

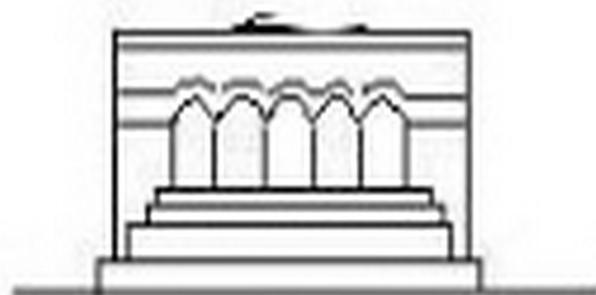
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1976

Б. А. АБРАМЯН, В. С. МАКАРЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СЛОЯМИ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Введение

При осесимметричном сжатии двух изотропных слоев из различных материалов, не связанных друг с другом по поверхностям касания, давление от одного слоя к другому передается по некоторым круговым или кольцевым областям, размеры которых неизвестны и должны быть определены. При этом между слоями, кроме контактного давления, возникает также и контактное трение*.

В данной работе осесимметричная сжимающая нагрузка берется таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Допускается, что под действием сжимающей нагрузки контактирующие слои по контактными поверхностям могут полностью сцепляться. Однако, на краевой окружности области контакта напряжения особенностей не должны иметь, и эти условия будут использованы при определении радиуса области контакта.

Решение задачи строится при помощи бигармонической функции А. Лява, которая берется в виде интеграла Ханкеля.

После удовлетворения граничных условий и условий контакта решение задачи сводится к рассмотрению системы парных интегральных уравнений, содержащих функции Бесселя. Выражая функции интегрирования через функции, определяющие контактные давление и трение, системы парных уравнений сводятся к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода. Далее, пользуясь многочленами Якоби, решение системы сингулярных интегральных уравнений сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая квазивполне регулярна.

Отметим еще, что различные задачи о контакте не связанных друг с другом упругих тел с определением неизвестных зон контакта и напряженного состояния, были рассмотрены в работах [1—31]. Однако, следует сказать, что во всех этих работах трение между контактирующими телами не учитывалось.

§ 1. Постановка и интегральные уравнения задачи

При сжатии двух слоев из различных материалов сжимающая нагрузка берется таким образом, что образуется область контакта в виде круга

* Работа доложена на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Киеве в мае месяце 1976 года.

(фиг. 1) с радиусом b . В дальнейшем все величины, относящиеся к верхнему слою, будем отмечать индексом 1, а к нижнему слою — индексом 2.

Граничные условия и условия контакта слоев можно записывать в виде

$$z_z^{(i)}(r, z_i) = \begin{cases} f_i(r) = -p_i & (0 \leq r < a_i) \\ 0 & (a_i < r < \infty) \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

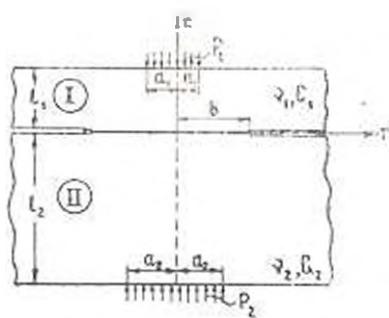
$$\tau_{rz}^{(i)}(r, z_i) = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad z_1 = l_1, \quad z_2 = -l_2$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = \begin{cases} p(r) & (0 \leq r < b) \\ 0 & (b \leq r < \infty) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$v_z^{(i)}(r, 0) = \begin{cases} q(r) & (0 \leq r < b) \\ 0 & (b \leq r < \infty) \end{cases}$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = u_z^{(2)}(r, 0) \quad (0 \leq r < b)$$

$$v_z^{(1)}(r, 0) = v_z^{(2)}(r, 0) \quad (0 \leq r < b)$$



Фиг. 1.

где $p(r)$ и $q(r)$ — контактные нормальное и касательное напряжения.

Функцию А. Лява ищем в виде

$$\Phi(r, z) = \Phi_i(r, z) \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

где

$$\Phi_i(r, z) = F_i z^2 + \int_0^{\infty} [A_i(\mu) \operatorname{sh} \mu z + B_i(\mu) \operatorname{ch} \mu z - C_i(\mu) \mu z \operatorname{sh} \mu z + D_i(\mu) \mu z \operatorname{ch} \mu z] J_0(\mu r) d\mu \quad (1.3)$$

Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

Пользуясь известными формулами и соотношениями (1.2) и (1.3), компоненты напряжения и перемещения выразим интегралами Ханкеля.

Далее, удовлетворив условиям (1.1), решение задачи приводим к системе парных интегральных уравнений относительно функций интегрирования или же к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p(r)$ и $q(r)$.

Полученная система интегральных уравнений преобразуется следующим образом.

Пользуясь известными интегральными представлениями

$$J_0(\mu r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\cos \mu x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$J_1(\mu r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{x \sin \mu x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

будем иметь

$$\int_0^b tp(t) J_n(\nu t) dt = \int_0^b \sigma(s) \cos \nu s ds$$

$$\int_0^b tq(t) J_1(\nu t) dt = \int_0^b \tau(s) \sin \nu s ds$$

где введены обозначения

$$\sigma(s) = \frac{2}{\pi} \int_s^b \frac{tp(t) dt}{1-t^2-s^2}, \quad \tau(s) = \frac{2s}{\pi} \int_s^b \frac{q(t) dt}{Vt^2-s^2} \quad (1.4)$$

Если известны функции $\sigma(s)$ и $\tau(s)$, напряжения $p(r)$ и $q(r)$ определяются из (1.4) использованием формул обращения Абеля.

Таким образом, перейдя к системе интегральных уравнений относительно функций $p(r)$ и $q(r)$ к функциям $\sigma(s)$ и $\tau(s)$ и продолжив функции $\sigma(s)$ и $\tau(s)$ на отрицательную область значений аргумента [32, 33], причем, первую—четным образом, а вторую—нечетным

$$\sigma(s) = \sigma(-s), \quad \tau(s) = -\tau(-s) \quad (1.5)$$

систему интегральных уравнений приведем к следующему виду:

$$\sigma(s) - \frac{1}{\pi b} \int_{-b}^b \frac{\sigma(t) dt}{s-t} - 2 \int_{-b}^b K_1(s, t) \sigma(t) dt +$$

$$+ 2 \int_{-b}^b K_2(s, t) \tau(t) dt - U(s) = 0 \quad (1.6)$$

$$\tau(s) + \frac{1}{\pi b} \int_{-b}^b \frac{\tau(t) dt}{s-t} - 2 \int_{-b}^b K_3(s, t) \tau(t) dt +$$

$$+ 2 \int_{-b}^b K_4(s, t) \sigma(t) dt - V(s) + \delta = 0 \quad (1.7)$$

При этом используются также формулы обращения Абеля.

В уравнениях (1.6) и (1.7) введены следующие обозначения:

$$U = 2 \frac{G_1(1-\nu_1) + G_2(1-\nu_2)}{G_2(1-2\nu_1) - G_1(1-2\nu_2)} \quad (1.8)$$

$$\delta = \frac{G_2(1-2\nu_1)F_1 - G_1(1-2\nu_2)F_2}{2[G_2(1-\nu_1) + G_1(1-\nu_2)]} \quad (1.9)$$

$$(1.11) \quad U(s) = \frac{a_2(n) \operatorname{sh} nL_2 - n^2 L_2^2 \operatorname{ch} nL_2}{a_2(n) (\operatorname{sh} nL_2 + n^2 L_2^2 \operatorname{ch} nL_2)} \left| \cos nL \cos n s d l \right| +$$

$$+ \frac{a_1(n) \operatorname{sh} nL_1 - n^2 L_1^2 \operatorname{ch} nL_1}{a_1(n) (\operatorname{sh} nL_1 + n^2 L_1^2 \operatorname{ch} nL_1)} \left[\int_0^0 k_1 \frac{2\pi(k_1 + 1)}{2} \right]$$

$$(1.11) \quad U(s) = \frac{a_1(n) \operatorname{sh} nL_1 - n^2 L_1^2 \operatorname{ch} nL_1}{a_1(n) (\operatorname{sh} nL_1 + n^2 L_1^2 \operatorname{ch} nL_1)} \left| \sin n s d l \right| -$$

$$- \frac{a_2(n) \operatorname{sh} nL_2 - n^2 L_2^2 \operatorname{ch} nL_2}{a_2(n) (\operatorname{sh} nL_2 + n^2 L_2^2 \operatorname{ch} nL_2)} \left[\int_0^0 \frac{2\pi(k_2 + 1)}{2} \right]$$

$$(1.10) \quad K_1(s, t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2nL_1}) + n^2 L_1^2 + \frac{\operatorname{sh}^2 nL_2 - n^2 L_2^2}{\operatorname{sh}^2 nL_2 - n^2 L_2^2} \left| \cos nL \cos n s d l \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - e^{-2nL_2}) + n^2 L_2^2 + \frac{\operatorname{sh}^2 nL_1 - n^2 L_1^2}{\operatorname{sh}^2 nL_1 - n^2 L_1^2} \left[\int_0^0 k_2 \frac{2\pi(k_2 + 1)}{2} \right]$$

$$(1.10) \quad K_2(s, t) = \frac{\operatorname{sh}^2 nL_2 - n^2 L_2^2}{\operatorname{sh}^2 nL_2 - n^2 L_2^2} \left| \sin nL \cos n s d l \right| -$$

$$- \frac{1}{2} (1 - e^{-2nL_1}) + n^2 L_1^2 + \frac{\operatorname{sh}^2 nL_1 - n^2 L_1^2}{\operatorname{sh}^2 nL_1 - n^2 L_1^2} \left[\int_0^0 k_1 \frac{2\pi(k_1 + 1)}{2} \right]$$

$$(1.10) \quad K_3(s, t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2nL_2}) + n^2 L_2^2 - \frac{\operatorname{sh}^2 nL_1 - n^2 L_1^2}{\operatorname{sh}^2 nL_1 - n^2 L_1^2} \left| \sin nL \sin n s d l \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - e^{-2nL_1}) + n^2 L_1^2 + \frac{\operatorname{sh}^2 nL_2 - n^2 L_2^2}{\operatorname{sh}^2 nL_2 - n^2 L_2^2} \left[\int_0^0 k_1 \frac{2\pi(k_1 + 1)}{2} \right]$$

$$(1.10) \quad K_4(s, t) = \frac{\operatorname{sh}^2 nL_1 - n^2 L_1^2}{\operatorname{sh}^2 nL_1 - n^2 L_1^2} \left| \cos nL \sin n s d l \right| -$$

$$- \frac{1}{2} (1 - e^{-2nL_2}) + n^2 L_2^2 + \frac{\operatorname{sh}^2 nL_2 - n^2 L_2^2}{\operatorname{sh}^2 nL_2 - n^2 L_2^2} \left[\int_0^0 k_2 \frac{2\pi(k_2 + 1)}{2} \right]$$

$$a_i(\nu) = \int_0^{a_i} r f_i(r) J_0(\nu r) dr \quad (i = 1, 2) \quad (1.12)$$

$$k_i = \frac{G_2(1 - \nu_1)}{G_1(1 - \nu_2)} \quad (1.13)$$

§ 2. Сведение системы интегральных уравнений к бесконечным системам линейных уравнений

Умножив уравнение (1.6) на i и складывая полученное выражение с (1.7), получим следующее интегральное уравнение относительно комплекснозначной функции $\varphi(s)$

$$\begin{aligned} \varphi(s) + \frac{1}{i\pi b} \int_{-b}^b \frac{\varphi(x) dx}{s-x} - \int_{-b}^b [K_1(s, x) - iK_2(s, x)] [\varphi(x) + \bar{\varphi}(x)] dx + \\ + \int_{-b}^b [K_2(s, x) + iK_1(s, x)] [\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)] dx - N(s) = 0 \quad (2.1) \\ (-b < s < b) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\varphi(s) = \varphi(s) + i\bar{\varphi}(s) \quad (2.2)$$

$$N(s) = V(s) + iU(s) + \delta \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.1) ищем в виде ряда по многочленам Якоби [33—36] и пользуемся известным соотношением для многочленов Якоби [33—39]

$$\begin{aligned} \omega_m(x) P_m^{(\gamma-1/2, -\gamma-1/2)}(x) + \frac{\cos \pi \gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_m(y) P_m^{(\gamma-1/2, -\gamma-1/2)}(y) dy}{y-x} = \\ = \frac{1}{2 \sin \pi \gamma} P_m^{(\gamma-1/2, \gamma-1/2)}(x) \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$(m = 1, 2, \dots); \quad |\operatorname{Re} \gamma| < 1/2$$

где

$$\omega_m(x) = (1-x)^{\gamma-1/2} (1+x)^{-\gamma-1/2}$$

Отметим, что соотношение (2.4) может быть получено на основе известных функциональных соотношений для многочленов Якоби.

Для выбора соответствующих параметров для решения уравнения (2.1) соотношение (2.4) согласуется с уравнением (2.1) и параметр γ определяется из условия

$$\operatorname{tg} \pi \gamma = -i\delta \quad (2.5)$$

Далее, произведя замену $\gamma = -ix$, получим

$$\operatorname{th} \pi x = \theta \quad (2.6)$$

$$x = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arth} \theta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{G_1 + G_2(3-4v_1)}{G_2 + G_1(3-4v_2)} \quad (2.7)$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (2.1) ищем в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega(x)} \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (b-x)^{-\alpha} (b+x)^{-\beta} \\ \alpha &= -\frac{1}{2} - i\nu; \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\nu \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.8) в (2.1), пользуясь далее соотношением (2.4) и произведя некоторое преобразование, интегральное уравнение (2.1) приведем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Произведя замену коэффициентов ряда (2.8)

$$X_n = U_n + iV_n \quad (2.10)$$

и учитывая равенства

$$\operatorname{Re} \varphi(x) = \operatorname{Re} \varphi(-x), \quad \operatorname{Im} \varphi(x) = -\operatorname{Im} \varphi(-x) \quad (2.11)$$

следующие из четности функции $\omega(x)$ и нечетности функции $\tau(x)$, будем иметь

$$\operatorname{Re} X_{2n-1} = \operatorname{Im} X_{2n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

Тогда бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов ряда (2.8) приведем к виду

$$\begin{aligned} U_{2n} &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n}^{(1)} U_{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,n}^{(1)} V_{2m-1} + M_{2n} \\ V_{2n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2)} U_{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,n}^{(2)} V_{2m-1} + N_{2n-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

При этом используется также формула Родрига для многочленов Якоби.

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_{m,n}^{(1)} = c_{2n} \int_{-b}^b \left\{ \operatorname{Re} \left[\omega(x) P_{2m-1}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \right\} \left| K_2(x, y) \operatorname{Im} \left(\frac{P_{2n}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \right| dy$$

$$\begin{aligned}
& - K_1(x, y) \operatorname{Re} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \Big| dy + \\
& + \operatorname{Im} \left[\omega(x) P_{2n-1}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \Big|_{-b}^b \left[K_4(x, y) \operatorname{Re} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) - \right. \\
& \left. - K_3(x, y) \operatorname{Im} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \right] dy \Big| dx \quad (2.14')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m, n}^{(1)} = c_{2n} \int_{-b}^b \left\{ \operatorname{Re} \left[\omega(x) P_{2n-1}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \Big|_{-b}^b \left[K_2(x, y) \operatorname{Re} \left(\frac{P_{2m-1}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) + \right. \right. \\
\left. \left. - K_1(x, y) \operatorname{Im} \left(\frac{P_{2m-1}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \right] dy - \right. \\
\left. - \operatorname{Im} \left[\omega(x) P_{2n-1}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \Big|_{-b}^b \left[K_3(x, y) \operatorname{Re} \left(\frac{P_{2m-1}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + K_4(x, y) \operatorname{Im} \left(\frac{P_{2m-1}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \right] dy \right\} dx \quad (2.14'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{m, n}^{(2)} = c_{2n-1} \int_{-b}^b \left\{ \operatorname{Re} \left[\omega(x) P_{2(n-1)}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \Big|_{-b}^b \left[K_4(x, y) \operatorname{Re} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) - \right. \right. \\
\left. \left. - K_3(x, y) \operatorname{Im} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \right] dy + \right. \\
\left. + \operatorname{Im} \left[\omega(x) P_{2(n-1)}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \Big|_{-b}^b \left[K_1(x, y) \operatorname{Re} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) - \right. \right. \\
\left. \left. - K_2(x, y) \operatorname{Im} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \right] dy \right\} dx \quad (2.14''')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m, n}^{(2)} = c_{2n-1} \int_{-b}^b \left\{ \operatorname{Im} \left[\omega(x) P_{2(n-1)}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \Big|_{-b}^b \left[K_4(x, y) \operatorname{Re} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) - \right. \right. \\
\left. \left. - K_3(x, y) \operatorname{Im} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \right] dy - \right. \\
\left. - \operatorname{Re} \left[\omega(x) P_{2(n-1)}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \Big|_{-b}^b \left[K_1(x, y) \operatorname{Re} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) - \right. \right. \\
\left. \left. - K_2(x, y) \operatorname{Im} \left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)} \right) \right] dy \right\} dx \quad (2.14^{IV})
\end{aligned}$$

$$c_n = (-1)^{n-1} \frac{b \operatorname{sh} \pi x [\Gamma(n+1)]^2}{\pi (k_1 + 1) \Gamma(n-\tau) \Gamma(n-2)} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} M_{2n} = c_{2n} X_0 \int_{-b}^b \left\{ \operatorname{Re} \left[\omega(x) P_{2n-1}^{(-\tau, -\tau)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \right\} \left| \int_{-b}^b \left(K_2(x, y) \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\omega(y)} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - K_1(x, y) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\omega(y)} \right] \right) dy - \frac{\pi(k_1 + 1)}{X_0} U(x) \right\} + \\ + \operatorname{Im} \left[\omega(x) P_{2n-1}^{(-\tau, -\tau)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \left| \int_{-b}^b \left(K_4(x, y) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\omega(y)} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - K_3(x, y) \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\omega(y)} \right] \right) dy - \frac{\pi(k_1 + 1)}{X_0} V(x) \right\} dx \quad (2.16') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2n-1} = c_{2n-1} X_0 \int_{-b}^b \left\{ \operatorname{Re} \left[\omega(x) P_{2(n-1)}^{(-\tau, -\tau)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \right\} \left| \int_{-b}^b \left(K_4(x, y) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\omega(y)} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - K_3(x, y) \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\omega(y)} \right] \right) dy - \frac{\pi(k_1 + 1)}{X_0} V(x) \right\} + \\ + \operatorname{Im} \left[\omega(x) P_{2(n-1)}^{(-\tau, -\tau)} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \left| \int_{-b}^b \left(K_1(x, y) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\omega(y)} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - K_2(x, y) \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\omega(y)} \right] \right) dy + \frac{\pi(k_1 + 1)}{X_0} U(x) \right\} dx \quad (2.16'') \end{aligned}$$

Использованием асимптотических формул для гамма-функций и многочленов Якоби можно показать, что полученные бесконечные системы линейных уравнений квазивполне регулярны для любых значений геометрических и физических параметров, а свободные члены системы ограничены. Таким способом регулярность подобных бесконечных систем линейных уравнений была исследована в работе К. Г. Гуляна [40].

Уравнения (2.12) дают возможность определить коэффициент X_0 ряда (2.8) и постоянную δ , которую определяет жесткое перемещение плоскости касания контактирующих слоев $Z=0$.

Составляя уравнение равновесия, будем иметь

$$\int_0^b r p(r) dr = \int_0^{a_i} r f_i(r) dr = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \phi(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \varphi(x) dx \quad (2.17)$$

Подставляя сюда значение функции $\varphi(x)$ из (2.8), получим

$$X_0 = \frac{2chx_0}{\lambda} \int_0^{x_0} r f_1(r) dr \quad (2.18)$$

Постоянная b определяется при помощи ряда от коэффициентов разложения (2.8).

Все искомые величины выражаются через неизвестные бесконечной системы линейных уравнений (2.13). После численного определения неизвестных бесконечной системы все искомые величины будут определены.

Радиус области контакта определяется из трансцендентного уравнения, которое получается из условия непрерывности нормальных напряжений на поверхности касания слоев.

Анализируя полученные формулы и соотношения, можно сделать следующие выводы:

а) контактные напряжения и перемещения прямо пропорциональны уровню приложенных нагрузок;

б) величина зоны контакта не зависит от уровня приложенных нагрузок;

в) контактные напряжения, перемещения и величина зоны контакта зависят от двух комбинаций упругих постоянных материалов слоев, а также от их геометрических параметров.

После получения численных результатов можно определить вид функции

$$\gamma(r) = \frac{q(r)}{p(r)}$$

Заметим еще, что при решении задачи о контакте двух слоев с использованием зависимости $q(r) = p(r)\rho(r)$, где $p(r)$ является заданной известной функцией, отбрасывается последнее из условий (1.1), и решение задачи сводится только к одному сингулярному интегральному уравнению второго рода для определения контактного давления $p(r)$.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 VI 1976

Ր. Լ. ԱՐԻՉԱԿՅԱՆ, Վ. Ս. ԴԱՅԵՐՅԱՆ

ՏԱՐՐԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԵՐԿՈՒ ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԻ
ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԳԻՐԸ, ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՇՓՄԱՆ
ՀԱՇՎԱԹՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիտարկվում է տարրեր նյութերից երկու շերտերի միջև կոնտակտի առանցքասիմետրիկ խնդիրը, շերտերի միջև շփման հաշվառումով:

խնդրի լուծումը կառուցվում է Ա. Լյավի բիհարմոնիկ ֆունկցիայի օգնությամբ, սրբ վերցվում է Հանկելի ինտեգրայի սևսրոփ: Նգրային և կոնտակտի բոլոր պայմաններին բավարարելուց հետո, խնդրի լուծումը հանդում է Բեսելի ֆունկցիաներ պարսունակող դուր ինտեգրայ հավասարումների սիստեմի դիտարկմանը: Արտաշայտելով ինտեգրման ֆունկցիաները կոնտակտային ճնշման և չվման ֆունկցիաների միջոցով, դուր ինտեգրայ հավասարումների սիստեմը բերվում է երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրայ հավասարումների սիստեմի: Այնուհետև, օգտվելով Յակոբիի բազմանկյումներից, սինգուլյար ինտեգրայ հավասարումների սիստեմի լուծումը հանգեցվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը:

Ցույց է տրվում անվերջ սիստեմի թվային լուծին ռեզուլյարտիջուներ:

AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM BETWEEN TWO LAYERS OF DIFFERENT MATERIALS WITH FRICTION BETWEEN LAYERS

B. L. ABRAMIAN, V. S. MAKARIAN

S u m m a r y

A contact problem between two layers of different materials with friction between layers is considered.

The problem solution is built with the help of A. Love's biharmonic function which takes in the form of Hankel's integral. After satisfying all boundary conditions and those of complete contact the solution of the problem is reduced to the system of pair integral equations containing Bessel's functions. Expressing functions of integration through functions defining contact pressure and friction the system of pair integral equations is reduced to the solution of the system of singular integral equations of second kind. Later, using polynomials of Jacob, the system of singular integral equations is reduced to the infinite systems of linear algebraic equations.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Stippes M., Wilson H. B., Jr., Krull F. N. A Contact Stress Problem for a Smooth Disk in an Infinite Plate. Proceedings of the 4-th U. S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1962, 799-806.
2. Уилсон. Контактные напряжения в бесконечной пластинке, содержащей гладкую жесткую эллиптическую вставку. Прикл. механика (Труды ASME, сер. E), 1964, т. 31, № 4.
3. Ван П-си. Задача о контактных напряжениях для жесткой гладкой сферы в растяжимом упругом пространстве. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1965, т. 32, № 3.
4. Goodman L. E., Keer L. M. The Contact Problem for an Elastic Sphere Indenting an Elastic Cavity. Int. J. Solids and Structures, 1965, vol. 1, 407-415.

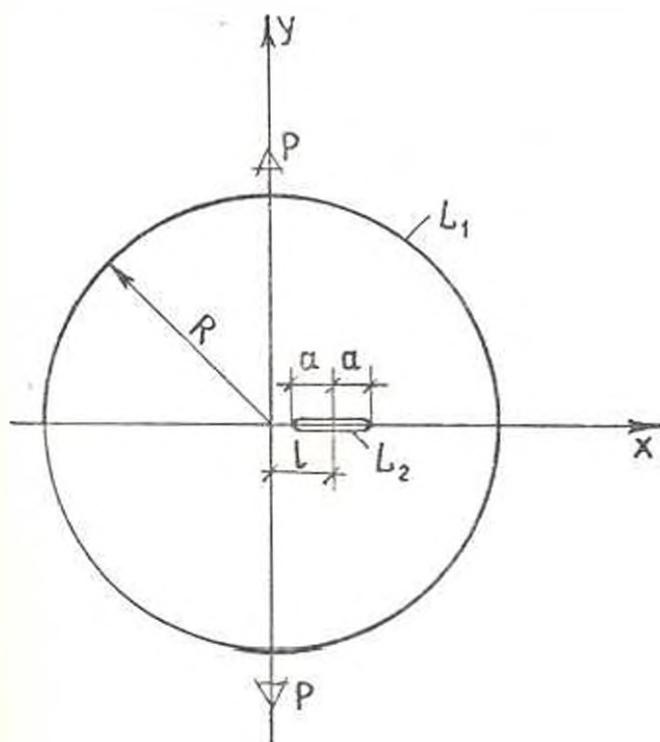
5. Уилсон, Гари. Осесимметричное распределение контактных напряжений, возникающих около гладкой упругой сферы в бесконечном упругом пространстве, равномерно нагруженном на бесконечности. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1967, т. 34, № 4.
6. Noble B., Huzar M. Angle of Contact for Smooth Elastic Inclusions. Proceedings of the 10-th Midwestern Mechanics Conference, 1967, 457—476.
7. Хуссейн, Шу. Салзковский. Образование полостей в контакте эластического включения, находящегося внутри растянутой пластины. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1968, т. 35, № 3.
8. Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А. Изгиб балочных плит на упругом основании при неполном контакте. Сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости». Изд. Харьковского университета, 1966, вып. 4.
9. Noble B., Huzar M. Exact Solution of Certain Dual Series for Indentation and Inclusion Problem. Intern. J. Eng. Sci., 1969, vol. 7, No. 11, 1149—1161.
10. Вадвант. О контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1969, т. 36, № 2.
11. Fu S. L., Huzar M. A., Anderson G. Lifting of a Plate from the Foundation due to Axisymmetric Pressure. Developments in Mechanics Proceedings of the 11-th Midwestern Mechanics Conference, 1969, vol. 3, 577—590.
12. Шу, Хуссейн. К вопросу о контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1970, т. 37, № 3, 286—288.
13. Дандерс. Стивен. Роль констант упругости в некоторых контактных задачах. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1970, т. 37, № 4.
14. Бресли, Ларднер, Микич. Распределение давлений в боковом соединении, необходимое для расчета теплового контактного сопротивления. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1971, т. 38, № 2.
15. Наумов Ю. А., Шкафирович В. Д. Об отслаивании упругого слоя. Прикл. механика. Журнал АН Укр. ССР, 1971, т. 7, № 11.
16. Лямлюк В. Д., Прилорников А. К. Действие штампа на слой, который может отставать от основания. Сб. «Вопросы прочности и пластичности». Издание Днепропетровского гос. университета, 1971, 56—77.
17. Кир, Дандерс, Цвай. Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.
18. Кир, Сильва. Две смешанные задачи для полуплоскости. Прикладная механика. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.
19. Wellman Y. A Tensionless Contact between a Beam and an Elastic Half-space. Intern. J. Eng. Sci., 1972, vol. 10, No. 1, 73—81.
20. Ratwani M., Erdogan F. On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer. Intern. J. Solids and Structures, 1973, vol. 9, 921—936.
21. Erdogan F., Ratwani M. The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes. J. Appl. Mech. (Trans. ASME ser. E), 1974, 41, No. 3.
22. Gladwell G. M. L., Iger K. R. P. On the Unbounded Contact between a Circular Plate and an Elastic Foundation. Journal Elasticity, 1974, vol. 4, 115—130.
23. Tsai K. C., Dunders J., Keer L. M. Elastic Layer Pressed against a Half Space. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.
24. Вадвант А. А., Мухомов М. Г. О контакте двух прилегающих без сцепления с определением области контакта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 3, 3—18.
25. Athlas J. B. On the Two-dimensional Contact Problem of a Rigid Cylinder Pressed between Two Elastic Half-planes. Czechoslov. Comm., 1974, vol. 1, 15—20.
26. Dunders J. Properties of Elastic Bodies in Contact. The mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Proceedings of IUTAM Symposium, Eindhoven,

- Netherlands, 20—23, August 1974. Ed-rs A. D. de Pater, J. J. Kalker. Delft University Press, 1975. 54—66.
27. *Gladwell G. M. L.* Undeformed Contact between a Circular Plate and an Elastic Foundation. *Ibidem*, 90—109.
 28. *Abblas J. B.* On the Two-dimensional Contact Problem of a Rigid Cylinder, Pressed between Two Elastic Layers. *Ibidem*, 110—126.
 29. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 3.
 30. *Civelek M. B., Erdogan F.* The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Gravity. *J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E)*, 1975, 42, No. 1, 136—140.
 31. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Контактная задача теории упругости для тесно, локально прижатого к полупространству. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 2.
 32. *Keer L. M.* Mixed Boundary-value Problems for an Elastic Half-space. *Proceed. Cambridge Philos. Soc.* 1967, vol. 63, No. 4.
 33. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства при наличии сцепления. ПММ, 1973, 37, вып. 6.
 34. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, 30, вып. 5.
 35. *Карпсика А. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, 1966, 30, вып. 3.
 36. *Krenk Steen.* On Quadrature Formulas for Singular Integral Equations of the First and Second Kind. *Quarterly of Appl. Math.*, 1975, vol. 33, No. 3, 225—232.
 37. *Hamel G.* Integralgleichungen. Berlin, 1937, s. 145.
 38. *Ceġe Г.* Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962, стр. 86. *Szego G.* Orthogonal Polynomials. New York, 1939, p. 73.
 39. *Tritconi F. G.* On the Finite Hilbert Transformation. *The Quarterly Journal of Mathematics, (Oxford 2)*, 1951, vol. 2, No. 2, 199—211.
 40. *Гуляк К. Г.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к двум криволинейным упругим пластинам. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 4.

Օ. Մ. ՏԱՓՈՆԺՅԱՆ, Բ. Լ. ԶՆՓԻԱԺՅԱՆ

КРУГОВОЙ ДИСК С РАДИАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ
 ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Рассматривается плоская задача для круговой области с радиальным разрезом. Считается, что на контуре L_1 приложены две взаимно уравновешивающиеся силы P , а кромки радиального разреза свободны от нагрузки (фиг. 1). Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений и к рекуррентным соотношениям. Доказывается квази-вполне регулярность бесконечных систем. Определены коэффициенты интенсивности напряжений у вершины разреза. Произведены числовые расчеты.



Фиг. 1.

1. Решение задачи выражается аналитическими функциями $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ в рассматриваемой области при следующих граничных условиях [1]:

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2(t)} + \overline{\psi_2(t)} &= f(t) + C \text{ на } L_1 \\ \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2(t)} + \overline{\psi_2(t)} &= 0 \text{ на } L_2 \end{aligned}$$

где $f(t) = 0$ на дуге правой полуокружности и $f(t) = P$ на дуге левой полуокружности, $\bar{f}(t)$ изменяется скачком при переходе через точки приложения сосредоточенных сил P ; C — постоянная, подлежащая определению.

Аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ отыскиваются в виде

$$\bar{\varphi}_2(z) = \bar{\varphi}_0(z) + \bar{\varphi}_1(z) \quad (1.1)$$

$$\bar{\psi}_2(z) = \bar{\psi}_0(z) + \bar{\psi}_1(z) \quad (1.2)$$

Функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ определяют решение задачи для сплошного диска под действием сосредоточенных сил, а $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — аналитические функции, которые находятся из граничных условий

$$\bar{\varphi}_2(t) + t\bar{\psi}_2(t) - \overline{\varphi_1(t)} - \overline{\psi_1(t)} = C \text{ на } L_1 \quad (1.3)$$

$$\bar{\varphi}_2(t) + t\bar{\psi}_2(t) - \overline{\varphi_1(t)} - \overline{\psi_1(t)} = -F(t) \text{ на } L_2 \quad (1.4)$$

где

$$F(t) = \varphi_0(t) - t\bar{\psi}_0(t) + \overline{\varphi_0(t)} \text{ на } L_2 \quad (1.5)$$

Из [1] имеем

$$\varphi_0(z) = -\frac{iP}{2\pi} \left(\ln \frac{iR-z}{-iR-z} - \frac{iz}{R} \right) \quad (1.6)$$

$$\psi_0(z) = -\frac{iP}{2\pi} \left(\ln \frac{iR-z}{-iR-z} - \frac{iR}{iR-z} + \frac{iR}{iR+z} \right) \quad (1.7)$$

Выбранные ветви многозначных функций (1.6) и (1.7) при $z < R$ представляются в виде

$$\varphi_0(z) = -\frac{P}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k-1} \left(\frac{z}{R} \right)^{2k-1} - \frac{Pz}{2\pi R} + \frac{P}{2} \quad (1.8)$$

$$\psi_0(z) = -\frac{P}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k-1} \left(\frac{z}{R} \right)^{2k-1} + \frac{PR}{\pi} \frac{z}{R^2+z^2} + \frac{P}{2} \quad (1.9)$$

Выражение (1.5), с использованием (1.8) и (1.9), приводится к виду

$$F(t) = P - \frac{P}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \left[\left(\frac{t}{R} \right)^{2k-1} + \left(\frac{\bar{t}}{R} \right)^{2k-1} \right] - \\ - \frac{P}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\bar{t}}{R} \right)^{2k-1} + \frac{Pt}{\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\bar{t}}{R} \right)^{2k} \quad (1.10)$$

2. На L_1 контурные значения $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ выразим через вспомогательную функцию $\omega(t)$ [2] в виде

Используя (2.3), из формул (2.4) и (2.5) получаем

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R}\right)^k + \frac{C}{2} \quad (2.6)$$

$$\bar{\varphi}_1(z) = \bar{\varphi}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{R}\right)^k - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \left(\frac{z}{R}\right)^{k-2} + \frac{\bar{C}}{2} \quad (2.7)$$

Граничное условие (1.4), с учетом (2.6) и (2.7), приводится к виду

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\varphi(t)} = f_1(t) \quad (2.8)$$

где

$$f_1(t) = -C - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k - t \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \frac{\bar{t}^{k-1}}{R^k} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^k + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^{k-2} = F(t)$$

Равенство (2.8) представляет собой граничное условие первой основной задачи для бесконечной односвязной области с прямолинейным разрезом по оси OX . Таким образом, определение функций $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(z)$ сводится к решению вспомогательной задачи, соответствующей граничному условию (2.8).

3. Прямолинейный разрез по оси OX будем рассматривать как предельный случай эллипса. Для решения вспомогательной задачи отобразим внешность эллипса на внешность единичной окружности посредством известной функции [1]

$$z = A \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) + e \quad (3.1)$$

где $A = \frac{a+b}{2}$, $m = \frac{a-b}{a+b}$ (a и b — полуоси эллипса).

При $m=1$ эллипс обращается в радиальный разрез.

Подставив (3.1) при $\zeta = z = e^{i\theta}$ в (2.8), получаем граничное условие на окружности $|\zeta|=1$

$$\varphi(z) + \frac{1}{z} \frac{z^2 + m}{1 - m z^2} \overline{\varphi'(z)} + \frac{e}{A(1 - m z^2)} \overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} = f(z) \quad (3.2)$$

Пользуясь известным методом Н. И. Мусхелишвили [1] решения плоской задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, получаем выражения для функций $\varphi(\zeta)$ и $\bar{\varphi}(\zeta)$, голоморфных вне единичной окружности $|\zeta|=1$. Преобразовав эти выражения при $m=1$, получаем

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \left(\frac{1}{\zeta}\right)^n \quad (3.3)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{A\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + e}{A\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)} \varphi'(\zeta) + \varphi(\zeta) \quad (3.4)$$

Из выражения (3.4) на плоскости z получается зависимость

$$\psi(z) = \varphi(z) - z\varphi'(z) \quad (3.5)$$

4. Выражения функций (2.6) и (2.7) содержат неизвестные коэффициенты a_k и b_k . Из выражений (2.1), (2.2), (2.6), (2.7), с учетом (2.3), на контуре L_1 следует

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k \quad (4.1)$$

$$\psi(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{t}\right)^k - \frac{a_0 R}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left(\frac{R}{t}\right)^{k-1} \quad (4.2)$$

Приравнивая правые части выражений (4.2) и (3.5), с учетом (4.1), получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} a_1 &= -b_1 \\ a_2 &= -3b_2 \\ a_k &= (k-2)b_{k-2} - (k+1)b_k \quad (\text{при } k=3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (4.3)$$

В выражении (3.3), заменяя ζ на z , согласно (3.1), по формуле

$$\zeta = \frac{z-e}{2A} + \sqrt{\left(\frac{z-e}{2A}\right)^2 - 1}$$

аналогично [3], получаем при $|z| > e+a$

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{z}\right)^k \sum_{v=1}^k (A_v + B_v) \alpha_{v,k}^{(7)} \quad (4.4)$$

Приравнивая правые части выражений (4.1) и (4.4), на контуре L_1 имеем функциональное уравнение, из которого, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях 1 , получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно a_k и b_k

$$b_k = \sum_{v=1}^k (A_v + B_v) \alpha_{v,k}^{(7)} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned}
B_\nu = & \frac{P}{\pi} \left(\frac{A}{e} \right) \left[2 \sum_{k=\left[\frac{\nu+2}{2}\right]}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-2)! e^{2k-1}}{R^{2k-1}} \times \right. \\
& \times \sum_{i=0}^{\left[\frac{2k-\nu-1}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{i! (\nu+i)! (2k-2i-\nu-1)!} + \\
& + \sum_{k=\left[\frac{\nu-2}{2}\right]}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)! e^{2k-1}}{R^{2k-1}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{2k-\nu-1}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(2k-2i-\nu-1)! i! (\nu+i)!} - \\
& - \frac{e}{R} \sum_{k=\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k! e^{2k}}{R^{2k}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{2k-\nu}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(2k-2i-\nu-1)! i! (i+\nu+1)!} - \\
& - \frac{A^2}{Re} \sum_{k=\left[\frac{\nu+2}{2}\right]}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k! e^{2k}}{R^{2k}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{2k-\nu-1}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(2k-2i-\nu-1)! i! (i+\nu+1)!} - \\
& \left. - \frac{e}{R} \sum_{k=\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k! e^{2k}}{R^{2k}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{2k-\nu+1}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(2k-2i-\nu-1)! i! (i+\nu+1)!} \right] \quad (4.6)
\end{aligned}$$

а выражения A и $\alpha^{(7)}$ совпадают с соответствующими выражениями, приведенными в работе [3].

5. Решение задачи свелось к определению неизвестных коэффициентов из бесконечных систем (4.3) и (4.5). Отметим, что эти уравнения аналогичны бесконечным системам уравнений, полученных ранее в работе [3], где доказана их квазицолле регулярность. Различны только свободные члены уравнений.

Можно показать, что при условии

$$B < B \left(\frac{a}{R-e} \right) \quad (\text{при } \nu = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.1)$$

где B — ограниченная сверху величина при $\frac{a}{R-e} < 1$, доказательство регулярности уравнений (4.3) и (4.5) аналогично приведенному в работе [3]. Покажем, что условие (5.1) имеет место. В выражении (4.6), изменяя порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned}
B_1 = & \frac{P}{\pi} \left(\frac{A}{e} \right)^{\nu} \left[2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{i! (\nu + i)!} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-2)! e^{2k-1}}{R^{2k-1} (2k-2i-\nu-1)!} \right. \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{i! (\nu + i)!} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)! e^{2k-1}}{R^{2k-1} (2k-2i-\nu-1)!} - \\
& - \frac{e}{R} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{i! (\nu + 1)!} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k! e^{2k}}{R^{2k} (2k-2i-\nu)!} - \\
& - \frac{e}{R} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{i! (i + \nu - 1)!} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k! e^{2k}}{R^{2k} (2k-2i-\nu-1)!} - \\
& \left. - \frac{A^2}{Re} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{i! (i + \nu + 1)!} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k! e^{2k}}{R^{2k} (2k-2i-\nu-1)!} \right] \quad (5.2)
\end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{i! (\nu + i)!} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-2)! e^{2k-1}}{R^{2k-1} (2k-2i-\nu-1)!} < \\
& < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{i! (\nu + i)!} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{(2k-2i-\nu-1)!} \left(\frac{e}{R} \right)^{2k-1} \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Учитывая

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{(2k-2i-\nu-1)!} \left(\frac{e}{R} \right)^{2k-1} < \frac{(2i-\nu-1)!}{\left(1 - \frac{e}{R} \right)^{2i}}$$

при $\frac{e}{R} < 1$

и преобразуя правую часть неравенства (5.3), получаем

$$2 \frac{P}{\pi} \left(\frac{A}{e}\right)^{\nu} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^i}{i!(\nu+i)!} \sum_{k=i-\lfloor \frac{\nu+2}{2} \rfloor}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-2)! e^{2k-1}}{R^{2k-1} (2k-2i-\nu-1)!} <$$

$$< 2 \frac{P}{\pi} \left(\frac{a}{R-e}\right)^{\nu} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+\nu-1)!}{i!(\nu+i)! 2^i} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i \quad \text{при } \frac{e}{R} < 1$$

Аналогичные неравенства получаются для остальных сумм, входящих в (5.2). Следовательно, имеем

$$|B| < \left(\frac{a}{R-e}\right)^{\nu} D, \quad (5.4)$$

где

$$D = \frac{P}{\pi} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+\nu+1)!}{i!(\nu+i)! 2^i} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i + \right.$$

$$+ \frac{R}{R-e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+\nu)!}{i!(\nu+i)! 2^i} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i +$$

$$+ \frac{e}{R-e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+\nu)!}{i!(\nu+i)! 2^i} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i +$$

$$+ \frac{A^2}{(R-e)^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+\nu+1)!}{i!(i+\nu+1)! 2^i} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i +$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+\nu-1)!}{i!(i+\nu-1)! 2^i} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i \right\} \quad (5.5)$$

Рассмотрим разность

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+\nu-1)!}{i!(\nu+i)! 2^i} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[2i+(\nu+1)-1]!}{i![(\nu+1)+i]! 2^{i+1}} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i$$

откуда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+\nu-1)!}{i!(\nu+i)! 2^i} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i \left| 1 - \frac{2i+\nu}{2(\nu+i+1)} \right| > 0 \quad (5.6)$$

Так как разность (5.6) всегда положительна, то имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i \frac{2i!}{i!(i+1)!} > \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i \frac{(2i-\nu-1)!}{i!(\nu+i)! 2^i}$$

аналогично

$$B > D, \quad (\text{при } \nu = 1, 2, \dots) \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} B = & \frac{P}{\pi} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i!}{i!(i+1)!} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i + \right. \\ & + \frac{R}{2(R-e)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)!}{i!(i+1)!} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i + \\ & + \frac{1}{2} \frac{e}{R-e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)!}{i!(i+1)!} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i + \\ & + \frac{1}{2} \frac{A^2}{(R-e)^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+2)!}{i!(i+2)!} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i!}{i!i!} \left| \frac{A^2}{(R-e)^2} \right|^i \right\} \quad (5.8) \end{aligned}$$

Величина B ограничена сверху при $\frac{\alpha}{R-e} < 1$. Сходимость рядов в выражении (5.8) вытекает из признака Даламбера. Неравенство (5.4), с учетом (5.7), можем заменить неравенством

$$|B_1| < \left(\frac{\alpha}{R-e} \right)^2 B$$

что совпадает с условием (5.1).

6. Напряжения τ_{xx} , τ_{yy} и τ_{xy} находятся из формул [1]

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = 2[\bar{\varphi}_2'(z) + \overline{\varphi_2'(z)}]$$

$$\tau_{yy} - \tau_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2[z\bar{\varphi}_2'(z) + \varphi_2'(z)]$$

Напряжения в окрестности концов радиального разреза представляются в виде

$$\tau_x = \frac{N}{l's} + G_1(0)$$

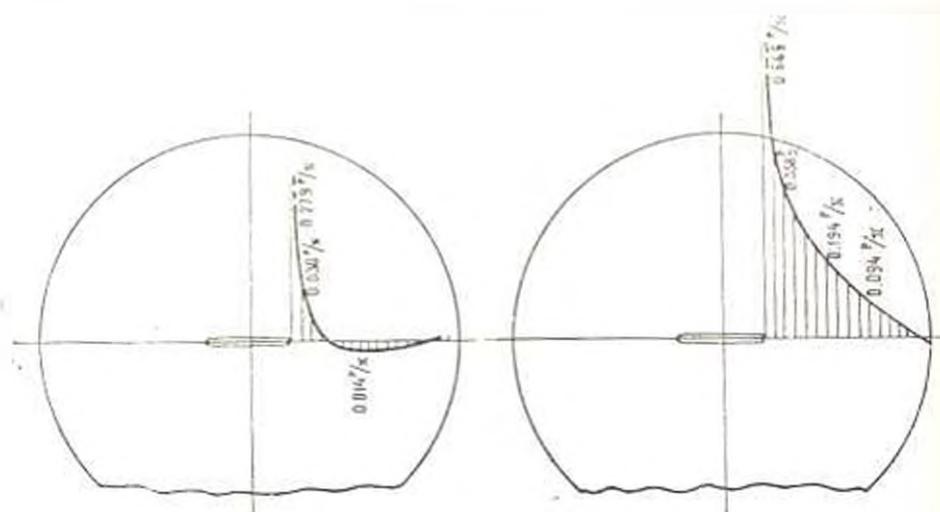
$$\tau_y = \frac{N}{l's} + G_2(0)$$

где s — расстояние рассматриваемой точки по оси OX до вершины разреза.

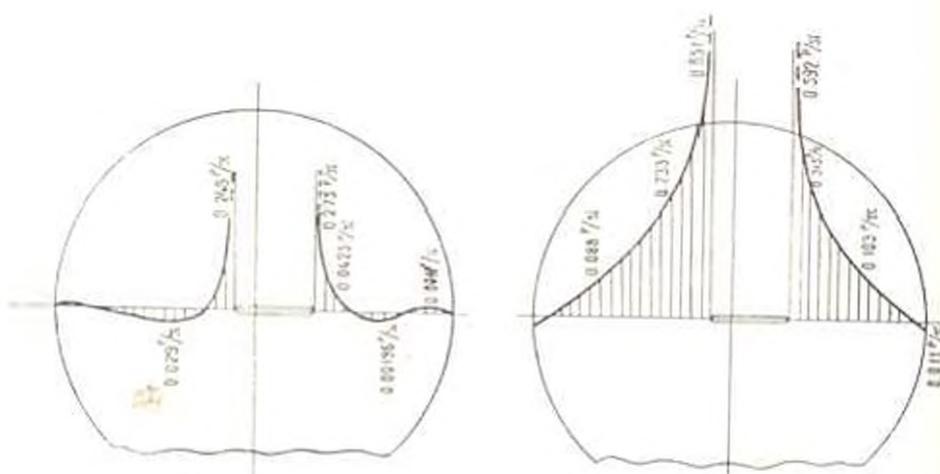
$$N = \begin{cases} \frac{1}{1-A} \left[- \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j (A_j + B_j) \right] \\ \frac{1}{1-A} \left[- \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \nu_j (A_j + B_j) \right] \end{cases}$$

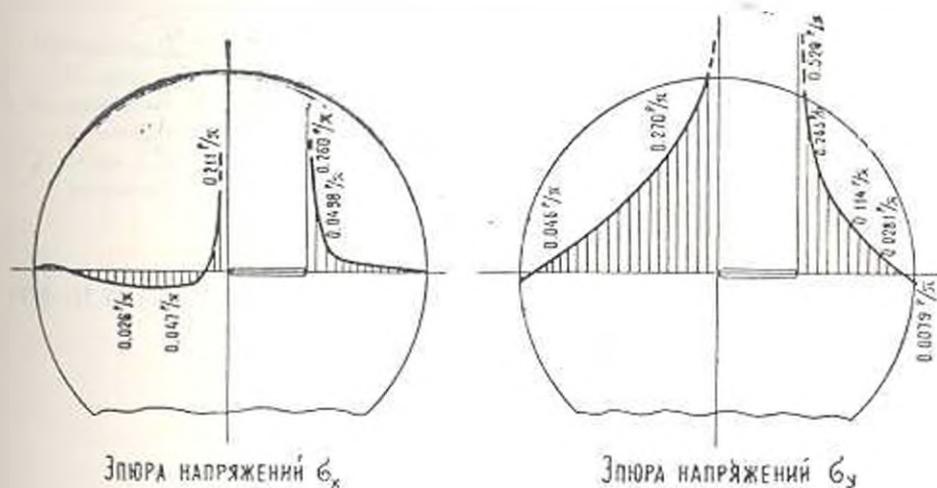
$G_1(0)$ и $G_2(0)$ — ограниченные величины.

Приведены эпюры напряжений для случая разреза длиной $2a = 0,4R$ при положении центра разреза $\epsilon = 0, \epsilon = 0,1R, \epsilon = 0,2R, \epsilon = 0,3R$ (фиг. 2, 3, 4, 5).

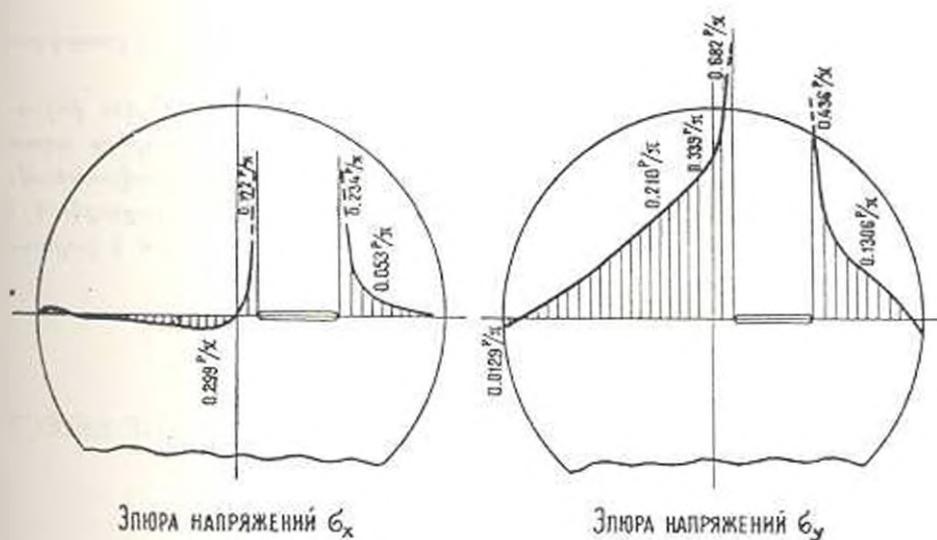
Эпюра напряжений σ_x Эпюра напряжений σ_y

Фиг. 2.

Эпюра напряжений σ_x Эпюра напряжений σ_y



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Сравнение полученных результатов с результатами задачи для сплошного диска под действием сосредоточенных сил показывает, что наличие разреза в диске приводит к качественному изменению характера распределения по оси Ox напряжений σ_x и σ_y . Величины коэффициентов интенсивности напряжений приведены в таблице 1.

Таблица 1

Наим. вершины	Значение эксцентриситета			
	$e=0$	$e=0.1R$	$e=0.2R$	$e=0.3R$
Левая	$0.3067 \frac{P}{\sigma}$	$0.314 \frac{P}{\sigma}$	$0.3086 \frac{P}{\sigma}$	$0.289 \frac{P}{\sigma}$
Правая	$0.3067 \frac{P}{\sigma}$	$0.285 \frac{P}{\sigma}$	$0.254 \frac{P}{\sigma}$	$0.215 \frac{P}{\sigma}$

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 29 III 1976

Օ. Մ. ՍԱՓՈՆՋՅԱՆ, Բ. Ա. ԶԻՖԻԱՋՅԱՆ

ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ԿՏՐՎԱՆՔՈՎ ԿՈՐ ՄԻԱՎԱՌԱԿՐ
ԿՆՆՏՐՈՆԱՑՎԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ԱՋԻԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Դիտարկվում է առանգականության տեսության հարթ խնդիրը շառավղա-
յին կտրվածքով կլոր տիրույթի համար:

Համարվում է, որ արտաքին եզրագծի վրա կիրառված են երկու փոխա-
դարձ հավասարակշռված ուժեր, իսկ շառավղային կտրվածքի եզրերը ազատ
են բևոխց: Խնդրի լուծումը բերվում է հանրահաշվական զծային հավասարում-
ների անվերջ սխառեմների և ռեկուրենտ առնչությունների: Ապացուցվում է
անվերջ սխառեմների թվադի-լիովին ռեկուրյարությունը: Արդյված է լարում-
ների ինտենսիվության գործակիցները կտրվածքի ծայրերում:

Կատարված է թվային հաշվարկ:

CIRCULAR DISC WITH A RADIAL SLIT UNDER THE EFFECT
OF CONCENTRATED FORCES

O. M. SAPONJIAN, R. L. ENFIJIAN

S u m m a r y

The plane problem in the theory of elasticity for a circular region
with a radial slit is considered. Two mutually balanced forces are as-
sumed to be applied to the outer contour while the borders of the
radial slit are load-free. The solution of the problem is reduced to an
infinite system of linear algebraic equations and recurrent relations.
A quasi-regularity of the infinite systems is proved. The coefficients
of stress intensities near the slit's tops are determined. Numerical
calculations are performed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд. «Наука», 1966, стр. 296—302.
2. Шерман Д. И. О напряжениях в весовой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. Прикл. математика и механика, 1951, т. XV, вып. 3.
3. Заргарян С. С., Эфиаджян Р. А. Равномерно растянутая круглая пластинка с радиальной трещиной. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. XXV, № 2.

Г. Е. БАГДАСАРЯН, П. А. МКРТЧЯН

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Задача исследования магнитоупругих колебаний электропроводящих оболочек в магнитном поле сводится к совместному решению уравнений магнитоупругости в области, занимаемой оболочкой, и уравнений электродинамики для среды, окружающей оболочку, при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред и условиях на бесконечности.

Уравнения магнитоупругости состоят из уравнений движения упругой среды с учетом сил электромагнитного происхождения и уравнений электродинамики движущейся электропроводной среды.

В общем случае, когда материал оболочки имеет конечную электропроводность, решение поставленной трехмерной задачи становится весьма затруднительным.

В работах [1, 2] на основе решений, получаемых методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости, сформулированы гипотезы относительно характера изменения электромагнитного поля и упругих перемещений по толщине оболочки.

В настоящей работе на основе этих гипотез трехмерная задача магнитоупругости сферических оболочек приводится к двумерной, что существенно облегчает исследование вопросов магнитоупругости указанных оболочек.

На основе полученных двумерных уравнений исследуется влияние электропроводности материала оболочки и интенсивности заданного магнитного поля на характер упругих колебаний оболочки в случае действия радиального магнитного поля.

1. Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса R , изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится в стационарном магнитном поле с заданным вектором магнитной индукции.

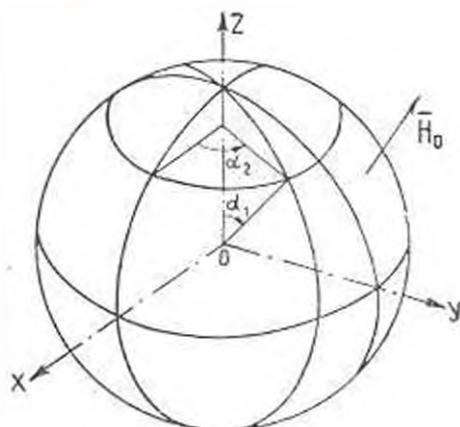
Принимается, что магнитная и диэлектрическая проницаемости материала оболочки и окружающей среды равны единице.

Упругие и электромагнитные свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , плотностью ρ , электропроводностью σ .

Ортогональная система координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ выбрана так, что срединная поверхность сферической оболочки отнесена к географическим координатам α_1, α_2 (α_1 представляет угол долготы, α_2 — угол широты), а α_3 направлена по нормали к срединной поверхности (фиг. 1). Тогда для коэффи-

циентов первой квадратичной формы и для кривизны срединной поверхности будем иметь $A_1 = R$, $A_2 = R \sin \alpha_1$, $k_1 = k_2 = R^{-1}$.

Задача решается в предположении, что для среды, окружающей оболочку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума. Принимается также, что влиянием токов смещения на характеристики упругих колебаний можно пренебречь.



Фиг. 1.

Одновременно считается, что задача магнитоэластики для невозбужденного состояния решена. Известен вектор напряженности $\vec{H}_0(H_{01}, H_{02}, H_{03})$ во всем пространстве, то есть считается, что \vec{H}_0 удовлетворяет известным уравнениям [3]

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H}_0 = 0 \quad (1.1)$$

и условиям непрерывности на поверхностях оболочки.

Принимая возмущения (упругие и электромагнитные) малыми, после линеаризации в силу принятых предположений для рассматриваемой задачи получим следующие исходные уравнения [2, 4, 5]:

уравнения магнитоупругости в области, занимаемой оболочкой ($-h < \alpha_1 < h$)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{4\pi z}{c} \left[\vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right], \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{e} = 4\pi z_2 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_1 \tau_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \tau_{12}) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \tau_{13}) - \tau_2 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \\ &+ \tau_{12} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - R_1 H_1 H_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \tau_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_2 H_1 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_3 \tau_{12}) + \tau_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} + \\ + \tau_{12} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - R_2 H_1 H_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_1 H_2 \tau_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \tau_{12}) - \tau_1 H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - \\ - \tau_1 H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - R_3 H_1 H_2 \end{aligned}$$

Здесь \vec{h} и \vec{e} — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей для области, занимаемой оболочкой,

$\vec{U}(u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещения частиц оболочки, ρ_e — плотность электрических зарядов, $H_1 = A_1(1 + k_1 \alpha_3)$, $H_2 = A_2(1 + k_2 \alpha_3)$ — коэффициенты Ламе, $\vec{R}(R_1, R_2, R_3)$ — силы электромагнитного происхождения, которые определяются следующим образом:

$$\vec{R} = \frac{\varepsilon}{c} \left(\vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_c \right) \times \vec{H}_c \quad (1.4)$$

уравнения электродинамики для вакуума в областях $(-R < \alpha_3 < -h, \alpha_3 > h)$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div } \vec{h}^{(e)} = 0 \\ \text{rot } \vec{e}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{e}^{(e)} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\vec{h}^{(e)}$ и $\vec{e}^{(e)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей для области вне тела оболочки, причем индекс $e = 1$ относится к области $\alpha_3 > h$, а $e = 2$ — к области $\alpha_3 < -h$.

Таким образом, трехмерная задача магнитоупругих колебаний сферической оболочки свелась к совместному интегрированию системы уравнений (1.2), (1.3) и (1.5), решения которых должны удовлетворять условиям непрерывности электромагнитного поля на колеблющихся поверхностях оболочки, а также условиям затухания возмущений на бесконечности и ограниченности в области $\alpha_3 < -h$.

2. Для приведения трехмерных уравнений магнитоупругости сферической оболочки (1.2), (1.3) к двумерной принимаются гипотезы магнитоупругости тонких тел [1, 2].

Согласно этим гипотезам

$$\begin{aligned} u_1 &= u - \frac{a_1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}, & u_2 &= v - \frac{a_2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2}, & u_3 &= w(x_1, x_2, t) \\ e_1 &= \varphi(x_1, x_2, t), & e_2 &= \psi(x_1, x_2, t), & h_3 &= f(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u = u(x_1, x_2, t)$, $v = v(x_1, x_2, t)$, $w = w(x_1, x_2, t)$ — искомые перемещения срединной поверхности оболочки; φ , ψ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в оболочке электрического поля $e(e_1, e_2, e_3)$; f — искомая нормальная компонента индуцированного в оболочке магнитного поля $h(h_1, h_2, h_3)$.

На основе принятых гипотез остальные компоненты индуцированного в оболочке электромагнитного поля определяются из уравнений (1.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \alpha_3 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left(a_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{a}{A_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - a_3 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ h_2 &= \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + \alpha_3 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left(a_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{a}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} - a_3 \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ e_3 &= -\frac{a_3}{A_1 A_2} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \psi) \right| + \frac{1}{c} \left| \frac{1}{A_1} \left(a_1 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial a}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - \right. \\ &\quad - \frac{1}{A_2} \left(a_2 - \frac{1}{A_1} \frac{\partial a}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (A_2 a_3) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial t} + \\ &\quad + a_3 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial t} \right) - H_{0z} \frac{\partial u}{\partial t} + H_{0y} \frac{\partial v}{\partial t} + \\ &\quad \left. + \alpha_3 \left(\frac{H_{02}}{A_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - \frac{H_{01}}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} \right) \right| \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$a = \int_0^a \alpha_3 H_{0z} dx_3 - \frac{1}{2} \left(\int_0^h \alpha_3 H_{0y} dx_3 + \int_0^{-h} \alpha_3 H_{0z} dx_3 \right)$$

$$a_i = \int_0^{\alpha_i} H_{0i} dx_i - \frac{1}{2} \left(\int_0^h H_{0i} dx_3 + \int_0^{-h} H_{0i} dx_3 \right), \quad (i = 1, 2, 3)$$

Индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при $\alpha_i = h$ и $\alpha_i = -h$.

При получении (2.2) было учтено условие равенства нулю нормальной составляющей плотности тока на поверхностях $\alpha_i = \pm h$ (так как оболочка находится в вакууме).

Подставляя (2.1), (2.2) в уравнения движения оболочки (1.3) и усредняя по толщине, как это делается в теории оболочек [4, 5] (учитывается,

что поверхностные силы отсутствуют), с учетом (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно шести искомых функций ($u, v, w, \varphi, \psi, \zeta$):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta + 2) w \right] - (1 - \nu) \frac{1}{A_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \\
 & + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} \frac{\varepsilon}{c} \left[\left(b_3 + \frac{1}{R} c_3 \right) \psi + \left(c_2 + \frac{1}{R} g_2 \right) \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \zeta) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \zeta) \right] + \right. \\
 & + \frac{1}{c} \left[\left(F_{21} + \frac{1}{R} L_{21} \right) \frac{\partial v}{\partial t} - \left(F_{22} + \frac{1}{R} L_{22} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(b_{13} + \frac{1}{R} c_{13} \right) \frac{\partial w}{\partial t} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{A_1} \left(G_{22} + \frac{1}{R} N_{22} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} + \frac{1}{A_2} \left(G_{12} + \frac{1}{R} N_{12} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} \right] + \left(d_{32} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{R} a_{32} \right) \frac{1}{A_1 A_2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 v) - \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 u) \right] \left. \right\} - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
 & \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta + 2) w \right] + (1 - \nu) \frac{1}{A_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \\
 & + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} \frac{\varepsilon}{c} \left\{ - \left(b_3 + \frac{1}{R} c_3 \right) \psi - \left(c_1 + \frac{1}{R} g_1 \right) \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \zeta) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \zeta) \right] + \frac{1}{c} \left[\left(F_{12} + \frac{1}{R} L_{12} \right) \frac{\partial u}{\partial t} - \left(F_{11} + \frac{1}{R} L_{11} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(b_{23} + \frac{1}{R} c_{23} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{A_1} \left(G_{21} + \frac{1}{R} N_{21} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{A_2} \left(G_{11} + \frac{1}{R} N_{11} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} \right] - \left(d_{31} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{R} a_{31} \right) \frac{1}{A_1 A_2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 v) - \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 u) \right] \right\} - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3) \\
 & \left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 + \nu}{R} \right) \theta - \frac{h^2}{3R^3} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w + \\
 & + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} \frac{\varepsilon}{c} \left\{ \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 c_3) - b_1 \right] \psi + \left(b_2 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial c_3}{\partial x_2} \right) \zeta + \right. \\
 & + \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right) c_3 - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{g_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{g_2}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \zeta) + \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \zeta) \right] + \frac{1}{c} \left[b_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 L_{21}) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial L_{12}}{\partial x_2} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{c} \left[b_{22} - \frac{1}{A_2^2} a_{22} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 L_{11}) - \frac{1}{A_1} \frac{\partial L_{11}}{\partial z_1} \right] \frac{\partial v}{\partial t} - \\
& - \frac{1}{c} \left[b_{11} + b_{22} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 c_{11}) - \frac{1}{A_1} \frac{\partial c_{11}}{\partial z_1} \right] \frac{\partial w}{\partial t} - \\
& - \frac{1}{A_1} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 N_{22}) - \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_{22}}{\partial z_1} \right] \frac{\partial w}{\partial z_1} + \\
& + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial N_{12}}{\partial z_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_{11}}{\partial z_2} \right) \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} - L_{21} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial z_1} \right. \\
& \quad \left. + L_{11} \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial z_2} + \left(L_{21} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial z_1} a_{11} \right) \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial z_1} - \right. \\
& \quad \left. - \left(L_{11} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial z_1} a_{11} \right) \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial z_2} - N_{22} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} - N_{11} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2} - \right. \\
& \quad \left. + (N_{12} + N_{21}) \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} + \left(\frac{a_{22}}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{a_{21}}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial z_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial z_2} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{A_1^2 A_2^2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 a_{21}) - \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 a_{11}) \right] \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 v) - \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 u) \right] - \\
& - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 \bar{v}) - \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 \bar{v}) \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_1} + \frac{4\pi\kappa}{c} \left[\bar{v} + \frac{1}{2hc} \left(b_1 \frac{\partial w}{\partial t} - b_2 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c_1}{A_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial t} \right) \right] = \frac{h_1^+ - h_1^-}{2h}$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_2} - \frac{4\pi\kappa}{c} \left[\bar{v} + \frac{1}{2hc} \left(b_2 \frac{\partial v}{\partial t} - b_1 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{c_2}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_2 \partial t} \right) \right] = \frac{h_2^+ - h_2^-}{2h}$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{v} = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 u) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 v) \right] + \frac{2\kappa}{R}$$

$$\chi = \frac{1}{2A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 v) - \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 u) \right]$$

$$\Delta = \frac{R^2}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right]$$

$$b_i = \int_{-h}^h H_{0i} dz_3, \quad c_i = \int_{-h}^h z_3 H_{0i} dz_3, \quad b_{ij} = \int_{-h}^h H_{0i} H_{0j} dz_3$$

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= \int_{-h}^h z_3 H_{0i} H_{0j} dz_3, & d_{ij} &= \int_{-h}^h a_i H_{0j} dz_3, & g_{ij} &= \int_{-h}^h z_3^2 H_{0i} dz_3, \\
 g_{ij} &= \int_{-h}^h z_3^2 H_{0i} H_{0j} dz_3, & a_{ij} &= \int_{-h}^h z_3 a_i H_{0j} dz_3, & F_{ij} &= b_{33} \delta_{ij} + \frac{1}{A_j} \int_{-h}^h H_{0i} \frac{\partial a_j}{\partial z_j} dz_3, \\
 G_{ij} &= d_{ij} - c_{33} \delta_{ij} - \frac{1}{A_i} \int_{-h}^h H_{0j} \frac{\partial a_i}{\partial z_i} dz_3, \\
 N_{ij} &= a_{ij} - g_{33} \delta_{ij} - \frac{1}{A_j} \int_{-h}^h z_3 H_{0j} \frac{\partial a_i}{\partial z_i} dz_3, \\
 L_{ij} &= c_{33} \delta_{ij} + \frac{1}{A_j} \int_{-h}^h z_3 H_{0j} \frac{\partial a_i}{\partial z_i} dz_3, \quad (i, j = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

3. Для полного определения перемещений и электромагнитного поля в оболочке, как видно из (2.3), необходимо иметь значения компонент индуцированного магнитного поля на поверхностях, ограничивающих оболочку. Поэтому уравнения (2.3) необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для вакуума (1.5) при следующих граничных условиях на поверхности раздела двух сред:

$$\vec{e}^{(e)} = \vec{e}, \quad \vec{h}^{(e)} = \vec{h} \quad \text{при} \quad z_3 = \pm h \quad (3.1)$$

Тогда задача определения компонент электромагнитного поля в среде, окружающей оболочку, приводится к решению уравнений (1.5) с условиями (3.1), а также условиями затухания возмущений на бесконечности в области $\alpha_3 > h$ и условиями ограниченности в области $\alpha_3 < -h$.

Введем потенциальные функции $\Phi_0^{(e)}$ посредством

$$\vec{h}^{(e)} = \text{grad } \Phi_0^{(e)} \quad (3.2)$$

определение $\Phi_0^{(e)}$ приводится к решению следующих задач Неймана в областях $|z_3| > h$

$$\begin{aligned}
 \Delta \Phi_0^{(e)} &= 0 \\
 \frac{\partial \Phi_0^{(e)}}{\partial z_3} \Big|_{z_3 = \pm h} &= f(z_1, z_2, t)
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решение задач (3.3) представляется в виде [6]

$$\Phi_0^{(e)} = -\frac{R+h}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{2}{r_1} - \ln \frac{1+r_1 - r_1 \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \right| f(z, r_1, t) \sin \theta_0 d\theta_0 dz_1 \quad (3.4)$$

$$\Phi_0^{(2)} = \frac{R-h}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{2}{r_2} - \ln \frac{1+r_2-\gamma_2 \cos \theta_0}{2} \right] f(\xi, \gamma, t) \sin \xi d\xi d\gamma \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} r_1^2 &= 1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos \theta_0, & r_2^2 &= 1 + \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \cos \theta_0 \\ \cos \theta_0 &= \cos \xi \cos \alpha_1 + \sin \xi \sin \alpha_1 \cos(\gamma - \alpha_2) \\ \xi_1 &= \frac{1 + \alpha_2' R}{1 + h_1' R}, & \xi_2 &= \frac{1 + \alpha_2' R}{1 - h_1' R} \end{aligned}$$

Из (3.2) в силу (3.4) и (3.5) найдем

$$\frac{h_1' - h_1}{2h} = -\frac{R}{h} \frac{1}{A_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{h_2' - h_2}{2h} = -\frac{R}{h} \frac{1}{A_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{r}{2} \right) \right] f(\xi, \gamma, t) \sin \xi d\xi d\gamma \\ r^2 &= 2(1 - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

Подставляя (3.6) в систему (2.3), получим замкнутую систему уравнений относительно искомых функций ($u, v, w, \varphi, \psi, f$) задачи. Таким образом, трехмерная задача магнитоупругости сферической оболочки свелась к решению двумерной системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

4. Рассмотрим задачу магнитоупругих колебаний замкнутой сферической оболочки в неоднородном магнитном поле $\vec{H}_0(\alpha_3)$, вектор напряженности которого перпендикулярен к недеформированной срединной поверхности. Пока оболочка находится в невозмущенном состоянии, вектор \vec{H}_0 , характеризующий невозмущенное магнитное поле, определяется следующим образом:

$$\vec{H}_0 = \frac{H_0}{(1 + \alpha_2' R)^3} \vec{n}_3 \quad (4.1)$$

удовлетворяющим уравнениям магнитостатики (1.1).

Здесь H_0 — величина вектора напряженности магнитного поля на срединной поверхности ($\alpha_3 = 0$), \vec{n}_3 — единичный вектор в направлении координатной линии α_3 .

Подставляя (3.6), (4.1) в уравнения движения оболочки (2.3) и пренебрегая тангенциальными составляющими сил инерции, получим полную систему разрешающих сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно шести искомых функций ($u, v, w, \varphi, \psi, f$)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta + 2) w \right] - (1 - \nu) \frac{1}{A_1} \frac{\partial l}{\partial x_1} - \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \\
& \quad + \frac{(1 - \nu^2) z H_0}{Ec} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{h^2}{3R} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right| = 0 \\
& \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta + 2) w \right] + (1 - \nu) \frac{1}{A_2} \frac{\partial l}{\partial x_2} + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \\
& \quad - \frac{(1 - \nu^2) z H_0}{Ec} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(v - \frac{h^2}{3R} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right| = 0 \\
& \left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 - \nu}{R} \right) \theta - \frac{h^2}{3R^4} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\
& \quad + \frac{(1 - \nu^2) z h^2 H_0^2}{3Ec^2 R^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w = 0 \tag{4.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 z) - \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 z) \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{4\pi z}{c} \left(\varphi - \frac{H_0}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{R}{h} \frac{1}{A_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\
& \frac{1}{A_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{4\pi z}{c} \left(\varphi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{R}{h} \frac{1}{A_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0
\end{aligned}$$

Решения приведенных уравнений должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

Приведем основные уравнения задачи к удобному виду. Вводя с этой целью функции $\Phi(x_1, x_2, t)$ и $\Psi(x_1, x_2, t)$ посредством

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 z) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 z) \right] \\
\Psi &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 z) - \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 z) \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

из уравнений (4.2) после некоторых преобразований получим систему уравнений относительно $(\theta, \zeta, w, \Phi, \Psi, f)$

$$\begin{aligned}
& (\Delta + 1 - \nu) \theta - \frac{1}{R} \left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta + 1 - \nu \right) (\Delta + 2) w + \\
& \quad + \frac{z H_0 R^2}{\nu c c_0^2} \left[\Psi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2w}{R} - \zeta + \frac{h^2}{3R^3} \Delta w \right) \right] = 0 \tag{4.4} \\
& \left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 - \nu}{R} \right) \theta - \frac{h^2}{3R^4} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w - \\
& \quad - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{z h^2 H_0^2}{3\nu c^2 c_0^2 R^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w = 0
\end{aligned}$$

$$\Delta \Psi - \frac{4\pi\alpha R^2}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{R}{h} \Delta F_1 + \frac{4\pi\alpha H_0 R^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\psi - \frac{2\omega}{R} \right) = 0$$

$$(\Delta + 2)\chi = 0, \quad \Phi - \frac{2H_0}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0, \quad \Psi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

где $c_0 = [E/\rho(1-\nu)]^{1/2}$ — скорость звука в материале оболочки

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{r}{2} \right) \right| \Psi(\xi, \eta, t) \sin \xi d\xi d\eta$$

Любопытно отметить, что в силу (4.3) для определения (θ, ω, Ψ) получили систему (4.4), не содержащую остальные неизвестные функции (χ, Φ, ψ) , которые должны определяться из системы (4.5).

Решения уравнений (4.4) представим в виде разложения

$$Q(\alpha_1, \alpha_2, t) = \exp(i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\alpha_1, \alpha_2) \quad (4.6)$$

$$Q_n(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\alpha_2 + B_{nk} \sin k\alpha_2) P_n^k(\cos \alpha_1)$$

где Q — любая из функций (θ, ω, Ψ) , ω — частота колебаний, A_{nk} и B_{nk} — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$A_{nk} = \frac{1}{|Y_n^k|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q_n(\alpha_1, \alpha_2) P_n^k(\cos \alpha_1) \cos k\alpha_2 \sin \alpha_1 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$B_{nk} = \frac{1}{|Y_n^k|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q_n(\alpha_1, \alpha_2) P_n^k(\cos \alpha_1) \sin k\alpha_2 \sin \alpha_1 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$|Y_n^k|^2 = \frac{2\pi z_k}{2n+1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!}, \quad z_k = \begin{cases} 2 & \text{при } k=0 \\ 1 & \text{при } k>0 \end{cases}$$

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$$

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$ — полиномы Лежандра.

Подставляя (4.6) в систему уравнений (4.4), для определения частоты колебаний получим следующее характеристическое уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \omega_n^4 = 0 \quad (4.7)$$

где

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \frac{\varepsilon_0 \Omega_n R^2}{D_n h c} + \frac{\varepsilon_0 h c^2 \beta_0^2}{3 \varepsilon_0 \Omega_n R^2 (\nu_n - 1 + \nu)} \left| \nu_n^2 + (\nu_n - 2)(\nu_n - 1 + \nu) + \frac{6R^2(1 + \nu)}{h^2} \right|, \quad q_2 = 1 + \frac{\varepsilon_0 c^2 \beta_0^2}{3 D_n c^2 (\nu_n - 1 + \nu)} (D_n \beta_0^2 + \nu_n - 2)$$

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0 \Omega_n R^2}{D_n h c} \left(1 + \frac{D_n \beta_0^2}{\nu_n - 1 + \nu} \right), \quad \nu_n = n(n + 1)$$

$$D_n = \nu_n + \frac{R}{2h} (2n + 1), \quad \varepsilon_0 = \frac{4\pi h}{c}, \quad \beta_0 = \frac{V_A}{c}$$

$$V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi}}, \quad \omega_n = \frac{\omega}{\Omega_n}, \quad \gamma_n = \gamma, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{3R^2(1 - \nu^2)}$$

$$\Omega_n^2 = \frac{gE}{\gamma_0 R^2} (\nu_n - 2) \frac{1 + \delta^2(\nu_n - 1)^2}{\nu_n - 1 + \nu}$$

Здесь γ_0 — удельный вес материала оболочки, g — ускорение силы тяжести, Ω_n — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля, безразмерные параметры ε_0 и β_0 характеризуют электропроводность материала оболочки и напряженность внешнего магнитного поля соответственно, V_A — скорость распространения электромагнитных волн Альфвена.

При $n = 1$ уравнение (4.7) становится квадратным и имеет решение

$$\omega = -\omega_0^2 (1 - \sqrt{1 - \kappa^2}) \quad (4.8)$$

где

$$\kappa^2 = \left| \frac{2\varepsilon_0 R^2}{D_1 h c} \left(1 + \frac{D_1 \beta_0^2}{1 + \nu} \right) \right|^{-1} \left| 1 + \frac{2c^2 \varepsilon_0^2 \beta_0^2}{3c^2 (1 + \nu)} \right|$$

$$\kappa^2 = \frac{8R^2 \varepsilon_0^2 \beta_0^2}{D_1 h^2 c^2} \left(1 + \frac{D_1 \beta_0^2}{1 + \nu} \right) \left| 1 + \frac{2c^2 \varepsilon_0^2 \beta_0^2}{3c^2 (1 + \nu)} \right|^{-2}$$

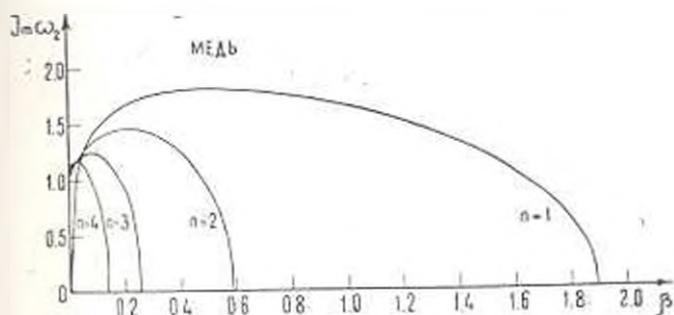
Из (4.8) следует, что если $\kappa > 1$, то затухание возмущений имеет колебательный характер. В противном случае возмущения затухают без колебаний.

Приведем численный анализ зависимости характеристик колебаний (частоты колебаний и коэффициента затухания) от напряженности внешнего магнитного поля и электропроводности материала оболочки при $h/R = 0.01$, $n = 1, 2, 3, 4$.

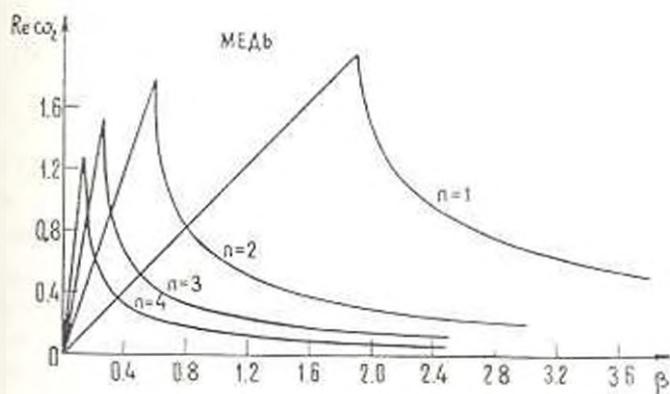
Результаты численных решений уравнений (4.7) и (4.8) для медной оболочки приведены на фиг. 2, 3, а для цинковой оболочки — на фиг. 4, 5.

На этих фигурах представлены графики зависимости частоты упругих колебаний ($\text{Im}\omega_n$) и коэффициента затухания ($\text{Re}\omega_n$) от параметра

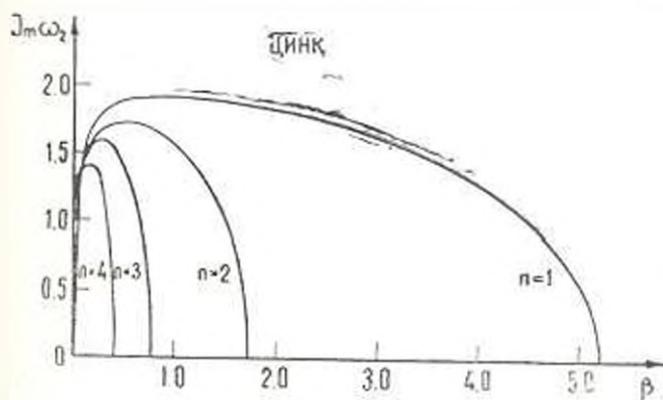
$\beta = 10V_A/a_0$ (a_0 — скорость звука в случае медной оболочки), характеризующего напряженность заданного магнитного поля.



Фиг. 2.



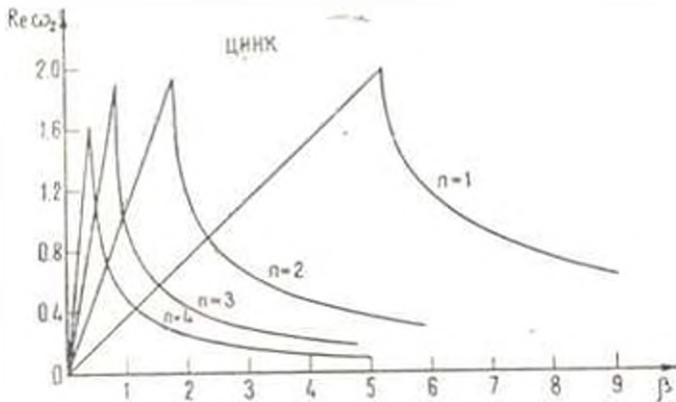
Фиг. 3.



Фиг. 4.

Фиг. 2 и 4 показывают, что при возрастании напряженности магнитного поля частота колебаний вначале увеличивается, достигая максимума,

после чего начинает уменьшаться и принимает значение нуль для определенного β . Значение β , при котором $\text{Im}(\omega_2) = 0$, монотонно уменьшается при возрастании n (n —число волн по направлению a_1).



Фиг. 5.

Имея в виду, что при $\sigma=0$ $\text{Im } \omega = 1$ (или нулю при $n=1$) и сравнивая фиг. 2 и 4, заключаем, что частота колебаний как функция от электропроводности материала оболочки может принимать максимальное значение в интервале $(0 < \sigma < \infty)$. Причем расположение точки максимума существенно зависит от напряженности магнитного поля и от числа волн n .

Кривые, приведенные на фиг. 3 и 5, показывают, что зависимость коэффициента затухания ($\text{Re } \omega_2$) от напряженности заданного магнитного поля и электропроводности материала оболочки также имеет экстремальный характер.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 4 VI 1976

Գ. Ե. ԲԱԳԳՍԱՐՅԱՆ և Պ. Ա. ՄԽՐՏՉՅԱՆ

ՔԱՐԱԿ ԳՆՆԱՅԻՆ ԹԱԿԱՆՔՆԵՐԻ ՄԱԿՆԵՍՈՒ-
ԱՌՈՒՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ռ

Այնպատանքում բարակ մարմինների մազնիսաառաձգականության հիպոթեզների հիման վրա զննարկել թաղանթների մազնիսաառաձգականության եռաչափ խնդիրը բերվում է երկչափի, որը լայնես հեշտացնում է նշված թաղանթների մազնիսաառաձգականության հարցերի ուսումնասիրությունը:

Առաջված հավասարումների հիման վրա անտադրություն է տված մազնիսական դաշտի ինտենսիվության և թաղանթի նյութի հաղորդականության

ազդեցությունը թաղանթի առաձգական տատանումների բնույթի վրա, երբ ճաղնիսական դաշտի լարվածության փեկտորը ուղղված է թաղանթի միջին մակերևույթի նորմալով:

ON EQUATIONS OF MAGNETOELASTICITY OF THIN SPHERICAL SHELLS

G. E. BAGDASARIAN, P. M. SKETCHMAN

S u m m a r y

On the basis of hypothesis of thin body magnetoelasticity the three-dimensional problem of magnetoelasticity of spherical shells is reduced to a two-dimensional one, thus facilitating essentially the investigation of the magnetoelasticity problem of the shells under consideration.

By means of the two-dimensional equations obtained the influence of both the shell material's electroconductivity and the given magnetic field intensity upon the mode of elastic vibration of the shell is studied for the case of the radial magnetic field effect.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Азбаруцян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. Азбаруцян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. Солов А. Г. Механика гальванических сред. т. 1. М., Наука, 1970, стр. 297—298.
4. Гольденвейзер А. А. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953, стр. 33—36.
5. Азбаруцян С. А. Общая теория изогнутых оболочек. М., Наука, 1974, стр. 18.
6. Кошляков Н. С., Глицер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высшая школа, 1970, стр. 343—346.

М. В. БЕЛУБЕКЯН

К ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Применение гипотез Кирхгофа в задачах магнитоупругих колебаний пластинки хотя и приводит к некоторым упрощениям, однако не позволяет делать общие выводы для достаточно широкого класса задач. Необходимость дальнейших упрощений привела к исследованию задач магнитоупругих колебаний пластинки с использованием дополнительных допущений: модель идеально проводящей пластинки [1], гипотеза магнитоупругости тонких тел [2], пренебрежение токами смещения как в пластинке, так и в среде, окружающей пластинку [3]. Приведенные ссылки выбраны из обширной литературы по этим вопросам [4] как наиболее характерные.

В настоящей работе, на основе решения частной задачи магнитоупругих колебаний, исследуются вопросы применимости указанных дополнительных допущений. При этом выбор задачи обусловлен как возможностью получения достаточно обозримого точного решения (без использования дополнительных упрощений), так и требованием сохранения возможно более общего характера, присущего задачам магнитоупругих колебаний.

1. Бесконечная пластинка постоянной толщины $2h$ помещена в постоянное магнитное поле H_0 , вектор напряженности которого параллелен средней плоскости пластинки. Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются жесткостью D , плотностью ρ , электропроводностью σ . Магнитная и диэлектрическая проницаемости пластинки и среды, окружающей пластинку, принимаются равными единице.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбирается так, что координатная плоскость (x, y) совпадает со средней плоскостью пластинки, а направление оси ox — с направлением вектора напряженности заданного магнитного поля.

Основные допущения при рассмотрении задачи колебаний такой пластинки следующие: гипотеза Кирхгофа; справедливость линейных уравнений магнитоупругости [2]; независимость колебаний от координаты z — волны распространяются в плоскости (y, z) .

При указанных предположениях уравнения электродинамики для индуцированного электромагнитного поля в области, занимаемой пластинкой ($|z| \leq h$), следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_x}{\partial z} &= \frac{4\pi z}{c} \left(\epsilon_x + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial e_x}{\partial t}, & \frac{\partial e_x}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial h_z}{\partial t} \\ - \frac{\partial h_x}{\partial y} &= \frac{4\pi z}{c} \left(\epsilon_x + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial e_x}{\partial t}, & \frac{\partial e_x}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} &= 4\pi z, \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\psi(y, t)$ — прогиб пластинки, h_x — компонента возмущенного магнитного поля в направлении координаты x ; e_y, e_z — компоненты возмущенного электрического поля соответственно в направлении координат y и z . Остальные компоненты электромагнитного поля тождественно равны нулю вследствие независимости колебаний от координаты x . Последнее уравнение из (1.1) служит для определения электрических зарядов ρ , возникающих в процессе колебаний.

Для среды, окружающей пластинку ($|z| > h$) принимается справедливость уравнений электродинамики для вакуума

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial e_y^{(1)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial h_x^{(2)}}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial e_z^{(2)}}{\partial t} \\ \frac{\partial e_y^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial e_z^{(2)}}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial h_x^{(1)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial e_y^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial e_z^{(1)}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

(1) — (1), (2)

Здесь индексы (1) и (2) показывают принадлежность соответствующей компоненты возмущенного электромагнитного поля к областям $z > h$ и $z < -h$ соответственно. Последнее уравнение из (1.2) является следствием остальных уравнений.

Уравнения (1.1) и (1.2) связаны общими граничными условиями на поверхностях пластинки

$$\begin{aligned} h_x = h_x^{(1)}, \quad e_y = e_y^{(1)} \quad \text{при } z = h \\ h_x = h_x^{(2)}, \quad e_z = e_z^{(2)} \quad \text{при } z = -h \end{aligned} \quad (1.3)$$

Условия (1.3) означают непрерывность соответствующих компонент электромагнитного поля на поверхностях разрыва при справедливости принятой линеаризации [2]. На нормальную к поверхности разрыва компоненту электрического поля e_z не налагается никаких условий. Разрывы компоненты e_y допустимы, так как в процессе колебаний может возникнуть распределение поверхностных электрических зарядов.

Существенное отличие рассматриваемой частной задачи магнитоупругих колебаний от ранее рассмотренных частных задач (в продольном магнитном поле, когда колебания не зависят от координаты y [2], в поперечном магнитном [5]) заключается в том, что здесь электрические заряды действительно возникают.

Отметим, что для задач, рассмотренных в [2], [5], выполняются условия отсутствия электрических зарядов, полученных в [6] при справедливости линейных уравнений магнитоупругости и гипотезы Кирхгофа.

Для компонент возмущенного электромагнитного поля среды, окружающей пластинку, должны выполняться также условия затухания возмущений на бесконечности, например,

$$e_y^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad e_z^{(2)} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty \quad (1.4)$$

В данной задаче, согласно уравнениям (1.2), из выполнения условий затухания возмущений (1.4) для какой-нибудь компоненты, например, e_y ,

автоматически следует выполнение условий затухания и для остальных компонент.

Задача нахождения возмущений электромагнитного поля — уравнения (1.1), (1.2), условия (1.3), (1.4) — была бы полностью определенной, если бы было задано движение пластинки. Для данной задачи требуется знание только функции $w(y, t)$ (следствие гипотезы Кирхгофа), поэтому необходимо к приведенным уравнениям и условиям присоединить также уравнение движения пластинки

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\epsilon h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = R_x + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (1.5)$$

Записанные в правой части уравнения (1.5) сила и момент, обусловленные взаимодействием электромагнитного поля с движущимся проводником, согласно [2], имеют вид

$$R_x = -\frac{\partial H_0}{c} \left(2h \frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} + \int_{-A}^A e_y dy \right) \\ m_y = \frac{\partial H_0}{c} \left(\frac{2h^2 H_0}{3c} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \int_{-A}^A z e_x dz \right) \quad (1.6)$$

Приведенные выше уравнения и граничные условия полностью определяют рассматриваемую задачу магнитоупругих колебаний пластинки.

2. Для поставленной в первом пункте задачи рассматривается решение следующего вида:

$$Q = Q_0(z) \exp i(\omega t - ky), \quad w = w_0 \exp i(\omega t - ky) \quad (2.1)$$

где через Q обозначена любая из компонент электромагнитного поля, $Q_0(z)$ подлежит определению удовлетворением уравнениям и граничным условиям задачи.

Подставляя (2.1) в уравнения (1.1) и (1.2), решая получающиеся при этом обыкновенные дифференциальные уравнения и удовлетворяя условиям (1.3), (1.4), находим соответствующие для компонент возбужденного электромагнитного поля функции $Q_i(z)$, выраженные через w_0 ,

$$e_{0y} = \frac{4\pi\sigma j\omega}{c} \left(N \operatorname{ch} \gamma z - \frac{1 + k^2/\gamma^2}{4\pi\sigma + j\omega} \right) H_0 w_0 \\ h_{0x} = \frac{4\pi\sigma j\omega}{\gamma c^2} \left[(4\pi\sigma + j\omega) N \operatorname{sh} \gamma z - \frac{k^2}{\gamma} z \right] H_0 w_0 \\ e_{0z} = -\frac{4\pi\sigma k\omega}{\gamma c} \left(N \operatorname{sh} \gamma z + \frac{j\omega}{\gamma c^2} z \right) H_0 w_0 \\ e_{0y}^{(e)} = \frac{4\pi\sigma j\omega}{\gamma} M H_0 w_0 \exp \gamma z (\delta - z) \quad (2.2)$$

$$H_0^{(1)} = - \frac{4\pi\sigma_0^2}{c^2\nu_0} MH_0\omega_0 \exp \nu_0 (h - z)$$

$$e_{0z}^{(1)} = \frac{4\pi\sigma_0 k}{c^2\nu_0} MH_0\omega_0 \exp \nu_0 (h - z)$$

Здесь верхний знак соответствует индексу $(\epsilon) = (1)$, нижний — $(\epsilon) = (2)$.

$$\nu^2 = k^2 + \frac{4\pi\sigma_0 i\omega}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \nu_0^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$N = \left[\frac{k^2 h^2}{\nu^2} + \frac{i\omega}{\nu_0(4\pi\sigma_0 + i\omega)} \left(1 + \frac{k^2}{\nu^2} \right) \right] \left(\frac{4\pi\sigma_0 + i\omega}{\nu} \operatorname{sh} \nu h + \frac{i\omega}{\nu_0} \operatorname{ch} \nu h \right)^{-1} \quad (2.3)$$

$$M = \left[\frac{k^2 h^2}{\nu^2} \operatorname{ch} \nu h - \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{k^2}{\nu^2} \right) \operatorname{sh} \nu h \right] \left(\frac{4\pi\sigma_0 - i\omega}{\nu} \operatorname{sh} \nu h + \frac{i\omega}{\nu_0} \operatorname{ch} \nu h \right)^{-1}$$

Разность $e_{0z} - e_{0z}^{(1)}$ при $z = \pm h$ дает плотность свободных поверхностных зарядов, возникающих в процессе колебаний.

Подставляя (2.1) с учетом (2.2) в уравнение движения пластинки (1.5), получим характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний

$$Dk^4 - 2\nu_0 h \omega^2 = -2h \frac{i\omega}{c^2} H_0^2 \left\{ 1 + \frac{k^2 h^2}{3} - \frac{4\pi\sigma_0}{h\nu^3} \left[\nu N \operatorname{sh} \nu h - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k^2 + \nu^2}{4\pi\sigma_0 + i\omega} h - \frac{k^2}{\nu} N (\nu h \operatorname{ch} \nu h - \operatorname{sh} \nu h) - \frac{k^2 h^3}{c^2} i\omega \right] \right\} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) является трансцендентным и его исследование в общем случае связано с большими трудностями.

Применяя модель идеально проводящей пластинки [1], легко получить, что правая часть уравнения движения пластинки (1.5) тождественно равна нулю. Однако в этом случае в правой части уравнения (1.5) необходимо учитывать также добавочные силы, возникающие вследствие появления поверхностного тока, что ведет к разрыву тензора Максвелла на поверхностях $z = \pm h$.

Переходя в выражениях (2.2), (2.4) к пределу при $\sigma \rightarrow \infty$, получим решение, совпадающее с решением на основе модели идеально проводящей пластинки. В частности, характеристическое уравнение будет иметь вид

$$Dk^4 - 2\nu_0 h \omega^2 = \frac{\omega^2}{2\pi c^2 \nu_0} H_0^2 \quad (2.5)$$

Если задачу решать при условии пренебрежения токами смещения по сравнению с токами проводимости в уравнениях (1.1) и сравнить с решением (2.2) и (2.4), то заметим, что такое упрощение эквивалентно условию $|\omega| \ll 4\pi\sigma_0$. Это условие для пластин с обычной электропроводностью выполняется и принимается в дальнейшем.

Если же задачу решать при условии пренебрежения токами смещения по ходу как в уравнениях (1.1), так и в уравнениях (1.2), то правая часть характеристического уравнения (2.4) оказывается равной нулю. Естественно, что для данной задачи такое упрощение не будет приемлемым, так как не учитывает взаимодействия пластинки с электромагнитным полем.

3. С целью упрощения выражений (2.2) и, следовательно, характеристического уравнения (2.4) берется первый член разложения по z для выражений (2.2). Такое приближение будет справедливым при условии

$$|z^2|k^2 \ll 1 \quad (3.1)$$

Нетрудно показать, что условие (3.1) выполняется для реальных электропроводящих пластин, толщина которых на порядок больше межмолекулярных расстояний и при ограничении $k^2 \omega^2 \ll 1$, принятом в теории колебаний пластин. В этом смысле можно считать, что условие (3.1) согласуется с условием $k^2 \omega^2 \ll 1$, использованным при получении правой части уравнения движения пластинки (1.5).

В приближении (3.1), а также при пренебрежении токами смещения по сравнению с токами проводимости выражения (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} e_{0z} &= -\frac{4\pi z h^2 \nu_0 h}{c^2} H_0 \omega_0, & e_{0z}^{(1)} &= -\frac{4\pi z h^2 \nu_0 h}{c^2} H_0 \omega_0 \exp \nu_0 (h - z) \\ h_{0z} &= -\frac{4\pi z \omega^2}{c^2} z H_0 \omega_0, & h_{0z}^{(1)} &= -\frac{4\pi z \omega^2 h}{c^2} H_0 \omega_0 \exp \nu_0 (h - z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$e_{0z} = -\frac{4\pi z k \omega}{c} \left(1 + \frac{i\omega}{\gamma}\right) z H_0 \omega_0, \quad e_{0z}^{(1)} = -\frac{4\pi z \omega k h}{c^2} H_0 \omega_0 \exp \nu_0 (h - z)$$

$$\delta = 4\pi z \nu_0 h \cdot h^2$$

Характеристическое уравнение (2.4) приводится к виду

$$Dk^4 - 2\gamma h \omega^2 = \frac{2h^2 \omega^2}{c^2} H_0^2 \quad (3.3)$$

Интересно отметить, что, несмотря на приближение (3.1), при $\sigma \rightarrow \infty$ уравнение (3.3) совпадает с уравнением (2.5).

Принимая дополнительно условие $k^2 \gg \omega^2/c^2$, уравнение (3.3) приведем к следующему безразмерному виду:

$$\theta^4 + \alpha(1 + \beta)\theta^2 + \theta + \alpha = 0 \quad (3.4)$$

где

$$\theta = \frac{i\omega}{\Omega_0}, \quad \Omega_0^2 = \frac{Dk^4}{2\gamma h}, \quad \beta = \frac{H_0^2}{4\pi c^2 k h}, \quad \alpha = \frac{4\pi z k h}{\Omega_0}$$

Численные результаты показывают, что частота колебаний пластинки ($1/\theta$) при $\alpha \gg 1$, что заведомо выполняется для хорошо проводящих мате-

риалов, слабо зависит от α и ее можно вычислить для случая $\alpha \rightarrow \infty$ ($\sigma \rightarrow \infty$). Коэффициент затухания ($-\text{Re} \theta$) с увеличением напряженности магнитного поля (с увеличением β) увеличивается, достигая максимума при определенном значении β , затем уменьшается и в пределе стремится к нулю при $\beta \rightarrow \infty$. В табл. 1 приводятся некоторые значения безразмерных коэффициентов затухания и частоты колебаний пластинки при $\beta = 1$.

Таблица 1

α	$\text{Re } \theta$	$\text{Im } \theta$
0	0	1
0,01	-0,005	1
0,1	-0,05	0,990
10	-0,0125	0,7074
100	-0,0013	0,7071
∞	0	0,7071

4. Решение задач колебаний пластинки значительно упрощается применением гипотезы магнитоупругости тонких тел [2]. Для частной задачи колебаний пластинки в продольном магнитном поле, рассматриваемой в настоящей работе, применение указанных гипотез означает, что, наряду с гипотезой Кирхгофа, предполагается неизменность продольной компоненты возбужденного электрического поля по толщине пластинки

$$e_y = \varphi(y, t) \quad \text{при} \quad |z| \leq h \quad (4.1)$$

Используя (4.1) в уравнениях (1.1) и осредняя их по толщине пластинки так, как это делается в [2], получим

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} \\ h_x &= \frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) z \\ \epsilon_x &= -\frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} z - 2 \frac{H_0}{c} z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь токи смещения пренебрежены по сравнению с токами проводимости, h_x^+ , h_x^- — значения компоненты h_x при $z = \pm h$, подлежащие определению в ходе решения задачи.

Подстановкой (4.2) в (1.5) с учетом (1.6) уравнение движения пластинки приведет к виду

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^4} + 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{H_0}{4\pi} (h_x^+ - h_x^-) \quad (4.3)$$

Рассматривая (4.2) и (4.3) совместно с уравнениями электродинамики для вакуума и граничными условиями (1.3) и (1.4) и представляя искомые функции в виде (2.1), легко получить решение задачи. Указанное решение в точности совпадает с выражениями для компонент электромагнитного поля (3.2) и характеристическим уравнением (3.3). Это обстоятельство еще раз указывает, что гипотеза магнитоупругости тонких тел справедлива с точностью $|\chi^2|/h^2 \ll 1$.

В работе [8] предложены допущения о характере изменения электромагнитного поля в вакууме вблизи от поверхностей пластинки $z = \pm h$, которые в сочетании с гипотезами магнитоупругости тонких тел еще более упрощают решение задачи магнитоупругих колебаний. Эти допущения для данной задачи следующие:

$$\begin{aligned} h_1^{(1)} &= h_1^{(2)}(y, t) \quad \text{при} \quad h < z < h + l \\ h_1^{(2)} &= h_1^{(1)}(y, t) \quad \text{при} \quad -h - l < z < -h \\ e_y^{(1)}(h + l) &= e_y^{(2)}(h), \quad e_z^{(1)}(-h - l) = e_z^{(2)}(-h) \end{aligned} \quad (4.4)$$

где l — некоторый характерный размер (в частности, длина полуволны [8]).

Исключая компоненту $e_z^{(1)}$ из уравнений (1.2), усредняя полученные уравнения по толщине l [8] и используя граничные условия (1.3), найдем

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) совместно с уравнениями (4.2) полностью замыкают уравнения задачи магнитоупругих колебаний.

Исключая функцию ψ из (4.2) и (4.5), рассматриваемую задачу приведем к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\pi h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{H_0}{4\pi} \Phi, \quad (\Phi = h_1^+ - h_1^-) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{2}{c} \left(-\frac{H_0}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{c}{8\pi k} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Представляя функции Φ и φ в виде (2.1), получим уравнение, определяющее частоты колебаний,

$$Dk^4 - 2\pi h \omega^2 = \frac{2H_0^2 H_0^2}{c^2 (4\pi^2 \omega^2 h_0 + 4\pi)} \quad (4.7)$$

Уравнение (4.8) совпадает с уравнением (3.3), если принять $\omega = \chi^{-1}$, что при пренебрежении ω^2/c^2 по сравнению с k^2 эквивалентно равенству $k = k^{-1}$.

Таким образом, допущения (4.4) в сочетании с гипотезой магнитоупругости тонких тел приводят к решению системы двух уравнений с дв

м неизвестными (4.6), где за характерный размер λ следует принять длину поперечной волны.

Это обстоятельство позволяет решать задачу магнитоупругих колебаний также для пластины с конечными размерами. В этом случае решения системы (4.6) должны удовлетворять граничным условиям на торцах пластинки как для прогиба w , так и для функции Φ .

В частности, для жестко-заземленного либо шарнирно-опертого края можно принять $\Phi=0$, так как решение задачи бесконечной пластинки показывает, что компонента h прямо пропорциональна производной по t .

Рассмотрим для примера колебания пластинки шириной $2a$ ($-a \leq y \leq a$) с шарнирно-опертыми краями. Длина пластинки произвольна, так как колебания не зависят от координаты x (цилиндрический изгиб).

Граничные условия принимаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} w(a) - w(-a) = 0, \quad \Phi(a) - \Phi(-a) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(a) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(-a) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Система уравнений (4.6) при граничных условиях (4.8) имеет решение следующего вида:

$$w = w_1(t) \sin \frac{m\pi y}{a}, \quad \Phi = \Phi_1(t) \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.9)$$

Следовательно, для характерного размера λ необходимо принять (λ зависит от длины волны)

$$\lambda_m = a/(m\pi) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

В этом случае уравнение, определяющее частоты колебаний для каждой волны при условии $\omega^2/c^2 \ll k^2$, приводится к виду

$$\beta_m^3 + \gamma_m(1 - \beta_m) \beta_m^2 - \beta_m + \gamma_m = 0 \quad (4.10)$$

где

$$\beta_m = \frac{i\omega_m}{\omega_{0m}}, \quad \gamma_m = \frac{D}{2\pi h} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2, \quad \beta_m = \frac{aH_0^2}{4\pi^2 c^2 m h}, \quad \gamma_m = \frac{4\pi^2 z h m}{a \omega_{0m}}$$

Уравнение (4.10) отличается от характеристического уравнения (3.4) для бесконечной пластинки тем, что волновые числа (k) принимают определенные дискретные значения.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 15 VI 1976

Մ. Վ. ԲԵԼՍԵԿՅԱՆ

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԿԵԼԵՍԱԿԱՆ ԳԵՇՏՈՒՄ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱԿԱՆ
ՍԱԿԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԳԻՐԻ ԻՄՈՒԿ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գիտարկվում է վերջավոր էլեկտրահաղորդականություն ունեցող անվերջ սալի տատանումների մաղնիսաառաձգականության խնդիրը երկաշնական մաղնիսական դաշտի առկայության զեպրում: Խնդրի լուծումը բերվում է սյնի գեպրի համար, երբ ալիքները տարածվում են մաղնիսական դաշտի շարվածության վեկտորին ուղղահայաց հարթությունում:

Քննարկվում է մաղնիսաառաձգականության խնդիրների լուծման համար օգտագործվող սարքեր մոտավորությունների ճշտությունը: Բերվում է եզրերով նոդակապրեն ճենված սալի մաղնիսաառաձգական տատանումների խնդրի լուծումը:

ON THE VIBRATION PROBLEM FOR AN ELECTROCONDUCTING
PLATE IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

M. V. BELUBEKIAN

S u m m a r y

The magnetoelastic vibration problem for an infinite plate with finite electric conductivity in the presence of the longitudinal magnetic field is considered. The solution of the problem is given for the case where waves propagate in the plane perpendicular to the magnetic field vector.

Accuracy of different approximations used in solving magnetoelastic problems is discussed. The approach to solving the problem for the case of plates with finite dimensions is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kaliski S. Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections. Proc. vibrat. problems, 1962, vol. 3, No. 4.
2. Ամբարյումյան Ս. Ա., Բաղդասարյան Դ. Է., Եսլսեկյան Մ. Վ. Կ տրեքմերայն շաճաքե մաղնիտուրուքեյն յոմաճայնի պլատինայն. ԻՄՄ, 1971, տ. 35, արք. 2.
3. Ամբարյումյան Ս. Ա., Բաղդասարյան Դ. Է., Եսլսեկյան Մ. Վ. Օրն սրայնայն մաղնիտուրուքեյն տոնկայն պլատին. ԻՄՄ, 1973, տ. 39, № 5.
4. Ամբարյումյան Ս. Ա. Օ քոճորայն վոքրոքաք շաճաքեյն ու քոճորայն էլեքտրոմաղնիտուրուքեյն տոնկայն տեղ. ՄԴԴ, 1974, № 2.
5. Բաղդասարյան Դ. Է., Մքրչյան Ս. Վ. Օ քոճորայնայն քոճորայն պլատին ու քոճորայն մաղնիտայն դաշտ. Իլլ. ԱՊ Արմ. ՍՍՐ, Մեխանիկա, 1973, տ. XXVIII, № 1.
6. Եսլսեկյան Մ. Վ. Սլոճայն քոճորայն էլեքտրիկայն շաճաքեյն ու շաճաքեյն էլեքտրոմաղնիտուրուքեյն. Դոքա. ԱՊ Արմ. ՍՍՐ, 1973, տ. VI, № 5.
7. Եսլսեկյան Մ. Վ. Կ սրայնայնայն մաղնիտուրուքեյն տոնկայն պլատին. Իլլ. ԱՊ Արմ. ՍՍՐ, Մեխանիկա, 1974, տ. XXVII, № 2.
8. Եսլսեկյան Մ. Վ. Կ շաճաքեյն քոճորայն տոնկայն պլատին. Իլլ. ԱՊ Արմ. ՍՍՐ, Մեխանիկա, 1973, տ. XXVIII, № 2.

В. В. МАДОРСКИЙ, Ю. А. УСТИНОВ

СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Применение в акустике пьезоэлектрических пластин и оболочек, работающих в широком диапазоне частот, требует решения пространственных задач электроупругости. Как известно из классической теории упругости [1, 2], один из основных этапов построения таких решений связан с определением корней соответствующих дисперсионных уравнений. Так в работе [3] было получено дисперсионное уравнение для стационарных волн в плоской пьезополупроводниковой пластине, лицевые поверхности которой не электродированы и свободны от внешних условий, а сама пластина помещена в вакуум. Путем приближенного решения дисперсионного уравнения найдены зависимости фазовой скорости от частоты для первых двух нижайших мод. Аналогичная задача о распространении поперечных ультразвуковых волн была рассмотрена в [4]. Для круглого пьезоактивного волновода вещественные корни дисперсионного уравнения для нормальных волн осесимметричного типа исследованы в [5].

В настоящей работе проводится численный и качественный анализ вещественных и комплексных корней дисперсионного уравнения для симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины, поляризованной по толщине, лицевые поверхности которой покрыты электродами бесконечно малой толщины и электроды закорочены. Для малых частот с помощью теории возмущений получены аналитические разложения корней. Для больших частот корни исследованы на ЭВМ.

1. Рассмотрим пластину толщиной $2h$, длиной $2a$. Введем прямоугольную систему координат (x_1, x_2, x_3) , причем ось ox_3 совпадает с направлением оси поляризации. Основываясь на соотношениях [2], уравнения колебаний пьезопластины в плоскости x_1, ox_2 можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_2} - \rho \omega^2 u_1 &= 0 \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} - \frac{\sigma T_{23}}{\partial x_2} - \rho \omega^2 u_2 &= 0 \\ \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_3}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где T_{ik} , u_i , D_i — компоненты напряжения, механического смещения, электрической индукции, соответственно, ρ — плотность, ω — частота.

Линейные пьезоэлектрические уравнения для пьезоэлектрического материала класса C_{66} имеют вид:

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - c_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & D_1 &= e_{15} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\
 T_{22} &= c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{32} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & D_2 &= e_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\
 T_{33} &= c_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & T_{13} &= c_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь c_{mn} — упругие постоянные в матричном обозначении, e_{mn} — пьезокоэффициенты, ε_{mn} — диэлектрические проницаемости, φ — потенциал электрического поля, связанный с вектором напряженности соотношением $E = -\text{grad } \varphi$. Будем считать, что на лицевых поверхностях пластины при $x_3 = \pm h$ заданы следующие граничные условия:

$$T_{i3} = 0, \quad \varphi = 0 \quad (i = 1, 3) \quad (1.3)$$

Для получения дисперсионного уравнения симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины необходимо решить систему уравнений (1.1) совместно с граничными условиями (1.3).

Введем безразмерные координаты и величины по формулам

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \zeta = \frac{x_3}{h}, \quad z = \frac{h}{a}, \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}$$

Запишем решение системы уравнений (1.1) для продольных нормальных волн в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= v_1(\zeta) \Phi(\xi) = a \sum_{i=1}^3 A_i h_i \beta_i \text{ch}(\beta_i \zeta) e^{j(\omega t - 2\frac{\xi}{z})} \\
 u_3 &= v_2(\zeta) \Phi(\xi) = ja \sum_{i=1}^3 A_i e_i \text{sh}(\beta_i \zeta) e^{j(\omega t - 2\frac{\xi}{z})} \\
 \varphi &= v_3(\zeta) \Phi(\xi) = ja \sum_{i=1}^3 A_i \text{sh}(\beta_i \zeta) e^{j(\omega t - 2\frac{\xi}{z})}
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где A_i — произвольные постоянные, β_i — корни бикубического уравнения

$$\beta^3 - P\beta^2 + Q\beta + R = 0 \quad (1.5)$$

$$P = N_1 \Omega^2 - N_2 z^2, \quad Q = D_1 \Omega^4 - D_2 \Omega^2 z^2 + D_3 z^4$$

$$R = -z^2 (C_1 \Omega^4 - C_2 \Omega^2 z^2 + C_3 z^4)$$

$$N_1 = c_{44} [(e_{33} + e_{31})^2 z_{31} + e_{33}^2] G, \quad D_1 = c_{34}^2 z_{33} G$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= [c_{33} (c_{11} z_{33} + c_{11} z_{11}) + c_{33} (e_{32} + e_{23})^2 + c_{13} e_{33}^2 - 2c_{11} (e_{31} e_{13} + \\
 &+ c_{13} z_{31}) - 2c_{12} e_{23} (e_{13} + e_{31}) - c_{13}^2 z_{33}] G, \quad C_1 = c_{34} e_{31}^2 G
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= c_{44} [(c_{44} + c_{33}) e_{31} + (c_{44} + c_{33}) e_{31} + (e_{31} + e_{13})^2 + 2e_{13}e_{33}] / G \\
 D_3 &= [c_{11}(c_{11}e_{33} + e_{33}^2) + c_{11}(c_{33}e_{31} + 2e_{13}e_{33}) - c_{13}^2e_{31} - 2c_{13}(c_{44}e_{31} + \\
 &+ e_{31}e_{13} + e_{13}^2) / G, \quad C_2 = [(c_{11} + c_{11}) e_{31} + e_{13}^2] e_{44} / G \\
 C_3 &= c_{11}(c_{44}e_{31} + e_{13}^2) / G, \quad G = c_{44}(e_{33}e_{31} + e_{33}^2) \\
 e_i &= \frac{(c_{11} + c_{13})(e_{33}\beta_i^2 - e_{31}\alpha^2) + (e_{31} + e_{13})(e_{33}\beta_i^2 - e_{13}\alpha^2)}{(c_{44} + c_{13})(e_{33}\beta_i^2 - e_{13}\alpha^2) - (e_{21} - e_{13})(c_{33}\beta_i^2 + c_{11}\alpha^2 - c_{44}\alpha^2)} \\
 h_i &= -\frac{(c_{44} + c_{13})e_i + (e_{31} + e_{13})}{c_{44}(\Omega^2 + \beta_i^2) - c_{11}\alpha^2}, \quad j = 1, \dots, 3
 \end{aligned}$$

Подстановка (1.4) в граничные условия (1.3) с учетом (1.2) приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений для A_i . Необходимым и достаточным условием существования решения этой системы является равенство нулю ее детерминанта

$$\begin{vmatrix}
 a_1 \operatorname{ch} \beta_1 & a_2 \operatorname{ch} \beta_2 & a_3 \operatorname{ch} \beta_3 \\
 b_1 \operatorname{sh} \beta_1 & b_2 \operatorname{sh} \beta_2 & b_3 \operatorname{sh} \beta_3 \\
 \operatorname{sh} \beta_1 & \operatorname{sh} \beta_2 & \operatorname{sh} \beta_3
 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

где

$$a_i = (-c_{13}b_i\alpha^2 + c_{33}e_i + e_{33})\beta_i, \quad b_i = c_{44}(h_i\beta_i^2 - e_i) + e_{13}$$

Уравнение (1.6) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^3 M_n \operatorname{cth} \beta_n = 0 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) есть дисперсионное уравнение для симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины. В классической теории упругости оно известно как уравнение Релея-Ламба, корни которого определяют связь между частотой Ω и полным числом α . Для фиксированного Ω уравнение (1.7) имеет счетное множество корней, каждый из которых определяет точку на плоскости $\Omega(\alpha)$.

2. Разобьем предварительно корни уравнения (1.7) на две группы: вещественные и комплексные. Остановимся вначале на исследовании поведения вещественных корней при малых Ω и α . Поскольку $\alpha=0$ является двукратной точкой спектра при $\Omega=0$, разложим α^2 , $v_k(\xi)$ в ряд по степеням Ω^2

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= \beta_1^2 \Omega^2 + \dots \\
 v_k(\xi) &= v_k^{(0)} + \Omega^2 v_k^{(1)} + \dots \quad (k=1, 2, 3)
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.1—1.4) приводит к некоторой рекуррентной системе, после интегрирования которой получаем

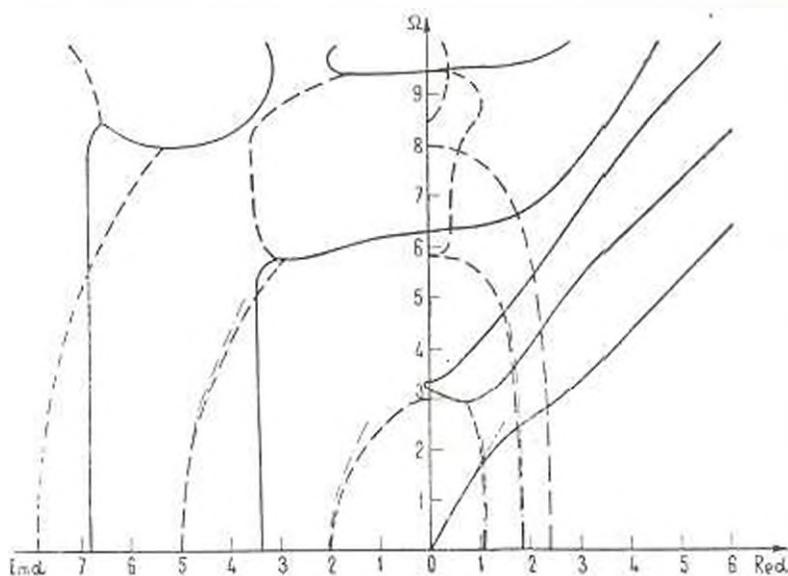
$$\begin{aligned}
 \varphi_1^{(0)} &= c_{00}, & \varphi_2^{(0)} &= \varphi_3^{(0)} = 0 \\
 \varphi_1^{(1)} &= -\frac{c_{11}}{c_{33}} \beta_1^2 c_0 \frac{\Omega^2}{2}, & \varphi_2^{(1)} &= \frac{c_{11}}{c_{33}} \beta_2^2 c_0^2, & \varphi_3^{(1)} &= 0 \quad (2.2) \\
 \beta_1^2 &= \frac{c_{11}c_{33}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2} > 0
 \end{aligned}$$

Здесь c_0 — произвольная постоянная, которую можно считать, например, равной 1.

Из формул (2.1) и (2.2) видно, что в окрестности точки (0,0) существуют два вещественных корня

$$\alpha = \pm \beta_1 \Omega \quad (2.3)$$

которые определяют первую дисперсионную кривую на фиг. 1. При увеличении частоты фазовая скорость $V = \frac{\Omega}{\alpha}$ этой дисперсионной ветви вещественных корней стремится сверху к фазовой скорости поверхностной волны Релея. Так для материала ЦТС-19 она равна 1.06.



Фиг. 1.

Начало остальных дисперсионных кривых определяется из условия $\alpha = 0$. Как показано в [6], в этом случае определитель граничных условий (1.6) распадается на два трансцендентных уравнения:

$$\begin{aligned}
 \sin \Omega &= 0, & \operatorname{tg} \frac{\Omega}{b} &= \Omega \frac{c_{13}^2 c_{11} + c_{33}^2}{c_{33}} \\
 b &= \frac{c_{11}^2 c_{33} + c_{33}^3}{c_{41}^2 c_{33}}
 \end{aligned}$$

Эти два набора корней и определяют начальные точки вещественных кривых на оси Ω .

Теперь нам необходимо рассмотреть комплексные корни $\alpha_n = z_n + j y_n$. Точки пересечения комплексных ветвей с плоскостью $\Omega = 0$ могут быть найдены простым приравниванием $\Omega = 0$ в уравнениях (1.5), (1.6). При этом оказалось, что в верхней полуплоскости существуют три ветви комплексных корней. Первая ветвь совпадает с мнимой осью, при этом асимптотические значения корней для материалов типа ЦТС и PZT следующие:

$$z_n = \frac{n\pi}{c_{11}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

где $\theta_1^2 = \left(\frac{2}{c_{11}}\right)^2$ — вещественный корень уравнения (1.5) при $\Omega = 0$.

Для материалов системы ЦТС мнимые корни также можно определить по формуле

$$y_n = n \sqrt{\frac{15 \varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11} + c_{44}^2}}$$

Ошибка при этом не превышает 3%.

Две другие ветви симметричны относительно мнимой оси. Положение правой ветви описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} k_2 z_n + k_1 y_n &= r_n \\ k_1 z_n - k_2 y_n &= p_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$r_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}, \quad p_n = \frac{1}{2} \operatorname{arcsch} \left(\frac{\operatorname{Im} M_3}{2 \operatorname{Re} M_3} - \frac{\operatorname{Re} M_3}{2 \operatorname{Im} M_3} \right)$$

В (2.5) $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{\pi}{\alpha}$ — корень бикубического уравнения (1.5) при $\Omega = 0$, лежащий в первом квадранте, $M_3 = a_3 (b_1 - b_2)$. Формулы (2.4) и (2.5) уже при $n = 1$ определяют значения корней с погрешностью, не превышающей 2%.

Можно определить аналитические выражения комплексных и мнимых корней для малых частот. Воспользуемся для этого методом возмущения [7]. Считая, что величина Ω^2 является достаточно малой, разложим по степеням этой величины корни уравнения (1.5) и корни z_n , z_n , y_n — дисперсионного уравнения. После некоторых преобразований получим формулу для мнимых корней

$$y_n(\Omega) = y_n(0) + \frac{A_n \Omega^2}{2 c_{11} \pi} \quad (2.6)$$

и систему двух уравнений относительно z_n, y_n для комплексных корней

$$\begin{aligned} (k_1^2 - k_2^2)(z_n^2 - y_n^2) - 4k_1 k_2 z_n y_n - f_n \Omega^2 - r_n^2 - p_n^2 \\ k_1 k_2 (z_n^2 - y_n^2) - (k_1^2 - k_2^2) z_n y_n - \frac{\xi_n}{2} \Omega^2 - r_n p_n \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$f_i = D_i \frac{N_i^2 \Omega^4 - D_i^2 \Omega^2 + C_i}{3\Omega^4 - 2N_i^2 \Omega^2 - D_i^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Подставляя конкретные значения модулей керамики можно определить характер поведения комплексных и мнимых корней при малых Ω . Для ЦТС-19

$$\begin{aligned} z_1(\Omega) &= 3.36(1 - 0.003 \Omega^2) & z_2(\Omega) &= 1.18(1 - 0.07 \Omega^2) \\ z_3(\Omega) &= 6.72(1 - 0.0008 \Omega^2) & z_4(\Omega) &= 1.798(1 - 0.0055 \Omega^2) \\ y_1(\Omega) &= 2.02(1 - 0.06 \Omega^2) & y_2(\Omega) &= 3.92(1 - 0.01 \Omega^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что величины $z_n(\Omega), y_n(\Omega)$ слабо зависят от частоты. Поэтому при малых частотах они могут быть аппроксимированы корнями из уравнений (2.4) и (2.5).

Поведение комплексных ветвей вблизи плоскостей $\text{Im}z=0$ или $\text{Re}a=0$ может быть исследовано с помощью теоремы Оно [8]: каждый минимум и максимум вещественных или мнимых ветвей в (Ω, x) или (Ω, y) плоскостях, соответственно, есть точки пересечения с комплексными ветвями. Таким образом, когда начальные и конечные точки комплексных, мнимых и вещественных ветвей определены, все ветви могут быть рассчитаны и любая часть спектра может быть построена.

3. На фиг. 1 изображены дисперсионные кривые для пьезокерамики ЦТС-19, полученные численным решением уравнений (1.5), (1.6). Вещественные и чисто мнимые значения α нанесены сплошными линиями, причем чисто мнимые корни отложены слева от начала координат. Действительные и мнимые части комплексных ветвей нанесены прерывистыми линиями, при этом ось OX является осью действительных значений α , а ось OY — мнимых значений α . По оси OZ отложены значения безразмерной частоты Ω .

Из фиг. 1 видно, что при малых частотах ($\Omega \leq 2$) корни уравнения (1.7) хорошо аппроксимируются их асимптотическими значениями из формул (2.3) и (2.8), которые на фигуре обозначены штрих-пунктирными линиями, причем частотная область применимости этих формул для мнимых и комплексных корней быстро увеличивается с возрастанием порядкового номера корня.

Необходимо отметить, что вещественные и комплексные дисперсионные кривые для пьезоэлектрических материалов качественно не отличаются относительно аналогичных ветвей для изотропных материалов [9], но

смещены на малую величину, зависящую от констант пьезокерамики. Однако, появление почти вертикальной ветви, соответствующей чисто минимым корням, можно объяснить только пьезоэлектрической связью.

На основе дисперсионных кривых для каждого Ω можно определить фазовые и групповые скорости распространения возмущений в плоском волновом поле, причем последняя, как известно, характеризует перенос энергии, рассчитать упругие и пьезоэлектрические модули керамики. Также дисперсионные кривые могут быть использованы для изучения механизмов внутреннего трения и измерения постоянных затухания для данного материала [9].

Модули пьезокерамики ЦТС-19 были взяты из [10].

$$\begin{aligned} c_{11}^E &= 11.2 \cdot 10^{10} \frac{\text{к}}{\text{м}^2} & e_{31} &= -3.4 \frac{\text{к}}{\text{м}^2} & \epsilon_{33}^S &= 82.747 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \\ c_{13} &= 6.22 & e_{32} &= 15.1 & \epsilon_{11} &= 72.57 \\ c_{33} &= 10.6 & e_{15} &= 9.45 & & \\ c_{44} &= 2.49 & & & & \end{aligned}$$

Ростовский государственный
университет

Поступила 10 III 1976

Վ. Վ. ՄԱՒՈՐԱԿԻ, Յու. Ա. ԱՐՄՏԻՆՈՎ

ՊԻԵՉՈՒԷԼԵԿՏՐՈՒԿԱՆ ՍԻՄՄԵՏՐԻԿ ՍԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Վ

Աշխատանքում բերված են ըստ հաստոցյան բևեռացված պիեզոէլեկտրական սալի սիմետրիկ տատանումների դիսպերսիոն հավասարման արմատների թվային և որակական վերլուծության արդյունքները: Սալի երեսային մակերևութային լիովին ծածկված են անվերջ դուրր հաստոցյամբ էլեկտրոդներով և էլեկտրոդները կարճեցված են: Տրված Ω հաճախականության համար ցույց է տրված երկու տեսակի՝ իրական և կոմպլեքս արմատների դոյուբլյունը: Փոքր Ω -ների համար զրոգման տեսության օգնությամբ ստացված են արմատների անալիտիկ արտահայտությունները: Մեծ Ω -ների համար արմատները ուսումնասիրված են էՉՄ-ի վրա:

Թվային արդյունքները ՅՏՄ—79 սեպտեմբերի էլեկտրական կերամիկայի համար բերված են 1-ին նկարում:

SYMMETRIC VIBRATIONS OF PIEZOELECTRIC PLATES

V. V. MADORSKY, U. A. USTINOV

S u m m a r y

The results of numerical research of the dispersion equation for symmetric vibrations of a piezoelectric plate, poled in the thickness direction, are presented.

The faces of the plate are traction-free and completely coated with electrodes which are short-circuited.

Besides, real, imaginary, complex branches for low frequencies are investigated. The numerical results are given for ferroelectric ceramics ЦТС-19.

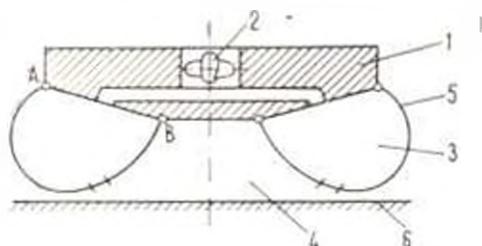
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., ГИИТА. 1965.
2. Tiersten H. F. Wave propagation in an infinite piezoelectric plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1963, 35, 2.
3. Конаренко И. Я. и другие. Электронное затухание и усиление волн Лэмба в пьезополупроводниках. УФЖ. 1971, 16, 10.
4. Кучеров И. Я., Островский И. В. Взаимодействие поперечных ультразвуковых волн с пространственными зарядами в пластинках пьезополупроводников. ФГТ. 1970, 12, 6.
5. Ивлиев И. Ф., Касаткина Б. А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном веществе. Дефектоскопия. 1975, 4.
6. Tiersten H. F. Thickness vibrations of piezoelectric plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1963, 35, 1.
7. Вайнберг М. М., Тренозин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Изд. Наука, 1969.
8. Kaul R. K., Mindlin R. D. „Frequency spectrum of monoclinic crystal plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1962, 34, 12.
9. «Физическая акустика» под ред. У. Мезона. т. 1, часть А. М., Изд. Мир. 1966.
10. Смажневская Е. Г., Фельдман И. В. Пьезоэлектрическая керамика. М., Изд. Советское радио, 1971.

Ա. Ա. ԿԱԽՅԱՆ

ДЕФОРМАЦИИ ГИБКОГО ОГРАЖДЕНИЯ АППАРАТА
 НА ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ДАВЛЕНИЯ

1. Аппараты на воздушной подушке (грузовые автомобили, суда) являются новым и перспективным транспортным средством. Обычная схема современных аппаратов на воздушной подушке (АВП) дана на фиг. 1. Здесь: 1—корпус АВП, 2—вентилятор, 3—ресивер, 4—воздушная подушка, 5—гибкое ограждение, 6—экран [1].



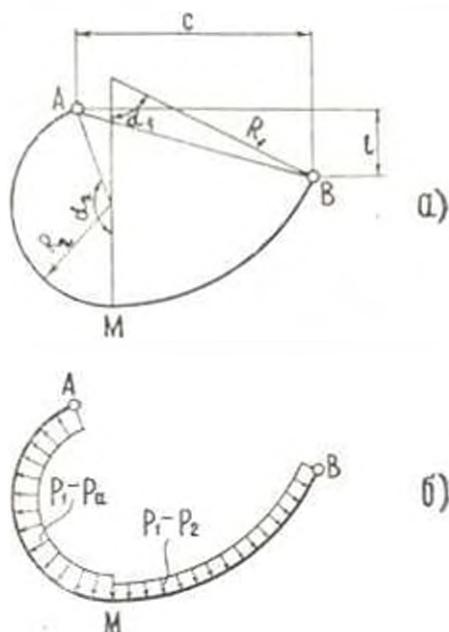
Фиг. 1.

Среди различных проблем, связанных с проектированием и эксплуатацией АВП, важное место занимает проблема их устойчивости и колебаний [2]. Так как при ее решении необходимо учитывать податливость гибкого ограждения, то возникает задача определения деформаций гибкого ограждения, вызываемых изменениями давления в ресивере и подушке. Ниже рассматривается эта задача: прежде всего, определяется форма гибкого ограждения в равновесном положении АВП, а затем находятся деформации гибкого ограждения при изменении давления.

Будем считать, что даны размеры b и c , а также полная длина дуги оболочки L (фиг. 2а). При расчете параметров, определяющих форму гибкого ограждения, ограждение рассматривается как цилиндрическая безмоментная нерастяжимая оболочка, вес гибкого ограждения не учитывается. При этом оболочка образуется сопряжением двух круговых цилиндров различных радиусов R_1 и R_2 . Границе между цилиндрами соответствует образующая, в которой касательная плоскость горизонтальна (см. точку M). Давление воздуха в ограждении обозначается через p_0 , причем величина p_0 в равновесном положении АВП обозначена через p_{00} , а избыточное давление в равновесном положении АВП — через p_{00}^* . Через p_1 , p_2 и p_{00}^* обозначены соответствующие величины для воздушной подушки, а через $\bar{p} = (p_2 - p_1)/(p_1 - p_2)$ — коэффициент перепада давления между подушкой и ресивером. Все рассуждения будут относиться к элементу оболочки, размер которого вдоль образующей равен единице. В общем случае внутри элемент-

та действует давление p_1 , а внешнее давление имеет два значения — в правой части давление p_2 , а в левой — атмосферное давление (p_a) (фиг. 2б).

2. Рассмотрим форму гибкого ограждения в равновесном состоянии АВП (когда $p_{20} > p_a$), которая определяется четырьмя параметрами: радиусами правой и левой частей R_{10} и R_{20} , а также углами α_{10} и α_{20} . Коэффициент давления в равновесном состоянии АВП будет $p = (p_{20} - p_a) / (p_{10} - p_a) = p_2^- / p_1^+$.



Фиг. 2.

Из теории безмоментных оболочек имеем связь между окружным нормальным напряжением σ с давлением внутри элемента p и радиусом кривизны R

$$\sigma = pR \quad (2.1)$$

По условию сопряжения цилиндров напряжения слева и справа точки M равны, то есть

$$(p_{10} - p_a) R_{20} = (p_{20} - p_{21}) R_{10} \quad (2.2)$$

Вводя обозначения $a_0 = 1 - p_a$, $c_1 = l/L$, $c_2 = c/L$, получим два уравнения для определения углов α_{10} и α_{20}

$$a_0 (1 - \cos \alpha_{20}) + \cos \alpha_{10} - 1 = c_1 (\alpha_{10} + a_0 \alpha_{20}) \quad (2.3)$$

$$a_0 \sin \alpha_{20} + \sin \alpha_{10} = c_2 (\alpha_{10} + a_0 \alpha_{20})$$

и два уравнения, определяющие радиусы R_{10} и R_{20}

$$R_{10} = l / (\alpha_{10} - a_0 \alpha_{20}), \quad R_{20} = a_0 l / (\alpha_{10} + a_0 \alpha_{20}) \quad (2.4)$$

3. При отклонениях от равновесного состояния АВП, когда в ресивере и в воздушной подушке приращения давления соответственно равны Δp_1 и Δp_2 , коэффициент давления определяется

$$\bar{p} = \frac{p_2 - p_a}{p_1 - p_a} = \frac{p_{20} + \Delta p_2}{p_{10} + \Delta p_1}$$

а в линейном приближении

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}_0}{p_{20}} [p_{20} + (\Delta p_2 - \bar{p}_0 \Delta p_1)]$$

Изменение коэффициента давления будет

$$\Delta \bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_0 = \frac{\bar{p}_0}{p_{20}} (\Delta p_2 - \bar{p}_0 \Delta p_1) \quad (3.1)$$

В неравновесном состоянии АВП вместо (2.3) будет

$$\begin{aligned} a(1 - \cos \alpha_2) + \cos \alpha_1 - 1 &= c_1(\alpha_1 + a\alpha_2) \\ a \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 &= c_2(\alpha_1 + a\alpha_2) \end{aligned}$$

где $a = 1 - \bar{p} = a_0 - \Delta \bar{p}$, а вместо (2.4) будет

$$R_1 = L/(\alpha_1 + a\alpha_2), \quad R_2 = aL/(\alpha_1 + a\alpha_2)$$

Полагая

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{10} + \Delta \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \alpha_{20} + \Delta \alpha_2 \\ R_1 &= R_{10} + \Delta R_1 \\ R_2 &= R_{20} + \Delta R_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

и считая отклонения малыми по сравнению с равновесными значениями, получим с учетом (2.3) два уравнения для определения приращения углов $\Delta \alpha_1$ и $\Delta \alpha_2$

$$(\sin \alpha_{10} + c_1) \Delta \alpha_1 - a_0 (\sin \alpha_{20} - c_1) \Delta \alpha_2 = (\cos \alpha_{20} + c_1 \alpha_{20} - 1) \Delta \bar{p}$$

$$(\cos \alpha_{10} - c_2) \Delta \alpha_1 + a_0 (\cos \alpha_{20} - c_2) \Delta \alpha_2 = (\sin \alpha_{20} - c_2 \alpha_{20}) \Delta \bar{p}$$

и два соотношения, определяющие приращения радиусов ΔR_1 и ΔR_2

$$\Delta R_1 = (\alpha_{20} \Delta \bar{p} - \Delta \alpha_1 - a_0 \Delta \alpha_2) R_{10} (\alpha_{10} + a_0 \alpha_{20})$$

$$\Delta R_2 = (\alpha_{20} \Delta \bar{p} - \Delta \alpha_1 - a_0 \Delta \alpha_2) R_{20} (\alpha_{10} + a_1 \alpha_{20}) - R_{10} \Delta \bar{p}$$

Вводя обозначения

$$K_1^* = \frac{1 - (c_1 + c_2 a_{20}) \sin \alpha_{20} + (c_1 \alpha_{20} - c_2 - 1) \cos \alpha_{20} + c_2}{\sin(\alpha_{10} + a_{20}) + c_1 (\cos \alpha_{20} - \cos \alpha_{10}) - c_2 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20})}$$

$$K_2^R = \frac{c_2 (\cos \alpha_{20} - \alpha_{20} \sin \alpha_{10} - 1) - c_1 \sin \alpha_{20} - \cos (\alpha_{10} + \alpha_{20}) - (c_1 \alpha_{20} - 1) \cos \alpha_{10}}{[\sin (\alpha_{10} - \alpha_{20}) + c_1 (\cos \alpha_{20} - \cos \alpha_{10}) - c_2 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20})] a_0} \\ k_1^R = (\alpha_{20} - k_1^R - a_0 k_2^R) / (\alpha_{10} + a_0 \alpha_{20})^2 \quad (3.3) \\ k_2^R = (\alpha_{20} - k_1^R - a_0 k_2^R) a_0 / (\alpha_{10} + a_0 \alpha_{20})^2 - 1 / (\alpha_{10} + a_0 \alpha_{20})$$

и учитывая (3.1), получаем

$$\Delta \alpha_1 = k_1^R \frac{\bar{p}_0}{p_{20}} (\Delta p_2 - \bar{p}_0 \Delta p_1) \\ \Delta \alpha_2 = k_2^R \frac{\bar{p}_0}{p_{20}} (\Delta p_2 - \bar{p}_0 \Delta p_1) \quad (3.4) \\ \Delta R_1 = k_1^R L \frac{\bar{p}_0}{p_{20}} (\Delta p_2 - \bar{p}_0 \Delta p_1) \\ \Delta R_2 = k_2^R L \frac{\bar{p}_0}{p_{20}} (\Delta p_2 - \bar{p}_0 \Delta p_1)$$

Выражениями (3.3) и (3.4) полностью определяются искомые приращения геометрических параметров в зависимости от приращений давлений Δp_1 и Δp_2 .

4. Найдем изменение объема ресивера и уровни расположения точки M в зависимости от приращений давления. В равновесном состоянии АВП объем ресивера V_{10} можно определить по выражению $V_{10} = F_{10} \cdot b$, в котором F_{10} — площадь поперечного сечения ресивера при равновесном состоянии АВП

$$F_{10} = \frac{1}{2} [R_{10}^2 (\alpha_{10} - \sin \alpha_{10}) + R_{20}^2 (\alpha_{20} - \sin \alpha_{20})] + \\ + \frac{1}{2} R_{10} R_{20} |\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20} - \sin (\alpha_{10} - \alpha_{20})|$$

b — длина осевой линии гибкого ограждения (по периметру). В неравновесном состоянии АВП площадь поперечного сечения ресивера будет

$$F_1 = \frac{1}{2} [R_1^2 (\alpha_1 - \sin \alpha_1) + R_2^2 (\alpha_2 - \sin \alpha_2)] + \\ + \frac{1}{2} R_1 R_2 |\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin (\alpha_1 - \alpha_2)|$$

Приращение объема ресивера в неравновесном состоянии АВП $\Delta V_1 = \Delta F_1 \cdot b$, причем (в линейном приближении)

$$\Delta V_1 = F_1 - F_{10} - k_1^R L \frac{\bar{p}_0}{p_{20}} (\Delta p_2 - \bar{p}_0 \Delta p_1) \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned}
 k_1^F &= 1/2 (\alpha_{10} - \sin \alpha_{10}) k_1^R + 2a_0 (\alpha_{20} - \sin \alpha_{20}) k_2^R + \\
 &+ [\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20} - \sin (\alpha_{10} + \alpha_{20})] (a_0 k_1^R + k_2^R) / 2 (\alpha_{10} + \\
 &+ a_0 \alpha_{20}) + [(a_0 - 1) \cos \alpha_{10} + 1 - a_0 \cos (\alpha_{10} + \alpha_{20})] k_1^R + \\
 &+ a_0 [(1 - a_0) \cos \alpha_{20} + a_0 - \cos (\alpha_{10} + \alpha_{20})] k_2^R / 2 (\alpha_{10} + a_0 \alpha_{20})^2
 \end{aligned}$$

Изменение уровня расположения образующей М в неравновесном состоянии АВП

$$d = R_{10} (1 - \cos \alpha_{10}) - R_1 (1 - \cos \alpha_1)$$

или, в линейном приближении

$$d = k^d L \frac{\bar{p}_0}{\rho_0} (\Delta p_0 - \bar{p}_0 \Delta p_1) \quad (4.2)$$

где

$$k^d = k_1^R (\cos \alpha_{10} - 1) - (k_1^R \sin \alpha_{10}) / (a_{10} + a_0 \alpha_{20})$$

В табл. 1—3 приведены значения безразмерных коэффициентов k_1^R и k^d для значений $\bar{p}_0 = 0.25, 0.5, 0.75$.

Таблица 1

		$\bar{p}_0 = 0.25$				
α_1	α_2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.02	$-k_1^R$	0.0281	0.0202	0.0151	0.0116	0.0090
	k^d	0.1854	0.0929	0.0546	0.0352	0.0240
0.04	$-k_1^R$	0.0261	0.0194	0.0148	0.0114	0.0089
	k^d	0.1451	0.1029	0.0618	0.0404	0.0278
0.06	$-k_1^R$	0.0238	0.0185	0.0143	0.0112	0.0088
	k^d	0.1986	0.1107	0.0681	0.0451	0.0314
0.08	$-k_1^R$	0.0215	0.0175	0.0138	0.0109	0.0086
	k^d	0.1974	0.1164	0.0735	0.0495	0.0348
0.10	$-k_1^R$	0.0193	0.0164	0.0133	0.0106	0.0084
	k^d	0.1927	0.1201	0.0779	0.0533	0.0379

Таблица 2

		$\bar{p}_0 = 0.5$				
c_1		$c_2 = 0.2$	0.3	0.4	0.5	0.6
0.02	$-k_1^F$	0.0721	0.0640	0.0514	0.0406	0.0319
	k^d	0.4226	0.2651	0.1676	0.1109	0.0759
0.04	$-k_1^F$	0.0638	0.0507	0.0493	0.0395	0.0313
	k^d	0.3894	0.2617	0.1713	0.1156	0.0802
0.06	$-k_1^F$	0.0566	0.0554	0.0470	0.0383	0.0306
	k^d	0.3582	0.2559	0.1734	0.1195	0.0841
0.08	$-k_1^F$	0.0504	0.0512	0.0446	0.0369	0.0297
	k^d	0.3294	0.2485	0.1741	0.1224	0.0873
0.10	$-k_1^F$	0.0449	0.0473	0.0422	0.0354	0.0288
	k^d	0.3031	0.2398	0.1735	0.1245	0.0901

Таблица 3

		$\bar{p}_0 = 0.75$				
c_1		$c_2 = 0.2$	0.3	0.4	0.5	0.6
0.02	$-k_1^F$	0.1018	0.1588	0.1643	0.1441	0.1180
	k^d	0.5751	0.6369	0.5173	0.3786	0.2689
0.04	$-k_1^F$	0.0941	0.1446	0.1530	0.1372	0.1140
	k^d	0.5220	0.5861	0.4933	0.3716	0.2693
0.06	$-k_1^F$	0.0870	0.1320	0.1424	0.1302	0.1097
	k^d	0.4775	0.5113	0.4697	0.3633	0.2685
0.08	$-k_1^F$	0.0804	0.1207	0.1323	0.1232	0.1052
	k^d	0.4392	0.5013	0.4465	0.3539	0.2665
0.10	$-k_1^F$	0.0743	0.1105	0.1223	0.1162	0.1005
	k^d	0.4053	0.4553	0.4240	0.3436	0.2633

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила 4 II 1970

Ա. Ա. ՉԱԼՈՅԱՆ

ՈՒՊՆՅՈՒՆ, ԲԱՐՁՐԻ ՎՐԱ ԽԱՐՔԻ ՃԿՈՒՆ ՊԱՐԱՊՄԱՆ ԳԵՆՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ
ՃՆՇՄԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում են ազային բարձր վրա սարքի ճկուն պարսպման դեֆորմացիաները բարձում և ռեափեկրում մնասանների բշաղի ստատիկ փոփոխման

Р. А. ГРУНТФЕСТ, М. А. СУМБАТЯН

ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО КРЫЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТВЕРДОГО ЭКРАНА

Потенциальная теория обтекания круглого крыла в безграничной жидкости обстоятельно изложена в работах Н. Е. Кочина [1, 2]. Влияние экрана на обтекание крыла конечного размаха в рамках теории Прандтля исследовалось многими авторами [3]. В предлагаемой работе сохраняется постановка задачи, данная Н. Е. Коциным, а для изучения влияния экрана применяются асимптотические методы, позволяющие получить решение в простой форме при больших и малых значениях параметра $\lambda = h/a$ (a — радиус крыла, h — высота крыла над экраном). Особый интерес представляет область малых значений λ ввиду повышенного внимания к проблеме экранолетов.

§ 1. Постановка задачи и вывод интегрального уравнения

Рассмотрим обтекание круглого в плане крыла, поверхность которого задается уравнением $z = |x, y|$, $(x, y) \in C_1$ (C_1 — круг радиуса a). Крыло находится на расстоянии h от твердого экрана, представляющего собой горизонтальную плоскость. Скорость потока — u . Для возможности линеаризации функции f, f_x, f_z предполагаются малыми. Ввод потенциал возмущенного потока φ , получим

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \quad p = -\rho u z_x, \quad \rho - \text{плотность жидкости} \\ \varphi_z &= 0, \quad z = -h, \quad \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0, \quad z = \infty \\ \varphi_x &= -u f_x, \quad z = 0, \quad (x, y) \in C_1, \quad \varphi = 0, \quad x = -\infty \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функции φ, φ_x непрерывны в области C_2 , представляющей собой вихревую пелену, что следует из непрерывности нормальной скорости и давления p при переходе через вихревую пелену. В области C_2 , являющейся дополнением $C_1 \cup C_3$ до всей плоскости OXY , будут непрерывны потенциал φ и нормальная скорость φ_z . Известно, что в безграничной жидкости потенциал φ является нечетной функцией по z . При наличии экрана это свойство не выполняется, но возможно представление

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \quad (1.2)$$

где φ^+ и φ^- — соответственно четная и нечетная функции по z . Представление (1.2) приводит для функций φ^+ и φ^- к следующей краевой задаче

$$\Delta \varphi^+ = 0, \quad \Delta \varphi^- = 0, \quad z > 0$$

$$\varphi_2^+ - \varphi_2^- = 0, \quad z = h, \quad \varphi_2^+ + \varphi_2^- = 0, \quad z \rightarrow \infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2^- = -u f_2, \quad (x, y) \in C_1, \quad \varphi_2^- = 0, \quad (x, y) \in C_2, \quad \varphi^- = 0, \quad (x, y) \in C, \\ \varphi_2^+ = 0, \quad z = 0 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\varphi^+ = \varphi^- = 0, \quad x \rightarrow -\infty$$

Применение преобразования Фурье по переменным x, y приводит краевую задачу (1.3) к интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi^2 \lambda^2} \iint_C \gamma(u, v) K(x-u, y-v) du dv = f_2, \quad (x, y) \in C$$

$$K(x, y) = \iint_C \frac{r}{r^2} (1 - e^{-2r}) e^{-\frac{ix+iy}{r}} d\sigma_1 d\sigma_2 = \iint_C |\gamma| (1 - e^{-2|r|}) e^{-i\frac{x}{r}} d\sigma_1 \quad (1.4)$$

$$r = \sqrt{\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2}}, \quad u\gamma(x, y) = \varphi_2^- \text{ при } z = 0, \quad (x, y) \in C$$

C — единичный круг.

Знание функции $\gamma(x, y)$ позволяет в квадратурах получить потенциал Φ , но особенно просто выражается через функцию $\gamma(x, y)$ разность давлений на нижней и верхней сторонах поверхности крыла, нахождение которой представляет наибольший интерес. Имеем

$$p_u - p_b = 2i u \gamma(x, y), \quad (x, y) \in C$$

Ядро сингулярного интегрального уравнения (1.4) может быть записано в конечном виде, но применяемый в дальнейшем метод решения этого не требует.

§ 2. Решение интегрального уравнения при больших λ .

Продифференцируем уравнение (1.4) по x и запишем его в виде

$$\frac{1}{4\pi^2 \lambda} \Delta \iint_C \gamma(u, v) du dv \iint_C \frac{1 - e^{-2r}}{r} e^{-\frac{i}{\lambda}[(x-u) + iy(v-v)]} d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (x, y) \in C$$

Освобождаясь в левой части от оператора Δ , получим

$$\frac{1}{4\pi^2 \lambda} \iint_C \gamma(u, v) du dv \iint_C \frac{1 - e^{-2r}}{r} e^{-\frac{i}{\lambda}[(x-u) + iy(v-v)]} d\sigma_1 d\sigma_2 = F(x, y) + \gamma(x, y) \quad (2.1)$$

где $\gamma(x, y)$ — произвольная гармоническая в круге C функция, под-

лежащая определению, $F(x, y)$ — какое-либо частное решение уравнения Пуассона $\Delta F = f(x, y) \in C$. В дальнейшем перейдем в плоскости OXY к полярным координатам R, θ и представим функции F, f и γ с помощью рядов⁹

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(R) \cos k\theta, \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(R) \cos k\theta, \quad \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(R) \cos k\theta \quad (2.2)$$

Подстановка рядов в интегральное уравнение (2.1) после некоторых преобразований приводит к одномерным интегральным уравнениям

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^1 \gamma_k(z) dz \int_0^{\infty} (1 - e^{-2m}) J_k\left(\frac{Rz}{\lambda}\right) J_k\left(\frac{Rm}{\lambda}\right) dm = F_k(R) - \delta_k R^k \quad (2.3)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Интегральные уравнения такого вида исследовались в работах [4, 5], где даны асимптотические методы построения решения при больших и малых значениях λ . В этом параграфе остановимся на случае больших λ . Тогда ядра интегральных уравнений могут быть разложены по степеням малого параметра $1/\lambda$.

$$A_{0\gamma_0} = F_0(R) + \delta_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \gamma_0(z) \left(\frac{1}{2} - \frac{R^2 + z^2}{16\lambda^2} + O(\lambda^{-4}) \right) dz$$

$$A_{1\gamma_1} = F_1(R) - \delta_1 R = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \gamma_1(z) \left(\frac{Rz}{16\lambda^3} + O(\lambda^{-5}) \right) dz \quad (2.4)$$

$$A_{k\gamma_k} = F_k(R) - \delta_k R^k + O(\lambda^{-2k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

$$A_{k\gamma} = \int_0^1 \gamma_k(z) dz \int_0^{\infty} J_k(zm) J_k(Rm) dm$$

Решения интегральных уравнений (2.4) и постоянные δ_k также ищем в виде рядов по $1/\lambda$.

$$\gamma_k = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{kn}(R) \lambda^{-n}, \quad \delta_k = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{kn} \lambda^{-n} \quad (2.5)$$

В результате подстановки рядов (2.5) в интегральные уравнения получим (ограничимся членами порядка λ^{-1} включительно)

⁹ Здесь для простоты рассмотрен случай четной по θ функции $f(x, y)$.

$$\begin{aligned}
 A_0 \tilde{\gamma}_{00} - F_0(K) &= \tilde{\gamma}_{00}, & A_0 \tilde{\gamma}_{01} &= \tilde{\gamma}_{01} + \frac{1}{2} \int_0^1 v_{100}(\beta) d\beta \\
 A_0 \tilde{\gamma}_{02} &= \tilde{\gamma}_{02} + \frac{1}{2} \int_0^1 v_{201}(\beta) d\beta \\
 A_0 \tilde{\gamma}_{03} &= \tilde{\gamma}_{03} + \frac{1}{2} \int_0^1 v_{302}(\beta) d\beta - \frac{1}{16} \int_0^1 (R^2 - \beta^2) v_{100}(\beta) d\beta \\
 A_{110} \tilde{\gamma}_{10} &= \tilde{\gamma}_{10} R + F_1(K), & A_{11n} \tilde{\gamma}_{1n} &= \tilde{\gamma}_{1n} R, \quad n=1, 2 \\
 A_{113} \tilde{\gamma}_{13} &= \tilde{\gamma}_{13} R - \frac{R}{16} \int_0^1 v_{13}(\beta) d\beta \\
 A_{21k0} \tilde{\gamma}_{2k0} &= F_k(K) + \tilde{\gamma}_{2k0} R^k, \quad k=2, 3, \dots \\
 A_{21k} \tilde{\gamma}_{2k} &= \tilde{\gamma}_{2k} R^k, \quad k=2, 3, \dots, \quad n=1, 2, \dots, 2k
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение интегральных уравнений вида (2.6) для произвольных правых частей приведены в работе [4]. Чтобы выкладки в дальнейшем носили конкретный характер, ограничимся случаем $f(x, y) = \alpha x + \beta$, но вполне могут быть рассмотрены и другие функции. Обращение интегральных уравнений (2.6) дает следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 F_k(K) &= 0, & \tilde{\gamma}_{2k0} &= \frac{2}{\pi} \frac{(2k)!}{(2k-1)!} \tilde{\gamma}_{2k0} \frac{R^k}{1+R^2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (n \leq 2k) \\
 \tilde{\gamma}_{00} &= \frac{2}{\pi} \left(\tilde{\gamma}_{01} + \frac{\tilde{\gamma}_{00}}{\pi} \right) (1-R^2)^{-1/2}, & \tilde{\gamma}_{02} &= \frac{2}{\pi} \left(\tilde{\gamma}_{01} + \frac{\tilde{\gamma}_{02}}{\pi} + \frac{\tilde{\gamma}_{00}}{\pi^2} \right) (1-R^2)^{-1/2} \\
 \tilde{\gamma}_{03} &= \frac{2}{\pi} \left(\tilde{\gamma}_{03} - \frac{\tilde{\gamma}_{02}}{\pi} + \frac{\tilde{\gamma}_{01}}{\pi^2} + \frac{\tilde{\gamma}_{00}}{\pi} \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{3} \right) \right) (1-R^2)^{-1/2} \\
 \tilde{\gamma}_{13} &= \frac{4}{\pi} \left(\tilde{\gamma}_{13} - \frac{\tilde{\gamma}_{10}}{6\pi} \right) \frac{R}{1+R^2}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Перейдем к нахождению постоянных δ_n , входящих в решение задачи. Для этого вспомним, что ряд (2.5) дает решение не исходного уравнения (1.4), а интегрального уравнения (2.1), полученного из (1.4) дифференцированием по x . Как известно, совокупность решений исходного уравнения при этом расширяется. Для выделения решения интегрального уравнения (1.4) достаточно потребовать, чтобы ряд (2.5) удовлетворял уравнению (1.4) при $x=0$, что наложит некоторые условия на коэффициенты δ_n . Предварительно разложим ядро $K(x, y)$ в ряд по степеням $1/\lambda$. Имеем

$$K(x, y) = K_{\infty}(x, y) + \frac{\pi}{2i^2} + \frac{\pi}{2i^4} x + O(i^{-4})$$

$$K_{\infty}(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{i^2} e^{-i(x+\tau y)} d\bar{z} d\tau - \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau| e^{-i\tau y} d\tau, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

причем K_{∞} — ядро интегрального уравнения, соответствующего обтеканию крыла в безграничной жидкости. Далее

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_C \gamma^{(n)}(u, v) K_{\infty}(-u, y-v) du dv = c_n$$

$$\gamma^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{kn}^{(n)}(R) \cos k\theta, \quad n=0, 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

$$c_0 = \alpha, \quad c_2 = -\frac{1}{4} \int_0^1 \rho \gamma_{00}(\rho) d\rho = -\frac{\delta_{00}}{2\pi}, \quad c_1 = 0$$

$$c_3 = -\frac{1}{4} \int_0^1 \rho \gamma_{01}(\rho) d\rho + \frac{1}{8} \int_0^1 \rho^2 \gamma_{10}(\rho) d\rho = \frac{\delta_{10}}{3\pi} - \frac{\delta_{03}}{2\pi^2} - \frac{\delta_{01}}{2\pi}$$

Некоторые трудности доставляет нахождение четырехкратных интегралов в левых частях. Во внутреннем и внешнем двукратных интегралах производится переход к полярным координатам, а затем интегрируется по углам. В результате получим (выписано только первое из равенств (2.8))

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \rho \gamma_{2k+1,0}(\rho) J_{2k+1}(\rho r) d\rho \int_0^{\infty} r \left[J_0(yr) + 2 \sum_{n=1}^k (-1)^n J_{2n}(yr) \right] dr - \right. \\ \left. - \int_0^1 \rho \gamma_{2k,0}(\rho) J_{2k}(\rho r) d\rho \int_0^{\infty} r \cos \tau y d\tau \right\} = \alpha$$

Отметим, что последнее соотношение имеет один и тот же вид для любой функции $f(x, y)$, но дальнейшее интегрирование опять удобно проводить для конкретного случая. В нашем случае получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{2k+1,0} \frac{(4k-2)!! (2k+1)!!}{(4k-1)!! (2k)!!} F\left(-k, k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, y^2\right) = \\ = \alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{2k,0} \frac{(4k)!! (2k)!!}{(4k-1)!! (2k-1)!!} F\left(k+1, \frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}, y^2\right) \quad (2.9)$$

Гипергеометрические функции $F\left(-k, k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, y^2\right)$ есть многочлены Якоби, для которых имеет место следующее соотношение ортогональности:

$$\int_0^1 (1-y^2) F\left(-k, k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, y^2\right) F\left(-n, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, y^2\right) dy = \\ = \delta_{kn} \frac{(2k+2)!! (2k)!!}{(4k+3)(2k+1)!! (2k-1)!!}$$

δ_{kn} — символ Кронекера

Равенство (2.9) можно рассматривать как разложение функции, стоящей в правой части, в ряд по многочленам Якоби. Указанное соотношение ортогональности позволяет определить коэффициенты разложения

$$\frac{\tilde{\delta}_{2n-1, m}}{4n-3} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{2k, m} \frac{1}{(n+k+1)(2n-2k+1)} + b_{nm} \quad (2.10)$$

$$b_{00} = 2/3, \quad b_{01} = 0, \quad b_{02} = -\tilde{\delta}_{00}/6\pi, \quad b_{03} = \left(\frac{1}{3}\tilde{\delta}_{10} - \tilde{\delta}_{01}\right)/6\pi$$

$$b_{nm} = 0, \quad n > 0$$

$$\tilde{\delta}_{2n+1, m} = (-1)^n \frac{(4n+2)!!}{(4n+1)!!} \tilde{\delta}_{2n-1, m}, \quad \tilde{\delta}_{2n, m} = (-1)^n \frac{(4n)!!}{(4n-1)!!} \tilde{\delta}_{2n, m}, \quad m > n$$

$$\tilde{\delta}_{01} = \delta_{01} + \frac{\delta_{00}}{\pi}, \quad \tilde{\delta}_{02} = \delta_{02} + \frac{\delta_{01}}{\pi}, \quad \tilde{\delta}_{03} = \delta_{03} + \frac{\tilde{\delta}_{02}}{\pi} - \frac{\delta_{00}}{6\pi},$$

$$\tilde{\delta}_{13} = 2\left(\delta_{13} + \frac{\delta_{10}}{6\pi}\right)$$

Ряд (2.5) при выполнении условий (2.10) дает решение интегрального уравнения, неограниченное на границе крыла. В соответствии с постулатом Жуковского потребуем ограниченности решения на задней кромке крыла, то есть при $R=1$ и $|0| \ll \pi/2$. Привлекая формулы (2.2), (2.5), (2.7), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{2k, m} (-1)^k \cos 2k\theta + \mu_m = - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{2k+1, m} (-1)^k \cos (2k+1)\theta$$

$$m = 0, 1, 2, 3$$

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = -\frac{\tilde{\delta}_{10}}{6\pi}$$

Функции $\cos 2k\theta$ ортогональны на отрезке $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, что дает

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \tilde{z}_{2n, m} + a_{nm} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{z}_{2k+1, m} \frac{4k+2}{(2k+2n+1)(2k-2n+1)}, \quad n=0, 1, \dots \\ a_{nm} &= 0, \quad n \geq 0, \quad m=0, 1, 2, \quad a_{00} = -\frac{\varepsilon_{00}}{3}, \quad a_{n3} = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.11) \\ \varepsilon_0 &= 2, \quad \varepsilon_n = 1, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Подставляя \tilde{z}_{2n-1} из (2.10) в (2.11), приходим к бесконечной системе относительно \tilde{z}_{2n} ,

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_n) \tilde{z}_{2n, m} &= -\frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{z}_{2p, m} x_{np} + \tilde{b}_{nm} \\ \tilde{b}_{nm} &= -a_{nm} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} b_{km} \frac{(4k+2)(4k+3)}{(2n+2k+1)(2n-2k-1)} \quad (2.12) \end{aligned}$$

Коэффициенты системы выражаются через ψ -функцию. Имеем

$$\begin{aligned} x_{00} &= \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 1.386 \\ x_{nn} &= \frac{2n+1}{4n+1} \left| \psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(n+\frac{1}{2}\right) \right| - \frac{1}{4} \psi'\left(n+\frac{1}{4}\right), \quad n=1, 2, \dots \\ x_{np} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2p+1-2n} + \frac{1}{2p+2n+1} \right) \left| \psi\left(p+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(n+\frac{1}{2}\right) \right| + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+2p} + \frac{1}{2p-2n} \right) \left| \psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(p+\frac{1}{2}\right) \right|, \quad n \neq p \quad (2.13) \end{aligned}$$

Аналогично получается система для определения постоянных с нечетными индексами

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{2n+1, m} &= -\frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{z}_{2p+1, m} \beta_{np} + a_{nm}, \quad n=0, 1, \dots \\ a_{nm} &= (4n+3) b_{nm} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{km} \frac{4n+3}{(n+k+1)(2n-2k-1)} \varepsilon_k \\ \beta_{np} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4n+3)(4p-2)}{(2n+2k+2)(2k-2n-1)(2k+2p+1)(2k-2p-1)} \varepsilon_k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-2p} - \frac{1}{2p+2n+2} \right) \left| \psi \left(p + \frac{1}{2} \right) - \psi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right| + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2p-2n-1} + \frac{1}{2n+2p+3} \right) \left| \psi \left(p + \frac{1}{2} \right) - \psi (n+2) \right| + \\
&+ \left| \frac{1}{(2p-2n-1)(2p+2n+2)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \right| \frac{4n+3}{2p+1} \quad (2.14) \\
&\qquad\qquad\qquad n \neq p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{nn} &= \frac{2n-1}{4n+3} \left| \psi (n+2) - \psi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right| - \frac{n(4n+3)}{(2n+1)^2(2n+2)} = \\
&= \frac{1}{4} \psi' \left(\frac{1}{2} - n \right), \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

Доказать регулярность полученных бесконечных систем не удалось, но из выражений для коэффициентов (2.13), (2.14) следует выполнимость условий Коха [6]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nn}| < \infty, \quad \sum_{n,p=0}^{\infty} a_{np}^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n,n}| < \infty, \quad \sum_{n,p=0}^{\infty} \beta_{np}^2 < \infty \quad (2.15)$$

Если при этом свободные члены систем (2.12), (2.14) удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_{nm}^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}^2 < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

то применение метода редукции к системам (2.12), (2.14) будет обосновано

и, кроме того, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_{km}^2$ ($m=0,1$) сходится. Отсюда следует сходимость ряда (2.2) для функции $\chi(x, y)$. Отметим, что от вида функции $f(x, y)$ зависят только свободные члены систем, поэтому свойства решения сохраняются для любой функции $f(x, y)$, для которой выполняются условия (2.16).

Перейдем к нахождению подъемной силы P , момента M относительно оси OY и индуктивного сопротивления W . Используя формулы (1.4) и (2.2), получим

$$\begin{aligned}
P &= 8\rho u^2 a^2 \left| \bar{c}_{00} + \frac{\bar{c}_{11}}{\lambda} + \frac{\bar{c}_{22}}{\lambda^2} + \frac{\bar{c}_{33}}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4}) \right| \\
M &= \frac{8}{3} \rho u^2 a^3 \left| \bar{c}_{10} + \frac{\bar{c}_{21}}{\lambda} + \frac{\bar{c}_{32}}{\lambda^2} + \frac{\bar{c}_{43}}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4}) \right|
\end{aligned}$$

Индуктивное сопротивление определяется формулой

$$W = -\epsilon a \int_{-1}^1 \Phi^-(y) \frac{\partial \Phi^-}{\partial z}(y) dy \quad (2.17)$$

$$\Phi^-(y) = \bar{\varphi}^-(x, y, z), \quad \frac{\partial \Phi^-(y)}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\varphi}^-}{\partial z}(x, y, z), \quad z = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

вывод которой для безграничной жидкости приведен в работе [2], а для случая твердого прямолинейного экрана может быть осуществлен совершенно аналогичным образом. Из (1.4) следует

$$\Phi^-(y) = ua \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \gamma(x, y) dx \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^-}{\partial z} &= 2u \frac{\partial f(0, y)}{\partial x} - \frac{u}{2\pi^2 r^2} \iint_C \gamma(u, v) du dv \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{i\tilde{z}} (1 - e^{-2\tilde{z}}) e^{-\frac{i}{\lambda} [i(0-u) + r(y-v)]} d\tilde{k} d\tilde{r} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Так как $\frac{\partial \Phi^-}{\partial z}$ не зависит от x , мы положили здесь $x = 0$.

$$W = -2\epsilon u^2 a^2 \iint_C \gamma(x, y) \frac{\partial f(0, y)}{\partial x} dx dy = W_a = W_s = W_n$$

В нашем случае $f = \alpha x + \beta$ первое слагаемое дает сопротивление за счет сил давления на поверхности крыла, а второе определяет подсосывающую силу, возникающую из-за бесконечности давления на передней кромке крыла

$$W = -P \cdot a - W_n \quad (x < 0)$$

Производя далее интегрирование в (2.18) и во второй части (2.19), получим

$$\begin{aligned} \Phi^-(y) &= 2ua \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{2m, n}^- P_{2m}(y), \\ \frac{\partial \Phi_n^-(y)}{\partial z} &= \frac{\tilde{\delta}_{20, n}^- u}{3^{-n} i^2} - 2u \sum_{n=0}^3 i^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{2k+1, n}^- \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} (-1)^k \times \\ &\times F\left(-k, k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, y^2\right) \end{aligned}$$

Здесь $P_{2m}(y)$ — полиномы Лежандра. Производя интегрирование в (2.17), окончательно получим

$$W_n = \sum_{p=0}^3 W_n^{(p)} \lambda^{-p} + O(\lambda^{-4})$$

$$W_n^{(p)} = -8u^2 \rho a^2 \sum_{\alpha=0}^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\delta}_{2\alpha+1, \alpha}}{k!} \sum_{m=0}^k m! \tilde{\delta}_{2m, \alpha-n}, \quad p=0, 1, 2 \quad (2.20)$$

$$W_n^{(3)} = \frac{4}{3\pi} \rho v^2 a^2 \tilde{\delta}_{0,0} \tilde{\delta}_{1,0} - 8\delta \rho u^2 a^2 \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\delta}_{2\alpha+1, \alpha}}{k!} \sum_{m=0}^k m! \tilde{\delta}_{2m, 3-\alpha}$$

§ 3. Решение интегрального уравнения при малых λ .

В соответствии с [5] представим интегральное уравнение (2.3) в виде

$$\int_0^{1/\lambda} \rho q_n(\zeta) d\zeta \int_0^{\tilde{r}} (1 - e^{-2u}) J_n(u\zeta) J_n(ur) du = \psi_n r^n, \quad n=0, 1, \dots \quad (3.1)$$

где

$$q_n(\zeta) = \lambda \tilde{v}_n(\zeta), \quad \lambda r = R, \quad \psi_n = \delta_n \lambda^n$$

В этом параграфе рассмотрим случай малых λ . Желая применить результаты работы [5], используем аппроксимацию

$$\frac{1 - e^{-2u}}{u} \approx K(u) = \frac{\text{th } 2u}{u}$$

Как показано в работе [5], точное решение интегрального уравнения (3.1) имеет вид

$$q_n(\zeta) = \psi_n \left[\frac{\tilde{r}^n}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} v_{nl} K_n\left(\frac{\pi}{2} l \tilde{r}^{-1}\right) I_n\left(\frac{\pi}{2} l \tilde{r}\right) \right], \quad n=0, 1, \dots \quad (3.2)$$

I_n , K_n — функции Бесселя мнимого аргумента первого и третьего рода. Так же, как и в § 2, подставим решение

$$q(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\zeta) \cos n\theta \quad (3.3)$$

при $x=0$ в исходное уравнение (1.4). Однако с учетом ряда (3.2) интегрирование произвести не удастся. Поэтому ограничимся при малых λ вырожденной частью решения (3.2). В результате получим

$$\tilde{z}_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \tilde{\delta}_{2n} \frac{2k+2}{(2n+2k+3)(2k-2n+1)} + \frac{2}{2} (\varepsilon_k - 1) \quad (3.4)$$

$$k=0, 1, \dots$$

Для дальнейшего нам необходимо знать коэффициенты $v_{n,l}$. Они находят-ся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [5]. Беря в ней при $\lambda \leq \lambda_0$ асимптотические выражения для функций Бесселя, прих-одим к системе

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{v_{n,l}}{2z_l(z_l - 2l)} = \frac{1}{z^{2n} K(0)}, \quad m=1, 2, \dots$$

обращение которой может быть получено в замкнутом виде

$$v_{n,l} = \frac{\pi(2l-1)!!}{2^{l+1}(l-1)!z^{2n-l}} \quad (3.5)$$

Надо заметить, однако, что $\lambda_n = \lambda_0(n)$, так как мы воспользовались асимп-тогикой, имеющей место лишь при фиксированном порядке. При этом $\lambda_n(n+1) < \lambda_0(n)$. Ряд (3.2) дает при $\rho \rightarrow z^{-1}$ особенность порядка $|\frac{1}{z^{-1}} - \rho|^{-2}$. Переходя к удовлетворению условия ограниченности ре-шения на задней кромке крыла, интегрируем соотношение (3.3) в промежутке $|\rho| < \frac{\pi}{2}$ и устремляем $\rho \rightarrow z^{-1}$

$$\begin{aligned} z_{2k} &= \frac{3 - \varepsilon_k}{k} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k+m-1} z_{2m+1} \frac{4m+2}{(2m-2k+1)(2m+2k+1)} \times \\ &\times \frac{q_{2m-1}(z^{-1})}{q_{2k}(z^{-1})} \frac{z^{2m+1}}{z^{2k}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя сюда соотношение (3.4), получим

$$\begin{aligned} z_{2k} &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+n} z_{2n} \frac{2(3-\varepsilon_k)}{\pi^2} + \beta_k \\ \beta_k &= \frac{4\varepsilon_k}{\pi^2} (3-\varepsilon_k) \frac{z^{1-2k}}{4k^2-1} \frac{q_1(z^{-1})}{q_{2k}(z^{-1})} \\ z_{2k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{2n-1}(z^{-1})}{q_{2k}(z^{-1})} - \frac{z^{2n-1}}{z^{2k}} \times \\ &\frac{(2m-2)(4m-2)}{(2m-2k-1)(2m-2k+1)(2n-2m+3)(2m-2n+1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решая систему (3.7) методом редукции, мы ограничиваемся 3 уравнениями системы. Тогда при $\lambda \leq \lambda_0(\lambda)$ можно воспользоваться асимптотическим ви-дом решений (3.2). В этом случае

$$\frac{q_{2m-1}(z^{-1})}{q_{2k}(z^{-1})} = \frac{1}{z^{2m-2k+1}}$$

Оставляя открытым вопрос о возможности применения метода редукции, для коэффициентов системы получим замкнутый вид

$$\alpha_{k, k} = \left| \frac{2n+1}{(2n-2k)(2k-2n+2)} - \frac{2k-1}{(2n-2k+2)(2k+2n)} \right| +$$

$$\times \left| \psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) \right| +$$

$$+ \frac{4n+2}{(2n-2k+2)(2k+2n+2)(2k+1)}, \quad k \neq n, \quad k \neq n+1 \quad (3.8)$$

$$\alpha_{k, k} = \frac{1}{4} \psi'\left(\frac{1}{2} - k\right) + \frac{k+1}{(2k+1)^2}, \quad k \geq 1$$

$$\alpha_{k, k-1} = \frac{1}{4} \psi'\left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{k-1}{(2k-1)^2}$$

$$\alpha_{00} = \frac{\pi^2}{4} + 2; \quad \beta_k = \frac{4\alpha}{\pi^2} \frac{3 - \varepsilon_k}{4k^2 - 1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Аналогично получается система для нечетных δ_k

$$\frac{\pi^2}{2} \delta_{2k+1} = - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \alpha_{k, m} \delta_{2m+1} + \alpha \frac{\pi^2}{4} (\varepsilon_k - 1), \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\delta_{k, k} = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{(m-k)(k-m+1)} + \frac{2}{(m+k+1)(k+m+2)} \right| \times$$

$$\times \left| \psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(m + \frac{1}{2}\right) \right| +$$

$$- \frac{(4m+2)(4k+4)}{(k-m+1)(2k+2m-4)(2k+1)(2k+3)}$$

$$- \frac{2k+2}{(k-m+1)(m+k+1)(2m-1)} + \frac{2k+2}{(2k+3)(2k-1)(2m-1)}$$

$$m \neq k+1, \quad m \neq k$$

$$\alpha_{k, k+1} = - \frac{2k+3}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{4k+5}{(2k+2)(2k-3)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \psi'\left(k + \frac{5}{2}\right) + \frac{2k+2}{(2k+3)^2(2k+1)} \quad (3.9)$$

$$\alpha_{k, k} = \frac{2k+1}{(2k+3)(2k+2)} - \frac{4k+3}{(2k+2)(2k-1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \psi'\left(\frac{1}{2} - k\right) + \frac{2k+2}{(2k+3)(2k+1)^2}$$

Для подъемной силы и момента получим

$$P = 4\pi\rho u^2 a^2 \delta_0 \left[\frac{1}{4i} + \frac{1}{i} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} K_0\left(\frac{\pi l}{2i}\right) I_1\left(\frac{\pi l}{2i}\right) \right] \quad (3.10)$$

$$M = 2\pi\rho u^2 a^3 \delta_1 \left[\frac{1}{8i} + \frac{1}{i} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} K_1\left(\frac{\pi l}{2i}\right) I_2\left(\frac{\pi l}{2i}\right) \right]$$

Индуктивное сопротивление находим так же, как и в § 2, при этом ограничиваемся лишь вырожденной частью решения (3.2).

$$W_n = -\frac{2\pi}{i} \rho u^2 a^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta_{2n+1}}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \delta_{2k} k! \quad (3.11)$$

§ 4. Определение воздействия на крыло

Решение бесконечных систем (2.12), (2.14), (3.7)—(3.8), (3.9) дает следующие результаты:

Метод больших лямбда

$$\begin{aligned} P &= -2.81 \rho u^2 a^2 \lambda [1 + 0.056 \lambda^{-2} + 0.0598 \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4})] \\ M &= 1.467 \rho u^2 a^3 \lambda [1 + 0.056 \lambda^{-2} + 0.01 \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4})] \\ W_n &= 1.25 \rho u^2 a^2 \lambda^2 [1 + 0.115 \lambda^{-2} + 0.017 \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4})] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Метод малых лямбда

$$\delta_0 = -0.271 a, \quad \delta_1 = 0.283 a$$

$$W_n = \frac{2\pi}{i} \rho u^2 a^2 a^2 \cdot 0.0774 \quad (4.2)$$

Заметим, что метод редукции для всех бесконечных систем сходится очень быстро: решения систем второго и третьего порядка уже практически не отличаются.

При $\lambda = \infty$ формулы (4.1) дают решение задачи для безграничной жилкости, полученное Н. Е. Кочинным совершенно другим методом [2].

Область применимости метода больших λ можно расширить введением вместо λ функционального параметра $\tau = \sqrt{\lambda^2 + 1} - \lambda$ [3]. Функция $\tau = \tau(i)$ отображает полуплоскость $\text{Re } \lambda > 0$ в круг $|\tau| \leq R^*(i^*) < 1$. При этом сходимость рядов по λ значительно улучшается. В результате имеем

$$\begin{aligned} P &= -2.81 \rho u^2 a^2 \tau [1 + 0.22 \tau^2 + 0.48 \tau^4 + O(\tau^6)] \\ M &= 1.467 \rho u^2 a^3 \tau [1 + 0.225 \tau^2 + 0.083 \tau^4 + O(\tau^6)] \\ W &= 1.25 \rho u^2 a^2 \tau^2 [1 - 0.073 \tau^2 + 0.907 \tau^4 + O(\tau^6)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из (4.1) видно, что W_n при приближении крыла к экрану возрастает. Растет и W_z , но немного медленнее. Этим объясняется то, что $W = W_z - W_n$ сначала уменьшается, и вообще по всем диапазонам больших и средних λ изменяется незначительно. Поэтому из-за роста подъемной силы P аэродинамическое качество крыла $K = P/W$ вблизи экрана улучшается. Смещается к центру крыла при $\lambda \rightarrow 0$ и аэродинамический центр давлений $x_a = \frac{M}{P}$. Если при $\lambda \rightarrow \infty$ $x_a = -0.52a$ (4.3), то при $\lambda \rightarrow 0$ $x_a = -0.26a$ (3.10).

Сравнение двух методов дает для $-P/\rho u^2 a^2 \lambda$

λ	∞	5	2	1	1/1.5	1/2	0.4	1/3	1/4
Метод больших λ	2.81	2.82	2.86	3.01	3.19	3.37	3.51	3.63	—
Метод малых λ	—	—	—	2.2	2.63	3.1	3.58	4	4.87

Расчет показывает, что формула (4.3) дает для P хорошие результаты в диапазоне $0.4 < \lambda < \infty$, а при $\lambda < 0.4$ надо пользоваться формулой (3.10). Для момента $M/\rho u^2 a^2 \lambda$ имеем

λ	∞	2	1	1/2	1/3	1/4	1/5
Метод больших λ	1.467	1.487	1.53	1.62	1.68	1.72	1.75
Метод малых λ	—	—	—	—	1.32	1.58	1.9

Здесь диапазон применимости метода больших λ — $0.4 < \lambda < \infty$, а метода малых λ — $\lambda < 0.2$.

Для индуктивного сопротивления W при применимости в том же интервале $0.4 < \lambda < \infty$ метода больших λ метод малых λ применим опять лишь при $\lambda < 0.2$. Связано это с тем, что для W_n при малых λ удается осуществить интегрирование лишь вырожденной части решения $q(\rho, 0)$. А последнее, как показано в работе [7], в подобного рода задачах дает хорошие результаты лишь при $\lambda < 0.2$. Стыковка методов здесь может быть достигнута лишь увеличением числа членов в ряду по τ и расширением за счет этого интервала применимости метода больших λ . При очень малых λ формулы (3.10) и (4.2) принимают вид

$$P = -(0.85\lambda + 1.5)\rho u^2 a^2 \lambda$$

$$M = (0.22\lambda + 0.78)\rho u^2 a^2 \lambda$$

$$W = (0.36\lambda + 1.5)\rho u^2 a^2 \lambda^2$$

Ի. Ա. ԳՐՈՒՄԵՍՏ, Մ. Ա. ՍՈՒԲԱՏՅԱՆ

ԿՐՐ ԹԵՎԻ ՇՐՋՆՈՍԲԸ ՊԻՆԻ ԷԿՐԱՆԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՓՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ս ի մ

Աստճնասիրվում է կլոր թևի պոտենցիալ շարժման խնդիրը, իդեալական շանդմադող նեղուկում, պինդ էկրանի մոտ: Պահպանվում է Ն. Ե. Կոչինի «Теория круглого крыла» աշխատանքում առաջարկած խնդրի դրվածքը, իսկ էկրանի ազդեցությունը աստճնասիրելու համար օգտագործվում են ասիմպտոտական մեթոդներ:

MOTION OF A CIRCULAR WING NEAR THE SOLID SCREEN

R. A. GRUNTFEST, M. A. SUMBATIAN

S u m m a r y

The potential motion of a circular wing near the solid screen in ideal incompressible fluid is examined. Formulation of the problem suggested by N. E. Kochin in his „Theory of a circular wing“ is followed, but to study the effect of the screen the asymptotic methods are applied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кочин Н. Е. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане. Собр. сочинений, т. 2, М.—Л., Изд. АН СССР, 1949.
2. Кочин Н. Е. Теория круглого крыла. Собр. сочинений, т. 2, М.—Л., Изд. АН СССР, 1949.
3. Панченкова А. Н. Теория потенциала ускорений. Иркутск, 1970.
4. Волович И. П., Александров В. М., Бабсичко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Изд. «Наука», 1974.
5. Бабсичко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. Князевич А. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950.
7. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.