемещения будут определены с точностью жесткого смещения. Из условий отсутствия жесткого смещения

$$u(1, 0) = 0, \quad v(1, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_{\substack{\xi=1 \\ \zeta=0}} = 0 \tag{3.5}$$

определяются произволы $C_2^{(s)}$, $C_5^{(s)}$ и $C_6^{(s)}$. Остаются неопределенными произволы погранслоя $A_n^{(s)}$ и $B_n^{(s)}$ ($B_n^{(s)}$ — произвол погранслоя, соответствующий краю $\xi=1$). Для определения $A_n^{(s)}$ и $B_n^{(s)}$ можно применять приближенные методы, в частности, метод коллокации или метод Трефтца [9, 10].

Если на краю $\xi = 1$ заданы значения перемещений

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta) \tag{3.6}$$

то можно применять вариационный принцип Кастильяно [11], который в нашем случае примет вид

$$\int_{-1}^{1} [(u - \varphi_1)\tau_{\xi} + (v - \varphi_2)\tau_{\xi\eta}]_{\xi=1} d\zeta = 0 \tag{3.7}$$

Учитывая, что $C_1^{(s)}$, $C_3^{(s)}$, $C_4^{(s)}$ и $A_n^{(s)}$ уже известны, то есть они не варьируются, из (3.7), используя (2.14), получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений относительно произволов погранслоя $B_n^{(s)}$:

$$a_{nm}B_n^{(s)} + a_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

где

$$a_{nm} = \int_{-1}^{1} (u_n \tau_m - v_n \tau_m)\, d\zeta$$

$$a_{0m}^{(s)} = \int_{-1}^{1} [u^{(s-1)}(\xi - 1)\tau_m + v^{(s)}(\xi - 1)\tau_m]\, d\zeta -$$

$$- \frac{1}{a}\int_{-1}^{1} (\varphi_1^{(s-3)}\tau_m + \varphi_2^{(s-3)}\tau_m)\, d\zeta$$

Через τ_n, τ_m, u_n, v_n обозначены коэффициенты при $A_n^{(s)}$ в выражениях соответственно для $\tau_{\xi p}^{(s)}$, $\tau_{\xi\eta p}^{(s)}$, $u_p^{(s)}$, $v_p^{(s)}$, заданные формулой (2.4).

Таким образом, используя вариационное уравнение (3.7), мы находим оставшиеся произволы в формулах для напряжений и упругих перемещений. Постоянные $C_2^{(s)}$, $C_5^{(s)}$ и $C_6^{(s)}$ характеризуют жесткое смещение, их можно определить, например, из условий отсутствия жесткого смещения (3.5). На значения $C_2^{(s)}$, $C_5^{(s)}$ и $C_6^{(s)}$, естественно, будут влиять значения произволов погранслоя $B_n^{(s)}$, определяемые из уравнений (3.8).

4. Рассмотрим случай, когда на торцах $\xi = 0, 1$ заданы значения перемещений

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta), \quad (\varphi_1, \varphi_2) \text{ при } \xi = 0, 1 \tag{4.1}$$

В этой задаче в силу того, что удовлетворены статические граничные условия, также можно применять вариационное уравнение Кастильяно, которое примет вид

$$\int_{-1}^{1}[(u-\varphi_1)\,\delta\sigma_x+(v-\varphi_2)\,\delta\sigma_{xy}]_{\eta=0}\,d\xi+$$

$$+\int_{-1}^{1}[(u-\psi_1)\,\delta\sigma_x+(v-\psi_2)\,\delta\sigma_{xy}]_{\eta=1}\,d\xi=0 \qquad (4.2)$$

Используя (2.14), из (4.2) получим непротиворечивую систему, если $\varkappa=-4$. Система алгебраических уравнений имеет вид

$$C_1^{(s)}+a_n(A_n^{(s+3)}+B_n^{(s+1)})+a_0^{(s)}=0$$

$$\frac{2}{3}C_3^{(s)}+C_4^{(s)}+b_n(A_n^{(s)}+B_n^{(s)})+c_nB_n^{(s-1)}+b_0^{(s)}=0 \qquad (4.3)$$

$$C_3^{(s)}+2C_4^{(s)}+c_n(A_n^{(s)}+B_n^{(s)})+c_0^{(s)}=0$$

$$d_{nm}A_n^{(s)}-d_{0m}^{(s)}=0 \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (4.4)$$

$$d_{nm}B_n^{(s)}+e_{0m}^{(s)}=0 \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (4.5)$$

где

$$a_n=\frac{1}{2a_{11}}\int_{-1}^{1}u_n\,d\xi, \qquad b_n=\frac{1}{2a_{11}}\int_{-1}^{1}(\xi^2-1)\,v_n\,d\xi$$

$$c_n=-\frac{1}{a_{11}}\int_{-1}^{1}\xi u_n\,d\xi, \qquad d_{nm}=\int_{-1}^{1}(u_n\tau_m+v_n\tau_m)\,d\xi$$

$$a_0^{(s)}=\frac{1}{2a_{11}}\int_{-1}^{1}(v^{*(s-1)}(\xi=0)+v^{*(s)}(\xi=1)+$$

$$+a_{11}u_0^{(s)}(\xi=1))\,d\xi-\frac{1}{2a_{11}}\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}(\varphi_1^{(s-2)}+\varphi_1^{(s-3)})\,d\xi \qquad (4.6)$$

$$b_0^{(s)}=\frac{1}{a_{11}}\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{2}(\xi^2-1)(v^{*(s)}(\xi=0)+v^{*(s)}(\xi=1))-\xi u^{*(s)}(\xi=1)-\right.$$

$$\left.-a_{11}\xi^2u_0^{(s)}(\xi=1)+\frac{3}{2}a_{11}(\xi^2-1)v_0^{(s)}(\xi=1)\right|d\xi+$$

$$+\frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}\varphi_1^{(s-3)}\,d\xi-\frac{1}{2a_{11}}\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}(\xi^2-1)(\varphi_2^{(s-3)}+\varphi_2^{(s-4)})\,d\xi$$

$$c_0^{(s)} = -\frac{1}{a_{11}} \int_{-1}^{1} \zeta \left(u^{*(s)}(\xi = 0) + u^{*(s)}(\xi = 1) - \right.$$

$$\left. + a_{11} u_0^{(s)}(\xi = 1) \right) d\zeta + \frac{1}{a_{11}} \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} \zeta \left(\varphi_1^{(s-2)} + \psi_1^{(s-2)} \right) d\zeta$$

$$d_{0m}^{(s)} = \int_{-1}^{1} \left(u^{*(s-1)}(\xi = 0) \tau_m + v^{*(s)}(\xi = 0) \tau_m \right) d\zeta -$$

$$- \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} \left(\varphi_1^{(s-3)} \tau_m + \varphi_2^{(s-3)} \tau_m \right) d\zeta$$

$$e_{0m}^{(s)} = \int_{-1}^{1} \left(u^{*(s-1)}(\xi = 1) \tau_m + v^{*(s)}(\xi = 1) \tau_m \right) d\zeta -$$

$$- \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} \left(\psi_1^{(s-3)} \tau_m + \psi_2^{(s-3)} \tau_m \right) d\zeta$$

Система уравнений (4.3)—(4.5) составляет полную систему для определения произволов внутренней задачи и погранслоя. После их определения по формулам, приведенным в пп. 1—2, определяются напряжения и упругие перемещения.

Сходимость процесса Кастильяно в общем случае доказана в [9], поэтому мы здесь не будем останавливаться на этом вопросе.

Из (4.3)—(4.6) видно, что $A_n^{(0)} = B_n^{(0)} = A_n^{(1)} = B_n^{(1)} = 0$. Это означает, что погранслой в первом приближении не влияет на значения произволов внутренней задачи. Напряжения погранслоя будут порядка $O(\varepsilon^{-1})$, перемещения — $O(\varepsilon^{-1})$, то есть вблизи края погранслоем нельзя пренебрегать в силу того, что интенсивность напряжений погранслоя того же порядка, что и напряжения основного напряженного состояния.

В случае смешанных торцевых условий часть произволов внутренней задачи можно определить из условий (2.13), а для определения остальных величин применяются вышеуказанные приближенные методы.

В заключение автор благодарит А. А. Агаловяна за внимание и руководство при выполнении работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 V 1976

Շ. Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով ուսումնասիրվում է անիզոտրոպ շերտի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը, երբ շերտի հրկայնական կողմերի վրա տրված են լարումների արժեքները, իսկ մյուս կողմերի վրա՝ տարբեր տիպի եզրային պայմաններ։

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է երկու տեսակ լուծումների գումարով՝ հիմնական լարվածային վիճակը բնութագրող լուծման և սահմանային շերտի տիպի։

Ցույց է տրվում եզրերում այդ երկու լուծումների կարման հնարավորություններ։

Քննարկվում է կիրառական և ասիմպտոտիկ մեթոդների կիրառության հնարավորությունը անիզոտրոպ նյութերի համար։ Ցույց է տրված, որ դասական տեսության կիրառման հնարավորությունը էապես կախված է առաձգական գործակիցների հարաբերություններից։ Վերլուծության է ենթարկված առաձգականության տարբեր գործակիցների դերը չդեֆորմացվող նորմալների վարկածի կիրառելիության վրա։ Ցույց է տրված, որ կիրառական տեսության ճշգրտումը առաջին հերթին պետք է կապել սահքային գործոնների ճշգրիտ հաշվառման հետ։

ON DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE OF AN ANISOTROPIC STRIPE

SH. M. KHACHATRIAN

S u m m a r y

The determination of stress-strain state in a plane problem for an anisotropic stripe is considered. The stripe plane is assumed to coincide with the plane of the materials elastic symmetry. The stress values on the longitudinal sides of the stripe and the different combinations of the boundary conditions on its edges are given.

The asymptotic method of integration is applied and the solution of the problem is presented as the sum of two solutions: the interior one and that of boundary layer. The suitability of applied and asymptotic methods for anisotropic materials is discussed. The applicability of the above methods is shown to depend strictly on the ratio of elastic coefficients. The effect of specific coefficients of elacticity on the applicability of the hypothesis on nondeformable normals is analysed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ. 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба ортотропных пластин. МТТ. 1966, № 6.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. УМН. 1957, т. XII, вып. 5.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
5. *Агаловян Л. А.* О пограслое ортотропных пластинок. Изв. АН АрмССР. Механика. 1973, т. XXVI, № 2.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки. ПММ. 1969, т. 33, вып. 6.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
8. *Перекальский С. Н.* Экспериментальное определение полного комплекса характеристик упругих свойств и прочности стекловолокнистых анизотропных материалов. Автореферат кандидатской диссертации. Челябинск, 1970.
9. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
10. *Прокопов В. К.* Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок. Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 3, М., «Наука», 1966.
11. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.—Л., ОГИЗ, 1947.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXIX, № 6, 1976 Механика

A. D. de PATER, A. HOOGERWAARD

ON THE STABILITY OF THE MOTION OF A ROTATING SHAFT BEARING AN UNSYMMETRIC ROTOR

1. *Introduction*. The motion of a rotating shaft with a symmetrical cross-section, bearing a symmetrical body (e. g. a disk) has been investigated by various investigators. On the contrary, authors were unable to find publications about the case that the body is unsymmetrical, with the exception of two articles of Crandall [1, 2] who, however, only investigated the case in which the mass centre of the body is fixed, the body being only able to rotate under the action of restoring moments.

In the present paper the more general case in which the mass centre of the body is free to move with the shaft, is treated. We suppose that the mass centre is situated on the axis of revolution of the shaft and that one of the main axes of inertia coincides with this axis when the shaft is undeformed. For the investigation analogous methods have been used as in a previous study of the motion of a symmetrical shaft, bearing a symmetrical body and loaded by an axial force [3].

After the investigation had been largely finished, authors became aware of a couple of publications of Aiba [4, 5], who investigated the same problem and found analogous results. However, authors thought that it would be worth-while to publish the results of their own work, because in a sense the treatment was more general and, moreover, permits to make a comparison with one of the general enunciations of Celaev on the stability of motion.

2. *Description of the motion of the system*. Although the equations of motion which we intend to derive will be valid for any system of supports of the rotating shaft, we restrict ourselves for the time being to the case of a cantilever shaft, represented in fig. 1.

The shaft is "clamped" at the origin o of the fixed coordinate system (o, ξ, η, ζ), its axis of revolution coinciding with the axis $o\zeta$ in the undeformed state. In the deformed state o_0 is the elastic line of the shaft, o then being the mass centre of the body which is attached to the shaft. One of the main axes of inertia of the body is oz; in the undeformed position this axis coincides with $o\zeta$. The two other main axes of inertia are ox and oy.

The translation and rotation of the body are described by means of the two auxiliary systems $(o, \xi^*, \eta^*, \zeta^*)$ and (o, x^*, y^*, z), shown in the figure. The first system indicates the translation of the body, whereas the second one describes the bending of the shaft. The rotation

of shaft and body is given by the angle φ between (o, x, η) and (o, x^*, y^*). The rotation of the system (o, x^*, y^*, z) will be described by means of Rodrigues coordinates [6, 7].

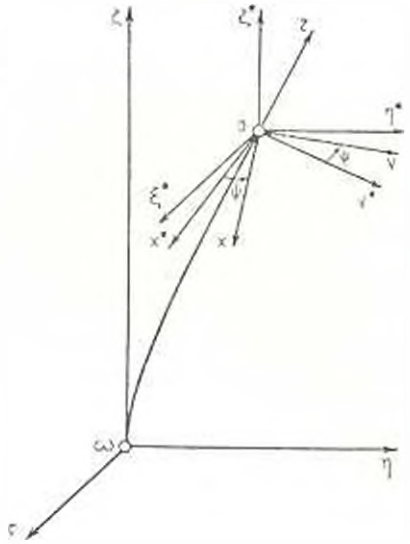


Fig. 1. The shaft in a deflected position.

We will indicate column vectors by means of lower case letters on top of which a bar has been printed, and matrices in the same way but with capital letters. The transposition operation is indicated by a tilde. Thus, a row vector is represented by a lower case letter in top of which a bar and a tilde have been printed.

We then can define the following vectors:

$$\bar{\rho} = (\xi, \eta, \zeta), \quad \bar{\rho}_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0), \quad \bar{\rho}^* = (\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$$
$$\bar{r} = (x, y, z), \quad \bar{r}^* = (x^*, y^*, z) \tag{2.1}$$

Here $\bar{\rho}_0$ is the radius vector of the mass centre o. The transformation between the various vectors can be represented by the formulae

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}^*, \quad \bar{\rho}^* = \bar{G}^* \bar{r}^*, \quad \bar{r}^* = \bar{G}^{**} \bar{r} \tag{2.2}$$

where the rotation matrices $\bar{G}^*$ and $\bar{G}^{**}$ are given by

$$\bar{G}^* = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\chi^{*2} & \frac{1}{2}\varphi^*\chi^* & \chi^* \\ \frac{1}{2}\varphi^*\chi^* & 1 - \frac{1}{2}\varphi^{*2} & -\varphi^* \\ -\chi^* & \varphi^* & 1 - \frac{1}{2}(\varphi^{*2} + \chi^{*2}) \end{vmatrix} \tag{2.3a}$$

$$\bar{G}^{**} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3b}$$

respectively. Here φ^* and χ^* are Rodrigues coordinates; in first approximation, φ^* is the rotation of the system (o, x^*, y^*, z) around the axis ox^* and χ^* the rotation around the axis oy^*. In the formula (2.3a) for $\bar{G}^*$ terms of third and higher degree in φ^* and χ^* have been omitted. The product of $\bar{G}^*$ and $\bar{G}^{**}$ is called $\bar{G}$:

$$\bar{G} = \bar{G}^* \bar{G}^{**} \tag{2.4}$$

so that (1) and (2) yield

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{G}\bar{r} \tag{2.5}$$

The components with respect to the fixed coordinate system of the absolute velocity of a point of the body are given by the vector

$$\bar{v}^* = \dot{\bar{\rho}} = \dot{\bar{\rho}}_0 + \dot{\bar{G}}\bar{r} \tag{2.6}$$

Now

$$\bar{\rho} - \bar{\rho}_0 = \bar{G}\bar{r}, \quad \bar{r} = \bar{G}(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \tag{2.7}$$

(because $\bar{G} = \bar{G}^{-1}$), so that also

$$\bar{v}^* = \dot{\bar{\rho}}_0 + \bar{\Omega}^*(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \tag{2.8}$$

where

$$\bar{\Omega}^* = \dot{\bar{G}}\bar{G} \tag{2.9}$$

We find

$$\bar{\Omega}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

with

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi}^* + \chi^*\dot{\psi}, \quad \omega_2 = \dot{\chi}^* - \varphi^*\dot{\psi} \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}(\varphi^*\dot{\chi}^* - \chi^*\dot{\varphi}^*) + \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^{*2} - \frac{1}{2}\chi^{*2}\right)\dot{\psi} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Thus instead of (2.8) we can write:

$$\bar{v}^* = \dot{\bar{\rho}}_0 + \bar{\omega}^*(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \tag{2.12}$$

the vector of the angular velocity being defined by

$$\bar{\omega}^* = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \tag{2.13}$$

More useful are the components of the angular velocity vector with respect to the rotating system (o, x, y, z). By means of (2.6) we have for the components with respect to this system of the absolute velocity of a point of the body:

$$\bar{v} = \tilde{G}\bar{v}^* = \tilde{G}\dot{\bar{\rho}}_0 + \bar{\Omega}\bar{r} \tag{2.14}$$

with

$$\bar{\Omega} = \tilde{G}\dot{\tilde{G}} \tag{2.15}$$

Now we find

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

with

$$\begin{gathered} \omega_x = \varphi^* \cos\psi + \chi^* \sin\psi, \quad \omega_y = -\varphi^* \sin\psi + \chi^* \cos\psi \\ \omega_z = \psi + \frac{1}{2}(\chi^*\varphi^* - \varphi^*\chi^*) \end{gathered} \tag{2.17}$$

so that also

$$\bar{v} = \tilde{G}\dot{\bar{\rho}}_0 + \bar{\omega}\bar{r} \tag{2.18}$$

here the vector of the angular velocity reads

$$\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \tag{2.19}$$

We easily verify the relation

$$\bar{\omega}^* = \tilde{G}\dot{\bar{\omega}} \tag{2.20}$$

The velocity of the mass centre can best be determined by means of (2.6), by putting $\bar{r} = \bar{o}$:

$$\bar{v}_0^* = \dot{\bar{\rho}}_0 \tag{2.21}$$

so that

$$\bar{v}_0^* = (\dot{\xi}_0, \eta_0, \zeta_0) \tag{2.22}$$

Here

$$\zeta_0 = 0 \tag{2.23}$$

3. *Derivation of the equations of motions by means of energy methods (Lagrange).* In using the method of Lagrange's equations we first have to find the expression for the potential energy U. Because the shaft is rotationally symmetric, the relations between the forces

and moments applying on the shaft and the displacement quantities can be written, according to fig. 2, as

$$\begin{aligned} -F_\xi &= c_{11}\xi_0 + c_{12}\gamma^*, & -M_\gamma &= c_{21}\xi_0 + c_{22}\gamma^* \\ -F_\eta &= c_{11}\eta_0 - c_{12}\varphi^*, & M_\zeta &= c_{21}\eta_0 - c_{22}\varphi^* \end{aligned} \tag{3.1}$$

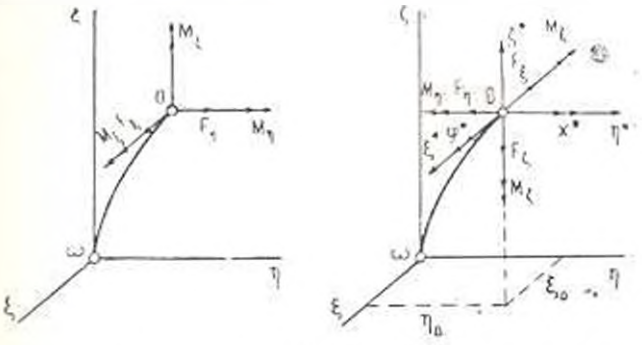


Fig. 2. The forces exerted by the shaft on the body, the forces exerted by the body on the shaft and the rotations φ^* and γ^*.

For a cantilever shaft with the length a we have, for example,

$$c_{11} = \frac{12EJ}{a^3}, \qquad c_{12} = c_{21} = -\frac{6EJ}{a^2}, \qquad c_{22} = \frac{4EJ}{a} \tag{3.2}$$

Now owing to Clapeyron's law we find

$$U = -\frac{1}{2}(F_\xi\xi_0 + F_\eta\eta_0 + M_\eta\varphi^* + M_\zeta\gamma^*) \tag{3.3}$$

and together with (1) we obtain the expression for the potential energy

$$U = \frac{1}{2}c_{11}(\xi_0^2 + \eta_0^2) + c_{12}(\xi_0\gamma^* - \eta_0\varphi^*) + \frac{1}{2}c_{22}(\varphi^{*2} + \gamma^{*2}) \tag{3.4}$$

Instead of the coordinates ξ_0, η_0, φ^* and γ^*, related to the fixed system, we henceforth will use the coordinates

$$\begin{aligned} x &= \xi_0\cos\psi + \eta_0\sin\psi, & y &= -\xi_0\sin\psi + \eta_0\cos\psi \\ \varphi &= \varphi^*\cos\psi + \gamma^*\sin\psi, & \gamma &= -\varphi^*\sin\psi + \gamma^*\cos\psi \end{aligned} \tag{3.5}$$

which belong to the rotating system. In the new coordinates the expression for the potential energy (3.4) reads

$$U = \frac{1}{2}c_{11}(x^2 + y^2) + c_{12}(x\gamma - y\varphi) + \frac{1}{2}c_{22}(\varphi^2 + \gamma^2) \tag{3.6}$$

The kinetic energy of the system is given by the expression

$$T = \frac{1}{2}m(v_{0\xi}^2 + v_{0\eta}^2 + v_{0\zeta}^2) + \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) \tag{3.7}$$

where v_{0i} etc. are the elements of the vector $\bar{v}_0^*$ (2.22) and ω_x, ω_y, ω_z are determined by (2.17). We first reduce ξ_0, η_0, φ^*, χ^* to x, y, φ, χ. Inverting (3.5) we have

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x\cos\psi - y\sin\psi, \quad \eta_0 = x\sin\psi + y\cos\psi \\ \varphi^* &= \varphi\cos\psi - \chi\sin\psi, \quad \chi^* = \varphi\sin\psi + \chi\cos\psi \end{aligned} \tag{3.8}$$

so that

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= \dot{x}\cos\psi - \dot{y}\sin\psi - \dot{\psi}(x\sin\psi + y\cos\psi) \\ \dot{\eta}_0 &= \dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + \dot{\psi}(x\cos\psi - y\sin\psi) \\ \dot{\varphi}^* &= \dot{\varphi}\cos\psi - \dot{\chi}\sin\psi - \dot{\psi}(\varphi\sin\psi + \chi\cos\psi) \\ \dot{\chi}^* &= \dot{\varphi}\sin\psi + \dot{\chi}\cos\psi + \dot{\psi}(\varphi\cos\psi + \chi\sin\psi) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Thus the velocity components read

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \dot{x}\cos\psi - \dot{y}\sin\psi - \dot{\psi}(x\sin\psi + y\cos\psi) \\ v_{0y} &= \dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi - \dot{\psi}(x\cos\psi - y\sin\psi) \\ v_{0z} &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

and

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} - \chi\dot{\psi}, \qquad \omega_y = \dot{\chi} + \varphi\dot{\psi} \\ \omega_z &= \dot{\psi}\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\chi^2\right) + \frac{1}{2}(\chi\dot{\varphi} - \varphi\dot{\chi}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

respectively. Inserting these expressions into (3.7) we obtain

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{\psi}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{\psi}^2(x^2 + y^2)) + \\ + \frac{1}{2}J_x(\dot{\varphi} - \chi\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}J_y(\dot{\chi} + \varphi\dot{\psi})^2 + \\ + \frac{1}{2}J_z\dot{\psi}^2(1 - \varphi^2 - \chi^2) + \dot{\psi}(\chi\dot{\varphi} - \varphi\dot{\chi}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

The shaft is driven by a moment M around the axis ω_z. The generalised forces related to it are found by determining the virtual work

$$\delta W = M\delta\vartheta_z \tag{3.13}$$

Now $\delta\vartheta_z$ can best be calculated by considering the expression (2.11) for $\omega_z = \vartheta_z$, by replacing the quantities φ^* and χ^* in the expression by φ and χ, according to (3.8) and (3.9):

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\varphi\dot{\chi} - \dot{\varphi}\chi) + \dot{\psi} \tag{3.14}$$

and by replacing ω_z, φ, χ and ψ by $\delta\vartheta_z$, $\delta\varphi$, $\delta\chi$ and $\delta\psi$ respectively:

$$\delta\vartheta_z = \frac{1}{2}(\varphi\delta\psi - \psi\delta\varphi) + \delta\psi \tag{3.15}$$

In combination with (3.13) we then find for the various generalised forces:

$$Q_x = 0, \quad Q_y = 0, \quad Q_\varphi = -\frac{1}{2}M\chi, \quad Q_\chi = \frac{1}{2}M\varphi, \quad Q_\psi = M \tag{3.16}$$

We now are able to derive the equations of motion by means of the formula

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.17}$$

Owing to (3.6), (3.12) and (3.16) we obtain

$$m(\ddot{x} - y\ddot{\psi} - 2\dot{y}\dot{\psi} - x\dot{\psi}^2) + c_{11}x + c_{12}\chi = 0 \tag{3.18a}$$

$$m(\ddot{y} + x\ddot{\psi} + 2\dot{x}\dot{\psi} - y\dot{\psi}^2) + c_{11}y - c_{12}\varphi = 0 \tag{3.18b}$$

$$J_x(\ddot{\varphi} - \chi\ddot{\psi} - \dot{\chi}\dot{\psi}) - J_y(\dot{\chi}\dot{\psi} + \varphi\dot{\psi}^2) + \\ + J_z\left(\frac{1}{2}\chi\ddot{\psi} + \dot{\chi}\dot{\psi} + \varphi\dot{\psi}^2\right) - c_{12}y + c_{22}\varphi = -\frac{1}{2}M\chi \tag{3.18c}$$

$$J_x(\ddot{\chi} - \varphi\ddot{\psi}) + J_y(\ddot{\varphi} + \chi\ddot{\psi} + \dot{\chi}\dot{\psi}) + \\ + J_z\left(-\frac{1}{2}\varphi\ddot{\psi} - \dot{\varphi}\dot{\psi} + \chi\dot{\psi}^2\right) + c_{12}x - c_{22}\chi = \frac{1}{2}M\varphi \tag{3.18d}$$

$$m[\ddot{x}y - \ddot{y}x + \dot{\psi}(x^2 + y^2) + 2\dot{\psi}(x\dot{x} + y\dot{y})] - \\ - J_x[\chi(\ddot{\varphi} - \chi\ddot{\psi} - \dot{\chi}\dot{\psi}) + \dot{\chi}(\dot{\varphi} - \chi\dot{\psi})] + \\ + J_y[\varphi(\ddot{\chi} + \varphi\ddot{\psi} + \dot{\varphi}\dot{\psi}) + \dot{\varphi}(\dot{\chi} + \varphi\dot{\psi})] + \\ + J_z\left[\ddot{\psi} + \frac{1}{2}(\chi\ddot{\varphi} - \varphi\ddot{\chi}) - \dot{\psi}(\varphi^2 + \chi^2) - 2\dot{\psi}(\varphi\dot{\varphi} + \chi\dot{\chi})\right] = M \tag{3.18e}$$

The equation (3.18e) can be simplified by combining it with the four other equations of motion, (3.18a)–(3.18d). Then we find

$$M = -(J_x - J_y)(\ddot{\varphi} - \chi\ddot{\psi})(\dot{\chi} + \varphi\dot{\psi}) + \\ + J_z\left[\ddot{\psi} - \dot{\psi}(\varphi\ddot{\varphi} + \chi\ddot{\chi}) + \frac{1}{2}(\chi\ddot{\varphi} - \varphi\ddot{\chi})\right] \tag{3.19}$$

Adding $-\frac{1}{2}\chi$ times M (3.19) to equation (3.18c) and $\frac{1}{2}\varphi$ times M (3.19) to equation (3.18d) we find for the four first equations of motion

$$m(\ddot{x} - y\ddot{\psi} - 2\dot{y}\dot{\psi} - x\dot{\psi}^2) + c_{11}x + c_{12}\chi = 0$$

$$m(\ddot{y} + x\ddot{\psi} + 2\dot{x}\dot{\psi} - y\dot{\psi}^2) + c_{11}y - c_{12}\varphi = 0$$

$$J_x(\ddot{\varphi} - \dot{\chi}\dot{\psi} - \chi\ddot{\psi}) - (J_y - J_z)\dot{\psi}(\dot{\chi} + \varphi\dot{\psi}) - c_{12}y + c_{22}\varphi = -M\chi \quad (3.20)$$

$$J_y(\ddot{\chi} + \dot{\varphi}\dot{\psi} + \varphi\ddot{\psi}) + (J_x - J_z)\dot{\psi}(\dot{\varphi} - \chi\dot{\psi}) + c_{12}x + c_{22}\chi = M\varphi$$

In sections 5—7 only the motion will be considered for the case $\dot{\psi} = \omega = \text{const}$. Then M (3.19) is of second order in the remaining four displacement quantities, so that the four first equations of motion reduce to

$$m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) + c_{11}x + c_{12}\chi = 0$$

$$m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) + c_{11}y - c_{12}\varphi = 0$$

$$J_x(\ddot{\varphi} - \omega\dot{\chi}) - (J_y - J_z)\omega(\dot{\chi} + \omega\varphi) - c_{12}y + c_{22}\varphi = 0 \quad (3.21)$$

$$J_y(\ddot{\chi} + \omega\dot{\varphi}) + (J_x - J_z)\omega(\dot{\varphi} - \omega\chi) + c_{12}x + c_{22}\chi = 0$$

Before we shall discuss these equations in detail, we will show how the equations of motion can be found by means of the fundamental law of analytical mechanics.

4. *Derivation of the equations of motion by means of the fundamental law of analytical mechanics (Newton and Euler).* The motion of the mass centre o of the body is determined by Newton's law:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = m\bar{a}_0 \quad (4.1)$$

F_x, F_y and F_z being the components in the directions ox, oy, oz of the force which the shaft exerts on the body, and $\bar{a}_0$ being the vector with respect to the system (o, x, y, z) of the absolute acceleration of the mass centre.

For the forces the relation

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \tilde{G}\begin{pmatrix} F_\xi \\ F_\eta \\ F_\zeta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

holds. By means of the relations (3.1) for the forces F_ξ and F_η and the relations (2.4), (2.3a) and (2.3b) we find, restricting ourselves to quantities of zero and first order:

$$F_x = -(c_{11}x + c_{12}\chi), \quad F_y = -(c_{11}y - c_{12}\varphi) \quad (4.3)$$

For the acceleration $\bar{a}_0$ the relation

$$\bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{v}_0 \quad (4.4)$$

holds, where $\bar{v}_0$ is the vector with respect to the system (o, x, y, z) of the velocity of the mass centre. We have

$$\bar{v}_0 = \bar{G}\,\bar{v}_0^* \tag{4.5}$$

the components of $\bar{v}_0^*$ being given by (3.10). Omitting again all quantities of second and higher order, we have, because of (2.4), (2.3a) and (2.3b),

$$\bar{v}_0 = \begin{vmatrix} \dot{x} - \dot{\varphi} y \\ \dot{y} + \dot{\varphi} x \\ 0 \end{vmatrix} \tag{4.6}$$

So (4.1), together with (4.4), (4.6), (3.11) and (4.3) gives for the first two equations of motion

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} - \ddot{\varphi} y - 2\dot{\varphi}\dot{y} - \dot{\varphi}^2 x) + c_{11}x + c_{12}\chi = 0 \\ m(\ddot{y} + \ddot{\varphi} x + 2\dot{\varphi}\dot{x} - \dot{\varphi}^2 y) + c_{11}y - c_{12}\varphi = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

in agreement with the first two equations (3.20).

Euler's equations read

$$\begin{aligned} M_x &= J_x\dot{\omega}_x - (J_y - J_z)\,\omega_y\omega_z \\ M_y &= J_y\dot{\omega}_y - (J_z - J_x)\,\omega_z\omega_x \\ M_z &= J_z\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)\,\omega_x\omega_y \end{aligned} \tag{4.8}$$

the moments being determined by

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \bar{G}\begin{pmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Now M_ξ and M_η are given by (3.1), whereas M_ζ follows from the shaft equilibrium around the axis $o\zeta$ and relations (3.8):

$$M_\zeta = M + F_\xi\eta_0 - F_\eta\xi_0 = M - c_{12}(\xi_0\varphi^* + \eta_0\chi^*) = M - c_{12}(x\varphi + y\chi) \tag{4.10}$$

Altogether we have

$$\begin{aligned} M_x &= c_{12}y - c_{22}\varphi - M\chi, \quad M_y = -c_{12}x - c_{22}\chi + M\varphi \\ M_z &= M\left\{1 - \frac{1}{2}(\varphi^2 + \chi^2)\right\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Euler's equations (4.8) now become, with (3.11):

$$J_x(\ddot{\varphi} - \chi\dot{\psi} - \chi\dot{\vartheta}) - (J_y - J_z)\dot{\vartheta}(\chi + \varphi\dot{\psi}) - c_{12}y + c_{22}\varphi = -M\chi \tag{4.12a}$$

$$J_y(\ddot{\chi} + \varphi\dot{\psi} + \varphi\dot{\vartheta}) + (J_z - J_x)\dot{\vartheta}(\varphi - \chi\dot{\psi}) + c_{12}x + c_{22}\chi = M\varphi \tag{4.12b}$$

$$J_z\left\{\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}(\gamma\ddot{\varphi}-\varphi\ddot{\gamma})-\dot{\varphi}(\varphi\dot{\varphi}+\gamma\dot{\gamma})\right\}-$$

$$-(J_x-J_y)(\dot{\varphi}-\gamma\dot{\varphi})(\dot{\gamma}+\varphi\dot{\varphi})=M \qquad (4.12c)$$

The first two equations agree with the last two equations (3.20), whereas (4.12c) is the same as (3.19).

5. *The critical speeds.* We now return to the equations of motion (3.21) and first investigate whether a stationary movement of the system is possible, i. e. a movement for which $\dot{x}=\dot{y}=\dot{\varphi}=\dot{\gamma}=0$. In this case the values of x, y, φ and γ are determined by the four homogeneous equations

$$(c_{11}-m\omega^2)x+c_{12}\gamma=0,\quad c_{12}x+\{c_{22}-(J_x-J_z)\omega^2\}\gamma=0 \qquad (5.1a)$$

$$(c_{11}-m\omega^2)y-c_{12}\varphi=0,\quad -c_{12}y+\{c_{22}-(J_y-J_z)\omega^2\}\varphi=0 \qquad (5.1b)$$

So we find that there are two kinds of critical speeds, one related to x and γ and the other to y and φ. We shall denote the critical speeds by ω_k and the displacements belonging to them by x_k, γ_k and y_k, φ_k respectively.

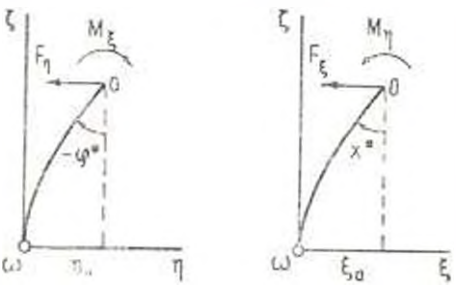


Fig. 3. The relations between the loads and the displacement quantities of the shaft.

Further on, it is advantageous to introduce reduced ("dimensionless") quantities. We first define the fundamental angular velocity ω_0 by

$$\omega_0=\sqrt{c_{11}/m} \qquad (5.2)$$

and we call

$$\alpha=c_{11}J_z/c_{12}m,\quad \gamma=c_{12}/\sqrt{c_{11}c_{22}},\quad \underline{\omega}=\omega/\omega_0$$
$$\mu_x=J_x/J_z,\quad \mu_y=J_y/J_z \qquad (5.3)$$

For a cantilever shaft we have, according to (3.2b): $\gamma^2=3/4$. Thus the critical speeds ω_k are the roots of the equations

$$(1-\underline{\omega}^2)\{1-\alpha(\mu_x-1)\underline{\omega}^2\}-\gamma^2=0$$
$$(1-\underline{\omega}^2)\{1-\alpha(\mu_y-1)\underline{\omega}^2\}-\gamma^2=0 \qquad (5.4)$$

The equations can best be solved by first reducting them to the form

$$\mu_{x,y} = \frac{(1 + \alpha\omega^2)(1 - \omega^2) - \gamma^2}{\alpha\omega^2(1 - \omega^2)} \tag{5.5}$$

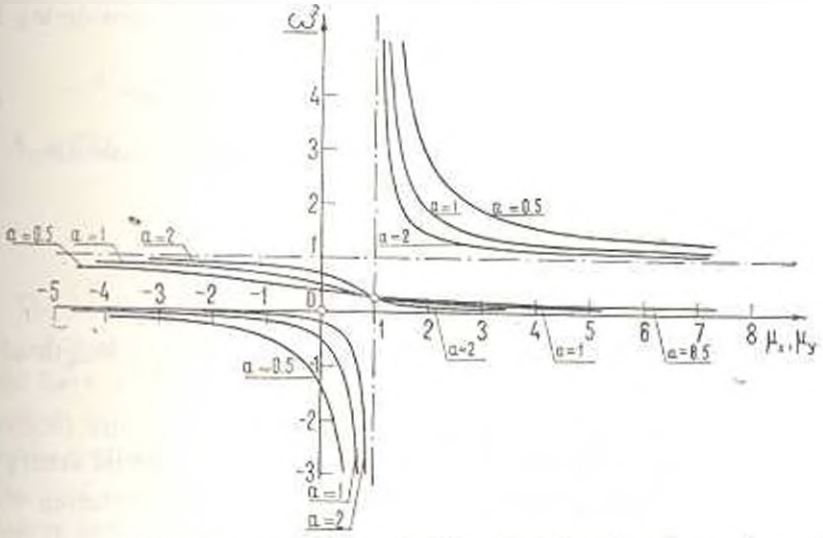


Fig. 4. The relations between $\mu_{x,y}$ and ω^2 for $\gamma^2=3/4$ and various values of α.

In fig. 4 we have plotted the relation between $\mu_{x,y}$ and ω^2 for various values of α. From this figure we conclude that a system has only one critical speed related to the motion (x, χ) when $0 < \mu_x < 1$, and two critical speeds related to this motion when $\mu_x > 1$; the same holds for the motion (y, φ), which is determined by μ_y rather than by μ_x. We also see that the qualitative behaviour of the solution is not essentially influenced by the magnitude of the parameter α $(0 < \alpha < \infty)$, neither by that of the parameter γ $(0 < \gamma^2 < 1)$.

There are two cases which are especially important: the thin disk which is perpendicular to the axis oz, and the thin disk which contains this axis (so that we can choose the axis ox perpendicular to the plane of the disk). In the first case we have

$$J_z = J_x + J_y, \quad \mu_x + \mu_y = 1 \tag{5.6a}$$

and in the second case

$$J_x = J_y + J_z, \quad \mu_z - \mu_y = 1 \tag{5.6b}$$

From fig. 4 we now may conclude that in the first case never more than two critical speeds exist for the complete system, whereas in the second case there are three critical speeds for $\mu_y < 1$ $(J_y < J_z)$ and four critical speeds for $\mu_y > 1$ $(J_y > J_z)$. In the case of a two-blade

propellor we have approximately $J_x = J_z > 0$, $J_y = 0$, $\mu_x = 1$, $\mu_y = 0$, so that there would be only two different critical speeds; in reality the propellor blades are not completely flat in the z-direction, so that $J_y > 0$, $J_z > J_x$, $\mu_x > 1$; thus three different critical speeds occur.

6. *The stability of the motion.* The stability of the solution of the equations of motion (3.21) can only be found by considering their solution. This can be represented by

$$x = x_0 e^{pt}, \quad y = y_0 e^{pt}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{pt}, \quad \chi = \chi_0 e^{pt} \tag{6.1}$$

Besides the parameters (5.3) we introduce the reduced quantities

$$\begin{gathered} \underline{p} = p/\omega_0, \quad \underline{x} = x/l, \quad \underline{y} = y/l \\ \underline{\varphi} = \frac{\varphi}{l}\sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}, \qquad \underline{\chi} = \frac{\chi}{l}\sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}} \end{gathered} \tag{6.2}$$

and, in the same way, $\underline{x}_0$, $\underline{y}_0$, $\underline{\varphi}_0$, $\underline{\chi}_0$; l is a reference length of the order of x_0 and y_0.

Inserting the solution (6.1) into the equations of motion (3.21) and using the relations (6.2) we find that $\underline{x}_0$, $\underline{y}_0$, $\underline{\varphi}_0$, $\underline{\chi}_0$ should satisfy the four homogeneous linear equations which read in vector notation

$$\begin{Vmatrix} \underline{p}^2 + 1 - \underline{\omega}^2 & \gamma & -2\underline{\omega}\underline{p} & 0 \\ \gamma & 1 + \alpha\mu_y\underline{p}^2 - \alpha(\mu_x - 1)\underline{\omega}^2 & 0 & -\alpha(1-\mu_x-\mu_y)\underline{\omega}\underline{p} \\ 2\underline{\omega}\underline{p} & 0 & \underline{p}^2 - 1 - \underline{\omega}^2 & -\gamma \\ 0 & \alpha(1-\mu_x-\mu_y)\underline{\omega}\underline{p} & -\gamma & 1 + \alpha\mu_x\underline{p}^2 - \alpha(\mu_y - 1)\underline{\omega}^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{\chi}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{Vmatrix} = \overline{0} \tag{6.3}$$

The values of $(\underline{x}_0, \underline{\chi}_0, \underline{y}_0, \underline{\varphi}_0)$ can only be unequal to zero if $\underline{p}$ is a root of the characteristic equation of the system (6.3). It is easily found that this is a fourth degree equation in the unknown $\underline{p}^2$.

This can be shown by introducing the auxiliary quantities

$$\begin{gathered} a = \alpha\mu_x, \quad b = \alpha\mu_y, \quad c = \alpha(1 - \mu_x - \mu_y) \\ m = 1 - \alpha(1 - \mu)\underline{\omega}^2, \quad n = 1 + \alpha(1 - \mu)\underline{\omega}^2 \end{gathered} \tag{6.4}$$

Thus the characteristic equation reads

$$\begin{vmatrix} \underline{p}^2 + 1 - \underline{\omega}^2 & \gamma & -2\underline{\omega}\underline{p} & 0 \\ \gamma & b\underline{p}^2 + m & 0 & -c\underline{\omega}\underline{p} \\ 2\underline{\omega}\underline{p} & 0 & \underline{p}^2 + 1 - \underline{\omega}^2 & -\gamma \\ 0 & c\underline{\omega}\underline{p} & -\gamma & a\underline{p}^2 + n \end{vmatrix} = 0 \tag{6.5}$$

or after evaluation:

$$\sum_{q=0}^{4} A_q p^{2q} = 0 \tag{6.6}$$

with

$$A_0 = [(1-\omega^2)m - \gamma^2][(1-\omega^2)n - \gamma^2]$$

$$A_1 = (1-\omega^2)^2(am + bn + c^2\omega^2) -$$

$$-\gamma^2[a + b + m + n + (4c - a - b)\omega^2] - 2mn(1+\omega^2)$$

$$A_2 = 2(1+\omega^2)(am + bn + c\omega^2) + ab(1-\omega^2)^2 - \gamma^2(a+b) + mn$$

$$A_3 = am + bn + c^2\omega^2 + 2ab(1+\omega^2)$$

$$A_4 = ab$$

The solution (6.1) is only stable if all the eight roots p_k are in the left-hand part of the complex plane or on the imaginary axis: no root should have a positive real part. This means that the quantities p_k^2 should all be real and negative. A boundary between a stable and an unstable region is formed either when p_k^2 goes from the negative part of the real axis through the origin to the positive part of this axis, or leaves the negative part of the real axis and becomes complex; as always two roots p_k^2 of (6.6) are complex adjungate, in the latter case on the stability boundary two roots p_k^2 then coincide.

The first kind of stability boundary is found very easily. In that case we have to substitute $p = 0$ into (6.5). But then we have the same situation as in section 5, and the characteristic equation reduces to the set of the two equations (5.4), which is equivalent to the equation $A_0 = 0$ (see 6.7). So the curves which indicate the critical speed are at the same time boundaries between a stable and an unstable region.

We have investigated the cases $\mu_x + \mu_y = 1$ (thin disk perpendicular to the shaft) and $\mu_x - \mu_y = 1$ (thin disk in the plane of the shaft) more in detail by calculating the roots for certain values of μ (in each case for $a = 2$ and $\gamma^2 = 3{,}4$).

In the first case all the four roots p_k^2 are always real and we find only two stability boundaries, coinciding with the curves of critical speed: see fig. 6. Two of the roots are shown in fig. 5 for the value $\mu = \mu_y/\mu_x = 2/3$, the two other being more to the left in the coordinate plane. We find that instability occurs when the most-right root p_k^2 crosses the ω axis and becomes positive.

In the second case there are three regions of instability (fig. 8). The regions Ia and Ib are limited by the curves on which the speed is critical, as is shown in fig. 7 (for $\mu = 2/3$), where the roots p_1^2 and p_2^2 cross the ω axis in points corresponding with these curves. But there

is another region of instability (II), where two roots p_1^2 become complex, which also is shown in fig. 7. The latter region can only be found by calculating the roots p_1^2 and determining the values of ω where two roots p_1^2 coincide.

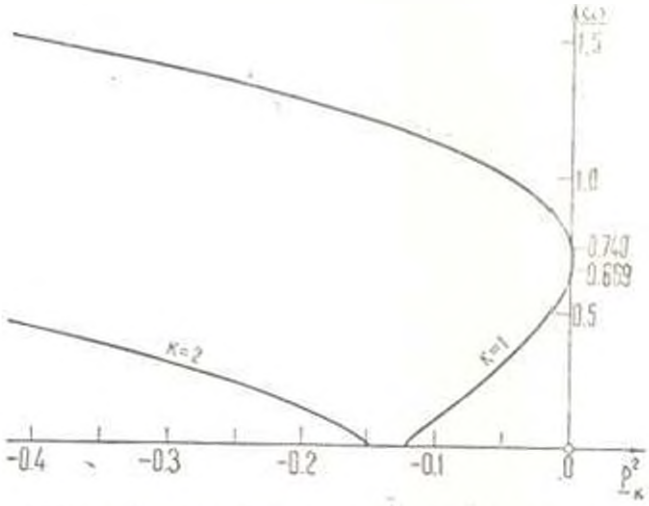


Fig. 5. The behaviour of the roots p_1^2 and p_2^2 as function of ω for $\mu_x+\mu_y=1$, $\varkappa=2/3$ and $\gamma^2=3/4$.

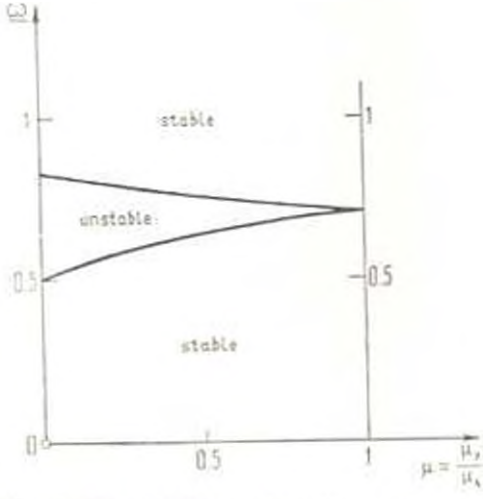


Fig. 6. The stability regions for $\mu_x+\mu_y=1$, $\varkappa=2$ and $\gamma^2=3/4$.

That the curves of critical speeds partially constitute the stability boundaries, can also be shown by considering the influence of the gyroscopic forces: this enables us to check one of the results of the investigations of Rayleigh and Cetaev [8]. We shall do so in the next section.

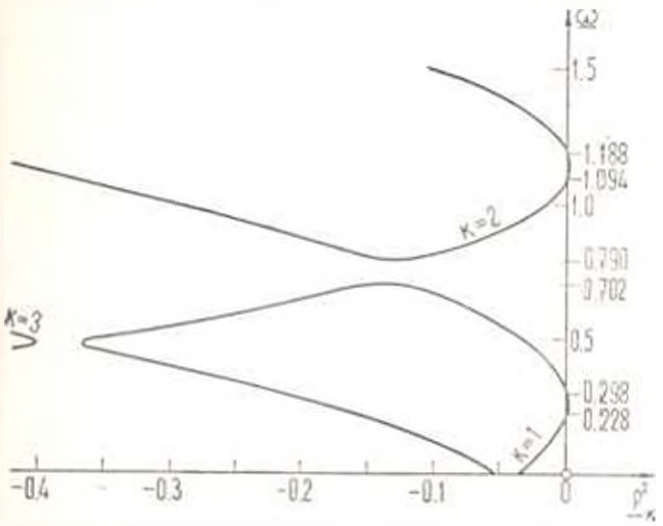


Fig. 7. The behaviour of the roots p_k^2 as function of ω for $\mu_2=\mu_3$ 1, 2 3, 2 and 3/4.

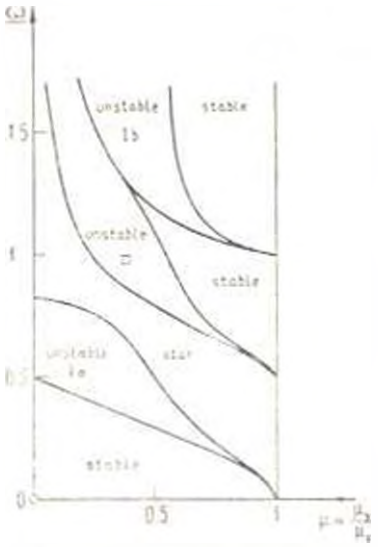


Fig. 8. The stability regions for $\mu_2=\mu_3$ 1, 2 and 3/4.

7. *The relation between the curves of critical speed and the stability boundaries.* It is possible to consider the equations of motion (3.21) as Lagrange's equations

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \frac{\partial U^*}{\partial q_i} = Q_i^* \qquad (7.1)$$

derived from the modified kinetic energy

$$T^* = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_x \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_y \dot{\gamma}^2 \tag{7.2a}$$

the modified potential energy

$$U^* = \frac{1}{2} (c_{11} - m\omega^2)(x^2 + y^2) + c_{12}(x\gamma - y\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2} (c_{22} - (J_y - J_z)\omega^2)\varphi^2 + \frac{1}{2} (c_{33} - (J_x - J_z)\omega^2)\gamma^2 \tag{7.2b}$$

and the modified generalised forces

$$\begin{aligned} Q_x^* &= 2m\omega\dot{y}, \quad & Q_y^* &= -2m\omega\dot{x} \\ Q_\varphi^* &= (J_x + J_y - J_z)\omega\dot{\gamma}, \quad & Q_\gamma^* &= -(J_x + J_y - J_z)\omega\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{7.2c}$$

Here the kinetic energy T^* is a homogeneous quadratic positive definite function of the velocities $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\varphi}$ and $\dot{\gamma}$ and the potential energy U^* is a homogeneous quadratic, but not always positive definite, function of the coordinate x, y, φ and γ; the generalised forces Q_i^* have the character of gyroscopic forces. Thus, the power of the generalised forces

$$P^* = Q_x^* \dot{x} + Q_y^* \dot{y} + Q_\varphi^* \dot{\varphi} + Q_\gamma^* \dot{\gamma} \tag{7.3}$$

is equal to zero. Because T^* is a homogeneous quadratic function, now the energy balance

$$\frac{d}{dt}(T^* + U^*) = P^* \tag{7.4}$$

(with $P^* = 0$) holds, and we see that the stability of the motion depends on the nature of U^*: when U^* is positive definite, the motion is certainly stable, whereas its nature is uncertain when U^* is not positive definite. Četaev [8] has shown that for such an (undamped) system the gyroscopic forces can stabilise the system in a certain domain of the region where the potential energy is not positive definite.

To find the boundaries separating the regions where U^* is positive definite from the regions where this is not the case, we have to calculate the eigenvalues of the matrix $\bar{C}^*$ of the potential energy, the expression of which can be written as

$$U^* = \frac{1}{2} \bar{q} \bar{C}^* \bar{q} \tag{7.5}$$

From (7.2b) we find

$$\overline{C}^{*}=\begin{vmatrix} c_{11}-m\omega^2 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22}-(J_x-J_z)\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}-m\omega^2 & -c_{12} \\ 0 & 0 & -c_{12} & c_{22}-(J_y-J_z)\omega^2 \end{vmatrix} \tag{7.6}$$

By comparing this expression with the matrix of the combined equations (5.1a) and (5.1b) we easily find that the values of ω where an eigenvalue of $\overline{C}^{*}$ is equal to zero, are the roots of the equations (5.4) for the critical speed of the system, in agreement with our previous result. For the further discussion it is advantageous to use again reduced quantities; by means of (5.3) and (6.2) we find for the characteristic equation for C^{*} in such quantities

$$\begin{vmatrix} 1-\underline{\omega}^2-\underline{\lambda} & \gamma & 0 & 0 \\ \gamma & 1-\alpha(\mu_x-1)\underline{\omega}^2-\underline{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\underline{\omega}^2-\underline{\lambda} & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & 1-\alpha(\mu_y-1)\underline{\omega}^2-\underline{\lambda} \end{vmatrix}=0 \tag{7.7}$$

Thus the values of $\underline{\lambda}$ are determined by

$$\underline{\lambda}^2-c_1\underline{\lambda}+c_0=0 \tag{7.8}$$

with

$$\begin{aligned} c_0 &= (1-\underline{\omega}^2)\{1-\alpha(\mu_{x,y}-1)\underline{\omega}^2\}-\gamma^2 \\ c_1 &= 1-\underline{\omega}^2+1-\alpha(\mu_{x,y}-1)\underline{\omega}^2 \end{aligned} \tag{7.9}$$

For stability it is necessary that both $c_0>0$ and $c_1>0$.

For c_0 this is indicated in fig. 9a—9b, which correspond with fig. 4 for the special values of $\alpha=\frac{1}{2}$ and $\gamma=2$. For c_1 we have drawn up an analogous set of figures: fig. 10 and fig. 11a—11b. Comparing the four figures we find that in the only quadrant which has a physical significance ($\mu_{x,y}>0$, $\underline{\omega}^2>0$) there is always a stable region situated against the $\mu_{x,y}$—axis, whereas for certain values of α a second stable region is possible (such as in the case of fig. 8).

In this way it is possible to determine the regions where the motion is certainly stable. In the regions where one or more values of $\underline{\lambda}$ are negative, the motion can either be stable or unstable. This is demonstrated by comparing the figures 4, 10, 11a and 11b. Here we find that in the unstable regions Ia and Ib one eigenvalue is negative, whereas in the domain consisting of the unstable region II and the two adjacent stable regions two eigenvalues $\underline{\lambda}$ are so. In this latter domain, with the exception of region II the unstability is removed by the effect of the gyroscopic forces.

The figures 4, 10, 11a and 11b enable us for the case of a cantilever shaft to determine the region where the motion is stable

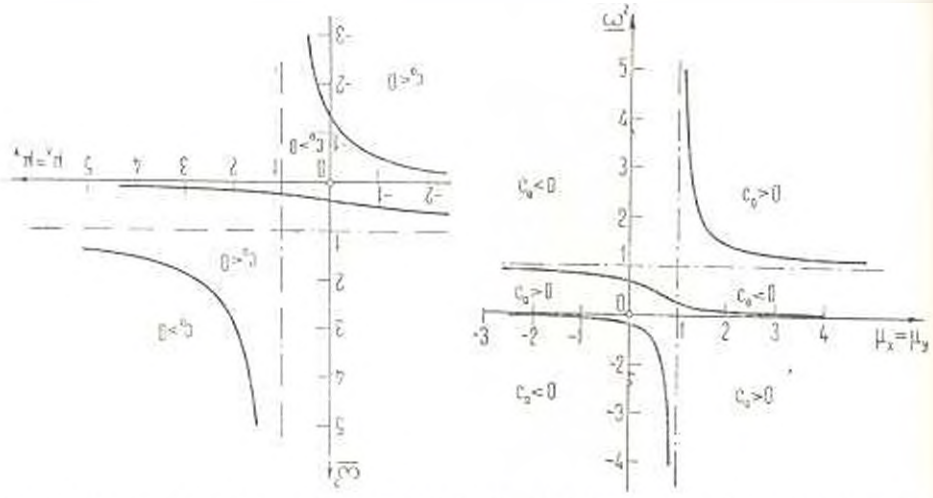


Fig. 9a. The sign of c_0 for $\varkappa=1/2$ and $\gamma^2=3/4$. Fig. 9b. The sign of c_0 for $\varkappa=2$ and $\gamma^2=3/4$.

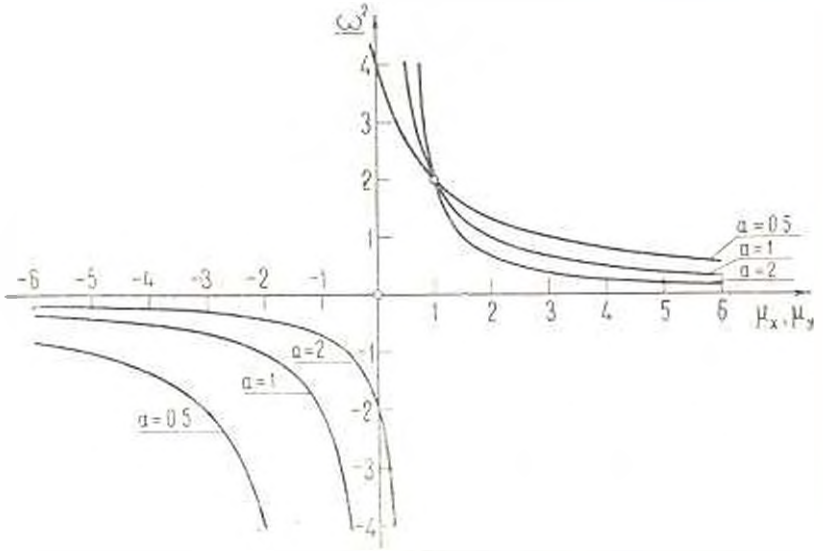


Fig. 10. The curves $c_1=0$ for $\gamma^2=3/4$ and various values of $\varkappa$.

anyhow. For finding the nature of the motion in the remaining regions it is necessary to calculate the roots of the characteristic equation (6.6).

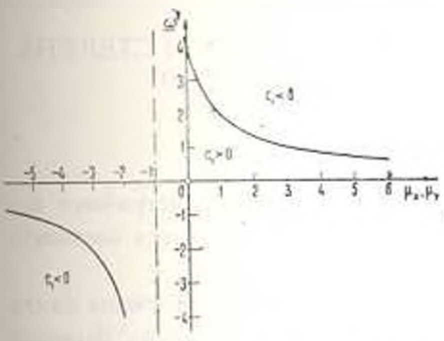


Fig. 11a. The sign of c_1 for $\alpha=1/2$ and $\gamma^2=3/4$.

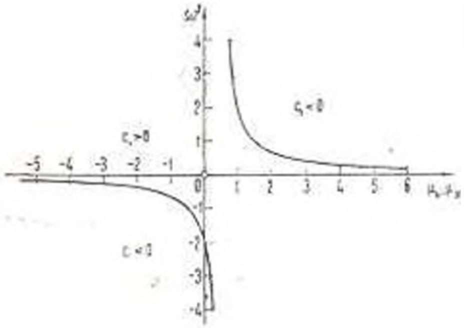


Fig. 11b. The sign of c_1 for $\alpha=2$ and $\gamma^2=3/4$.

8. *Conclusions.* By means of the results of the previous sections it is possible to find the stability of a cantilever shaft with a symmetrical cross-section, bearing an unsymmetrical body. It is not difficult to extend the investigation to the case of a shaft which is supported in other ways, because it is only necessary to change the value of the parameter γ.

It would be quite interesting to extend the investigation to the case of (external and internal) damping.

Delft University of Technology
Department of Mechanical Engineering
Laboratory of Engineering Mechanics

Received 15 VII 1976

Ա. Դ. ԴԵ ՊԱՏԵՐ Ե Ա. ՀՈՒԴՆԵՐՎԱՐԴ

ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՌՈՏՈՐ ԿՐՈՂ ՊՏՏՎՈՂ ՁՈՂԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է անզանգված առաձգական պտտվող և սիմետրիկ լայնական կտրվածք ունեցող ձողի շարժումը, երբ նա կրում է ոչ սիմետրիկ մարմին։

Մարմնի զանգվածի կենտրոնը գտնվում է ձողի պտտման առանցքի վրա և իներցիայի գլխավոր առանցքներից մեկը համընկնում է այդ առանցքի հետ ձողի չդեֆորմացված վիճակում։ Շարժման հանդարտումը հաշվի չի առնվում։ Ձողի պտտման անկյունային արագությունը հաստատուն է։

Գտնվել են երկու տեսակի անկայուն շրջաններ՝ մեկը սահմանափակված է կրիտիկական արագությունների սիստեմին համապատասխանող կորերով, մյուսը կորերով, որոնց վրա որոշիչ հավասարման արմատների երկու զույգից համընկնում են երկուսը, իսկ երկուսն էլ մաքուր կեղծ են։ Արդյունքները համաձայնեցվում են Ռեյլեյի և Ջենտաի ձևակերպումների հետ։

А. Л. де ПАТЕР, А. ХУГЕРВАРД

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СТЕРЖНЯ, НОСЯЩЕГО НЕСИММЕТРИЧНЫЙ РОТОР

Резюме

Исследуется движение вращающегося, упругого, с симметричным поперечным сечением стержня без массы, когда на нем находится несимметричное тело.

Центр массы тела расположен на оси вращения стержня и одна из его главных осей инерции совпадает с этой осью стержня в его недеформированном состоянии. Затухание движения не принимается во внимание. Угловая скорость вращения стержня является постоянной.

Найдено два вида областей неустойчивости: одна ограничена кривыми, которые соответствуют системе критических скоростей, другая — кривыми, на которых из двух пар корней характеристического уравнения два корня совпадают, а два других являются чисто мнимыми.

Результаты согласуются с формулировками Релея и Четаева.

REFERENCES

1. *Brozens P. J. and Crandall S. H.* Whirling of Unsymmetrical Rotors, Journal of Appl. Mech. 28(1961), p. 355—362.
2. *Crandall S. H. and Brozens P. J.* On the Stability of Rotation of a Rotor with Rotationally Unsymmetric Inertia and Stiffness Properties, Journal of Appl. Mech. 28(1961), p. 567—570.
3. *De Pater A. D.* The motion of a rotating shaft loaded by an axial force, Delft University of Technology, Department of Mech. Engg. Report WTHD 59 (1974), 3+30+24 pp.
4. *Aiba S.* On the vibration and the critical speeds of an asymmetrical rotating shaft, Report of the Faculty of Engineering of Yamanashi University 13 (1962), p. 30—43.
5. *Aiba S.* The Effect of Gyroscopic Moment and Distributed Mass on the Vibration of a Rotating Shaft with a Rotor, Bull. JSME 16 (1973) 100 p. 1550—1561.
6. *Whittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover (1944[1]), p. 6—22.
7. *Hamel G.* Theoretische Mechanik, Springer (1967), p. 103—107.
8. *Chetayev N. G.* The stability of motion, Pergamon (1961), p. 93—101, 103—112.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, №6, 1976 Механика

Г. С. ВАРДАНЯН

К ТЕОРИИ ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ ОДНОРОДНО СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ

На основе некоторой модификации теории ползучести Н. Х. Арутюняна [1] и использования температурно-временной аналогии [2] получены основные уравнения термоползучести для однородно стареющих тел с учетом зависимости характеристик материала от температуры.

Модифицированные реологические уравнения оказываются более удобными для обобщения на случай неизотермической ползучести стареющих тел в области линейной и нелинейной ползучести.

1. *Модификация основных уравнений теории ползучести однородно стареющих тел.* Основное уравнение линейной теории ползучести, выражающее связь между напряжениями и деформациями для однородно стареющих наследственных сред, при одноосном напряженном состоянии имеет вид [1]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^{t} \sigma(\tau) \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \qquad (1.1)$$

где $E(t)$ — переменный модуль упруго-мгновенной деформации; $C(t, \tau)$ — мера ползучести. Для этих величин часто используются аппроксимации

$$E(t) = E_0 (1 - e^{-\alpha t}) \qquad (1.2)$$

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau) = \varphi(\tau) \left[1 - e^{-\gamma (t-\tau)} \right] \qquad (1.3)$$

В правой части (1.1), вынося за скобку множитель $1/E(t)$, получим

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left\{ \sigma(t) - \int_{\tau_0}^{t} \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{E(t)}{E(\tau)} + E(t) C(t, \tau) \right] d\tau \right\} \qquad (1.4)$$

К выражению в квадратных скобках под знаком интеграла можно добавлять любое постоянное число A, от этого уравнение (1.4) не изменится. Далее, выберем число A так, чтобы при $t = \tau$ выражение (1.4) совпало с законом Гука $\varepsilon(\tau) = \sigma(\tau)/E(\tau)$. Очевидно, что это может быть только при $A = -1$.

Если обозначить полученное в итоге выражение через $S(t, \tau)$

$$S(t, \tau) = \frac{E(t)}{E(\tau)} + E(t)\, C(t, \tau) - 1 \tag{1.5}$$

получим окончательный вид основного уравнения

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left| \sigma(t) - \int_{0}^{t} \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau)\, d\tau \right| \tag{1.6}$$

Безразмерную функцию $S(t, \tau)$ назовем функцией ползучести. Она показывает отношение деформации ползучести к упруго-мгновенной деформации к моменту времени t и может рассматриваться как некоторая новая характеристика наследственно-стареющего материала вместо меры ползучести $C(t, \tau)$ [4, 6]. Обозначим

$$\Pi(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) \tag{1.7}$$

тогда

$$S(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} \Pi(t, \tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

Основное уравнение (1.6) через ядро ползучести $\Pi(t, \tau)$ записывается в виде

$$E(t)\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{0}^{t} \sigma(\tau)\, \Pi(t, \tau)\, d\tau \tag{1.9}$$

Решая уравнение (1.9) относительно $\sigma(t)$, получим

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(\tau) - \int_{0}^{t} E(\tau)\varepsilon(\tau) R(t, \tau)\, d\tau \tag{1.10}$$

$R(t, \tau)$ называется ядром релаксации, которое связано с ядром ползучести $\Pi(t, \tau)$ соотношением

$$\Pi(t, \tau) - R(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} R(s, \tau)\, \Pi(t, s)\, ds \tag{1.11}$$

Вынося в правой части (1.10) за скобку множитель $E(t)$, получим

$$\sigma(t) = E(t) \left| \varepsilon(t) - \int_{0}^{t} \varepsilon(\tau) \frac{E(\tau)}{E(t)} R(t, \tau) \right| d\tau \tag{1.12}$$

Обозначим

$$\Delta(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} \frac{E(\tau)}{E(t)} R(t, \tau)\, d\tau \tag{1.13}$$

тогда

$$R(t, \tau) = -\frac{E(t)}{E(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta(t, \tau) \tag{1.14}$$

$$\sigma(t) = E(t)\left[\varepsilon(t) + \int_{\tau}^{t} \varepsilon(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta(t, \tau)\, d\tau\right] \tag{1.15}$$

Безразмерную функцию $\Delta(t, \tau)$ назовем функцией релаксации наследственно-стареющего материала. Функции $S(t, \tau)$ и $\Delta(t, \tau)$ определяются по кривым простой ползучести, релаксации и изменению модуля мгновенной деформации $E(t)$.

Из (1.5) следует, что функция ползучести $S(t, \tau)$ удовлетворяет свойствам

$$S(\tau, \tau) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} S(t, \tau) = \Psi(\tau) \tag{1.16}$$

где $\Psi(\tau)$ — некоторая монотонно убывающая функция, характеризующая старение материала. Исходя из этого, для $S(t, \tau)$ можно принять аппроксимирующее выражение, аналогичное (1.3):

$$S(t, \tau) = \Psi(\tau) F(t - \tau) = \Psi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right] \tag{1.17}$$

В этом случае ядро ползучести $\Pi(t, \tau)$ на основании (1.7) определяется выражением

$$\Pi(t, \tau) = \left[\Psi'(\tau) + \gamma\Psi(\tau)\right] e^{-\gamma(t-\tau)} - \Psi'(\tau) \tag{1.18}$$

Соответствующее ядро релаксации $R(t, \tau)$ определим из интегрального уравнения (1.11). Так как ядро этого интегрального уравнения согласно (1.18) является вырожденным, то оно сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial t^2} + \gamma\left[1 + \Psi(t)\right] \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial t} = 0 \tag{1.19}$$

с начальными условиями

$$R(\tau, \tau) = \Pi(\tau, \tau) = \gamma\Psi(\tau) \tag{1.20}$$

$$R_t'(\tau, \tau) = \Pi_t'(\tau, \tau) - \Pi^2(\tau, \tau) = -\gamma\left[\gamma\Psi^2(\tau) + \gamma\Psi(\tau) + \Psi'(\tau)\right] \tag{1.21}$$

Решая уравнение (1.19) с учетом начальных условий (1.20) и (1.21), для резольвенты $R(t, \tau)$ получаем следующее выражение:

$$R(t, \tau) = \lambda\left\{\Psi(\tau) - [\lambda\Psi^2(\tau) + \lambda\Psi(\tau) + \Psi'(\tau)]\int_{\tau}^{t} e^{\lambda(\tau - r)}\,dr\right\} \quad (1.22)$$

где

$$\omega(r, \tau) = \lambda\int_{\tau}^{r}[1 + \Psi(s)]\,ds \quad (1.23)$$

2. *Область нелинейной ползучести.* Следуя Н. Х. Арутюняну [1], примем, что упруго-мгновенные деформации наследственно-стареющего тела линейно связаны с напряжениями, а деформации ползучести — нелинейно, через функцию

$$f[\sigma(\tau)] = \sigma(\tau) + b\sigma^2(\tau) \quad (2.1)$$

Используя принцип наложения, в случае одноосного напряженного состояния для относительной деформации $\varepsilon(t)$ при переменных напряжениях $\sigma(t)$ получим следующее выражение:

$$E(t)\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{\tau_0}^{t} f[\sigma(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}S(t, \tau)\,d\tau \quad (2.2)$$

С учетом (1.7) и (2.1) уравнение (2.2) принимает вид

$$E(t)\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{\tau_0}^{t}\sigma(\tau)\Pi(t, \tau)\,d\tau + b\int_{\tau_0}^{t}\sigma^2(\tau)\Pi(t, \tau)\,d\tau \quad (2.3)$$

Точное решение нелинейного интегрального уравнения (2.3) связано с серьезными математическими трудностями и в настоящее время не найдено. В связи с этим в [1] аналогичное уравнение сводится к нелинейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, решение которого при $E(t) = \text{const}$ находится методом последовательных приближений.

Пользуясь методом, предложенным в [3], найдем приближенное решение нелинейного интегрального уравнения (2.3) в замкнутом виде при переменном модуле $E(t)$.

Введем интегральные операторы

$$\bar{\Pi}\varphi = \int_{\tau_0}^{t}\varphi(\tau)\Pi(t, \tau)\,d\tau, \qquad \bar{R}\varphi = \int_{\tau_0}^{t}\varphi(\tau)R(t, \tau)\,d\tau \quad (2.4)$$

Операторы $\bar{\Pi}$ и $\bar{R}$, согласно (1.9) и (1.10), связаны соотношением

$$\frac{1}{1 + \bar{\Pi}} = 1 - \bar{R} \quad (2.5)$$

Основное уравнение (2.3) в операторной записи примет вид

$$b\bar{\Pi}\varepsilon^2(t) + (1+\bar{\Pi})\sigma(t) - E(t)\varepsilon(t) = 0 \tag{2.6}$$

Рассматривая уравнение (2.6) как квадратное уравнение относительно $\sigma(t)$, получим

$$\sigma = -\frac{1}{2b}\frac{1+\bar{\Pi}}{\bar{\Pi}} + \sqrt{\frac{1}{4b^2}\frac{(1+\bar{\Pi})^2}{\bar{\Pi}^2} + \frac{E\varepsilon}{b\bar{\Pi}}} \tag{2.7}$$

Положительный знак перед радикалом в выражении (2.7) взят, исходя из физических соображений, когда при $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$.

Преобразуем выражение (2.7) к виду

$$\sigma = -\frac{1}{2b}\frac{1+\bar{\Pi}}{\bar{\Pi}} + \frac{1}{2b}\frac{1+\bar{\Pi}}{\bar{\Pi}}\sqrt{1 + 4bE\varepsilon\frac{\bar{\Pi}}{(1+\bar{\Pi})^2}} \tag{2.8}$$

Малый параметр „b" всегда можно выбрать так, чтобы

$$4bE\varepsilon\frac{\bar{\Pi}}{(1+\bar{\Pi})^2} = q < 1 \tag{2.9}$$

Поэтому пользуясь приближенным равенством

$$1 + \sqrt{1+q} \approx 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8} \tag{2.10}$$

для $\sigma(t)$ получим следующее выражение:

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) - bE^2(t)\varepsilon^2(t)\frac{\bar{\Pi}}{(1+\bar{\Pi})^2} \tag{2.11}$$

В зависимости от реологического поведения материала возможны случаи: а) $\bar{\Pi} < 1$; б) $\bar{R} < 1$.

Пользуясь приближенными равенствами в случае а)

$$\frac{\bar{\Pi}}{(1+\bar{\Pi})^2} = \frac{1}{(1+\bar{\Pi})^2} - \frac{1}{(1+\bar{\Pi})^3} \approx \frac{1}{1+2\bar{\Pi}} - \frac{1}{1+3\bar{\Pi}} =$$

$$= 1 - \bar{R}_2 - 1 + \bar{R}_3 = \bar{R}_3 - \bar{R}_2 \tag{2.12}$$

в случае б)

$$\frac{\bar{\Pi}}{(1+\bar{\Pi})^2} = (1-\bar{R})^2 - (1-\bar{R})^3 \approx 1 - 2\bar{R} - 1 + 3\bar{R} = \bar{R} \tag{2.13}$$

где $\bar{R}_2$ и $\bar{R}_3$ — операторы, ядра $R_2(t, \tau)$ и $R_3(t, \tau)$ которых являются резольвентами ядер соответственно $2\Pi(t, \tau)$ и $3\Pi(t, \tau)$, получим следующие замкнутые выражения для $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int_0^t E(\tau)\varepsilon(\tau) R(t, \tau)\, d\tau +$$

$$+ b\int_0^t E^2(\tau)\varepsilon^2(\tau)[R_2(t, \tau) - R_3(t, \tau)]\, d\tau \qquad (2.14)$$

или

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int_0^t [E(\tau)\varepsilon(\tau) + bE^2(\tau)\varepsilon^2(\tau)]\, R(t, \tau)\, d\tau \qquad (2.15)$$

3. *Основные уравнения термоползучести наследственно-стареющих тел.* При постоянной температуре T_0 (комнатная температура) модуль упругости $E(t)$ и функция ползучести $S(t, \tau)$ наследственно-стареющего материала определяются выражениями (1.2) и (1.17). При произвольной температуре $T(x, t) = T_0 + \theta(x, t)$ модуль упругости можно определить из зависимости

$$E(T, t) = E_0(T)[1 - e^{-\gamma(T)t}] \qquad (3.1)$$

где функции $E_0(T)$ и $\gamma(T)$ удовлетворяют условиям

$$E_0(T_0) = E_0, \quad \gamma(T_0) = 1 \qquad (3.2)$$

Функцию $\gamma(T)$ примем в виде

$$\gamma(T) = \frac{1}{t}\int_0^t a[T(x, \tau)]\, d\tau \qquad (3.3)$$

В случае стационарных температур

$$T(x, t) = T(x), \quad \gamma(T) = a(T) \qquad (3.4)$$

Функция $a(T)$, согласно температурно-временной аналогии [2], для многих вязко-упругих материалов и достаточно широком диапазоне изменения температур определяется выражением

$$a(T) = \exp\frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)} \qquad (3.5)$$

где C_1 и C_2 — константы материала.

Из выражения (3.1) видно, что действие температуры эквивалентно трансформированию шкалы времени. Причем эта трансформация пропорциональна $\gamma(T)$.

Введем новую шкалу времени ξ, γ

$$\xi = \xi(x, t) = \varphi[T(x, t)]\, t, \quad \gamma = \xi(x, \tau) = \varphi[T(x, \tau)]\, \tau \tag{3.6}$$

В приведенной шкале времени ξ, γ модуль упругости $E(T, \xi)$ и функция ползучести $S(\xi, \gamma)$ определяются выражениями

$$E(T, \xi) = E_0(T)(1 - e^{-\xi}) \tag{3.7}$$

$$S(\xi, \gamma) = \Psi(\gamma)[1 - e^{-(\xi-\gamma)}] \tag{3.8}$$

Здесь

$$\xi - \gamma = \int_{\tau}^{t} a[T(x, \tau)]\, d\tau \tag{3.9}$$

Таким образом, основное уравнение линейной термоползучести в шкале времени ξ, γ для наследственно-стареющих тел запишется в виде

$$E(T, \xi)[\varepsilon(\xi) - \alpha\Theta(\xi)] = \sigma(\xi) + \int_{\gamma_0}^{\xi} \sigma(\gamma)\, \Pi(\xi, \gamma)\, d\gamma \tag{3.10}$$

где

$$\Pi(\xi, \gamma) = -\frac{\partial}{\partial\gamma} S(\xi, \gamma) \tag{3.11}$$

В шкале времени t, τ уравнение (3.10) принимает вид

$$E(T, \xi(t))[\varepsilon(t) - \alpha\Theta(t)] = \sigma(t) + \int_{\tau_0}^{t} \sigma(\tau)\, \Pi[\xi(t), \xi(\tau)]\, d\tau \tag{3.12}$$

Решение уравнений (3.10) и (3.12) дает напряжения соответственно в приведенной шкале времени ξ, γ и в шкале истинного времени t, τ

$$\sigma(\xi) = E(T, \xi)[\varepsilon(\xi) - \alpha\Theta(\xi)] - \int_{\gamma_0}^{\xi} E(T, \gamma)[\varepsilon(\gamma) - \alpha\Theta(\gamma)]\, R(\xi, \gamma)\, d\gamma \tag{3.13}$$

$$\sigma(t) = E[T, \xi(t)][\varepsilon(t) - \alpha\Theta(t)] - \int_{\tau_0}^{t} E[T, \xi(\tau)][\varepsilon(\tau) - \alpha\Theta(\tau)]\, R[\xi(t), \xi(\tau)]\, d\tau \tag{3.14}$$

Основное уравнение нелинейной термоползучести для наследственно-стареющих тел получим на основании (2.3) с учетом (3.6)

$$E(T, \xi)[\sigma(t) - \alpha\Theta(\xi)] = \sigma(\xi) + \int_{\tau_0}^{\xi} \sigma(\tau_1)\Pi(\xi, \tau_1)\,d\tau_1 + b\int_{\tau_0}^{\xi} \sigma^2(\tau_1)\Pi(\xi, \tau_1)\,d\tau_1 \qquad (3.15)$$

или в шкале истинного времени t, τ

$$E[T, \xi(t)][\sigma(t) - \alpha\Theta(t)] = \sigma(t) - \int_{\tau_0}^{t} \sigma(\tau)\Pi[\xi(t), \xi(\tau)]\,d\tau + b\int_{\tau_0}^{t} \sigma^2(\tau)\Pi[\xi(t), \xi(\tau)]\,d\tau \qquad (3.16)$$

Решение нелинейного уравнения (3.16) получим на основании (2.14) и (2.15) в виде

$$\sigma(t) = E[T, \xi(t)][\sigma(t) - \alpha\Theta(t)] - \int_{\tau_0}^{t} E[T, \xi(\tau)][\sigma(\tau) - \alpha\Theta(\tau)]R[\xi(t), \xi(\tau)]\,d\tau +$$

$$+ b\int_{\tau_0}^{t} E^2[T, \xi(\tau)][\sigma(\tau) - \alpha\Theta(\tau)]^2[R_2[\xi(t), \xi(\tau)] - R_3[\xi(t), \xi(\tau)]]\,d\tau \qquad (3.17)$$

или

$$\sigma(t) = E[T, \xi(t)][\sigma(t) - \alpha\Theta(t)] - \int_{\tau_0}^{t} E[T, \xi(\tau)][\sigma(\tau) - \alpha\Theta(\tau)] + bE^2[T, \xi(\tau)][\sigma(\tau) - \alpha\Theta(\tau)]^2 R[\xi(t), \xi(\tau)]\,d\tau \qquad (3.18)$$

4. *Растяжение бруса массовыми силами.* В качестве примера применения полученных в п. 3 реологических уравнений рассмотрим растяжение бруса массовыми силами при неоднородном нагреве в условиях нелинейной ползучести и старения материала.

Пусть напряжение в сечении x бруса известно $\sigma = \sigma(x, t)$, температура $T = T_0 - \Theta(x, t)$ задана. Тогда приведенное время, согласно (3.6), известно (построен график ξ по t при различных x). Пусть известны также модуль упругости $E(x, t)$ и кривая ползучести в возрасте τ_1 (известна функция ползучести $S(t, \tau_1)$). Требуется найти смещение $u(x, t)$.

Согласно (3.16) имеем разрешающее уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha\Theta(x, t) + \frac{\sigma(x, t)}{E(x, t)} + \frac{1}{E(x, t)}\int_{\tau_0}^{t} [\sigma(x, \tau) + b\sigma^2(x, \tau)]\Pi[\xi(x, t), \xi(x, \tau)]\,d\tau \qquad (4.1)$$

Если поле сил стационарно

$$\sigma(x, t) = \sigma(x)\, H(t - \tau_1) \qquad (4.2)$$

где $H(t - \tau_1)$ — единичная функция Хевисайда, то

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha\Theta(x, t) + \frac{\sigma(x)}{E(x, t)} + \frac{\sigma(x) + b\sigma^2(x)}{E(x, t)}\, S\left[\xi(x, t),\ \xi(x, \tau_1)\right] \qquad (4.3)$$

Интегрируя уравнение (4.3) от нуля до x, получим

$$u(x, t) = \alpha\int_0^x \Theta(x, t)\, dx + \int_0^x \frac{\sigma(x)}{E(x, t)}\, dx +$$

$$+ \int_0^x \frac{\sigma(x) + b\sigma^2(x)}{E(x, t)}\, S\left[\xi(x, t),\ \xi(x, \tau_1)\right] dx \qquad (4.4)$$

В формуле (4.4) исключено жесткое смещение, то есть учтено условие $u(0, t) = 0$.

В заключение отметим, что приведенные в настоящей работе уравнения неизотермической ползучести могут быть обобщены для неоднородно стареющих тел. Для этого можно воспользоваться теорией ползучести, предложенной для таких тел Н. Х. Арутюняном [5].

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступила 3 VI 1976

Դ. Ս. [illegible]

ՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՂ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ն. Խ. Հարությունյանի սողքի տեսության որոշ ձևափոխման և ջերմա-ժամանակային անալոգիայի օգտագործման հիման վրա առաջարկված են ծերացող նյութերի համար ջերմային սողքի հիմնական հավասարումները նյութի հատկությունների վրա ջերմաստիճանի ազդեցության հաշվառմամբ։

Որպես օրինակ դիտարկվել է ձողային ...

ON THERMOVISCOELASTICITY OF HOMOGENEOUSLY AGEING MEDIA

G. S. VARDANIAN

Summary

Some principle equations of thermoviscoelasticity for homogeneous ageing with characteristics depending on temperature are obtained by means of certain modification of N. Chr. Harutunian's creep theory and temperature — time analogy.

A numerical example is presented for a bar under tension by its weight.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
2. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М., ИЛ, 1963.
3. *Розовский М. И.* Об одном способе решения нелинейных уравнений теории ползучести. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1959, т. XII, № 1.
4. *Варданян Г. С.* Вопросы подобия при моделировании ползучести бетона поляризационно-оптическим методом. «Проблемы ползучести и усадки бетона», сб. трудов МИСИ, 1974, № 113, 14—25.
5. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. МТТ, 1976, № 3, 153—164.
6. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. М., Стройиздат, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 6, 1976 Механика

А. М. СИМОНЯН

К РАСЧЕТУ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТРУБ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛОВОМ ПОТОКЕ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Температурная задача о распределении напряжений в трубах в условиях ползучести привлекает внимание исследователей и конструкторов. Задача эта согласно различным реологическим теориям изучалась для стационарных температурных условий; например, в работе [1] она рассматривалась на основе теории старения [2], в работах [3, 4] — на основе теории установившегося течения. Согласно теории пластической наследственности аналогичная задача рассматривалась в работе [5]. При рассмотрении же нестационарных температурных условий, как указано в работе [6], принцип наследственности может быть оправдан лишь для неуменьшающихся во времени температур, поскольку при уменьшении температур в процессе ползучести согласно наследственному принципу ошибочно предсказывается рост деформаций ползучести в направлении, обратном направлению действующих нагрузок, что при существенном уменьшении температур может привести к большим погрешностям.

В работе [7] рассмотрено видоизмененное наследственное уравнение, совпадающее с обычным наследственным при неуменьшающейся температуре, а в случае ее уменьшения предсказывающее «замораживание» затухающей доли деформаций ползучести, что согласуется с экспериментальными данными.

Настоящая работа посвящена определению термонапряженного состояния во вращающейся трубе, когда реологические свойства материала определяются видоизмененным уравнением наследственности и приводится численное сравнение этого решения с решением по обычной наследственной теории.

1. В работе [6] были проведены экспериментальные исследования ползучести стали Х18Н10Т в условиях одноосного растяжения при различных программах ступенчатых изменений температур. На фиг. 1 приведены заимствованные из упомянутой работы экспериментальные кривые ползучести $\varepsilon_c(t)$ (сплошные линии при напряжении 15.6 кГ/мм² и при нахождении в течение 24 час при температуре 700°С, ступенчатом изменении до температуры 650°С и затем, спустя еще 24 часа,— до температуры 600°С. Штриховыми линиями показаны теоретические кривые, построенные согласно наследственному принципу без старения, соответственно двум стадиям ползучести

$$\varepsilon_c(t) = \int_0^t F[\sigma(\tau), T(\tau), t - \tau]\, d\tau \qquad (1.1)$$

где

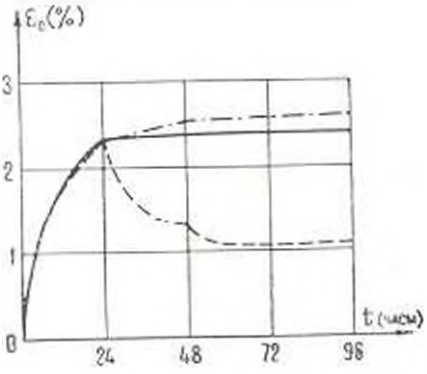
$$F(\sigma,\ T,\ t-\tau)=\alpha(\sigma,\ T)+\beta(\sigma,\ T)\gamma e^{-\beta(t-\tau)}$$

Штрихпунктирными линиями показаны кривые, построенные согласно уравнению в форме [7]

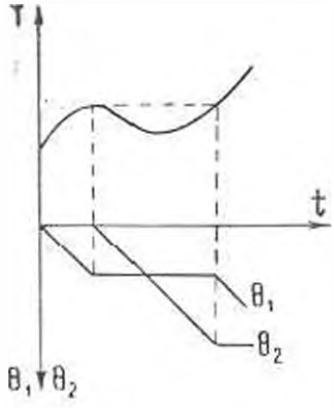
$$\varepsilon_c(t)=\int_0^{\theta_2} F[\sigma(\theta_2-\tau),\ T(\theta_2-\tau),\ \theta_1-\tau]\,d\tau+$$

$$+\int_0^{\theta_1} F_1[\sigma(\theta_1+\tau),\ T(\theta_1+\tau),\ \theta_2-\tau] \qquad (1.2)$$

где $F_1(\sigma,\ T,\ t-\tau)\equiv\alpha(\sigma,\ T)$. Здесь θ_1 — продолжительность действия нагрузки после вычета θ_2 — суммы промежутков времени, наличие и продолжительность которых определяются функцией $T(t)$. Каждый из отмеченных промежутков времени начинается с момента уменьшения температуры и продолжается до момента повторного достижения температурой своего наибольшего значения. На фиг. 2 проиллюстрировано это правило определения θ_1 и θ_2 в зависимости от функции $T(t)$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Из кривых фиг. 1 легко усмотреть, что уравнение (1.2) предсказывает деформации ползучести при уменьшении во времени температур значительно точнее, чем (1.1). К аналогичному результату можно прийти и при рассмотрении других экспериментальных данных [6]. Отметим, что при неуменьшающихся во времени температурах $T(t)$ имеет место $\theta_2=0$ и уравнения (1.1) и (1.2) совпадают.

Реологические соотношения в работе приняты следующими:

$$\varepsilon_r(t)-\varepsilon_0(t)=[\sigma_0(t)-\sigma_1(t)]\,f[\sigma_1(t)]\,\varphi[T(t)]+$$

$$+\int_0^{\theta_2}[\sigma_r(\tau+\theta_2)-\sigma_1(\tau+\theta_2)]\,f[\sigma_1(\tau+\theta_2)]\,\varphi[T(\tau+\theta_2)]\,K_1(\theta_1,\ \tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^{t_0}[\sigma_r(\tau+\theta_1)-\sigma_z(\tau+\theta_1)]f[\sigma_i(\tau+\theta_1)]\varphi[T(\tau+\theta_1)]K_2(t_2,\tau)\,d\tau \qquad (1.3)$$

$$(r,\ \varphi,\ z)$$

где $\sigma_i=\sqrt{\frac{1}{6}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\varphi)^2+(\sigma_\varphi-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6(\tau_{r\varphi}^2+\tau_{\varphi z}^2+\tau_{zr}^2)}}$

$f(\tau)$, $\varphi(T)$, $K_1(t,\tau)$, $K_2(t,\tau)$ — функции, определяющиеся из экспериментов, причем $\varphi(T)$ всегда положительна и может принимать значения лишь в ограниченных пределах $0<\varphi_0<\varphi(T)<\varphi_1$.

Будем полагать, кроме того, что материал трубы является объемно-несжимаемым, что при условии плоской деформации дает

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi=3\alpha\Delta T \qquad (1.4)$$

где $\Delta T=T-T_0$, причем T_0 — температура фиксирования состояния плоской деформации.

2. Рассматривается труба, вращающаяся около собственной оси с угловой скоростью ω, находящаяся под действием $q_1(t)$ и $q_2(t)$ соответственно на внутренней ($r=a$) и наружной ($r=b$) поверхностях. Предполагается, что вплоть до некоторого момента t_0 температура $T(r,t)$ не уменьшается, а тепловой поток меняется непрерывно и монотонно, согласно (2.1)*

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}\geqslant 0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\leqslant 0 \qquad (2.1)$$

Решая уравнения совместности деформаций, используя (1.2) и (1.1), в котором $\theta_1=t$, а также полагая для определенности

$$f(x)=x^{m-1},\qquad m=\frac{1}{n},\qquad 0<n<1 \qquad (2.2)$$

где m — показатель нелинейности, получим

$$\sigma_i(r,t)=\left|\frac{3}{4}\alpha^2\Delta T^{*2}(r,t)+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{3}{2}\frac{\alpha}{r^2}\int_a^r r^2\frac{\partial\Delta T^*(r,t)}{\partial r}dr-\frac{A^*(t)}{r^2}\right|^2\right|^{n/2}|\varphi(T)|^{-n} \qquad (2.3)$$

где одной звездочкой обозначена операция

$$\varphi^*(t)=\varphi(t)-\int_0^t\varphi(\tau)H_1(t,\tau)\,d\tau \qquad (2.4)$$

$H_1(t,\tau)$ — резольвента интегрального ядра $K_1(t,\tau)$, а $A(t)$ — функция, подлежащая определению из краевых условий.

* Отметим, что пусковой температурный режим (2.1) может и отсутствовать, а охлаждение внешней поверхности трубы начаться сразу после нагружения. В этом случае выкладки пункта 2 делаются излишними, а в пункте 3 следует принять $t_0=0$.

Используя уравнения Даламбера

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + r\frac{\gamma\omega^2}{g} = 0 \tag{2.5}$$

где γ — объемный вес материала, а g — ускорение свободного падения, и краевые условия

$$\sigma_r(a, t) = -q_1(t), \quad \sigma_r(b, t) = -q_2(t) \tag{2.6}$$

получим нижеследующее уравнение для определения функции $A^*(t)$:

$$\int_a^b \left\{ \left| \frac{A^*(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2}\int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r}\, dr \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\alpha^2 \Delta T^{*2}(r, t) \right\}^{\frac{k-1}{2}} \left| \frac{A^*(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2}\int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r}\, dr \right| \frac{dr}{r^{2k}[T(r, t)]} =$$

$$= \frac{q_1(t) - q_2(t)}{2} - \frac{\gamma(b^2 - a^2)\omega^2}{4g} \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) решаем модифицированным методом последовательных приближений [5], согласно которому

$$A^*(t) = \lim_{n\to\infty} \eta_n[f_n(t)]$$

$$f_{n+1}(t) = f_0(t) + f_n(t) - B[f_n(t)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

где

$$f_0(t) = \frac{q_1(t) - q_2(t)}{2} + \frac{\gamma(b^2 - a^2)\omega^2}{4g}$$

$$B[f(t)] = \int_a^b \left\{ \left| \frac{\eta[f(t)]}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2}\int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r}\, dr \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3\alpha^2}{4}\Delta T^{*2}(r, t) \right\}^{\frac{k-1}{2}} \left| \frac{\eta[f(t)]}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2}\int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r}\, dr \right| \frac{dr}{r^{2k}[T(r, t)]} \tag{2.9}$$

Для сходимости последовательности $f_n(t)$ при любом t, являющемся здесь параметром, достаточен выбор непрерывной функции $\eta(f)$, которая в области изменения f_n при любом фиксированном t приводит к удовлетворению условия [5]

$$1 - \lambda \leqslant \frac{dB}{df} \leqslant 1 + \lambda, \qquad 0 \leqslant \lambda < 1 \tag{2.10}$$

Принимая

$$\eta(f) = R_0^2 \Phi^*(R_0) + R_0^{2-m} \psi[T(R_0)] \frac{1}{(b-a)^m} (\beta |f|^m \operatorname{sign} f + \beta_1 f + \beta_2) \tag{2.11}$$

где $\Phi^*(r) = \dfrac{3\alpha}{2r^3} \int_a^r r^2 \dfrac{\partial \Delta T^*}{\partial r} dr$, можно показать, что при любых $T(r, t)$ и f подбором R_0 и достаточно малых β, β_1 и β_2 удовлетворяется (2.10). В практических случаях, зачастую, быстрая сходимость (2.8), аналогично [8], имеет место при $R_0 = \dfrac{a+b}{2}$, $\psi = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, что для тонкостенных труб во всяком случае удовлетворяет $0 < \dfrac{\partial B}{\partial f} < 1$.

3. Положим, что, начиная с некоторого момента t_0, внешняя часть трубы остывает до установления стационарного рабочего теплового потока, то есть имеет место

$$\begin{aligned} &T(r, t) < T(r, t_0) \quad \text{при} \quad \rho < r \leqslant b \\ &\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} > 0 \quad \text{при} \quad a \leqslant r < \rho \\ &\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} < 0 \quad \text{при} \quad a < r < b \end{aligned} \tag{3.1}$$

где ρ является границей зоны остывания. Задача рассматривается в некотором ограниченном промежутке времени $t < 0$.

Соотношения (1.1) с учетом (2.2) здесь запишутся так:

$$\varepsilon_r(t) - \varepsilon_\rho(t) = [\sigma_r(t) - \sigma_\rho(t)]\, \sigma_i^{m-1}(t)\, \psi[T(t)] +$$

$$+ \int_0^t [\sigma_r(\tau) - \sigma_\rho(\tau)]\, \sigma_i^{m-1}(\tau)\, \psi[T(\tau)]\, K_1(t, \tau)\, d\tau, \quad a \leqslant r < \rho \quad (r, \rho, z) \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_r(t) - \varepsilon_\rho(t) = [\sigma_r(t) - \sigma_\rho(t)]\, \sigma_i^{m-1}(t)\, \psi[T(t)] + M_r +$$

$$+ \int_0^t [\sigma_r(\tau) - \sigma_\rho(\tau)]\, \sigma_i^{m-1}(\tau)\, \psi[T(\tau)]\, K_2(t, \tau)\, d\tau, \quad \rho < r \leqslant b \quad (r, \rho, z) \tag{3.3}$$

где

$$M_r = \int_0^{t_0} [\sigma_r(\tau) - \sigma_\rho(\tau)]\, \sigma_i^{m-1}(\tau)\, \psi[T(\tau)]\, K_1(t_0, \tau)\, d\tau \quad (r, \rho, z) \tag{3.4}$$

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{r_1}(a, t) = -q_1(t) && \sigma_{r_2}(b, t) = -q_2(t) \\ &\sigma_{r_1}(\rho, t) = \sigma_{r_2}(\rho, t) && \sigma_{\theta_1}(\rho, t) = \sigma_{\theta_2}(\rho, t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

где индекс «1» относится к внутреннему слою трубы, а индекс «2» — к наружному.

Из условий (3.5) можно получить тождественность $A(t)$ для обоих слоев. Используя (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (3.2), (3.3) и (3.5), получим нижеследующее уравнение для определения $A(t)$:

$$\int_a^b \varphi^{-1}[T(r,t)]\left\{\left[\frac{A^*(t)}{r^2}-\Phi^*(r,t)\right]^2+\frac{3}{4}\alpha^2\Delta T^{**}(r,t)\right\}^{\frac{\alpha-1}{2}}\left|\frac{A^*(t)}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\Phi^*(r,t)\right|\frac{dr}{r}+\int_a^b \varphi^{-1}[T(r,t)]\left|\frac{A^{**}(t)}{r^2}-\Phi^{**}(r,t)+\frac{M_{**}^{**}}{2}\right|^{\alpha}+$$

$$+\frac{3}{4}\alpha^2\left[T^{**}(r,t)+(T^*(r,t_0)-T(r,t_0))\left(1-\int_{t_0}^{t}H_2(t,\tau)\,d\tau\right)\right]^2\Bigg\}^{\frac{\alpha-1}{2}}\times$$

$$\left|\frac{A^{**}(t)}{r^2}-\Phi^{**}(r,t)-\frac{M_{**}^{**}}{2}\right|\frac{dr}{r}=$$

$$=\frac{q_1(t)-q_2(t)}{2}+\frac{\gamma(b^2-a^2)\omega^2}{4g} \tag{3.6}$$

где двумя звездочками обозначена операция

$$f^{**}(t)=f(t)-\int_{t_0}^{t}f(\tau)\,H_2(t,\tau)\,d\tau$$

а $H_2(t,\tau)$ — резольвента вольтерровского ядра $K_2(t,\tau)$.

Между $A^*(t)$ и $A^{**}(t)$ имеется связь

$$A^{**}(t)=A^*(t)+\int_0^t A^*(\tau)\varkappa(t,\tau)\,d\tau \tag{3.7}$$

где

$$\varkappa(t,\tau)=\begin{cases}K_1(t,\tau)-\int_{\tau}^{t}H_2(t,\xi)K_1(\xi,\tau)\,d\xi, & \tau\leqslant t_0\\ K_1(t,\tau)-H_2(t,\tau)-\int_{t_0}^{t}H_2(t,\xi)K_1(\xi,\tau)\,d\xi, & \tau>t_0\end{cases}$$

Запишем (3.6) в виде

$$\Pi[A^*(t),\ A^{**}(t)]=f_0(t) \tag{3.8}$$

Решение $A^*(t)$ уравнения (3.8) ищем в классе ограниченных функций

$(A^*(t) < C_0 < \infty)$, имеющих конечное число точек разрыва в области $(0, \theta)$.

Положим

$$\tilde{A}_\nu(t_k) = \int_0^t A^*(\tau)\varkappa(t, \tau)\,d\tau + \sum_{i=0}^{k-1} A^*(t_i)\varkappa(t_k, t_i)\frac{\theta - t_0}{\nu} \tag{3.9}$$

Очевидно, что при $\nu \to \infty$

$$|\tilde{A}_\nu(t) + A^*(t) - A^{**}(t)| \leqslant \delta_\nu \to 0 \tag{3.10}$$

Рассмотрим уравнение

$$\Pi[s^*(t_k),\ s^*(t_k) + \tilde{s}_\nu(t_k)] = f_0(t_k), \quad t_k > t_0 \tag{3.11}$$

при условии $s^*(t) = A^*(t)$ для $t \leqslant t_0$, которое запишется в виде

$$\int_0^t \psi^{-\mu}[T(r, t_k)]\left\{\left[\frac{s^*(t_k)}{r^2} - \Phi^*(r, t_k)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\alpha^2\Delta T^{*2}(r, t_k)\right\}^{\frac{\mu-1}{2}}\left[\frac{s^*(t_k)}{r^2} - \Phi^*(r, t_k)\right]\frac{dr}{r} +$$

$$+ \int_r^b \psi^{-\mu}[T(r, t_k)]\left\{\left[\frac{s^*(t_k)}{r^2} + \sum_{i=0}^{k-1} s^*(t_i)\varkappa(t_k, t_i)\frac{\theta - t_0}{\nu r^2} + \Omega(r, t_k)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\alpha^2\left[T^{**}(r, t_k) + \left(1 - \int_{t_0}^{t_k} H_1(t_k, \tau)\,d\tau\right)(T^*(r, t_0) - T(r, t_0))\right]^2\right\}^{\frac{\mu-1}{2}} \times$$

$$\times\left[\frac{s^*(t_k)}{r^2} + \sum_{i=0}^{k-1} s^*(t_i)\varkappa(t_k, t_i)\frac{\theta - t_0}{\nu r^2} + \Omega(r, t_k)\right]\frac{dr}{r} = f_0(t_k) = f_{0k} \tag{3.12}$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

где

$$r^2\Omega(r, t_k) = \int_0^{t_0} A^*(\tau)[K_1(t_k, \tau) - K_1(t_0, \tau)]\,d\tau - r^2\Phi^{**}(r, t_k) +$$

$$+ r^2\left(1 - \int_{t_0}^{t_k} H_2(t_k, \tau)\,d\tau\right)\int_0^{t_0} H_1(t_0, \tau)\Phi(r, \tau)\,d\tau -$$

$$- \int_0^{t_0} A^*(\tau)\int_{t_1}^{t_k} H_2(t_k, \xi)[K_1(\xi, \tau) - K_1(t_0, \tau)]\,d\xi\,d\tau$$

Решение $s^*(t)$ ищем в классе ограниченных функций, имеющих конечное число точек разрыва ($s^*(t) < C_* < \infty$). Для решения (3.12) для последовательных моментов t_k посредством методики (2.8) функцию $\tau_{t_k}(f)$, аналогично (2.11), представим в виде

$$\tau_k(f) = R_k^2 \Phi^*(R_k, t_k) + \beta_k |f|^m \operatorname{sign} f + \beta_k' f + \beta_k'' \tag{3.13}$$

Через $B_k(f)$ обозначим левую часть (3.12) при замене $s^*(t_k)$ функцией $\tau_k(f)$

$$B_k(f) = \Pi[\tau_k(f),\ \tau_k(f) + \hat{s}_*(t_k)]$$

С помощью ряда опускаемых здесь громоздких выкладок можно показать, что при условиях (2.1) и (3.1) и при любых f всегда возможен подбор R_k и достаточно малых β_k, β_k' и β_k'', приводящий к выполнению (2.10) и, следовательно, к сходимости (2.8) в любой момент времени. В практических случаях, как и принято в нижеприведенном численном примере, удобно брать $R_k = \dfrac{a+b}{2}$, $\beta_k = \dfrac{R_k^{2-m}}{(b-a)^m}\varphi[T(R_k,\ t_k)]$, $\beta_k' = \beta_k'' = 0$, что для тонкостенных труб во всяком случае удовлетворяет $0 < \dfrac{\partial B_k}{\partial f} < 1$. В таком случае

$$s^*(t_k) = \lim_{n \to \infty} \tau_k(f_{nk}), \qquad f_{nk} = f_{0k} = f_{n-1,k} - B(f_{n-1,k})$$

Покажем теперь, что при любом t_k $s^*(t_k)$ является приближенным значением $A^*(t_k)$ — решения уравнения (3.8). Для этого рассмотрим нижеследующие оценки. Из (3.6) и (3.8) получим

$$|\Pi(A^*(t),\ A^*(t) + \hat{A}_*(t)) - \Pi(A^*(t),\ A^*(t) + \hat{A}_*(t) + \varepsilon(t))| < C\varepsilon_0 \tag{3.14}$$
$$|\varepsilon(t)| < \varepsilon_0$$

где

$$C \leqslant \varphi_0^{-m} \int_a^b \left| \frac{1-3\alpha}{2} \right| \Delta T^{**}(r,\ t_k) - \left(1 - \int_{t_0}^{t_k} H_2(t_k, \tau)\, d\tau\right) -$$
$$- \int_0^{t_k} \Delta T(r, \tau) H_2(t_k, \tau)\, d\tau \,\Big|^{m-1} \frac{dr}{r^2} {}^{*}$$

---

* Ограниченность C доказывается при использовании условий (2.1), (3.1) и очевидного свойства ядра релаксации $1 - \int_0^t H(t, \tau)\, d\tau > 0$.

Из (3.11) и (3.12) получим также

$$|\Delta s^*(t_k)| \leqslant C_1 |\Pi(s^*(t_k) + \Delta s^*(t_k),\ s^*(t_k) + \Delta s^*(t_k) + \tilde{s}_\nu(t_k)) -$$

$$- \Pi(s^*(t_k),\ s^*(t_k) + \tilde{s}_\nu(t_k))| \qquad (3.15)$$

где

$$C_2 \leqslant \frac{\gamma_1^2}{\mu} \left\{ \int_a^\beta \left\{ \left| \frac{C_0}{r^2} + \max_t |\Phi^*(r,\ t)| \right|^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 \max_t \Delta T^{*2}(r,\ t) \right\}^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{dr}{r} \right\}^{-1} < \infty$$

Принимая в (3.15) $\Delta s^*(t_k) = A^*(t_k) - s^*(t_k)$, используя (3.9), (3.10), (3.11), получим

$$|A^*(t_k) - s^*(t_k)| < C_1 |\Pi[A^*(t_k),\ A^*(t_k) + \tilde{s}_\nu(t_k)] -$$

$$- \Pi[A^*(t_k),\ A^{**}(t_k)]| \leqslant C_1 \{ |\Pi[A^*(t_k),\ A^*(t_k) + \tilde{s}_\nu(t_k)] -$$

$$- \Pi[A^*(t_k),\ A^*(t_k) + \tilde{A}_\nu(t_k)]| + |\Pi[A^*(t_k),\ A^*(t_k) + \tilde{A}_\nu(t_k)] -$$

$$- \Pi[A^*(t_k),\ A^{**}(t_k)]| \} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left| C \sum_{i=0}^{k-1} |A^*(t_i) - s^*(t_i)|\, |\varkappa(t_k,\ t_i)| \frac{\theta - t_0}{\nu} + C|\delta_\nu| \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\nu} \sum_{i=0}^{k-1} |A^*(t_i) - s^*(t_i)| + C_1 C \delta_\nu \qquad (3.16)$$

где

$$M = (\theta - t_0) \max |\varkappa(t_k,\ t_i)|\, C_1 C$$

Применяя последовательно рекуррентную формулу (3.18) для членов i, получим

$$|A^*(t_k) - s^*(t_k)| \leqslant CC_1 \left\{ 1 + \frac{M}{\nu} \left[1 + \left(\frac{M}{\nu} + 1 \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{M}{\nu} + 1 \right)^2 + \cdots + \left(\frac{M}{\nu} + 1 \right)^{k-2} \right] \right\} \delta_\nu =$$

$$= CC_1 \left[1 + \frac{M}{\nu} \frac{1 - \left(1 + \frac{M}{\nu}\right)^{k-1}}{1 - \left(1 + \frac{M}{\nu}\right)} \right] \delta_\nu \leqslant CC_1 \delta_\nu e^M \qquad (3.17)$$

откуда вытекает $s^*(t_k) \to A^*(t_k)$ при $\nu \to \infty$, то есть $s^*(t_k)$ является приближенным решением уравнения (3.6).

Напряжения $\sigma_r(r, t)$ определяются формулами

$$\sigma_r(r, t) = -q_1(t) - \frac{\gamma\omega^2}{2g}(r^2 - a^2) +$$

$$+ 2\int_a^r \psi^{-1}[T(r, t)]\left\{\left[\frac{A^*(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2}\int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r} dr\right]^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\alpha^2 \Delta T^{*2}(r, t)\right\}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{A^*(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2}\int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r} dr\right]\frac{dr}{r}, \quad r \leqslant \xi$$

$$\sigma_r(r, t) = -q_2(t) + \frac{\gamma\omega^2(b^2 - r^2)}{2g} - 2\int_r^b \psi^{-1}[T(r, t)]\left\{\left[\frac{A^{**}(t)}{r^2} -\right.\right.$$

$$\left. - \Phi^{**}(r, t) + \frac{M_{\xi\xi}^{**}}{2}\right]^2 + \frac{3}{4}\alpha^2\left[T^{**}(r, t) +\right.$$

$$\left.\left. + (T^*(r, t_0) - T(r, t_0))\left(1 - \int_{t_0}^{t} H_2(t, \tau)\, d\tau\right)\right]^2\right\}^{\frac{n-1}{2}} \times$$

$$\times\left[\frac{A^{**}(t)}{r^2} - \Phi^{**}(r, t) + \frac{M_{\xi\xi}^{**}}{2}\right]\frac{dr}{r}, \quad r \geqslant \xi$$

Напряжения $\sigma_\varphi(r, t)$ определяются по формуле (2.5).

4. *Численный пример.*

Рассматривается труба ($a = 50$ см, $b = 55$ см), вращающаяся с угловой скоростью $\omega = 12.64$ *об/сек* и находящаяся под действием внутреннего давления $q_1 = 4$ *кг/см*^{2}. Предполагается, что в течение $t_0 = 24$ *часа* температура трубы равнялась 650°C, причем она равна T_0, от которой и отсчитывается ΔT. Вслед за этим создается стационарный тепловой поток, при котором $T(b) = 600$°C, а $T(a) = 700$°C. Положим, что материал трубы имеет нижеследующие механические характеристики:

$$\gamma = 7.8\ \text{г/см}^3, \quad \mu = \frac{1}{3}, \quad \alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ \text{град}^{-1},$$

$$\psi(T) = 8.8 \cdot 10^{-11} e^{-\frac{26400}{T}}\ \frac{\text{см}^4}{\text{кг}}$$

$$K_1(t, \tau) = 0.083 + 0.165\, e^{-0.1(t-\tau)}\ \frac{1}{\text{час}}; \quad K_2(t, \tau) = 0.083\ \frac{1}{\text{час}}$$

Для резольвент ядер K_1, K_2 а также для функции $\varkappa$ путем двоякого обращения Лапласа получены выражения

$$H_1(t, \tau) = 0.0065\, e^{-0.0252(t-\tau)} + 0.2415\, e^{-0.328(t-\tau)}$$

$$H_2(t, \tau) = 0.083\, e^{-0.083(t-\tau)}$$

$$\varkappa(t, \tau) = 0.971\, e^{-0.1(t-\tau)} - 0.806\, e^{-0.183(t-\tau)}$$

При решении (3.6) в выражении (3.13) было принято $\beta_k^1 = \beta_k^2 = 0$, $R_k = \frac{a+b}{2}$, $\gamma_k = \frac{R_k^{1+m}}{(b-a)^m} \gamma[T(R_k, t_i)]$. Отметим, что незначительные изменения $A^*(t)$ приводят к существенным изменениям правой части (3.6). Например, для $t = t_0$ изменение $A^*(t)$ от значения —25.970 до 25.852 приводит к изменениям правой части от 39.587 до 45.904. Тем не менее после 4—5 приближений по (2.8) были получены значения $A^*(t)$, приводящие к ничтожным погрешностям правой части уравнения.

Вычисленные значения $\sigma_r(r, t)$ и $\sigma_\theta(r, t)$ приведены в таблице.

Таблица значений $\sigma_r(r, t)$ и $\sigma_\theta(r, t)$

$\sigma_r(r, t)$

r(см) / t	50	51	52	53	54	55
$t<t_0$	—4.0	—3.069	—2.138	—1.375	—0.673	0
$t=t_0$	—4.0	—9.073	—13.923	—14.059	—9.046	0
t_0+1 час	—4.0	—8.700 (—8.718)	—13.316 (—13.208)	—13.503 (—13.003)	—8.333 (—7.971)	0
t_0+3часа	—4.0	—8.170 (—8.237)	—12.019 (—12.217)	—11.459 (—11.233)	—7.308 (—6.899)	0
t_0+10час	—4.0	—7.485 (—7.248)	—10.874 (—9.981)	—9.925 (—8.500)	—6.636 (—5.189)	0
t_0+25час	—4.0	—6.923 (—6.803)	—9.787 (—8.332)	—8.564 (—7.024)	—5.022 (—4.285)	0
$t=\infty$	—4.0	—3.775	—3.317	—2.631	—1.535	0

$\sigma_\theta(r, t)$

$t<t_0$	94.179	93.505	93.153	92.682	92.211	91.704
$t=t_0$	—207.980	—219.073	—156.640	242.418	424.003	633.334
t_0+1 час	—192.039 (—190.500)	—202.750 (—200.718)	—139.316 (—128.408)	213.046 (231.105)	408.843 (398.608)	562.965 (543.071)
t_0+3часа	—163.850 (—166.540)	—170.171 (—172.393)	—117.313 (—61.247)	141.123 (205.960)	357.985 (350.552)	507.606 (478.357)
t_0+10час	—128.647 (—118.710)	—137.485 (—119.248)	—101.984 (27.722)	214.584 (176.442)	341.716 (258.884)	461.244 (374.066)
t_0+25час	—101.676 (—96.735)	—109.393 (—93.303)	— 22.022 (56.540)	200.837 (156.048)	279.801 (240.363)	359.980 (320.080)
$t=\infty$	52.310	64.581	78.883	101.058	125.916	151.204

В скобках даны значения соответствующих напряжений, определенных при распространении (3.2) на всю область (a, b). Значения напряжений при $t=\infty$ в известной мере условны, так как при определении деформации ползучести принимались пренебрежимо малыми по сравнению с геометрическими размерами сечения трубы.

Как видно из приведенной таблицы, при учете аномалий наследственной ползучести максимальные напряжения оказываются большими; для

рассмотренного численного примера наибольшая разница имеет место при $t - t_0 = 10$ час и составляет 23%.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 IV 1974

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ՀՈՍՔՈՒՄ ՊՏՏՎՈՂ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԱՍԻՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկված է լարումների բաշխումը պտտվող խողովակներում, որոնք գտնվում են արագ փոփոխական ջերմային հոսքի մեջ։ Որպես ռեոլոգիական առնչություններ վերցված են ոչ գծային ժառանգականության տեսության ձևափոխված հավասարումները, որոնք հաշվի են առնում ջերմաստիճանի փոքրացման ընթացքում սողքի անոմալիաները։ Տված է ժառանգականության ձևափոխված և սովորական հավասարումների հիման վրա ստացված լուծումների թվային համեմատությունը։

ON CALCULATION OF A REVOLVING TUBE IN A NONSTATIONARY HEAT STREAM WITH REGARD TO NONLINEAR GREEP

A. M. SIMONIAN

Summary

The problem of distribution of stress in the revolving tube in a variable heat stream is examined. The modified equations of nonlinear theory of heredity accounting for creep anomaly at decreasing temperature are taken for rheological relations.

Numerical comparison of the solutions obtained on the basis of modified and ordinary equations of heredity is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bailey R.* The utilization of creep test data in engineering design. Proc. Inst. Mech. Eng., v. 131, 1935.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
4. *Локошевский И. А., Листвинский Г. Х.* Ползучесть неравномерно нагретой толстостенной трубы под действием внутреннего давления. Инж. ж., МТТ, 1966, № 2.
5. *Симонян А. М.* Температурная задача цилиндрических труб в условиях пластической наследственности. Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. н., 1965, т. XVIII, № 4.
6. *Симонян А. М.* Исследование ползучести стали Х18Н10Т при переменных температурах. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. XXV, № 2.
7. *Симонян А. М.* К вопросу о неизотермической ползучести хромоникелевой стали. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. XXV, № 6.
8. *Симонян А. М.* О некоторых температурных задачах теории пластической наследственности. Прочность и пластичность. М., «Наука», 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Физика XXIX, № 6, 1976 Механика

К. А. ЛУРЬЕ, А. В. ФЕДОРОВ

УСЛОВИЕ ВЕЙЕРШТРАССА В ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ СВЕРХЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ СЛАБО НЕОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ

Рассматривается задача об оптимальной (в смысле минимума полного сопротивления) форме тонких тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком идеального газа. Исследование проводится в плоском и осесимметричном случаях; предполагается, что на поверхности тела заданы изопериметрические ограничения общего вида. Рассмотрены безударные течения и течения с присоединенными ударными волнами. Управлением считается наклон касательной к поверхности тела. В работе для сформулированной задачи построено необходимое условие Вейерштрасса в предположении, что обтекаемое тело достаточно тонкое и расчет газодинамических параметров можно произвести, основываясь на асимптотической теории Уитхема [1], развитой им для слабо-неоднородных течений. Необходимые условия стационарности получаются при этом с помощью метода множителей Лагранжа, примененного к точным уравнениям газовой динамики [2]. Особенности условий стационарности в задачах с присоединенными волнами были указаны А. В. Шипилиным [3]. Вопрос о выяснении смысла экстремума в задачах об оптимальной форме тел в сверхзвуковом потоке газа рассматривался ранее Ю. Д. Шмыглевским [4] и К. Г. Гудерлеем с сотрудниками [5] применительно к задачам, допускающим переход к контрольному контуру. Для более общего случая, когда такой переход невозможен, в работе А. В. Федорова [6] было получено необходимое условие Лежандра, отвечающее слабым вариациям наклона контура.

1. *Постановка задачи.* В работе рассматривается сверхзвуковое обтекание плоских и осесимметричных тел, безударное (фиг. 1) и с присоединенной ударной волной (фиг. 2). На фиг. 1 ab—контур искомого тела, ac и bc—характеристики соответственно первого и второго семейств. На фиг. 2 ab—контур тела, ac—присоединенная ударная волна, bc—характеристика второго семейства, d—точка излома контура; dm и dn—характеристики первого семейства, ограничивающие волну разрежения $dmcnd$. Набегающий поток в обеих схемах предполагается равномерным и параллельным оси x со скоростью W_∞ и числом Маха M_∞; отношение максимального поперечного размера тела к его длине считается достаточно малым (рассматриваются тонкие тела). Это дает возможность воспользоваться при оценке параметров возмущенного течения результатами, полученными Уитхемом [1] для слабо-неоднородных потоков.

Пусть u и v—проекции скорости на оси x и y, p—давление, ρ—плотность, ψ—функция тока, причем

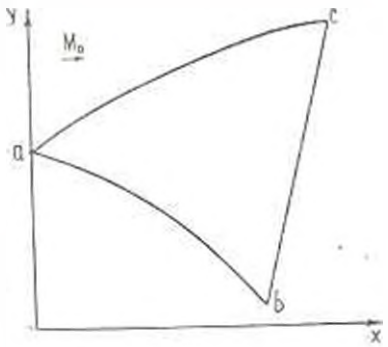
$$d\gamma = y^{\nu}\rho\,(u\,dy - v\,dx),$$

где $\nu = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях.

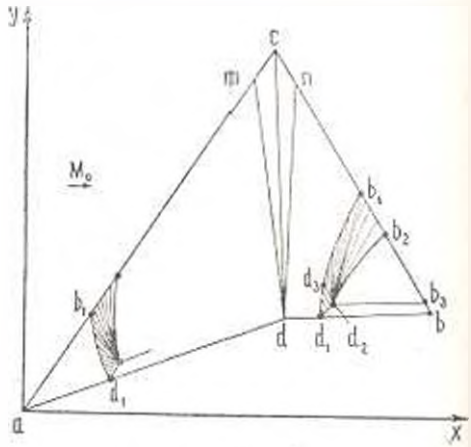
Стационарное течение газа внутри области влияния описывается уравнениями

$$L_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^{\nu}\rho}{} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \qquad L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{v} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{y^{\nu}\rho v} = 0$$
$$\frac{w^2}{2} + \frac{\varkappa p}{(\varkappa-1)\rho} = \frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}; \qquad \frac{p}{\rho^{\varkappa}} = \psi^{\varkappa-1}(\psi) \tag{1.1}$$

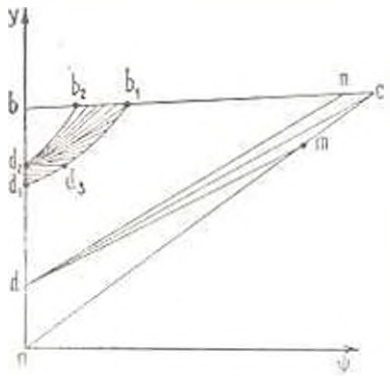
Здесь $\varkappa$—показатель адиабаты; $w^2 = u^2 + v^2$; $\psi(\psi)$—энтропийная функция.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Волновое сопротивление выражается функционалом

$$\gamma = \int_{a}^{b} y^{\nu}\rho[x(y),\ y]\,dy$$

Положения точек a и b считаются фиксированными.

Изопериметрическое условие, наложенное на контур тела, имеет вид

$$R_0 = \int\limits_{ab} f[y, x(y), x'(y)]\, dy \tag{1.2}$$

где $x(y)$ — функция, описывающая контур тела, а $x' = \dfrac{dx}{dy}$.

Вдоль ab выполняется условие непротекания

$$L_0 = x'(y) - u/v = 0 \tag{1.3}$$

Все переменные (зависимые и независимые) считаются безразмерными.

Ставится следующая оптимальная задача: найти функцию $x(y)$, реализующую минимум функционала χ при выполнении уравнений (1.1) в области abc и условий (1.2), (1.3) вдоль контура ab.

В рассмотренных до сих пор примерах безударного обтекания условиям стационарности удавалось удовлетворить гладким оптимальным контуром. Иначе обстоит дело для течений с присоединенными ударными волнами. В этом случае оптимальный контур содержит, вообще говоря, бесконечное число изломов, сгущающихся к передней точке тела [3]. При исследовании условия Вейерштрасса достаточно рассмотреть контур с одним изломом (фиг. 2).

2. *Необходимое условие Вейерштрасса.* Это условие будет выведено для течения с присоединенной ударной волной (фиг. 2, 3). Проводимый ниже анализ справедлив и для безударных течений.

Поскольку оптимальный контур тела содержит излом, уравнения (1.1) в области abc должны учитываться разрывными множителями Лагранжа [7]. На фиг. 2, 3 характеристика cd — линия разрыва множителей Лагранжа; предполагается, что в области влияния нет других таких линий [3].

Функционал Лагранжа имеет вид

$$I = \int\limits_{ad} [y^\nu p + \lambda_0^{(1)} L_0 + \nu f]\, dy + \int\limits_{db} [y^\nu p + \lambda_0^{(2)} L_0 + \nu f]\, dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \iint\limits_{S_i} (h_1^{(i)} L_1 + h_2^{(i)} L_2)\, d\psi\, dy$$

Здесь S_1 — область adc, S_2 — область dbc; ν, $\lambda_0^{(i)}(y)$, $h_j^{(i)}(\psi, y)$ — множители Лагранжа в областях S_i.

Условия стационарности I приведены в [3].

Управлением считается наклон касательной к поверхности тела ab. Поскольку вывод условия Вейерштрасса основан на использовании сильных вариаций наклона на малом участке поверхности тела (фиг. 2), схема течения в допустимом режиме усложняется. Это усложнение связано с образованием дополнительных ударной волны (d_1b_1) и волны разрежения $(d_1d_2b_2b_1)$.

При выводе формулы для полного приращения функционала I необходимо учитывать, что параметры течения в допустимом режиме терпят разрыв вдоль ударной волны d_1b_1. Имеем (точка d_1 может лежать как справа от точки излома d, так и слева от нее (фиг. 2)).

$$\delta I = \int\limits_{ab} \left[y^{\nu}\delta p + \lambda_0\left(\delta x' - \delta\frac{u}{v} \right) + \lambda\delta f - h_1 y^{\nu}\delta p - h_2\delta\frac{u}{v} \right] dy +$$

$$+ \int\limits_{ab+cb+d_1b_1} \left(y^{\nu} h_1\delta p + h_2\delta\frac{u}{v} \right) dy + \left(h_1\delta u - \frac{h_2}{y^{\nu}}\delta\frac{1}{\rho v} \right) d\psi +$$

$$+ \int\limits_{ac} \left(y^{\nu}\Delta h_1\delta p + \Delta h_2\delta\frac{u}{v} \right) dy - \left(\Delta h_1\delta u - \frac{\Delta h_2}{y^{\nu}}\delta\frac{1}{\rho v} \right) d\psi +$$

$$+ \iint\limits_{S} \left(- y^{\nu} h_{1\psi}\delta p + h_{1y}\delta u - h_{2\psi}\delta\frac{u}{v} - \frac{h_{2y}}{y^{\nu}}\delta\frac{1}{\rho v} \right) d\psi\, dy \qquad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы у $\lambda_0^{(1)}$ и $h_i^{(1)}$ опущены; $\Delta h_i = h_i^{(2)} - h_i^{(1)}$; $S = S_1 + S_2$.

Примем величины p, u/v, ψ за зависимые переменные задачи; при этом величины u и $(\rho v)^{-1}$, стоящие в (2.1) под знаком полной вариации, представляются в виде $u = z_1\left(p, \frac{u}{v}, \psi\right)$ и $(\rho v)^{-1} = z_2\left(p, \frac{u}{v}, \psi\right)$ с помощью двух последних соотношений (1.1).

В точках ударной волны ac все газодинамические функции зависят только от σ — угла наклона ударной волны к оси x.

Если воспользоваться условиями стационарности и равенствами, дающими связь между дифференциалами dy и $d\psi$ на контуре ab, ударной волне ac и характеристиках dc и bc, то формула (2.1) для δI может быть представлена в виде

$$\delta I = \int\limits_{ab} \lambda Df\, dy + \int\limits_{ac} DT(\sigma)\, d\psi + \int\limits_{dc} \left(\Delta h_1 Dz_1 - \frac{\Delta h_2}{y^{\nu}} Dz_2 \right) d\psi +$$

$$+ \int\limits_{cb} \left(h_1 Dz_1 - \frac{h_2}{y^{\nu}} Dz_2 \right) d\psi + \iint\limits_{S} \left(h_{1y} Dz_1 - \frac{h_{2y}}{y^{\nu}} Dz_2 \right) d\psi\, dy +$$

$$+ \int\limits_{d_1b_1} \left(y^{\nu} h_1\delta p + h_2\delta\frac{u}{v} \right) dy + \left(h_1\delta u - \frac{h_2}{y^{\nu}}\delta\frac{1}{\rho v} \right) d\psi \qquad (2.2)$$

где

$$T(\sigma) = \left[y^{\nu} h_1(\psi, y)\, p(\sigma) + h_2(\psi, y)\frac{u}{v}(\sigma) \right] \frac{1}{y^{\nu} W_{\sigma}} +$$

$$+ h_1 u(\sigma) - \frac{h_2(\psi, y)}{y^{\nu}}\frac{1}{\rho v}(\sigma)$$

а символом $DG(W)$ обозначена разность ($W=(W_1, W_2, \ldots, W_s)$)

$$DG(W) = G(W + \delta W) - G(W) - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial G}{\partial W_i} \delta W_i$$

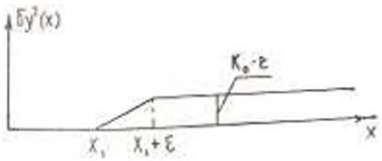
Вариация управления выбирается следующим образом: предполагается, что функция $y^2(x)$ получает приращение $\delta y^2(x)$, показанное на фиг. 4 (x_1, y_1—координаты точки d_1). Величина ε (фиг. 4) считается малым параметром задачи. При этом поток слева от ударной волны d_1b_1 не возмущен; функция $y(x)$ меняется на величину

$$\delta y(x) = \frac{\delta y^2(x)}{2y(x)} + o(\varepsilon) = O(\varepsilon)$$

а наклон $y'(x)$ получает приращение

$$\delta y'(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \dfrac{k_0}{2y_1} - O(\varepsilon), & x_1 < x < x_1 + \varepsilon \\ O(\varepsilon), & x > x_1 + \varepsilon \end{cases}$$

Соответствующие формулы для приращений $\delta x(y)$, $\delta x'(y)$ обратных функций очевидны.



Фиг. 4.

Целесообразность описанного выше способа варьирования будет очевидна из дальнейших выкладок, поскольку управлением удобно считать не $\dfrac{dy(x)}{dx}$, а $\dfrac{dy^2(x)}{dx}$.

Для того, чтобы выделить главную по ε часть в формуле (2.2) для δI и получить тем самым условие Вейерштрасса, необходимо знать положение ударной волны d_1b_1 и приращения газодинамических величин в области возмущенного течения. Соответствующие вычисления будут проведены на основе работы [1] для осесимметричных течений; результаты анализа распространяются и на случай плоских течений. Найдем сначала положение ударной волны d_1b_1 и газодинамические приращения на ней, считая течение около тонкого тела слабо неоднородным. Уравнения характеристик первого семейства и ударной волны в таком потоке [1] имеют вид

$$x = \alpha_0 y - kF(r)\,(y^{1/2} - y_1^{1/2}) + r$$

$$\frac{1}{k\,(y^{1/2} - y_1^{1/2})} = \frac{F(r_2) - F(r_1)}{r_2 - r_1} \tag{2.3}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\,[F(r_2) + F(r_1)]$$

Здесь $\alpha_0 = (M_0^2 - 1)^{1/2}$; $k = 2^{-\frac{1}{2}}(1+\varkappa)\,M_0^4\alpha_0^{-2}$, $r(x, y)$ — характеристический параметр первого семейства; значение r на контуре тела принимается равным $x - \alpha_0 y$; r_1 и r_2 — значения параметров характеристик, пересекающих ударную волну с разных сторон в точке с ординатой y; функция $F(r)$ вычисляется по формуле

$$2F(r) = \int_0^r \frac{[y^{+}(x)]''}{\sqrt{r - x}}\,dx + \sum_{(i)} \Delta\,[y^{+}(x_i)]'\left(\frac{2}{\alpha_0 y_i}\right)^{1/2} h\left(\frac{r - x_i}{\alpha_0 y_i}\right) \tag{2.4}$$

Замечание. Эта формула показывает, что удобно выбрать в качестве управления $\dfrac{dy^{+}(x)}{dx}$, а не $\dfrac{du(x)}{dx}$.

Первое слагаемое в (2.4) соответствует гладкой части контура, а второе отражает вклад точек излома (x_i, y_i): символом Δ обозначен скачок величины $\dfrac{d}{dx}\,y^{+}(x)$ в точке излома; график функции $h(x)$ приведен в [1], стр. 344.

Пусть $F = F_0$ для исходного (непроварьированного) контура. Допустимый контур в рассматриваемом случае будет характеризоваться функцией

$$F(r) = F_0(r) + F_1(r) \tag{2.5}$$

где через $F_1(r)$ обозначен вклад точек излома d_1 и d_2 (фиг. 2): интегральное слагаемое в (2.4) не вносит дополнительного вклада в F, так как $\dfrac{d^2}{dx^2}(\delta y^{+}) = 0$. Функция $F_1(r)$ имеет вид, приведенный на фиг. 5 ($\bar r = x_1 - \alpha_0 y_1$, $r_0 = \bar r + \varepsilon\left(1 - \alpha_0 y_1'(x_1) - \dfrac{\alpha_0 k_0}{2y_1}\right) + O(\varepsilon^2)$ — значение r в волне разрежения $d_1 d_3 b_1 b_2$).

Рассмотрим точки ударной волны, лежащие на участке $d_1 b_1$, где происходит взаимодействие ударной волны с волной разрежения $d_1 d_3 b_1 b_2$. В этих точках на основании (2.3) и (2.5) имеем ($r_1 < \bar r < r_0 = r_2$, $F_1(r_1) = 0$)

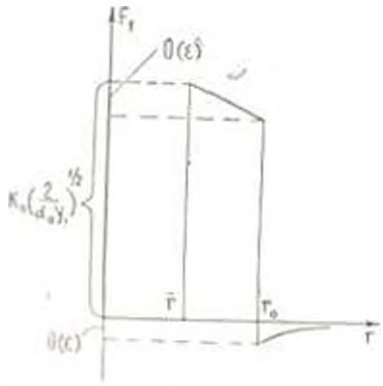
$$\frac{1}{k\,(y^{1/2} - y_1^{1/2})} = \frac{F_0(r_0) + F_1(r_0) - F_0(r_1)}{r_0 - r_1}$$

$$\int_{r_1}^{r_0} (F_0 + F_1)\,dr = \frac{1}{2}(r_0 - r_1)\,[F_0(r_0) + F_1(r_0) + F_0(r_1)]$$

Разлагая в этих формулах величины $F_3(r_1)$ и $\int_{r_1}^{r_0} F_3\,dr$ в ряды по степеням $(r_0 - r_1)$ и учитывая, что $F_3(r) = 0$ при $r \le r_1$, найдем

$$\int_{r_1}^{r_0} F_3 dr = \frac{1}{2}(r_0 - r_1)F_3(r_0) + O(r_0 - r_1)^2$$

$$\frac{1}{k(y^{1/2} - y_1^{1/2})} = F_0(r_0) + \frac{F_0'(r_0)}{r_0 - r_1}(2. \quad + O(r_0 - r_1)$$



Фиг. 5.

Уравнение участка d_1b_1 ударной волны на основании (2.6) и первого из равенств (2.3) может быть представлено в следующем виде:

$$x = R(y, r_0) - \left| \varepsilon k_0 a^2 \left(y^{1/2} - y_1^{1/2} \right) \left| \frac{1}{k(y^{1/2} - y_1^{1/2})} - F_0(r_0) \right|^{1/2} + O(\varepsilon)$$

$$R(y, r_0) = z_1 y - kF_0(r_0)(y^{1/2} - y_1^{1/2}) + r_0 \qquad (2.7)$$

$$a^2 = k \left| 2\left(1 - z_0 y_1 - \frac{z_0 k_0}{2y_1}\right) \right|^{1/2} \left(\frac{2}{z_0 y_1}\right)^{1/4}$$

Приращения газодинамических величин в формуле (2.2), стоящие под знаком интеграла вдоль d_1b_1, могут быть найдены из (2.7) и соотношений на ударной волне. В самом деле, поскольку слева от d_1b_1 поток не возмущен, имеем

$$p + \delta p = G_1(\operatorname{ctg} z_1, p, u, v), \quad \frac{u}{v} + \delta\frac{u}{v} = G_2(\operatorname{ctg} z_1, p, u, v)$$

$$\frac{1}{\rho v} + \delta\frac{1}{\rho v} = G_3(\operatorname{ctg} z_1, p, u, v), \quad u + \delta u = G_4(\operatorname{ctg} z_1, p, u, v) \qquad (2.8)$$

Здесь z_1 — угол наклона линии d_1b_1 к оси x; функции G_i приведены в [8] (стр. 13).

Из формул (2.7), (2.8) найдем (ω—угол наклона характеристики невозмущенного потока к оси x)

$$\delta p = G_1(\operatorname{ctg} z_1, p, u, v) - G_1(\operatorname{ctg}\omega, p, u, v)$$

$$\operatorname{ctg} z_1 - \operatorname{ctg}\omega = -\left| \varepsilon k_0 a^2 \frac{d}{dy} \left| (y^{1/2} - y_1^{1/2}) \right| \frac{1}{k(y^{1/2} - y_1^{1/2})} - F_0(r_0) \right|^{1/2} \qquad (2.9)$$

В (2.9) сохранены главные по ε члены; выражения для приращений

$\frac{u}{v}$, $\frac{1}{v}$, δu могут быть получены из (2.9) заменой функции G_1 соответственно на G_2, G_3, G_4.

Формулы (2.9) верны на участке d_1b_1: в фиксированной точке этого участка сила ударной волны, как видим, имеет порядок $|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}$ при $\varepsilon \to 0$. В точке d_1 сила ударной волны при $\varepsilon \to 0$ есть конечная величина; то же самое верно для любой точки отрезка d_1d_2.

Перейдем к оценке слагаемых, входящих в формулу для приращения функционала (2.2). Интеграл по контуру ab в этой формуле содержит только вариации геометрических параметров и имеет поэтому порядок ε. Предположим сначала, что точка d_1 (фиг. 3) лежит на участке d_1b_1 контура ab; тогда интегралы по линиям ac и dc в (2.2) исчезают. Интеграл по ударной волне d_1b_1 всегда равен нулю, поскольку порознь обращаются в нуль коэффициенты при h_u и h_v (последнее вытекает из соотношений Гюгонио с учетом связи между дифференциалами dy и $d\eta$ на ударной волне[8]). Остается оценить интегралы по области S и по характеристике bc. Первый из них сводится к интегралу по области, ограниченной контуром $d_1b_1b_2$, поскольку в оставшейся части S поток не возмущен. Интеграл по полосе $d_1d_2b_2b_1$ разобьем на два интеграла: по части полосы, лежащей выше уровня y_{b_1} (фиг. 3), и по оставшемуся участку полосы, примыкающему к точке d_1. Последний интеграл берется по области площадью $O(\varepsilon^2)$, а подынтегральная функция в нем порядка единицы. Что касается первого интеграла, то он оценивается сверху величиной

$$\int_0^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\eta \int_{y_{d_1}+\varepsilon\eta}^{y_{b_1}} \left| h_v Dz_1 - \frac{h_u}{y'} Dz_2 \right| dy \leqslant A_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{y_{d_1}+\varepsilon\eta}^{y_{b_1}} dy +$$

$$+ A_2 \int_{y_{d_1}+\varepsilon^{\frac{3}{2}}}^{y_{b_1}} \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{y^{1+\zeta} - y_1^{1+\zeta}}\, dy = A_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}-\zeta} - A_4 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \ln \varepsilon$$

где положительная постоянная ζ сколь угодно мала; α, β, q, A_i — константы. При переходе этой оценки использованы формулы (2.7), (2.9) и то обстоятельство, что главные члены в выражениях для Dz_1 и Dz_2 квадратичны по входящим в них малым приращениям (при $u \geqslant u_1 + \beta\varepsilon - q\varepsilon^{\frac{1}{2}}$).

На основании сказанного интеграл по полосе $d_1d_2b_2b_1$ оказывается величиной $o(\varepsilon)$.

Найдем оценки приращений газодинамических функций в области $d_1b_1b_2$ (фиг. 3). На характеристике d_1b_1 в соответствии с (1.1) приращение

[8] Прямое доказательство этого можно убедиться, вводя потенциалы z^1, z^2 с помощью системы

$$z^1_y = y^\nu p; \quad z^1_x = u, \quad z^2_x = \frac{u}{v}; \quad z^2_y = -\frac{1}{y^\nu v}$$

заменяющей первые два уравнения (1.1). Сделанное утверждение равносильно непрерывности потенциалов z^1, z^2 на ударной волне.

любой газодинамической величины имеет порядок ε (значение F_1 на d_2b_2 есть $O(\varepsilon)$. Вдоль участка d_2b приращение $\delta\alpha = O(\varepsilon)$, так как $F_1|_{d_2b} = O(\varepsilon)$ (фиг. 5); кроме того

$$\delta\theta = \delta\left(\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right)\Big|_{d_2b} = O(\varepsilon)$$

Оценки приращений газодинамических величин в области d_2b_2b могут быть получены подобно тому, как это сделано в [3] при выводе условия Лежандра. Анализ линеаризованных уравнений движения, дополненных граничными условиями на d_2b_2 и d_2b, показывает, что вариации газодинамических величин имеют порядок ε в d_2b_2b; при этом отброшенные при линеаризации слагаемые оказываются величинами порядка $o(\varepsilon)$. Проведенные рассуждения позволяют установить, что двойной интеграл в формуле (2.2) имеет порядок $\varepsilon^{3/2-\gamma}$, где $\gamma > 0$ сколь угодно мало.

Интеграл по замыкающей характеристике bc в выражении для δI имеет порядок $\varepsilon^{3/2}$, так как газодинамические приращения не превосходят величины $O(\varepsilon)$ на участке bb_2, величины $O(\varepsilon^{1/2})$ на участке b_2b_1, а длина b_2b_1 есть $O(\varepsilon^{1/2})$.

Если начальная точка d_1 принадлежит участку ad контура ab, то, действуя аналогично предыдущему, можно показать, что двойной интеграл и интегралы по линиям ac, dc, bc в (2.2) не превосходят по порядку величины $\varepsilon^{3/2-\gamma}$.

Таким образом, выражение (2.2) для δI может быть представлено в виде

$$\delta I = \gamma \int_{d_2b_2}^{b} \left| f(y, x, x' + \delta x') - f(y, x, x') - \frac{\partial f}{\partial x'}\delta x' \right| dy + o(\varepsilon) \qquad (2.10)$$

Из (2.10) следует необходимое условие минимума I (условие Вейерштрасса)

$$\gamma \left[f(y, x, x' + \delta x') - f(y, x, x') - \frac{\partial f}{\partial x'}\delta x' \right] \geq 0 \qquad (2.11)$$

Это условие* равносильно требованию выпуклости (вогнутости) функции f по переменной x' в зависимости от знака γ, который определяется в результате нахождения оптимального контура на основе условий стационарности.

Предшествующий вывод существенно основан на предположении о малости ε по сравнению с k_0. Это фундаментальное предположение по существу предписывает схему возмущенного течения, которое (фиг. 2) состоит из невозмущенной области I (ad_1b_1c), области II ($d_1d_2d_3$), в которой нет взаимодействия между ударной волной d_1b_1 и волной разрежения $d_2d_3b_1b_2$, области III ($d_2d_3b_1b_2$) взаимодействия между этими волнами и области IV слабых возмущений за последней характеристикой d_2b_2 веера разрежения. Представляет интерес эволюция этой схемы при уменьшении параметра k_0.

* Условие Вейерштрасса для плоских течений имеет такой же вид.

Допустим, что $k_* \to 0$ вместе с ε, причем отношение $k_*/\varepsilon \ll 1$. Тогда область II вырождается в полоску (точка d_* на d_1b_1 лежит вне области влияния abc), ударная волна — в характеристику набегающего потока, а газодинамические приращения в II стремятся к значениям, найденным из линейной теории. Последнее вытекает из того, что в плоскости годографа ударная поляра и эпициклоида имеют касание второго порядка, а внутри области II выражения для приращений (порядка k_*) в линейном и нелинейном вариантах имеют одну и ту же форму [1] с разными значениями характеристических параметров; эта разница имеет порядок k_*^2, так как в плоскости x, y расстояние между характеристиками возмущенного и невозмущенного потоков при одном y есть $O(k_*^2)$. При расчете приращений в области II теория Уитхема дает, таким образом, (при малых k_*) поправку порядка $o(k_*)$ к соответствующим значениям из линейной теории. Переход от нелинейной теории к линейной в области II происходит равномерно (по k_*); аналогичное утверждение справедливо для области IV, где приращения газодинамических величин имеют порядок εk_* согласно линейной и нелинейной теориям.

Что касается области III, то здесь соответствующий переход неравномерен [9]. В то время как в линейной теории приращения газодинамических функций изменяются скачком от величины k_* до $k_*\varepsilon$ на последней характеристике полоски, в нелинейной теории этот переход совершается плавно в волне Прандтля-Майера. При уменьшении k_* область III, занятая этой волной, стягивается к характеристике невозмущенного потока, выходящей из точки d_* (фиг. 3); приращения газодинамических величин в волне Прандтля-Майера стремятся к соответствующим приращениям в слабой (звуковой) волне разрежения, описываемой линейной теорией. Предельная характеристика, отвечающая этой волне, образует правую границу полоски, используемой в линейной теории; левой границей этой полоски является характеристика невозмущенного потока, представляющая собой предельное положение ударной волны, выходящей из точки d_*.

Таким образом, при достаточно малых k_* главная по параметрам ε, k_* часть приращения функционала будет содержать при линейном и нелинейном описаниях интеграл по характеристической полоске первого семейства и интегралы по участкам контура ab и замыкающей характеристики bc, которые рассматриваемая полоска отсекает от линии ab и bc (предполагается, что начальная точка d_1 лежит на участке db контура ab). Требование неотрицательности этой главной части выражает условие Лежандра, которое содержит интеграл по характеристике первого семейства и два внеинтегральных слагаемых в точках пересечения этой характеристики с контуром ab и замыкающей характеристикой bc.

Если величина k_* не является малой по сравнению с ε, то линейная теория неприменима, а нелинейная теория, учитывающая взаимодействие между ударной волной и волной Прандтля-Майера, показывает, что главная по параметрам часть приращения функционала сосредоточена на участке контура ab, представляющего собой область сильного (порядка k_*) изменения наклона ab. Условием оптимальности в данном случае является условие Вейерштрасса.

Отметим, что в условие Лежандра для точек ad контура ab (фиг. 2, 3) входят интегралы по характеристикам, происхождение которых связано с отражением возмущений от ударной волны ac и контура тела ab, а также интегралы по линиям тока, обусловленные возмущениями энтропии [6] (этот результат получен на основе линейной теории в общем случае для нетонких тел). Если при расчете возмущенного движения для точек контура ad воспользоваться теорией Уитхема при $k_{\omega}/\varepsilon \ll 1$, то соответствующее условие оптимальности будет содержать только один интеграл по характеристике первого семейства, соединяющей начальную точку d_1 с ударной волной ac. Указанное явление объясняется тем, что при обтекании тонких тел возмущения, отраженные от присоединенной ударной волны ac, а также энтропийные возмущения являются величинами третьего порядка малости относительно силы ударной волны ac.

В заключение рассмотрим случай, когда функция f линейна по переменной x'. Условие Вейерштрасса (2.11) при этом вырождается, то есть выполняется в слабом смысле, а условие Лежандра, вообще говоря, не вырождается [3]. Это означает, что в частном случае, когда

$$f = H_1(y, x) + H_2(y, x)\, x'$$

условие Лежандра оказывается сильнее условия Вейерштрасса.

Ленинградский физико-технический
институт им. А. Ф. Иоффе

Поступила 10 V 1976

[illegible]

[illegible]

Ամփոփում

[illegible]

THE WEIERSTRASS CONDITION IN OPTIMAL PROBLEMS OF HYPERSONIC GAS DYNAMICS OF SLIGHTLY NON-UNIFORM FLOWS

K. A. LURIE, A. V. FEDOROV

Summary

The problem is considered of optimal bodies providing minimal wave drag in hypersonic flow of an ideal gas. Both plane and axisymmetric cases are discussed, and arbitrary isoperimetrical conditions are supposed to be prescribed on the unknown surface of the thin body. Also, continuous flows as well as those with attached shock waves are analysed, and inclination of a tangent to the unknown boundary is taken for a control function. The necessary conditions of stationarity can be obtained by traditional technique of Lagrange multipliers applied to the exact equations of gas dynamics. The necessary condition of Weierstrass is derived for this problem and this one is compared with the Legendre condition.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitham G. B.* The flow pattern of a supersonic projectile. Comm. Pure Appl. Math., 1952, 5.
2. *Гудерлей К. Г., Армитейдж Дж.* Общий метод определения оптимальных сверхзвуковых ракетных сопел. Сб. переводов «Механика», № 6, М., ИЛ, 1963.
3. *Шапиро Л. В.* Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1966, вып. 4.
4. *Шмыглевский Ю. Д.* Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.
5. *Guderley K. G., Tabak D., Breiter M. C., Bhutani O. P.* Continuous and discontinuous solutions for optimum thrust nozzles of given length. Journ. Optim. Theory Appl., 1973, vol. 12, No. 6.
6. *Федоров А. В.* Условие Лежандра в оптимальных задачах сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
7. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
8. *Шмыглевский Ю. Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. Вычисл. Центра АН СССР, М., 1963.
9. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., Мир, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 6, 1976 Механика

СОВМЕСТНЫЙ СЕМИНАР

Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени математического института им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР и Института механики АН Армянской ССР, посвященный памяти академика Н. И. Мусхелишвили

По инициативе Президиумов АН Грузинской ССР и АН Армянской ССР с 21 по 25 сентября 1976 года в Ереване—Арзакане проходил второй совместный семинар Математического института АН Грузинской ССР и Института механики АН Армянской ССР по вопросам механики сплошной среды.

В работе семинара приняли участие 25 научных сотрудников обоих институтов.

При открытии семинара со вступительным словом к присутствующим обратился вице-президент АН Армянской ССР академик АН Армянской ССР С. А. Амбарцумян.

Выступление заместителя директора Тбилисского математического института Г. Ф. Манджавидзе было посвящено научной, педагогической и организационной деятельности директора Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени математического института им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР, почетного президента АН Грузинской ССР, председателя Национального Комитета СССР по теоретической и прикладной механике, почетного академика АН Армянской ССР, академика Н. И. Мусхелишвили.

В докладе А. И. Каландия сообщалось о методе функции влияния в теории упругости и его применении к задаче об изгибе полукруглой пластинки, заделанной по дуговому краю и свободной от опор по прямолинейному краю.

Вопросы некоторых обобщений двумерных задач теории упругости обсуждались в докладе Е. И. Оболашвили. В работе вводятся понятия поверхностных деформированного и напряженного состояний и получены условия их существования.

А. А. Баблоян и А. М. Мкртчян выступили с докладами о плоских контактных задачах для прямоугольника при наличии участков полного сцепления и полосы, лежащей на двух жестких опорах с учетом трения.

Вопросы проектирования пластических оболочек наименьшего веса обсуждались в сообщении Р. М. Киракосяна.

Применению теории потенциалов к решению некоторых трехмерных граничных задач связанной термоупругости для тел, ограниченных несколькими поверхностями, был посвящен доклад Т. В. Бурчуладзе.

В докладе Р. Д. Бантури приводилось решение третьей основной задачи теории упругости для двусвязных областей, ограниченных ломаными.

О некоторых вопросах высокотемпературной ползучести металлов было посвящено сообщение А. М. Симоняна.

Сообщение о магнитоупругих колебаниях токонесущей пластинки было сделано К. Б. Казаряном.

С докладом об оптимальных приближениях в задачах на собственные значения для вариационных методов выступил С. Н. Кукуджанов.

О проникании твердого тела в анизотропную упругую среду сделал сообщение А. Г. Багдоев.

Некоторым контактным задачам о передаче нагрузки от стрингеров малой толщины к бесконечной упругой полосе с вертикальными разрезами и к бесконечной пластинке с круговым отверстием были посвящены сообщения С. М. Мхитаряна, К. Л. Агаяна и С. С. Шагиняна.

Э. Х. Григоряном было сделано сообщение о некоторых динамических контактных задачах для одной и двух полуплоскостей, усиленных упругими накладками малой толщины.

Все доклады и сообщения сопровождались обсуждениями.