ISSN 0002-3035

ФИЗИКА · ՖԻԶԻԿԱ · PHYSICS

ИЗВЕСТИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

PROCEEDINGS
OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

Журнал издается с 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском, армянском и английском языках.

Адрес редакции: Республика Армения, 375019,
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Խմբագրության հասցեն՝ Հայաստանի Հանրապետություն,
375019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24-գ։

Editorial address: 24-g, Marshal Bagramyan Av.,
Yerevan, 375019, Republic of Armenia.

Известия НАН Армении, Физика, т. 30, №6, с. 239—244 (1995)

УДК 537.87

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. С. КОТАНДЖЯН, А. А. СААРЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 сентября 1994 г.)

Определена функция Грина классического электромагнитного поля для среды, состоящей из произвольного числа соосных цилиндрических слоев. В качестве приложения общих формул вычислена интенсивность излучения заряда, вращающегося вокруг цилиндра, окруженного однородной средой.

1. *Введение.* Для управления потоком излучения, испускаемого различными системами, широко используются поверхности раздела сред. Хорошо известными примерами подобного рода являются черенковское излучение заряда, движущегося параллельно плоской границе раздела двух сред или летящего параллельно оси диэлектрического цилиндра [1, 2]. В начатом в [3, 4] цикле работ мы рассмотрим наиболее простые геометрии границ, когда возможно точное вычисление функции Грина (ФГ) электромагнитного поля, а именно: границы со сферической и цилиндрической симметриями. Случай сферически-симметричной среды рассмотрен в [4]. В [3] был предложен алгоритм решения уравнений Максвелла для среды, состоящей из произвольного числа соосных однородных цилиндрических слоев с разными диэлектрическими проницаемостями. В настоящей работе (пп. 2-4) он существенно упрощен путем замены дифференциального уравнения, описывающего ФГ, соответствующим интегральным уравнением Липмана-Швингера. Идея такой замены нами заимствована из [5, 6]. Выражения для температурной функции Грина в частных случаях цилиндра и цилиндрического слоя ранее были найдены в [7] другим методом. В п. 5 исследовано синхротронное излучение заряда, вращающегося вокруг диэлектрического цилиндра.

2. *Постановка задачи.* Рассмотрим электромагнитное поле, генерируемое плотностью тока $\mathbf{j}$ в цилиндрически-симметричной неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью ε (магнитную проницаемость полагаем равной 1). Векторный потенциал определяется ФГ по формуле

$$A_i(x) = -\frac{1}{2\pi^2 c}\int G_{il}(x, x')\, j_l(x')\, d^4x', \quad x = (t, \mathbf{r}). \tag{1}$$

В соответствующим образом выбранной цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в силу симметрии среды

$$G_{ie}(x,x')=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int dk\,d\omega\,G_{ie}(m,\ k,\ \omega,\ \rho,\ \rho')\exp\{i[m(\varphi-\varphi')+k(z-z')-$$
$$-\omega(t-t')]\}. \tag{2}$$

Уравнение для Фурье-образа ФГ G_{ie} $(m,\ k,\ \omega,\ \rho,\ \rho')$ следует из уравнений Максвелла. В калибровке Лоренца и в матричных обозначениях оно имеет вид

$$(F-V)\,G\,(\rho,\ \rho')=\frac{1}{\rho'}\,I\delta(\rho-\rho'),\quad V=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\,D, \tag{3}$$

где I—единичная 3×3 матрица здесь и ниже аргументы $m,\ k,\ \omega$ функции G_{ie} опускаются),

$$F=\begin{pmatrix} f & -2im/\rho^2 & 0\\ 2im/\rho^2 & f & 0\\ 0 & 0 & f+1/\rho^2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1/\rho+\partial/\partial\rho & im/\rho & ik\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

и, наконец,

$$f=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{d\rho}\right)-\frac{m^2+1}{\rho^2}+\lambda^2,\quad \lambda=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon-\frac{c^2k^2}{\omega^2}}\,. \tag{5}$$

С помощью функции $G^{(0)}$, являющейся решением укороченного уравнения

$$FG^{(0)}=\frac{1}{\rho'}\,I\delta(\rho-\rho') \tag{6}$$

(3) можно заменить интегральным уравнением Липмана-Швингера [4, 5]

$$G(\rho,\ \rho')=G^{(0)}(\rho,\ \rho')+\int\limits_0^\infty G^{(0)}(\rho,\ \rho'')\,V(\rho'')G(\rho'',\ \rho')\rho''d\rho''. \tag{7}$$

Таким образом, процедура вычисления ФГ разбивается на два основных этапа: построение $G^{(0)}$ и решение уравнения (7).

3. *Построение функции* $G^{(0)}$. Для решения уравнения (6) заметим, что преобразованием

$$G^{(0)}=\Omega\bar{G}^{(0)}\Omega^{-1},\quad F=\Omega\bar{F}\Omega^{-1} \tag{8}$$

с матрицей

$$\Omega=\begin{pmatrix} 1 & -i\delta_m & 0\\ -i\delta_m & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \delta_m=\begin{cases}0, & m=0\\ 1, & m\neq 0\end{cases} \tag{9}$$

оно преобразуется к диагональному виду

$$\bar{F}\,\bar{G}^{(0)}=\frac{1}{\rho'}\,\delta(\rho-\rho'),\quad \bar{F}=\mathrm{diag}\left(f-\frac{2m}{\rho^2},\ f+\frac{2m}{\rho^2},\ f+\frac{1}{\ }\right). \tag{10}$$

Решением этого уравнения является матрица

$$\overline{G}^{(0)}=\mathrm{diag}(g_{m+1},\ g_{m-1},\ g_m), \tag{11}$$

в которой функция g_m в свою очередь, является решением уравнения

$$(f+1/\rho^2)g_m(\rho,\ \rho')=\delta(\rho-\rho')/\rho'. \tag{12}$$

Исходная же матрица $G^{(0)}$ получается из (8), (9) и имеет вид

$$G^{(0)}=\frac{1}{1+\delta_m}\begin{pmatrix} g_{m+1}+\delta_m g_{m-1} & i\delta_m(g_{m+1}-g_{m-1}) & 0 \\ i\delta_m(g_{m-1}-g_{m+1}) & g_{m-1}+\delta_m g_{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & g_m \end{pmatrix}. \tag{13}$$

До сих пор зависимость $\varepsilon=\varepsilon(\rho)$ предполагалась произвольной. Перейдем к рассмотрению частного случая: слоистой среды в виде $n+1$ соосных однородных цилиндрических слоев с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n$:

$$\varepsilon(\rho)=\varepsilon_0+\sum_{l=1}^{n}(\varepsilon_l-\varepsilon_{l-1})\vartheta(\rho-\rho_l), \tag{14}$$

$\vartheta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. В каждом слое $\lambda=\mathrm{const}$ и (12) при $\rho\neq\rho'$ сводится к уравнению Бесселя. Пусть $\rho_j<\rho'<\rho_{j+1}$. Тогда везде, кроме $j+1$-го слоя,

$$g_m=q_i J_m(\lambda_i\rho)+p_i H_m^{(1)}(\lambda_i\rho),\ \rho_i<\rho<\rho_{i+1},\ i\neq j, \tag{15}$$

в λ_i определяется выражением (5) с $\varepsilon=\varepsilon_i$. Здесь J_m и $H_m^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля I рода. Для упрощения записи в последующем $H_m^{(1)}$ мы заменяем на H_m. Из уравнения (3) следует, что ФГ, а поэтому функция g_m и ее первые производные должны быть непрерывными при $\rho=\rho_l$:

$$q_{l-1}J_m^{[l]}(\lambda_{l-1}\rho_l)+p_{l-1}H_m^{[l]}(\lambda_{l-1}\rho_l)=q_l J_m^{[l]}(\lambda_l\rho_l)+p_l H_m^{[l]}(\lambda_l\rho_l),\ l=0,\ 1, \tag{16}$$

$y^{[l]}=\partial^l_y/\partial\rho^l$, причем $p_0=0$ и $q_n=0$. В $j+1$-ом слое

$$g_m=\begin{cases}\overline{q}_j J_m(\lambda_j\rho)+\overline{p}_j H_m(\lambda_j\rho), & \rho_j<\rho<\rho' \\ q_j J_m(\lambda_j\rho)+p_j H_m(\lambda_j\rho), & \rho'<\rho<\rho_{j+1}\end{cases} \tag{17}$$

со следующими условиями сшивки при $\rho=\rho'$:

$$\overline{q}_j J_m^{[l]}(\lambda_j\rho')+\overline{p}_j H_m^{[l]}(\lambda_j\rho')=q_j J_m^{[l]}(\lambda_j\rho')+p_j H_m^{[l]}(\lambda_j\rho')-\delta_{l1}/\rho',\ l=0,1. \tag{18}$$

В (18) второе условие ($l=1$) получается путем интегрирования уравнения (12) в окрестности точки $\rho=\rho'$.

Например, в случае одной границы при $\rho=\rho_1$ получается:

$$g_m(\rho,\rho')=\frac{\pi}{2iW(J_m,H_m)}\begin{cases} J_m(\lambda_0\rho_<)H_m(\lambda_0\rho_>)W(J_m,H_m)- \\ \qquad -J_m(\lambda_0\rho)J_m(\lambda_0\rho')W(H_m,H_m), & \rho<\rho_1, \\ 2iJ_m(\lambda_0\rho')H_m(\lambda_1\rho)/\pi\rho_1, & \rho>\rho_1\end{cases} \tag{19}$$

в случае $\rho'<\rho_1$, и

$$g_m(\rho,\rho')=\frac{\pi}{2i\,W(J_m,H_m)}\begin{cases}2iJ_m(\lambda_0\rho)H_m(\lambda_1\rho')/\pi\rho_1, & \rho<\rho_1\\ J_m(\lambda_1\rho_<)H_m(\lambda_1\rho_>)\,W(J_m,H_m)- & \\ \quad -H_m(\lambda_1\rho)H_m(\lambda_1\rho')\,W(J_m,J_m), & \rho>\rho_1\end{cases}\tag{20}$$

в случае $\rho'>\rho_1$. В (19), (20) введены следующие обозначения:

$$W(a,b)=a(\lambda_0\rho_1)\frac{\partial}{\partial\rho_1}b(\lambda_1\rho_1)-b(\lambda_1\rho_1)\frac{\partial}{\partial\rho_1}a(\lambda_0\rho_1),\quad \rho_{\gtrless}=\substack{\min\\ \max}(\rho,\rho').\tag{21}$$

В общем случае $2n+2$ условия (16), (18) однозначно определяют $2n+2$ величины q_i, p_i, $\bar{q}_j$, $\bar{p}_j$ и тем самым—функцию g_m. Что же касается $G^{(0)}$, то оно определяется выражением (13).

4. *Решение уравнения Липмана-Швингера.* Перейдем ко второму этапу вычисления ФГ. Прежде всего заметим, что для «потенциалов» вида $V=\sum_{l=1}^{n}V^{(l)}$ уравнение (7) можно заменить эквивалентной системой уравнений [4—6]:

$$G^{(l)}(\rho,\rho')=G^{(l-1)}(\rho,\rho')+\int_0^\infty G^{(l-1)}(\rho,\rho'')\,V^{(l)}(\rho'')G^{(l)}(\rho'',\rho')\rho''d\rho'',\quad l=1,2,\ldots,n,\tag{22}$$

где $G^{(n)}=G$. В случае (14)

$$V^{(l)}=\frac{\varepsilon_l-\varepsilon_{l-1}}{\varepsilon(\rho)}\,\delta(\rho-\rho_l)D(\rho),\tag{23}$$

и (22) преобразуется в алгебраическое уравнение, решение которого есть

$$G^{(l)}(\rho,\rho')=G^{(l-1)}(\rho,\rho')+G^{(l-1)}(\rho,\rho_l)d(\rho_l)G^{(l-1)}(\rho_l,\rho')/\beta_l,\tag{24}$$

где

$$d(\rho_l)=\frac{\varepsilon_lD(\rho_l-0)-\varepsilon_{l-1}D(\rho_l+0)}{\varepsilon_l+\varepsilon_{l-1}},\quad \beta_l=\frac{2\varepsilon_l\varepsilon_{l-1}}{(\varepsilon_l^2-\varepsilon_{l-1}^2)\rho_l}-\mathrm{Sp}[d(\rho)G^{l-1}(\rho,\rho_l)]_{\rho=\rho_l}.\tag{25}$$

Например, в случае одной границы

$$\beta_1=\frac{\varepsilon_0}{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\rho_1}-\frac{\lambda_0}{2\rho_1}J_m(\lambda_0\rho_1)\sum_{l=\pm1}l\,\frac{H_{m+l}(\lambda_1\rho_1)}{W(J_{m+l},\mathrm{H}_{m+l})}.\tag{26}$$

В общем случае с помощью найденной в п. 3 функции $G^{(0)}$ и n-кратного применения рекуррентной формулы (24) можно вычислить исходную ФГ G.

5. *Излучение заряда, вращающегося вокруг диэлектрического цилиндра.* В качестве приложения полученных формул выведем выражение для интенсивности излучения заряда q, в плоскости $z=0$ равномерно вращающегося по окружности радиуса ρ_0 вокруг цилиндра радиуса ρ_1 $(\rho_1<\rho_0)$. Плотность тока частицы

$$j_l=\rho v_l=\frac{vq}{\rho_0}\delta_{l2}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\omega_0 t)\delta(z),\ v=\omega_0\rho_0, \tag{27}$$

где ω_0—угловая скорость вращения. Подстановка этого выражения в (1) с учетом разложения (2) приводит к следующей формуле для векторного потенциала:

$$A_l(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\varphi-\omega_0 t)}\int_{-\infty}^{+\infty}dke^{ikz}A_{ml},\quad A_{ml}=-\frac{vq}{\pi c}G_{l2}(\rho,\rho_0)\Big|_{\omega=m\omega_0}. \tag{28}$$

В сумме по m слагаемое с $m=0$ не зависит от времени и убывает на бесконечности обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда и, следовательно, не дает вклад в поле излучения. Поэтому далее можно полагать $m\neq 0$. Из (24) ($i=1$), (20) и (13) после несложных вычислений получим:

$$A_{ml}=-\frac{vq}{4ci^{l-1}}\sum_{\alpha=\pm 1}\alpha^l B_m^{(\alpha)}H_{m+\alpha}(\lambda_1\rho),\quad l=1,2;\quad A_{m3}=0 \tag{29}$$

в области $\rho>\rho_0$. В (29)

$$B_m^{(\alpha)}=J_{m+\alpha}(\lambda_1\rho_0)-W^{-1}(J_{m+\alpha},H_{m+\alpha})[H_{m+\alpha}(\lambda_1\rho_0)W(J_{m+\alpha},J_{m+\alpha})+$$
$$+\frac{i\alpha\lambda_0}{\pi\rho_1^2\beta_1}J_m(\lambda_0\rho_1)J_{m+\alpha}(\lambda_0\rho_1)\sum_{p=\pm 1}W^{-1}(J_{m+p},H_{m+p})H_{m+p}(\lambda_1\rho_0). \tag{30}$$

Имея A_{ml}, с помощью выбранной нами калибровки Лоренца можно вычислить скалярный потенциал и тем самым и напряженности электромагнитного поля. Входящие в эти выражения интегралы по k на больших расстояниях ($\rho\gg\rho_0$) упрощаются методом стационарной фазы. После этого можно вычислить угловое распределение интенсивности излучения (усредненной по периоду движения частицы) на частоте $m\omega_0$:

$$\frac{dI_m}{d\Omega}=\frac{q^2m^2\omega_0^2\sqrt{\varepsilon_1}}{8\pi c}\beta^2[|B_m^{(+1)}-B_m^{(-1)}|^2+|B_m^{(+1)}+B_m^{(-1)}|^2\cos^2\vartheta],\ \beta=\frac{v}{c}, \tag{31}$$

где ϑ—угол между направлением излучения и осью цилиндра,

$$\lambda_1=\frac{m\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\vartheta,\ \lambda_0=\frac{m\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0-\varepsilon_1\cos^2\vartheta}. \tag{32}$$

Рассмотрим предельные случаи общей формулы (31). В нерелятивистском пределе, когда $\lambda_i\rho_i\ll 1$, $i=0,1$, $\lambda_0\sim\lambda_1$, используя соответствующие предельные выражения для цилиндрических функций, получим

$$\frac{dI_m}{d\Omega}=\frac{q^2c\omega_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{y}{2}\right)^{2m}\frac{1+\cos^2\vartheta}{[(m-1)!\sin\vartheta]^2}\left|1+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{2m}\right|^2, \tag{33}$$

где $y=m\beta\sqrt{\varepsilon_1}\sin\vartheta$. В случае $\rho_1\ll\rho_0$ имеем $\lambda_i\rho_1\ll 1$, $i=0,1$ для не слишком больших m и поэтому

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \left(\frac{dI_m}{d\Omega}\right)_{\text{од}} + \left(\frac{dI_m}{d\Omega}\right)_{\text{гр}}, \tag{34}$$

где первое слагаемое в правой части описывает интенсивность синхротронного излучения в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε_1[8, 9], а

$$\left(\frac{dI_m}{d\Omega}\right)_{\text{гр.}} = \frac{q^2\omega_0^2\beta^2\sqrt{\varepsilon_1}m}{c[(m-1)!\sin\vartheta]^2}\,\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}\,y^{2m}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{2m}\left[Y_m'(y)+\frac{m}{y}Y_m(y)\cos^2\vartheta\right]\times$$
$$\times\left[J_m'(y)+\frac{m}{y}J_m(y)\cos^2\vartheta\right]$$

—поправка, обусловленная границей, Y_m—цилиндрическая функция Неймана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Б. М. Болотовский.** УФН, 75, 295(1961).
2. **М. А. Агинян, Э. А. Бабаханян, Ян. Ши.** Изв. АН Арм. ССР, Физика, 15, 247(1980).
3. **Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян, А. С. Искандарян.** Изв. АН Арм. ССР, Физика, 25, 321(1990).
4. **А. Р. Мкртчян** и др. Препринт ИППФ—2—91, Ереван, 1991.
5. **Y. Avishai, B. Band.** Phys. Rev., A40, 5500 (1989).
6. **А. Боум.** Квантовая механика: основы и приложения. Изд. Мир, М., 1990.
7. **А. М. Коротких, Б. М. Набутовский.** ТМФ, 41, 388(1979).
8. **В. Н. Цытович.** Вестник МГУ, 11, 27(1951).
9. **K. Kitao.** Progr. Theor. phys., 23, 759 (1960).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԳՐԻՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՄԲ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Լ. Շ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ս. ՔՈԹԱՆՋՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Որոշված է դասական էլեկտրամագնիսական դաշտի Գրինի ֆունկցիան կամայական թվով համառանցք գլանային շերտերից բաղկացած միջավայրում։ Որպես ընդհանուր բանաձևերի կիրառություն հաշվարկված է համասեռ միջավայրում գտնվող դիէլեկտրիկ գլանի շուրջը պտտվող լիցքի ճառագայթման ինտենսիվությունը։

GREEN FUNCTION OF AN ELECTROMAGNETIC FIELD IN CYLINDRICALLY SYMMETRIC INHOMOGENEOUS MEDIUM

L. SH. GRIGORIAN, A. S. KOTANJIAN, A. A. SAHARIAN

The Green function of classical electromagnetic field is derived for a medium consisting of an arbitrary number of coaxial cylindrical layers. As an application of the general formula the radiation intensity from a charged particle, rotating aroung the cylinder surrounded by a homogeneous medium, is calculated.

Известия НАН Армении, Физика, т. 30, №6, с. 245—248 (1995)

УДК 621.315.592

ОПТИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДЫ В РАЗМЕРНО-КВАНТОВАННОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В. А. АРУТЮНЯН, С. Л. АРУТЮНЯН, А. А. ДЖИВАНЯН, Г. О. ДЕМИРЧЯН

Гюмрийский филиал Армянского государственного инженерного университета

(Поступила в редакцию 15 февраля 1995 г.)

Рассмотрено влияние однородного электрического поля на оптическое поглощение в размерно-квантованных полупроводниковых пленках. Исследовано изменение энергетического спектра носителей и формы полосы поглощения в предельных случаях слабых и сильных полей.

Влиянию электрического поля на оптическое поглощение в массивных полупроводниках посвящено множество теоретических и экспериментальных работ (см., напр., [1, 2]). В настоящей работе рассмотрено влияние однородного внешнего поля на переходы с поглощением фотона между состояниями дискретного спектра, когда аномально малые размеры образца в одном направлении (по оси z) приводят к квантованию соответствующего поступательного движения носителей. Если в подобной пленке внешнее поле направлено вдоль оси квантования, то в аппроксимации пленки бесконечно глубокой потенциальной ямой для потенциальной энергии носителей во внешнем поле будем иметь:

$$U(z)=\begin{cases} \infty & \text{при} \quad z\leqslant 0, \quad z\geqslant L, \\ Fz & \text{при} \quad 0<z<L, \end{cases} \tag{1}$$

где F—сила, действующая на заряд со стороны внешнего поля, L—толщина пленки. В общем случае решение одномерного уравнения Шредингера с потенциалом (1) дается линейной комбинацией функций Эйри первого ($\Phi_1(x)$) и второго ($\Phi_2(x)$) рода:

$$\Psi(z)=C_1\Phi_1\left[-\left(\frac{E}{F}+z\right)\left(\frac{2m}{\hbar^2}F\right)^{1/3}\right]+C_2\Phi_2\left[-\left(\frac{E}{F}+z\right)\left(\frac{2m}{\hbar^2}F\right)^{1/3}\right], \tag{2}$$

где E и m—соответственно энергия и эффективная масса в направлении z, а C_1 и C_2—нормировочные постоянные. Энергетический спектр частицы в направлении действия поля определяется из граничных условий

$$\Psi(z)|_{z=0}=\Psi(z)|_{z=L}=0, \tag{3}$$

и в случае произвольных полей для него получаем следующее общее выражение:

$$E_n(L)=\pi^{-2/3}(F^2L^2\varepsilon)^{1/3}\alpha_n(L), \quad n=1,2,3,\ldots, \tag{4}$$

где $\varepsilon = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ —основной уровень размерного квантования в отсутствие внешнего поля, $\sigma_n(L)$—при заданном L—корень уравнения, получающегося из условия разрешимости однородной системы (3). В предельных случаях слабых и сильных полей из общих выражений (2)—(4) можно получить точный вид волновых функций и энергетического спектра носителей. Соответственно рассмотрим поглощение слабой электромагнитной волны в указанных случаях.

1. Слабые поля ($FL \ll \varepsilon$).

При этом в (2—3) можно воспользоваться асимптотическим разложением функций Эйри для больших значений аргумента. Условие (3) теперь принимает вид

$$\frac{2}{3}\xi_0^{3/2} = \frac{2}{3}\xi_L^{3/2} + \pi n \quad (n=1.2, \ldots), \tag{3'}$$

где

$$\xi_0 = \pi^{2/3}\frac{E}{FL}\left(\frac{FL}{\varepsilon}\right)^{1/3}; \quad \xi_L = \pi^{2/3}\left(\frac{E}{FL}+1\right)\left(\frac{FL}{\varepsilon}\right)^{1/3},$$

Из (3′) для энергии носителей получаем:

$$E_n = \varepsilon n^2 - \frac{FL}{2}. \tag{5}$$

Для нормировочных постоянных C_1, C_2 и волновой функции частицы при этом соответственно получаем следующие выражения:

$$C_1 \cong \sqrt{\frac{2\hbar}{L}}\left(\pi^2\frac{2m}{\hbar^2}F\right)\left(\frac{E}{FL}\right)^{1/4}\cos\left(\frac{2}{3}\xi_0^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$C_2 = -C_1 \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\xi_0 + \frac{\pi}{4}\right), \tag{6}$$

$$\Psi_n(z) \cong \sqrt{\frac{2}{L}}\left(1-\frac{FL}{4E_n}z\right)\sin\frac{\pi n}{L}z.$$

В случае перпендикулярного падения волны на пленку для коэффициента поглощения получаем:

$$\gamma(\omega,F) = \frac{e^2\mu|(\mathbf{ep})_{cv}|^2}{\hbar^2 c^2 m_0^2 \varkappa\omega L}\sum_{n_c n_v}\left|\left[1-\frac{FL}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon_c n_c^2}+\frac{1}{\varepsilon_v n_v^2}\right)\right]\right|^2 \times$$
$$\times |f(n_c n_v)|^2 \Theta(\hbar\omega + FL - E_g - \varepsilon_c n_c^2 - \varepsilon_v n_v^2), \tag{7}$$

где m_0—масса свободного электрона, e—его заряд, μ—приведенная эффективная масса электронно-дырочной пары в направлении квантования, $\varkappa$—показатель преломления, E_g—ширина запрещенной зоны, а c и ω—соответственно скорость и частота света. Функция $f(n_c, n_v)$ представляет собой известный «пленочный фактор» (см., напр., [3]), причем индексы c и v соответственно относятся к электронам зоны проводимости и дыркам валентной зоны, $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Величина $(\mathbf{ep})_{cv}$ представляет собой матричный элемент произведения векторов поляризации фотона $\mathbf{e}=\mathbf{e}(e_x, e_y, 0)$ и импульса электрона $\mathbf{p}$ в плоскости пленки, построенный на двумерных блоховский амплитудах. В зависимости от правил отбора, обусловленных спецификой кристалла, $(\mathbf{ep})_{cv}$ будет описывать либо «разрешенные», либо «запрещенные» «двумерные» межзонные переходы.

Как видно из (7), наличие даже слабого поля приводит к смещению порога поглощения в длинноволновую область. «Модулирующий» полевой множитель перед $f(n_c, n_v)$ с увеличением поля медленно убывает. При заданном же значении поля этот множитель наряду с известной зависимостью $f(n_c, n_v)$ от n_c и n_v (см., напр., [4]) с ростом «пленочных» индексов вносит дополнительное уменьшение в коэффициент поглощения.

2. Сильные поля ($FL \gg \varepsilon$).

Из чисто качественных соображений ясно, что в случае сильного однородного поля для первых низших уровней можно учесть отражение носителей только от одной поверхности пленки. Ограничившись представляющим наибольший интерес случаем основного состояния, по аналогии с [5] выберем следующую приближенную волновую функцию:

$$\Psi_1(z)=B(L-z)\exp\left(-\frac{\beta(L-z)^2}{2}\right),$$

$$\text{где} \qquad B=\sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}}\cdot 4, \quad \beta=\left(\frac{4mF}{3\hbar^2}\right)^{2/3}. \tag{8}$$

Соответствующая энергия основного состояния E_1 теперь дается выражением:

$$E_1=FL\left[\frac{2{,}345}{\pi^{2/3}}\left(\frac{\varepsilon}{FL}\right)^{1/3}-1\right], \tag{9}$$

а для коэффициента поглощения, при той же геометрии, теперь получаем:

$$\gamma(\omega, L)=\frac{64}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}\frac{e^2\mu(\varepsilon_c\varepsilon_v)^{1/3}(FL)^{2/3}}{\hbar^3 c m_0^2 \varkappa\omega L[\varepsilon_c^{2/3}+\varepsilon_v^{2/3}]}\times$$

$$\times\exp\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{FL}{\varepsilon_v}\right)^{2/3}+\left(\frac{FL}{\varepsilon_c}\right)^{2/3}\right]\Theta(\hbar\omega+\Delta_c+\Delta_x-E_g),\right. \tag{10}$$

где $\Delta_{cv}=FL\left[1-\frac{2{,}345}{\pi^{2/3}}\left(\frac{\varepsilon_{cv}}{FL}\right)\right]^{1/3}$ соответственно смещение дна зоны проводимости и потолка валентной зоны, вызванное полем. Как видно из (10), коэффициент поглощения экспоненциально убывает с увеличением поля. Что же касается частотной зависимости, то наличие поля приводит здесь к существенному уменьшению пороговой частоты, а в пределе, к «слипанию» дна зоны проводимости и потолка валентной зоны. Так что при удачном выборе материала и размеров пленки не исключается возможность осуществления перехода полупроводник—полуметалл.

Отметим, что качественно подобное поведение коэффициента поглощения наблюдается и в случае аппроксимации пленки осцилляторным потенциалом. В этом случае для коэффициента поглощения получается следующее выражение:

$$\gamma(\omega,F)\sim\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar^2}\left[\left(\frac{FL}{\varepsilon_c}\right)^2+\left(\frac{FL}{\Xi_v}\right)^2-\frac{2F^2L^2}{\Xi_c\Xi_v}\right]\right.,$$

которое с незначительной погрешностью в рассмотренных выше предельных случаях сводится к результатам (7) и (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. **В. А. Тягай, О. В. Снитко.** Электроотражение света в полупроводниках. Киев, Наукова думка, 1989, 302 с.
2. **A. G. Aronov, A. S. Ioselevich.** Exciton Electrooptics, с. 267, 1982.
3. **В. Г. Коган, В. З. Кресин.** ФТТ, 11, 3230 (1969).
4. **Э. М. Казарян, Р. Л. Энфиаджян.** ФТП, 5, 2002 (1971).
5. **В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган.** Задачи по квантовой механике. М., Наука, с. 21, 1981.

ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆՑՈՒՄՆԵՐԸ ՉԱՓԱՅԻՆ ՔՎԱՆՏԱՑՎԱԾ ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴՉԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՈՒՄ ՀԱՄԱՍԵՌ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Վ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ս. Լ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Հ. Ա. ՋԻՎԱՆՅԱՆ, Գ. Հ. ԴԵՄԻՐՃՅԱՆ

Քննարկված է համասեռ էլեկտրական դաշտի ազդեցությունը օպտիկական անցումների վրա չափային քվանտացված կիսահաղորդչային թաղանթում։ Ստացված են լիցքակիրների ալիքային ֆունկցիաները և էներգետիկ սպեկտրի տեսքը թույլ և ուժեղ դաշտերի սահմանային դեպքերում։ Երկու դեպքում էլ դաշտի աճը բերում է կլանման շեմային հաճախության շեղման դեպի ցածրհաճախային տիրույթ և կլանման գործակցի նվազմանը։

OPTICAL TRANSITIONS IN A SIZE-QUANTIZED SEMICONDUCTOR FILM IN HOMOGENEOUS ELECTRIC FIELD

V. A. HAROUTUNIAN, S. L. HAROUTUNIAN, H. A. JIVANIAN, G. H. DEMIRJIAN

The influence of homogeneous electric field on the optical transitions in a size-quantized semiconductor film is considered. The wave functions and energetic spectrum of carriers are obtained in the limiting cases of weak and strong fields. In both cases the field increasing causes a displacement of threshold frequency to the low-frequency range and a decrease of absorption coefficient.

Известия НАН Армении, Физика, т. 30, № 6, с. 249—252 (1995)

УДК 53.01.538.3

СВЯЗЬ ПОСТОЯННОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОДИНАМИКИ С ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Г. Л. АРЕШЯН

Государственный инженерный университет Армении

(Поступила в редакцию 17 июля 1995 г.)

Получено аналитическое выражение и численное значение постоянной взаимодействия в электромагнитодинамике.

В теории электромагнитодинамики [1] было постулировано выражение интеграла действия, содержащее постоянную взаимодействия n. Эта постоянная обеспечивала взаимодействие между электромагнитными полями, которые генерированы электрическими и магнитными зарядами.

Автор работы [1], комментируя физический смысл постоянной взаимодействия, указал только на возможность экспериментального определения численного значения этой постоянной. В настоящей работе сделана попытка выразить аналитически постоянную взаимодействия через известные фундаментальные постоянные физики и тем самым получить численное значение величины n теоретическим путем.

Из тензорных уравнений поля и токов (см. ур-е (8) работы [1]) получаем для неподвижных зарядов и для векторов в трехмерном пространстве следующие два уравнения (в системе MKS):

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{D}+\frac{n}{c}\mathbf{H}^*\right)=\rho_e, \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{B}^*+\frac{n}{c}\mathbf{E}\right)=\rho_g, \qquad (2)$$

где для вакуума $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$; $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ —Максвелловские векторы, а $\mathbf{D}^*=\varepsilon_0\mathbf{E}^*$; $\mathbf{B}^*=\mu_0\mathbf{H}^*$—Иосифьяновские инверсно-сопряженные векторы электромагнитных полей [2]; c—скорость света в вакууме; ρ_e,ρ_g—плотности электрических и магнитных зарядов.

Для точечного электрического заряда Q_e в отсутствие магнитных зарядов ($\rho_g=0$), интегрируя векторы под знаком div в левой части ур.-й (1) и (2) по поверхности сферы радиуса r, в центре которой расположен Q_e, а правые части по объему сферы, получаем для радиальных составляющих векторов

$$E+\frac{n}{\varepsilon_0 c}H^*=\frac{Q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2};\quad H^*=-\frac{n}{\mu_0 c}E,$$

откуда напряженность «собственного» электрического поля от электрического заряда

$$E=\frac{Q_e}{4\pi\varepsilon_0(1-n^2)r^2}. \tag{3}$$

Аналогично, для точечного магнитного заряда Q_g в отсутствие электрических зарядов получаем из (1) и (2) для радиальных составляющих

$$E=-\frac{n}{\varepsilon_0 c}H^*,\quad H^*+\frac{n}{\mu_0 c}E=\frac{Q_g}{4\pi\mu_0 r^2},$$

откуда напряженность «собственного» магнитного поля от магнитного заряда

$$H^*=\frac{Q_g}{4\pi\mu_0(1-n^2)r^2}. \tag{4}$$

Сила кулоновского взаимодействия двух электронов на расстоянии r друг от друга с учетом (3) равна

$$F_{эл}=e_0E=\frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0(1-n^2)r^2}. \tag{5}$$

Сила кулоновского взаимодействия двух единичных магнитных зарядов g_0 на расстоянии r друг от друга равна с учетом (4)

$$F_{маг}=g_0H^*=\frac{g_0^2}{4\pi\mu_0(1-n^2)r^2}. \tag{6}$$

Для получения аналитического выражения постоянной взаимодействия через известные фундаментальные постоянные принимаем два постулата.

Первый постулат

Постоянная взаимодействия равна отношению силы взаимодействия на расстоянии r электронов между собой к силе взаимодействия на том же расстоянии r единичных магнитных зарядов между собой. Используя выражения (5) и (6) и постулат, получаем

$$n=\frac{F_{эл}}{F_{маг}}=\frac{\mu_0 e_0^2}{\varepsilon_0 g_0^2}. \tag{7}$$

Второй постулат (сформулирован А. Г. Иосифьяном в ряде работ [2]).

Произведение элементарных электрического и магнитного зарядов равно элементарному кванту действия—постоянной Планка.

В наших обозначениях имеем (для первого квантования)

$$e_0g_0=2h=4\pi\hbar. \tag{8}$$

Используя (7) и (8), получаем окончательно

$$n=\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{e_0^4}{(4\pi\hbar)^2},\qquad(9)$$

где в системе MKS (см., например [3])

$$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\left(\frac{\text{В}\cdot\text{сек}}{\text{А}\cdot\text{м}}\right);\quad \varepsilon_0=8{,}84419\cdot10^{-12}\left(\frac{\text{А}\cdot\text{сек}}{\text{В}\cdot\text{м}}\right),$$

$$e_0=1{,}60219\cdot10^{-19}(\text{А}\cdot\text{сек}),$$

$$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1{,}05459\cdot10^{-34}(\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{сек}^2).$$

Учитывая, что постоянная тонкой структуры α равна в системе MKS [3]

$$\alpha=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\cdot\frac{e_0^2}{4\pi\hbar}\quad\text{(безразмерная)}\qquad(10)$$

и сравнивая с выражением (9), получаем связь между постоянной взаимодействия электромагнитодинамики n и постоянной тонкой структуры α

$$n=\alpha^2.\qquad(11)$$

Численное значение постоянной взаимодействия равно

$$n=\alpha^2=(5{,}32501\pm0{,}00012)\cdot10^{-5}.\qquad(12)$$

Выводы

1. Постулируя, что постоянная взаимодействия равна отношению кулоновской силы взаимодействия пары электронов к силе взаимодействия пары элементарных магнитных зарядов и используя постулат Иосифьяна о кванте действия, получено аналитическое выражение для постоянной взаимодействия через фундаментальные постоянные теоретической физики.

2. В электромагнитодинамике, развитой в работе [1], выражения для взаимодействия электрических зарядов и токов в вакууме и веществе при отсутствии магнитных зарядов отличаются от соответствующих выражений Максвелловской электродинамики на величины n^2 (см., например, (5)). С учетом численной величины n эти отличия составляют

$$n^2=2{,}83556\cdot10^{-9}.$$

Автор затрудняется утверждать о возможности экспериментально зарегистрировать отличия такой малости, однако надеется, что развитая теория когда-нибудь будет либо отвергнута, либо подтверждена экспериментально.

В заключение автор считает своим долгом еще раз отметить с большой признательностью и благодарностью то благотворное влияние, которое оказывал Андраник Гевондович Иосифьян своими идеями и советами за многие годы совместной работы и, особенно тогда, когда автор занимался вопросами электромагнитодинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Г. Л. Арешян.** ДАН Арм. ССР, **66**, №4, 222(1978).
2. **А. Г. Иосифьян.** ДАН Арм. ССР, **51**, №1, 1(1970), **55**, №2, 98(1972), **57**, №1, 232(1973), **81**, №4, 181(1985).
3. Основные формулы физики. Под ред. Д. Мензела. Изд. иностранной литературы, М., 1957, стр. 133, 134.

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆԻ ԿԱՊԸ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

Գ. Լ. ԱՐԵՇՅԱՆ

Երկու կանխադրույթների հիման վրա ստացված է էլեկտրամագնիտոդինամիկայի փոխազդեցության հաստատունի անալիտիկ արտահայտությունը, արտահայտված տեսական ֆիզիկայի ֆունդամենտալ հաստատունների միջոցով։ Այդ թույլ է տալիս հաշվարկել փոխազդեցության հաստատունի թվային արժեքը։ Ստացված է փոխազդեցության հաստատունի կապը նուրբ կառուցվածքի հաստատունի հետ։

CONNECTION OF ELECTROMAGNETODYNAMIC INTERACTION CONSTANT WITH FUNDAMENTAL CONSTANTS

G. L. ARESHIAN

An analytical expression for electromagnetodynamic interaction constant through the fundamental constants of theoretical physics is obtained based on two postulates. This permits one to calulate the numerical value of the interaction constant. The connection between the interaction constant and the fine structure constant is revealed.

Известия НАН Армении, Физика, т. 30, №6, с. 253—260 (1995).

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ МАГНИТОУПРУГОСТИ ФЕРРОМАГНИТНОГО ТЕЛА С НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ НАМАГНИЧИВАНИЯ

Д. Д. АСАНЯН, Г. Е. БАГДАСАРЯН

Институт механики НАН Армении

(Поступила в редакцию 24 мая 1995 г.)

В работе получены линеаризированные уравнения движения магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела, когда берется нелинейный закон намагничивания. Приведен конкретный пример—устойчивость ферромагнитной пластины-полосы в однородном магнитном поле.

В последнее время наблюдается быстрое увеличение числа исследований в области магнитоупругости [1, 2]. Особый интерес представляют работы по магнитоупругой устойчивости и вибрациям тонкостенных тел из ферромагнитных материалов [3]. При решении различных задач большинство авторов [3—8] предполагают, что магнитное поле линейно связано с намагниченностью материала. Это справедливо для ферромагнетиков в области очень слабых полей и при сколь угодно больших полях для большинства неферромагнитиков. Поэтому представляет интерес рассмотреть нелинейную зависимость межу намагниченностью и полем и их влияние на различные физические процессы (выпучивание тонкой ферромагнитной пластинки, на НДС материала и т. д.).

1. Пусть упругая диэлектрическая среда с упорядоченной магнитной структурой находится во внешнем стационарном магнитном поле с вектором напряженности $\mathbf{H}^0$ и вектором магнитной индукции $\mathbf{B}^0=\mu_0\mathbf{H}^0$, где $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$н$/A^2$—магнитная постоянная. Окружающая тело среда считается вакуумом. Под действием магнитного поля происходит магнитная поляризация упругой среды, приводящая как к изменению магнитного поля во всем пространстве, так и появлению объемных моментов магнитного происхождения, плотности которых соответственно определяются формулами [1—3]

$$\mathbf{f}=\mu_0(\mathbf{M}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{H};\ \mathbf{C}=\mu_0\mathbf{M}\times\mathbf{H}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{H}$—напряженность магнитного поля, $\mathbf{M}$—намагниченность (магнитный момент единицы объема) среды, ∇—оператор Гамильтона.

Векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$ в теле связаны с вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$ соотношением $\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$ и удовлетворяют (в квазистатистическом приближении) уравнениям Максвелла

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=0;\quad \mathrm{div}\mathbf{B}=0. \tag{1.2}$$

Движение деформируемого ферромагнитного тела под действием заданного поля будем описывать в прямоугольной декартовой системе координат $X_1X_2X_3$. Начальное положение точек тела в этой системе координат определяется декартовыми координатами X_1, X_2, X_3, которые в дальнейшем в качестве лагранжевых координат используются для определения текущего положения точек среды.

Под действием объемных сил и объемных моментов (1.1) (а также поверхностных сил $\mathbf{F}$ немагнитного происхождения) среда деформируется, и ее движение, помимо уравнений (1.2), будет описываться также следующими уравнениями [1—3]:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left[S_{lm}\left(\delta_{mk}+\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right)\right]+f_k=\rho_0\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \qquad (1,3)$$

$$e_{lmk}S_{mk}+c_l=0; \quad f_k=\frac{\partial T_{mk}}{\partial x_m}; \; (l,m,k=1,2,3) \qquad (1.4)$$

и поверхностными условиями [1—3]:

$$\mathbf{n}\cdot[\mathbf{B}-\mathbf{B}^{(e)}]=0, \quad \mathbf{n}\times[\mathbf{H}-\mathbf{H}^{(e)}]=0, \qquad (1.5)$$

$$\left[S_{km}\left(\delta_{ml}+\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right)\right]n_k^0=F_l+[T_{km}^{(e)}-T_{km}]\left(\delta_{ml}+\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right)n_k^0. \qquad (1.6)$$

В (1.3)—(1.6) u_k—компоненты вектора перемещений, S_{lm}—тензор магнитоупругих напряжений Лагранжа, e_{lmk}—символ Ливи—Чивита, δ_{mk}—символ Кронекера, ρ_0—плотность среды до деформации, n_k^0 и n_k—компоненты векторов внешних нормалей к недеформированной и деформированной поверхностям тела соответственно, T_{km}—компоненты тензора напряжений Максвелла:

$$T_{mk}=B_mH_k-\frac{1}{2}\mu_0\delta_{mk}\mathbf{H}^2. \qquad (1.7)$$

Индекс «e» и в дальнейшем будет обозначать принадлежность рассматриваемой величины к внешней среде, а по повторяющимся индексам производится суммирование.

Из уравнений (1.4) видно, что тензор S_{lm} вообще говоря не симметричен. Он становится симметричным только при отсутствии магнитных моментов ($c_k=0$). Подстановкой значения c_k из (1.1) в (1.4) последнее приводится к виду

$$e_{lmk}(S_{lm}+\mu_0 M_lH_m)=0, \qquad (1.8)$$

откуда следует симметричность тензора $S_{lm}+\mu_0M_lH_m$.

Нетрудно заметить, что система уравнений (1.2)—(1.4) не замкнута и к ней необходимо присоединить материальные уравнения магнитоупругой среды, связывающие характеристики деформируемого состояния (упругие деформации, напряжения, напряженность магнитного поля и магнитную индукцию). Уравнения состояния получаются из закона сохранения энергии и, согласно [1—3], имеют вид:

$$S_{lj}=\rho a_{lk}a_{je}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ke}}+M_j\frac{\partial U}{\partial \mu_l}, \qquad (1.9)$$

$$\mu_0 H_i = \frac{\partial U}{\partial \mu_i}; \quad \mu_i = M_i/\rho, \tag{1.10}$$

где U—внутренняя удельная энергия единицы массы, ε_{ke}—компоненты тензора деформации Грина:

$$\varepsilon_{ke} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_e} + \frac{\partial u_e}{\partial x_k} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_e}\right), \tag{1.11}$$

ρ—плотность деформируемой среды.

Используя (1.10), уравнения (1.9) запишем в виде

$$S_{ij} = \rho \alpha_{ik} \alpha_{je} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ke}} + \mu_0 M_j H_i. \tag{1.12}$$

Принимая во внимание симметричность первого слагаемого выражения (1.12), легко заметить, что условия симметричности (1.8), в силу (1.12), тождественно удовлетворяются.

Выражение удельной внутренней энергии деформируемого упругого непроводящего ферромагнитного тела, но обладающего пьезомагнитными и магнитострикционными свойствами, следуя работам [1—4], выбирается в виде

$$2U = \rho^{-1} c_{ijke} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ke} + 2\varphi(|\mu_i|). \tag{1.13}$$

Тогда из (1.9) и (1.20) с учетом (1.13) получим

$$S_{ij} = c_{ijke}\varepsilon_{ke} + \mu_0 M_0 H_i; \quad M_i = \chi(H) \cdot H_i; \quad H = |\mathbf{H}|. \tag{1.14}$$

Как показывают экспериментальные исследования [5, 6], магнитные восприимчивости различных магнитомягких ферромагнитных материалов, в зависимости от величины напряженности магнитного поля, с достаточной высокой точностью можно аппроксимировать (исходя из основной кривой намагничивания) следующей формулой (формула Дрейфуса):

$$\chi(H) = \frac{\beta}{\mu_0 H} \operatorname{arctg}(\alpha H),$$

где (1.15)

$$\beta = \frac{2B_s}{\pi}, \quad \alpha = \frac{\mu_н - 1}{\beta} \cdot \mu_0,$$

B_s—индукция насыщения, $\mu_н$—начальная относительная магнитная проницаемость материала.

Иногда вместо (1.15) используют зависимость Рэлея [4, 7]

$$\chi(H) = \varkappa_0 + b_r \cdot H, \tag{1.16}$$

которая является линейным приближением формулы Дрейфуса и применима при $H < H_c$, где H_c—коэрцитивная сила. Если коэффициент нелинейности $b_r = 0$, то из (1.16) получается зависимость $\chi(H) = \mathrm{const}$; которая часто используется [3, 8] в материальных уравнениях магнитомягких ферромагнитных материалов (магнитомягкие ферромагнитные материалы с линейной характеристикой). Численные значения коэффицентов $\varkappa_0$ и b_r для различных ферромагнитных материалов приведены в работах [4, 7].

2. Переходим к линеаризации основных уравнений и граничных условий (описывающих поведение деформируемого ферромагнитного тела с нелинейной характеристикой в стационарном магнитном поле), приведенных в предыдущем пункте, принимая основные предположения теории малых деформаций. С этой целью, следуя работам [1—3], характеристики магнитного поля представим в виде

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathfrak{b};\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathfrak{h};\quad \mathbf{M}=\mathbf{M}_0+\mathfrak{m}. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{B}_0$ $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{H}_0$ —соответственно магнитная индукция, намагниченность и напряженность магнитного поля, возникающего во всем пространстве вследствие помещения недеформируемого тела во внешнее заданное поляризующее магнитное поле $\mathbf{B}^0$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$—добавления к указанным величинам, обусловленные деформацией среды.

Согласно сказанному, величины $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{M}_0$ определяются из решения следующей задачи магнитостатики:

а) уравнения в области, занятой телом (внутренняя область):

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{H}_0=0;\quad \operatorname{div}\mathbf{B}_0=0\\ \mathbf{B}_0=\mu_0(\mathbf{H}_0+\mathbf{M}_0)=\mu_0[1+\chi(H_0)]\cdot\mathbf{H}_0.\end{gathered} \tag{2.2}$$

б) уравнения во внешней области (область вне тела):

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{H}_0^{(e)}=0;\quad \operatorname{div}\mathbf{B}_0^{(e)}=0\\ \mathbf{B}_0^{(e)}=\mu_0\mathbf{H}_0^{(e)};\quad \mathbf{M}_0^{(e)}=0.\end{gathered} \tag{2.3}$$

в) условия сопряжения на поверхности Γ недеформируемого тела

$$\begin{gathered}\mathbf{n}_0\times[\mathbf{H}_0-\mathbf{H}_0^{(e)}]=0;\quad \mathbf{n}_0[\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_0^{(e)}]=0\\ \text{при } (x_1,\ x_2,\ x_3)\in S.\end{gathered} \tag{2.4}$$

г) и условия на бесконечности

$$\mathbf{B}_0^{(e)}\to\mathbf{B}^0 \quad\text{при}\quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\to\infty. \tag{2.5}$$

Характеристики напряженно-деформированного состояния тела, а также величины $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$, и $\mathfrak{m}$ определяются из уравнений и граничных условий деформируемого ферромагнитного тела. Принимая деформации малыми, а также малость величин $|\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{h}|$ и $|\mathfrak{m}|$, эти уравнения и граничные условия, аналогично [1—3], линеаризуются. В результате, с учетом (2.1)—(2.5), получаются следующие линейные уравнения и граничные условия относительно магнитоупругих характеристик деформируемого тела:
основные уравнения движения:

$$t_{ji,j}+\mu_0(M_{0j}H_{0l,i}+M_{0j}h_{i,j}+m_jH_{0j,i})-$$

$$-\mu_0M_{0j}H_{0i,k}u_{k,j}-\bar{t}_{ij,k}u_{k,j}=\rho_0\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}, \tag{2.6}$$

$$e_{ijk}[h_{k,j}-H_{0j,m}u_{m,k}]=0,$$

$$b_{i,i}-B_{0j,k}u_{k,j}=0,\ (i,j,k=1,2,3),$$

где

$$t_{ij}=\sigma_{ij}+\mu_0H_{0i}M_{0j}+\mu_0(H_{0i}m_j+H_{0j}m_i),$$

$$\bar{t}_{ij}=\mu_0H_{0i}M_{0j};\quad \sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}); \tag{2.7}$$

граничные условия:

$$n_{0i}[t_{ij}+t^M_{ij}]=0;\ n_{0i}[b_i]-u_{m,i}n_{0m}[B_{0i}]=0,$$

$$e_{ijm}\{n_{0j}[h_k]-n_{0m}u_{m,j}[H_{0k}]\}=0, \tag{2.8}$$

где

$$t^M_{ij}=B_{0i}H_{0j}+B_{0i}h_j+B_{0j}h_i-\frac{1}{2}\mu_0\delta_{ij}(H^2_{0k}+2H_{0k}h_k). \tag{2.9}$$

В уравнения (2.6)—(2.9) входит возмущенный магнитный момент $\mathbf{m}$. Из выражения (1.14) зависимость между $\mathbf{m}$ и $\mathbf{h}$ получится в виде

$$\mathbf{m}=\hat{a}\cdot\mathbf{h}, \tag{2.10}$$

где элементы матрицы $\hat{a}$ задаются формулой

$$a_{ii}=\chi+\frac{H^2_{0i}}{H_0}\frac{d\chi}{dH_0};\quad a_{ij}=\frac{H_{0i}H_{0j}}{H_0}\frac{d\chi}{dH_0}\,(i\neq j). \tag{2.11}$$

В силу (2.11) уравнение движения магнитоупругой среды с нелинейной характеристикой (1.14) можно написать следующим образом:

$$\Delta\mathbf{u}+\frac{1}{1-2\nu}\ \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}+\frac{\mu_0}{\mu}\mathbf{f}=\frac{\rho_0}{\mu}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2},$$

$$\mathrm{div}[(\hat{I}+\hat{a})\mathbf{h}]-B_{0j,k}u_{k,j}=0, \tag{2.12}$$

$$e_{ijk}[h_{k,j}-H_{0j,m}u_{m,k}]=0,$$

где $\hat{I}$—единичная матрица, а компоненты вектора $\frac{\mu_0}{\mu}\mathbf{f}$ задаются в виде:

$$\frac{\mu_0}{\mu}f_1=b_{11}h_{1,1}+b_{12}h_{2,2}+b_{13}h_{3,3}+b_{14}h_{1,2}+b_{15}h_{1,3}+b_{16}h_{2,3}+$$

$$+\frac{\mu_0}{\mu}[2M_{0j}H_{01,j}+H_{0j}M_{0j,j}]-\frac{\mu_0}{\mu}M_{0j}H_{01,k}u_{k,j}-\frac{1}{\mu}\bar{t}_{1j,k}u_{k,j};$$

$$b_{11}=\chi H_{01}+2a_{11}H_{01},\quad b_{12}=H_{01}a_{22}+H_{02}a_{12},$$
$$b_{13}=\chi H_{01}+a_{13}\cdot H_{03},\quad b_{14}=\chi H_{02}+3a_{12}H_{01}+a_{11}H_{02}, \tag{2.13}$$
$$b_{15}=\chi H_{03}+3a_{13}H_{01}+H_{03}a_{11},\quad b_{16}=2a_{23}H_{01}+a_{13}H_{02}+a_{12}H_{03}.$$

Выражения для $\frac{\mu_0}{\mu}f_2$ и $\frac{\mu_0}{\mu}f_3$ получаются из $\frac{\mu_0}{\mu}f_1$ циклической перестановкой $1\to2\to3\to1$. В граничных условиях (2.8) тоже надо учитывать соотношение (2.10).

В следующем пункте в качестве иллюстрации полученных уравнений и граничных условий рассмотрим задачу магнитоупругой устойчивости ферромагнитной пластины-полосы в однородном поперечном магнитном поле.

3. Пусть изотропная пластина-полоса с постоянной толщиной $2h$ находится в поперечном магнитном поле $\mathbf{B}_0(0,\ B_0,\ 0)$, $B_0=\text{const}$. Рассмотрим плоско-напряженное состояние, т. е.

$$u_1=u_1(x_1,x_2),\quad u_2=u_2(x_1,x)_2,\quad u_3=0,$$
$$\mathbf{h}^{(i,e)}=(h_1^{(i,e)}(x_1,x_2),\ h_2^{(i,e)}(x_1,x_2),\ 0). \tag{3.1}$$

Решение системы уравнений (2.12) будем искать в виде

$$\begin{cases} u_1(x_1,x_2)=u(x_2)\omega)kx_1 \\ u_2(x_1,x_2)=v(x_2)\sin kx_1 \\ \Phi^{(i)}(x_1,x_2)=A\operatorname{ch}(k\gamma x_2)\sin kx_1 \end{cases} \quad \text{при } |x_2|<h, \tag{3.2}$$

$$\Phi^{(e)}(x_1,x_2)=a_1\operatorname{sgn}x_2 e^{-|kx_e|}\sin kx_1 \quad \text{при } |x_e|>h,$$

где

$$u(x_2)=d_1\operatorname{sh}kx_2+d_2[(3-4\nu)\operatorname{sh}kx_2+kx_2\operatorname{ch}kx_2]+Q_1^0\cdot A\operatorname{sh}k\gamma x_2,$$
$$v(x_2)=d_1\operatorname{ch}kx_2+d_2kx_2\operatorname{sh}kx_2+Q_2^0\cdot A\operatorname{ch}(k\gamma x_2),\quad \gamma^2=(1+a_{11})/(1+a_{22}).$$

Члены с коэффициентами Q_1^0 и Q_2^0 учитывают влияние объемных сил магнитного происхождения:

$$Q_1^0=\frac{\gamma}{(1-\gamma^2)^2}\left\{\lambda_1\left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}-\gamma^2\right]+\lambda_2\frac{\gamma^2}{2(1-\nu)}\right\},$$
$$Q_2^0=\frac{\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2}\left\{\lambda_2\left[1-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\gamma^2\right]-\lambda_1\frac{1}{2(1-\nu)}\right\},$$
$$\lambda_1=\frac{2\mu_0\chi(H_0)\cdot H_0}{\mu},\quad \lambda_2=\frac{\mu_0}{\mu}\chi(H_0)\cdot H_0\left[\frac{2(\chi+H_0\chi')}{\chi}-\frac{H_0\chi'}{1+\chi}\right].$$

Подставляя решение (3.2) в граничные условия (2.8), для неизвестных коэффициентов d_1, d_2, a_1 и A получается система линейных алгебраических уравнений. Критическое магнитное поле, при котором пластина-полоса теряет устойчивость, определяется из условия равенства нулю детерминанта указанной системы алгебраических уравнений. В общем случае условие имеет довольно сложный вид. Если предположить, что $\gamma kh \ll 1$, то для определения критического магнитного поля получается следующее уравнение:

$$4d \cdot Q_1^0 \cdot (1-\nu)kh\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\gamma^2-1\right]-\frac{4d \cdot Q_1^0(1-\nu)kh}{1-2\nu}-4d \cdot L \cdot (1-\nu)kh-$$

$$-4d \cdot e_1(1-\nu)\gamma^2 \cdot kh+\frac{8}{3}(kh)^3[\gamma^2(1+a_{22})kh+1]=0, \qquad (3.3)$$

где

$$L=\frac{\mu_0 H_0 \cdot a_{11}}{\mu}, \quad e_1=\frac{\mu_0 H_0 \cdot \chi \cdot a_{22}}{\mu}.$$

Отметим, что из (3.3) можно определить H_{0*} в области, занимаемой пластино-полосой, а критическое значение внешнего магнитного поля $H_{0*}^{(e)}=\frac{B_{0*}^{(e)}}{\mu_0}$ можно определить из выражения

$$\frac{B_{0*}}{\mu_0}=[1+\chi(H_{0*})] \cdot H_{0*}. \qquad (3.d)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) $\chi(H_0)=\text{const}=\mu_r-1.$

Из (3.3) получим

$$\frac{B_{0*}^2}{\mu_0\mu} \cdot \left(\frac{\mu_r-1}{\mu_r}\right)^2=\frac{2}{3}\frac{(kh)^3(\mu_r kh+1)}{(1-\nu)(\mu_r+11)}. \qquad (3.5)$$

Выражение (3.5) совпадает с аналогичными результатами, полученными в [3, 8].

2) $\chi(H_0)=\varkappa_0+b_r \cdot H_0.$

Из (3.3) следует

$$-\frac{\mu_0 H_{0*}^2}{\mu}\gamma^2 kh \cdot 4(1-\nu)(\varkappa_0+b_r H_{0*})^2(\varkappa_0+2b_r H_{0*})+$$

$$+\frac{8}{3}(kh)^3[kh\gamma^2(1+\varkappa_0+2b_r H_{0*})+1]=0. \qquad (3.6)$$

Предполагая $kh(\varkappa_0+b_r H_{0*})\gg 1$, находим выражение

$$\frac{\mu_0 H_{0*}^2}{\mu}(\varkappa_0+b_r H_{0*})^2=\frac{2}{3} \cdot \frac{(kh)^3}{1-\nu}, \qquad (3.7)$$

которое получено в [7]. Результаты (3.5) и (3.7) можно получить также из (3.3), пренебрегая объемными силами, т. е. в (3.3) положить $\lambda_1=\lambda_2=0$.

3) $\chi(H_0)=\frac{\beta}{\mu_0 H_0}\operatorname{arctg}(\alpha H_0).$

В этом случае получить из (3.3) аналитическую формулу для H_{0*} очень трудно. Из анализа численных расчетов видно, что:

а) с увеличением B_s (индукция насыщения) критическое магнитное поле уменьшается;

б) критическое магнитное поле монотонно возрастает с увеличением μ_0 и ν;

в) пренебрегая объемными силами ($\lambda_1=\lambda_2=0$), критическое магнитное поле почти не меняется.

Таким образом, получены основные уравнения движения (2.12) и граничные условия (2.8) для магнитомягкого ферромагнитного тела с нелинейным законом намагничивания. Отметим, что эти уравнения и граничные условия в частном случае ($\chi=\mathrm{const}$) совпадают с аналогичными уравнениями и граничными условиями, полученными в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. **H. F. Tiersten.** J. Math. Phys., 5, 1298 (1964).
2. **W. R. Brown,** Jr. Magnetoelastic Interactions, Springer-Verlag, New York, 1966.
3. **Y. H. Pao, C. S. Yeh.** J. Eng. Sci., 11. 451 (1973).
4. **Р. М. Бозорт.** Ферромагнетизм., М., Изд-во иностранной литературы, 1956.
5. **П. М. Колесников.** Введение в нелинейную электродинамику. Минск, 1975.
6. **А. Р. Гачкевич, М. Т. Солодяк.** III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван, с. 56—59 (1984).
7. **М. В. Белубекян, Ю. М. Хачатрян.** Вестник АН БССР, сер. физ-мат. наук, с. 110—116 (1984).
8. **Ф. И. Мун.** Прикладная механика, М., Мир, с. 160—166, 1970.

ՖԵՌՈՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԲ ՀԱՇՎԻ Է ԱՌՆՎՈՒՄ ՄԱԳՆԻՍԱՑՄԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔԸ

Դ. Ջ. ՀԱՍԱՆՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ստացված են մագնիսաառաձգական ֆեռոմագնիսական մարմնի գծայնացված հավասարումները, երբ հաշվի է առնվում մագնիսացման ոչ գծային օրենքը։ Բերված է կոնկրետ օրինակ, որտեղ հաշվի է առնվում մագնիսացման ոչ գծային օրենքը։

MAGNETOELASTICITY EQUATIONS OF FERROMAGNETIC BODY WITH A NONLINEAR LAW OF MAGNETIZATION

D. G. HASANIAN, G. E. BAGHDASARIAN

The linearized equations of a magnetoelastic ferromagnetic body are obtained, when the nonlinear law of magnetization is taken into account.

Известия НАН Армении, Физика, т. 30, № 6, с. 261—268 (1995)

УДК 550.388.2

МЕЛКОМАСШТАБНОЕ ДИНАМО ПОЛНОЙ МОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ОБОЛОЧКИ ЗЕМЛИ (ВПЛОТЬ ДО ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЫ МАГНИТОСФЕРЫ) И ЕЕ ВНУТРЕННЕГО СЛОИСТОГО СТРОЕНИЯ

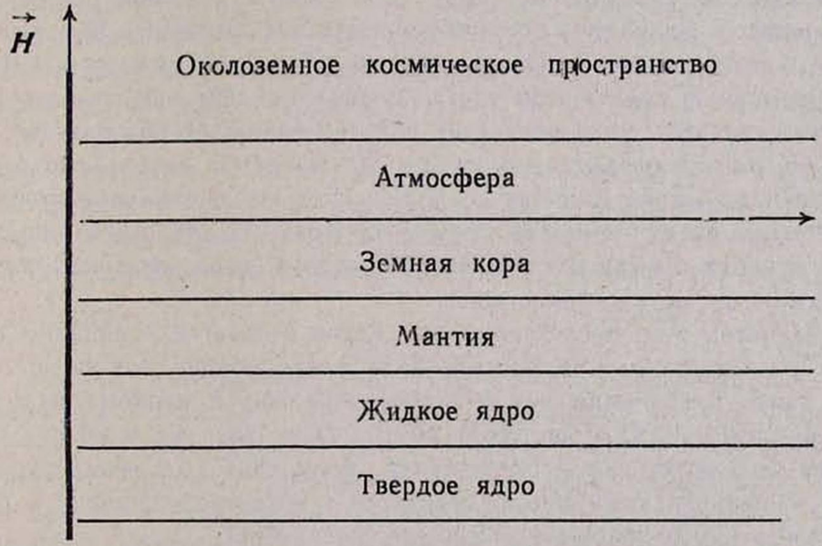
Ю. С. ВАРДАНЯН

Институт радиофизики и электроники НАН Армении

(Поступила в редакцию 5 мая 1995 г.)

В работе рассмотрено мелкомасштабное динамо полной модели околоземного космического пространства (вплоть до внешней границы магнитосфера) и внутреннего слоистого строения Земли. В рамках предложенной модели рассчитаны электрические поля, токи и создаваемые ими магнитные поля внутри Земли.

В работе изучается индуцирование электромагнитных полей и токов в Земле, вызванное атмосферными ветрами в ионосфере. Причем Земля рассматривается как кусочно-однородный слоистый проводник, отделенный от многослойной ионосферы и магнитосферы сравнительно тонким слоем нейтральной атмосферы (см. рисунок). Поскольку электромагнитные процессы, протекающие в верхних слоях ионосферы и недрах Земли должны взаимодействовать через атмосферу, то необходимо решать самосогласованную задачу для всей длины силовой линии магнитного поля Земли, пронизывающей проводящую Землю и окружающее ее пространство [1].



Ясно, что генерируемые в ионосфере электромагнитные поля будут просачиваться через атмосферу в проводящие слои Земли и вызывать в ее глубинах электрические токи и магнитные поля.

В приближении бесконечно проводящей Земли в [2] была решена стационарная задача (что вполне оправдано для рассматриваемой задачи) для электромагнитных полей и токов, вызванных ионосферными ветрами путем механизма динамо. Однако предложенная модель, где Земля в электродинамическом отношении рассматривается как однородная, бесконечно проводящая среда, не позволяла сколько-нибудь, даже теоретически, делать рассуждения относительно просачивания электрических полей во внутренние области Земли и возникновения токов и магнитных полей (так как на границе нейтральная атмосфера—сверхпроводящая среда возникают поверхностные заряды и препятствуют проникновению электрических полей из атмосферы в Землю, т. е. электростатический потенциал на границе атмосфера-Земля обращается в постоянную величину—условно, в нуль).

Здесь для предложенной в [2] модели околоземного космического пространства и Земли, состоящей из плоских слоёв коры, мантии, жидкого и твердого ядра, изучается эффект механизма динамо, связанного с мелкомасштабным (по сравнению с радиусом Земли) движением нейтрального газа в ионосфере. Известно, что электрические поля, возбуждаемые ионосферными ветрами, размеры которых больше высоты однородной атмосферы, передаются в соседние области почти без затухания (детальный анализ этого вопроса дан в [3]). Следовательно, распространяясь через атмосферу, они будут просачиваться в земную толщу, обладающую определенной электропроводностью, и создавать там электрические токи и магнитные поля. Естественно, чтобы рассчитать такую самосогласованную задачу, необходимо решить систему физических уравнений, описывающих рассматриваемые процессы, для каждой области околоземного космического пространства и внутреннего строения Земли и удовлетворить всем граничным условиям найденных физических величин. В статье [2] для газовой оболочки Земли, вплоть до внешней границы магнитосферы, данная задача решена и получены в общем виде аналитические выражения электродинамических величин в каждой из областей ионосферы, магнитосферы и атмосферы. То же самое необходимо сделать для земных слоёв и привести полученные выражения в соответствие с теми же величинами для газовой оболочки Земли путем сшивки их на границах между слоями полной модели, охватывающей Землю и окружающее ее пространство.

Отметим, что представленная модель относится к высоким широтам и, следовательно магнитное поле Земли можно считать перпендикулярным к границам раздела плоских слоев, а мелкомасштабное (в смысле работы [4]) движение нейтрального газа в ионосфере, вследствие чего возникают электрические поля, считается неодинаковым в разных сопряженных точках северного и южного полушарий и разлагается на сумму ковращения и антивращения [1].

В настоящей работе будет приведена лишь только унифицированная запись систем уравнений движения и непрерывности заряженных частиц работы [2] для каждой из областей околоземного космического пространства. В случае необходимости за решениями и методами их получения можно обратиться к [2]. Здесь же мы приводить их не будем из-за экономии пространства, а будем говорить лишь только о путях и методах определения полей и токов во внутренних слоях Земли.

Итак, линеаризованные относительно возмущений физических величин уравнения движения и непрерывности для ионов и электронов во всем ионосферном слое имеют вид:

$$\frac{-\Delta p_i}{N_{oi}}+e\left\{-\nabla\psi+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_i\mathbf{H}]\right\}=\gamma_{in}(\mathbf{v}_i-\mathbf{W})+\frac{n_i}{2N_{oi}}(m_i+m_e)\mathbf{g}, \tag{1}$$

$$\frac{-\Delta p_e}{N_{eo}}-e\left\{-\Delta\psi+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}]\right\}=\gamma_{en}(\mathbf{v}_e-\mathbf{W})+\frac{n_e}{2N_{oe}}(m_i+m_e)\mathbf{g},$$

$$\operatorname{div}N_{oi}\mathbf{v}_i=-\alpha N_{oi}(n_i+n_e), \tag{2}$$

$$\operatorname{div}N_{oe}\mathbf{v}_e=-\alpha N_{oe}(n_i+n_e),$$

$$\operatorname{div}N_{oi}\mathbf{v}_i=-a_r N_n n_e, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}N_{oe}\mathbf{v}_e=-a_r N_n n_e.$$

В этих уравнениях $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_e$ и n_i, n_e—соответственно скорости и возмущения равновесных концентраций N_{oi}, N_{oe} ионов и электронов, возмущения их давлений $p_i=n_ikT_i$, $p_e=n_ekT_e$, поскольку процессы считаются изотермическими, k—постоянная Больцмана, ψ—потенциал электрического поля, g—ускорение силы тяжести, γ_{in}, γ_{en}—частоты соударений ионов и электронов с частицами нейтрального газа, $\mathbf{W}$—скорость нейтральных частиц, J—функция ионообразоваиия Чепмена, α—коэффициент рекомбинации положительных ионов с электронами, β—формальный (т.к.в F области реакция прилипания отсутствует) коэффициент прилипания электронов к нейтральным атомам, линейно зависящий от концентрации нейтральных частиц, т.е. $\beta=a_rN_n$. Поясним, что система уравнений (1), (2), (3) с определенными значениями параметров относится соответственно к (E, F_1, F_2), E, (F_1, F_2) слоям ионосферы. К этим уравнениям во всех случаях добавляется еще уравнение Пуассона $-\Delta\psi=4\pi e(n_i-n_e)$ и описывающие электродинамику нейтральной атмосферы и бесконечно проводящей плазмы (магнитосферы) соответственно уравнения Лапласа $-\Delta\psi=0$ и Эйлера $\Delta p=\frac{1}{c}[\mathbf{jH}]$.

Однако решение уравнения Лапласа для электрического потенциала ψ в нейтральной атмосфере, полученное в виде гармоники фурье-разложения при замкнутой нижней границе, т. е. когда электрический потенциал примыкает к бесконечно проводящей Земле, обращается в нуль. Рассматриваемая модель, как уже было сказано, допускает проникновение поля во внутрь Земли. Следовательно, потенциал должен быть найден из системы уравнений, полностью определяющей произвольные постоянные найденных электродинамических величин. Как уже было сказано, движение нейтрального газа в сопряженных точках разлагается на ко- и антивращение. И из предыдущих исследований известно, что оба эти случая движения накладывают определенные условия на симметрию решений задачи в южном и северном полушариях [4]. Отсюда и следуют граничные условия между ионосферной и магнитосферой для потенциала электрического поля и возможность возникновения электрических токов в ионосфере и их протекания по магнитным силовым линиям Земли через магнитосферу между двумя полушариями. Симметрия решений основных уравнений газовой оболочки Земли будет иметь свои последствия и при рассмотрении электрических явлений в Земле, поскольку в рамках данной задачи они обусловлены возмущениями в ионосфере. Математически это будет видно после сшивки электрического потенциала на границе нейтральная атмосфера—кора Земли при обоих случаях движения (ко- и антивращение).

Возбуждаемые ионосферными ветрами электрические токи в земных слоях могут быть написаны в общем виде

$$\mathbf{j}=\sigma_{\parallel}\mathbf{E}_{\parallel}+\sigma_p\mathbf{E}_{\perp}+\sigma_H\frac{[\mathbf{HE}]}{H},$$

где $\mathbf{E}_{\parallel}$, $\mathbf{E}_{\perp}$—компоненты электрического поля, направленные вдоль и перпендикулярно магнитному полю, H—магнитное поле Земли, $\sigma_{\parallel}$, σ_p, σ_H называются соответственно продольной проводимостью и проводимостями Педерсена и Холла. Это уравнение с соответствующими значениями проводимостей относится ко всем слоям Земли (в том числе и к твердой части ядра с определенными оговорками), кроме внешнего жидкого слоя ядра, который принимается бесконечно электропроводящим и описывается уравнением Эйлера $\Delta p=\frac{1}{c}[\mathbf{jH}]$.

Заметим, что в избранной прямоугольной системе координат ось z в настоящей работе, как и в [2], направлена по магнитному полю Земли. Тогда электрические токи, разложенные по координатным осям, и тензор проводимости будут иметь следующий вид:

$$j_x=\sigma_p E_x-\sigma_H E_y,\quad j_y=\sigma_H E_x+\sigma_p E_y,$$

$$j_z=\sigma_{\parallel}E_z,\qquad \bar{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_p & -\sigma_H & 0\\ \sigma_H & \sigma_p & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Так как рассматривается стационарный случай, то замкнутость токов выражается соотношением $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$. Предположив, что проводимости меняются только по оси z (то же самое, что по радиусу Земли), и учитывая соотношение $E=-\Delta\psi$, будем иметь

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=\sigma_p\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{\parallel}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0, \tag{5}$$

т.е. отсутствует член, содержащий проводимость Холла. Далее, потребовав непрерывности нормальной составляющей тока j_z и потенциала ψ на границах между слоями, установим граничные условия и для определения ψ из уравнения (5).

По предположению проводимости $\sigma_\parallel$, σ_p, σ_H меняются только по оси z, поэтому решение уравнения (5) можно искать в виде фурье-разложения $\psi=f(z)e^{i(k_1x+k_2y)}$. Подставляя это выражение в (5), будем иметь

$$\sigma_\parallel f''_{zz}(z)+\sigma'_{\parallel z}f'_z(z)-\sigma_p k^2 f(z)=0,$$

где $k^2=k_1^2+k_2^2$.

Заметим, что здесь k_1, k_2 по замыслу задачи те же, что и в работе [2] для газовой оболочки Земли. Далее, производя замену переменной $\xi=\int\sqrt{\sigma_p/\sigma_\parallel}\,dz$ в (5) и аппроксимируя выражение $\sigma_m=\sqrt{\sigma_p\sigma_\parallel}$ экспоненциальной функцией $\sigma_m=\sigma_0 e^{m\xi}$, определим функцию f и тем самым и потенциал электрического поля ψ в виде

$$\psi=e^{-\frac{m}{2}\xi}(A_1e^{t\xi}+A_2e^{-t\xi})\cdot\sin k_1x\cdot\cos k_2y. \qquad (6)$$

Здесь $t=\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2+4k^2}$; A_1, A_2—A_2—произвольные постоянные (вообще говоря, разные для каждого слоя), которые определяются из граничных условий.

После этого из уравнения Пуассона $-\Delta\psi=4\pi\rho$ легко определить и плотность зарядов поляризации $\rho=-\dfrac{1}{4\pi}(\psi''_{zz}-k^2\psi)$.

Индуцируемые в сопряженных точках уходящей вглубь Земли в северном и южном полушариях магнитной силовой линии в коре электрические поля, распространяясь по внутренним слоям, будут создавать электрические токи и магнитные поля. Причем электрические токи между сопряженными точками в земной коре будут замыкаться по магнитным силовым линиям Земли через внутреннее ядро и горизонтальный слой коры (поскольку проводимость вдоль магнитных силовых линий $\sigma_\parallel$ существенно выше проводимостей в перпендикулярных направлениях σ_p и σ_H, имеющих наибольшее значение в верхних слоях Земли).

Компоненты электрического тока с учетом (4) и (6) имеют вид

$$j_x=[e^{-\frac{m}{2}\xi}(A_1e^{t\xi}+A_2e^{-t\xi})](-\sigma_pk_1\cdot\cos k_1x\cdot\cos k_2y-\sigma_Hk_2\sin k_1x\cdot\sin k_2y),$$

$$j_y=[e^{-\frac{m}{2}\xi}(A_1e^{t\xi}+A_2e^{-t\xi})](-\sigma_Hk_1\cdot\cos k_1x\cdot\cos k_2y+\sigma_pk_2\sin k_1x\cdot\sin k_2y), \quad (7)$$

$$j_z=-\sigma_\parallel\sqrt{\sigma_p/\sigma_\parallel}\left[\left(t-\frac{m}{2}\right)A_1e^{(t-\frac{m}{2})\xi}-\left(t+\frac{m}{2}\right)A_2e^{-(t+\frac{m}{2})\xi}\right]\cdot\sin k_1x\cdot\cos k_2y.$$

Как уже было сказано выше, жидкая часть ядра описывается уравнением Эйлера $\Delta p=\dfrac{1}{c}[\mathrm{jH}]$. Беря ротор от обеих частей этого равенства, будем иметь $H\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z}=0$, т.е. ток не зависит от z. При антивращении условие $\frac{\partial j_x}{\partial z}=\frac{\partial j_y}{\partial z}=0$ требует обращения в нуль горизонтального тока в жидком ядре, поскольку j_x, j_y должны быть нечетными функциями от z. Нормальная компонента тока должна оставаться непрерывной при переходе через границу мантия—жидкое ядро. Следовательно, ток в жидком ядре будет направлен вдоль линий магнитного поля H и равен значению j_z на границе.

При коврашении потенциал электрического поля ψ должен быть четной функцией от z, поэтому E_z и j_z оказываются нечетными функциями z. Поскольку ток в жидком ядре не зависит от z, то на границе мантия – жидкое ядро $j_z=0$.

При реальных условиях (высокой температуре и высоком давлении) существования земного ядра твердую его часть можно считать высокопроводящим однородным шаром, состоящим из атомов железа [5,6], вместе с внешней жидкой частью ядра. Тогда с определенной степенью точности можно пренебречь горизонтальными токами в этой области ядра и считать токи текущими вдоль силовых линий магнитного поля Земли и (учитывая условие непрерывности на границе жидкое—твердое ядро) совпадающими с нормальными токами в жидкой части ядра.

Магнитные поля, создаваемые этими токами, ищем из уравнения $-\Delta \mathbf{h}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j}$, полученного взятием ротора от обеих частей уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{h}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j}$. Однако это уравнение определяет $\mathbf{h}$ с точностью до градиента произвольной функции φ, которая должна удовлетворять уравнению Лапласа, поскольку $\operatorname{div}\mathbf{h}=0$. Имея это в виду, можно выбором определенной функции φ удовлетворить всем граничным условиям перехода магнитного поля $\mathbf{h}$ из одного слоя в другой [1].

Возмущение магнитного поля $\mathbf{h}$, соответствующее току (7), в общем виде будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
h_x&=Q_1(z,\sigma_\parallel,\sigma_p,\sigma_H,k_1,k_2,m,A_i)\cdot\cos k_1x\cdot\cos k_2y+\\
&+Q_2(z,\sigma_\parallel,\sigma_p,\sigma_H,k_1,k_2,m,A_i)\cdot\sin k_1x\cdot\sin k_2y,\\
h_y&=Q_3(z,\sigma_\parallel,\sigma_p,\sigma_H,k_1,k_2,m,A_i)\cdot\cos k_1x\cdot\cos k_2y+\\
&+Q_4(z,\sigma_\parallel,\sigma_p,\sigma_H,k_1,k_2,m,A_i)\cdot\sin k_1x\cdot\sin k_2y,\\
h_z&=Q_5(z,\sigma_\parallel,\sigma_p,\sigma_H,k_1\,k_2,m,A_i)\cdot\sin k_1x\cdot\cos k_2y.
\end{aligned}
$$

Эти выражения с соответствующими значениями проводимостей, постоянной экспоненты m, произвольных постоянных $A_i(i=1,2...)$ относятся соответственно к слоям коры и мантии.

Магнитное поле $\mathbf{h}$ в жидком и твердом ядре имеет вид

$$h_x = Q_6(z, \sigma_\parallel, \sigma_p, \sigma_H, k_1, k_2, m, A_l) \cdot \cos k_1 x \cdot \cos k_2 y +$$

$$+ Q_7(z, \sigma_\parallel, \sigma_p, \sigma_H, k_1, k_2, m, A_l) \cdot \sin k_1 x \cdot \sin k_2 y,$$

$$h_y = Q_8(z, \sigma_\parallel, \sigma_p, \sigma_H, k_1, k_2, m, A_l) \cdot \cos k_1 x \cdot \cos k_2 y +$$

$$+ Q_9(z, \sigma_\parallel, \sigma_p, \sigma_H, k_1, k_2, m, A_l) \cdot \sin k_1 x \cdot \sin k_2 y$$

$$h_z = Q_{10}(z, \sigma_\parallel, \sigma_p, \sigma_H, k_1, k_2, m, A_l) \cdot \sin k_1 x \cdot \cos k_2 y.$$

Значения Q_l и их детальный анализ из-за громоздкости выражений будут приведены в следующей работе.

Плотность зарядов поляризации в коре и мантии из уравнений Пуассона выразится формулой

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left\{A_1 e^{\left(t-\frac{m}{2}\right)\xi}\left|\left[t-\frac{m}{2}\right)^2 \sigma_p/\sigma_\parallel + \left(t-\frac{m}{2}\right)\left(\sqrt{\sigma_p/\sigma_\parallel}\right)'_z - k^2\right| +\right.$$

$$\left. + A_2 e^{\left(t+\frac{m}{2}\right)\xi} \cdot \left[\left(t+\frac{m}{2}\right)^2 \sigma_p/\sigma_\parallel - \left(t+\frac{m}{2}\right)\left(\sqrt{\sigma_p/\sigma_\parallel}\right)'_z - k^2\right\}.$$

Понятно, что все произвольные постоянные, входящие в выражения настоящей работы, а также и работы [2], теперь уже будут определяться из граничных условий между слоями всей системы, охватывающей околоземное космическое пространство и внутреннее строение Земли.

Как видно из выражений магнитного поля $\mathfrak{h}$, туда входят проводимости, характеризующие электрические свойства соответствующих слоев. Допуская, что нам известны (с определенными оговорками) проводимости ядра и мантии, т. е. железа и силикатов [6, 7], которые составляют основную массу названных слоев, мы тогда получим возмущение магнитного поля в зависимости от проводимости коры. Это позволяет нам сделать важные физические выводы, подробное изложение которых приводится ниже.

Таким образом, в работе показано, что электрические процессы в околоземном космическом пространстве взаимодействуют с электропроводящей Землей и влияют на ее внутреннее электродинамическое состояние. В частности, изучена задача генерации электрических полей и токов в недрах Земли под влиянием механизма динамо мелкомасштабных процессов в ионосфере. Здесь же рассмотрена возможность просачивания электрических полей из атмосферы во внутренние слои Земли и возникновения токов. При этом вычислены электрические поля, токи и создаваемые ими магнитные поля, а также плотность зарядов поляризации в каждом из слоев в зависимости от продольной проводимости и проводимостей Педерсена и Холла. Причем возбуждаемые магнитные поля вносят свой вклад в магнитные вариации поля Земли и могут дать определенную информацию о ее геологическом строении. Поскольку, в отличие от дальнего зондирования, которое основано на скин-эффекте направленных волн и способно исследовать земную поверхность на глубине порядка нескольких метров, сама постановка настоящей задачи (в приближении предложенной модели) позволяет исследовать всю глубину Земли (от центра до ее поверхности).

Кроме того, магнитные вариации поля Земли могут дать информацию и о ее сейсмическом состоянии, поскольку рассматриваемая задача стационарна, т. е. обратима, и возмущения в ионосфере можно рассматривать как следствие возмущений в недрах Земли.

И, наконец, магнитные вариации поля Земли могут быть использованы для изучения природных ресурсов (геологических исследований), так как методы выделения резличных типов возмущений хорошо разработаны [7]. Для этого необходимо на испытательных полигонах по полученным формулам произвести калибровку магнитометров и обработать результаты магнитных измерений.

Однако, предложенная модель внутреннего строения Земли требует дополнительного изучения и усовершенствования с учетом физико-химических свойств каждого из слоев и физических условий их существования. Это позволит получить более точные, практически важные результаты. Поэтому дальнейшая работа автора настоящей статьи будет посвящена этой проблеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Л. М. Алексеева, Ю. С. Варданян, Б. А. Твердской.** Геомагнетизм и аэрономия, **9**, 437 (1969).
2. **Ю. С. Варданян.** Известия АН Арм. ССР, Физика, **27**, 163 (1992).
3. **Б. Н. Гершман.** Динамика ионосферной плазмы. М., Наука, 1974.
4. **Ю. С. Варданян.** Геомагнетизм и аэрономия, **17**, 1012 (1977).
5. **У. Кауфман.** Планеты и луны. М., Мир, 1972.
6. **В. Н. Жарков.** Внутреннее строение Земли и планет. М., Наука, 1983.
7. **А. Нишида.** Геомагнитный диагноз магнитосферы. М., Мир, 1980.

SMALL-SCALE DYNAMO OF COMPLETE MODEL FOR THE EARTH'S GAS SHELL (UP TO THE EXTERNAL BOUNDARY OF MAGNETOSPHERE) AND FOR ITS INTERNAL LAYERED STRUCTURE

YU. S. VARDANYAN

Small-scale dynamo is considered in the paper, in a complete model of near-Earth space (up to the external boundary of magnetosphere) and internal layered structure of Earth. In the framework of proposed model we have obtained the expressions for electric fields, currents and magnetic fields created by these currents.

ԵՐԿՐԻ ԳԱԶԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ (ԸՆԴՀՈՒՊ ՄԻՆՉԵՎ ՄԱԳՆԻՍՈԼՈՐՏԻ ԱՐՏԱՔԻՆ ՍԱՀՄԱՆԸ) ԵՎ ՆՐԱ ՆԵՐՔԻՆ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԻ ԼՐԻՎ ՄՈԴԵԼԻ ՄԱՆՐԱՉԱՓ ԴԻՆԱՄՈՆ

ՅՈՒ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Աշխատանքում դիտարկված է մերձերկրյա տիեզերական տարածության (ընդհուպ մինչև մագնիսոլորտի արտաքին սահմանը) և Երկրի ներքին շերտավոր կառուցվածքի մանրաչափ դինամոն։ Առաջարկված մոդելի սահմաններում հաշված են էլեկտրական դաշտերը, հոսանքները և նրանց կողմից առաջացրած մագնիսական դաշտերը։

Известия НАН Армении, Физика, т. 30, № 6, с. 269—274 (1995)

УДК 584.4

ВОЗДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА НА КИНЕТИКУ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ИЗ РАСТВОРОВ

В. С. АРАКЕЛЯН, А. Л. КАПАНАКЦЯН, О. Г. НАЛБАНДЯН

Институт радиофизики и электроники НАН Армении

(Поступила в редакцию 15 апреля 1994 г.)

Изложен механизм воздействия электрического тока на процесс роста водорастворимых кристаллов. Показана чувствительность скорости роста кристаллов к плотности электрического тока, проходящего через систему кристалл-раствор. Наблюдается хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных.

Попытки воздействия переменным электрическим полем на процесс роста водорастворимых кристаллов предпринимались неоднократно, однако отсутствие понимания процессов, происходящих при таком воздействии, не позволило получить сколь-нибудь значительные практические результаты [1—4]. Проведенные нами в [5] исследования показали необходимость воздействия на систему кристалл-раствор электрическим током, ибо токи смещения, возникающие при воздействии электрическим полем, не могут способствовать переносу ионов кристаллизуемого вещества.

В настоящей работе рассмотрен механизм воздействия электрического тока на процесс роста водорастворимых кристаллов.

Растворы кристаллизуемых веществ представляют собою сложную многокомпонентную систему ,содержащую не только структурные единицы растворителя и кристаллизуемого вещества, но и продукты их диссоциации и комплексообразования. Вследствие различия в коэффициентах захвата и диффузионной подвижности ионов противоположного знака перед растущей гранью кристалла возникает неодинаковое распределение компонент, приводящее к возникновению в переходном слое электрических полей. Как и в случае кристаллизации расплавов [6], на дебаевском слое возникает разность потенциалов

$$\varepsilon_D=\frac{kT}{e(z_A+z_B)}\ln\frac{K_A^0}{K_B^0}, \qquad (1)$$

выравнивающая плотность потоков ионов противоположного знака, что для систем, содержащих ионы двух типов (A^+ и B^-), достигается при равенстве дебаевских коэффициентов распределения:

$$K_D^A(\varepsilon_D)=K_D^B(\varepsilon_D). \qquad (2)$$

На пограничном диффузионном слое также возникает разность потенциалов

$$\varepsilon_L = \frac{2kTv}{e(z_A + z_B)} \left(\frac{h_A^0}{D_A^0} - \frac{h_B^0}{D_B^0} \right), \qquad (3)$$

компенсирующая различную диффузионную подвижность ионов противоположного знака и выравнивающая плотности их потоков.

Возможные случаи распределения компонент для систем, содержащих ионы двух типов, представлены на рис. 1. Разность потенциалов на диффузионном слое меняется с изменением скорости крис-

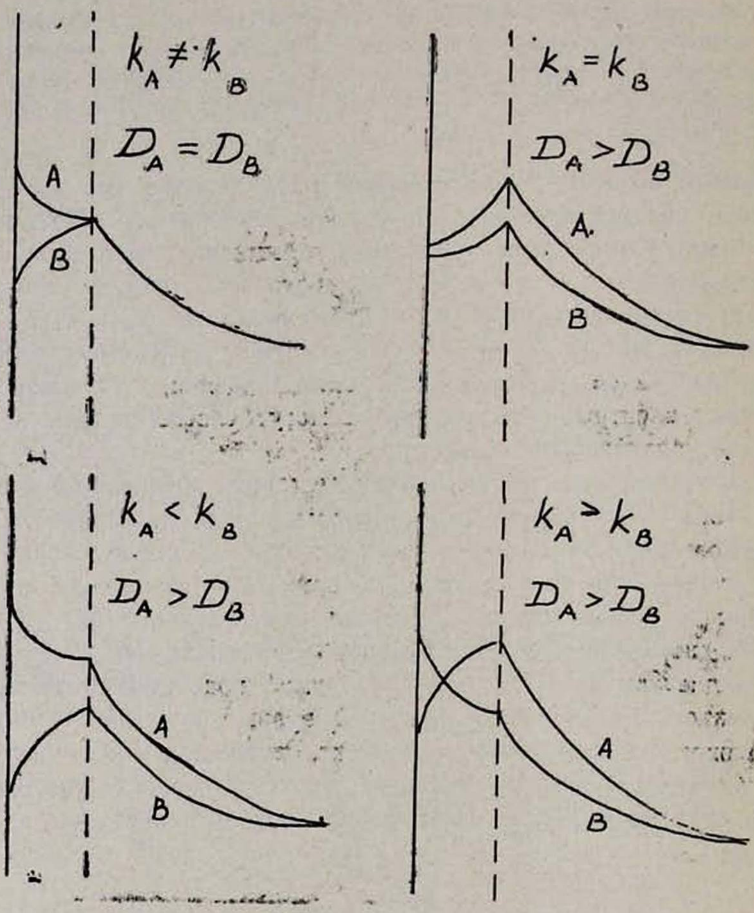


Рис. 1. Возможные случаи распределения компонент для систем, содержащих ионы двух типов.

таллизации и интенсивности перемешивания раствора, в то время как разность потенциалов на дебаевском слое от этих параметров практически не зависит.

Кристаллизация из растворов существенно отличается от расплавной кристаллизации зависимостью скорости роста от концентрации компонент перед фронтом кристаллизации. Для однокомпонентных кристаллизуемых веществ при условии пренебрежимости процессов диссоциации и комплексообразования структурных единиц раствора скорость роста однозначно связана с пересыщением раствора кристаллизуемой компонентой и зачастую аппроксимируется выражением

$$v=\beta(\Delta C)^n. \tag{4}$$

Однако, если кристалл может образоваться не только присоединением однотипных структурных единиц, но и присоединением продуктов их диссоциации и комплексообразования, то концентрация этих компонент также вносит вклад в скорость роста. Легко видеть, что в этом случае понятие пересыщения нуждается в доопределении.

Рассмотрим раствор, содержащий структурные единицы кристаллизуемого вещества AB, а также продукты их диссоциации A^+ и B^- с соответствующими концентрациями C_L^A, C_L^B и C_L^{AB}. Анализ условия равновесия такой системы с кристаллом AB показывает, что равновесие возможно на кривой, описываемой выражением

$$C_L^A \cdot C_L^B=\text{const}, \tag{5}$$

то есть возможны изменения состава раствора, не выводящие систему из равновесия. Поскольку в растворе концентрации компонент связаны с соотношением диссоциации

$$C_L^{AB}=k \cdot C_L^A \cdot C_L^B, \tag{6}$$

то условие равновесия может быть записано в виде

$$C_L^{AB}=\text{const}, \tag{7}$$

допускающем тем не менее взаимные изменения концентрации компонент A^+ и B^-. При нарушении равновесия, когда растет кристалл состава AB, рост кристалла обусловлен потоками всех компонент. Строгая стехиометричность растущего кристалла приводит к тому, что скорость роста обусловлена вероятностью присоединения к кристаллу частицы AB и вероятностью присоединения частицы A при условии предшествующего акта присоединения частицы B. Из анализа потоков частиц легко видеть, что скорость роста определяется суммой относительных пересыщений по каждой компоненте:

$$v\sim\left[\beta_1\frac{\Delta C_L^{AB}}{C_L^{AB}}+\beta_2\left(\frac{\Delta C_L^A}{C_L^A}+\frac{\Delta C_L^B}{C_L^B}\right)\right]^n=\beta\left(\frac{\Delta C_L^{AB}}{C_L^{AB}}\right)^n. \tag{8}$$

Таким образом, наличие в растворе диссоциированных компонент приводит к изменению кинетического коэффициента кристаллизации, а пересыщение в системе можно по-прежнему определять по пересыщению основной компоненты.

При росте кристаллов из растворов самосогласованно устанавливаются распределения компонент и пересыщение перед фронтом кристаллизации, разности потенциалов на дебаевском и диффузионном слоях, скорость кристаллизации. Традиционными методами воздействия на параметры кристаллизации являются изменения внешних условий—пересыщения в объеме раствора и интенсивности перемешивания раствора. Вместе с тем наличие в растворе заряженных частиц позволяет осуществить эффективное воздействие с помощью электрического тока. Под действием пропускаемого через систему электрического тока происходит изменение концентрации компонент перед фронтом кристаллизации. Для раствора, содержащего, кроме молекул растворителя, частицы A, B и AB имеем:

$$\begin{gathered}
(C_S^A-C_L^A)\delta v-\delta C_L^A\cdot v_0=-\frac{j\alpha_S^A}{Ne}+\frac{D_L^A}{h}\delta C_L^A+\\
+D_L^A\frac{e}{kT}(C_L^A\delta E+E\delta C_L^A)+\frac{D_L^{AB}}{h}\delta C_L^{AB},\\
(C_S^B-C_L^B)\delta v-\delta C_L^B\cdot v_0=\frac{j\alpha_S^B}{Ne}+\frac{D_L^B}{h}\delta C_L^B-\\
-D_L^B\frac{e}{kT}(C_L^B\delta E+E\delta C_L^B)+\frac{D_L^{AB}}{h}\delta C_L^{AB}.
\end{gathered}\tag{9}$$

Здесь C_S^i и C_L^i—концентрация соответствующей компоненты в кристалле и на границе диффузионного слоя соответственно, α^i—доля общего тока, переносимая данной компонентой, D^i—коэффициент диффузии, h—толщина пограничного диффузионного слоя, E—напряженность электрического поля, j—плотность электрического тока, δ—изменение соответствующей величины под действием тока. Для случая линейной зависимости скорости роста от пересыщения на дебаевском слое имеем:

$$\delta(C_L^A-C_L^B)\left[v+\frac{D}{h}+\frac{DNe^2hC_L}{kT}\right]=\frac{j}{Ne},\tag{10}$$

$$\delta(C_L^A+C_L^B)\left|v+\frac{D}{h}-2(C_S-C_L)C_L\beta+\frac{2DkC_L}{h}\right|=\frac{j}{Ne}(\alpha_S^A-\alpha_S^B).\tag{11}$$

Проведем некоторые оценки с целью упрощения полученных выражений. Для реальных параметров системы $v\ll D/h$. Кроме того, в диффузионном режиме роста $D/h\ll 2(C_S-C_L)C_L\beta$, а в кинетическом режиме роста $D/h\gg 2(C_S-C_L)C_L\beta$. Оценки также показывают, что $D/h\ll DNe^2hC_L/kT$, то есть различие в потоках ионов противоположного знака компенсируется не просто изменением их концентраций, а возникающими вследствие разности концентраций электрическими полями. Таким образом, в диффузионном режиме роста имеем:

$$\delta(C_L^A-C_L^B)=\frac{j}{Ne}\,\frac{kT}{DNe^2hC_L},\tag{12}$$

$$\delta(C_L^A+C_L^B)=\frac{j}{Ne}\,\frac{\alpha_S^B-\alpha_S^A}{2(C_S-C_L)C_L\beta}.\tag{13}$$

Изменение концентрации компонент приводит к изменению скорости роста под действием электрического тока

$$\delta v = \frac{j(\alpha_S^B - \alpha_S^A)}{2Ne(C_S - C_L)} . \tag{14}$$

Легко видеть, что чувствительность скорости роста к плотности электрического тока зависит от степени диссоциированности раствора

$$C_L^A = \frac{\sqrt{1 + 4kC_{нас}} - 1}{2k} , \tag{15}$$

причем чем меньше диссоциирован раствор, тем выше чувствительность. Наименьшая чувствительность при полностью диссоциированном растворе для α-$LiIO_3$ по оценкам равна $2 \cdot 10^{-5}$см^3/с.А.

Электрические явления при кристаллизации из растворов исследовались нами при выращивании монокристаллов α-$LiIO_3$ в кювете с принудительной прокачкой раствора. Для пропускания электрического тока через систему кристалл-раствор использовались платиновые электроды. Скорость роста измерялась интерференционным измерителем. После завершения роста кристаллы исследовались под микроскопом. На рис. 2(а) приведена зависимость напряжения на переходе кристалл-раствор в зависимости от скорости прокачки. Из этого графика можно определить напряжение на дебаевском и диффузионном слоях. На рис. 2(б) приведена зависимость скорости роста крис-

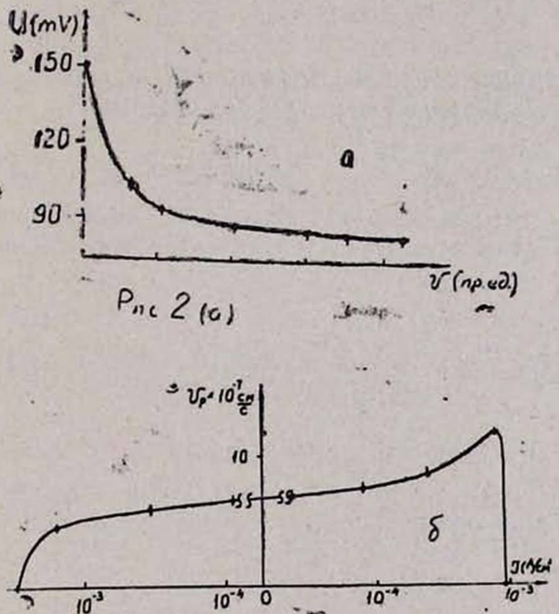


Рис. 2 а) Зависимость напряжения на переходе кристалл—раствор от скорости прокачки; б) Зависимость скорости роста кристалла от плотности и направления тока.

талла α-$LiIO_3$ от плотности и направления тока, причем знак зависимости соответствует теоретическому предсказанию, а величина чувствительности соответствует теоретическим оценкам с $K=2\cdot10^{-2}$. Экспериментальные результаты показали, что в зависимости от пересыщения можно получить различные значения скорости роста кристалла, в частности, при малых начальных пересыщениях под действием электрического тока наблюдалось двухсоткратное увеличение скорости роста кристалла. При превышении величины плотности тока $6\cdot10^{-3}$А/см^2 наблюдалась остановка роста кристалла. На кристаллах, извлеченных из кюветы после остановки роста наблюдались видные невооруженным глазом макроскопические холмики роста. Как видно из рис. 2(б), изменением направления пропускаемого через систему кристалл-раствор тока можно достичь растворения кристалла, находящегося в пересыщенном растворе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристаллизация и фазовые переходы. Минск, 1962.
2. Механизм и кинетика кристаллизации. Минск, 1964.
3. Механизм и кинетика кристаллизации. Минск, 1968.
4. Механизм и кинетика кристаллизации. Минск, 1969.
5. **V. S. Arakelian, A. L. Capanactsian, R. G. Manucharian, A. H. Nalbandian.** In Proceedings of the International Symposium on Industrial Crystallization, Germany, 1990.
6. **А. М. Мельникова.** Кристаллография, 14, 548 (1969).

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՀՈՍԱՆՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԼՈՒԾՈՒՅԹՆԵՐԻՑ ԲՅՈՒՐԵՂԱՑՄԱՆ ԿԻՆԵՏԻԿԱՅԻ ՎՐԱ

Վ. Ս. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Ա. Լ. ԿԱՊԱՆԱՔՑՅԱՆ, Հ. Գ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

Շարադրված է էլեկտրական հոսանքի ազդեցության մեխանիզմը ջրալուծելի բյուրեղների աճի պրոցեսի վրա։ Փորձնական և տեսական տվյալները գտնվում են լավ համապատասխանության մեջ։

D. C. CURRENT INFLUENCE ON KINETICS OF CRYSTALLIZATION FROM SOLUTION

V. S. ARAKELIAN, A. L. KAPANAKTSIAN, O. G. NALBANDIAN

The d. c. current influence on kinetics of crystallization from solution was investigated. The velocity of crystal growth under d. c. current influence may be changed 200 times.

Известия НАН Армении, Физика, т. 30, № 6, с. 275—280 (1995)

УДК 539.1.074

МИЛЛИМЕТРОВЫЙ И СУБМИЛЛИМЕТРОВЫЙ СПУТНИКОВЫЙ РАДАР-РАДИОМЕТРИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАННЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАЧАТКОВ ГРАДА В ОБЛАКЕ

Г. Г. АЙВАЗЯН, Г. М. АЙВАЗЯН, А. Г. ГУЛЯН, Р. М. МАРТИРОСЯН

Институт радиофизики и электроники НАН Армении

(Поступила в редакцию 23 декабря 1993 г.)

В работе кратко излагается новый метод исследования физических процессов, происходящий в конвективном облаке, и показана возможность обнаружения зачатков града в облаке с самолета или спутника с помощью дистанционного зондирования облака в диапазонах ММ и СБММ волн. Рассматривается принципиальная схема многоканального радар-радиометрического комплекса ММ и СБММ диапазонов, посредством которого можно экспериментально реализовать рассмотренный метод.

1. В работах [1, 2] показано, что для исследования физических свойств конвективного облака следует использовать новый метод дистанционного зондирования облака с самолета или спутника в диапазонах ММ и СБММ волн. Суть метода заключается в измерении спектрального коэффициента поглощения $\Gamma_A(\lambda)$ или же спектрального радиотеплового излучения облака в диапазонах ММ и длинноволновой части СБММ до длины волны $\lambda=0{,}6$ мм. Это собственное температурное излучение облачных капель—в основном, сверхкрупных капель радиусами r от 100 до 1500 мкм. Из-за соизмеримости длины волны излучения со средним радиусом $r_{\text{ср}}$ полидисперсного распределения сверхкрупных капель по размерам облака в функции $\Gamma_A(\lambda)$ наблюдается максимум при определенной длине волны $\lambda_{\text{макс}}$, приходящийся в основном на коротковолновую часть ММ диапазона.

В теории дифракции электромагнитного излучения на сферических частицах (теория Ми), по которой рассчитывается функция $\Gamma_A(\lambda)$, существует строгая прямая пропорциональность между величинами $r_{\text{ср}}$ и $\lambda_{\text{макс}}$. Поэтому увеличение или уменьшение $r_{\text{ср}}$ облака будет приводить соответственно к увеличению или уменьшению величины $\lambda_{\text{макс}}$ или же к смещению максимума функции $\Gamma_A(\lambda)$ соответственно в длинноволновую или в коротковолновую область спектра. В свою очередь, увеличение или уменьшение $r_{\text{ср}}$ облака непосредственно указывает соответственно на рост или уменьшение размеров сверхкрупных капель конвективного облака. Следовательно, если иметь многоканальный радиометр на весь ММ и длинноволновую область СБММ диапазона и на дисплее радиометра иметь постоянно функцию $\Gamma_A(\lambda)$ или $T_A(\lambda)$—спектральное радиотепловое излучение облака, то по смещению кривой $\Gamma_A(\lambda)$ (вернее, максимума кривой $T_A(\lambda)$) в длинноволновую или коротковолновую область спектра со временем можно судить о физическом процессе, происходящем в облаке,—увеличении или уменьшении размеров сверхкрупных капель облака. Это очень важно знать для градового облака, чтобы установить, развивается или нет процесс градообразования в облаке.

В работах [1, 2] показано также, что по смещению максимума $\Gamma_A(\lambda)$ вдоль шкалы длин волн и одновременному изменению формы самой спектральной кривой $\Gamma_A(\lambda)$ можно судить о том, изменяется ли температура сверхкрупных капель. Расчеты по строгой теории Ми показывают, что предложенным в [1, 2] методом можно установить— уменьшается или увеличивается температура капель облака, а если установить в какой-то момент развития облака и абсолютную температуру капель облака, то можно зафиксировать и момент перехода капель из теплого в переохлажденное состояние.

2. Наиболее важным для исследователя градового облака является обнаружение начала градообразования в облаке. Существующие радиолокационные методы позволяют это сделать, во-первых, косвенными методами, и во-вторых, слишком поздно, когда размеры градин уже порядка нескольких миллиметров; поэтому ввод реагента с этого момента в облако, с целью искусственной борьбы с градом, становится малоэффективным. В нашем случае момент фазового перехода вода-лед в сверхкрупных каплях облака устанавливается благодаря обнаруженному [3, 4] новому явлению—аномальному радиолокационному отражению СБММ волн в «окне» прозрачности льда $0{,}3\div0{,}8$ мм от сверкрупных капель облака. Оказывается, если имеется полидисперсное распределение переохлажденных сверхкрупных капель облака при определенной температуре и это распределение капель превращается в лед—ледяную крупу при этой же температуре, то коэффициент радиолокационного отражения СБММ $0{,}3\div0{,}8$ мм увеличивается более, чем на два порядка [1—4]. Поэтому, если иметь радиолокатор на длину волны, например, $\lambda=0{,}64$ мм, направить его на облако и вместе с вышеописанным многоканальным радиометром наблюдать за физическим процессом, происходящим в градоопасном облаке, то при фазовом переходе вода-лед в сверхкрупных каплях отраженный сигнал от облака увеличивается более, чем в 100 раз. Столь большое увеличение радиолокационного отражения заметить легко, а это означает установление начала градообразования в частицах субмиллиметровых размеров.

3. С целью экспериментального исследования, во-первых, физических процессов, происходящих в конвективных облаках по предложенной в п. 1 новой методике, и, во-вторых, для обнаружения зачатков града в облаке опять по предложеннмоу в п. 2 аномальному радиолокационному отражению СБММ волн при $\lambda=0{,}64$ мм, в работах [5—7] разработаны два метода: 1) пассивно-активной и 2) активной радиолокации облака с самолета или спутника. В *случае пассивно-активной радиолокации* в работах [5, 6] приводится принципиальная

схема многоканального радиометра, перекрывающая весь ММ и длинноволновую область СБММ диапазона до длины волны $\lambda=0{,}64$ мм. Всего каналов в радиометре 16, причем последний канал одновременно является и активным. Все 16 каналов, выведенные на дисплей радиометра, позволяют фиксировать в каждый момент времени развития конвективного облака функцию $\Gamma_A(\lambda)$ и наблюдать направление развития облака в сторону увеличения или уменьшения среднего размера сверхкрупных капель. Как указывалось выше (см. п. 1), по смещению кривой $\Gamma_A(\lambda)$ на дисплее вдоль оси длин волн и изменению формы кривой $\Gamma_A(\lambda)$ можно определить момент перехода капель в переохлажденное состояние. После этого следует уже ожидать момента фазового перехода вода-лед в сверхкрупных каплях, что можно зафиксировать с помощью активного последнего канала радар-радиометра на $\lambda=0{,}64$ мм. Мгновенное увеличение амплитуды 16-го канала более чем в 100 раз и будет служить индикатором появления ледяной фазы облака—зародышей градин размерами в субмиллиметры. В принципиальной схеме радар-радиометра (см. [7], рис. 2) предусмотрены оба вида приема: широкополосный и узкополосный (см. тракты II и III на рис. 2 [7]).

В работе [7] рассматривается *случай активной радиолокации*, когда все 16 каналов радиометра активны и на дисплее многоволнового радиолокатора вырисовывается функция $\Gamma_{RR}(\lambda)$ Детально рассматривается четырехэлементная антенная система E и распределение 16 значений длин волн—активных каналов по отдельным четырем антеннам диаметрами в 50 см каждая [7] (см. рис. 1). Данную антенную систему E, оказывается, можно использовать и в случае пассивно-активной радиолокации. Ниже детально рассматривается принципиальная схема радар-радиометра в случае узкополосного приема—16 узкополосных каналов с применением антенной системы E из работы [7].

4. На рис. 1 приводится антенная система E, которая теперь используется исключительно для пассивного приема во всех 16 каналах. В подписи к рис. 1 приводятся для каждой антенны в отдельности число каналов и соответствующие этим каналам длины волн. Для активного канала $\lambda=0{,}64$ мм необходимо использовать отдельную антенну F, удаленную от антенной системы E, чтобы боковые лепестки излучающей антенны F (см. принципиальную схему радар-радиометра ниже—рис. 2) не влияли на приемную антенну D этого же канала $\lambda=0{,}64$ мм. Дело в том, что в отличие от обычных радиолокаторов, здесь замеряется средний уровень сигнала, отраженного от облака, поэтому при работе в режиме активной радиолокации генератор должен излучать непрерывно в течение всей работы этого канала и одновременно должен работать приемник этого канала. (Один цикл, т. е. 16 каналов радиометра, измеряется за 2 миллисекунды, поэтому длительность замера каждого канала—133 микросекунды. Поэтому в течение этого времени непрерывно должно идти

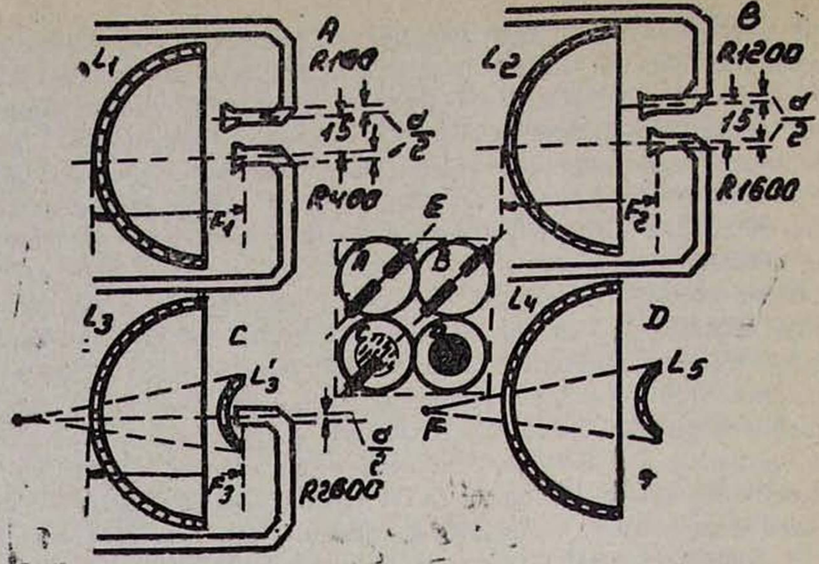


Рис. 1. Антенная система радар-радиометрического комплекса, А—антенна для длин волн: $\lambda=32$ мм; 9,1 мм; 7,5 мм и 6 мм. В—антенна для длин волн: $\lambda=3{,}25$ мм; 2,85 мм; 2,00 мм и 1,5 мм; С—антенна для длин волн: $\lambda=1{,}2$ мм и 0,91 мм; *Д*—антенна для длин волн: $\lambda=0{,}73$ мм и 0,64 мм (для каждой антенны вид сбоку); *Е*—общий вид антенной системы, состоящей из четырех антенн—*А, В, С* и *Д* (вид спереди).

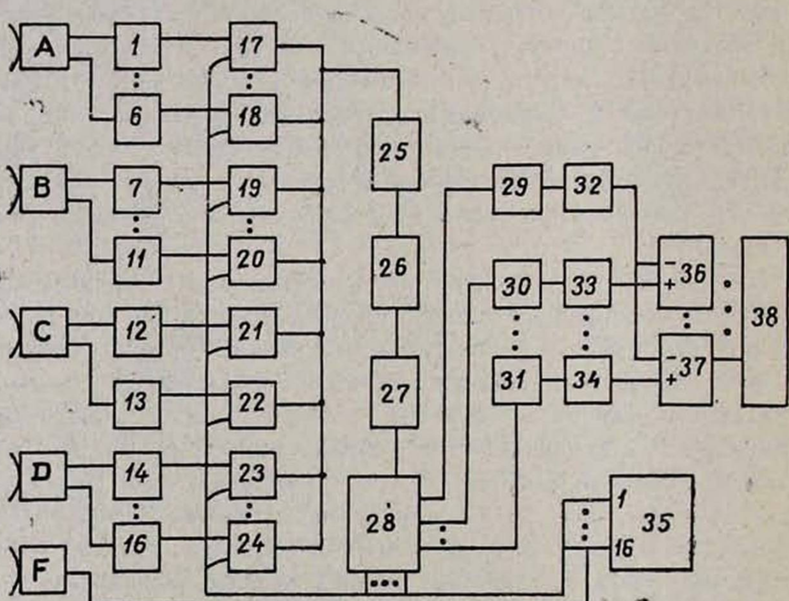


Рис. 2. Принципиальная схема многоканального радар-радиометрического комплекса ММ и СБММ диапазонов волн. *А, В, С, Д*—многоволновые приемные антенны с ответвителями мощности, F—излучающая антенна активного канала; 1—16—гетеродины, 17—24—переключатели, 25—блок усилителей, 26—квадратичный детектор, 27—усилитель постоянного тока, 28—блок коммутаторов, 29—31—интеграторы, 32—34—делитель напряжения, 35—блок режимов, 36—37—блоки вычитания, 38—блок регистрации.

излучение и прием последнего, 16-го канала). Только взаимное разнесение антенны D и F может исключить влияние приема и передачи.

Принципиальная схема радар-радиометра приводится на рис. 2. Сигнал, поступающий на антенны $A—D$, через ответвители мощности подается на гетеродины 1—16 и преобразуется к единой частоте входного канала усиления блока 25. Это происходит через переключатели 17—24 режима работы, который задается блоком режимов 35. Одновременно 35 включает антенну F в режим излучения. Поэтому через антенну D и гетеродин 16 в устройство подается отраженный сигнал режима активной радиолокации. На этом цикл работы радар-радиометра завершается. Частота повторения циклов выбрана порядка 500 Гц, что лежит выше частот флуктуации усиления блока 25. Усиленный в блоке 25 сигнал детектируется в 26 и после усиления в 27 по постоянному току, посредством блока коммутаторов 28, распределяется между шестнадцатью интеграторами 29—31. Выходные напряжения интеграторов через делители напряжения 32—34 подаются на вычитающие устройства 36—37, где напряжения опорного (первого канала) канала вычитаются из напряжений всех остальных каналов.

Выделенные таким образом напряжения соответствуют интенсивностям радиотеплового излучения облака для каждой отдельной длины волны (канала) из диапазонов ММ и СБМ волн. Они определяют спектральную интенсивность излучения облака, пропорциональную спектральной интенсивности поглощения $\Gamma_A(\lambda)$, а она, как показано выше, несет информацию об $r_{ср}$—росте или уменьшении сверхкрупных капель облака. В данном случае интенсивность излучения оказывается независимой от среды распространения, поскольку через среду (облако и атмосфера) распространяются как опорный, так и информационные каналы.

Посредством делителей напряжения 32—34, на фоне чистого неба, приводятся к нулю все напряжения блоков 36—37, что позволяет скомпенсировать неравномерности коэффициентов подачи трактов раздельного прохождения сигналов каждого канала—от входа антенны до усилителя 25. На блок регистрации 38 одновременно подаются напряжения всех отдельных 16 каналов, что может быть реализовано посредством параллельно расположенных пиковых индикаторов. Это позволяет наглядно наблюдать картину спектрального распределения интенсивности радиотеплового излучения облака по каналам, т. е. наблюдать изменение со временем спектральной интенсивности радиотеплового излучения облака—динамику развития конвективного облака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Айвазян. Распространение миллиметровых и субмиллиметровых волн в облаках. Справочник. Гидрометеоиздат, Л. 1991.
2. Г. М. Айвазян. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», 27, 304(1991).
3. Г. М. Айвазян. ДАН АрмССР, 84, 166(1988).

4. H. M. Ajvazyan. Int. J. of IR and MM Waves, 12, 919 (1991).
5. Г. Г. Айвазян, Г. М. Айвазян, А. Г. Гулян и Р. М. Мартиросян. Тезисы Всесоюзной конференции «Использование спутниковой информации в исследовании океана и атмосферы», апрель 1989, Звенигород. М., с. 82(1989).
6. Г. Г. Айвазян, Г. М. Айвазян, А. Г. Гулян, Р. М. Мартиросян. Изв. АН АрмССР, Физика, 25, 98(1990).
7. H. M. Ajvazyan and H. H. Ajvazyan. Int. J. of IR and MM Waves, 14, 1155 (1993).

ԱՄՊԻ ՄԵՋ ԿԱՐԿՈՒՏԻ ՎԱՂ ՀԱՅՏՆԱԲԵՐՄԱՆ ՄԻԼԻՄԵՏՐԱՆՈՑ ԵՎ ԵՆԹԱՄԻԼԻՄԵՏՐԱՆՈՑ ԱՐԲԱՆՅԱԿԱՅԻՆ ՌԱԴԱՐ-ՌԱԴԻՈՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼԻՐ

Հ. Հ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ, Հ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ, Ա. Գ. ՂՈՒԼՅԱՆ, Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Աշխատանքում հակիրճ շարադրված է նոր մեթոդ, որ ուսումնասիրում է կոնվեկցիոն ամպի մեջ տեղի ունեցող ֆիզիկական պրոցեսները և ամպի մեջ կարկուտի սաղմերի հայտնաբերման հնարավորությունը օդանավի կամ արբանյակի միլիմետրանոց և ենթամիլիմետրանոց տիրույթի ալիքներով՝ ամպի հեռազործական զոնդման միջոցով։ Քննարկվում է միլիմետրանոց և ենթամիլիմետրանոց տիրույթի ռադար-ռադիոմետրական համալիրի բազմականալ սկզբունքային սխեման, որի շնորհիվ կարելի է փորձնականորեն իրականացնել վերոհիշյալ մեթոդը։

MILLIMETER AND SUBMILLIMETER RADAR-RADIOMETER SATELLITE COMPLEX FOR EARLY DETECTION OF HAIL EMBRIONS IN CLOUD

H. H. AJVAZYAN, H. M. AJVAZYAN, A. G. HULYAN, R. M. MARTIROSSYAN

The present paper briefly describes a new method for investigation of physical processes occurring in a convective cloud and possibility to detect hail embrions in it by means of remote sensing of cloud in millimeter and submillimeter wavelength ranges, from airplane or satellite. Basic diagram of multi-channel radar-radiometer complex for operation in millimeter and submillimeter wavelength, which allows to realize experimentally the abovementioned method, is considered.

CONTENTS

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Технический редактор **В. Д. СТЕПАНЯН**

Сдано в набор 12.08.96 г. Подписано к печати 18.11.96 г.
Формат 70×108[1]/16. Бумага № 1, «сыктывкарская». Высокая печать. Печ. лист. 3.
Усл. печ. лист. 4,2. Усл. кр. отт. 4,5. Тираж 200. Заказ 7.
Издат. 7952. Цена договорная.

Издательство «Гитутюн» НАН РА, 375019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства НАН Армении, 378410, г. Аштарак.

О дуг.

1996, h 3

Индекс 77709

СОДЕРЖАНИЕ