ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1976

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

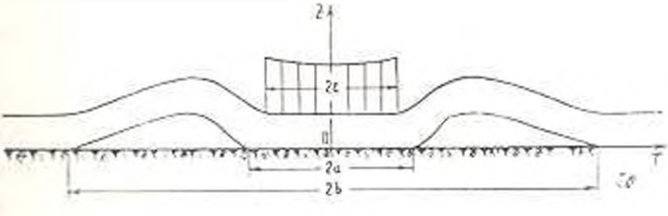
Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

В. С. НИКИШИН, Г. С. ШАПИРО

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ, ЛОКАЛЬНО ПРИЖАТОГО К ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Рассматриваются две контактные задачи теории упругости для слоя прижатого к упругому полупространству под действием локальной осесимметричной нагрузки, приложенной на верхней поверхности слоя. В одном случае слой предполагается весомым, а в другом — невесомым. В обоих случаях трение между слоем и основанием отсутствует.

Под действием нагрузки весомый слой отходит от основания в кольцевой области $a<r<b$. Радиусы a и b неизвестны и подлежат определению из условия равенства нулю контактного давления на окружных контурах $r=a$ и $r=b$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Невесомый слой предполагается закрепленным на бесконечности, так что после приложения к нему нагрузки напряжения и перемещения на бесконечности остаются равными нулю. В таком случае невесомый слой под действием нагрузки отходит от основания в кольцевой области $a<r<b$, как и весомый слой. Однако, условие равенства нулю контактного давления используется только на контуре $r=a$ для определения радиуса a. Нижняя поверхность слоя и поверхность полупространства свободны от напряжений как в кольцевой области $a<r<b$, в которой слой отходит от полупространства, так и в области их соприкасания $r\geqslant b$. Поэтому радиус b устанавливается автоматически численным решением задачи.

В настоящей работе построены точные решения осесимметричных задач о весомом и невесомом слоях произвольной толщины. В обоих случаях упругие характеристики слоя E_1, ν_1 и полупространства E_0, ν_0 задаются произвольно. Обе задачи сводятся к неоднородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Интегральное уравнение, соответствующее весомому слою, определено на полуоси и содержит два неизвестных параметра. Интегральное уравнение, соответствующее невесомому слою, определено на отрезке конечной длины и содержит один неизвестный параметр. В обоих случаях неоднородные интегральные уравнения Фредгольма эфективно разрешимы численными методами. Приведены примеры численного решения задачи о невесомом слое.

Приближенные решения задачи о невесомом слое даны в работах [1, 2]. В первой из них слой рассматривается как тонкая пластинка и решение строится на основе теории пластин, а во второй применяется вариационный метод. Осесимметричная и плоская задачи о невесомом слое в точной постановке рассмотрены в работах [3, 4]. В них исходные уравнения сведены к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого существует, однако при ограничительном условии, накладываемом на упругие свойства материалов слоя и полупространства. Плоская задача о весомом слое рассмотрена в работе [5], в которой исходные уравнения сведены к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, решенному приближенно вариационным методом.

§ 1. *Построение общих решений осесимметричной задачи теории упругости для слоя и полупространства*

Введем безразмерные переменные $\rho = r/a$, $t = z/H$ (H — толщина слоя) и примем начало отсчета цилиндрической системы координат ρ, t на граничной плоскости полупространства. Величина отношения $\lambda = H/a$ является характерным параметром задачи.

Общие решения задачи теории упругости для слоя и полупространства без учета их веса строятся с помощью функции напряжений Лява и представляются через интеграл Ханкеля [6]. Выпишем необходимые для дальнейшего изложения нормальные и касательные напряжения и нормальные перемещения в слое и полупространстве

$$\sigma_{zi} = \int_0^\infty \beta \Delta_{\sigma i}(t, \beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta, \qquad \tau_{zi} = \int_0^\infty \beta \Delta_{\tau i}(t, \beta) J_1(\rho\beta)\, d\beta$$

$$\frac{E_i}{(1+\nu_i)\, a} w_i = \int_0^\infty \Delta_{wi}(t, \beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.1}$$

Здесь в случае слоя ($i = 1$)

$$\begin{aligned}
\Delta_{\sigma 1}(t, \beta) &= -[A_1(\beta) + (\beta\lambda t - 1 + 2\nu_1) B_1(\beta)]\, e^{-\beta\lambda(1-t)} + \\
&+ [C_1(\beta) + (\beta\lambda t + 1 - 2\nu_1) D_1(\beta)]\, e^{-\beta\lambda t} \\
\Delta_{\tau 1}(t, \beta) &= [A_1(\beta) + (\beta\lambda t - 2\nu_1) B_1(\beta)]\, e^{-\beta\lambda(1-t)} + \\
&+ [C_1(\beta) + (\beta\lambda t - 2\nu_1) D_1(\beta)]\, e^{-\beta\lambda t} \\
\Delta_{w1}(t, \beta) &= -\{A_1(\beta) + [\beta\lambda t - 2(1 - 2\nu_1)] B_1(\beta)\}\, e^{-\beta\lambda(1-t)} - \\
&- \{C_1(\beta) + [\beta\lambda t + 2(1 - 2\nu_1)] D_1(\beta)\}\, e^{-\beta\lambda t}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

а в случае полупространства ($i = 2$)

$$\Delta_{\sigma 2}(t,\ \beta) = -\left[A_2(\beta) + (\beta t - 1 + 2\nu_2)\, B_2(\beta)\right] e^{\beta t}$$

$$\Delta_{\tau 2}(t,\ \beta) = \left[A_2(\beta) + (\beta t + 2\nu_2)\, B_2(\beta)\right] e^{\beta t} \tag{1.3}$$

$$\Delta_{w2}(t,\ \beta) = -\left[A_2(\beta) + [\beta t - 2(1 - 2\nu_2)]\, B_2(\beta)\right] e^{\beta t}$$

Касательные напряжения на граничных поверхностях слоя (верхней и нижней) и полупространства примем равными нулю

$$\tau_{rz1}(\rho,\ t)|_{t=1} = \tau_{rz1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \tau_{rz2}(\rho,\ t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.4}$$

Известные нормальные напряжения на внешней граничной плоскости записываются в форме

$$\sigma_{z1}(\rho,\ t)|_{t=1} = P_1(\rho) + P_1^*(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.5}$$

где $P_1(\rho)$ — произвольно заданная функция интенсивности нормальной нагрузки, а $P_1^*(\rho)$ — некоторая функция интенсивности малой дополнительной нагрузки, введенной для обеспечения сходимости интеграла (1.1) для осевых перемещений в слое ($i=1$) [7, 8].

Учитывая равенство осевых нормальных напряжений в слое и полупространстве на их общей границе $t=0$, запишем

$$\sigma_{z1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \sigma_{z2}(\rho,\ t)|_{t=0} = P_0(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.6}$$

где $P_0(\rho)$ — пока неизвестная функция.

Представим функции $P_0(\rho)$ и $P_1(\rho)$ через интеграл Ханкеля

$$P_i(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{P}_i(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta \quad (i = 0,\ 1) \tag{1.7}$$

где трансформанты Ханкеля выражаются формулами

$$\bar{P}_i(\beta) = \int_0^\infty \rho P_i(\rho)\, J_0(\rho\beta)\, d\rho \quad (i = 0,\ 1) \tag{1.8}$$

Функцию $P_1^*(\rho)$ представим через интеграл специального вида

$$P_1^*(\rho) = \int_0^\infty \beta f(\beta)\, \Delta_{w1}(1,\ \beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.9}$$

где $\Delta_{w1}(1,\ \beta)$ — функция $\Delta_{w1}(t,\ \beta)$ (1.2) при $t=1$, стоящая под знаком интеграла (1.1) для нормальных перемещений в слое на внешней граничной плоскости, а $f(\beta)$ — некоторая непрерывная функция, введенная для обеспечения сходимости интеграла (1.1) для $w_1(\rho,\ t)$.

Подставляя формулы (1.1), (1.2), (1.7) и (1.9) в краевые условия (1.4)—(1.6) для слоя, получим систему из четырех уравнений для неизвестных функций $A_1(\beta)$, $B_1(\beta)$, $C_1(\beta)$, $D_1(\beta)$, разрешимую на всей полуоси $\beta \geqslant 0$. Определяя из этой системы выражения функций $A_1(\beta)$, $B_1(\beta)$, $C_1(\beta)$, $D_1(\beta)$ по правилу Крамера и подставляя их в (1.2), получим представление общего решения для слоя через трансформанты Ханкеля $\overline{P_0}(\beta)$, $\overline{P_1}(\beta)$ и функцию $f(\beta)$. Аналогично, подставляя формулы (1.1), (1.3) и (1.7) для $i=2$ и краевые условия (1.4) и (1.6) для полупространства, получим систему уравнений для $A_2(\beta)$ и $B_2(\beta)$, из которой находим $A_2(\beta) = -2\nu_2 \overline{P}_0(\beta)$, $B_2(\beta) = \overline{P}_1(\beta)$. Внося последние равенства в формулы (1.3), получим простые выражения для напряжений и перемещений в полупространстве через $\overline{P}_0(\beta)$. Выпишем необходимые для дальнейшего изложения осевые напряжения и перемещения в слое и полупространстве на их общей граничной плоскости $t=0$:

$$\sigma_{z1}(\rho, t)|_{t=0} = \sigma_{z2}(\rho, t)|_{t=0} = \int_0^\infty \beta \overline{P}_0(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.10}$$

$$\frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)a} w_1(\rho, t)|_{t=0} = \int_0^\infty \Delta_{01}(\beta) \overline{P}_1(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta -$$

$$- \int_0^\infty \Delta_{00}(\beta) \overline{P}_0(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.11}$$

$$\frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)a} w_2(\rho, t)|_{t=0} = \int_0^\infty \overline{P}(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.12}$$

Функции $\Delta_{01}(\beta)$ и $\Delta_{00}(\beta)$ в (1.11) имеют вид

$$\Delta(\beta)\Delta_{01}(\beta) = 2e^{-\beta\lambda}[1 - e^{-2\beta\lambda} + \beta\lambda(1 + e^{-2\beta\lambda})]$$

$$\Delta(\beta)\Delta_{00}(\beta) = 1 - e^{-4\beta\lambda} + 4\beta\lambda e^{-2\beta\lambda} - 2(1-\nu_1)f(\beta)(1-e^{-2\beta\lambda})^2 \tag{1.13}$$

$$\Delta(\beta) = (1-e^{-2\beta\lambda})^2 - 4(\beta\lambda)^3 e^{-2\beta\lambda} - 2(1-\nu_1)f(\beta)(1-e^{-4\beta\lambda} + 4\beta\lambda e^{-2\beta\lambda})$$

В (1.11) требуется сходимость каждого интеграла в отдельности при произвольных $P_i(\rho)$ $(i=0,1)$, представленных интегралами Ханкеля. При $f(\beta)=0$ и, следовательно, при $P_1^*(\rho)=0$ оба интеграла (1.11) расходятся в нижнем пределе, так как при $\beta \to 0$ имеем $\Delta_{0i}(\beta) \approx 6(\beta\lambda)^{-3}$, $\overline{P}_i(\beta) \approx F/(2\pi a^2)$ $(i=0, 1)$, где F — результирующее усилие осевых нормальных напряжений на граничных плоскостях слоя $t=0$ и $t=1$. Сходимость обоих интегралов (1.11) в нижнем пределе обеспечивает функция $f(\beta)$, введенная единственно с этой целью через дополнительную нагрузку $P_1^*(\rho)$ (1.9). Для сходимости интегралов (1.11) достаточно потребовать, чтобы $f(0) \neq 0$. Кроме того, от $f(\beta)$ требуется, чтобы функция $\Delta(\beta)$ (последнее соотношение (1.13)) не обращалась в нуль на всей полуоси $0 \leq \beta < \infty$, а интенсивность дополнительной нагрузки $P_1^*(\rho)$ при всяком $\rho \in [0, \infty)$ и ее результирующее усилие $F^* =$

были достаточно малыми по абсолютной величине. Всем этим требованиям удовлетворяет, например, функция (ε, k, n — положительные константы)

$$f(\beta) = -\varepsilon (k^2 + \beta^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-n\beta} \tag{1.14}$$

Все подынтегральные функции общего решения (1.1) для слоя, выраженные описанным выше методом через $f(\beta)$ и $\overline{P}_i(\beta)$ ($i = 0, 1$), непрерывны и ограничены на всей полуоси $0 \leqslant \beta < \infty$. Пусть модуль $\Delta_{\varkappa 1}(1, \beta)$ ограничен сверху числом $M > 0$, тогда из интегрального представления (1.9) и его обращения с учетом (1.14) находим оценки

$$|P_1^*(\rho)| < \varepsilon n^{-2} k^{-3} M \quad (0 \leqslant \rho < \infty), \quad |F^*| < 2\varepsilon n^2 k^{-3} M$$

При достаточно малом ε и больших k, n модуль $P_1^*(\rho)$ при всех $\rho \in [0, \infty)$ и модуль F^* могут быть сделаны пренебрежимо малыми.

Построенные выше формулы для напряжений и перемещений в слое учитывают только внешнюю нагрузку и не учитывают собственный вес слоя. Приведем теперь формулы для напряжений и перемещений в слое, возникающих только от действия собственного веса, с учетом принятой системы координат [9]

$$\begin{gathered} \sigma_{r1в} = \sigma_{\theta 1в} = -\frac{\nu_1 \sigma t}{1-\nu_1}, \quad \sigma_{z1в} = -\sigma(1-t), \quad \tau_{rz1в} = 0 \\ u_{1в} = \frac{a\nu_1 \sigma\rho}{E_1}, \quad w_{1в} = -\frac{a\sigma t}{E_1}\left[1 - \frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{2(1-\nu_1)} t\right] \end{gathered} \tag{1.15}$$

где $\sigma = \gamma H$, γ — вес единицы объема материала слоя. Напряжения и перемещения в весомом слое, возникающие от действия внешней нагрузки и собственного веса, находятся путем суперпозиции

$$\begin{gathered} \sigma_{i1}^* = \sigma_{i1} + \sigma_{i1в} \quad (i = r, \theta, z), \quad \tau_{rz1}^* = \tau_{rz1} + \tau_{rz1в} \\ u_1^* = u_1 + u_{1в}, \quad w_1^* = w_1 + w_{1в} \end{gathered} \tag{1.16}$$

Вес слоя оказывает постоянное давление $P = -\sigma$ на граничную плоскость полупространства $t = 0$ и вызывает в полупространстве следующие напряжения и перемещения:

$$\sigma_{z2}^* = -\sigma, \quad \sigma_{r2}^* = \sigma_{\theta 2}^* = \tau_{rz2}^* = 0, \quad u_2^* = \frac{a\nu_2 \sigma\rho}{E_2}, \quad w_2^* = -\frac{a\sigma t}{E_2} \tag{1.17}$$

Напряжения и перемещения в полупространстве (1.17) от действия веса слоя надо наложить на построенные выше напряжения и перемещения от нагрузки $P_0(\rho)$, переданной через слой внешней нагрузкой $P_1(\rho)$, в результате получим для напряжений и перемещений в полупространстве с учетом веса слоя

$$\sigma_{i2}^{*} = \sigma_{i2} + \sigma_{i2}' \qquad (i = r,\ \theta,\ z), \qquad \tau_{rz2}^{*} = \tau_{rz2} + \tau_{rz2}'$$
$$u_2^{*} = u_2 + u_2', \qquad w_2^{*} = w_2 + w_2' \tag{1.18}$$

§ 2. *Задача о сжатии весомого слоя*

Пусть под действием локальной нагрузки интенсивностью $P_1^0(r)$ $(0 \leqslant r \leqslant c)$, приложенной на верхней граничной плоскости слоя $z = H$, весомый слой отходит от полупространства в кольцевой области $a < r < b$. В безразмерных переменных $\rho = r/a$ интенсивность внешней нагрузки выражается функцией $P_1(\rho) = P_1^0(a\rho)$, заданной в круговой области $0 < \rho < \rho_1$ $(\rho_1 = c/a)$, а область отставания слоя от полупространства ищется в кольце $1 < \rho < \rho_0$ $(\rho_0 = b/a)$. Неизвестным величинам a и b соответствуют неизвестные параметры $\lambda = H/a$ и $\rho_0 = b/a$.

Краевые условия на граничной плоскости между слоем и полупространством задаются следующими равенствами:

$$\tau_{rz1}^{*}(\rho,\ t)|_{t=0} = \tau_{rz2}^{*}(\rho,\ t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty$$
$$\sigma_{z1}^{*}(\rho,\ t)|_{t=0} = \sigma_{z2}^{*}(\rho,\ t)|_{t=0} = 0, \qquad 1 < \rho < \rho_0 \tag{2.1}$$
$$w_1^{*}(\rho,\ t)|_{t=0} = w_2^{*}(\rho,\ t)|_{t=0}, \qquad 0 \leqslant \rho < 1, \quad \rho_0 < \rho < \infty$$

С учетом формул (1.15) — (1.18) условия (2.1) преобразуются к виду

$$\tau_{rz1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \tau_{rz2}(\rho,\ t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{2.2}$$
$$\sigma_{z1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \sigma_{z2}(\rho,\ t)|_{t=0} = \varepsilon, \qquad 1 < \rho < \rho_0 \tag{2.3}$$
$$w_1(\rho,\ t)|_{t=0} = w_2(\rho,\ t)|_{t=0}, \qquad 0 \leqslant \rho < 1, \ \rho_0 < \rho < \infty \tag{2.4}$$

Краевые условия (2.2) были учтены при построении общих решений задачи теории упругости для слоя и полупространства в § 1. Подставляя формулы (1.10)—(1.12) в краевые условия (2.3) и (2.4), получим тройные интегральные уравнения для неизвестной трансформанты $\overline{P}_0(\beta)$

$$\int_0^\infty [\chi + \Delta_{00}(\beta)]\, \overline{P}_0(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta = \int_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\, \overline{P}_1(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta, \qquad 0 \leqslant \rho < 1$$
$$\int_0^\infty \beta \overline{P}_0(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta = \varepsilon, \qquad 1 < \rho < \rho_0 \tag{2.5}$$
$$\int_0^\infty [\chi + \Delta_{00}(\beta)]\, \overline{P}_0(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta = \int_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\, \overline{P}_1(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta, \qquad \rho > \rho_0$$

где через χ обозначена постоянная

$$\chi = \frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}. \tag{2.6}$$

Представим $\Delta_{00}(\beta)$ в форме $\Delta_{00}(\beta) = 1 + \Delta_0(\beta)$ и дадим главные члены асимптотических формул для функций $\Delta_0(\beta)$ и $\Delta_{01}(\beta)$:

при $\beta \to 0$

$$\Delta_0(\beta) \approx -1 + \beta^2[2(1-\nu_1)\varkappa]^{-1}, \quad \Delta_{01}(\beta) \approx \beta^2[2(1-\nu_1)\varkappa]^{-1}$$

при $\beta \to \infty$

$$\Delta_0(\beta) \approx 4(\beta h)^2 e^{-2\beta h}, \qquad \Delta_{01}(\beta) \approx 2\beta h e^{-2\beta h}$$

Методом Нобла [10] и Кука [11], основные идеи которого изложены в работе [8], тройные интегральные уравнения (2.5) сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для новой неизвестной функции $\varphi(x)$

$$(1+\chi)\varphi(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^1 K_1(x, t)\varphi(t)\,dt +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\rho_0}^{\infty} K_2(x, t)\varphi(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\Phi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ x \geqslant \rho_0 \qquad (2.7)$$

где

$$K_1(x, t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\cos(t\beta)\,d\beta, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \displaystyle\frac{x}{x^2 - t^2} + \int_0^{\infty} \Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, & x \geqslant \rho_0 \end{cases}$$

$$K_2(x, t) = \begin{cases} \displaystyle\frac{t}{t^2 - x^2} + \int_0^{\infty} \Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \Delta_0(\beta)\sin(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, & x \geqslant \rho_0 \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \{\Delta_{01}(\beta)\overline{P}_1(\beta) - [\chi + \Delta_{00}(\beta)]\overline{P}_2(\beta)\}\cos(x\beta)\,d\beta, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \{\Delta_{01}(\beta)\overline{P}_1(\beta) - [\chi + \Delta_{00}(\beta)]\overline{P}_2(\beta)\}\sin(x\beta)\,d\beta, & x \geqslant \rho_0 \end{cases}$$

где

$$\overline{P}_0(\beta) = \frac{2}{\beta}[\rho_0 J_1(\rho_0\beta) - J_1(\beta)]$$

Основная искомая функция $P_0(\rho)$ (1.6) выражается через решение интегрального уравнения (2.7) по формуле

$$P_0(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\lambda, \rho_0, 1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \displaystyle\int_\rho^1 \dfrac{\varphi'_x(\lambda, \rho_0, x)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\,dx, & 0 \leqslant \rho < 1 \\ \sigma, \quad 1 < \rho < \rho_0 \\ \dfrac{\varphi(\lambda, \rho_0, \rho_0)}{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}} + \displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \dfrac{\varphi'_x(\lambda, \rho_0, x)}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\,dx, & \rho > \rho_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

где подчеркнута очевидная зависимость функции $\varphi(x) = \varphi(\lambda, \rho_0, x)$ от параметров $\lambda = H/a$ и $\rho_0 = b/a$. Так как $P_0(\rho)$ ограничена на всей полуоси $0 \leqslant \rho < \infty$, то из формулы (2.8) вытекают два условия для определения параметров λ и ρ_0

$$\varphi(\lambda, \rho_0, 1) = 0, \quad \varphi(\lambda, \rho_0, \rho_0) = 0 \tag{2.9}$$

Следовательно, задаче о сжатии весомого слоя удовлетворяют только те значения параметров λ и ρ_0, при которых решение интегрального уравнения (2.7) удовлетворяет условиям (2.9), то есть обращается в нуль в точках $x = 1$ и $x = \rho_0$. По виду правой части интегрального уравнения (2.7) можно заключить, что величины λ и ρ_0 зависят от величины результирующего усилия, приложенного на внешней поверхности слоя. После численного решения интегрального уравнения (2.7) с учетом (2.9) вычисляется трансформанта Ханкеля от $P_0(\rho)$

$$\overline{P}_0(\beta) = \overline{P}_*(\beta) + \int_0^1 \varphi(x)\cos(x\beta)\,dx + \int_{\rho_0}^{\infty} \varphi(x)\sin(x\beta)\,dx$$

Далее с помощью известных трансформант $\overline{P}_0(\beta)$ и $\overline{P}_1(\beta)$ легко вычисляются все напряжения и перемещения в слое и полупространстве.

§ 3. *Задача о сжатии невесомого слоя*

Пусть на невесомый слой давит та же самая локальная нагрузка, что и на весомый слой (§ 2). Под воздействием этой нагрузки закрепленный на бесконечности невесомый слой поднимется над полупространством в кольцевой области $a < r < b$. Радиус b предполагается достаточно большим, так что область контакта слоя и полупространства при $r > b$ можно считать невозмущенной, в которой все компоненты напряжений и перемещений равны нулю. В безразмерных перемещенных $\rho = r/a$ круговая область контакта слоя с полупространством имеет единичный радиус. Неизвестному радиусу a соответствует неизвестный параметр $\lambda = H/a$.

Краевые условия на граничной плоскости между слоем и полупространством задаются равенствами (2.2) для касательных напряжений, учтенными при выводе формул (1.10)—(1.12), и равенствами

$$\sigma_{z1}(\rho,\ t)\big|_{t=0}=\sigma_{z2}(\rho,\ t)\big|_{t=0}=0,\qquad 1<\rho<\infty \tag{3.1}$$

$$w_1(\rho,\ t)\big|_{t=0}=w_2(\rho,\ t)\big|_{t=0},\qquad 0\leqslant\rho<1 \tag{3.2}$$

Внося формулы (1.10)—(1.12) в равенства (3.1)—(3.2), получим парные интегральные уравнения для неизвестной трансформанты $\overline{P}_0(\beta)$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty[\chi+\Delta_{00}(\beta)]\,\overline{P}_0(\beta)\,J_0(\rho\beta)\,d\beta=\int\limits_0^\infty\Delta_{01}(\beta)\,\overline{P}_1(\beta)\,J_0(\rho\beta)\,d\beta,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1\\ \int\limits_0^\infty\beta\overline{P}_0(\beta)\,J_0(\rho\beta)\,d\beta=0,\quad 1<\rho<\infty\end{gathered} \tag{3.3}$$

Методом, указанным в § 2, парные интегральные уравнения (3.3) сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для новой неизвестной функции $\varphi(x)$

$$(1+\chi)\,\varphi(x)+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\Delta_{01}(\beta)\,\overline{P}_1(\beta)\cos(x\beta)\,d\beta \tag{3.4}$$

с ядром

$$K(x,\ t)=\int\limits_0^\infty\Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\cos(t\beta)\,d\beta$$

Интегральное уравнение (3.4) получается из интегрального уравнения (2.7) при $\sigma=0$ и $\varphi(x)=0$ при $x\geqslant\rho_*$.

Основная искомая функция $P_0(\rho)$ (1.6) выражается через решение интегрального уравнения (3.4) по формуле

$$P_0(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(\lambda,\ 1)}{\sqrt{1-\rho^2}}-\displaystyle\int\limits_\rho^1\frac{\varphi_x'(\lambda,\ x)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\,dx, & 0\leqslant\rho\leqslant 1\\ 0, & 1<\rho<\infty\end{cases} \tag{3.5}$$

где подчеркнута очевидная зависимость функции $\varphi(x)=\varphi(\lambda,\ x)$ от параметра $\lambda=H/a$. Так как $P_0(\rho)$ ограничена на всей полуоси $0\leqslant\rho<\infty$, то из формулы (3.5) вытекает условие для определения параметра λ

$$\varphi(\lambda,\ 1)=0 \tag{3.6}$$

Следовательно, задаче о сжатии невесомого слоя удовлетворяет только то значение λ, при котором решение интегрального уравнения (3.4) удовлетворяет условию (3.6), то есть обращается в нуль на конце $x=1$. Очевидно, что при замене $P_1(\rho)$ на $FP_1(\rho)$ ($F=\text{const}$) уравнению (3.4) соответствует решение $F\varphi(x)$. При этом величина λ, определяемая из условия (3.6), не изменится. Это означает, что λ и, следовательно, искомый радиус

$a = H/\lambda$ не зависят от величины результирующего усилия, прижимающего слой к полупространству.

После численного решения интегрального уравнения (3.4) с учетом (3.6) вычисляется трансформанта Ханкеля

$$\overline{P}_0(\beta) = \int_0^1 \varphi(x) \cos(x\beta)\, dx \tag{3.7}$$

Далее с помощью известных трансформант $\overline{P}_0(\beta)$ и $\overline{P}_1(\beta)$ легко вычисляются все напряжения и перемещения в слое и полупространстве.

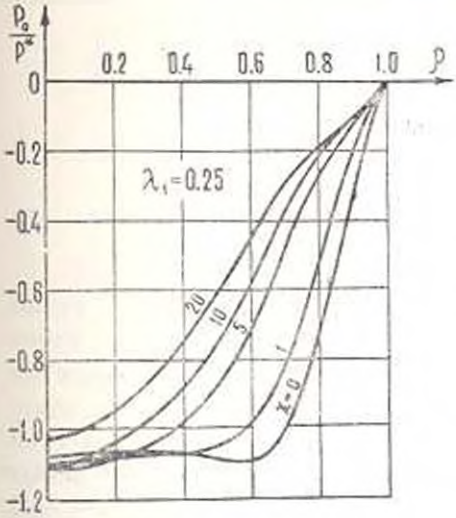
Авторами разработан алгоритм численного решения контактной задачи о сжатии невесомого слоя на языке «Алгол-60», который позволяет проводить подробный численный анализ напряженного и деформированного состояния слоя и полупространства при произвольном нагружении внешней поверхности слоя. Для иллюстрации теории приводятся некоторые основные результаты численного решения задачи для случая, когда слой прижимается к полупространству равномерно распределенной нагрузкой по площади круга радиуса c. Интенсивность нагрузки и ее трансформанта Ханкеля имеют вид

$$P_1(\rho) = \begin{cases} -p^* = \mathrm{const}, & 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1 \\ 0, & 1 < \rho < \infty, \end{cases} \qquad \overline{P}_1(\beta) = -p^* \frac{\rho_1 J_1(\rho_1\beta)}{\beta}$$

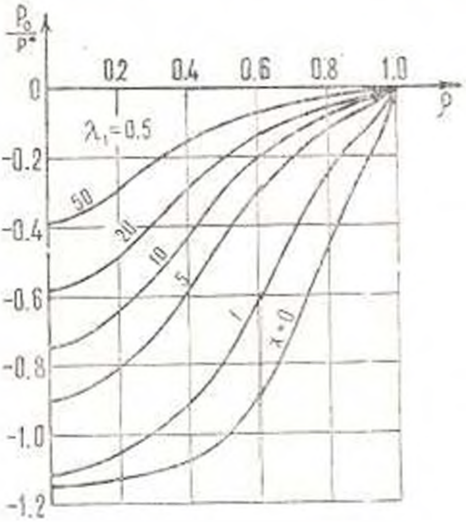
Здесь $\rho_1 = c/a = \lambda/\lambda_1$, $\lambda_1 = H/c$ — характерный параметр задачи, $p^* = P/\pi c^2$, P — результирующее усилие, прижимающее слой к полупространству. Вычисления проведены для значений параметра $\lambda_1 = 0.25$, 0.5, 1 при $\chi = 0$, 0.5, 1, 5, 10, 20, 50 и $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Соответствующие графики интенсивности контактного давления $P_0(\rho)/p^*$ на площадке контакта $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ слоя и полупространства приведены на фиг. 2, 3, 4. Как видно на этих фигурах, при определенных значениях параметров λ_1 и χ имеет место эффект превышения контактного давления в центре площадки контакта по сравнению с интенсивностью равномерно распределенной нагрузки $p^* = \mathrm{const}$, приложенной на внешней поверхности слоя. Этот эффект исчезает при возрастании χ, а также при убывании или возрастании λ_1.

На фиг. 5 приведены перемещения $w_1^0 = E_1 w_1(\rho)(1+\nu_1)a$ нижней поверхности слоя ($t = +0$) (кривая 1) и перемещения $w_2^0 = E_2 w_2(\rho)(1+\nu_2)a$ поверхности полупространства ($t = -0$) (кривая 2) при $\lambda_1 = 0.25$, 1. Вычисления показывают, что осевые перемещения невесомого слоя $w_1(\rho, t)$ вне площадки контакта $\rho > 1$ практически не зависят от t. Слой после максимального подъема над полупространством асимптотически приближается к полупространству, практически достигая его на расстоянии $11a - 12a$ от оси.

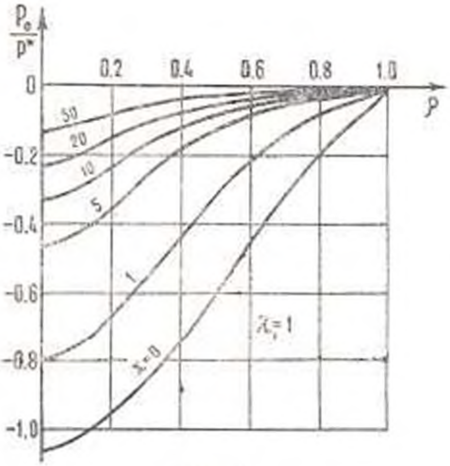
Значения параметра $\lambda = H/a$, соответствующие указанным выше значениям параметров λ_1 и χ, даны в следующей таблице:



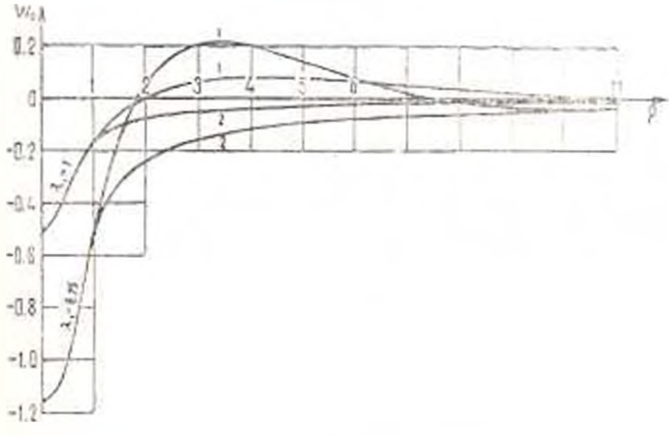
Фиг. 2.



Фиг. 3



Фиг. 4.



Фиг. 5

Таблица

χ \ λ	0.25	0.5	1
0	0.225	0.403	0.636
0.5	0.217	0.371	0.534
1	0.211	0.348	0.471
5	0.187	0.269	0.313
10	0.172	0.230	0.256
20	0.155	0.193	0.207
50		0.148	0.155

Отметим, что приведенные в данной таблице значения параметра λ практически совпадают с соответствующими значениями этого параметра, полученными в работе [4].

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 2 II 1976

Վ. Ս. ՆԻԿԻՇԻՆ, Գ. Ս. ՇԱՊԻՐՈ

ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆԸ ՍԵՂՄՎԱԾ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կառուցվել են ճշգրիտ լուծումներ կիսատարածությանը մասնակիորեն սեղմված կշիռ ունեցող և անկշիռ կամավոր հաստությամբ շերտերի առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրների համար, երբ շերտերը կիսատարածության հետ ունեն ոչ լրիվ կոնտակտ։ Շերտի և կիսատարածության առաձգական բնութագրիչները տրվում են կամավոր ձևով։ Երկու խնդիրներն էլ բերվել են ոչ համասեռ երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումների։

Թվային օրինակում բերված է մակերևույթի վերջավոր շառավիղով շրջանային մասի վրա հավասարաչափ բաշխված բեռով անկշիռ շերտի կիսատարածությանը սեղմման խնդրի լուծումը։

Որոշվել են շերտի և կիսատարածության միջև կոնտակտային մակերեսի շառավիղը և այդ մակերեսի վրա ճնշումների բաշխումը։

THE CONTACT PROBLEM IN ELASTICITY THEORY FOR THE LAYER LOCALLY BOUND TO SEMISPACE

V. S. NIKISHIN, G. S. SHAPIRO

S u m m a r y

Exact solutions of the axially symmetric problems in the elasticity theory of weighable and unweighable arbitrary thickness layers locally bound to a semispace and having an incomplete contact with the latter are obtained. Elastic characteristics of the layer and semispace are given arbitrary. Both problems are reduced to the unhomogenous Fredholm second kind integral equations effectively soluble by numerical methods. Numerical solution of an unweighable layer bound to a semispace with regularly distributed load over an area of finite length is presented as an example. The area radius of contact between layer and semispace and pressure distribution over the area are estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Keitsman J.* On the unbonded contact between plates and an elastic half space. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, № 2. (Рус. перевод: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., сер. E, 1969, т. 36, № 2)
2. *Pu S. L., Hussain M. A.* Note on unbonded contact between plates and an elastic half space. Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, № 3.
3. *Приварников А. К.* О контакте слоя с упругим полупространством. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 4.
4. *Keer L. M., Dundurs J., Tsai K. S.* Problems involving a receding contact between a layer and a half space. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, № 4.
5. *Hussain M. A., Pu S. L.* A variational principle for singular integral equations with bounded solutions. International Journal of Engineering Sciense, 1973, vol. 11, pp. 767—781.
6. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М., ВЦ АН СССР, 1970.
7. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О локальном осесимметричном сжатии упругого слоя, ослабленного кольцевой или круговой щелью. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
8. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О локальном неосесимметричном сжатии упругого слоя, ослабленного кольцевой или круговой щелью. Успехи механики деформируемых сред. М., Изд-во «Наука», 1975.
9. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955
10. *Noble B.* Certain dual integral equations. J. Math. Phys., 1958, vol. 37, № 2.
11. *Cooke J. C.* Triple integral equations. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1963, vol. 16, № 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

В. И. ФАБРИКАНТ

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Описан прием, позволяющий получить точное замкнутое решение интегрального уравнения, встречающегося в различных задачах механики сплошной среды [1, 2]. Интегральное уравнение более общего вида рассмотрено в работах [3—5]. Используемый в данной статье прием основан на идее сведения интегрального уравнения к двум последовательным операторам типа Абеля [6—9]. Полученное решение, по-видимому, проще существующих. Результаты иллюстрируются примерами.

1. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\int_b^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\nu} - K\int_x^a \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^\nu} = F(x) \qquad (0<\nu<1,\ b<x<a) \quad (1.1)$$

Здесь F и f — соответственно известная и искомая функция, K — известная константа.

Воспользуемся известными формулами [10]

$$\frac{1}{(x-t)^\nu} = \frac{(x-b)^\mu (t-b)^{1-\mu-\nu}}{B(\nu,\mu)}\int_b^t \frac{(y-b)^{\mu-1}(t-y)^{\nu-1}}{(x-y)^{\mu+\nu}}\,dy \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{(t-x)^\nu} = \frac{(x-b)^\mu (t-b)^{1-\mu-\nu}}{B(\nu,1-\mu-\nu)}\int_b^x \frac{(y-b)^{-\mu-\nu}(t-y)^{\mu-1}}{(x-y)^{1-\nu}}\,dy \quad (1.3)$$

Подберем величину μ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{B(\nu,1-\mu-\nu)}{B(\nu,\mu)} = K \quad (1.4)$$

Использование свойства бета-функций [10] позволяет упростить (1.4)

$$\frac{\sin\pi\mu}{\sin\pi(\mu+\nu)} = K$$

Из последнего равенства легко определить величину μ

$$\mu = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin\pi\nu}{K^{-1}-\cos\pi\nu} \quad (1.5)$$

Теперь подстановка (1.2) и (1.3) в (1.1) с учетом (1.4) после изменения порядка интегрирования приводит рассматриваемое уравнение к виду

$$\frac{(x-b)^{\mu}}{B(\nu,\mu)}\int_b^x \frac{(y-b)^{\nu-1}\,dy}{(x-y)^{\mu+\nu}}\int_y^a \frac{f(t)\,dt}{(t-b)^{\mu+\nu-1}(t-y)^{1-\nu}} = F(x) \qquad (1.6)$$

Интегральные операторы в левой части уравнения (1.6) являются хорошо изученными Абелевыми [11]. Применение обратных операторов позволяет получить точное замкнутое решение уравнения (1.1)

$$f(t) = -\frac{\sin\pi\mu\,\sin\pi(\mu+\nu)}{\pi^2(t-b)^{1-\mu-\nu}}\,B(\nu,\mu)\,\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\int_t^a \frac{(z-b)^{1-\nu}\,dz}{(z-t)^{\mu}}\,\frac{d}{dz}\int_b^z \frac{F(x)\,dx}{(x-b)^{\mu}(z-x)^{1-\mu-\nu}} \qquad (1.7)$$

2. Рассмотрим примеры. Пусть $F(x) = C = \mathrm{const}$. В этом случае формула (1.7) дает результат

$$f(t) = \frac{C\sin\pi(\mu+\nu)}{\pi(t-b)^{1-\mu-\nu}(a-t)^{\mu}} \qquad (2.1)$$

Для $F(x) = Cx$ получим

$$f(t) = \frac{C\sin\pi(\mu+\nu)\,[t-b-\mu(a-b)+\nu b]}{\pi\nu(t-b)^{1-\mu-\nu}(a-t)^{\mu}} \qquad (2.2)$$

В случае $F(x) = Cx^2$ решение имеет вид

$$f(t) = \frac{C\sin\pi(\mu+\nu)\,[2(t-b)(t+M)+M^2-\mu(a^2-b^2)+\nu b^2]}{\pi\nu(1+\nu)(t-b)^{1-\mu-\nu}(a-t)^{\mu}}$$

$$M = \nu b-\mu(a-b)$$

В заключение рассмотрим задачу о давлении кругового плоского штампа радиуса a на неоднородное полупространство с модулем упругости, зависящим от глубины ($E = E_0 z^{\nu}$). Как известно [2], такая задача сводится к решению интегрального уравнения вида (1.1) с параметрами

$$b = -a, \qquad K = \frac{-1+i\,\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\Big/\mathrm{tg}^2\frac{\nu\pi}{2}}{1+i\,\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\Big/\mathrm{tg}^2\frac{\nu\pi}{2}}$$

Формула (1.5) дает

$$\mu = -\frac{\nu}{2}+i\beta, \qquad \beta = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arth}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\Big/\mathrm{tg}\,\frac{\nu\pi}{2}\right)$$

Правая часть уравнения (1.1) в случае плоского штампа примет вид

$$F(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi\beta\,\sin\frac{\pi\nu}{2}\,[\nu(x+a)-2\mu a]}{\pi\theta_0\nu\sqrt{\pi}\,\sin\pi(\mu+\nu)}\,\delta$$

Здесь β, ν, $\varkappa$, Θ_4 — величины, зависящие от упругих свойств материала полупространства [2], δ — осадка штампа. Комбинация формул (2.1) и (2.2) позволяет получить решение

$$f(t)=\frac{2\delta\sin\dfrac{\pi\nu}{2}\,\mathrm{sh}\,\pi\beta}{\pi^2\Theta_4[\ldots]}(a^2-b^2)^{\nu/2}\left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{i\beta}$$

Аналогичный результат был получен в работе [2], где интегральное уравнение решалось в рядах по полиномам Якоби.

Ивановский энергетический институт
им. В. И. Ленина

Поступила 10 IV 1975

Վ. Ի. ՖԱԲՐԻԿԱՆՏ

ՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՓԱԿ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հատուկ եղանակի օգնությամբ ստացվել է մի ինտեգրալ, հավասարման համար ճշգրիտ փակ լուծում: Այդպիսի ինտեգրալ հավասարում հանդիպում է ոչ համասեռ կիսատարածության համար, որի առաձգականության մոդուլը համընկնում է խորության աստիճանային ֆունկցիան, առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրը լուծելու ժամանակ:

Հավասարման կորիզը ներկայացվում է ինտեգրալի տեսքով: Պարամետրերի որոշակի ընտրությունը թույլ է տալիս դիտարկվող հավասարումը փոխարինել Աբելի տիպի երկու օպերատորներով:

Փակ լուծում ստացվում է հայտնի շրջման օպերատորների օգտագործումից հետո:

Դիտարկվել են օրինակներ:

CLOSED SOLUTION OF AN INTEGRAL EQUATION

V. I. FABRICANT

Summary

An integral equation is considered to be applicable to the solution of mixed boundary-value problems for a non-homogeneous half-space. An exact closed solution of the equation is obtained by a special method. Examples are examined.

ЛИТЕРАТУРА

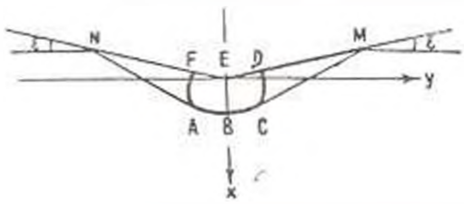
1. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, 27, вып. 5, 813—820.
2. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства при наличии сцепления. ПММ, 1973, 37, вып. 6, 1109—1116.
3. *Сохолюк К. Д.* Обобщенное уравнение Абеля. Докл. АН СССР, 1960, 131, № 4, 748—751.
4. *Самко С. Г.* Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши. Докл. АН СССР, 1967, 176, № 5, 1019—1022.
5. *Самко С. Г.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного дифференцирования. Диф. уравнения, 1968, 4, № 2, 298—314.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. «Наука», М., 1967.
7. *Ахиезер Н. И., Щербина В. А.* Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки матем. отд. физ.-мат. ф-та и Харьковского матем. общества, 1957, 25, сер. 4, 191—198.
8. *Мхитарян С. М.* О формулах Н. И. Ахиезера и В. А. Щербиной обращения некоторых сингулярных интегралов. Матем. исследования, 1968, 3, вып. 1 (7), 61—70.
9. *Мхитарян С. М.* Об эффективном решении некоторых классов линейных интегральных уравнений первого рода и связанных с ними дифференциальных уравнениях. Докл. АН Арм. ССР, 1969, 48, № 2, 71—78.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
11. *Забрейко П. П.* и др. Интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

А. Д. АЗАТЯН, А. Г. БАГДОЕВ

ПРОНИКНОВЕНИЕ КЛИНА В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩУЮ ЖИДКОСТЬ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассматривается задача о проникании тупого клина в идеальную электропроводящую сжимаемую жидкость со свободной поверхностью, занимающую полупространство, при наличии сильной ударной волны и начального магнитного поля, параллельного невозмущенной свободной поверхности. Для случая слабой магнитогазодинамической волны аналогичная по математической постановке задача о проникании клина в сжимаемую жидкость решена в [1]. При параллельности начального магнитного поля невозмущенной поверхности жидкости, как показано далее, силовые линии магнитного поля не проходят во внутрь клина ($B_n=0$ на клине) и поэтому задача может быть решена независимо от поля внутри клина. Для этой задачи система координат выбирается так, чтобы начало координат находилось в вершине клина, направление движения клина совпадало с положительным направлением оси x, а ось y была бы параллельна свободной поверхности. Каждая сторона клина образует с осью y малый угол ε (фиг. 1). Скорость



Фиг. 1.

проникания клина V_1 предполагается такой, чтобы скорость точки пересечения клина с осью y $\dfrac{V_1}{\varepsilon} \gg c_0$, где c_0 — скорость возмущений в жидкости. Тогда свободная поверхность вне клина будет невозмущена и, кроме того, течение в дифракционной области $ABCDEF$, то есть в области влияния вершины, будет мало отличаться от постоянного течения за плоскими ударными волнами MC и NA, которое, в свою очередь, мало отличается от одномерного.

Постановка задачи. Обозначим через U^* скорость ударной волны в выбранной системе координат, индексом «o» обозначим параметры исходной невозмущенной жидкости, а индексом «I» — параметры жидкости в области постоянного течения за ударной волной.

Хотя метод решения задачи годится для произвольного магнитного поля, но для получения обозримых значений для параметров ударной волны и эффективного конформного отображения предполагается, что начальное магнитное поле B_0 мало, то есть все параметры за ударной волной ищутся в виде

$$P_1 = P_1' + a_1^2 P_{00}, \quad \rho_1 = \rho_1' + a_1^2 \rho_{00}, \quad g_1 = g_1' + a_1^2 g_{00}, \quad U^* = U_0 + a_1^2 U$$
$$c_1 = c_1' + a_1^2 c, \qquad \varepsilon'' = \varepsilon' + a_1^2 \varepsilon_0 \tag{1}$$

где

$$a_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \text{ (малый параметр)}$$

Здесь U_0 и ε' — скорость и угол наклона ударной волны к клину в обычной газодинамике, P_1', ρ_1', g_1' удовлетворяют соотношениям, выполняющимся для косого скачка в обычной газодинамике [2].

Разрешая эти соотношения, получаем

$$P_1' = \frac{\left[(\gamma+1)M - \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}\right]\left[(3\gamma-1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}\right]}{16\gamma M^2}\rho_0 V_0^2$$

$$\rho_1' = \frac{(\gamma+1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}\rho_0, \qquad g_1' = V_0(\varepsilon + \varepsilon')$$

$$c_1' = \frac{\left[(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}\right]^{\frac{1}{2}}\left[(3\gamma-1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}\right]^{\frac{1}{2}}}{4M}V_0 \tag{2}$$

$$U_0 = \frac{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{4M}V_0$$

Соотношение $V_0 \operatorname{cosec}\varepsilon = U_0 \operatorname{cosec}\varepsilon'$ дает

$$\varepsilon' = \frac{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{4M}\varepsilon$$

Здесь $M = \frac{V_0}{c_0}$ — число Маха.

Если пренебречь членами порядка ε^2, то P_1', ρ_1', c_1', U_0 не будут зависеть от ε.

Подставляя (1) в соотношения, выполняющиеся на поверхностях сильного разрыва в магнитной газодинамике [3] и пренебрегая членами, порядок которых превышает a_1^2, получаем следующую систему уравнений для определения P_{00}, ρ_{00}, g_{00}, U, B_{1n}, $B_{1\tau}$ (n — внешняя нормаль, τ — положительное направление к ударной волне):

$$1.\ B_{1n} = B_0(\varepsilon + \varepsilon')$$

$$2.\ \rho_1' U + U_0\rho_{00} - \rho_0 U = 0 \tag{3}$$

$$3.\ P_{00} + \rho_0 U_0^2 - \frac{\rho_1'^2 - \rho_0^2}{2\rho_0} = 0$$

$$4.\ [(\rho_0-\rho_1')(UV_0-1)-\rho_0U_0V_0](\alpha+\alpha')+\rho_1V_0U_{0\alpha t}=\rho_1'U_0g_{00}$$

$$5.\ B_{1t}=\frac{\rho_1'B_0}{\rho_0} \tag{3}$$

$$6.\ \frac{(\rho_0-\rho_0')(1-UV_0)}{\rho_0}-\frac{\gamma P_{00}}{(\gamma-1)\rho_1}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1\rho_{01}}{\rho_1^2}=0$$

Линеаризация соотношения $V_0\operatorname{cosec}\alpha=U^*\operatorname{cosec}\alpha'$ дает

$$\alpha_0=\frac{\alpha U}{V_0} \tag{3'}$$

Решение системы (3) следующее:

$$U=\frac{2M\left[\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}-(\gamma-1)M\right]}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\,V_0}$$

$$\rho_{00}=-\frac{32M^3\left[\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}-(\gamma-1)M\right]}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]^3\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}\frac{\rho_0}{V_0^2} \tag{4}$$

$$P_{00}=-\frac{4M\left[(\gamma^2-\gamma+2)M^2+\gamma M\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}+8\right]}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]^2\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}\rho_0$$

$$g_{00}=-\frac{2M\left[(\gamma-1)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\alpha}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\,V_0}$$

$$B_{2n}=\frac{(\gamma-1)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}{4M}\alpha B_0$$

$$B_{1t}=\frac{(\gamma+1)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}{(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}B_0$$

Соотношение (3') дает

$$\alpha_0=\frac{2M\left[\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}-(\gamma-1)M\right]\alpha}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\,V_0^2}$$

Для c имеем

$$c=-\frac{A}{B}$$

где

$$A=8(\gamma-1)M^2\left[\gamma(\gamma+1)M^2+\gamma M\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}+8\right]$$

$$B=\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]^{\frac{3}{2}}\left[(\gamma+1)M+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\left[(3\gamma-1)M+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\,V_0$$

Как видно из формул (1) и (4), в области постоянного течения за ударной волной $P_1 < P_1'$, то есть при наличии магнитного поля давление уменьшается.

Определим B_{1x} и B_{1y} в области постоянного течения

$$B_{1x} = B_{1s} + B_{1y}(\varepsilon - \varepsilon'), \qquad B_{1y} = -B_{1s}(\varepsilon + \varepsilon') + B_{1y}$$

Отсюда имеем

$$B_{1x} = -\frac{(\gamma+1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}\,\varepsilon B_0$$

$$B_{1y} = \frac{(\gamma+1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}\,B_0$$

Проекция вектора $\vec{B}_1$ на нормаль к клину равна $B_{1N} = B_{1x} + \varepsilon B_{1y} = 0$, где N — нормаль к клину, то есть вектор $\vec{B}_1$ за ударной волной параллелен клину.

Условия в области неравномерного течения

а) *Уравнения движения.* В области неравномерного течения всем параметрам будем приписывать значок 2. Вводя конические координаты $\xi = \frac{x}{c_1 t}$, $\eta = \frac{y}{c_1 t}$ (поля давлений и скоростей зависят только от отношения $\frac{x}{ct}$, $\frac{y}{ct}$), вариацию давления и магнитного поля

$$P = \frac{P_2 - P_1}{c\rho_1}, \qquad \vec{b} = \frac{\vec{B}_2 - \vec{B}_1}{\rho_1^{\frac{1}{2}}}$$

уравнения плоского нестационарного движения сжимаемой жидкости после их линеаризации можно записать в виде

$$\xi\frac{\partial b_x}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial b_x}{\partial \eta} = -\frac{B_1}{c_1\rho_1^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\xi\frac{\partial b_y}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial b_y}{\partial \eta} = \frac{B_1}{c_1\rho_1^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

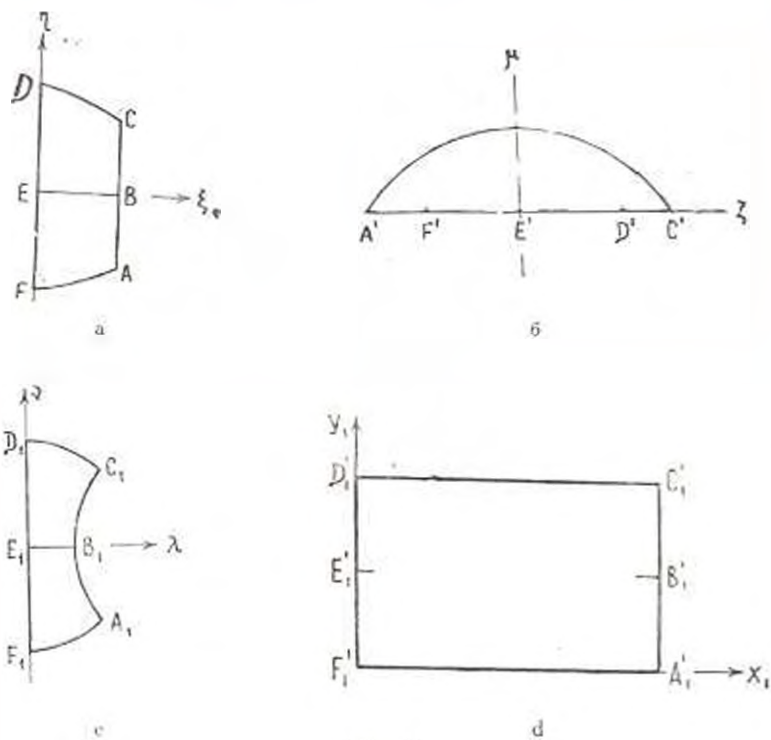
$$\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{B_1}{4\pi c_1\rho_1^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial b_x}{\partial \eta} - \frac{\partial b_y}{\partial \xi}\right) \tag{5}$$

$$\xi\frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$$

$$\xi\frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

где u, w — составляющие скорости $\bar{g}_1$ по осям ξ, η. Исключая все величины, кроме P, получим уравнение 4-го порядка для P.

б) *Граничные условия.* На плоскости ξ, η областью неравномерного течения является область, заключенная между стенкой, скачком и дугами DC и FA, представляющими фронт волны возмущения, порожденной малым углом ε. Так как на стенке и скачке изменение ξ по сравнению с изменением η происходит медленно, то обе эти величины можно аппроксимировать прямолинейными отрезками (фиг. 2а). При этом на стенке будем иметь $\xi=0$, на скачке



Фиг. 2

$$\xi=\frac{x}{c_2 t}=\frac{U^*}{c_1}=\frac{U_0}{c_1}+a_1'^2 c_1' U=k_{00}+a_1'^2 k_1=\xi_1<1 \tag{6}$$

где

$$a_1'^2=\frac{a_1^2}{c_1^2}$$

На стенке из условия равенства нулю нормальной составляющей скорости ($g_{2N}=0$) имеем $u=u(\xi)=0$ при $\xi=0$ для любого η. Тогда из уравнения (1) системы (5) получаем, что b_1 на стенке равно нулю, то есть из граничного условия $u=0$ и уравнений движения вытекает условие $b_1=B_{2N}=0$ на стенке, что позволяет решать задачу для жидкости независимо от задачи определения магнитного поля и кание

И наконец, в соответствии с уравнением (3) системы (5) имеем $\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0$ при $\xi = 0$. На дугах DC и FA функции непрерывны. Следовательно, на этих дугах $P = 0$.

Для того, чтобы найти граничное условие на ABC, запишем уравнение слабо-искривленного фронта в виде

$$\xi = \frac{U^*}{c_1} + \varepsilon f_1(\eta) = k_0 + \varepsilon f_1(\eta)$$

Тогда применяя законы сохранения к искривленной части скачка, получаем

$$P = \frac{A'}{B'}(f_1 - \eta f_1')$$

где

$$A' = U^*(\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} +$$

$$+ 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1)B_1^2] - (\gamma - 1)(4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)\rho_0 V_0$$

$$B' = \rho_1(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})$$

$$u = \left[\frac{(\rho_1 - \rho_0)(4\pi\rho_1 U^{*2} - 4\pi\gamma P_1 - B_1^2)}{\rho_1(B_1^2 - 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})} - \frac{4\pi U^* V_0\rho_1(\gamma - 1)}{(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})}\right] c_1(f_1 - \eta f_1') \tag{7}$$

$$b_1 = \frac{4\pi B_1[(\gamma + 1)(\rho_1 - \rho_0)U^* - \rho_0 V_0(\gamma - 1)]}{(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})\rho_1^{\frac{1}{2}}} c_1(f_1 - \eta f_1')$$

$$b_0 = \frac{(B_1 - B_0)}{\rho_1^{\frac{1}{2}}} f_1 - \frac{B_1}{\rho_1^{\frac{1}{2}}}$$

$$w = -\left[V_0 + \frac{B_0^2 - B_0 B_1}{4\pi\rho_1 U^*}\right] f_1$$

Исключая из этих уравнений функцию f_1, получаем

$$u = D_0 P, \quad \eta w_\eta = E_0 P_\eta, \quad b_\eta = C_0 P, \quad \eta\frac{\partial b_0}{\partial \eta} = L_0\frac{\partial P}{\partial \eta} \tag{8}$$

$$D_0 = \frac{[(\rho_1 - \rho_0)(4\pi\gamma\rho_1 U^{*2} + 4\pi\gamma P_1 + B_1^2) - 4\pi\rho_1^2 U^* V_0(\gamma - 1)] c_1}{U^*(\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} + 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1)B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0(4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)} \tag{9}$$

$$C_0 = \frac{4\pi B_1 c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}}[(\gamma + 1)(\rho_1 - \rho_0)U^* - \rho_1 V_0(\gamma - 1)]}{U^*(\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} + 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1)B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0(4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)}$$

$$E_0 = \frac{A''}{B''} \tag{9}$$

где

$$A'' = (4\pi\rho_1 U^* V_0 + B_0^2 - B_0 B_1)(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})$$

$$B'' = 4\pi U^* \{U^* (\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} -$$

$$+ 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0 (4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)\}$$

$$L_0 = \frac{(B_0 - B_1)(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})\rho_1^{\frac{1}{2}}}{U^*(\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} - 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0 (4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)}$$

Если положить $\overline{B} = 0$, то получим

$$D_0 = \frac{[\gamma(\rho_1 - \rho_0)(\rho_1 U_0^2 - P_1) - (\gamma - 1)\rho_1^2 U_0 V_0] c_0}{U_0 [(\rho_1 - \rho_0)[(\gamma - 1)\rho_1 U_0^2 + 2\gamma P_1] - (\gamma - 1)\rho_1^2 U_0 V_0]}$$

$$E_0 = \frac{V_0 \rho_1 (\gamma P_1 - \rho_1 U_0^2)}{U_0 [(\rho_1 - \rho_0)[(\gamma - 1)\rho_1 U_0^2 + 2\gamma P_1] - (\gamma - 1)\rho_1^2 U_0 V_0]} \tag{10}$$

$$C_0 = 0, \quad L_0 = 0$$

Условия (8) в силу линейности задачи, считаем выполняющимися на прямой $\xi = k_0$.

При помощи уравнений движения из уравнений (8) можно исключить u, w, b_τ, b_n, что даст условие на скачке для P.

$$\frac{\partial P/\partial \xi}{\partial P/\partial \eta} = \frac{\left(D_0 - k_0 - \frac{C_0'}{4\pi k_0} - \frac{N^2}{4\pi k_0}\right)\eta - \left(E_0 k_0 - \frac{E_0'}{4\pi k_0} - \frac{L_0'}{4\pi}\right)\eta^{-1}}{1 - k_0^2 + \frac{N^2}{4\pi}} \tag{11}$$

где

$$N = \frac{B_1}{c_0 \rho_1^{\frac{1}{2}}}, \quad C_0' = NC_0, \quad L_0' = NL_0, \quad E_0' = N^2 E_0$$

Дополнительно к (11) берется условие

$$\int \frac{E_0'}{\eta} P_\xi \, d\eta = \int \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta = g_1 \tag{12}$$

заключающееся в том, что изменение w вдоль ударной волны от центра до вершины равно (12).

Решение граничной задачи

К линеаризированным уравнениям магнитной газодинамики применяем метод Смирнова—Соболева [4], то есть давление P ищем как действительную часть аналитической функции

$$P = \operatorname{Re} \varphi(\alpha)$$

где α определяется равенством

$$\alpha\eta + \beta(\alpha)\xi = 1 \qquad (13)$$

причем P удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \nu^2} = 0$$

где $\dfrac{1}{\alpha} = \zeta + i\nu$, а $\beta(\alpha)$ есть решение дисперсионного уравнения магнитной газодинамики

$$\beta(\alpha) = \sqrt{\frac{(1 - a_1'^2\alpha^2)(1 - \alpha^2)}{(1 - a_1'^2\alpha^2 + a_1'^2)}}$$

Так как рассматривается слабое магнитное поле, то разлагая функцию $\beta(\alpha)$ в ряд по малому параметру $a_1'^2$, подставляя в (13) и отделяя действительную и мнимую части $\dfrac{1}{\alpha}$, получаем

$$\zeta = \frac{\eta}{1 - \xi'^2}, \qquad \nu = \frac{\xi'\sqrt{1 - \xi'^2 - \eta^2}}{1 - \xi'^2}, \qquad \xi' = \xi\left(1 - \frac{a_1'^2}{2}\right) \quad (14)$$

Это разложение верно всюду, кроме окрестности точек $\alpha = \dfrac{1}{a_1'}$, $\alpha = \dfrac{\sqrt{1 - a_1'^2}}{a_1'}$. В статье это разложение используется только вблизи ударной волны.

В результате преобразования (14) область неоднородного течения в плоскости ξ, η переходит в область $A'B'C'D'E'F'$ на плоскости ζ, ν, ограниченную отрезком $A'C'$ действительной оси ζ и эллипсом $A'B'C'$ (фиг. 2б).

Координаты точек C' и A' следующие:

$$C'\left(\frac{1}{k_0'} - \frac{a_1'^2 k_0^2}{2k_0'^3},\ 0\right), \qquad A'\left[-\left(\frac{1}{k_0'} - \frac{a_1'^2 k_0^2}{2k_0'^3}\right),\ 0\right], \qquad k_0' = \sqrt{1 - k_0^2}$$

Уравнение кривой $A'B'C'$

$$\frac{\zeta^2}{\dfrac{k_0'^4}{k_0''^2}} + \frac{\nu^2}{\dfrac{1}{k_1'^2}} = 1 \qquad (15)$$

где

$$k_0'' = k_0\left(1 - \frac{a_1'^2}{2}\right), \qquad k_1' = \sqrt{1 - k_0''^2}$$

Теперь применяем конформное преобразование

$$K = \frac{2i\omega}{1 - \omega^2} \tag{16}$$

где $K = \xi + i\eta$. Далее можно ввести плоскость $z = \bar{\omega}$, причем $z = \lambda + i\nu$, и по переменным λ, ν F снова удовлетворяет уравнению Лапласа.

Это свойство сохраняется в дальнейших конформных преобразованиях. Когда магнитное поле отсутствует, z представляет собой плоскость Буземана [5].

В результате преобразования (16) на плоскости λ, ν получаем область $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ограниченную отрезком мнимой оси $D_1E_1F_1$, где $\nu(+1, -1)$, дугами D_1C_1 и F_1A_1 единичной окружности $\lambda^2 + \nu^2 = 1$ и дугой окружности (фиг. 2с)

$$2\nu = k_0'(1 + \lambda^2 + \nu^2) \tag{17}$$

Вблизи ударной волны связь между плоскостями ξ, η и $z = \lambda + i\nu = \rho e^{i\theta}$ можно взять такой же, как в обычной газодинамике [5]

$$\xi = \frac{2\rho\cos\theta}{1 + \rho^2}, \qquad \eta = \frac{2\rho\sin\theta}{1 + \rho^2},$$

$$\left(r = \frac{2\rho}{1 + \rho^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}\right) \tag{18}$$

Для преобразования краевого условия на слабоискривленном фронте к переменным ρ, θ нужно провести ряд элементарных выкладок, опуская которые условие (11) в плоскости ρ, θ можно записать в виде (n — внешняя нормаль, s — положительное касательное направление).

$$\frac{\partial P}{\partial n} \bigg/ \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\left[A_0(1 - k_0'^2)k_0 - \left(1 - k_0^2 - \frac{N^2}{2\pi}\right)k_0'^2\right]\operatorname{tg}\theta - B_0(1 - k_0'^2)\frac{\operatorname{ctg}\theta}{k_0}}{\left(1 - k_0^2 - \frac{N^2}{4\pi}\right)(1 - k_0'^2\sec^2\theta)^{1/2}} \tag{19}$$

где

$$A_0 = D_0 k_0 + \frac{C_0}{4\pi k_0} + \frac{N^2}{4\pi k_0}, \qquad B_0 = E_0 k_0 + \frac{E_0}{4\pi k_0} + \frac{L_0}{4\pi}$$

$$k_0'^2 = k_0^2 - \frac{a_1'^2 k_0^2}{4k_0} \tag{20}$$

На стенке $\left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$, на дугах $\rho = 1$, $P = 0$. Полученная задача по математической постановке аналогична [5], поэтому используем метод, изложенный в [5].

Применяем дополнительное конформное преобразование

$$z_1 = \ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) + \frac{1}{2}\pi i \tag{21}$$

где $z = \rho e^{i\theta}$

отображающее возмущенную область на прямоугольник (фиг. 2d)

$$0<x_1<\varkappa, \quad 0<y_1<\pi$$

где

$$\varkappa=\frac{1}{2}\ln\frac{1+k_0}{1-k_0}=\text{const}$$

С учетом того, что на дуге окружности (17)

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{\sqrt{1-k_0'^2}\cos y_1}{k_0'}=-\frac{k_0}{k_0'}\cos y_1$$

получаем граничное условие в плоскости z_1, на правой вертикальной стороне прямоугольника $A_1B_1C_1$

$$-\frac{\partial P}{\partial x_1}\sin y_1\cos y_1=\frac{\partial P}{\partial y_1}\left\{\left[A_0\frac{k_0(1-k_0'^2)}{k_0'\left(k_0'^2+\frac{N^2}{4\pi}\right)}-k_0\right]\cos^2 y_1-\right.$$

$$\left.-B_0\frac{k_0'(1-k_0'^2)}{k_0k_0'^2\left(k_0'^2+\frac{N^2}{4\pi}\right)}\right\} \tag{22}$$

На левой вертикальной стороне прямоугольника $\frac{\partial P}{\partial x_1}=0$, на горизонтальных сторонах D_1C_1 и F_1A_1 $P=0$.

Надо найти аналитическую функцию $w^*(z_1)=\frac{\partial P}{\partial x_1}-i\frac{\partial P}{\partial y_1}$, которая имеет чисто мнимые значения на трех сторонах прямоугольника, а на четвертой стороне $x_1=\varkappa$ обращается в заданную функцию y_1.

Решение окончательно находится в виде [5]

$$w^*(z_1)=iK_0\frac{\vartheta_2(-iz_1)}{\vartheta_1(-iz_1)}W(z_1) \tag{23}$$

где K_0 — нормирующий множитель, ϑ_2, ϑ_1 — тета-функции и

$$W(z_1)=\exp\left\{-\sum_n(2-a^n-b^n)n^{-1}\operatorname{csch}2n\varkappa\operatorname{ch}2nz_1\right\}$$

a и b — заданные функции M

$$a=\frac{\alpha^*-1}{\alpha^*+1},\quad b=\frac{\beta^*-1}{\beta^*+1}$$

где α^* и β^* удовлетворяют равенствам

$$\frac{1}{\alpha^{2}-\beta^{2}}=A_{0}\frac{k_{0}(1-k_{0}^{\prime 2})}{k_{0}^{\prime}\left(k_{0}^{2}+\frac{N^{2}}{4\pi}\right)}-k_{0}^{\prime}-B_{0}\frac{k_{0}^{\prime}(1-k_{0}^{\prime 2})}{k_{0}k_{0}^{\prime 2}\left(k_{0}^{2}+\frac{N^{2}}{4\pi}\right)}$$

$$\frac{\alpha^{2}\beta^{2}}{\beta^{2}-\beta^{2}}=B_{0}\frac{k_{0}^{\prime}(1-k_{0}^{\prime 2})}{k_{0}k_{0}^{\prime 2}\left(k_{0}^{2}+\frac{N^{2}}{4\pi}\right)} \tag{24}$$

Из (23) для распределения давления на стенке имеем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y_{2}}\right)_{y_{2}=0}=-K_{0}\frac{u_{2}(y_{1})}{u_{1}(y_{1})}W'(iy_{1})$$

По формулам

$$\frac{g_{1}}{V_{0}}=\bar{g}_{1}=\bar{g}_{1}+\tilde{a}_{1}^{2}\bar{g}_{00},\qquad \frac{P_{1}}{\rho_{0}V_{0}^{2}}=\bar{P}_{1}=\bar{P}_{1}+\tilde{a}_{1}^{2}\bar{P}_{00}$$

$$\frac{\rho_{1}}{\rho_{0}}=\bar{\rho}_{1}=\bar{\rho}_{1}+\tilde{a}_{1}^{2}\bar{\rho}_{00},\qquad \frac{c_{1}}{V_{0}}=\bar{c}_{1}=\bar{c}_{1}+\tilde{a}_{1}^{2}\bar{c}_{1},\qquad \frac{B_{1}}{B_{0}}=\bar{B}_{1}=\bar{\rho}_{1}$$

где

$$\tilde{a}_{1}^{2}=\frac{a_{1}^{2}}{V_{0}^{2}}$$

вычислены значения безразмерных параметров, характеризующих ударную волну для значений числа Маха $M=1.5;\ 3;\ \bar{a}_{1}=0.1;\ 0.01\ M$.

Кроме того, подсчитано значение

$$K_{0}:V_{0}=\frac{(\bar{g}_{1}-\tilde{a}_{1}^{2}\bar{g}_{00})\,k_{0}k_{0}^{\prime}}{k_{0}E_{0}\int\frac{u_{2}(y_{1})}{u_{1}(y_{1})}W'\frac{(\alpha^{2}-\beta^{2})\sin y_{1}\,dy_{1}}{\sqrt{1+\alpha^{2}\sin^{2}y_{1}-\cos^{2}y_{1}}\sqrt{1+\beta^{2}\sin^{2}y_{1}-\cos^{2}y_{1}}}}$$

и вычислено давление $\bar{P}$ на стенке

$$\bar{P}=\frac{P_{1}-P_{2}}{2(P_{1}-P_{0})}$$

Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица

	$M=1.5$	$\bar{\alpha}_1=0.1$	$M=1.5$	$\bar{\alpha}_1=0.01$	$M=3$	$\bar{\alpha}_1=0.1$	$M=3$	$\bar{\alpha}_1=0.01$
$\bar{\beta}_1$	1.48572118		1.49679642		1.26637198		1.28617529	
$\bar{\gamma}_1$	2.97623610		3.01208180		4.31004399		4.49010199	
$\bar{P}_1$	1.78293484		1.81405425		1.28476950		1.36493068	
[illegible]	0.91582752		0.91823808		0.64629521		0.65236587	
$K_1\,\varepsilon V_0$	0.20312864		0.21135715		0.10189070		0.11604402	
$\tilde{P}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	0.26071675		0.28119263		0.18550328		0.2649654	
$\tilde{P}\left(\frac{\pi}{3}\right)$	0.47341359		0.50356436		0.32132316		0.4293633	
$\tilde{P}\left(\frac{\pi}{2}\right)$	0.54923252		0.57991294		0.36733156		0.47308742	
$\tilde{P}\left(\frac{2}{3}\pi\right)$	0.47341359		0.50356436		0.32132316		0.4293633	
$\tilde{P}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$	0.26071675		0.28119263		0.18550328		0.2649654	
$\tilde{P}(\pi)$	0		0		0		0	
B_1	3.0124438		3.0124438		4.49192076		4.49192076	

Расчеты были проведены в вычислительном отделе института механики АН Арм.ССР Г. А. Саркисяном, которому авторы выражают свою благодарность.

Ереванский государственный
университет
Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 11 V 197[illegible]

Լ. Գ. ԱՂԱԼՅԱՆ, Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՍԵՊԻ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկվում է բարակ սեպի ներթափանցման խնդիրը ազատ մակերևույթ ունեցող սեղմելի հեղուկի մեջ ուժեղ հարվածային ալիքի և հեղուկի ազատ մակերևույթին զուգահեռ սկզբնական մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում։ Երբ սկզբնական մագնիսական դաշտը զուգահեռ է հեղուկի չգրգռված մակերևույթին մագնիսական դաշտի ուժագծերը չեն թափանցում սեպի մեջ և այդ պատճառով խնդիրը կարելի է լուծել անկախ սեպի մեջի դաշտից։

Որոշված են հեղուկի պարամետրերը հարվածային ալիքի ետևում: Եզրային խնդիրը անալիտիկ ֆունկցիայի համար անհամասեռ հոսանքի տիրույթում լուծված է Լայթհիլի մեթոդով: Որոշված է ճնշման բաշխումը սեպի վրա և կատարված են թվային հաշվարկներ:

PENETRATION OF A WEDGE INTO AN ELECTROCONDUCTING FLUID IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

L. D. AZATIAN, A. G. BAGDOEV

Summary

The problem of penetration of a blunt wedge into a compressable fluid with a free surface for the case of a strong shock wave and the original magnetic field parallel to the free surface of the fluid is considered.

When the initial magnetic field is parallel to the undisturbed surface of fluid, the line of magnetic force does not pass into the wedge and so the problem may be solved independently of the field within the wedge.

Parameters of field in the region behind the shock wave are determined.

In the region of non-uniform flow the boundary-value problem for analytical functions (pressure) is solved by the Lighthill method.

The pressure distribution at the wedge is determined and numerical calculation is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовсисян М. М.* Проникновение тела в полупространство сжимаемой жидкости при наличии магнитного поля. Известия АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 3, 1972.
2. *Курант Г. и Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. Изд. ИЛ, М., 1950.
3. *Куликовский А. Г. и Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. Государств. изд. физико-математ. литературы, М., 1962.
4. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1967.
5. *M. J. Lighthill.* The diffraction of blast. II. Proc. Roy. Soc., 1950, A, 200, 554—565.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

А. В. ВАРДАНЯН

МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИН

На основе гипотез магнитоупругости, предложенных в работах [1, 2], выводятся уравнения магнитоупругих колебаний двух параллельных пластин, служащих проводниками равномерно распределенного электрического тока. Исследуется влияние физических параметров задачи на частоты колебаний.

1. Пусть две упругие бесконечные пластинки, каждая толщиной $2h$, расположены параллельно друг другу.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что плоскость (x, y) параллельна пластинкам и находится между ними на расстоянии a от срединной плоскости каждой пластинки.

Пластинки служат проводниками равномерно распределенного электрического тока, параллельного срединным плоскостям пластин.

Направления электрических токов в пластинках взаимно перпендикулярны. Ось x выбирается по направлению электрического тока в одной из пластин. Тогда ток в другой пластинке направлен либо по оси y, либо противоположно ей.

Магнитная и диэлектрическая проницаемости сред, окружающих пластинки, равны единице.

Упругие и электромагнитные свойства пластины предполагаются одинаковыми и характеризуются: жесткостью D, плотностью ρ, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε.

Обозначая напряженности электрического поля, обусловленные токами плотности J_1 и J_2 в пластинках, через E_1 и E_2 и решая соответствующую задачу магнитостатики, найдем напряженности магнитного поля

$$
H_{1x} = \begin{cases} 4\pi h\sigma c^{-1} E_1 & \text{при} \quad z \geqslant a + h \\ 4\pi\sigma (z - a) c^{-1} E_1 & \text{при} \quad a - h \leqslant z \leqslant a + h \\ -4\pi h\sigma c^{-1} E_1 & \text{при} \quad z \leqslant a - h \end{cases}
\tag{1.1}
$$

$$
H_{2y} = \begin{cases} -4\pi\sigma h c^{-1} E_2 & \text{при} \quad z \geqslant -a + h \\ -4\pi\sigma c^{-1} (z + a) E_2 & \text{при} \quad -a - h \leqslant z \leqslant -a + h \\ 4\pi\sigma h c^{-1} E_2 & \text{при} \quad z \leqslant -a - h \end{cases}
$$

При движении пластин возникает индуцированное электромагнитное поле, которое будет описываться уравнениями электродинамики движущихся проводящих сред для областей, занимаемых пластинами, и уравнениями электродинамики для вакуума в остальных областях. Указанные уравнения необходимо решать совместно с уравнениями движения пластин при общих граничных условиях на движущихся поверхностях пластин.

Линейные уравнения электродинамики принимаются при ограничениях работы [3], что. в частности, исключает материалы из сегнетоэлектриков, ферромагнетиков и сверхпроводников.

Уравнения электродинамики для областей, занимаемых пластинами

$$a-h\leqslant z\leqslant a+h \quad (s=1) \quad \text{и} \quad -a-h\leqslant z\leqslant -a+h \quad (s=2)$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_{zs}}{\partial y}-\frac{\partial h_{ys}}{\partial z}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_{xs}-\frac{\mu}{c}H_{oys}\frac{\partial u_{zs}}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial h_{xs}}{\partial z}-\frac{\partial h_{zs}}{\partial x}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_{ys}+\frac{\mu}{c}H_{oxs}\frac{\partial u_{zs}}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial h_{ys}}{\partial x}-\frac{\partial h_{xs}}{\partial y}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_{zs}+\frac{\mu}{c}\left(H_{oys}\frac{\partial u_{xs}}{\partial t}-H_{oxs}\frac{\partial u_{ys}}{\partial t}\right)\right]\\
\frac{\partial e_{zs}}{\partial y}-\frac{\partial e_{ys}}{\partial z}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_{xs}}{\partial t}\\
\frac{\partial e_{xs}}{\partial z}-\frac{\partial e_{zs}}{\partial x}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_{ys}}{\partial t}\\
\frac{\partial e_{ys}}{\partial x}-\frac{\partial e_{xs}}{\partial y}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_{zs}}{\partial t}\\
\frac{\partial h_{xs}}{\partial x}+\frac{\partial h_{ys}}{\partial y}+\frac{\partial h_{zs}}{\partial z}=\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu c}\left(E_{oys}\frac{\partial^2 u_{zs}}{\partial x\partial t}-E_{oxs}\frac{\partial^2 u_{zs}}{\partial y\partial t}\right)=0\\
\frac{\partial e_{xs}}{\partial x}+\frac{\partial e_{ys}}{\partial y}+\frac{\partial e_{zs}}{\partial z}=\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu c}\left(H_{oxs}\frac{\partial^2 u_{zs}}{\partial y\partial t}-H_{oys}\frac{\partial^2 u_{zs}}{\partial x\partial t}\right)=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_s\\
(s=1,\ 2)
\end{gathered}\tag{1.2}$$

Уравнения электродинамики для вакуума —

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot}\vec{h}_s=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}_s}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\vec{e}_s=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}_s}{\partial t}\\
\operatorname{div}\vec{h}_s=0,\qquad \operatorname{div}\vec{e}_s=0,\qquad (s=3,\ 4,\ 5)
\end{gathered}\tag{1.3}$$

Здесь $\vec{h}_s(h_{xs},\ h_{ys},\ h_{zs})$, $\vec{e}_s(e_{xs},\ e_{ys},\ e_{zs})$ — векторы напряженностей индуцированного магнитного и электрического полей, ρ_s — плотность электрических зарядов, $\vec{u}_s(u_{xs},\ u_{ys},\ u_{zs})$ — вектор перемещения частиц пластины, $s=3$ показывает принадлежность к области $|z|\leqslant a-h$, $s=4$ — к области $z>a+h$, $s=5$ — к области $z\leqslant -a-h$.

Объемные силы электромагнитного происхождения определяются в данной задаче по формулам

$$\Gamma_{xs}=\frac{\mu\sigma}{c}\left\{B_s h_{zs}-\left[e_{zs}+\frac{\mu}{c}\left(H_{oys}\frac{\partial u_{xs}}{\partial t}-H_{oxs}\frac{\partial u_{ys}}{\partial t}\right)\right]H_{oys}\right\}+\rho_s C_s$$

$$\Gamma_{ys}=\frac{\mu\sigma}{c}\left\{\left[e_{zs}+\frac{\mu}{c}\left(H_{oys}\frac{\partial u_{xs}}{\partial t}-H_{oxs}\frac{\partial u_{ys}}{\partial t}\right)\right]H_{oxs}-C_s h_{zs}\right\}-\rho_s B_s \tag{1.4}$$

где

$$B_1=E_1,\quad B_2=0,\quad C_1=0,\quad C_2=E_2,\qquad (s=1,\ 2)$$

$$\Gamma_{z1}=\frac{\mu\sigma}{c}\left[H_{oy1}\left(e_{x1}-\frac{\mu}{c}\frac{\partial u_{z1}}{\partial t}H_{oy1}\right)-H_{ox1}\left(E_1+e_{y1}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial u_{z1}}{\partial t}H_{ox1}\right)-E_1 h_{x1}\right]$$

$$\Gamma_{z2}=\frac{\mu\sigma}{c}\left[H_{oy2}\left(E_2+e_{x2}-\frac{\mu}{c}\frac{\partial u_{z2}}{\partial t}H_{oy2}\right)-H_{ox2}\left(e_{y2}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial u_{z2}}{\partial t}H_{ox2}\right)-E_2 h_{y2}\right]$$

Уравнения (1.2) и (1.3) рассматриваются совместно с уравнениями движения пластин, учитывающими силы и моменты, обусловленные объемными силами (1.4).

2. В приведенной постановке решение задач магнитоупругости представляет значительные трудности. Использование гипотез магнитоупругости, предложенных и обоснованных в работах [1, 2], позволяет преодолеть эти трудности. Гипотезы магнитоупругости для данной задачи аналитически записываются следующим образом:

$$u_{xs}=-[z-(-1)^s a]\frac{\partial w_s}{\partial x},\qquad u_{ys}=-[z-(-1)^s a]\frac{\partial w_s}{\partial y}$$

$$u_{zs}=w_s(x,\ y,\ t),\qquad e_{xs}=\varphi_s(x,\ y,\ t),\qquad e_{ys}=\psi_s(x,\ y,\ t) \tag{2.1}$$

$$h_{zs}=f_s(x,\ y,\ t),\qquad (s=1,\ 2)$$

Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля определяются из уравнений (1.2) через функции φ_s, ψ_s, f_s, w_s, h^+_{xs}, h^-_{xs}, h^+_{ys}, h^-_{ys} в следующем виде:

$$h_{xs}=\frac{h^+_{xs}+h^-_{xs}}{2}+[z-(-1)^s a]\left(\frac{\partial f_s}{\partial x}-\frac{4\pi\sigma}{c}\psi_s\right)+$$

$$+\frac{(-1)^{s-1}}{2^{2-s}}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^s\frac{\mu}{c}E_1\left\{[z+(-1)^s a]^{3-s}h^{s-1}-\frac{h^2}{2}[1-(-1)^s]\right\}\frac{\partial w_s}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$h_{ys}=\frac{h_{ys}^{+}+h_{ys}^{-}}{2}+[z+(-1)^{s}a]\left(\frac{\partial f_{s}}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi_{s}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{s-1}}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^{2}\frac{\mu}{c}E_{s}\left\{[z+(-1)^{s}a]^{s}h^{2-s}-\frac{h^{2}}{2}[1+(-1)^{s}]\right\}\frac{\partial w_{s}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$e_{zs}=\frac{cM_{s}}{4\pi\sigma}-\frac{4\pi\sigma\mu}{c^{2}}\left\{hE_{s}\frac{3^{s-1}[z+(-1)^{s}a]^{s}-\frac{h^{2}}{2}[1+(-1)^{s}]}{2^{s-2}}\frac{\partial^{2}w_{s}}{\partial x\partial t}-\right.$$

$$\left.-E_{1}\frac{(-1)^{s}3^{2-s}[z+(-1)^{s}a]^{3-s}-\frac{h^{2}}{2}[1-(-1)^{s}]}{2^{2-s}}\frac{\partial^{2}w_{s}}{\partial y\partial t}\right\}-$$

$$-[z+(-1)^{s}a]\left(\frac{\partial\varphi_{s}}{\partial x}+\frac{\partial\psi_{s}}{\partial y}\right)$$

h_{xs}^{-}, h_{xs}, h_{ys}, h_{ys}^{-} — значения компонентов h_{xs}, h_{ys} при $z=(a+h)(-1)^{s+1}$ соответственно;

$$M_{s}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_{ys}^{+}-h_{ys}^{-}}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_{xs}^{+}-h_{xs}^{-}}{2}\right)$$

Осредняя уравнения (1.2) по z так, как это делается в работах [1, 2], и присоединяя уравнения движения пластин, получим следующие уравнения, определяющие неизвестные функции φ_s, ψ_s, f_s, w_s

$$\frac{\partial f_{s}}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi_{s}=(-1)^{s-1}\frac{h_{ys}^{+}-h_{ys}^{-}}{2h}+\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^{2}\frac{h\mu}{c}G_{s}\frac{\partial w_{s}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f_{s}}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\psi_{s}=(-1)^{s-1}\frac{h_{xs}^{+}-h_{xs}^{-}}{2h}-\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^{2}\frac{h\mu}{c}G_{s}\frac{\partial w_{s}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\psi_{s}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{s}}{\partial y}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial f_{s}}{\partial t},\quad G_{1}=E_{2},\quad G_{2}=0,\quad G_{1}=0,\quad G_{2}=E_{1}$$

$$D\Delta^{2}w_{s}+2\rho h\frac{\partial^{2}w_{s}}{\partial t^{2}}=R_{zs}+\frac{\partial m_{xs}}{\partial x}+\frac{\partial m_{ys}}{\partial y},\qquad (s=1,2)$$

Здесь R_{zs}, m_{xs}, m_{ys} — нормальная сила и моменты, обусловленные объемными силами электромагнитного происхождения (1.4), в рассматриваемом случае определяются по формулам

$$R_{zs}=\frac{2(-1)^{s}\mu\sigma h}{c}\left\{\frac{h_{x_s s}^{+}+h_{x_s s}^{-}}{2}E_{s}-\frac{(-1)^{s}4\pi\sigma h}{c}A_{s}\left[\frac{1+(-1)^{s}}{2}\varphi_{s}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1-(-1)^{s}}{2}\psi_{s}+\frac{4\pi\mu\sigma h}{c^{2}}A_{s}\frac{\partial w_{s}}{\partial t}\right]\right\} \tag{2.4}$$

$$m_{x_s s} = -\frac{8\pi\sigma^2\mu h^4}{3c^2} A_s \left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x} + \frac{\partial\psi_s}{\partial y} + \frac{4\pi\sigma h\mu}{c^2} A_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_s \partial t}\right)$$

$$m_{y_s s} = \frac{8\pi\sigma^2\mu h^3}{3c^2} E_s \left(\frac{cM_s}{4\pi\sigma} + \frac{4\pi\sigma\mu h^2}{5c^2} E_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y_s \partial t}\right) - \tag{2.4}$$

$$+ \frac{\varepsilon h}{4\pi} (e^+_{zs} - e^-_{zs}) E_s - \frac{M_s 2h\sigma c}{(4\pi)^2 \sigma} E_s + \frac{\sigma(\varepsilon\mu - 1)}{c^2} E_s^2 \frac{2}{3} h^3$$

$$A_1 = E_2, \quad A_2 = -E_1, \quad (x_1 = x, \ x_2 = y), \quad (y_1 = y, \ y_2 = x), \quad (s = 1, 2)$$

Уравнение (2.3) необходимо решать совместно с уравнениями (1.3) при общих граничных условиях на поверхностях раздела сред $z = a + h$, $a - h$, $-a + h$, $-a - h$. На поверхности раздела $z = a - h$ эти условия согласно работе [3] имеют вид

$$h_{x1} = h_{x3}, \quad h_{y1} = h_{y3}$$

$$h_{z1} = \frac{1}{\mu} h_{z3} - (\mu - 1)\frac{4\pi\sigma h}{c} E_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} - (\mu - 1)\frac{4\pi\sigma h}{c} E_2 \frac{\partial w_1}{\partial y}$$

$$e_{x1} = e_{x3} - \frac{\mu(\mu - 1) 4\pi h\sigma}{c^2} E_2 \frac{\partial w_1}{\partial t}, \quad e_{y1} = e_{y3} + \frac{\mu(\mu - 1) 4\pi h\sigma}{c^2} E_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} \tag{2.5}$$

$$e_{z1} = \frac{1}{\varepsilon} e_{z3} + E_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}$$

Аналогичным образом записываются граничные условия на остальных поверхностях раздела.

3. Рассмотрим задачу колебаний двух параллельных токонесущих пластин в случае, когда $\varepsilon = \mu = 1$. Представляя решения (2.3) и (1.3) в виде

$$Q_s = Q_{s0} \exp i(\omega t - k_2 x - k_1 y), \qquad Q_{s0} = \mathrm{const}, \qquad (s = 1, 2)$$

$$Q_s = Q_{s0}(z) \exp i(\omega t - k_2 x - k_1 y), \qquad (s = 3, 4, 5) \tag{3.1}$$

где Q_s — любая из искомых функций, входящих в уравнения (2.3) и (1.3), получим обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $Q_{s0}(z)$ $(s = 3, 4, 5)$. Решая эти уравнения и удовлетворяя граничным условиям на поверхностях раздела типа (2.5) и условиям затухания на бесконечности, после преобразований получим следующую систему уравнений относительно амплитуд прогибов колебаний ω_{10} и ω_{20}:

$$\left\{\Omega^2 + \left[\alpha_2\beta_6 E_1 E_2 + (\alpha_1\gamma_5 + \alpha_3) E_2^2 + \frac{\alpha_2 k_1^2 h^2}{15} E_1^2\right]\Omega + 1 + \lambda_1 E_1^2\right\}\omega_{10} +$$

$$+ (\alpha_2\alpha_6 E_1^2 + \alpha_1\alpha_6 E_1 E_2)\,\Omega\omega_{20} = 0$$

$$(\alpha_2\beta_7 E_2^2 + \alpha_1\beta_9 E_1 E_2)\,\Omega\omega_{10} + \tag{3.2}$$

$$+ \left\{\Omega^2 + \left[\alpha_2\alpha_7 E_1 E_2 + (\alpha_1\alpha_8 + \alpha_2) E_1^2 + \frac{\alpha_2 k_2^2 h^2}{15} E_2^2\right]\Omega + 1 + \lambda_2 E_2^2\right\}\omega_{20} = 0$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\nu=\sqrt{n-\frac{\omega^2}{c^2}},\quad n=k_1^2+k_2^2,\quad \Omega_0^2=\frac{Dn^2}{2\rho h},\quad \Omega=\frac{\omega i}{\Omega_0}$$

$$\alpha_5=\frac{S}{R}$$

где

$$S=A_1+ck_1\{\alpha_1 h\nu(\omega+4\pi\sigma i)+\alpha_3[(4\pi\sigma h\nu i-h\omega\nu-\omega)e^{2(a-h)\nu}+$$
$$+8\pi\sigma h^2\nu^2 i\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu]\}$$

$$R=\omega(8\pi\sigma h\nu i-\omega e^{2(a-h)\nu})+2(4\pi\sigma h\nu)^2\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu$$

$$\alpha_6=-\frac{n}{k_2\nu\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu}\Bigg[\nu^2\left(1+\frac{k_1^2c^2i}{4\pi\sigma\omega}\right)(\alpha_3+\alpha_1e^{-2(a-h)\nu})+$$
$$+\left(1+\frac{nc^2i}{4\pi\sigma\omega}\right)\left(k_1\alpha_5-\frac{4\pi\sigma i}{c}\alpha_5\right)\frac{2h\nu k_1\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu}{e^{2(a-h)\nu}}\Bigg]$$

$$\alpha_7=\frac{n}{\nu\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu}\Bigg\{\frac{2\omega}{c}\left(1+\frac{nc^2i}{4\pi\sigma\omega}\right)\left(1+\frac{4\pi\sigma h\nu i}{\omega}\right)\alpha_5\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu-$$
$$-\left(\frac{c^2\nu^2i}{4\pi\sigma\omega}+\frac{\omega^2h^2}{3c^2}\right)k_1\alpha_1+\Bigg[\left(\frac{\omega i}{4\pi\sigma}-\frac{\omega^2h^2}{3c^2}+1\right)e^{2(a-h)\nu}-$$
$$-\left(1+\frac{nc^2i}{4\pi\sigma\omega}\right)(e^{2(a-h)\nu}+2h\nu\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu)\Bigg]k_1\alpha_3\Bigg\}$$

$$\alpha_8=\frac{2nhci}{\Omega_0}\Bigg[\frac{ck_2}{\omega}(e^{2(a-h)\nu}+2h\nu\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu)\alpha_3+\frac{ck_1}{\omega}\left(\frac{h^2\omega^2}{c^2}+1\right)\alpha_4+$$
$$+\left(e^{2(a-h)\nu}-\frac{8\pi\sigma h\nu i\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu}{\omega}\right)\alpha_5\Bigg] \tag{3.3}$$

$$\alpha_9=-\frac{2nhi}{k_2\Omega_0}(ck_1\alpha_5+\omega\alpha_3),\quad A_\alpha=0,\quad A_1=\frac{\omega n}{c\nu\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu},\quad (\alpha=2,3)$$

$$\alpha_1=\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^3\frac{\sigma h^2}{c^3\rho},\quad \alpha_2=\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2\frac{\sigma h^2}{c^2\rho\Omega_0},\quad \lambda_j=\frac{hk_j^2}{2\pi n^2\rho},\quad (j=1,2)$$

$$\alpha_3=\frac{k_2c^2(c^2\nu e^{2(a-h)\nu}+8\pi h\sigma\omega i+2nhc^2)\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu}{n[(c^2\nu e^{2(a-h)\nu}+8\pi h\sigma\omega i+2nhc^2)^2-c^4\nu^2]}$$

$$\alpha_4=\frac{k_2c^4\nu\,\mathrm{sh}\,2(a-h)\nu}{n[(c^2\nu e^{2(a-h)\nu}+8\pi h\sigma\omega i+2nhc^2)^2-c^4\nu^2]}$$

$$\beta_3=-\frac{k_1}{k_2}\alpha_3,\quad \beta_4=-\frac{k_1}{k_2}\alpha_4$$

Остальные искомые величины выражаются через ω_1 и ω_2. Приведем некоторые из них:

$$f_1 = \left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{2h^2 n\omega}{c} \left(\alpha_4 E_1 \omega_2 + \beta_4 E_2 \omega_1\right)$$

$$f_2 = \left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{2h^2 n\omega}{c} \left(\alpha_3 E_1 \omega_2 + \beta_3 E_2 \omega_1\right)$$

Приравняв детерминант (3.2) нулю, получим характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний.

В общем случае характеристическое уравнение оказывается трансцендентным.

4. Для простоты рассмотрим задачу в случае, когда колебания не зависят от координаты y. Тогда система уравнений (3.2) примет следующий вид:

$$\left[\Omega^2 + \alpha_2 E_2^2 (1 - 4\pi\sigma\gamma_3)\,\Omega + 1\right] \omega_{10} + \alpha_2 \left(p\gamma_2 - q_2\gamma_3\right) E_1^2\, \Omega\, \omega_{20} = 0$$

$$\left[\frac{p\gamma_1 \Omega_0^2}{\nu_1^4}\,\Omega^3 - \left(q_2\gamma_3 + \frac{\alpha_2 k_2^2 c^2 p}{4\pi\sigma\nu_1}\right)\Omega_0\,\Omega^2 + \frac{c^2\gamma_3 q_2 k_2^2}{4\pi\sigma}\,\Omega\right] \frac{\alpha_2}{\nu_1^2}\, E_2^2\, \omega_{10} + \tag{3.4}$$

$$+ \left[1 + (1 - \alpha_1\gamma_1 E_1^2)\,\Omega^2 + \alpha_1\left(E_1^2 + \frac{h^2 k_2^2}{15} E_2^2\right)\Omega + \frac{h}{2\pi k_2^2 D}\, E_2^2\right] \omega_{20} = 0$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma_1 = q_1/(q_1^2 - q_2^2), \quad \gamma_2 = q_2/(q_1^2 - q_2^2), \quad \gamma_3 = q_3 \Big/ \left(q_3^2 + \frac{\omega^2}{\nu_1^4}\, q_2^2\right)$$

$$\gamma_4 = q_2 \Big/ \left(q_3^2 + \frac{\omega^2}{\nu_1^4}\, q_2^2\right), \quad \nu_1^2 = k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad p = \frac{\nu_1}{2h}\left(\operatorname{cth} 2(a-h)\,\nu_1 - 1\right)$$

$$q_3 = \frac{\omega i}{2h\nu_1}\left(1 + \operatorname{cth} 2(a-h)\,\nu_1\right) + 4\pi\sigma, \quad \Omega_0^2 = \frac{k_2^4 D}{2\rho h}, \quad \Omega = \frac{\omega i}{\Omega_0}$$

$$q_1 = k_2^2 + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\,\Omega_0\Omega + \frac{\nu_1}{2h}\left(1 + \operatorname{cth} 2(a-h)\,\nu_1\right), \quad q_2 = \frac{\nu_1}{2h\,\operatorname{sh} 2(a-h)\,\nu_1}$$

Остальные искомые величины выражаются через ω_1 и ω_2. Приведем некоторые из них:

$$f_1 = -\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{hk_2\omega}{c}\,\gamma_2 E_1 \omega_2, \qquad f_2 = -\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{hk_2\omega}{c}\,\gamma_1 E_1 \omega_2$$

$$\varphi_1 = -\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 hi\omega\gamma_3 E_2 \omega_1, \qquad \varphi_2 = \left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{\omega^2 h}{\nu_1^2}\,\gamma_4 E_2 \omega_1$$

Приравняв детерминант системы (3.4) нулю, получим характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний. Пренебрегая ω^2/c^2 по сравнению с k_2^2 и предполагая $2(a-h)k_2 \gg 1$, то есть предполагая, что расстояние между пластинами намного больше длины волны, рассмотрим частные случаи.

а) При $E_x = 0$ характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний, распадается на два уравнения

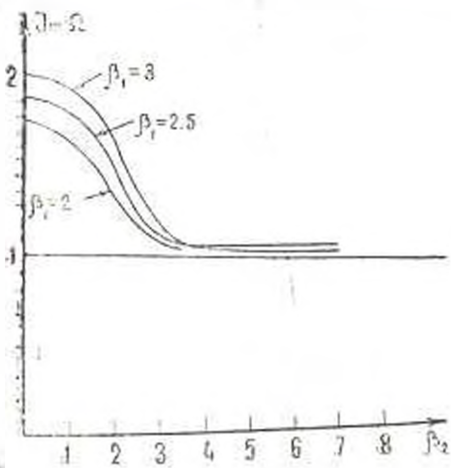
$$\Omega^2 + 1 = 0$$

$$\Omega^3 + \beta_2 \Omega^2 + (1 + \beta_1) \Omega + \beta_2 = 0 \tag{3.5}$$

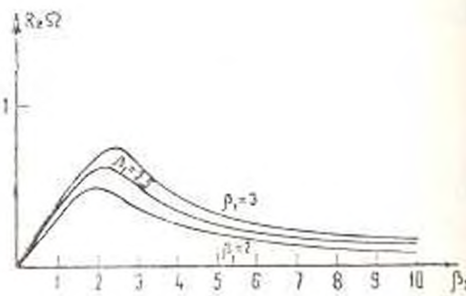
$$\beta_1 = \frac{4\pi h k_2 (k_2 h + 1)}{c^2 \rho \Omega_0^2} J_1, \qquad \beta_2 = \frac{k_2 (k_1 h + 1) c^2}{4\pi \sigma h \Omega_0}$$

Первое уравнение из (3.5) показывает, что колебания первой пластины не зависят от электрического поля, то есть отсутствует взаимодействие между пластинами.

Характеры изменения частоты колебания и коэффициента затухания второй пластины в зависимости от изменения проводимости β_2 и плотности электрического тока β_1 приведены на фиг. 1, 2.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Из фиг. 1 видно, что частота колебания второй пластины имеет максимум при $\beta_2 \to 0$ ($\sigma \to \infty$) и уменьшается при возрастании β_2 (уменьшение σ). При $\beta_2 \to \infty$ ($\sigma \to 0$) частота колебания стремится к частоте собственного колебания пластины.

Увеличение плотности тока β_1 приводит как к увеличению, так и к уменьшению частоты колебания в зависимости от значения β_2.

Из фиг. 2 видно, что коэффициент затухания вначале возрастает с возрастанием β_2, достигает максимума при определенном значении β_2, затем уменьшается и в пределе стремится к нулю при $\beta_2 \to \infty$ ($\sigma \to 0$).

Численное решение второго уравнения из (3.5) показывает, что коэффициент затухания возбужденного электромагнитного поля возрастает с возрастанием β_2 (уменьшением σ).

б) При $E_z = 0$ характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний, распадается на два уравнения

$$\Omega^2 + 2\delta\Omega + \gamma = 0$$
$$\Omega^3 + \alpha(1-\beta)\,\Omega^2 + \Omega + \alpha = 0 \tag{3.6}$$

где

$$\delta = \alpha_2 \frac{h^2 k_2^2}{30} E_2^2, \quad \gamma = 1 + \frac{hE_2^2}{2\pi k_2^3 D}, \quad \alpha = \frac{4\pi\sigma h k_0}{\Omega_0}, \quad \beta = \frac{4\pi h}{c^2 \rho k_0} J_1^2$$

Первое уравнение из (3.6) определяет колебания и затухания второй пластины. Его решение показывает, что при $\delta^2 < \gamma$ затухание возмущения в пластине имеет колебательный характер с частотой $(\gamma-\delta^2)^{1/2}\,\Omega_0$ и коэффициентом затухания $\delta\Omega_0$.

При $\delta^2 \geqslant \gamma$ возмущения затухают без колебаний с коэффициентом затухания $[\delta + (\delta^2-\gamma)^{1/2}]\,\Omega_0$.

Считаю долгом выразить благодарность участникам семинара «Электродинамика сплошных деформируемых сред» за обсуждение настоящей работы и ценные замечания.

Ереванский армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 2 X 1975

Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում են երկու զուգահեռ հոսանքատար առաձգական սալեր, որոնք գտնվում են միմյանցից որոշակի հեռավորության վրա։

Էլեկտրական հոսանքների ազդեցությունները սալերում միմյանց ուղղահայաց են և զուգահեռ են սալերի միջին մակերևույթներին։

Բարակ մարմինների համար մագնիսաառաձգականության վարկածների հիման վրա ստացված են սալերի մագնիսաառաձգական տատանումների հավասարումները։ Ստացված է խնդրին համապատասխանող բնութագրիչ հավասարում, որը հանդիսանում է տատանումների հաճախականությունների որոշման հավասարում։ Այդ հավասարումը ուսումնասիրված է տարբեր մասնավոր դեպքերում։

Բերված են թվային արդյունքներ։

MAGNETOELASTIC VIBRATIONS OF TWO PARALLEL CURRENT-CARRING PLATES

L. V. VARDANIAN

Summary

On the basis of magnetoelasticity hypothesis the equations for magnetoelastic vibrations of two parallel current-carring plates are de-

duced. The directions of the electric currents in the plates are perpendicular.

The frequency of oscillations and the law of damping, depending on electric current density, are defined for a special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. *Белубекян М. В.* К уравнениям магнитоупругости токонесущих пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

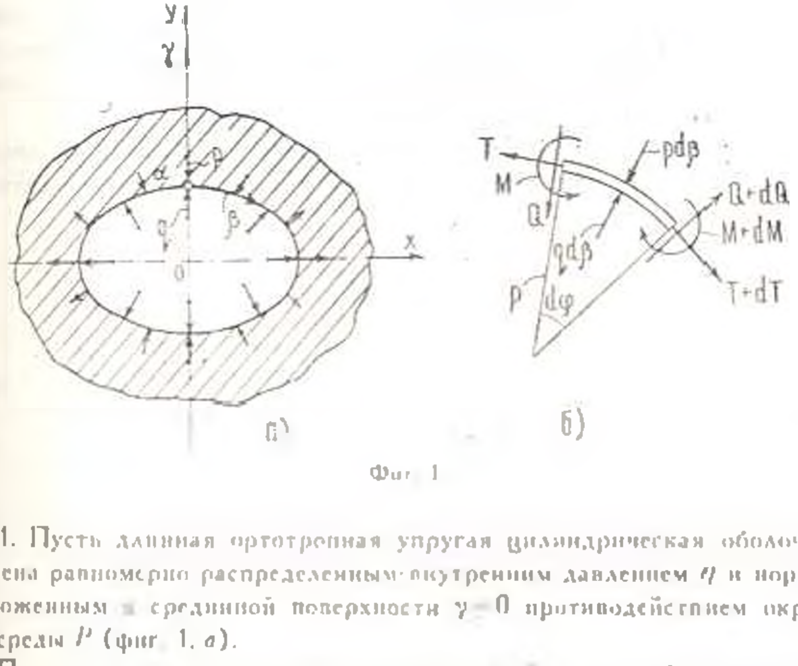
Г. З. МИКАЕЛЯН

РАВНОВЕСИЕ ДЛИННОЙ ГИБКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ УПРУГОМ ОГРАНИЧЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассматриваются большие прогибы длинной ортотропной замкнутой некруговой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением q.

Предполагается, что оболочка имеет выпуклое поперечное сечение с двумя осями симметрии и по внешней поверхности связана со сплошной средой.

Считается, что нормальным перемещениям оболочки окружающая среда отвечает противодействием с интенсивностью p, пропорциональной этим перемещениям ($p = kw$), а на тангенциальные перемещения не реагирует, то есть считается, что среда является винклеровским основанием для оболочки. В такой постановке решены многие задачи устойчивости круговых цилиндрических и сферических оболочек, связанных с упругой средой по внешней или внутренней поверхности. Анализ этих работ приводится в обзорной статье [2].



Фиг. 1

1. Пусть длинная ортотропная упругая цилиндрическая оболочка загружена равномерно распределенным внутренним давлением q и нормально приложенным к срединной поверхности $\gamma = 0$ противодействием окружающей среды P (фиг. 1, *а*).

Принимаются предположения классической теории оболочек и теории оболочек большого прогиба [1].

Считается, что в процессе деформации цилиндрическая форма срединной поверхности оболочки с двумя плоскостями симметрии не нарушается.

В силу принятых предположений для рассматриваемой гибкой оболочки получаются следующие уравнения и соотношения [1, 3].

Уравнения равновесия дифференциального элемента оболочки (фиг. 16)

$$\frac{dT}{d\beta} + \frac{N}{\rho} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{T}{\rho} - \frac{dN}{d\beta} = q - p \tag{1.2}$$

$$\frac{dM}{d\beta} = N \tag{1.3}$$

Для изгибающего момента M, внутренней силы T и кривизны деформированного элемента оболочки $\frac{1}{\rho}$ имеем:

$$M = D\varkappa, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \tag{1.4}$$

$$T = C\varepsilon, \qquad C = \frac{Eh}{1-\nu_1\nu_2} \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \varkappa \tag{1.6}$$

где D и C — жесткости ортотропной оболочки на изгиб и на растяжение по направлению β, E — модуль упругости по главному направлению упругости β, ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона по главным направлениям α и β, R и h — радиус и толщина оболочки.

Тангенциальная деформация ε и изменение кривизны $\varkappa$ срединной поверхности оболочки выражаются через перемещения v и w следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{dv}{d\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 + \frac{w}{R} \tag{1.7}$$

$$\varkappa = -\frac{d^2w}{d\beta^2} - \frac{w}{R} \tag{1.8}$$

Из системы уравнений (1.1)—(1.3), согласно (1.4), получим

$$T = T_0 - D\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\varkappa}{\rho} \tag{1.9}$$

$$\frac{T}{\rho} - D\frac{d^2\varkappa}{d\beta^2} = q - kw \tag{1.10}$$

где T_0 — постоянная интегрирования.

Значение T_0 определим из условия замкнутости оболочки

$$\int_0^l \frac{dv}{d\beta}\, d\beta = 0 \tag{1.11}$$

Здесь l — длина средней линии поперечного сечения оболочки.

Из (1.7) и (1.5) для $\frac{dv}{d\beta}$ получим

$$\frac{dv}{d\beta} = \frac{T}{C} - \frac{w}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 \tag{1.12}$$

Подставляя значения $\frac{dv}{d\beta}$ из (1.12) в (1.11) и учитывая (1.9), для T_0 будем иметь

$$T_0 = -\frac{1}{l}\int_0^l \left[D\int_{\chi_0}^{\chi} \frac{d\chi}{\rho} - \frac{Cw}{R} - \frac{C}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 \right] d\beta \tag{1.13}$$

Уравнение равновесия оболочки (1.10), с учетом (1.6), (1.8), (1.9) и (1.13), приводится к виду

$$\begin{aligned} \Phi \equiv \Bigg\{ \frac{1}{l}\int_0^l \Bigg[D\int_{\beta_0}^{\beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2}\right) d\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2}\right) + \\ + \frac{Cw}{R} + \frac{C}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 \Bigg] d\beta + \\ + D\int_{\beta_0}^{\beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2}\right) d\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2}\right)\Bigg\} \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2}\right) + \\ + D\frac{d^2}{d\beta^2}\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2}\right) + kw - q = 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Таким образом, определение нормальных перемещений оболочки сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (1.14).

2. Уравнение (1.14) будем интегрировать методом Бубнова—Галеркина.

Пусть радиус кривизны средней линии поперечного сечения оболочки имеет вид

$$R = R_0(1 + \varepsilon_0 \cos \lambda\beta) \tag{2.1}$$

где

$$0 \leqslant \varepsilon_0 < 1, \qquad \lambda = \frac{4\pi}{l}, \qquad l = 2\pi R_0\sqrt{1 - \varepsilon_0^2} \tag{2.2}$$

Согласно (2.1) параметрические уравнения кривой в декартовой системе координат xoy (фиг. 1, а) запишутся следующим образом:

$$x = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{1+\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}}\sin\frac{\lambda\beta}{2}\right)$$

$$y = -\frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}}\operatorname{Arsh}\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}}\cos\frac{\lambda\beta}{2}\right) \tag{2.3}$$

Интересно отметить, что при определенных значениях ε_0 $\left(\text{например, } 0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{3}\right)$ кривая (2.3) практически не отличается от эллипса.

Решение уравнения (1.14) представим в виде

$$w = w_0 + f\cos\lambda\beta \tag{2.4}$$

Представление (2.4) соответствует основному предположению о характере деформации оболочки.

Согласно методу Бубнова—Галеркина необходимо выписать следующие уравнения:

$$\int_0^l \Phi\, d\beta = 0, \qquad \int_0^l \Phi\cos\lambda\beta\, d\beta = 0 \tag{2.5}$$

Подставляя выражения R и w из (2.1) и (2.4) в (1.14) и выполняя интегрирование (2.5)*, получим следующую систему двух алгебраических уравнений относительно безразмерных параметров нормального перемещения оболочки γ_0 и $\bar{f}$:

$$\left\{2\varepsilon_0^2\theta^3\gamma_0^3 + [2\varepsilon_0(\delta^2-1)\theta^3]\gamma_0^2 + \left[\frac{1}{2}\theta^3(\delta^2-1)^2 - 3\delta^2\theta\right]\gamma_0\right\}\bar{f}^3 +$$

$$+\left\{\delta(6-\theta^2)\gamma_0^2 - \left[\frac{1}{2}\delta(\delta^2-1)\frac{\theta^2}{\varepsilon_0} - \frac{12}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{\delta}{2}\right) - \varepsilon_0(\delta^2-1)\theta^2\right]\gamma_0 -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\varepsilon_0}\right)^2(\delta^2-1)^2\right\}\bar{f}^2 + \left[(\bar{k}-J\theta)\gamma_0 + \frac{1}{2}(\delta^2-1)\frac{\theta}{\varepsilon_0}\right]\bar{f} - \bar{q} = 0 \tag{2.6}$$

$$\left\{-\varepsilon_0\theta^3(1+\varepsilon_0^2)\gamma_0^3 - \frac{1}{2}(\delta^2-1)\theta^3(1+3\varepsilon_0^2)\gamma_0^2 - 3\varepsilon_0\theta\left[\frac{1}{4}\theta^2(\delta^2-1)^2 - \delta^2\right]\gamma_0 -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\theta(\delta^2-1)\left[\frac{1}{4}\theta^2(\delta^2-1)^2 - 3\delta\right]\right\}\bar{f}^3 + \left\{-\varepsilon_0(\theta^2+6\delta)\gamma_0^2 +\right.$$

$$+\left[12\left(1-\frac{\delta}{2}\right) - (\delta^2-1)\theta^2 - 3\delta(\delta^2-1)\right]\gamma_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4}\theta^2(\delta^2-1)^2 +\right.$$

---

* Некоторые интегралы вычислены при помощи рядов.

$$
+ 9\delta^2(3-\delta) - 6\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\Big]\Big\}\bar f - \left[\theta\left(\frac{J}{\varepsilon_0} - \delta^2\varepsilon_0\right) - \frac{6\delta}{\varepsilon_0\theta}\right]\gamma_0 - \frac{1}{2}\bar k +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\theta(\delta^2-1)\left(\delta^2 - \frac{J}{\varepsilon_0^2}\right) + 12\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon_0^2\theta} = 0 \qquad (2.7)
$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$
\theta = \frac{h}{R_0}, \quad \gamma_0 = \frac{w_0}{f} = \frac{\bar w_0}{\bar f}, \quad \delta = \lambda R, \quad \bar w_0 = \frac{w_0}{h}, \quad \bar f = \frac{f}{h}
$$

$$
\bar k = k\frac{R_0^3 h}{D}, \quad \bar q = q\frac{R_0^2}{D}, \quad J = \frac{1}{2(1-\varepsilon_0^2)}\left[\varepsilon_0 \ln\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0} - \ln(1-\varepsilon_0^2)\right] \qquad (2.8)
$$

Подставляя в (1.9) значения T_0, $\frac{1}{\rho}$, $\varkappa$ соответственно из (1.13), (1.6), (1.8), с учетом (2.1) и (2.4) для безразмерного тангенциального усилия $\bar T$ получим

$$
\bar T = T\frac{R_0^2}{D} = \left[\varepsilon_0^2\theta^2\gamma_0^2 + \varepsilon_0\theta^2(\delta^2-1)\gamma_0 + \frac{1}{4}(\delta^2-1)\theta^2 + 3\delta^2\right]\bar f^2 -
$$

$$
+ \left[2\left(\theta\ln\sqrt{1-\varepsilon_0^2} + \frac{3\delta}{\theta}\right)\gamma_0 + 2\frac{\theta}{\varepsilon_0}(\delta^2-1)\ln\sqrt{1-\varepsilon_0^2} +\right.
$$

$$
\left. + \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{12}{\varepsilon_0\theta}\right]\bar f - \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\cos\lambda\beta) +\right.
$$

$$
\left. + \bar f\theta(2\varepsilon_0\gamma_0 + \delta^2 - 1)\frac{1}{2}\cos^2\lambda\beta - \theta\gamma_0\bar f\cos\lambda\beta\right](2\varepsilon_0\gamma_0 + \delta^2 - 1)\theta\bar f \qquad (2.9)
$$

Решая систему уравнений (2.6) и (2.7), определим все расчетные величины задачи.

В частном случае ортотропной круговой цилиндрической оболочки, когда $\varepsilon_0=0$, $J=0$, из (1.9) и (1.10), с учетом (1.6), (1.8), (1.13), (2.1), (2.4) и (2.8), получим соотношения, которые устанавливают простую связь между расчетными величинами ($\bar q$, $\bar w_0$, $\bar T$) оболочки

$$
\bar q = \left(\frac{12}{\theta} + \bar k\right)\bar w_0 - 12\bar w_0^2, \qquad \bar T = \frac{12}{\theta}\bar w_0 \qquad (2.10)
$$

3. Рассмотрим численный пример.

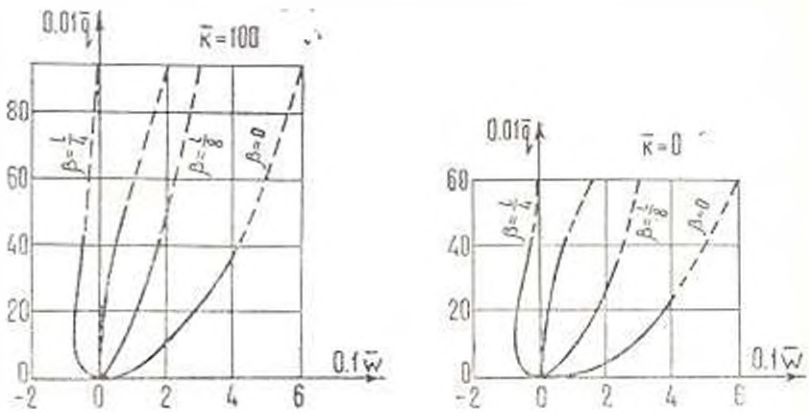
Пусть

$$
\varepsilon_0 = \frac{1}{3}, \qquad \theta = \frac{1}{50}
$$

Отношение полуосей поперечного сечения рассматриваемой оболочки, согласно (2.3), равно 0.7935.

Покажем характер изменения закономерности $\overline{q}-\overline{w}$ для точек $\beta=0$, $\beta=\frac{l}{8}$ и $\beta=\frac{l}{4}$ срединной поверхности оболочки при $\overline{k}=0$ и при наличии окружающей среды с параметром $\overline{k}=100$.

Задаваясь значением γ_0, из (2.7) определим соответствующее значение $\overline{l}$. Далее по известным значениям γ_0 и $\overline{l}$ из (2.6) находим соответствующее значение нагрузки $\overline{q}$.



Фиг. 2.

На фиг. 2 приведены кривые зависимости «нагрузка—прогиб» для рассматриваемой оболочки и для круговой цилиндрической оболочки с параметром $\theta=\frac{1}{50}$.

Сравнивая полученные кривые, замечаем, что в рассматриваемой задаче некруговая цилиндрическая оболочка, как и следовало ожидать, имеет весьма большую гибкость по сравнению с круговой. Это является результатом качественно отличающегося друг от друга поведения оболочек двух типов; некруговая цилиндрическая оболочка деформируется с интенсивным изменением формы поперечного сечения, а круговая — без изменения.

Что касается вопроса влияния окружающей среды, то, как показывают кривые, среда, в зависимости от коэффициента $\overline{k}$, может значительно ограничить нормальные перемещения оболочки, придавая ей дополнительную жесткость.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 18 XI 1975

Հ. Զ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ՄԵԾ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՃԿՈՒՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆԵՐՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ՏԱԿ՝ ՆՈՐՄԱԼ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտվում են օրթոտրոպ, ոչ շրջանային, առաձգական, փակ գլանային թաղանթի մեծ ճկվածքները հավասարաչափ բաշխված ներքին ճնշման տակ։ Ենթադրվում է, որ թաղանթն ունի երկու առանցքների նկատմամբ սիմետրիկ, ուռուցիկ լայնական կտրվածք և արտաքին մակերևույթով միացված է հոծ միջավայրի հետ։ Ընդունվում է, որ միջավայրը հանդես է գալիս որպես վինկլերյան հիմք։

Թաղանթի նորմալ տեղափոխությունների որոշման համար ստացված է ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարում, որը լուծվում է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով։

Թվային օրինակում բացահայտվում են դիտվող խնդրում շրջանային և ոչ շրջանային գլանային թաղանթների վարքերի որակապես տարբեր բնորոշ կողմերը։ Նշվում է, որ շրջապատող միջավայրը սահմանափակում է թաղանթի նորմալ տեղափոխությունները՝ տալիս է նրան լրացուցիչ կոշտություն։

EQUILIBRIUM OF A LONG FLEXIBLE CYLINDRICAL SHELL UNDER INTERNAL PRESSURE WITH ELASTIC LIMITATION ON NORMAL DISPLACEMENTS

H. Z. MIKAELIAN

S u m m a r y

Large deflections of an orthotropic closed non-circular elastic cylindrical shell connected with Vinkler foundation along the external surface are examined.

To determine the normal shell displacements an integro-differential equation is obtained solved by Bubnov-Galyorkin's method.

An example is presented to show characteristic aspects of qualitatively different from one another modes of behaviour of non-circular and circular cylindrical shells in the problem under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974.
2. *Иванов В. А.* Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим заполнителем. Тр. семинара по теории оболочек. Казань, вып. 2, 1971.
3. *Феодосьев В. И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М., Наука, 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Б. С. РЕЗНИКОВ

О НАЧАЛЬНОМ РАЗРУШЕНИИ АРМИРОВАННЫХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Армированные конструкции в процессе деформирования проявляют ряд особенностей поведения по сравнению с однородными конструкциями из традиционных материалов. В частности, они обладают свойствами ослабленного сопротивления поперечному сдвигу [1] и существенным влиянием структуры армирования на поведение конструкции [2].

Учет влияния поперечного сдвига на поведение анизотропных пластин исследовался в [3] при использовании гипотезы Тимошенко и ее обобщения в [4, 5]. В качестве основного предположения [4] используется статическое условие, что касательные напряжения по толщине пластинки меняются по заданному закону (в частности, по закону квадратной параболы). В [5] получены уравнения, основанные на кинематических гипотезах, которые соответствуют заданию закона изменения по толщине не только радиальных перемещений, но и нормальных перемещений. Использование кинематических гипотез [5] приводит к сложной системе дифференциальных уравнений даже в случае осесимметричного изгиба круглых пластин.

Необходимо отметить, что структура армирования входит в уравнения [1, 3—5] лишь косвенным путем.

В данной работе на основе обобщенной гипотезы Тимошенко (задается закон изменения радиальных перемещений по толщине) получены уравнения, соответствующие принятой кинематической гипотезе. При этом коэффициенты в разрешающих уравнениях в отличие от работ [1, 3—5] определяются расчетным путем с использованием значений механических характеристик элементов композиционного материала. Таким образом, полученные уравнения позволяют не только учесть влияние сдвига на напряженно-деформированное состояние армированной пластинки, но и исследовать вопросы о характере начального «разрушения», о величине нагрузки начального «разрушения», а также поставить и решить задачу о рациональном характере подбора механических параметров элементов композиции и структуры армирования пластинки с точки зрения прочности и жесткости.

1. При осесимметричном нагружении, закреплении и ортотропном армировании (с цилиндрической анизотропией) кольцевой пластинки все величины от угловой координаты φ не зависят, тогда

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = 0 \tag{1.1}$$

Пренебрегая обжатием, то есть полагая

$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{и} \quad w = w(r) \tag{1.2}$$

будем считать, что напряжения σ_z малы по сравнению с остальными нормальными напряжениями.

Если для армированного слоя принять предположения, изложенные в [6], и считать, для простоты и определенности, что имеем четыре семейства нитей армирования, два из которых расположены в главных геометрических направлениях, а два — под симметричными углами к радиальному направлению, то связь между осредненными напряжениями и деформациями для композиционного материала будет иметь вид

$$\sigma_r = a_{11}\varepsilon_r + a_{12}\varepsilon_\varphi, \qquad \sigma_\varphi = a_{12}\varepsilon_r + a_{22}\varepsilon_\varphi, \qquad \sigma_{rz} = a_{13}\varepsilon_{rz} \tag{1.3}$$

для нитей армирования —

$$\sigma_1^a = E_1^a\varepsilon_r, \qquad \sigma_2^a = E_2^a\varepsilon_\varphi, \qquad \sigma_3^a = E_3^a(\varepsilon_r\cos^2\psi + \varepsilon_\varphi\sin^2\psi) \tag{1.4}$$

и для связующего —

$$\sigma_r^c = \frac{E_c}{(1-\nu_c^2)}(\varepsilon_r + \nu_c\varepsilon_\varphi), \qquad \sigma_\varphi^c = \frac{E_c}{(1-\nu_c^2)}(\varepsilon_\varphi + \nu_c\varepsilon_r), \qquad \sigma_{rz}^c = a_{13}\varepsilon_{rz} \tag{1.5}$$

где

$$a_{jj} = a - a_2\sum_{i=1}^{4}\omega_i E_i^a l_{ji}^4 \qquad (j = 1,\ 2)$$

$$a_{12} = \nu_c a - a_2\sum_{i=1}^{4}\omega_i E_i^a l_{1i}^2 l_{2i}^2$$

$$a_{13} = E_c\left[2(1+\nu_c)a_1\right]^{-1}, \qquad l_{1i} = \cos\psi_i, \qquad l_{2i} = \sin\psi_i \tag{1.6}$$

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = \pi/2, \qquad \psi_3 = -\psi_4 = \psi, \qquad \omega_3 = \omega_4$$

$$a = a_1E_c(1-\nu_c^2)^{-1}$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения: r, φ и z — радиальная, тенгенциальная и нормальная координаты пластинки; u, w — смещения вдоль осей r и z; σ_r, σ_φ, σ_{rz} — нормальные и касательные напряжения в пластинке; $2h_0$, r_0, R_0 — толщина, внутренний и внешний радиусы пластинки; E_c, ν_c — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующего, E_i^a ($i = 1, 2, 3$) — модули Юнга материалов нитей армирования; ψ — углы между направлением оси „or" и направлением нитей углового армирования; ω_i ($i = 1, 2, 3$) — удельные интенсивности армирующих нитей в плоскости армированного слоя, a_2 ($a_2 = 1 - a_1$) — интенсивность армирующего слоя по толщине пластинки, v_a — удельное объемное содержание нитей армирования, которое определяется следующим образом:

$$v_a = (R_0^2 - r_0^2)^{-1}\, 2\int_{r_0}^{R_0} a_2(\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_3)\, r\,dr \tag{1.7}$$

Величины с индексом «a» относятся всюду к арматуре, а с индексом «c» — к слою связующего.

Для радиального смещения u примем зависимость [5]

$$u = u_0(r) + z\gamma(r) + z^2\gamma_2(r) + z^3\gamma_3(r) \tag{1.8}$$

которая соответствует разложению смещения $u(r, z)$ в ряд по степеням z. Зависимость (1.8) соответствует минимальному числу членов ряда, при котором возможно учесть сдвиговые напряжения в армированной пластинке, удовлетворяющие заданным условиям на поверхностях $z = \pm h_0$. Следует отметить, что при $\gamma_2(r) = \gamma_3(r) = 0$ соотношение (1.8) соответствует гипотезе Тимошенко С. П., а при $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ и $\gamma = -\dfrac{dw}{dr}$ (1.8) — гипотезе Кирхгофа-Лява.

В дальнейшем будут рассмотрены задачи, для которых касательные напряжения на поверхностях $z = \pm h_0$ равны нулю, то есть

$$\tau_{rz}\big|_{z=\pm h_0} = 0 \tag{1.9}$$

тогда, используя выражения для деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \qquad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dr} \tag{1.10}$$

и последнее соотношение из (1.3), нетрудно получить

$$\gamma_2 = 0, \qquad \gamma_3 = -\frac{1}{3h_0^2}(\gamma + w') \tag{1.11}$$

Дифференциальные уравнения изгиба кольцевой пластинки и граничные условия можно получить, используя принцип виртуальных перемещений, который в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_{r_0}^{R_0}\int_{-h_0}^{h_0} (\sigma_r\delta\varepsilon_r + \sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta + \sigma_{rz}\delta\varepsilon_{rz})\, r\,dr\,dz = \int_{r_0}^{R_0} q\,\delta w\, r\,dr +$$

$$+ \int_{-h_0}^{h_0} \{[p_r^0(R_0, z)\,\delta u(R_0, z) - p_z^0(R_0, z)\,\delta w(R_0)]\, R_0 -$$

$$+ [p_r^0(r_0, z)\,\delta u(r_0, z) + p_z^0(r_0, z)\,\delta w(r_0)]\, r_0\}\, dz \tag{1.12}$$

где $q(r)$ — распределенная нормальная нагрузка, действующая на пластинку; $p_r^0(R_0, z)$ и $p_r^0(r_0, z)$ — распределенные нагрузки, направленные вдоль оси r и приложенные в сечениях $r = r_0$ и $r = R_0$, соответственно; $p_z^0(R_0, z)$ и $p_z^0(r_0, z)$ — распределенные нагрузки, направленные вдоль оси z и приложенные в сечениях $r = r_0$ и $r = R_0$, соответственно. Подставляя (1.12) в (1.10) с учетом (1.8) и (1.11), выполняя интегрирование по частям и учитывая независимость вариаций δu_0, $\delta\gamma$ и δw, получим уравнения изгиба

$$T_\theta - \frac{d}{dr}(rT_r) = 0, \qquad M_\theta - \frac{d}{dr}(rM_r) + r\tilde{Q} = 0$$

$$\frac{d}{dr}(\tilde{Q}r) = -qr \tag{1.13}$$

и граничные условия

$$(T_r - T_r^0)\delta u_0 = 0, \qquad (\bar{M}_r - \bar{M}_r^0)\delta\gamma = 0$$

$$\alpha(M_r^{(1)} - M_r^{(1)0})\frac{d\delta w}{dr} = 0, \qquad (\tilde{Q} - Q^0)\delta w = 0 \tag{1.14}$$

где введены следующие обозначения:

$$T_{r(\theta)} = \int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{r(\theta)} dz, \qquad M_{r(\theta)} = \int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{r(\theta)} z dz, \qquad Q = \int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{rz} dz$$

$$M_{r(\theta)}^{(1)} = \frac{1}{3h_0^2}\int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{r(\theta)} z^3 dz, \qquad Q^{(1)} = \frac{1}{h_0^2}\int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{rz} z^2 dz \tag{1.15}$$

$$\bar{M}_{r(\theta)} = M_{r(\theta)} - \alpha M_{r(\theta)}^{(1)}, \qquad \tilde{Q} = Q - \alpha Q^{(1)} - \frac{\alpha}{r}\left[M_\theta^{(1)} - \frac{d}{dr}(rM_r^{(1)})\right]$$

и

$$T_r^0 = \int_{-h_0}^{h_0} p_r^0 dz, \qquad M_r^0 = \int_{-h_0}^{h_0} p_r^0 z dz, \qquad Q^0 = \int_{-h_0}^{h_0} p_z^0 dz$$

$$M_r^{(1)0} = \frac{1}{3h_0^2}\int_{-h_0}^{h_0} p_r^0 z^3 dz, \qquad \bar{M}_r^0 = M_r^0 - \alpha M_r^{(1)0} \tag{1.16}$$

Для удобства дальнейшего изложения в соотношения (1.13)—(1.16) введем параметр $\alpha = 0;\ 1$, смысл которого будет указан ниже.

Уравнения равновесия (1.13) по форме совпадают с известными [4] уравнениями изгиба в усилиях и моментах для круглых пластин, но «перерезывающая» сила $\tilde{Q}$ в (1.13) отличается от обычного значения перерезывающей силы некоторыми добавочными членами, которые, как будет показано далее, увеличивают порядок разрешающих дифференциальных уравнений в задаче изгиба пластинки и оказывают влияние на характер распределения касательных напряжений по координате «z» и максимальную величину нормальных напряжений.

Если в уравнениях (1.13) положить $\alpha = 0$, то соотношения (1.3)—(1.11), (1.13), (1.14), хотя и определяют сдвиговые напряжения в пластинке, как и в [4], но уравнения (1.13) при $\alpha = 0$ необходимо рассматривать как приближенные к уравнениям (1.13) при $\alpha=1$. Поэтому в дальнейшем уравнения (1.13) при $\alpha=0$ будем называть для простоты приближенными, а уравнения (1.13) при $\alpha=1$ — точными. Граничные условия для приближенных уравнений (1.13) нетрудно получить из (1.14), положив $\alpha=0$. Следует отметить, что для приближенных уравнений (1.13) граничные условия в случае жесткой заделки, как и в [4], могут иметь несколько вариантов, например, при $r=R_0$, $u_0=0$, $\frac{dw}{dr}=0$, $w=0$ или $u(R_0; h_0)=0$, $w=0$. Эта неоднозначность является следствием того, что количество постоянных, полученных при интегрировании приближенных уравнений (1.13) недостаточно, чтобы удовлетворить условию $u(z)=0$ на жестко защемленном крае пластинки. Для точных уравнений (1.13), которые имеют порядок выше, чем приближенные граничные условия в случае жесткой заделки определяются однозначно из (1.14)

$$u_0=\gamma=\frac{dw}{dr}=w=0 \tag{1.17}$$

Используя (1.8), (1.11) и (1.17), нетрудно показать, что на жестко защемленном крае пластинки в случае точных уравнений (1.13) имеет $u(z)=0$.

Рассмотрим пластинку с такой структурой армирования, что коэффициенты упругости $a_{ij}=\mathrm{const}$, ($i=1, 2$; $j=1, 2, 3$). Тогда, используя (1.3), (1.10), (1.11), (1.15) и (1.13), система уравнений (1.13) сводится к следующим уравнениям для определения функций u_0, γ и w:

$$r^2u_0''+ru_0'-u_0=0 \tag{1.18}$$

$$\gamma=\Psi+\frac{1}{5}\varkappa \tag{1.19}$$

$$w=\frac{4}{5}\int_{r_1}^{r}\varkappa\,dr-\int_{r_1}^{r}\Psi\,dr+C_1 \tag{1.20}$$

где функции Ψ и $\varkappa$ определяются из уравнений

$$r^2\Psi''+r\Psi'-\Psi=-\frac{3r}{2h_0^3a_{11}}\left(\int_{r_1}^{r}qr\,dr+C_2\right) \tag{1.21}$$

$$\varkappa=-\frac{3}{4h_0a_{13}r}\left(\int_{r_1}^{r}qr\,dr+C_2\right)\qquad \text{при}\quad \alpha=0 \tag{1.22}$$

и

$$r^2\varkappa''+r\varkappa'-\varkappa\left(1+\frac{210a_{13}}{h_0^2a_{11}}r^2\right)=\frac{315r}{2h_0^3a_{11}}\left(\int_{r_1}^{r}qr\,dr+C_2\right) \tag{1.23}$$

при $\alpha=1$.

C_1, C_2 — постоянные интегрирования, $\lambda^2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}$ и штрих — производная по „r".

Необходимо отметить, что коэффициенты в уравнениях (1.18)—(1.23) зависят от величин a_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$), которые, в отличие от работ [1, 4—5] определяются расчетным путем из соотношений (1.6) и зависят от механических характеристик элементов композиции, их объемного содержания и структуры армирования.

Из (1.18)—(1.23) видно, что система точных уравнений (1.13) ($\alpha = 1$) имеет восьмой порядок, а система приближенных уравнений (1.13) ($\alpha = 0$) — шестой. Таким образом, порядок дифференциальных уравнений (1.13) соответствует числу граничных условий (1.14).

Интегрируя уравнения (1.18), (1.21) и (1.23), получим

$$u_0 = C_3 r^{\lambda} + C_4 r^{-\lambda} \tag{1.24}$$

$$\Psi = r^{\lambda}\left(C_5 - \int_{r_0}^{r} r^{-\lambda}\varphi_1 dr\right) + r^{-\lambda}\left(C_6 + \int_{r_0}^{r} r^{\lambda}\varphi_1 dr\right) \tag{1.25}$$

и

$$\chi = I_1(\xi)\left[C_7 + \int_{k}^{\xi}\varphi_2\xi K_1(\xi)\,d\xi\right] + K_1(\xi)\left[C_8 - \int_{\xi_0 k}^{\xi}\varphi_2\xi I_1(\xi)\,d\xi\right] \tag{1.26}$$

(при $\alpha = 1$)

где C_3—C_8 — постоянные интегрирования

$$\varphi_1 = \frac{3}{4h_0^3 a_{11} r}\left(\int_{r_0}^{r} qr\,dr + C_2\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{315}{2h_0^3 a_{11} r}\left(\int_{r_0}^{r} qr\,dr - C_2\right)$$

$$\xi = \frac{r}{R_0}k, \quad k = R_0\sqrt{\frac{210 a_{33}}{a_{11}}}, \quad \xi_0 = \frac{R_0}{r_0}, \quad \xi_1 = \frac{r_0}{R_0}$$

$I_1(\xi)$ и $K_1(\xi)$ — функции Бесселя от чисто мнимого аргумента.

2. Соотношения (1.19), (1.20), (1.22), (1.24)—(1.26) и (1.3)—(1.5), (1.8), (1.10) позволяют определить не только распределение осевых смещений, деформаций и напряжений в пластинке, но также и величины напряжений во всех элементах (в связующем и арматуре) армированной пластинки. Последнее обстоятельство позволяет исследовать вопросы: о характере начального «разрушения», о величине нагрузки начального «разрушения», а также поставить и решить задачу о рациональном выборе механических параметров элементов композиции и структуры армирования пластинки с точки зрения прочности и жесткости.

В дальнейшем для удобства будем рассматривать только «простое» нагружение, тогда

$$q = pq_0(r), \qquad p_z^{\text{u}} = pp_{z0}(z), \qquad p_z^{\text{l}} = pp_{z0}(z) \tag{2.1}$$

и любое напряжение до начала „разрушения" можно представить в виде

$$\begin{gathered} \sigma_i^c = p\bar{\sigma}_i^c \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \\ \sigma_{i+1}^a = p\bar{\sigma}_{i+1}^a, \qquad \sigma_{i4}^a = p\bar{\sigma}_{i4}^a \end{gathered} \tag{2.2}$$

где q_0, p_{z0}, p_{z0} — заданные функции, а $p \geq 0$ — параметр нагружения, который для простоты будем называть нагрузкой.

Известно [7—9], что материал связующего многих реальных стекло-, боро- и углепластиков обладает различными характеристиками прочности при растяжении и сжатии. Поэтому будем считать, что связующее подчиняется условию прочности П. П. Баландина [10]. Тогда один из критериев начального «разрушения» пластинки примет вид

$$\max_{\substack{r_0 \leq r \leq R_0 \\ -h_0 \leq z \leq h_0}} \left|(\sigma_1^c)^2 + (\sigma_2^c)^2 - \sigma_1^c\sigma_2^c + 3(\sigma_{12}^c)^2 + (\sigma_c^- - \sigma_c^+)(\sigma_1^c + \sigma_2^c)\right| = \sigma_c^+\sigma_c^- \tag{2.3}$$

где $\sigma_c^{\pm}$ — пределы прочности материала связующего при растяжении (плюс) и сжатии (минус). При $\sigma_c^+ = \sigma_c^-$ условие (2.3) переходит в условие прочности Мизеса.

Для нитей армирования также примем, что пределы прочности при растяжении и сжатии различны. При этом под «разрушением» или пластическим поведением арматуры при сжатии будем понимать любое отклонение от упругого поведения, например, поведение арматуры в процессе ее выпучивания от сжатия в связующем. Учитывая, что нити армирования в принятой модели (1.4) являются одномерными, введем второй критерий начального «разрушения» пластинки в виде

$$\begin{gathered} \sigma_i^{a+} = \sigma_{ai}^+ \qquad \text{при} \quad \sigma_{i*}^a \geq 0 \\ \min_{p^a}\{\sigma_i^{a+} = \sigma_{ai}^+, \quad |\sigma_{i*}^a| = \sigma_{ai}^-\} \qquad \text{при} \quad \sigma_i^{a+} > 0 \text{ и } \sigma_{i*}^a < 0 \\ |\sigma_{i*}^a| = \sigma_{ai}^- \qquad \text{при} \quad \sigma_i^{a+} \leq 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \end{gathered} \tag{2.4}$$

где

$$\sigma_i^{a+} = \max_{\substack{r_0 \leq r \leq R_0 \\ -h_0 \leq z \leq h_0}} \sigma_i^a, \qquad \sigma_{i*}^a = \min_{\substack{r_0 \leq r \leq R_0 \\ -h_0 \leq z \leq h_0}} \sigma_i^a$$

$\sigma_{ai}^{\pm}$ — пределы прочности материалов нитей армирования i-того семейства при растяжении (плюс) и сжатии (минут).

Используя соотношения (2.3) и (2.4), можно определить нагрузки, соответствующие началу «разрушения» связующего p^c и арматуры

$$p^a = \min_{i = 1,\,2,\,3} (p_i^a) \tag{2.5}$$

где p_i^n — нагрузка, при которой начинают „разрушаться" нити i-того семейства. На основании (2.2) и (2.4) величина p_i^n определяется следующим образом:

$$p_i^n = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{ui}^{+}}{\overline{\sigma}_i^{n+}} & \text{при } \overline{\sigma}_i^{n-} > 0 \\[2ex] \min\left\{\dfrac{\sigma_{ui}^{+}}{\overline{\sigma}_i^{n+}}, \quad \dfrac{\sigma_{ui}^{-}}{|\overline{\sigma}_i^{n-}|}\right\} & \text{при } \overline{\sigma}_i^{n-} < 0 \text{ и } \overline{\sigma}_i^{n+} > 0 \\[2ex] \dfrac{\sigma_{ui}^{-}}{|\overline{\sigma}_i^{n-}|} & \text{при } \overline{\sigma}_i^{n+} < 0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

$$\overline{\sigma}_i^{n+} = \max_{\substack{\frac{r_0}{h_0} \le r \le \frac{R_0}{h_0}}} \overline{\sigma}_i^{n}, \qquad \overline{\sigma}_i^{n-} = \min_{\substack{\frac{r_0}{h_0} \le r \le \frac{R_0}{h_0}}} \overline{\sigma}_i^{n}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Практическое использование соотношения (2.3) для отыскания нагрузки p^c, соответствующей началу «разрушения» связующего, даже с помощью существующих численных методов весьма затруднительно. Во-первых, координаты точки r_*, z_*, в которой реализуется условие (2.3), должны определяться из системы трансцендентных уравнений. Получение этой системы, построение соответствующего метода численного счета и исследование его сходимости представляет значительные математические трудности. Во-вторых, величина нагрузки в соотношении (2.3) входит нелинейным образом, что приводит к зависимости координат r_*, z_* от величины нагрузки p. При этом, как величина нагрузки p^c, так и величины r_*, z_* в свою очередь зависят от параметров геометрии β_0, ξ_0, вида армирования ω_i, φ_i ($i = 1, 2, 3$) и механических характеристик материалов арматуры и связующего E_{ai}, E_c, ν_i, ν_c ($i = 1, 2, 3$). Поэтому в дальнейшем для упрощения численного счета, будем использовать условие прочности для связующего в виде параллелепипеда, описывающего в пространстве напряжения условие прочности П. П. Баландина (или вписанного в соответствующий эллипсоид) и стороны которого параллельны плоскостям $\tau_{rz}^c o \sigma_r^c$, $\tau_{rz}^c o \sigma_z^c$ и $\tau_{rz}^c o \sigma_{\theta}^c$. Тогда нагрузка, соответствующая началу „разрушения" связующего, определяется следующим образом:

$$p^c = \min\{p_{rz}^c,\ p_{r}^c,\ p_{z}^c\} \qquad (2.7)$$

где p_{rz}^c определяется из условия

$$\tau_*^c = \sqrt{\frac{\sigma_c^{+}\sigma_c^{-}}{3}} \qquad (2.8)$$

и $p_{n(\ldots)}^c$ из условия

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\sigma^{c*}_{r(\gamma)} = \sigma^{-}_{c0} & \text{при} \quad \sigma^{c}_{r(\gamma)} \leqslant 0 \\
\min\limits_{p>0} \{ \sigma^{c*}_{r(\gamma)} = \sigma^{+}_{c0}, \ |\sigma^{c}_{r(\gamma)*}| = \sigma^{-}_{c0} \} & \text{при} \quad \sigma^{c*}_{r(\gamma)} > 0 \ \text{и} \ \sigma^{c}_{r(\gamma)*} < 0 \\
|\sigma^{c}_{r(\gamma)*}| = \sigma^{-}_{c0} & \text{при} \quad \sigma^{c*}_{r(\gamma)} \leqslant 0
\end{array}
\right| \qquad (2.9)
$$

$$
\sigma^{c*}_{rz} = \max_{\substack{r_* \leqslant r \leqslant R_0 \\ -h_c \leqslant z \leqslant h_c}} |\sigma^{c}_{rz}|, \qquad \sigma^{c*}_{r(\gamma)} = \max_{\substack{r_* \leqslant r \leqslant R_0 \\ -h_c \leqslant z \leqslant h_c}} \sigma^{c}_{r(\gamma)}
$$

$$
\sigma^{c}_{r(\gamma)*} = \min_{\substack{r_* \leqslant r \leqslant R_0 \\ -h_c \leqslant z \leqslant h_c}} \sigma^{c}_{r(\gamma)}, \qquad \sigma^{\pm}_{c0} = \left| \sigma^{+}_{c} - \sigma^{-}_{c} \pm \sqrt{\frac{4}{3}\left[(\sigma^{+}_{c})^2 + (\sigma^{-}_{c})^2 - \sigma^{+}_{c}\sigma^{-}_{c}\right]} \right|.
$$

Используя (2.2), (2.8), (2.9), нетрудно получить

$$
p^{c}_{rz} = \sqrt{\frac{\sigma^{+}_{c}\sigma^{-}_{c}}{3}} \, \frac{1}{\bar{\sigma}^{c*}_{rz}} \tag{2.10}
$$

$$
p^{c}_{r(\gamma)} =
\begin{cases}
\dfrac{\sigma^{-}_{c0}}{\bar{\sigma}^{c*}_{r(\gamma)}} & \text{при} \quad \bar{\sigma}^{c}_{r(\gamma)*} \geqslant 0 \\[2ex]
\min\left\{ \dfrac{\sigma^{+}_{c0}}{\bar{\sigma}^{c*}_{r(\gamma)}}, \ \dfrac{\sigma^{-}_{c0}}{|\bar{\sigma}^{c}_{r(\gamma)*}|} \right\} & \text{при} \quad \bar{\sigma}^{c*}_{r(\gamma)} > 0, \quad \bar{\sigma}^{c}_{r(\gamma)*} < 0 \\[2ex]
\dfrac{\sigma^{-}_{c0}}{|\bar{\sigma}^{c}_{r(\gamma)*}|} & \text{при} \quad \bar{\sigma}^{c*}_{r(\gamma)} \leqslant 0
\end{cases} \tag{2.11}
$$

где

$$
\bar{\sigma}^{c*}_{rz} = \max_{\substack{r_* \leqslant r \leqslant R_0 \\ -h_c \leqslant z \leqslant h_c}} |\bar{\sigma}^{c}_{rz}|, \qquad \bar{\sigma}^{c*}_{r(\gamma)} = \max_{\substack{r_* \leqslant r \leqslant R_0 \\ -h_c \leqslant z \leqslant h_c}} \bar{\sigma}^{c}_{r(\gamma)}, \qquad \bar{\sigma}^{c}_{r(\gamma)*} = \min_{\substack{r_* \leqslant r \leqslant R_0 \\ -h_c \leqslant z \leqslant h_c}} \bar{\sigma}^{c}_{r(\gamma)}
$$

Таким образом, если величину p^{c} находить из соотношений (2.7), (2.10), (2.11), то при определении координат точки (r_c, z_c), в которой первые возникает «разрушение» связующего по критерию (2.7), необходимо будет решать фактически одно трансцендентное уравнение и при этом координаты r_c, z_c не зависят от величины нагрузки p.

Полученные соотношения (2.5)—(2.7), (2.10), (2.11) позволяют определить нагрузку, соответствующую началу «разрушения» пластинки

$$
p_{*} = \min(p^{c}, p^{a}) \tag{2.12}
$$

Пластинка будет оптимальной по начальному «разрушению», если при заданных параметрах геометрии β_0, ξ_0, удельного содержания нитей армирования ω_0 и интенсивности армирующего слоя a_i существуют такие механические характеристики материалов арматуры и связующего E_{ai}, $\sigma^{\pm}_{ai}$ $(i = 1, 2, 3)$, E_c, $\sigma^{\pm}_{c}$ и параметры армирования η_i, ω_i $(i = 1, 2, 3)$, при которых величина p_* достигает максимального значения, то есть

$$
p^{*}_{*} = \max_{(\eta_i, \omega_i, E_{ai}, \sigma^{\pm}_{ai}, E_c, \sigma^{\pm}_c)} \{p_*\} \tag{2.13}
$$

где $0 \leqslant \mu \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \omega_i$ $(i=1, 2, 3)$ и удовлетворяют условию (1.7). $E_{ai} \in \Sigma_{ai}$, $\sigma_{ai} \in \Sigma_{\sigma i}$, $E_c \in \Sigma_c$, $\sigma_c \in \Sigma_c^{\sigma}$, Σ_{ai}, $\Sigma_{\sigma i}$, Σ_c и Σ_c^{σ} — области допустимых значений параметров E_{ai}, σ_{ai}, E_c и σ_c, соответственно. Здесь и в дальнейшем для простоты будем считать, что коэффициент Пуассона ν_c — величина заданная, так как для многих реально существующих материалов он практически одинаков.

Если на пластинку по условиям эксплуатации накладываются некоторые ограничения на величину прогиба, то представляет интерес проектировать пластинки рациональные с точки зрения жесткости.

Под рациональным проектом с точки зрения жесткости будем понимать проект, для которого при заданных параметрах — β_0, ξ_0, v_0, a_i, E_{ai}, σ_{ai}, E_c, σ_c, определяется такая структура армирования μ^*, ω_i^*, $(i=1, 2, 3)$, что допустимый уровень прогиба

$$w \qquad A_w^* = \min_{\substack{0 \leqslant \mu \leqslant \pi/2 \\ 0 \leqslant \omega_i}} A_w, \qquad \Big(\max_{\substack{r_0 \leqslant r \leqslant R \\ \omega_1+\omega_2+2\omega_3=\omega_0}} |w(r)| = A_w \Big) \tag{2.14}$$

при выполнении в качестве ограничений для параметров E_{ai}, σ_{ai}, E_c, σ_c неравенств

$$\begin{array}{lll} \sigma_i^{a*} \leqslant \sigma_{ai}^{+} & \text{при} & \sigma_{i*}^{a} \geqslant 0 \\ \sigma_i^{a*} \leqslant \sigma_{ai}^{+} \text{ и } |\sigma_{i*}^{a}| \leqslant \sigma_{ai}^{-} & \text{при} & \sigma_i^{a*} > 0 \text{ и } \sigma_{i*}^{a} < 0 \\ |\sigma_{i*}^{a}| \leqslant \sigma_{ai}^{-} & \text{при} & \sigma_i^{a*} \leqslant 0, \quad (i=1, 2, 3) \end{array} \tag{2.15}$$

и

$$\tau^{c*}_{r(z)} \leqslant \sqrt{\frac{\sigma_c^{+}\sigma_c^{-}}{3}}$$

$$\begin{array}{lll} \sigma^{c*}_{r(z)} \leqslant \sigma^{+}_{c0} & \text{при} & \sigma^{c}_{r(z)*} \geqslant 0 \\ \sigma^{c*}_{r(z)} \leqslant \sigma^{+}_{c0} \text{ и } |\sigma^{c}_{r(z)*}| \leqslant \sigma^{-}_{c0} & \text{при} & \sigma^{c*}_{r(z)} > 0 \text{ и } \sigma^{c}_{r(z)*} < 0 \\ |\sigma^{c}_{r(z)*}| \leqslant \sigma^{-}_{c0} & \text{при} & \sigma^{c*}_{r(z)} \leqslant 0 \end{array} \tag{2.16}$$

которые указывают, что напряжения в связующем и нитях армирования не должны нарушать условий прочности.

3. Рассмотрим кольцевую пластинку, шарнирно опертую на внешнем контуре и свободную на внутреннем, под действием равномерно распределенной нагрузки, тогда

$$q_1 = 1, \qquad p_{01} = p_{20} = 0 \qquad \text{при} \quad r = r_0 \text{ и } R_0 \tag{3.1}$$

и из (1.14) имеем следующие граничные условия:

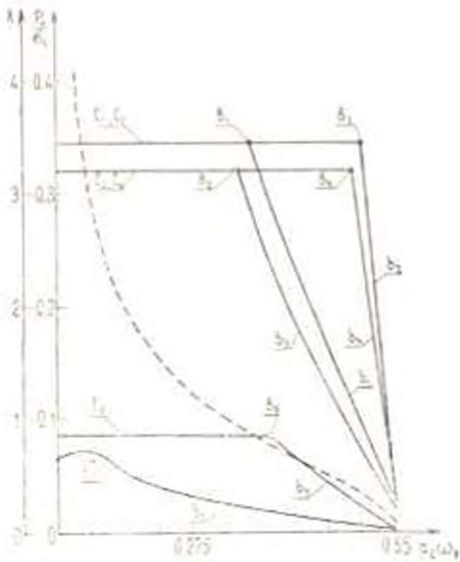
$$\begin{array}{lll} \text{при} \quad r = r_0 & & T_r = \overline{M}_r - \alpha M_r^{(1)} = \overline{Q} = 0 \\ \text{при} \quad r = R_0 & & w = 0, \quad T_r = \overline{M}_r = \alpha M_r^{(1)} = 0 \end{array} \tag{3.2}$$

Пользуясь условиями (3.1), (3.2) и выражениями (1.3), (1.15), (1.19), (1.20), (1.22), (1.24)—(1.26), можно определить постоянные интегрирования C_1—C_8. После чего из (1.8), (1.20), (1.4), (1.5) определим значения перемещений в пластинке, а также напряжения в связующем и арматуре, которые можно использовать для решения сформулированных выше задач рационального проектирования. Ввиду громоздкости соответствующие выражения здесь не приводим. Укажем только некоторые результаты численного счета при следующих параметрах:

$$E_{ai} = E_a, \qquad \sigma_{ai}^{*} = \sigma_a \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \ldots \tag{3.3}$$

и

$$\nu_a = 0.55, \qquad \nu_c = 0.35, \qquad a_2 = 0.7, \qquad \varepsilon = 0. \tag{3.4}$$



Фиг. 1

На фиг. 1 приведены зависимости нагрузки начального «разрушения» оболочки от величины параметра армирования $a_2\omega_2$ при $\omega_1 = 0$

$$\begin{array}{llll}
1.\ \gamma_0 = 5, & E = 15, & \xi_0 = 1.3, & \alpha^* = 15.2 \\
2.\ \gamma_0 = 5, & E = 75, & \xi_0 = 1.3, & \alpha^* = 51.5 \\
3.\ \gamma_0 = 5, & E = 15, & \xi_0 = 0.2, & \alpha^* = 16.8 \\
4.\ \gamma_0 = 5, & E = 75, & \xi_0 = 0.2, & \alpha^* = 70.3 \\
5.\ \gamma_0 = 20, & E = 15, & \xi_0 = 1.3, & \alpha^* = 15.8 \\
6.\ \gamma_0 = 20, & E = 75, & \xi_0 = 1.3, & \alpha^* = 63.4
\end{array} \tag{3.5}$$

и

$$\alpha > \alpha^* \ (E = E_a / E_c, \ \ldots).$$

Ниже будет указано, как определялась величина α^*, которая указывает, что при $\alpha > \alpha^*$ $p_* = p$, то есть начальное „разрушение" пластинки происходит из-за „разрушения" связующего, а нити армирования остаются упругими. Здесь и в дальнейшем индексы у букв, которыми обозначены кривые, соответствуют номеру варианта параметров, указанных в каждом конкретном случае (в рассматриваемом случае некоторые варианты параметров приведены в (2.5)); точка A_i соответствует параметрам армирования, при которых пластинка начинает „разрушаться" от нормальных напряжений σ_r^c (условие (2.9)) и от сдвиговых напряжений τ_{rz}^c (условие (2.8)) одновременно; точка B_i — от сдвиговых напряжений τ_{rz}^c (условие (2.8)) и от нормальных напряжений σ_θ^c (условие (2.9)), одновременно; точка c_i — от нормальных напряжений σ_r^c и σ_θ^c одновременно; точка a_i соответствует параметрам армирования, при которых пластинка начинает „разрушаться" от нормальных напряжений σ_r^c; точка b_i — от нормальных напряжений σ_θ^c; точка c_i — от сдвиговых напряжений τ_{rz}^c. Так, например, на фиг. 1 кривая $c_1B_1b_1$ соответствует первому варианту параметров из (3.5). При этом на прямолинейном участке c_1B_1 пластинка начинает „разрушаться" от сдвиговых напряжений в связующем на окружности $r=R$, и $z=0$, на участке B_1b_1 пластинка начинает „разрушаться" от нормальных напряжений в связующем — σ_θ^c на окружностях $r=r_0$, $z=\pm h$.

Как видно из фиг. 1, для параметров армирования, соответствующих прямой c_iB_i $(i=1, 2, 3, 4, 6)$ и точке b_5, нагрузка начального „разрушения" пластинки является наибольшей. Таким образом, значения ω_1 на прямой c_iB_i $(i=1, 2, 3, 4, 6)$ и в точке b_5 соответствуют пластинке, оптимальной по начальному „разрушению" при параметрах (3.3)—(3.5) и $\sigma > \sigma^A$. При этом нагрузка начального „разрушения" пластинки оптимальной структуры может превышать нагрузку начального „разрушения" пластинки с нерациональной структурой армирования в несколько раз.

Из соотношений (2.5)—(2.7), (2.10), (2.11) при параметрах (3.3) нетрудно видеть, что величина p' пропорциональна параметру σ_r, а величина p'' — параметру τ_{rz}, тогда из условия

$$p' = p'' \tag{3.6}$$

нетрудно получить зависимость

$$\sigma = f(\beta_0, \lambda_0, \omega_0, a_2, \mu, \omega_i, \alpha) \tag{3.7}$$

используя которую можно определить величину σ^A следующим образом:

$$\sigma^A = \max_{\mu, \omega_i} f \quad (0 < \mu < \pi/2, \quad \omega_i \geq 0 \text{ и } \omega_1 + \omega_2 + 2\omega_3 = \omega_0) \tag{3.8}$$

На фиг. 1 пунктирная кривая соответствует зависимости параметра $k = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}$ (характеризующего отношение изгибной жесткости пластинки в кольцевом направлении к изгибной жесткости в радиальном) от $a_2\omega_1$ при $\omega_3=0$ и $E=75$. Из сравнения этих кривых и величины p_* видно, что с точки зрения начального „разрушения" структура армирования пластинки будет оптимальной не только при $\lambda > 1$, как это утверждается, например, в [3], но и при $\lambda < 1$. „Так, для 1, 2, 3, 4 и 6 вариантов параметров из (3.5) при $0.275 < a_3\omega_1 < a_3\omega_1(B_i)$ ($a_3\omega_1(B_i)$ — абсцисса точки B_i, $i = 1, 2, 3, 4, 6$) пластинка также является оптимальной по начальному „разрушению", однако $1 > \lambda$".

На фиг. 2 приведены зависимости нагрузки начального «разрушения» от угла армирования — μ при (3.3), (3.4).

$$\beta_0 = 5, \quad \lambda_0 = 1.3$$

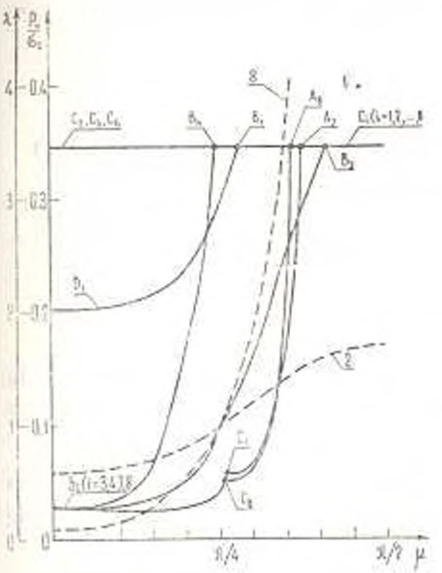
$$\begin{array}{lll}
1.\ (2)\ \omega_1 = \omega_2 = \omega_3, & E = 15\ (75), & \sigma^b = 9.9\ (17.1) \\
3.\ (4)\ \omega_3 = 0, \quad \omega_1 = 2\omega_2, & E = 15\ (75), & \sigma^b = 8.2\ (14) \\
5.\ (6)\ \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 2\omega_3, & E = 15\ (75), & \sigma^b = 7.6\ (11.1) \\
7.\ (8)\ \omega_1 = \omega_2 = 0, & E = 15\ (75), & \sigma^b = 6.5\ (16.6)
\end{array} \qquad (3.9)$$

и $\sigma > \sigma^b$. Как видно из фиг. 2, значения μ на прямых E_1c_1, c_2c_2, B_3c_3, B_4c_4, c_5c_5, c_6c_{10}, A_7c_7, A_8c_8 соответствует пластинке оптимальной структуры по начальному „разрушению".

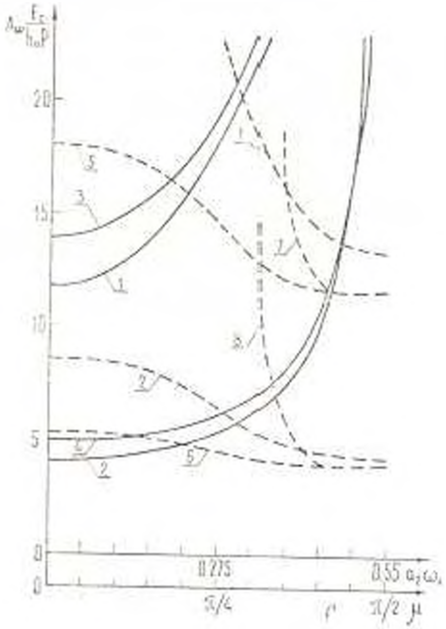
Пунктирные кривые на фиг. 2 соответствуют зависимости параметра λ от μ при $E = 75$ и параметрах 2) и 8) из (3.9). Из рассмотрения кривых на фиг. 2 видно, что (кривая $E_8C_8A_8c_8$) для значений μ на участке b_8C_8 пластинка начинает „разрушаться" от нормальных напряжений в связующем — σ_z^c на окружностях $r = r_0$, $z = \pm h_0$, на участке C_8A_8 — от нормальных напряжений в связующем — σ_r^c на окружностях $r = r_0$, $z = \pm h_0$ и на участке A_8c_8 — от сдвиговых напряжений в связующем — τ_{rz} на окружности $r = R_0$ и $z = 0$. При этом на участке C_8A_8 и $\mu > \pi/4$ пластинка не является оптимальной по начальному „разрушению", а тем самым и распределение напряжений будет нерациональным. Однако, при $\mu > \pi/4$ и восьмом варианте параметров из (3.9) $\lambda > 1$, но это противоречит утверждению [3], что при $\lambda > 1$ распределение напряжений является рациональным.

Результаты, приведенные на фиг. 2, 3, позволяют сделать выводы: а) использование модели армированного слоя из [6] (соотношения (1.3)—(1.6)) позволяет определить не только вид начального «разрушения» и координаты, в которых оно начинается в зависимости от структуры армирования пластинки, но и такую структуру армирования, при которой нагрузка начального «разрушения» является наибольшей; б) при создании материалов арматуры и связующего нецелесообразно добиваться увеличения относительной прочности арматуры свыше величины σ^b, так как это не приводит к увеличению нагрузки начального «разрушения» пластинки; в) пластинка, оптимальная по начальному «разрушению», является и рациональной с точки зрения распределения напряжений, поэтому утверждение [3], что при $\lambda \geqslant 1$ пластинка имеет рациональное распределение напряжений не всегда справедливо.

На фиг. 3 приведена зависимость A_ω от $a_2\omega_1$ при параметрах (3.3)—(3.5) (сплошные кривые) и от угла армирования—при параметрах (3.9) (штриховые линии).



Фиг. 2.



Фиг. 3

Как видно из фиг. 3, для рассматриваемых значений параметров, пластинка будет рациональной с точки зрения жесткости, если вся арматура уложена в кольцевом направлении. При этом величина максимального прогиба рациональной пластинки может быть существенно ниже (на порядок и более) по сравнению с максимальным прогибом пластинки с нерациональной структурой.

Институт гидродинамики
СО АН СССР

Поступила 29 V 197[illegible]

Յու. Վ. ՆԵՄԻՐՈՎՍԿԻ, Բ. Ս. ՌԵԶՆԻԿՈՎ

ԱՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ԿԼՈՐ ԵՎ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԱԼԵՐԻ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Սալերի առանցքասիմետրիկ ծռման հավասարումների հիման վրա, որտեղ հաշվի են առնված լայնական սահքը, արմատավորման ձևը ուսումնասիրվել են սալի սկզբնական քայքայման հետ կապված հարցերը արմատուրայի և կապող նյութի քայքայման հաշվառումով։

Դրվել է կոնկրետ դեպքերի համար լուծվել է ամրության և կոշտության տեսակետից կառուցվածքի տարրերի մեխանիկական պարամետրերի և սալի արմատավորման ձևի ընտրության ռացիոնալ բնույթի մասին խնդիրը։

Ցույց է տրված, որ մեխանիկական և կազմային պարամետրերը էապես ազդում են սալի քայքայման բնույթի վրա և ոչ բոլոր դեպքերում է նպատակահարմար մեծացնել արմատուրայի ամրությունը կոնստրուկցիայի կրող ունակությունը բարձրացնելու համար.

ON INITIAL FRACTURE OF REINFORCED CIRCULAR AND RING SHAPED PLATES

Yu. V. NEMIROVSKY, B. S. RESNIKOV

S u m m a r y

The equations are derived for axisymmetric bending of circular plates, taking into account the structure of reinforcement and the effect of transversal shear. The mode of initial fructure is examined.

The cases of fracture in plates due to the action of transversal shear, normal stresses in matrix and elements of reinforcement are singled out. The initial fracture loads for these cases are determined.

Some problems of rational choice of mechanical parameters for elements of composition and structure of reinforcement in terms of strength and rigidity are formulated. A few specific examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарнопольский Ю. М., Розе А. В.* Особенности расчета деталей из армированных пластиков. «Зинатне», Рига, 1969.
2. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* О некоторых особенностях деформирования упругих и [illegible] армированных и ослабленных оболочек. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 4, 1972.
3. *Королев В. И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. «Машиностроение», М., 1965.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. «Наука», М., 1967.
5. *Терегулов И. Г.* К построению уточненных теорий пластин и оболочек. ПММ, т. XXVI, вып. 2, 1962.
6. *Немировский Ю. В.* Об упругопластическом поведении армированного слоя. ПМТФ, № 6, 1969.
7. *Андреевская Г. Д.* Высокопрочные ориентированные стеклопластики. М., «Наука», 1966.
8. «Физические и механические свойства стеклопластиков». Справочник под ред. Ю. М. Молчанова. Рига, «Зинатне», 1969.
9. «Современные композиционные материалы». Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. М., «Мир», 1970.
10. *Баландин П. П.* К вопросу о гипотезах прочности. Вестник инженеров и техников, 1937, № 1.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

М. М. ЗАСТАВА

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ УСАДКИ И ПОЛЗУЧЕСТИ ТЯЖЕЛОГО БЕТОНА

В литературе имеется большое число аналитических выражений, связывающих предельные или текущие величины усадочных деформаций бетона с его деформациями ползучести в определенный момент времени [1, 2, 3, 4]. В общем виде все эти формулы имеют вид

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{yc}\Phi \tag{1}$$

где Φ — функция, зависящая от величины напряжения, при котором определяется деформация ползучести, и ряда структурных характеристик бетона и цементного камня. Число последних у различных авторов различно и включает иногда такие трудно определяемые параметры, как относительное содержание воздуха в порах цементного камня к моменту схватывания цемента [3] или предельную усадку бетона при относительной влажности 9% [4].

Несмотря на относительную сложность функции Φ, приведенный в упомянутых работах анализ указывает на наличие прямой пропорциональной зависимости между усадкой и ползучестью бетона.

Автором статистическим анализом большого числа отечественных и зарубежных опытов получены «стандартные» кривые относительной усадки и меры ползучести эталонного тяжелого бетона в условной линейной области сжимающих напряжений. В качестве эталонного принят бетон М400, изготовленный на портландцементе М500 стандартной тонкости помола и гранитном щебне при в/ц = 0.55 с содержанием цементного теста p_t = 20%, уплотненный вибрированием, естественного твердения. Бетонные образцы сечением 20×20 *см* хранятся до начала измерения усадки 7 *сут* во влажных условиях. В возрасте 28 *сут* образцы загружаются сжимающими напряжениями $\sigma = 0.4\,R_{np}$ и находятся при относительной влажности воздуха 70% и температуре 20°С. Стандартные кривые меры ползучести и относительной усадки бетона могут быть с достаточной точностью описаны математическими выражениями

$$C(t,\ 28) = 6.49\,(1 - 0.28e^{[illegible]} - 0.57e^{[illegible]})\,10^{-6}\ (\kappa\Gamma/c\mathit{м}^2)^{-1} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{yc}(t,\ 7) = 373\,(1 - 0.28e^{[illegible]} - 0.55e^{[illegible]})\,10^{-6}\ \mathit{мм/мм} \tag{3}$$

Вычисление отношений координат кривых (2) и (3) показывает, что величина $C(t,\ 28):\varepsilon_{yc}(t,\ 7)$ с возрастанием длительности наблюдений $t-\tau$ стремится к некоторому пределу, приблизительно равному 0.0173. При этом близость отношения к указанной асимптоте наблюдается уже с $t-\tau=40$ *сут*.

Анализ формул для определения предельных меры ползучести и относительной усадки в рекомендациях ЦНИИС [5] дает, применительно к эталонному бетону, близкую величину отношения $C(t, 28)/\varepsilon_{ус}(t, 7)=0.0159$. При этом нужно обратить внимание на то обстоятельство, что согласно исследованиям Е. Н. Щербакова, величина меры ползучести пропорциональна содержанию воды в смеси B и обратно пропорциональна марке бетона R_{28}, а усадка пропорциональна $1/R^{3}$. Несмотря на различную зависимость характеристик деформативности от водосодержания смеси, наличие множителя $1/R_{28}$ в выражении для меры ползучести, как показывает анализ, практически уравновешивает различие во влиянии величины B на C и $\varepsilon_{ус}$ бетона.

Для выяснения тесноты связи $\varepsilon_{п}$ и $\varepsilon_{ус}$ проведен корреляционный анализ результатов 17 опытов, взятых из различных литературных источников. Оказалось, что корреляционное отношение η_{xy}, отражающее тесноту связи процессов усадки и ползучести бетона, с самого начала или через некоторое время после начала испытаний оказывается близким к единице. Это указывает на наличие довольно тесной корреляционной связи между рассматриваемыми процессами. Наличие устойчивой положительной корреляции между $\varepsilon_{п}$ и $\varepsilon_{ус}$ с физической точки зрения объясняется тем, что большинство факторов, обуславливающих рост деформаций ползучести, вызывают и увеличение усадочных деформаций [6]. Все сказанное относится к неизолированным образцам, испытываемым при слабо переменном температурно-влажностном режиме.

Для получения уравнения регрессии меры ползучести по деформациям усадки выполнен статистический анализ результатов 107 опытов различных авторов с тяжелыми бетонами, как пропаренными, так и естественного твердения. Учитывая, что ползучесть бетона зависит от некоторых факторов, не влияющих на его усадочное деформирование [6], при вычислении отношения $C(t, \tau)/\varepsilon_{ус}(t, \tau_{в})$ величины меры ползучести приводились к возрасту загружения $\tau=28$ *сут*, относительному напряжению $\sigma/R_{пр}=0.4$ и марке бетона 400. Усадка принималась для образцов с длительностью влажного хранения $\tau_{в}=7$ *сут* и началом замера деформаций сразу после его окончания.

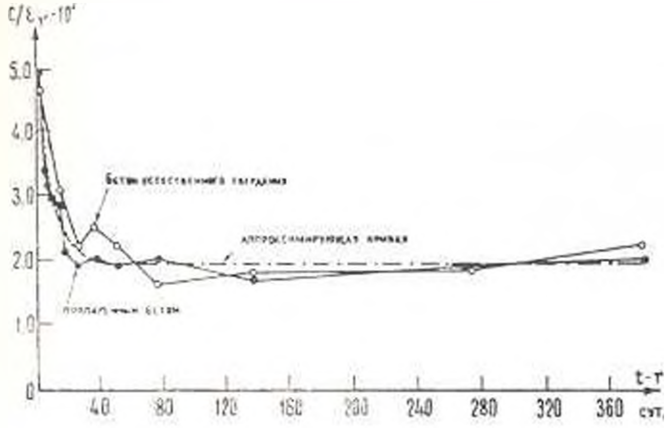
Представленные на фиг. 1 результаты статистической обработки данных показывают следующее.

1. Зависимости между мерой ползучести и усадкой для бетонов естественного твердения и пропаренными можно считать одинаковыми.

2. В качестве уравнения регрессии можно принять при $t-28\geqslant45$ *сут* следующее простое выражение:

$$C(t, 28)=0.02\varepsilon_{ус}(t, 7) \tag{4}$$

Величина 0.02 служит, следовательно, для пересчета ординат кривой усадки эталонного бетона при $t\geqslant73$ *сут* на ординаты кривой меры ползучести этого бетона. Для предельных деформаций ($t\to\infty$) рекомендуется использовать полученное выше отношение $C(t, 28)/\varepsilon_{ус}(t, 7)=0.0175$. Если состав, условия изготовления и эксплуатации бетона отличаются от соответствующих параметров эталонного бетона, нужно к подсчитанной мере ползучести вводить систему поправочных коэффициентов, приведенную в работе [6].



Фиг. 1.

Для подтверждения приемлемости формулы (4) и выяснения границ ее применения предпринято сравнение опытных величин мер ползучести бетона с рассчитанными по выражению (4) с использованием корректирующих коэффициентов [6]. Сопоставление проведено по результатам 85 опытов с тяжелыми бетонами разных составов, включая песчаные бетоны (растворы); в/ц менялось от 0.32 до 0.75. Цемент в рассматриваемых опытах применялся различный: обычный портландцемент, пуццолановый портландцемент; крупный заполнитель плотных пород: гранит, базальт, кварц, известняк, гранодиорит, диабаз. Марки испытанных бетонов находились в пределах от 150 до 800 $кг/см^2$. Возраст загружения образцов от 1 до 184 сут. Среднеквадратичная ошибка предсказания $C(t, \tau)$ по (4) получена равной $\pm 14.1\%$. Это приблизительно соответствует ошибке при расчетном определении меры ползучести по ранее предложенным рекомендациям [6].

Таким образом, полученную зависимость (4) можно использовать в широких пределах для прогнозирования деформаций тяжелых бетонов.

Одесская Высшая партийная
школа

Поступила 11 VII 1975

Մ. Մ. ԶՈՒՏՅԱՆ

ՄԱՆՐ ԲԵՏՈՆԻ ՆՍՏՎԱԾՔԱՅԻՆ ԵՎ ՍՈՂՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԱՌՆՉՈՒԹՅԱՆ ՀՍՏԱՏՄԱՆ ԱՆԱԼԻԶԸ

Ամփոփում

Փաստելով ունի բետոնի նստվածքային և սողքի դեֆորմացիաների միջև ուղիղ համեմատական կապակցություն։ Բետոնի երկարատև դեֆորմացիայի

ուսումնասիրության արդյունքում փորձնական տվյալների անալիզը բացահայտում է նստվածքային և սողքի ընթացքների միջև սերտ համահարաբերակցական կապի գոյությունը: Մեծ թվով փորձնական արդյունքների ստատիստիկական մշակումը թույլ է տալիս որոշել այդ դեֆորմացիաների միջև գոյություն ունեցող առնչության տեսքը:

STRUCTURAL ANALYSIS OF DEPENDENCE BETWEEN DEFORMATIONS OF SHRINKAGE AND CREEP IN HEAVY CONCRETE

M. M. ZASTAVA

Summary

There exists a directly proportional dependence between the values of deformation of shrinkage and creep in concrete. The analysis of experimental data on prolonged deformation of concrete reveals the existence of close correlational dependence between the processes of shrinkage and creep. The statistical treatment of a large number of experimental results allows to find out the analytical nature of dependence between the values of these deformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lyse I.* The shrinkage and creep of concrete. Bulletin RILEM № 3, 1959.
2. *Ali I., Kesler C. E.* Mechanisms of creep in concrete. Symposium on creep of concrete. ACI Special Publication, № 9, 1964.
3. *Neville A. M.* Creep of concrete: Plain, Reinforced and Prestressed. North Holland Publishing Company—Amsterdam, 1970.
4. *L'Hermite R.* "What do we know about the plastic deformation and creep of concrete". Bulletin RILEM, № 1, 1959.
5. *Щербаков Е. Н.* О прогнозе величин деформаций ползучести и усадки тяжелого бетона в стадии проектирования конструкций. Труды ЦНИИС, вып. 70. Изд-во «Транспорт», М., 1969.
6. *Прокопович И. Е., Застава М. М.* О расчетном определении предельных длительных деформаций тяжелого бетона. Бетон и железобетон, № 5, 1972.