ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1976

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

К. А. АГАЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ, УСИЛЕННОЙ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Контактной задаче о передаче нагрузки от накладок малой толщины к упругим телам в виде бесконечных или полубесконечных пластинок посвящены многие работы, достаточно полная библиография которых содержится в [1].

Исследование влияния накладок на поле напряжений в пластинах, расслабленных трещиной конечной длины, в некоторых случаях приводится в работах [2—6]. При этом в работах [2—4] рассматривается бесконечная пластина с трещиной конечной длины, подкрепленная бесконечной упругой накладкой. В работах же [5, 6] эффект подкрепляющих накладок, заменой их действия сосредоточенными силами, учитывается приближенно, но достаточно точно

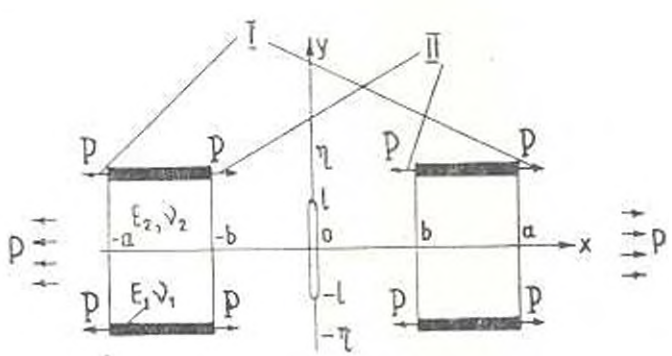
В работе [7] определяется поле напряжений в бесконечной пластине с трещиной конечной длины при наличии двух симметрично расположенных накладок, одним концом выходящих на берега трещины. При этом считается, что линия трещины перпендикулярна к осевой линии накладок и пластина на бесконечности подвержена равномерному растяжению. Однако следует отметить, что в работе [7] при вычислении соответствующего комплексного потенциала была допущена неточность (она будет указана ниже), которая затем повлияла на структуру разрешающего интегрального уравнения. Этим, по-видимому, объясняется неполная согласованность приведенных в [7] числовых результатов с физическими соображениями. Кроме того, в работе [7] не выяснены важные вопросы, относящиеся к закономерностям изменения контактных напряжений под накладками при наличии трещины.

В настоящей работе исследуется контактная задача о передаче нагрузки к бесконечной пластине с трещиной конечной длины, подкрепленной четырьмя симметрично расположенными упругими накладками конечной одинаковой длины. В предельном случае получается задача, когда имеются две симметрично расположенные относительно трещины накладки, концы которых находятся на произвольном расстоянии от ее берегов. Отсюда, в частности, когда длина трещины стремится к бесконечности, получается контактная задача о передаче нагрузки от накладки конечной длины к полубесконечной упругой пластине, поперечно скрепленной с пластиной и находящейся на произвольном расстоянии от ее границы. Когда один конец накладки выходит на границу пластины, эта задача была рассмотрена в [1].

В предположении одноосного напряженного состояния накладок, контактные напряжения, возникающие под ними, определяются точно. Выясняются закономерности изменения контактных напряжений в зависимости от характерных физических и геометрических параметров, а также влияние трещины на законы их распределения. Кроме того, определяются важные механические характеристики рассматриваемой задачи — предельные нагрузки, необходимые для продвижения трещины, в зависимости от различных факторов.

Получены числовые результаты, представленные в виде графиков и таблиц.

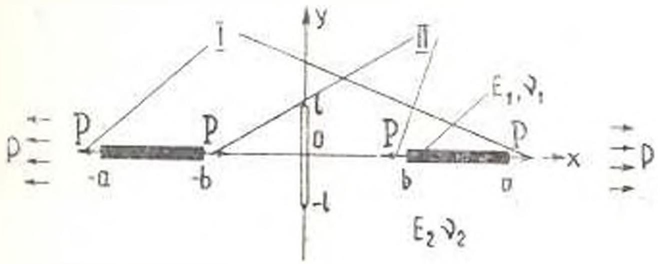
1. Пусть упругий лист в виде бесконечной тонкой пластины расслаблен трещиной вдоль отрезка $[-l, l]$ оси Oy, а по конечным отрезкам $[-a, -b]$, $[b, a]$ $(0<b<a)$ линий $y=\pm\eta$ подкреплен упругими накладками прямоугольного поперечного сечения с малой величиной площади, имеющего толщину h и ширину d. Берега трещины предполагаются свободными от внешних нагрузок. Пусть далее, накладки на своих концах нагружены равными по величине и противоположными по направлению силами P двумя способами (соответственно случаям I и II, фиг. 1). Указанный выше предельный случай показан на фиг. 2. Кроме того, пластина на бесконечности подвержена равномерному по направлению оси Ox растяжению силами интенсивности p.



Фиг. 1.

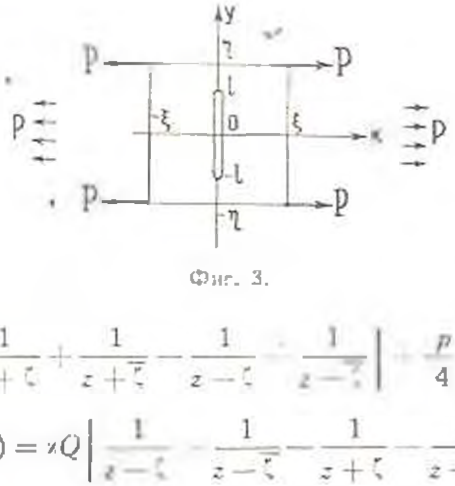
При известных предположениях относительно накладок [8—15], сводящихся в основном к тому, что они находятся в одноосном напряженном состоянии, требуется определить законы распределения тангенциальных контактных напряжений под накладками, а также предельные нагрузки P^* и p^*, необходимые для продвижения трещины согласно известным теориям равновесных трещин [16—18].

С целью вывода разрешающего функционального уравнения поставленной задачи предварительно рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть в точках $z = \pm il$ бесконечной пластины, отнесенной к плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, с трещиной вдоль отрезка $[-il, il]$ приложены растягивающие сосредоточенные силы P, направленные по оси Ox, а на бесконечности пластина растягивается однородным полем напряжений интенсивности p по направлению той же оси Ox (фиг. 3). Предположив, что пластина находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, определим горизонтальные перемещения точек пластины на линиях $y = \pm \eta$, которые обозначим через $u(z, \zeta)$.



Фиг. 2.

Как известно [4, 19], комплексные потенциалы этой задачи выражаются формулами



Фиг. 3.

$$\Phi(z, \zeta) = Q\left[\frac{1}{z+\zeta} + \frac{1}{z+\overline{\zeta}} - \frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z-\overline{\zeta}}\right] + \frac{p}{4} + \Phi_0(z, \zeta) \qquad (1.1)$$

$$\Psi(z, \zeta) = \varkappa Q\left[\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\overline{\zeta}} - \frac{1}{z+\zeta} - \frac{1}{z+\overline{\zeta}}\right] -$$

$$-Q\left[\frac{\overline{\zeta}}{(z-\zeta)^2} + \frac{\overline{\zeta}}{(z-\overline{\zeta})^2} + \frac{\zeta}{(z+\zeta)^2} + \frac{\zeta}{(z+\overline{\zeta})^2}\right] - \frac{p}{2} + \Psi_0(z, \zeta)$$

$$\Omega_0(z, \zeta) = \overline{\Phi}_0(-z, \zeta) - z\overline{\Phi}_0'(-z, \zeta) - \overline{\Psi}_0(-z, \zeta) \qquad (1.2)$$

где $Q = P/2\pi(1+\varkappa)$, $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ (ν — коэффициент Пуассона)

$$\Phi_0(z, \zeta) = \Omega_0(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-il}^{il} \frac{X(iy) F(y, \zeta)\, d(iy)}{iy - z} \qquad (1.3)$$

Здесь $F(y, \zeta)$ — функция, дающая распределение нормальных напряжений с обратным знаком, которые возникают на месте трещины в сплошной пластине при тех же нагрузках. Это распределение находится обычным методом [19] и выражается формулой

$$F(y, \zeta) = -\frac{2Q\xi}{\xi^2 + (y-\eta)^2}\left[\varkappa - 1 + \frac{4\xi^2}{\xi^2 + (y-\eta)^2}\right] -$$

$$- \frac{2Q\xi}{\xi^2 + (y+\eta)^2}\left[\varkappa - 1 + \frac{4\xi^2}{\xi^2 + (y+\eta)^2}\right] - p \qquad (1.4)$$

$$Z(z) = (z - il)^{1/2}(z + il)^{1/2}$$

Отметим, что под $Z(z)$ следует понимать ветвь радикала, имеющая при больших $|z|$ представление

$$Z(z) = z + \alpha_{-1} z^{-1} + \cdots,$$

а под $Z(iy)$ — значение, принимаемое этой функцией на левом берегу трещины.

Вычисляя интегралы, входящие в (1.3), и используя очевидные соотношения симметрии для функции $Z(z)$:

$$Z(z) = -Z(-z), \qquad \operatorname{Re}[Z(z)] = -\operatorname{Re}[Z(\bar{z})], \qquad \operatorname{Im}[Z(z)] = \operatorname{Im}[Z(\bar{z})]$$

после некоторых несложных выкладок находим[1]

$$\Phi_0(z, \zeta) = \Omega_0(z, \zeta) = -\frac{QF}{Z(z)}[I(z, \zeta) - I(z, \bar{\zeta})] + \frac{p}{2Z(z)}[z - Z(z)] \quad (1.5)$$

где

$$I(z, \zeta) = \frac{\varkappa + 1}{\zeta Z(z) + z Z(\zeta)} - \frac{(\zeta + \bar{\zeta})[Z(\zeta) Z(z) - \zeta z]}{Z(\zeta)[\zeta Z(z) + z Z(\zeta)]^2}$$

Подставляя (1.5) в (1.1) и (1.2), получим функции $\Phi(z, \zeta)$ и $\Psi(z, \zeta)$, после чего согласно формуле из [19]

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

(u, v — компоненты смещения точек пластины по осям Ox и Oy соответетственно, μ — модуль сдвига) для $u(z, \zeta)$ при $y = \eta$ получим

$$2\mu u(x, \xi, \eta) = Q\left[2\varkappa \ln\left|\frac{x - \xi}{x + \xi}\right| + \varkappa \ln\frac{R_1}{R_2} - \frac{32\eta^2 \xi x}{R_1 R_2} -\right.$$

$$\left. - (\varkappa + 1) H(x, \xi, \eta) - 2x\frac{\partial H(x, \xi, \eta)}{\partial x}\right] + Eu_0(x, \eta) + \text{const} \quad (1.6)$$

где $$R_1 = (x + \xi)^2 + 4\eta^2, \quad R_2 = (x - \xi)^2 + 4\eta^2$$

$$H(x, \xi, \eta) =$$

[1] В приведенной работе [7] в выражении комплексного потенциала $\Phi_0(z, \zeta)$ не учтены указанные соотношения симметрии.

$$
=\frac{\varkappa+1}{4}\left\{\ln\frac{[r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\gamma-\gamma_0)][r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\gamma+\gamma_0)]}{[r^2+r_0^2+2rr_0\cos(\gamma-\gamma_0)][r^2+r_0^2+2rr_0\cos(\gamma+\gamma_0)]}-\right.
$$

$$
\left.-\ln\frac{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\vartheta-\vartheta_0)][\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\vartheta+\vartheta_0)]}{[\rho^2+\rho_0^2+2\rho\rho_0\cos(\vartheta-\vartheta_0)][\rho^2+\rho_0^2+2\rho\rho_0\cos(\vartheta+\vartheta_0)]}\right\}+
$$

$$
+\frac{2\eta l^2}{\rho_0}\left[\frac{\rho r_0\cos(\vartheta+\vartheta_0+\gamma_0)+\rho_0 r\cos(2\vartheta_0+\gamma)}{\rho^2r_0^2+r^2\rho_0^2+2\rho\rho_0rr_0\cos(\vartheta-\vartheta_0+\gamma-\gamma_0)}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\rho r_0\cos(\vartheta-\vartheta_0-\gamma_0)+\rho_0 r\cos(\gamma-2\vartheta_0)}{\rho^2r_0^2+\rho_0^2r^2+2\rho\rho_0rr_0\cos(\vartheta+\vartheta_0-\gamma-\gamma_0)}\right]
$$

$$
\rho=[(x^2-l^2-\eta^2)^2+4x^2\eta^2]^{1/4},\qquad \vartheta=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\eta}{x^2-l^2-\eta^2}
$$

$$
\rho_0=[(\xi^2-l^2-\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2]^{1/4},\qquad \vartheta_0=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\xi\eta}{\xi^2-l^2-\eta^2}
$$

$$
r=(x^2+\eta^2)^{1/2},\qquad r_0=(\xi^2+\eta^2)^{1/2},\qquad \gamma=\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{x},\qquad \gamma_0=\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}
$$

$$
f_0(x,\eta)=\frac{3-\varkappa}{4}x-\frac{\varkappa+1}{2}\rho\cos\vartheta-\frac{rx}{\rho}\cos(\gamma-\vartheta) \tag{1.7}
$$

Обращаясь теперь к поставленной контактной задаче (фиг. 1), обозначим неизвестные пока контактные напряжения под накладками через $\tau(x,\eta)=\tau(x)$ $(\tau(x)=-\tau(-x))$. Условимся все физические и геометрические величины, относящиеся к накладкам, обозначать индексом „1", а для пластины — индексом „2". Тогда из уравнения равновесия элемента накладки и на основании закона Гука будем иметь

$$
\varepsilon^{(1)}(x)=\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{1}{h_1E_1}\int_b^x\tau(\xi)\,d\xi,\qquad x\in[b,a] \tag{1.8}
$$

Здесь E_1 — модуль упругости материала накладки, $u^{(1)}(x)$ — горизонтальное перемещение точек накладки.

С другой стороны, по формуле (1.6) будем иметь

$$
u^{(2)}(x)=u^{(2)}(x,\eta)=\int_b^a u(x,\xi,\eta)\,\tau(\xi)\,d\xi+pf_0(x,\eta) \tag{1.9}
$$

где $u^{(2)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек пластины на линии $y=\eta$. Входящая в (1.9) функция $u(x,\xi,\eta)$ дается формулами (1.6) и (1.7) при $p=0$, в которых геометрические и физические величины следует брать с индексом „2".

Подставляя (1.8) и (1.9) в условие контакта [8]

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{du^{(2)}}{dx}, \quad (b < x < a)$$

после некоторых элементарных выкладок для определения неизвестных тангенциальных контактных напряжений $\tau(x)$ получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\int_b^a \left[\frac{1}{\xi - x} + K(x, \xi) \right] \varphi'(\xi)\, d\xi = k\lambda \varphi(x) + f(x) \tag{1.10}$$

$$K(x, \xi) = K(x, \xi, \eta) = \frac{1}{x+\xi} + \frac{2\xi}{R_1 R_2} \Bigg[x^2 - \xi^2 - (\kappa_2 + 2)\eta^2 + \frac{32\eta^2 x^2 (x^2 - \xi^2 + 4\eta^2)}{R_1 R_2} \Bigg] + \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{x}{\kappa_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \tag{1.11}$$

$k = \pm 1$ соответственно случаям I и II,

$$\varphi(x) = \int_b^x \tau(\xi)\, d\xi, \qquad \varphi'(x) = \tau(x), \qquad \lambda = \frac{2\pi\mu_2(1+\kappa_1)}{hdE_1\kappa_2}$$

$$f(x) = \begin{cases} -p\dfrac{\pi(1+\kappa_2)}{\kappa_2}\dfrac{\partial f_0}{\partial x} & \text{в случае I} \\[2ex] -p\dfrac{\pi(1+\kappa_2)}{\kappa_2}\dfrac{\partial f_0}{\partial x} - \lambda P & \text{в случае II} \end{cases}$$

а функции R_1, R_2, H и f_0 выражаются формулами (1.7).

Из условия равновесия накладок следует, что введенная нами функция $\varphi(x)$ при обоих случаях нагружения накладок, указанных выше, должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi(b) = 0, \qquad \varphi(a) = P \tag{1.12}$$

Таким образом, для определения контактных напряжений $\tau(x)$ получилось сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (1.10) при граничных условиях (1.12).

Отметим, что первый интеграл в (1.10) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Заметим еще, что при $p = 0$, $\eta = 0$ и $l \to \infty$ интегро-дифференциальное уравнение (1.10) переходит в уравнение

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{\kappa_2^2 + 1}{2\kappa_2(\xi + x)} - \frac{2\xi(x - \xi)}{\kappa_2(\xi + x)^3} \right] \varphi'(\xi)\, d\xi = k\lambda\varphi(x) + f(x)$$

которое совпадает с известным интегро-дифференциальным уравнением контактной задачи о напряженном состоянии полубесконечной упругой пластины, усиленной на произвольном расстоянии от ее границы поперечно скрепленной с ней накладкой конечной длины [1].

2. Приступая к решению интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.12), замсной переменных

$$\xi = \alpha s + \beta, \quad x = \alpha t + \beta, \quad \alpha = (a - b)/2, \quad \beta = (a + b)/2 \tag{2.1}$$

представим (1.10) в виде

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{s - t} + K_1(t, s) \right] \varphi'(s)\, ds = k\lambda\varphi(t) + g(t) \tag{2.2}$$

$$K_1(t, s) = \alpha K(x, \xi), \qquad g(t) = \alpha f(x)$$

притом в последних двух формулах ξ и x следует заменить на s и t по формулам (2.1).

Граничные условия теперь будут

$$\varphi(-1) = 0, \qquad \varphi(1) = P \tag{2.3}$$

а контактные напряжения будут определяться формулой

$$\tau(x) = \varphi'(t)/\alpha, \quad t = (x - \beta)/\alpha \tag{2.4}$$

Далее положим

$$\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{T_n(t)}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad (-1 < t < 1) \tag{2.5}$$

где $T_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева первого рода, $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (2.5) в (2.2), для определения коэффициентов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} X_n + a_m, \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

$$A_{m,n} = B_{m,n} + C_{m,n}, \qquad a_m = X_0 [B_{m,0} + C_{m,0}] + b_m$$

$$B_{m,n} = \frac{2\lambda k}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, U_{m-1}(t)\, dt \int_{-1}^{1} \frac{T_n(s)\, ds}{\sqrt{1 - s^2}}$$

$$C_{m,n} = -\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, U_{m-1}(t)\, dt \int_{-1}^{1} K_1(t, s) \frac{T_n(s)\, ds}{\sqrt{1 - s^2}}$$

$$b_m = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, U_{m-1}(t)\, g(t)\, dt$$

здесь $U_{m-1}(t)$ $(m=1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева второго рода. Отметим, что из граничных условий (2.3) непосредственно вытекает, что $X_0 = P/\pi$.

Так как функция $\partial K_1(t, s)/\partial t$ квадратично суммируема на квадрате $(-1 < s, t < 1)$, то легко показать [13—15], что бесконечная система (2.6) квазивполне регулярна. Более того, можно показать, что при некоторых значениях параметра λ система (2.6) вполне регулярна. На этих вопросах здесь останавливаться не будем, поскольку они достаточно подробно освещены в работах [13—15].

3. Обратимся теперь к определению законов распределения контактных напряжений и предельных нагрузок. Вследствие линейности системы (2.6) для контактных напряжений будем иметь формулу

$$\tau(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[PY_n^{(1)} + pY_n^{(2)}\right]\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{P}{\pi\sqrt{1-t^2}} \qquad (-1 < t < 1) \quad (3.1)$$

где $Y_n^{(1)}$ и $Y_n^{(2)}$ — решения системы (2.6) соответственно при $P=1$, $p=0$ и $P=0$, $p=1$.

Подставляя это выражение в известное условие для предельной нагрузки

$$\lim_{y\to l}\left[\sigma_x^*(l, \xi, \eta)\sqrt{y-l}\right] = K/\pi \qquad (3.2)$$

где K — модуль сцепления, можем определить предельное значение P^* или p^*, предварительно задав p или P соответственно.

В предельном случае, когда $\eta = 0$, то есть накладки приварены к пластине по конечным отрезкам $[-a, -b]$, $[b, a]$ $(b < a)$ оси Ox, бесконечная система (2.6) довольно упрощается, а условие (3.2) имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[P^* Y_n^{(1)} + p^* Y_n^{(2)}\right]L_n(l) + \frac{P^*}{\pi}L_0(l) + \pi p = K\sqrt{\frac{2}{l}} \qquad (3.3)$$

$$L_n(l) = \frac{\alpha}{2}\int_0^{\pi}\frac{2l^2 + (3+\nu_2)(\alpha\cos t+\beta)^2}{\left[l^2 + (\alpha\cos t+\beta)^2\right]^{3/2}}\cos nt\,dt, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

4. Теперь остановимся на одной задаче, непосредственно связанной с задачей в случае II. Пусть бесконечная пластина, расслабленная разрезом $[-l, l]$ на оси Oy и растягиваемая только на бесконечности равномерной нагрузкой интенсивности p, усилена на отрезках $[-a, a]$ линий $y = \pm\eta$ двумя одинаковыми накладками, которые скреплены с пластиной только по отрезкам $[-a, -b]$ и $[b, a]$, так что части накладок $[-b, b]$ с пластиной несварены. Требуется, помимо указанных выше механических характеристик, определить также равнодействующие осевых напряжений в накладках, действующих в сечениях их частей $[-b, b]$, величина которых обозна-

чена через P. Эта задача в такой постановке эквивалентна рассмотренной здесь задаче в случае II с неизвестным P и поэтому решается вполне аналогично ей. Неизвестная величина же определяется из очевидного условия

$$u^{(2)}(b, \eta) = Pb/FE_1, \qquad (F = hd)$$

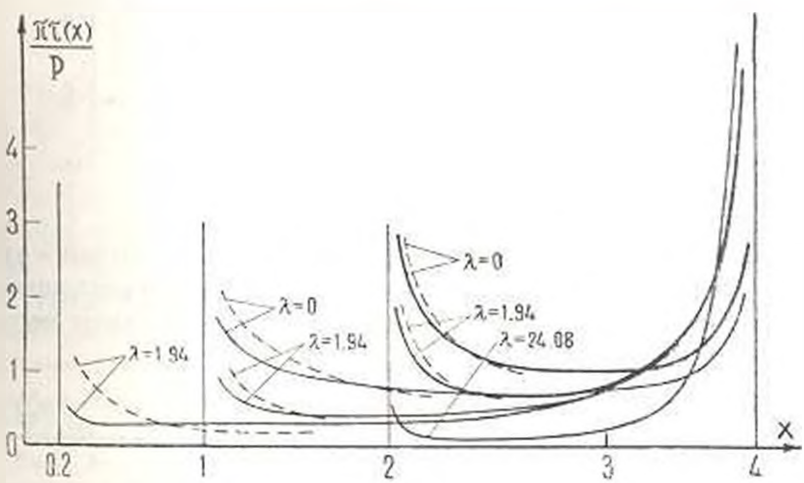
что согласно (3.1) даст

$$P = pu_1^{(2)}(b, \eta) \Bigg/ \left| \frac{b}{FE_1} - u_2^{(2)}(b, \eta) \right|$$

где $u_1^{(2)}$ и $u_2^{(2)}$ — горизонтальные перемещения пластины в точке (b, η) соответственно только от усилий p и P.

5. Численные результаты получены для I случая при $\eta = 0$ на ЭВМ «Наири-2». Во всех рассмотренных случаях поперечное сечение накладки одинаково ($hd = 0,5$), а в качестве материала пластины было взято стекло с постоянной длиной трещины ($l = 1$). Различным значениям параметра λ (0; 1.94; 4.09; 24.08) соответствуют различные материалы накладки (абсолютно жесткая накладка, сталь, латунь и свинец соответственно), а длина накладки $(a - b)$ характеризуется только параметром b (2; 1; 0.2), так как a принималось постоянным ($a = 4$).

Для таких значений параметров задачи были решены соответствующие линейные бесконечные системы и по формуле (2.4) были построены графики тангенциальных контактных напряжений под накладкой (фиг. 4, 5), а

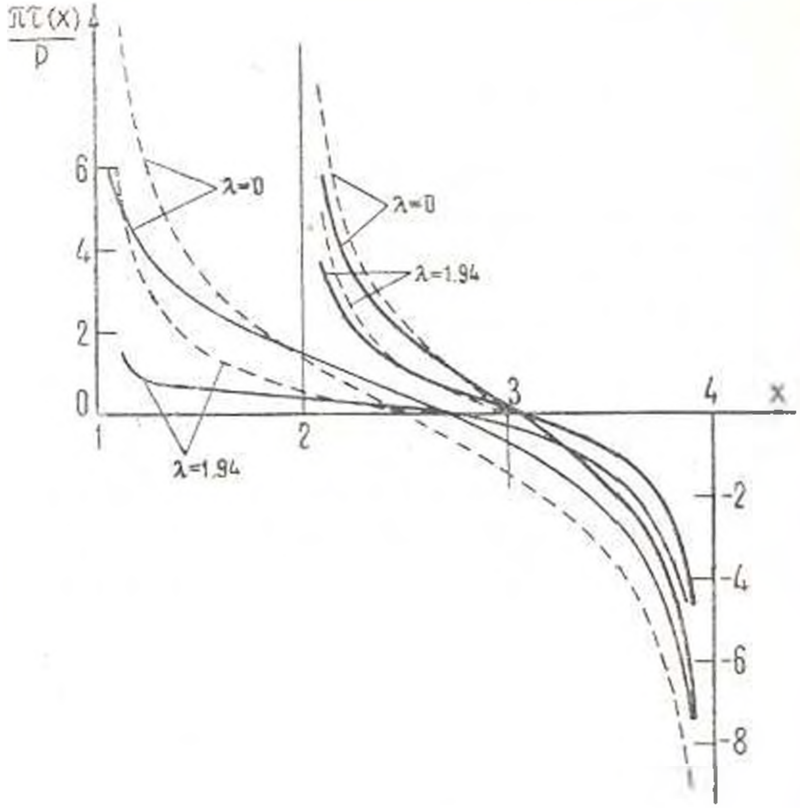


Фиг. 4.

по формуле (3.3) были вычислены соответствующие величины критической силы P^* (при $p = 0$) и p^* (при $P = 0$), по значениям которых составлена приведенная таблица 1. На фигурах пунктирными линиями показаны графики контактных напряжений при $l = 0$, то есть когда трещина отсутствует.

Сопоставление этих графиков показывает, что:

а) при постоянном значении параметра λ и при уменьшении b контактные напряжения вблизи конца a почти не изменяются, а вблизи конца b заметно уменьшаются;



Фиг. 3

б) если $p\neq 0$, то при отсутствии трещины и при постоянном λ уменьшение параметра b вызывает увеличение коэффициента концентрации контактных напряжений в конце b. При наличии же трещины имеет место обратный эффект;

Таблица 1

	$a=4,\ b=0.2$				$a=4,\ b=1$				$a=4,\ b=2$			
λ	0	1.94	4.09	24.08	0	1.94	4.09	24.08	0	1.94	4.09	24.08
P^*/K	1.13	1.41	1.55	1.81	1.53	1.83	1.99	2.07	2.73	2.98	3.15	3.49
p^*/K	0.32	0.37	0.39	0.42	0.36	0.39	0.41	0.43	0.42	0.43	0.436	0.44

в) если $P\neq 0$ и b постоянно, то при увеличении параметра λ, несмотря на общий спад величины контактных напряжений, вблизи конца a они все же резко возрастают;

г) при $p=0$ наличие трещины мало влияет на распределение контактных напряжений, а при $p\neq 0$ это влияние значительно.

Далее, из таблицы 1 для предельных сил P^* и p^* следует, что:

а) при увеличении b (λ—постоянно) и при увеличении λ (b—постоянно) эти силы увеличиваются, то есть коэффициент интенсивности напряжений на концах трещины уменьшается;

б) наличие накладок меньше влияет на предельную нагрузку p^*, чем на P^*.

Заметим, что в задаче Гриффитса для стекла ($l=1$) $p^*/K=0.45$, а когда $p=0$ и силы P приложены непосредственно к пластине в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, $(a=4)$, то $P^*/K=3.81$. Сравнение этих значений предельных нагрузок с соответствующими их значениями из табл. 1 выявляет эффект наличия накладок.

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна за внимание к работе и ценные советы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 V 1976

Կ. Լ. ԱՂԱՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ՃԱՔՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է միևնույն երկարության, սիմետրիկ դասավորված, չորս վերջավոր առաձգական վերադիրներով ուժեղացված ճաքով անվերջ սալի կոնտակտային խնդիրը: Ճաքի ափերը ազատ են արտաքին լարումներից, իսկ վերադիրները ձգվում են նրանց ծայրերում կիրառված կենտրոնացված ուժերով: Ընդ որում, սալը անվերջությունում հավասարաչափ ձգվում է ճաքին ուղղահայաց ուղղությամբ:

Օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով վերադիրների տակ առաջացող կոնտակտային լարումները որոշվում են ճշգրիտ: Բացահայտվում են կոնտակտային լարումների և սահմանային բեռների փոփոխման օրինաչափությունները կախված խնդրի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

Բերվում է թվային օրինակ:

ON A CONTACT PROBLEM FOR AN INFINITE PLATE WITH A CRACK REINFORCED BY ELASTIC STIFFENERS

K. L. AGAYAN

Summary

A contact problem for an infinite plate with a crack, reinforced by four elastic stiffeners equal in finite length, placed symmetrically, is considered.

The crack ends are free from external loads while the stiffeners are extended under a pointed-tensile force applied to the latter's ends, the plate being under an infinite uniform tension perpendicular to the direction of the crack.

The orthogonal polynomial method is used to determine accurately the contact stress under the stiffeners. The regularities of variation in contact stresses and limiting forces depending on specific physical and geometrical parameters are found out.

A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мики Р., Стернберг Е.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва инж.-мех., сер. Е, 1968, т. 35, № 4.
2. *Sanders G. J. Hr.* Effect on a Stringer on the Consentration one to a Crack in a Thin Sheet. NASA, Techn. Rep.—13, 1959.
3. *Грейф Р., Сандерс мл.* Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва инж.-мех., сер. Е, 1965, т. 32, № 1.
4. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной теории упругости. М., Наука, 1973.
5. *Морозова Е. А., Партон В. З.* О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещин. ПМТФ, 1961, № 5.
6. *Черепанов Г. П., Мурсалимов В. М.* О воздействии ребер жесткости на развитие трещины. Изв. АН Аз. ССР, сер. физ-тех. и мат. наук, 1969, № 1.
7. *Моржолиани Г. Т.* Влияние стрингера на распределение напряжений около концов разреза. Сообщения АН Груз. ССР, 1974, № 3.
8. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, № 4.
9. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, № 5.
10. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, № 3.
11. *Александров В. М., Соловьев А. С.* Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешности тензоизмерений. МТТ, 1970, № 1.
12. *Александров В. М., Солодовник М. Д.* Эффективный метод решения задачи о взаимодействии накладки (стрингера) с упругой полуплоскостью и некоторые новые качественные результаты. Тр. X Всесоюзной конференции по теории оболочек. Кутаиси, 1975.

13. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, № 5.
14. *Агаян К. Л.* Некоторые контактные задачи бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. МТТ, 1972, № 5.
15. *Агаян К. Л.* Периодическая контактная задача для бесконечной пластины с упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1975, т. 28, № 3.
16. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Наукова думка, Киев, 1968.
17. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения. М., Наука, 1974.
18. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М., Наука, 1974.
19. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. изд. 5, М., Наука, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

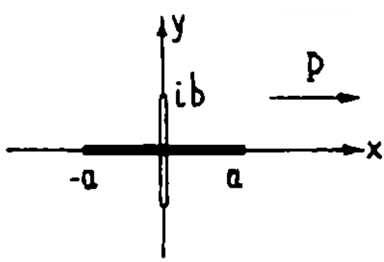
А. И. КАЛАНДИЯ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ В ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Метод функции влияния в соединении с приближенными способами решения сингулярных интегральных уравнений представляет эффективное средство при решении задач о плоском деформировании упругих тел, снабженных стрингерами и трещинами. Это и иллюстрируется ниже на двух конкретных примерах.

§ 1. *Стрингер-трещина*

Геометрия задачи показана на фиг. 1. Бесконечная пластинка имеет трещину, расположенную на мнимой оси от $-ib$ до ib, и сплошной стрингер длины $2a$, прикрепленный к пластинке вдоль отрезка $[-a, a]$ вещественной оси, перекрывает трещину, деля длину ее пополам. Простоты ради будем считать, что к берегам разреза и к стрингеру внешних сил не приложено, а пластинка растягивается на бесконечности усилиями P, параллельными оси стрингера (перпендикулярными линии разреза). Зададимся целью определения степени влияния стрингера на интенсивность напряжений на концах разреза.



Фиг. 1.

Под стрингером (иногда называют накладкой, либо ребром жесткости) подразумевается упругий стержень постоянного поперечного сечения, не обладающий изгибной жесткостью. Более точно, стрингер в нашем рассмотрении представляет собой идеализированную упругую линию, вообще говоря, из другого материала, работающую лишь на растяжение. Рассмотрение включает в себе как плоскую деформацию упругой среды, изотропной и однородной, так и обобщенное плоское напряженное ее состояние*.

* Плоские задачи со стрингерами до сих пор привлекают внимание как зарубежных, так и советских механиков-математиков. Из работ наших авторов следует, в первую очередь, назвать работы Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна. Подробные указания на эти работы, а также и некоторые другие, сюда относящиеся, можно найти, например, в [1, 2].

Пусть σ_x, σ_y, τ_{xy}, u, v — элементы плоских упругих полей, N — усилия в стрингере, S_0, b_0 — поперечное сечение и ширина стрингера, E, ν, h — упругие постоянные и толщина пластинки. Символы E и h со значком 0 будут относиться к материалу стрингера.

Обозначая, далее, линию разреза и ось стрингера, соответственно, через l и L, будем иметь граничную задачу (напр., [1], § 33).

$$h\left[\tau_{xy}^{+} - \tau_{xy}^{-}\right] + \frac{d}{dx} N(x) = 0, \qquad \sigma_y^{+} - \sigma_y^{-} = 0 \tag{1.1}$$

$$u^{+} + iv^{+} = u^{-} + iv^{-}, \qquad \varepsilon_x^{+} = \varepsilon_x^{-} = \varepsilon^{0} \quad \text{на} \quad L$$

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = 0 \quad \text{на} \quad l \tag{1.2}$$

Здесь ε_x — деформация удлинения в пластинке относительно оси x, ε^0 — относительное удлинение оси стрингера. Предыдущие граничные условия должны выполняться на соответствующих линиях l и L всюду, за исключением концов линий и точки их пересечения.

Первая группа равенств (1.1) выражает условия равновесия любого элементарного куска стрингера, сцепленного с пластинкой, с учетом отсутствия у него жесткости на изгиб, а вторая группа — условие непрерывности смещений и деформаций удлинения при переходе через ось стрингера. Смысл условий (1.2) очевиден.

Усилия в стрингере $N(x)$ и скачок касательных напряжений $q(x) = -\tau_{xy}^{+} + \tau_{xy}^{-}$ удовлетворяют на L условиям симметрии:

$$N(-x) = N(x), \quad q(-x) = -q(x) \quad |x| < a$$

ввиду чего первое из равенств (1.1) может быть записано в виде

$$h\int_0^x \left(\tau_{xy}^{+} - \tau_{xy}^{-}\right) dt + N(x) - N_0 = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{1.3}$$

где N_0 означает значение функции $N(x)$ в точке $x=0$, $N_0 = N(0)$. Постоянная N_0 не задана заранее и подлежит определению вместе с другими неизвестными в ходе решения задачи.

Можно доказать ([1], стр. 207—208), что функция

$$\omega(z) = \varkappa\varphi(z) + z\varphi'(z) + \psi(z)$$

аналитически продолжима через отрезок L, из которого удалена точка $z=0$, и, следовательно, голоморфна в плоскости z всюду вне разреза l. На бесконечности функция $\omega(z)$ имеет, разумеется, особую точку, характерную для заданных внешних усилий.

Потенциалы же Колосова-Мусхелишвили $\varphi(z)$, $\psi(z)$ будут кусочно-голоморфными в плоскости z, разрезанной вдоль обеих линий l и L.

Рассуждением, основанным на голоморфности $\omega(z)$ и аналогичным приведенному в [1], § 33, заключаем, что граничные условия вдоль линии контакта L эквивалентны следующим двум вещественным равенствам:

$$\operatorname{Re}\left[\varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t)\right] = 0 \quad \text{на} \quad L \tag{1.4}$$

$$\int_0^x (\tau_{xy}^{+} - \tau_{xy}^{-})\, dt + K_0 \operatorname{Re} \frac{d}{dx}\left[\varkappa\varphi(x) - x\overline{\varphi'(x)} - \overline{\psi(x)}\right] - \frac{N_0}{h} = 0$$

$$0 < x < a$$

причем (в случае обобщенного плоского напряженного состояния)

$$K_0 = \frac{E_0 S_0}{2\mu h}, \qquad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

Граничные условия на разрезе (1.2) в функциях[1]

$$\begin{gathered} \Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Omega(z) = \overline{\Phi}(-z) - z\overline{\Phi}'(-z) - \overline{\Psi}(-z) \\ \psi'(z) = \Psi(z) = \Phi(z) + z\Phi'(z) - \overline{\Omega}(-z) \end{gathered} \tag{1.5}$$

принимают вид (см. [3], § 120)

$$\Phi^{\pm}(t) + \Omega^{\mp}(t) = 0 \quad \text{на} \quad l \quad (t = iy, \; -b < y < b) \tag{1.6}$$

Как всегда, равенство при верхних знаках относится к левому берегу разреза (по отношению к выбранному на нем положительному направлению), а при нижних — к правому.

Представим теперь решение нашей задачи в виде суммы

$$\begin{gathered} \Phi(z) = \Phi_{*}(z) + \Phi_0(z) \\ \Omega(z) = \Omega_{*}(z) + \Omega_0(z) \end{gathered} \tag{1.7}$$

где Φ_0, Ω_0 характеризуют поле напряжений в разрезанной вдоль l плоскости при ее растяжении (основное поле), а Φ_{*}, Ω_{*} — дополнительное поле, возникшее из-за наличия стрингера и исчезающее на бесконечности.

Функции Φ_0, Ω_0 непосредственно находятся из формул Н. И. Мусхелишвили (напр., [1], стр. 225), дающих решение задачи об изолированной трещине в однородном поле. В нашем случае, когда

$$\Gamma = \frac{P}{4}, \qquad \Gamma' = -\frac{P}{2}, \qquad a = -b, \quad b = b$$

они дают

$$\Phi_0(z) = \frac{Pz}{2X(z)} - \frac{P}{4}, \qquad \Omega_0(z) = \frac{Pz}{2X(z)} + \frac{P}{4} \tag{1.8}$$

---

[1] Черта над символом функции означает переход к сопряженной функции от сопряженного аргумента: $\overline{F}(z) = \overline{F(\bar z)}$.

$$X(z) = \sqrt{z^2 + b^2} \tag{1.9}$$

Для построения потенциалов Φ_*, Ω_* дополнительного поля зададимся функцией влияния в виде

$$\Phi_*(z, y) = -p(y)\frac{2y}{z^2 - y^2} + \Phi_1(z, y) \tag{1.10}$$

$$\Omega_*(z, y) = -p(y)\left[\frac{2(\varkappa + 1)y}{z^2 - y^2} - \frac{z + y}{(z - y)^2} + \frac{z - y}{(z + y)^2}\right] + \Omega_1(z, y)$$

где

$$2\pi(1 + \varkappa)\,p(y) = -\tau^{+}_{xy}(y, 0) + \tau^{-}_{xy}(y, 0) \tag{1.11}$$

а Φ_1, Ω_1 — искомые функции от z и y, голоморфные в плоскости z всюду вне разреза для любого y из L, $-a \leqslant y \leqslant a$.

Функции Φ_* и Ω_*, согласно нашим построениям, должны давать решение задачи о трещине в бесконечной плоскости, когда в симметричных ее точках $z = y$ и $z = -y$, расположенных на L, приложены равные по величине и обратные друг другу сосредоточенные силы $(p, 0)$ и $(-p, 0)$. Характер сосредоточенных сил определен равенством (1.11). В точке $z = 0$, очевидно, сил не приложено.

Подчинив Φ_*, Ω_* граничному условию (1.6), придем для Φ_1, Ω_1 к первой основной задаче в плоскости с разрезом. Решив эту задачу в замкнутом виде ([3], § 120) и подставив ее решение Φ_1, Ω_1 в (1.10), найдем функцию влияния в явной форме. Ее можно, разумеется, выразить, согласно (1.5), и в функциях $\Phi_*(z, y)$, $\Psi_*(z, y)$. Если затем проинтегрировать правые части равенств, определяющих Φ_* и Ψ_*, по отрезку $[0, a]$, предварительно помножив их на dy, и добавить к интегралам функции Φ_0 и Ψ_0 из (1.8), то получим для искомых потенциалов нашей задачи следующие представления [4]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a K_1(z, y)\,\tau(y)\,dy + \Phi_0(z) \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a K_2(z, y)\,\tau(y)\,dy + \Psi_0(z) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$K_1(z, y) = 2y\left[-\frac{1}{z^2 - y^2} + \frac{I(z, y)}{X(z)}\right]$$

$$K_2(z, y) = 2y\left[\frac{\varkappa}{z^2 - y^2} - \frac{z^2 + y^2}{(z^2 - y^2)^2} + z\frac{d}{dz}\frac{I(z, y)}{X(z)}\right]$$

$$I(z, y) = \frac{1}{X(z) + X(y)}\left\{\frac{\varkappa - 1}{2} + \frac{y^2}{X(y)[X(z) + X(y)]}\right\}$$

$$\Psi_0(z)=\frac{Pz}{X(z)}-\frac{P}{2}-\frac{Pz}{2}\frac{d}{dz}\frac{z}{X(z)};\qquad \tau(y)=2\pi p(y)$$

Потенциалы (1.12) удовлетворяют, в силу их построения, условию отсутствия вдоль берегов разреза внешних усилий при любом $\tau(x)$. Легко также видеть, что функция $\varphi(z)$,— первообразная $\Phi(z)$, удовлетворяет первому из условий (1.4). Остается удовлетворить второму из указанных условий, которое мы перепишем в виде

$$-(1+\varkappa)\int_0^x\tau(y)\,dy+K_0\,\mathrm{Re}\,\{(\varkappa-1)\,\Phi(x)-x\overline{\Phi'(x)}-\overline{\Psi(x)}\}-\frac{N_0}{h}=0 \tag{1.13}$$

Под выражением в фигурной скобке здесь понимаются равные между собой предельные значения в точке x функции

$$(\varkappa-1)\,\Phi(z)-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(x)}$$

слева и справа от L.

Если теперь, воспользовавшись формулами Сохоцкого—Племеля ([1], стр. 16), внесем предельные значения функций (1.12) в условие (1.13), то получим для определения неизвестной функции $\tau(x)$ сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^a\frac{\tau(y)\,dy}{y-x}+\frac{1}{2\pi}\int_0^a k_0(x,\,y)\,\tau(y)\,dy-\frac{\sigma_0}{2(3-\nu)}=f_0(x) \tag{1.14}$$

$$0<x<a$$

при

$$k_0(x,\,y)=\frac{1}{x+y}+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,y\,\frac{l(x,\,y)}{X(x)}-\frac{2xy}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\frac{l(x,\,y)}{X(x)}-$$

$$-\frac{(1+\varkappa)\pi}{\varkappa(1+\nu)}\frac{1}{b_0 g}H(x-y)$$

$$f_0(x)=-\frac{P}{8\varkappa}\left[3-\varkappa+\frac{2(\varkappa-3)x}{X(x)}+\frac{4x^2}{X^2(x)}\right];\qquad g=\frac{E_0h_0}{Eh},\qquad \sigma_0=\frac{EN_0}{E_0S_0}$$

H означает ступенчатую функцию Хевисайда,

$$H(u)=1\quad\text{при}\quad u>0,\quad H(u)=0\quad\text{при}\quad u<0$$

К уравнению (1.14) следует еще присоединить дополнительное условие,— условие равновесия всего стрингера, скрепленного с пластинкой. Условие это, получаемое из (1.3) при $x=a$, принимает в наших обозначениях вид

$$\int_0^a \tau(x)\,dx = -\lambda\sigma_0, \qquad \lambda = \frac{b_0 g}{1-\varkappa} \tag{1.15}$$

Известно [5], что порядок сингулярности функции $\tau(x)$ на правом конце отрезка $[o, a]$ в точности равен $1/2$, а на левом конце положителен, но меньше $1/2$, зависит от коэффициента Пуассона материала пластинки ν и при $\nu=0.3$ примерно равен $1/4$. В соответствии с этим нам следует разыскивать решение уравнения (1.14), (1.15) в классе функций, не ограниченных ни на одном из концов отрезка.

После нахождения решения интегрального уравнения можно определить все искомые нашей задачи. Главная цель задачи — определение влияния стрингера на распределение сингулярных напряжений около концов разреза. Влияние это полностью характеризуется отношением

$$\delta = \frac{K}{K_0}$$

где K и K_0 означают коэффициенты интенсивности напряжений на концах разреза в пластинке со стрингером и без него, соответственно. Число K_0 — коэффициент интенсивности напряжений на концах трещины Гриффитса длины $2b$, как известно, равно

$$K_0 = \sqrt{b}\,P$$

Элементарные вычисления показывают, что отношение δ может быть найдено через решение $\tau(x)$ в виде

$$\delta = 1 + \frac{1}{2\pi b}\int_0^a M(x)\,\tau(x)\,dx \tag{1.16}$$

$$M(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+b^2}}\left(\varkappa - 1 + \frac{2x^2}{x^2+b^2}\right)$$

После замены переменных

$$2x = a(\xi+1), \quad 2y = a(\eta+1)$$

уравнение (1.14), (1.15) примет стандартную форму, удобную для его приближенного решения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}k(\xi,\eta)\,\tau(\eta)\,d\eta - \frac{\sigma_0}{2(3-\nu)} = f(\xi) \tag{1.17}$$

$$\int_{-1}^{1}\tau(\eta)\,d\eta = -2\lambda\frac{\sigma_0}{a}$$

где использованы обозначения

$$\tau(\xi) = \tau(x), \qquad k(\xi, \eta) = \frac{a}{2} k_0(x, y), \quad f(\xi) = f_0(x)$$

Для решения (1.17) обратимся к приближенному способу, указанному в [1], § 13. Искомое решение $\tau(\xi)$, разрывное по условию на обоих концах отрезка $[-1, 1]$, представляется в виде

$$\tau(\xi) = \frac{\tau_0(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

где τ_0 — непрерывная функция, заменяемая интерполяционным полиномом Лагранжа (n — натуральное число)

$$\tau_0(\xi) \sim \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} \tau_0(\xi_\nu) \frac{\cos n\theta \sin \theta_\nu}{\cos \theta - \cos \theta_\nu}, \quad \xi = \cos \theta$$

построенным по чебышевским узлам

$$\xi_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2n}, \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

Способ приводит решение (1.17) к системе линейных алгебраических уравнений для определения значений искомого τ в узлах интерполяции и постоянной σ_0:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{m\nu} \tau_\nu^0 - \frac{\sigma_0}{2(3-\nu)} = f_m, \quad m = 1, 2, \ldots, n \tag{1.18}$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \tau_\nu^0 + \frac{2\lambda}{a} \sigma_0 = 0$$

где

$$a_{m\nu} = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \pm \theta_\nu}{2} + k(\xi_m, \eta_\nu) \right]$$

$$f_m = f(\xi_m), \quad \tau_m^0 = \tau_0(\xi_m), \quad \xi_m = \eta_m$$

В формуле для $a_{m\nu}$ верхний знак берется при $|m-\nu| = 0, 2, \ldots$, а нижний — при $|m-\nu| = 1, 3, \ldots$

Решение (1.18) даст приближенное аналитическое выражение для $\tau(\xi)$ и определит также (максимальное) значение усилия $N(x)$ в середине стрингера. Величина (1.16), например, найдется по приближенной формуле

$$[illegible] = 1 + \frac{1}{4n} \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{n} m(\cos \theta_k) \tau_k^0, \qquad m(\xi) = M(x)$$

Система (1.18) решалась на ЭВМ при

$$P = 1, \quad b_0 = 0.2, \quad b = 1, \quad \nu = 1/3 \quad (\varkappa = 2)$$

и определялись значения δ для различных длин стрингера и относительной жесткости g.

Стрингер, как и следовало ожидать, уменьшает напряжения на концах разреза. Отношение δ убывает при увеличении a и g, и в диапазоне $1 \leqslant a, g \leqslant 10$ меняется от 0.9951 до 0.7780. Небезынтересно отметить, что при любых a и g, как это нетрудно установить из физических соображений,

$$\delta > \frac{K_1}{K_2}$$

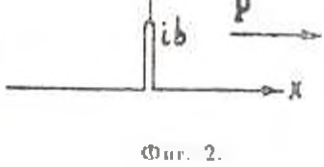
где K_1, K_2 — коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещин Гриффитса, имеющих длины l и $2l$ соответственно. Значит, в любой ситуации со стрингером, $1 > \delta > 1/\sqrt{2} = 0.7071$.

Решение задачи в случае, когда стрингер переломан в сечении $x = 0$, то есть состоит из двух симметричных кусков, получится из приведенного выше, если положить всюду $N_1 = \sigma_1 = 0$. Этот случай рассматривался в работе [4], которая и была использована в настоящем параграфе.

Как показано в названной работе, перелом стрингера (в сечении $x = 0$) приводит к обратной картине,— к увеличению интенсивности напряжений вблизи концов разреза. Здесь, при любых a и g, $\delta > 1$.

§ 2. *Полуплоскость с надрезом*

Прямолинейная трещина длины $b = 2l$ выходит на границу упругой полуплоскости под прямым углом, берега трещины и край полуплоскости свободны от внешних усилий, и среда подвержена на бесконечности воздействию растягивающих усилий P, перпендикулярных линии разреза. Область S, занятую упругой средой, расположим на верхней полупкоскости, как показано на фиг. 2, и обозначим вещественную ось через L.



Фиг. 2.

В обозначениях

$$\omega(z) = z\varphi'(z) + \psi(z)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \varphi(z) + \overline{\omega(z)} + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)}$$

граничные условия задачи запишутся в виде

$$\varphi(t) + \overline{\omega(t)} = \mathrm{const} \quad \text{на} \quad L \tag{2.1}$$

$$\Omega\,(z, \bar{z}) = \mathrm{const} \quad z = iy, \quad 0 < y < b \tag{2.2}$$

Ввиду однородности поля на бесконечности

$$\varphi(z) = \varphi_*(z) + \frac{P}{4} z$$

$$\omega(z) = \omega_*(z) - \frac{P}{4} z$$

где φ_*, ω_* — голоморфные в S функции, допускающие при больших $|z|$ асимптотику

$$\varphi_*(z) = o(1), \quad \omega_*(z) = o(1)$$

Задаваясь функцией влияния в виде

$$\varphi_*(z, \eta) = -\frac{q(\eta)}{z - i\eta} + \varphi_1(z, \eta)$$

$$\omega_*(z, \eta) = q(\eta)\left[\frac{1}{z - i\eta} + \frac{2z}{(z - i\eta)^2}\right] + \omega_1(z, \eta); \quad 0 \leqslant \eta \leqslant b$$

и рассуждая как в предыдущем параграфе, приходим к представлениям для φ и ω

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^b K_1(z, \eta)\, q(\eta)\, d\eta + \frac{P}{4} z \tag{2.3}$$

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^b K_2(z, \eta)\, q(\eta)\, d\eta - \frac{P}{4} z$$

Потенциалы (2.3) приводят задачу (2.1), (2.2) к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^b \frac{q(\eta)\, d\eta}{\eta - y} + \frac{1}{2\pi}\int_0^b k_0(y, \eta)\, q(\eta)\, d\eta = \frac{P}{4} y + c \tag{2.4}$$

В предыдущих равенствах

$$-K_1(z, \eta) = \frac{1}{z - i\eta} + \frac{1}{z + i\eta} + \frac{2z}{(z - i\eta)^2}$$

$$K_2(z, \eta) = -K_1(z, -\eta)$$

$$-k_0(y, \eta) = \frac{1}{\eta + y} + \frac{2y(\eta - y)}{(\eta + y)^3}$$

$q(y)$ — новая искомая вещественная функция на отрезке $[0, b]$, связанная с горизонтальным смещением вдоль берегов разреза соотношением

$$-q(y) = \frac{2\mu}{\varkappa + 1} u\,(0, y), \quad 0 < y < b \tag{2.5}$$

а c — произвольная вещественная постоянная[1].

Основное интегральное уравнение задачи (2.4) естественно назвать уравнением Бюкнера. После преобразования переменных

$$y = l(1 + \xi), \quad \eta = l(1 + t) \tag{2.6}$$

где l — полудлина разреза, уравнение принимает стандартную форму

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(t)\,dt}{t - \xi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} k(\xi, t)\,p(t)\,dt = f(\xi) + C, \qquad -1 < \xi < 1 \tag{2.4'}$$

$$k(\xi, t) = \frac{1}{2 + t + \xi} + \frac{2(t + \xi)(1 + \xi)}{(2 + t + \xi)^2} \tag{2.7}$$

$$p(\xi) = q(y), \qquad f(\xi) = \frac{Pl}{4}(1 + \xi)$$

В соответствии с (2.5), необходимое нам решение (2.4) должно быть ограниченным на отрезке $[0, b]$.

В связи с применением к (2.4) способа приближенного решения, предложенного в [1], § 13 и использованного в предыдущем параграфе, возникает затруднение, заключающееся в следующем. Построенное по этому способу приближенное решение (2.4) в классе ограниченных на отрезке функций обращается в нуль на обоих концах отрезка как квадратный корень от расстояния, а искомое ограниченное решение $q(y)$, согласно (2.5), при $y = 0$ в нуль обратиться не может.

Чтобы обойти эту трудность можно попытаться ввести в (2.4) новую искомую функцию

$$q_0(y) = \sqrt{\frac{y}{l}}\, q(y) \tag{2.8}$$

обращающуюся в нуль на концах отрезка, и затем построить ограниченное решение уравнения для q_0, использовав для этой цели произвольную постоянную c[2]. Однако, как замена (2.8), приводящая к уравнению с менее гладким ядром, так и необходимость подбора постоянной c из некоторого функционального уравнения, заметно снижает точность вычислений.

Представляется более целесообразным продифференцировать уравнение (2.4) и, затем, произвести интегрирование по частям, используя очевидное равенство $q(b) = 0$. Тогда получим уравнение

---

[1] Подробности см. в [2], § 37а.

[2] Решение задачи, основанное на этом соображении, дано в [2], § 37в.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^b \frac{q'(\eta)\,d\eta}{\eta - y} - \frac{1}{2\pi}\int_0^b k_0(\eta, y)\, q'(\eta)\, d\eta = \frac{P}{4}$$

которое после замены (2.6) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\tau(t)\,dt}{t-\xi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} k(t, \xi)\,\tau(t)\,dt = \frac{P}{4} \tag{2.9}$$

Ядро $k(\xi, t)$ определяется формулой (2.7),

$$\tau(\xi) = q'(y); \quad y = l(\xi + 1) \tag{2.10}$$

Уравнение (2.4) от размера трещины не зависит.

В результате не стало постоянной c, обеспечивающей существование ограниченного решения, но отпала и необходимость в ней, ибо расширился класс функций, в котором следует разыскивать решение интегрального уравнения. Согласно (2.5) и (2.10), искомое решение (2.9) должно оставаться ограниченным лишь на левом конце отрезка $[-1, 1]$. На другом же конце ему позволено обращаться в бесконечность порядка $1/2$.

К решению (2.9) вполне подходит способ решения, о котором выше говорилось. Полагая на этот раз ([1], § 13, п. 2).

$$\tau(\xi) = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\tau_0(\xi) \tag{2.11}$$

$$\tau_0(\xi) \sim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\tau_0(\xi_k)\,\frac{\cos n\theta \cos\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}, \qquad \xi = \cos\theta$$

приводим решение (2.9) к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk}\tau_k^0 = \frac{P}{4}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n \tag{2.12}$$

$$\alpha_{mk} = \frac{1}{2n}\left[1 \pm \operatorname{ctg}\frac{\theta_m}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta_m \pm \theta_k}{2} - (1 + \xi_k)\,k(t_k, \xi_m)\right]$$

$$\xi_m = t_m = \cos\theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2n}\pi, \quad \tau_m^0 = \tau_0(\xi_m)$$

Правило знаков в α_{mk} указано вслед за формулами (1.22).

Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений K на концах разреза обратимся к известным соотношениям (напр., [3], стр. 610), которые в нашем случае должны быть записаны в виде (вблизи конца $y = b$)

$$u(o, y) = \mp\frac{\varkappa + 1}{4\mu} K\sqrt{2(b-y)} + O((b-y)^{3/2}) \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dy}u(o, y) = \pm\frac{\varkappa + 1}{4\mu}\,\frac{K}{\sqrt{2(b-y)}} + O((b-y)^{1/2})$$

На основании (2.5), (2.10), (2.11) и (2.13) имеем теперь

$$K = 2\sqrt{2l}\lim_{\zeta \to 1}\sqrt{1-\zeta}\,\varphi(\zeta) - 4\sqrt{l}\lim_{\theta \to 0}\varphi_0(\cos\theta) -$$

$$- \frac{4\sqrt{l}}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varphi_k\,\mathrm{ctg}\frac{\theta_k}{2}$$

Следовательно ($P=1$),

$$\delta_* = \frac{K}{\sqrt{2}\,K_0} = \frac{2\sqrt{2}}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varphi_k^0\,\mathrm{ctg}\frac{\theta_k}{2} \qquad (2.14)$$

Отметим, что на рассматриваемый здесь типичный пример трещины с концом, выходящим на свободную поверхность среды, не раз обращали внимание видные ученые, указавшие для его решения ряд приближенных способов (Уигльсуэрт, Ирвин, Бюкнер, Койтер и др.)*. Особый интерес представляет, разумеется, нахождение отношения (2.14), которое и определялось с той или иной степенью точности. Найденные названными авторами значения отношения δ_* расположены между 1.10 и 1.13. Согласно Койтеру, значение δ_* с возможной ошибкой в пределах единицы последнего знака равно 1.1215.

Формула (2.14) по решению системы (2.12) при $P=1$ дает

n	3	10	15	20	25	30
δ_*	1.1134	1.1203	1.1210	1.1212	1.1213	1.1214
δ	1.5715	1.5844	1.5853	1.5856	1.5858	1.5859

Как видно из таблицы, значение $\delta_* = 1.10$ (результат Ирвина) получается уже при $n=3$, а для достижения высокой точности необходимо брать число n порядка 30.

Математический институт
им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР

Поступила 10 II 1976

Ա. Ի. ԿԱԼԱՆԴԻԱ

ՀԱՐԹ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

[illegible]

Հոդվածը բաղկացած է երկու պարագրաֆից:

* Ссылки на работы этих авторов имеются в [2], стр. 262.

Առաջին պարագրաֆում ճեղք ունեցող անվերջ հարթությունը ծածկված է վերադիր երկարությամբ խաչաձև ամրացումով, իսկ երկրորդում դիտարկված է թույլ հայտնի կտրված կիսահարթության վերաբերյալ խնդիրը։ Բերված են թվային հաշվումների արդյունքները։

ON APPLICATION OF THE EFFECT FUNCTION METHOD TO THE PLANE THEORY OF ELASTICITY

A. I. KALANDIA

Summary

A plane problem involving stringers and cracks is used to illustrate the application of the effect function method, associated with approximate procedures of solving singular integral equations.

The paper consists of two sections: the former concerning an infinite plane having a slit cruciformly overlapped by stringer while the latter deals with the familiar problem on a slightly cut semi-plane.

Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., Наука, 1973.
2. *Kalandia A. I.* Mathematical Methods of Two-dimensional Elasticity, Moscow, Mir Publishers, 1975.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5-ое. М., Наука, 1966.
4. *Жоржолиани Г. Т.* Влияние стрингера на распределение напряжений около концов разреза. Сообщения АН Гр. ССР, 1974, т. 74, № 3, стр. 565—568.
5. *Муки, Стернберг.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. Прикладная механика (перев. Трудов Амер. о-ва инж.-механ.), 1968, т. 35, сер. Е, № 4, стр. 124—135.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН, К. Б. КАЗАРЯН

О ПРИМЕНИМОСТИ ГИПОТЕЗЫ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ТЕЛ К ЗАДАЧАМ КОЛЕБАНИЙ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИН

В работах [1, 2] были предложены гипотезы магнитоупругости тонких тел, упрощающие исследования задач магнитоупругих колебаний пластин и оболочек при наличии магнитного поля. При этом сравнение некоторых задач, полученных как на основе гипотез, так и без использования гипотез, показало, что применимость гипотез магнитоупругости не зависит от величины напряженности внешнего магнитного поля.

В настоящей работе задача колебаний токонесущей пластинки решается как в точной постановке, так и на основе гипотез магнитоупругости. Сравнение результатов показывает, что применимость гипотезы магнитоупругости ограничена величиной плотности электрического тока в пластинке и, следовательно, величиной напряженности собственного магнитного поля.

§ 1. Пусть бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ служит проводником равномерно распределенного стороннего электрического тока плотностью $j_0 = \text{const}$.

Прямоугольная декартова система координат (x, y, z) выбрана так, что плоскость xoy совпадает со срединной плоскостью пластинки, а направление оси x—с направлением электрического тока.

Электромагнитные и упругие свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона μ, плотностью ρ, электропроводностью σ. Для простоты принимается, что диэлектрическая и магнитная проницаемости материала пластинки равны единице.

В отношении пластинки принимается гипотеза Кирхгофа.

Невозмущенная пластинка обладает собственным магнитным полем $\overline{H}_0$, определяемым из задач магнитостатики

$$\operatorname{rot}\overline{H}_0 = \frac{4\pi}{c}\overline{j}_0 \qquad \operatorname{div}\overline{H}_0 = 0 \qquad |z| < h$$
$$\operatorname{rot}\overline{H}^{(e)} = 0 \qquad \operatorname{div}\overline{H}^{(e)} = 0 \qquad |z| > h \tag{1.1}$$
$$\overline{H}_0 = \overline{H}^{(e)} \quad \text{при} \quad z = \pm h$$

(Индекс e принимает значения 1, 2: $e = 1$ относится к области $z > h$, $e = 2$ — к области $z < -h$).

$\overline{H}_0$ имеет следующий вид:

$$H_{x0} = H_{z0} = H^{(1)}_{x0} = H^{(2)}_{z0} = 0$$
$$H^{(1)}_{y0} = -\frac{4\pi j_0 h}{c}, \quad H^{(2)}_{y0} = \frac{4\pi j_0 h}{c}, \quad H_{y0} = -\frac{4\pi j_0 z}{c} \tag{1.2}$$

Начальное напряженное состояние пластинки считается нулевым.

Уравнения электродинамики в области, занимаемой колеблющейся пластинкой, имеют вид [3]

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \frac{4\pi}{c}\left[\overline{j} + \sigma\overline{E} + \frac{\sigma}{c}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \times \overline{H}\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot} \overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \overline{H} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{E} = 4\pi\rho_e \tag{1.3}$$

В (1.3) $\overline{E}$ и $\overline{H}$ — векторы напряженностей электрического и магнитного полей соответственно, $\overline{j}$ — плотность стороннего электрического тока, ρ_e — плотность электрических зарядов, c — электродинамическая постоянная, $\overline{u}$ — перемещение произвольной точки пластинки.

В уравнениях (1.3) участвуют неизвестные перемещения, которые должны удовлетворять уравнениям движения упругой пластинки [4]

$$\hat{L}_1 u + \hat{L}_2 v - 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p_x = 0$$
$$\hat{L}_1 v + \hat{L}_2 u - 2\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + p_y = 0$$
$$\hat{L}_3 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_z - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$
$$\hat{L}_1 = 2Eh\left(\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\mu)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \quad \hat{L}_2 = \frac{Eh}{1-\mu}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$
$$\hat{L}_3 = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)$$

В (1.4) $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ — перемещения срединной поверхности пластинки, а p_x, p_y, p_z, m_x, m_y — компоненты объемной силы и момента электромагнитного происхождения, обусловленные деформацией пластинки и наличием начального стороннего тока

$$\overline{p} = \int_{-h}^{h} \overline{K}\, dz, \quad m_x = \int_{-h}^{h} K_x z\, dz, \quad m_y = \int_{-h}^{h} K_y z\, dz$$
$$\overline{K} = \frac{1}{c}(\overline{j} \times \overline{H}) + \frac{\sigma}{c}\left(\overline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \times \overline{H}\right) \times \overline{H} + (\overline{j}_0 \rho + \overline{E})\rho_e - \frac{1}{c}(\overline{j}_0 \times \overline{H}_0 \tag{1.5}$$

Отметим, что предположение о нулевом начальном напряженном состоянии можно считать, вообще говоря, верным, так как

$$\overline{p}_0 = \int_{-h}^{h} \frac{1}{c} (\overline{j}_0 \times \overline{H}_0)\, dz = 0.$$

Уравнения (1.3) и (1.4) взаимосвязаны также посредством p_x, p_y, p_z, m_x, m_y.

К приведенным уравнениям необходимо присоединить уравнения электродинамики для среды (вакуум), окружающей токонесущую пластинку, и соответствующие граничные условия на поверхностях раздела двух сред

$$\operatorname{rot} \overline{H}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{E}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \overline{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{H}^{(e)}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \overline{H}^{(e)} = 0, \qquad \operatorname{div} \overline{E}^{(e)} = 0 \tag{1.6}$$

$$\overline{H} = \overline{H}^{(e)}, \qquad \overline{E} = \overline{E}^{(e)} \quad \text{при} \quad z = w \pm h$$

(Индекс $e = 1$, как и прежде, относится к области $z > w + h$, $e = 2$ — к области $z < w - h$).

В дальнейшем принимается, что электромагнитные и упругие возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

В возмущенном состоянии компоненты электромагнитного поля и стороннего электрического тока представим в виде

$$\begin{gathered} \overline{H} = \overline{H}_* + \overline{h}, \quad \overline{j} = \overline{j}_0 + \overline{j}_*, \quad \overline{E} = \overline{e} \\ \overline{H}^{(e)} = \overline{H}_*^{(e)} + \overline{h}^{(e)}, \quad \overline{E}^{(e)} = \overline{e}^{(e)} \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $\overline{h}$ и $\overline{e}$ — индуцированное электромагнитное поле, возникающее вследствие колебания пластинки; $\overline{H}_*$ и $\overline{j}_*$ — напряженность собственного магнитного поля и плотность стороннего электрического тока соответственно, обусловленные изгибом пластинки.

Величина $\overline{j}_*$ определяется из условия равенства нулю нормальной к поверхности пластинки составляющей плотности стороннего тока

$$\overline{j} \cdot \overline{n} = 0 \quad \text{при} \quad z = w \pm h \tag{1.8}$$

$\overline{n} = -\operatorname{grad}(w - z)$ — единичный вектор нормали к пластинке.

Из условия малости упругих и электрических возмущений, а также, учитывая тонкость пластинки и равномерное распределение по толщине пластинки начального электрического тока, из второго условия (1.7) и из (1.8) получим следующее линеаризированное выражение, определяющее $\overline{j}_*$:

$$\overline{j}_* = \left(0,\ 0,\ j_0 \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1.9}$$

Собственное магнитное поле пластинки в изгибном состоянии (пластинки, имеющей прогиб, равный w) определяется из следующей краевой задачи магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \overline{H}_* = \frac{4\pi}{c} (\overline{j}_0 + \overline{j}_*), \quad \operatorname{div} \overline{H}_* = 0$$

$$\operatorname{rot} \overline{H}_*^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{H}_*^{(e)} = 0 \tag{1.10}$$

$$\overline{H}_* = \overline{H}_*^{(e)} \quad \text{при} \quad z = w \pm h$$

Из сравнения (1.10) и (1.1) видно, что изменение собственного магнитного поля вследствие изгиба является величиной порядка w, что учитывается при линеаризации уравнений электродинамики (1.3).

Учитывая малость упругих и электромагнитных возмущений и используя (1.9) и (1.10), получим линеаризированные уравнения электродинамики в следующем виде:

для области, занятой пластинкой $|z| < h$

$$\operatorname{rot} \overline{h} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\overline{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \times \overline{H}_0 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{e}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \overline{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \overline{h} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{e} = 4\pi\rho_e \tag{1.11}$$

для областей, окружающих пластинку $|z| > h$

$$\operatorname{rot} \overline{e}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{h}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \overline{h}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{e}^{(e)}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \overline{e}^{(e)} = 0 \qquad \operatorname{div} \overline{h}^{(e)} = 0 \tag{1.12}$$

Линеаризированные граничные условия для компонент индуцированного электромагнитного поля на поверхностях раздела сред запишутся в виде

$$\overline{h} = \overline{h}^{(e)}, \quad \overline{e} = \overline{e}^{(e)} \quad \text{при} \quad z = \pm h \tag{1.13}$$

Линеаризованные выражения для $\overline{p}$ и m_x, m_y имеют вид

$$\overline{p} = \int_{-h}^{h} \overline{f} dz, \quad m_x = \int_{-h}^{h} f_x z dz, \quad m_y = \int_{-h}^{h} f_y z dz$$

$$\overline{f} = \frac{1}{c} (\overline{j}_* \times \overline{H}_0) + \frac{1}{c} (\overline{j}_0 \times \overline{h}) + \frac{\sigma}{c} (\overline{e} \times \overline{H}_0) + \tag{1.14}$$

$$+ \frac{\sigma}{c^2} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \times \overline{H}_0 \times \overline{H}_0 \right) + \frac{\overline{j}_0}{4\pi\sigma} \operatorname{div} \overline{e}$$

При получении (1.14) было использовано соотношение

$$\int_{w-h}^{w+h} (\bar j_* \times \bar H_*)\, dz \approx \int_{-h}^{h} (\bar j_* \times \bar H_0)\, dz \tag{1.15}$$

которое верно с точностью до линейных членов относительно перемещения w.

Таким образом, линейная система уравнений (1.4), (1.11), (1.12) вместе с соотношениями (1.14) и граничными условиями (1.13) является полной и замкнутой для поставленной выше задачи малых магнитоупругих колебаний токонесущей пластинки.

Уравнения электродинамики (1.11) и (1.12) целесообразно привести к удобному для решения виду

$$\Delta \bar h - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \bar h}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \bar u}{\partial t}\times \bar H_0\right)$$

$$\operatorname{div}\bar h = 0, \qquad \operatorname{rot}\bar h = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\bar e + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar u}{\partial t}\times \bar H_0\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar e}{\partial t} \tag{1.16}$$

$$\operatorname{div}\bar e = -\frac{1}{c}\operatorname{div}\left(\frac{\partial \bar u}{\partial t}\times \bar H_0\right)$$

$$\Box \bar h^{(e)} = 0, \qquad \operatorname{rot}\bar h^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar e^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\bar h^{(e)} = 0$$

$$\left(\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

§ 2. Решение искомой задачи магнитоупругих колебаний токонесущей пластинки приводится в случае, когда упругие и электромагнитные возмущения не зависят от координаты x и компоненты тангенциального перемещения $u=0$. Существование подобных решений будет доказано в дальнейшем, то есть должно быть доказано, что $p_x = 0$.

Решение уравнений (1.4) и (1.16), а также граничные условия (1.13) представим в виде плоских монохроматических волн

$$w = w_0 \exp i(\omega t - ky), \qquad v = v_0 \exp i(\omega t - ky) \tag{2.1}$$

$$\bar Q = \bar Q_0(z) \exp i(\omega t - ky)$$

где под Q подразумевается любая из компонент векторов внешнего и внутреннего электромагнитного полей

(ω — частота колебаний, k — волновое число).

Определим сначала компоненты векторов $\bar h$, $\bar e$ и далее с их помощью выражения для пондеромоторных сил и моментов.

Подставляя (2.1) в (1.16), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения $\bar h_{0z}$ и $\bar h_{0z}^{(e)}$:

$$\frac{d^2 h_{y0}}{dz^2} - \nu^2 h_{y0} = -\frac{16\pi^2\sigma j_0 i\omega w_0}{c^3}$$

$$\frac{d^2 h_{z0}}{dz^2} - \nu^2 h_{z0} = -\frac{16\pi\sigma j_0 \omega k w_0 z}{c^3}$$

$$\frac{d^2 h_{x0}}{dz^2} - \nu^2 h_{x0} = 0$$

$$\frac{dh_{z0}}{dz} + ikh_{y0} = 0, \qquad \frac{dh_{z0}^{(e)}}{dz} + ikh_{y0}^{(e)} = 0$$

$$\frac{d^2 h_{z0}^{(e)}}{dz^2} - \nu_1^2 h_{z0}^{(e)} = 0, \qquad \frac{d^2 h_{x0}^{(e)}}{dz^2} - \nu_1^2 h_{x0}^{(e)} = 0$$

$$\frac{d^2 h_{y0}^{(e)}}{dz^2} - \nu_1^2 h_{y0}^{(e)} = 0$$

$$\left(\nu^2 = k^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}, \qquad \nu_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)$$

Решив эти дифференциальные уравнения, используя граничные условия на поверхностях $z = \pm h$, $\overline{h}_0 = \overline{h}_0^{(e)}$ и условия затуханий решений внешней задачи на бесконечности, получим следующие значения для векторов $\overline{h}_0$ и $\overline{h}_0^{(e)}$

$$h_{x0} = h_{x0}^{(e)} = 0, \qquad h_{y0} = -\frac{A_0}{\nu^2}\left[\nu\delta \operatorname{ch} \nu z - 1\right]$$

$$h_{z0} = -\frac{A_0 ik}{\nu^2}\left[\delta \operatorname{sh} \nu z - z\right]$$

$$h_{y0}^{(1)} = -\frac{A_0}{\nu^2}\left[\nu\delta \operatorname{ch} \nu h - 1\right] \exp\left[-\nu_1 (z - h)\right]$$

$$h_{y0}^{(2)} = -\frac{A_0}{\nu^2}\left[\nu\delta \operatorname{ch} \nu h - 1\right] \exp\left[\nu_1 (z + h)\right] \tag{2.2}$$

$$h_{z0}^{(1)} = -\frac{A_0 ik}{\nu^2}\left[\delta \operatorname{sh} \nu h - h\right] \exp\left[-\nu_1 (z - h)\right]$$

$$h_{z0}^{(2)} = \frac{A_0 ik}{\nu^2}\left[\delta \operatorname{sh} \nu h - h\right] \exp\left[\nu_1 (z + h)\right]$$

В (2.2) приняты следующие сокращения:

$$A_0 = \frac{16\pi^2\sigma j_0 i\omega w_0}{c^3}, \qquad \delta = (1 + \nu_1 h)\,(\nu \operatorname{ch} \nu h + \nu_1 \operatorname{sh} \nu h)^{-1}$$

Зная значения векторов индуцированного магнитного поля, легко получить значения векторов индуцированного электрического поля

$$e_y = e_z = e_y^{(e)} = e_z^{(e)} = 0$$

$$e_{x0} = -\frac{A_0 i\omega}{\nu^2 c}\left[\delta \operatorname{sh} \nu z - z\right]$$

$$e_{x0}^{(1)} = \frac{A_0 i\omega}{\nu^2 c}\left[\delta \operatorname{sh} \nu h - h\right] \exp\left[-\nu_1 (z - h)\right] \tag{2.3}$$

$$e_{x0}^{(2)} = -\frac{A_0 i\omega}{\nu^2 c}\left[\delta \operatorname{sh} \nu h - h\right] \exp\left[\nu_1 (z + h)\right]$$

Определим теперь значения пондеромоторных сил и моментов (1.14) при помощи (2.2) и (2.3)

$$f_x = 0, \qquad f_y = -\frac{1}{c} j_0 h_z = \frac{A_0 i k j_0}{\nu^2 c}\left[\delta \operatorname{sh} \nu z - z\right] \exp(i\omega t - ky)$$

$$f_z = -\frac{4\pi\sigma j_0 z}{c^2} e_x - \frac{16\pi^2\sigma j_0^2 i\omega w z^2}{c^4} - \frac{1}{c} j_0 h_y =$$

$$= -\left[\frac{4\pi\sigma j_0 A_0 i\omega}{\nu^2 c^3}(\delta \operatorname{sh} \nu z - z) z + \frac{A_0 j_0 z^2}{c} - \right.$$

$$\left. - \frac{A_0 j_0}{c\nu^2}(\delta\nu \operatorname{ch} \nu z - 1)\right] \exp(i\omega t - ky) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) и (2.1) в уравнения движения (1.4) и выполняя соответствующие интегрирования, получим характеристическое уравнение, определяющее частоты поперечных колебаний пластинки

$$Dk^4 - 2\rho h\omega^2 = \frac{32\pi^2\sigma j_0^2 i\omega}{\nu^2 c^4}\left[\left(h - \delta \operatorname{sh} \nu h - \frac{\nu^2 h^3}{3}\right)\right.$$

$$\left. - \left(k^2 - \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right)\left[\frac{(\nu h \operatorname{ch} \nu h - \operatorname{sh} \nu h)\delta}{\nu^2} - \frac{1}{3} h^3\right]\right] \tag{2.5}$$

$$\left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}\right)$$

Для частот продольных колебаний получим независимое характеристическое уравнение, определяющее частоты собственных продольных колебаний, так как $p_z = 0$

$$\omega_{\text{пр}}^2 = \frac{Ek^2}{(1-\mu^2)\rho}$$

Уравнение (2.5) является трансцендентным и поэтому нахождение его корней связано со значительными трудностями. Исследование корней уравнения (2.5) существенно упрощается при предположении

$$|\nu^2| h^2 \ll 1 \tag{2.6}$$

Принимая $k^2h^2 \ll 1$, что соответствует точности, принятой в теории пластин, из выражения ν^2 при пренебрежении величиной $\frac{\omega^2}{c^2}$ по сравнению с $\left|\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right|$ получим, что для выполнения условия (2.6) достаточно выполнение следующих условий:

$$(\mathrm{Re}\,\omega)^2 \ll \alpha^2, \qquad (\mathrm{Jm}\,\omega)^2 \ll \alpha^2, \qquad \alpha = \frac{c^2}{4\pi\sigma h^2} \tag{2.7}$$

Для подтверждения реальности условий (2.7) и, следовательно, условия (2.6) приведем некоторые характерные для данной задачи значения α^2 и частоты собственных колебаний пластинки ω_0^2.

В случае медной пластинки толщиной $2h=2$ см и при волновом числе $k = 0.01$ $см^{-1}$ имеем

$$\omega_0^2 = 4.19\cdot 10^2 \ сек^{-2}; \qquad \alpha^2 = 1.8\cdot 10^4 \ сек^{-2}$$

то есть ω_0^2 и α^2 отличаются более, чем на порядок.

Отметим также, что медь является наиболее хорошо проводящим материалом. Для металлов, проводимость которых меньше проводимости меди, указанное отличие будет больше.

При справедливости условия (2.6) характеристическое уравнение (2.5) можно привести к следующему виду:

$$Dk^4 - 2\rho h\omega^2 = -\frac{32\pi^2\sigma j_0^2 i\omega k h^4}{3c^4} \tag{2.8}$$

Асимптотические значения векторов электромагнитного поля (2.2) и (2.3) при $|\nu^2|\,h^2 \ll 1$ будут иметь вид

$$h_{y0} = \frac{8\pi^2\sigma j_0 i\omega w_0}{c^3}\left[(h^2-z^2) + kh\left(\frac{h^2}{3}-z^2\right)\right]$$

$$h_{z0} = \frac{8\pi^2\sigma j_0\omega k w_0 z}{3c^3}\left[(1+kh)\,z^2 - 3h^2\left(1+\frac{kh}{3}\right)\right]$$

$$e_{x0} = -\frac{8\pi^2\sigma j_0\omega^2 w_0 z}{3c^3}\left[(1+kh)\,z^2 - 3h^2\left(1+\frac{kh}{3}\right)\right]$$

§ 3. Рассмотрим данную задачу на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел, сформулированной и обоснованной в работах [1, 2]. Эта гипотеза наряду с предположениями Кирхгофа-Лява о тонкой пластинке (оболочке) предполагает, что тангенциальные компоненты вектора индуцированного электрического поля и нормальная компонента вектора индуцированного поля постоянны вдоль толщины пластинки (оболочки).

Для данной задачи эта гипотеза аналитически запишется следующим образом:

$$v_y = v(y, t) - z\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad w = w(y, t)$$
$$e_x = \varphi(y, t), \qquad e_y = \psi(y, t), \qquad h_z = f(y, t) \tag{3.1}$$

С помощью принятой гипотезы магнитоупругости по методу, изложенному в [1, 2], представляется возможным выразить остальные компоненты электромагнитного поля и, следовательно, компоненты векторов $\overline{p}$ и $\overline{m}$ с помощью функций (φ, ψ, f, v, w), а также привести разрешающие уравнения относительно функций (φ, ψ, f).

Из уравнений электродинамики для внутренней области (1.11) при пренебрежении токами смещения по сравнению с токами проводимости компоненты электромагнитного поля h_x, h_y, h_z определятся следующим образом:

$$h_x = \frac{4\pi\sigma}{c}\psi z + \frac{h_x^+ + h_x^-}{2}$$
$$h_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right)z - \frac{8\pi^2\sigma J_0(h^2 - z^2)}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \tag{3.2}$$
$$e_z = -\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial h_x}{\partial y}$$

Осредняя (1.11) по толщине пластинки, получим следующие уравнения относительно неизвестных функций φ, f, ψ:

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\psi = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} \tag{3.3}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

В (3.2) и (3.3) $h_x^\pm$, $h_y^\pm$ — значения компонент h_x и h_y при $z = \pm h$, соответственно.

Система уравнений (3.3) должна решаться совместно с уравнениями электродинамики вне областей, занимаемых пластинкой (1.12), и с граничными условиями (1.13).

В силу непрерывности значений компонент электромагнитного поля на поверхностях пластинки и однородности уравнений электродинамики для внутренней области (3.3) и внешних областей (1.12) получим

$$\psi = \varphi = f \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2), определим значения остальных компонент векторов электромагнитного поля в области, занимаемой пластинкой

$$h_x = e_z = 0, \qquad h_y = \frac{8\pi^2\sigma j_0 (h^2 - z^2)}{c^3} \frac{\partial w}{\partial t} \tag{3.5}$$

Индуцированное электромагнитное поле во внешних областях будет равно

$$\bar{h}^{(e)} = \bar{e}^{(e)} = 0$$

Компоненты сил и моментов выражаются следующим образом:

$$p_x = -\frac{j_0}{c} \int_{-h}^{h} \frac{\partial h_z}{\partial y} z dz = 0, \qquad m_x = 0$$

$$p_y = -\frac{j_0}{c} \int_{-h}^{h} f dz = 0$$

$$p_z = \int_{-h}^{h} \left(-\frac{4\pi\sigma j_0}{c^2} \varphi z - \frac{16\pi^2\sigma j_0^2 z^2}{c^3} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{c} j_0 h_y \right) dz = 0$$

Таким образом, характеристическое уравнение для определения частот продольных колебаний пластинки, полученное с помощью гипотезы магнитоупругости тонких тел, совпадает с уравнением собственных колебаний

$$Dk^4 - 2\rho h \omega_0^2 = 0 \tag{3.6}$$

то есть с точностью принятой гипотезы наличие стороннего тока не оказывает влияния на частоту колебаний.

Сопоставление уравнений (3.6) и (2.8) может, в данном частном случае колебаний, привести к критерию применимости гипотезы магнитоупругости в задачах токонесущих тонких тел.

Для этого запишем решение уравнения (2.8) в виде

$$\frac{\operatorname{Re}\omega}{\omega_0} = \pm\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \frac{\operatorname{Im}\omega}{\omega_0} = \beta \quad \text{при} \quad \beta < 1$$

$$\frac{\operatorname{Re}\omega}{\omega_0} = 0, \qquad \frac{\operatorname{Im}\omega}{\omega_0} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \text{при} \quad \beta \geq 1 \tag{3.7}$$

$$\beta = \frac{8\pi^2\sigma j_0^2 k h^3}{3\rho c^4}$$

Наименьшее расхождение частот ω и ω_0 будет, очевидно, при $\beta \ll 1$. В этом случае частоту магнитоупругих колебаний, полученную на основе точного решения, можно представить посредством частоты собственных колебаний следующим образом:

$$\omega \approx \omega_0 (1 + i\beta) \qquad \beta \ll 1$$

Если пренебречь малым затуханием, обусловленным мнимой частью частоты ω, аналогично тому, как при рассмотрении задач свободных колебаний пренебрегается малым конструктивным демпфированием, то из условия $\beta \ll 1$ получим соотношение для j_0^2, при несоблюдении которого возможно большое различие между частотами магнитоупругих колебаний токонесущей пластинки, полученными на основе точного решения и с помощью гипотезы

$$j_0^2 \ll \gamma^2 = \frac{3\sigma c^2 \eta}{8\pi^2 \sigma k h^3} \tag{3.8}$$

В табл. 1 приведены для наглядности численные значения плотности электрического тока γ для пластинок ($h = 1$ *см*, $k = 0.01$ *см*$^{-1}$) из различных проводящих материалов, а также значения удельной теплоты нагрева Q_1, обусловленной выделением джоулева тепла $Q_1 = \gamma^2 \sigma^{-1}$.

Таблица 1

Материал пластинки	$\gamma \cdot 10^{3}$ *ампер·см*$^{-2}$	$Q_1 \cdot 10^{3}$ *ватт·см*$^{-3}$
Алюминий	9.217	0.238
Медь	10.76	0.198
Латунь	16.55	1.229

Условие (3.8) является необходимым условием в задачах, решаемых на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел и оно ограничивает применимость этой гипотезы при наличии стороннего электрического тока, то есть при значениях начального тока $j_0 \approx \gamma$, результаты, полученные на основе гипотезы, могут быть, вообще говоря, неверными.

Отметим однако, что численные значения, полученные для Q_1, являются очень большими. При значениях плотности j_0, соизмеримых с γ, необходимо также учитывать довольно большой температурный нагрев, обусловленный выделением в токонесущих пластинках джоулева тепла, и, следовательно, зависимость физико-механических характеристик материала пластинок от температуры.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 IV 1976

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԲԱՐԱԿ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԻՊՈԹԵԶԻ ԿԻՐԱՌԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է հոսանքատար սալի տատանումների խնդիրը ինչպես ճշգրիտ դրվածքով, այնպես էլ մագնիսաառաձգականության հիպոթեզի հիման վրա։

Հաճախականությունների համար ստացված արդյունքների համեմատությունը ցույց է տալիս, որ մագնիսաառաձգականության հիպոթեզի կիրառելիությունը սահմանափակվում է սալի մեջ էլեկտրական հոսանքի խտության մեծությամբ և հետևաբար սեփական մագնիսական դաշտի լարվածության մեծությամբ։

ON APPLICABILITY OF THE MAGNETOELASTICITY HYPOTHESIS OF THIN BODIES TO CURRENT-CARRYING PLATE VIBRATION PROBLEMS

M. V. BELUBEKIAN, K. B. KAZARIAN

S u m m a r y

The current-carrying plate vibration problem is solved both on the basis of the magnetoelasticity hypothesis of thin bodies and in exact statement.

The comparison of the results concerning vibration frequency shows that the applicability of the magnetoelasticity hypothesis is restricted by the density of electric current in the plate and therefore by the strength of its magnetic field.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. *Белубекян М. В.* К уравнениям магнитоупругости токонесущих пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 2.
4. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

А. А. АБГАРЯН

О СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОСМИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В СВЕТОВОМ ПОТОКЕ

Проблема управления угловым положением космического летательного аппарата (КЛА) приобретает все большую важность для заатмосферных научных исследований [1]. Одним из путей решения этой проблемы является использование солнечного светового давления [2]. В этом случае управляющие вращательные моменты формируются в результате взаимодействия солнечного света со специальными черно-белыми покрытиями, нанесенными на поверхность КЛА, плоскими или коническими рулями и т. п. [3]—[5]. Применение светового моментного привода для прецизионной ориентации и стабилизации КЛА открывает широкие возможности для проведения фундаментальных научных экспериментов в космическом пространстве. Так, например, в работе [6] обсуждается принцип организации систематического наблюдения эйнштейновского эффекта отклонения света гравитационным полем [7] со спутника Земли, постоянно ориентированного на Солнце, с помощью солнечного светового давления. Действительно, для спутника, выведенного на орбиту высотой более 1000 км, основным из астро- и геофизических факторов, создающих вращательные моменты, влияющие на его угловое положение, является солнечное световое давление [3]. При этом возмущающими вращательными моментами, возникающими за счет гравитационного градиента, аэродинамических эффектов, магнитного поля и т. п. в первом приближении можно пренебречь и считать, что продолжительно не заходящий в тень Земли аппарат и размещенные на нем приборы постоянно ориентированы на Солнце. Однако, современный научный эксперимент предъявляет высокие требования к точности поддержания ориентации приборов и КЛА:0.01" и менее [8]. Поэтому учет возмущающего действия внутренних и внешних моментов, приводящих к постепенному накоплению отклонений, является существенным и представляет собой достаточно сложную задачу. Ее сложность определяется, в частности, и тем, что всякий реальный КЛА представляет собой сложный комплекс смещающихся друг относительно друга в процессе функционирования деталей и узлов, что приводит к возникновению случайным образом распределенных возмущающих внутренних моментов. Подобным же образом создают внутренние возмущения и перемещения экипажа внутри КЛА. С целью их учета и описания создаваемых ими эффектов в работе [9] использован статистический подход, заключающийся в следующем. Уравнения движения КЛА линеаризуются и определение аддитивного воздействия многих малых дискретных возмущений производится путем представления процесса в виде марковского случайного блуждания. Такой подход позволил применить к описанию поведения массивного КЛА с развитыми главными значениямя тензора инерции уравнение диффузии, то есть Эйнштейна—Фоккера—Планка—Колмогорова (ЭФПК) для функции плотности вероятности углового смещения. Таким образом, описание поведения КЛА, выполняющего научно-исследовательские функции, приближается к описанию работы прецизионных приборов, для которых необходим статистический учет внутренних и внешних шумов. Отметим также, что характерной чертой поведения измерительных приборов является «дрейф нуля», то есть смещение его нуль-пункта в результате постепенного накопления элементами прибора различных изменений [10]. Подобный подход представляется целесообразным распространить и на описание поведения КЛА со световым моментным приводом, захваченного в прецизионно стабилизированный режим ориентации на Солнце.

Теоретическое рассмотрение задач, возникавших при описании движения вокруг центра масс твердого тела, испытывающего влияние светового потока, велось, как правило, в идеализированной постановке, изменением со временем оптических свойств управляющих поверхностей пренебрегалось. Однако, под влиянием таких факторов космического пространства, как высокий вакуум, интенсивное излучение и т. п., оптические характеристики покрытий должны изменяться [11]. Поэтому будет изменяться и степень взаимодействия КЛА со световым потоком. В этой связи ниже рассматривается задача о малых крутильных колебаниях КЛА, ориентированного солнечным световым потоком, с изменяющимися во времени оптическими характеристиками.

Пусть аппарат представляет собой черно-белый цилиндр. Черное покрытие нанесено так, что его границы проходят по продольным образующим выше границы симметрии поверхности на малые конечные углы α, отсчитываемые от нее в плоскости кругового поперечного сечения. Нанесенное таким образом покрытие с большой степенью точности обеспечивает линейность угловой зависимости управляющего вращательного момента, ориентирующего цилиндр светлой стороной на Солнце (симметричное покрытие привело бы к квадратичной зависимости) [12]. В соответствии со сказанным выше примем, что черно-белое покрытие не идеально и характеризуется постепенно изменяющимися коэффициентами поглощения $R_1(t)$ в более светлой части покрытия и $R_2(t)$ в его более темной части. Расчеты дают следующее выражение для возвращающего момента при малых углах ψ отклонения от направления на Солнце:

$$M \sim -2P_0 \alpha bh (R_2 - R_1)\left(\psi - \frac{2}{3}\psi^3\right) \tag{1}$$

где P_0 — давление света на идеально поглощающую поверхность, b и h — радиус и длина цилиндра.

При составлении уравнения для малых крутильных колебаний КЛА вокруг оси крена воспользуемся рассмотренным выше статистическим подходом, учитывая, что на аппарат действуют внутренние возмущения стохастического характера и внешние, создаваемые аэродинамическими эффектами, магнитными полями, гравитационным градиентом, ударами микрометеоритов и т. п. Поскольку все эти возмущения независимы друг от друга, можно предположить, что их результирующая может быть представлена как случайная функция и ее высокочастотная составляющая на определенном интервале времени эквивалента стационарному стохастическому процессу. Введение интенсивного нелинейного демпфирования в систему, обладающую положением устойчивого равновесия, создаваемого возвращающим моментом светового привода, способствует ограничению последствия возмущений и применимости аппарата уравнений ЭФПК к описанию поведения системы.

Положим для упрощения рассмотрения задачи, что случайное воздействие не создает параметрических эффектов и носит характер случайного вращательного момента $\mu\xi(t)$, где μ — коэффициент, характеризующий уровень случайных возмущений. Уравнение малых колебаний, что позволяет пренебречь гироскопическими связями между осями аппарата, имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta(1+\gamma\varphi^2)\dot{\varphi} + \omega_0^2(t)\,\varphi = \frac{2}{3}\,\omega_0^2(t)\,\varphi^3 + \mu\xi(t) \tag{2}$$

где $\omega_0^2(t) = \dfrac{2P_0abh}{I}\,[R_2(t) - R_1(t)]$, I — компонента тензора инерции, δ и γ — параметры, определяющие закон демпфирования колебаний. Таким образом, КЛА в световом потоке эквивалентен нелинейному осциллятору, возбуждаемому случайной силой [13].

После замены переменных вида

$$\varphi = \frac{a(t)}{\sqrt{\omega}}\cos\psi, \qquad \dot{\varphi} = -a(t)\sqrt{\omega}\sin\psi, \qquad \psi = \int_0^t \omega(\tau)\,d\tau + \theta(t) \tag{3}$$

с помощью асимптотического метода Крылова—Боголюбова [14] и процедуры усреднения случайных функций, разработанной Стратоновичем [15], получаются следующие эквивалентные исходному уравнению (2) дифференциальные уравнения ЭФПК для функции распределения вероятности амплитудного фактора $P(a)$ и фазы $W(\theta)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[m_1 - \delta a - \frac{\delta\gamma a^3}{4\omega}\right]P\right\} = \frac{1}{2}\,\sigma_1^2\,\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} - \frac{\omega_0^2 a^2}{4\omega}\right]W\right\} = \frac{1}{2}\,\sigma_2^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \tag{5}$$

где

$$\sigma_1^2 = \frac{\mu^2\varkappa(\omega)}{2\omega}, \qquad m_1 = \frac{\sigma_1^2}{2a}, \qquad \sigma_2^2 = \frac{\mu^2\varkappa(\omega)}{2a^2\omega}$$

$\varkappa(\omega)$ — спектральная плотность шумов на частоте ω.

Поскольку параметр $\omega_t(t)$ медленно изменяется со временем, с вы
кой степенью точности справедливо квазистатическое или адиабатиче

приближение, при котором $\frac{\partial P}{\partial t} \simeq 0$.

В указанном адиабатическом приближении имеем

$$P(a, t) = \sqrt{\frac{\delta\gamma}{2\sigma_1^2 \pi\omega}}\, a e^{\left[-\frac{\lambda a^2}{\sigma_1^2} - \frac{\delta\gamma a^4}{8\sigma_1^2\omega} - \frac{2\delta\omega}{\sigma_1^2\gamma}\right]} \left[\Phi\left(\frac{2}{\sigma_1}\sqrt{\frac{\delta\omega}{\gamma}}\right)\right]^{-1}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

Приближенное решение уравнения (5) для диффузионного распл
ния фазы получается в виде

$$W(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2 t}}\, e^{-\frac{\left[\theta - \int\limits_0^t B(\tau)\,d\tau\right]^2}{2\sigma_2^2 t}}$$

где

$$B = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} - \frac{\omega_0^2 a^2}{4\omega^2}$$

Полученные результаты позволяют определить величину наиболее
роятного отклонения КЛА от направления на Солнце

$$\varphi_{н.в.} = \left[\frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{4}{\gamma^2} + \frac{2\sigma_1^2}{\delta\gamma\omega(t)}}\right]^{1/2}$$

Как видно из (8), это отклонение зависит от уровня возмущаю
воздействий, убывает с увеличением параметров демпфирования и мед
но увеличивается со временем, что свидетельствует о постепенном ухуд
нии качества светового моментного привода.

Считаю приятным долгом выразить свою благодарность М. М. К
леву за постановку рассмотренного вопроса.

ВНИИ оптико-физических
измерений

Поступила 28 VIII

Ա. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

ԼՈՒՅՍԻ ՀՈՍՔՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՏԻԵԶԵՐԱԿԱՆ ԹՌՉՈՂ ՍԱՐՔԻ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում տրվում է տիեզերական թռչող սարքի փոքր միաբաղադրիչ տատանումների վիճակագրական նկարագրությունը, նկատի ունենալով ինչպես մի շարք անխուսափելի պատահական ազդեցություններ, այնպես էլ արևի ճառագայթումից առաջացող մոմենտը։

ON ACCIDENTAL VIBRATION OF THE SPACECRAFT IN THE STREAM OF LIGHT

A. A. ABGARIAN

S u m m a r y

A statistic description is presented of small monocomponent vibration of the spacecraft radiationally stabilized, under the effect of accidental disturbance, with monotonically changing parameters of the light moment drive.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гурзадян Г. А.* Некоторые вопросы астрономической ориентации и прецизионной стабилизации астрономической аппаратуры на космических кораблях. Тезисы доклада, VI симпозиум ИФАК, управление в пространстве, Цахкадзор, август 1974 г.
2. *Цандер Ф.А.* Проблема полета при помощи реактивных аппаратов. Межпланетные полеты. М., Оборонгиз, 1961.
3. *Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г.* Управление космическими летательными аппаратами. М., «Машиностроение», 1974.
4. *Галицкая Э. Б., Киселев М. И.* О радиационной ориентации космических аппаратов. Космические исследования, 1965, III, 3, 391.
5. *Джуманалиев Н. Д., Киселев М. И., Крестников О. В.* О солнечном руле. Космические исследования, 1971, IX, 4, 610.
6. *Киселев М. И., Кравцов В. Е.* О возможности повышения метрологического уровня изучения эффекта Эйнштейна. Научные труды ВНИИФТРИ. Проблемы физической оптики и метрологии, стр. 38, М., 1975.
7. *Эйнштейн А.* Сущность теории относительности. М., ИЛ, 1955.
8. *Proise M.* AIAA-Paper, 1972, 853, 11 pp.
9. *Дэвидсон Н. Р., Армстронг Р. Л.* Влияние движений экипажа на ориентацию космического корабля. Ракетная техника и космонавтика, 1971, IX, № 2, 53.
10. *Абгарян А. А., Киселев М. И.* Статистическое описание эволюции режима работы частотного преобразователя. Измерительная техника, 1975, № 7, 21.
11. *Naumann R. I.* Skylab induced environment. AIAA Pap, 1974, No. 1205.
12. *Джуманалиев Н. Д., Киселев М. И.* О малых колебаниях черно-белых тел, стабилизированных световым потоком. Космические исследования, 1967, V, 4, 636.

13. *Киселев М. И., Руденко В. Н.* Параметрическая неустойчивость космических тел в световом потоке. Научные труды ВНИИФТРИ. Проблемы гравитационных измерений, стр. 36, М., 1974.
14. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974.
15. *Стратонович Р. Л.* Радиотехника и электроника, 1958, вып. 3, № 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

С. М. СААКЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОДНИМ НЕЛИНЕЙНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пользуясь методом Каменкова Г. В. [1], исследуется процесс становления ограниченных колебаний, описываемых следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \lambda^2(t)\, x = \mu f(x, \dot{x}, \mu, t) \tag{1}$$

где $\lambda(t)$ — периодическая функция периода T_1,

$f(x, \dot{x}, \mu, t)$ — многочлен сколь угодно высокой степени с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами с общим периодом T,

μ — малый параметр.

Под ограниченными колебаниями подразумеваются те колебания, у которых x и $\dot{x}$ при $t\to\infty$ не стремятся ни к нулю, ни к бесконечности и ни к какому определенному числу. Такие колебания Каменков Г. В. называет стационарными.

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda(t)\, x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda(t)\, x_1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\, x_2 + \mu f_1(x_1, x_2, \mu, t) \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$f_1(x_1, x_2, \mu, t) = \frac{1}{\lambda(t)} f(x_1, \lambda(t)\, x_2, \mu, t)$$

Рассмотрим систему линейных уравнений и сопряженную ей линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda(t)\, x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda(t)\, x_1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\, x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda(t)\, y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\lambda(t)\, y_1 + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\, y_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим коэффициенты при x_1, x_2 через p_{ij} $(i,\ j = 1, 2)$, а коэффициенты при y_1, y_2 — через q_{ij} $(i,\ j = 1, 2)$. Между этими коэффициентами существует связь

$$p_{ij} = -q_{ji}$$

Характеристические уравнения как для основной, так и для сопряженной линейной системы имеют вид [2]

$$\rho^2 + A\rho + 1 = 0 \tag{5}$$

Свободный член уравнения (5) определяется по формуле

$$A_n = e^{\int\limits_0^{T_1} \frac{d\lambda(t)}{\lambda(t)}} = e^{\ln\lambda(T_1) - \ln\lambda(0)} = e^0 = 1$$

Если $\frac{1}{4}A^2 \leqslant 1$, то оба корня характеристического уравнения (5) будут комплексными с единичными модулями. В этом случае система (3) или (4) будут иметь устойчивые периодические фундаментальные решения [2].

Пусть решения системы (4)

$$y_{1,2}^{(1)} = e^{k_1 t}\varphi_{1,2}^{(1)}(t) \quad \text{и} \quad y_{1,2}^{(2)} = e^{k_2 t}\varphi_{1,2}^{(2)}(t)$$

где $\varphi_{1,2}^{(1,2)}(t)$ — периодические функции периода T_1

$$k_i = \frac{1}{T_1}\ln\rho_i \quad (i = 1, 2)$$

ρ_i — корни характеристического уравнения (5).

Стационарные решения системы (2) обозначим через x_1 и x_2.

Произведя очевидные преобразования

$$\begin{aligned} \dot y_1^{(1)} &= \lambda(t)\, y_2^{(1)} \\ \dot y_2^{(1)} &= \lambda(t)\, y_1^{(1)} + \frac{\dot\lambda(t)}{\lambda(t)}\, y_2^{(1)} \end{aligned} \;\left|\; \begin{aligned} & x_1 \\ & x_2 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= \lambda(t)\, x_2 \\ \dot x_2 &= -\lambda(t)\, x_1 - \frac{\dot\lambda(t)}{\lambda(t)}\, x_2 + \mu f_1(x_1,\ x_2,\ \mu,\ t) \end{aligned} \;\left|\; \begin{aligned} & y_1^{(1)} \\ & y_2^{(1)} \end{aligned}\right.$$

получим

$$\frac{d}{dt}\left(x_1 y_1^{(1)} + x_2 y_2^{(1)}\right) = \mu y_2^{(1)} f_1(x_1,\ x_2,\ \mu,\ t) \tag{6}$$

Аналогично уравнению (6) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(x_1 y_1^{(2)} + x_2 y_2^{(2)}\right) = \mu y_2^{(2)} f_1(x_1,\ x_2,\ \mu,\ t) \tag{7}$$

Обозначая через

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 y_1^{(1)} + x_2 y_2^{(1)} \\
z_2 &= x_1 y_1^{(2)} + x_2 y_2^{(2)}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1 &= y_2^{(1)} f_1 (x_1, x_2, \mu, t) \\
F_2 &= y_2^{(2)} f_1 (x_1, x_2, \mu, t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

получим следующую систему нелинейных нестационарных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} &= \mu F_1 (z_1, z_2, \mu, t) \\
\frac{dz_2}{dt} &= \mu F_2 (z_1, z_2, \mu, t)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Функции F_1 и F_2 разложим в сходящиеся степенные ряды по степеням малого параметра μ.

$$F_i (z_1, z_2, \mu, t) = \mu F_{i1} (z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{i2} (z_1, z_2, t) + \cdots \quad (i = 1, 2)$$

где $F_{ij} (z_1, z_2, t)$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3 \ldots)$ — многочлены сколь угодно высоких степеней с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами.

Подставляя выражения для $F_i (z_1, z_2, t)$ в уравнение (10), получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} &= \mu F_{11} (z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{12} (z_1, z_2, t) + \cdots \\
\frac{dz_2}{dt} &= \mu F_{21} (z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{22} (z_1, z_2, t) + \cdots
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Определим необходимые и достаточные условия существования стационарных колебаний системы (11) по членам первого порядка в отношении μ. Положим $z = z_1 + iz_2$, $\bar{z} = z_1 - iz_2$.

Будем иметь

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \mu z_1 (z, \bar{z}, t) + \mu^2 z_2 (z, \bar{z}, t) + \cdots \\
\dot{\bar{z}} &= \mu \bar{z}_1 (z, \bar{z}, t) + \mu^2 \bar{z}_2 (z, \bar{z}, t) + \cdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Преобразуем систему (12), полагая

$$
\begin{aligned}
z &= \xi + \mu U (z, \bar{z}, t) \\
\bar{z} &= \bar{\xi} + \mu \bar{U} (z, \bar{z}, t)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Функции U, $\bar{U}$ определим так, чтобы в преобразованной системе функции, играющие роль функций z_1, $\bar{z}_1$, не зависели от времени. Представим z_1 и U в виде

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{p=0}^{k} \sum_{\alpha=0}^{p} Q_{p-\alpha,\alpha}(t)\, z^{p-\alpha} \bar{z}^{\alpha} \\
U &= \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{p=0}^{k} \sum_{\alpha=0}^{p} U_{p-\alpha,\alpha}(t)\, z^{p-\alpha} \bar{z}^{\alpha}
\end{aligned} \tag{14}
$$

где $U_{p-\alpha,\alpha}(t)$ — периодическая функция периода T_2.

Подставляя выражения (13) и (14) в (12), приравнивая члены одинаковых порядков, получаем дифференциальное уравнение для определения $U_{p-\alpha,\alpha}(t)$

$$
-\frac{dU_{p-\alpha,\alpha}(t)}{dt} + Q_{p-\alpha,\alpha}(t) = Q^{(1)}_{p-\alpha,\alpha}(t) \tag{15}
$$

Из последнего равенства следует, что соответствующим выбором функции $U_{p-\alpha,\alpha}(t)$ все величины $Q^{(1)}_{p-\alpha,\alpha}(t)$ можно принять постоянными, которые обозначим через $B_{p-\alpha,\alpha}$.

Постоянные $B_{p-\alpha,\alpha}$ определяются по формуле

$$
B_{p-\alpha,\alpha} = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} Q_{p-\alpha,\alpha}(t)\, dt
$$

Принимая $p = 2\alpha + 1$, имеем

$$
\frac{d\xi}{dt} = \mu\xi \sum_{\alpha=1}^{k} B_{\alpha+1,\alpha} (\xi \cdot \bar{\xi})^{\alpha} + \mu^2 (\cdots)
$$

Полагая

$$
B_{\alpha+1,\alpha} = a_{\alpha+1,\alpha} + i b_{\alpha+1,\alpha}, \qquad \xi = \eta_1 + i\eta_2, \quad \bar{\xi} = \eta_1 - i\eta_2
$$

будем иметь

$$
\begin{aligned}
\frac{d\eta_1}{dt} &= \mu \left[\eta_1 \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha+1,\alpha} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\alpha} - \eta_2 \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha+1,\alpha} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\alpha} \right] + \mu^2 (\cdots) \\
\frac{d\eta_2}{dt} &= \mu \left[\eta_2 \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha+1,\alpha} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\alpha} + \eta_1 \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha+1,\alpha} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\alpha} \right] + \mu^2 (\cdots)
\end{aligned} \tag{16}
$$

Переходя к полярным координатам,

$$
\eta_1 = r\cos\theta, \quad \eta_2 = r\sin\theta
$$

получаем дифференциальные уравнения относительно r и θ

$$
\frac{dr}{dt} = \mu r \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha+1,\alpha} r^{2\alpha} + \mu^2 (\cdots) \tag{17}
$$

$$
\frac{d\theta}{dt} = \mu \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha+1,\alpha} r^{2\alpha} + \mu^2 (\cdots) \tag{18}
$$

Каменковым доказано [1], что необходимое и достаточное условие существования периодических решений уравнения (17) по членам первого порядка независимо от старших членов заключается в том, чтобы уравнение

$$L_1(r) = r\sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha+1,\,\alpha}\, r^{2\alpha} = 0 \tag{19}$$

имело, по крайней мере, один положительный корень нечетной кратности.

Предположим, что алгебраическое уравнение (19) имеет вещественный положительный корень r_0, тогда переменная ξ записывается в виде

$$\xi = r_0(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Подставляя это значение в выражение $z = \xi + \mu U(z, \bar{z}, t)$, учитывая, что $z = z_1 + iz_2$ и решая полученное уравнение относительно z_1 и z_2, найдем

$$\begin{aligned} z_1 &= r_0\cos\theta + \mu P(r_0\cos\theta,\ r_0\sin\theta,\ t) \\ z_2 &= r_0\sin\theta + \mu Q(r_0\cos\theta,\ r_0\sin\theta,\ t) \end{aligned} \tag{20}$$

Это решение будет стационарным.

Учитывая (20), из системы алгебраических уравнений (18) определяем x_1 и x_2 — стационарные решения системы дифференциальных уравнений (2).

Выражение θ через t с точностью до членов первого порядка малости в отношении μ найдем из уравнения (18).

Если вопрос о существовании стационарных колебаний членами первого порядка в отношении μ не решается, то систему (11) преобразуем по формуле

$$\begin{aligned} z &= \xi + \mu U_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 U_2(z, \bar{z}, t) + \cdots + \mu^s U_s(z, \bar{z}, t) \\ \bar{z} &= \bar{\xi} + \mu \overline{U}_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 U_2(z, \bar{z}, t) + \cdots + \mu^s \overline{U}_s(z, \bar{z}, t) \end{aligned} \tag{21}$$

Стационарные колебания определяются из решения алгебраического уравнения

$$r(\mu L_1 + \mu^2 L_2 + \cdots + \mu^s L_s) = 0$$

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 20 I 1976

Ս. Մ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՄԵԿ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՈՎ ՆԿԱՐԱԳՐՎՈՂ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտվում են ժամանակի նկատմամբ պարբերական գործակիցներով ոչ գծային և ոչ ստացիոնար երկրորդ կարգի դիֆֆերենցիալ հավասարումով նկարագրվող սահմանափակ տատանումները։ Կառուցված են հավասարման ստացիոնար լուծումները։

THE INVESTIGATION OF LIMITED VIBRATION DESCRIBED BY A NONLINEAR AND NONSTATIONARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

S. M. SAHAKIÂN

Summary

A limited vibration, described by the nonlinear and nonstationary differential equation of the second order with time periodical coefficient is investigated.

The stationary solutions of the equation are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменков Г. В.* Избранные труды, т. I, М., изд. «Наука», 1971.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. II, М., изд. АН СССР, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, №4, 1976 Механика

С. Н. КУКУДЖАНОВ

ВЛИЯНИЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Исследуется влияние параметров ортотропии упругого материала на свободные колебания цилиндрической оболочки, находящейся под предварительным действием внешнего давления, при различных тангенциальных граничных условиях, включая упругое закрепление в осевом направлении. Основное внимание уделяется наименьшим частотам, практически наиболее важным и наиболее чувствительным к внешним воздействиям.

Исследование велось на основании полубезмоментной теории [1, 2]. Рассматривались оболочки средней длины и длинные, для которых полубезмоментная теория достаточно хорошо отражает физическую суть явления [3]. Приводятся простые формулы для определения наименьших частот и соответствующих форм волнообразования. При этом получено, что если для незагруженной оболочки упругие постоянные материала в осевом и радиальном направлениях влияют равноценно на наименьшие частоты, то в случае действия внешнего давления большую роль начинают оказывать упругие свойства в радиальном направлении. Причем степень их влияния существенно зависит от величины предварительного напряжения и вида тангенциальных граничных условий. В случае же упругого закрепления края влияние упругих постоянных материала на наименьшие частоты незагруженной оболочки, в отличие от вышесказанного, различно. Приводятся пределы применимости полученных формул.

Введем следующие обозначения: $R\xi$, $R\varphi$ — координаты в осевом и радиальном направлениях; R, h, l — радиус, толщина, длина оболочки; E_1, E_2 — модули упругости в осевом и радиальном направлениях; γ — удельный вес материала; q — внешнее давление, t — время, c — жесткость упругого закрепления.

Используя основные допущения полубезмоментной теории и пренебрегая влиянием продольной компоненты силы инерции [4], получаем основное уравнение относительно радиального перемещения w

$$\varepsilon\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+w\right)^2+\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+q_2^0\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+w\right)=-\frac{\gamma R^2}{E_2 g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}-\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right) \tag{1}$$

$$\varepsilon=\frac{h^2}{12R^2},\qquad \Omega=\frac{\gamma R^2}{E_2 g},\qquad q_2^0=\frac{qR}{E_2 h}$$

и следующие соотношения для определения продольного u и окружного v смещений, осевого T_1 и сдвигающего S усилий

$$v = \int w\,d\varphi, \qquad u = -\int \frac{\partial v}{\partial \varphi}\,d\xi, \quad T_1 = \frac{E_1 h}{R}\frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad S = -\int \frac{\partial T_1}{\partial \xi}\,d\varphi \tag{2}$$

Для решения уравнения (1) в случае замкнутой оболочки необходимо удовлетворить четырем граничным условиям в осевом направлении (по два на каждом краю) и условию периодичности в радиальном направлении. Поэтому решение уравнения (1) ищем в форме

$$w = X(\xi)\cos n\varphi \cos \omega t \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (1), получаем

$$X^{IV} - \lambda^4 X = 0, \quad \lambda^4 = \frac{\gamma R^2}{E_1 g}\,\omega^2 n^2 (n^2+1) + t^4 \frac{E_2}{E_1}\, n^4 (n^2-1)\, \frac{E_2}{E_1} \varepsilon n^4 (n^2-1) \tag{4}$$

Решение уравнения (4) для полубезмоментной оболочки совпадает по форме с обычным решением уравнения свободных поперечных колебаний балки и имеет вид

$$X(\xi) = C_1 \sin \lambda\xi + C_2 \cos \lambda\xi + C_3 \operatorname{sh} \lambda\xi + C_4 \operatorname{ch} \lambda\xi \tag{5}$$

C_i — произвольные постоянные.

Очевидно, что для рассматриваемой оболочки, безмоментной в осевом направлении, не имеют смысла моментные граничные условия, с другой стороны, пренебрежение этими граничными условиями оправдано тем, что относительная зона их влияния на цилиндрическую оболочку (средней длины или длинную) мала и изменение наименьшей частоты незначительно [5].

Выразим на основании соотношений (2) безмоментные граничные условия в осевом направлении ($\xi = \text{const}$) через w. В результате получаем

$$\begin{aligned} v &= 0 \quad (X = 0), & u &= 0 \quad (X' = 0) \\ T_1 &= 0 \quad (X'' = 0), & S &= 0 \quad (X''' = 0) \end{aligned} \tag{6}$$

Граничное условие для упругого закрепления края в осевом направлении имеет вид

$$T = cu \qquad \left(X'' = \gamma X', \quad \gamma = \frac{cl}{E_1 h}\right) \tag{7}$$

Таким образом, полубезмоментная теория, достаточно хорошо отражая физическую суть явления, позволяет свести сложную задачу колебания цилиндрической оболочки к хорошо известному решению уравнения свободных колебаний балки. Причем упругому закреплению края оболочки в осевом направлении соответствует упругое закрепление конца балки относительно углового смещения [6].

На основании выражения (4) находим зависимость для частоты

$$\frac{\gamma R^2}{E_1 g}\omega^2 = \frac{\lambda^4}{n^2(n^2+1)} - \mu\frac{E_2}{E_1}\frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} + \varepsilon\frac{E_2}{E_1}\frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} \tag{8}$$

Следовательно, если граничные условия для оболочки заданы, то ее собственные частоты ω определяются через соответствующие собственные частоты λ для балки на основании выражения (8), где фигурирует параметр n, характеризующий число полуволн в окружном направлении для той или иной формы колебания.

В дальнейшем исследуем, как влияют постоянные ортотропии на колебания цилиндрической оболочки при различных тангенциальных граничных условиях в зависимости от величины внешнего воздействия.

Рассмотрим различные виды граничных условий, приведенные в таблице (где i соответствует номеру типа граничных условий). Наименьшее собственное значение уравнения (4) для определенного типа граничных условий записано в графе λ_*/λ_1, при этом $\lambda_1 = \dfrac{\pi R}{l}$.

Таблица

i	Граничные условия		λ_*/λ_1
	$\xi = 0$	$\xi = l/R$	
1	$v = T_1 = 0$ $(X = X'' = 0)$	$v = T_1 = 0$ $(X = X'' = 0)$	1
2	$v = T_1 = 0$ $(X = X'' = 0)$	$v = u = 0$ $(X = X' = 0)$	1.25
3	$v = u = 0$ $(X = X' = 0)$	$v = u = 0$ $(X = X' = 0)$	1.5
4	$v = u = 0$ $(X = X' = 0)$	$u = S = 0$ $(X = X''' = 0)$	0.75
5	$v = u = 0$ $(X = X' = 0)$	$T_1 = S = 0$ $(X'' = X''' = 0)$	0.6
6	$v = T_1 = 0$ $(X = X'' = 0)$	$u = S = 0$ $(X' = X''' = 0)$	0.5
7	$v = 0,\ T_1 = cu$ $(X = 0,\ X'' = \rho X')$	$v = T_1 = 0$ $(X = X'' = 0)$	$k_7(\rho)$
8	$v = 0,\ T_1 = cu$ $(X = 0,\ X'' = \rho X')$	$v = u = 0$ $(X = X' = 0)$	$k_8(\rho)$

Введем параметр $k_i = \lambda_* \lambda_1^{-1}$, где индекс i соответствует номеру перечисленных граничных условий.

$k_i(\rho)$ $(i = 7, 8)$ — некоторые функции от относительной жесткости упругого закрепления $\rho = cl/E_1 h$ [7] (фиг. 1). Нетрудно видеть, что при изменении ρ в интервале $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, $k_7(\rho)$ лежит в области значений

$$1 \leqslant k_7(\rho) \leqslant 1.25$$

При $\rho = 0$, $k_7(0) = 1$ получаем известное решение для оболочки со свободно опертыми краями. При $\rho = \infty$, $k_7(\infty) = 1.25$ получаем решение для оболочки, у которой один край свободно оперт, а другой жестко заделан.

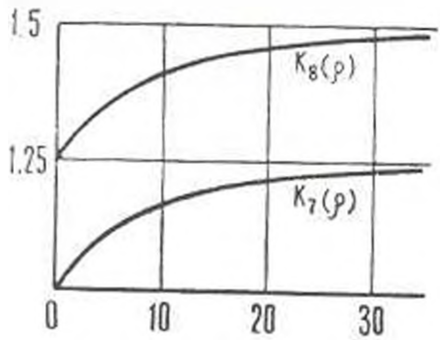
Из графика $k_7(\rho)$ нетрудно определить то значение относительной жесткости ρ, начиная с которого закрепление края можно считать жестким.

При $\rho = \dfrac{cl}{E_1 h} > 35$ край оболочки можно считать закрепленным жестко, так как $k_7(\rho > 35) \approx 1.25$.

Значения $k_8(\rho)$ определяются второй кривой фиг. 1. При этом, как нетрудно видеть, $k_8(\rho)$ изменяется в интервале

$$1.25 \leqslant k_8(\rho) \leqslant 1.5 \tag{9}$$

В данном случае закрепление второго края можно принять жестким при $\rho \geqslant 30$ и взять $k_8 \approx 1.5$.



Фиг. 1.

Практически наибольший интерес представляют наименьшие частоты. Определим в зависимости от величины упругих постоянных E_1, E_2, а также от величины жесткости упругого закрепления c и предварительного напряжения t^0 значение n_*, при котором реализуется наименьшее значение частоты $\omega_i^2(n)$.

Если $n^2 \gg 1$, то соотношение (8) примет вид

$$\Omega_1\omega_i^2 = \lambda_i^4 n^{-4} - t_1^0 n^2 + \varepsilon \frac{E_2}{E_1} n^4, \qquad t_1^0 = \frac{qR}{E_1 h}, \qquad \Omega_1 = \frac{\gamma R^2}{E_1 g} \tag{10}$$

Представим выражение (10) в следующем виде:

$$\omega_i^2 = \omega_{0i}^2\left(1 - \delta_n^i \frac{t_1^0}{t_*}\right), \qquad \Omega_1\omega_{0i}^2 = \lambda_i^4 n^{-4} + \frac{E_2}{E_1}\varepsilon n^4$$

$$\delta_n^i = \frac{t_*}{T_n^i}, \qquad T_n^i = \lambda_i^4 n^{-6} + \frac{E_2}{E_1}\varepsilon n^2, \quad t_* = 1.75\lambda_1\varepsilon^{3/4} \tag{11}$$

Введя обозначение $n = x^2$, приходим к следующим соотношениям:

$$\min\omega_{0i}^2 = \omega_{0i}^2(x_{0i}) \quad \text{при} \quad t_* = k_i\lambda_1, \quad x_{0i} = (E_1/E_2)^{1/8} k_i\lambda_1\varepsilon^{1/4} \tag{12}$$

$$\min T_n^i = T_{x_i^0}^i \quad \text{при} \quad t_{0i} = k_i\lambda_1, \quad x_i^0 = \sqrt[4]{3}\,(E_1/E_2)^{1/8} k_i\lambda_1\varepsilon^{1/4} \tag{13}$$

При этом $k_i\,(i = 1, \ldots, 6)$ есть величины постоянные, а при $i = 7, 8$ k_i есть некоторая функция от ρ.

Отметим, что на основании соотношений (12) получаем формулу для наименьшей частоты незагруженной ортотропной оболочки

$$\omega_{0i}^2(n_{0i}) = \frac{2\sqrt{E_1E_2}\,g}{\gamma R^2} k_i^2 \lambda_1^2 \varepsilon^{1/2}$$

и формулу критического напряжения, согласно соотношений (13),

$$\sigma_{*i}^{l} = (E_1)^{1/4}(E_2)^{3/4}\, 1.75\, k_i \nu_1 \varepsilon^{3/4}$$

совпадающую с известными результатами.

На основании рассуждений, аналогичных работе [4], получаем, что $\min \omega_i^2(n)$ будет при $n = n_*$, заключенном в интервале

$$\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} k_i n_0^2 < n_*^2 < 1.315\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} k_i n_0^2, \qquad n_0^2 = \nu_1 \varepsilon^{-1/4} \tag{14}$$

так как $(n_*^0)^2 = 1.315\, n_0^2$. Для значений, находящихся в интервале (14), $n_*^2 \gg 1$, если величина $k_i n_0^2 (E_1/E_2)^{1/4} \gg 1$. Это условие приводит к соотношению, ограничивающему l сверху (для оболочек средней длины)

$$\frac{R}{l} \gg 2.74\, k_i^{-1}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4}\left(\frac{h}{R}\right)^{1/2} \tag{15}$$

При этом использовалось обычно принятое условие, что $n^2 \gg 1$, если $n_* > 4$. Ограничение l снизу, накладываемое полубезмоментной теорией, будет приведено ниже.

При $n = n_{0i}$ и $n = n_i^0$ из соотношений (11) получаем

$$T_{n_i^0}^{l} = k_i t_0 \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{3/4}, \quad T_{n_{0i}}^{l} = 1.134\, k_i t_0 \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{3/4}, \quad t_0 = 1.75\,\nu_1 \varepsilon^{3/4}$$

$$\vartheta_{n_i^0}^{l} = \frac{t_0}{T_{n_i^0}^{l}} = k_i^{-1}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{3/4}, \quad \vartheta_{n_{0i}}^{l} = \frac{t_0}{T_{n_{0i}}^{l}} = k_i^{-1}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{3/4} \cdot 0.883 \tag{16}$$

$$\omega_{0i}^2(n_{0i}) = k_i^2 \omega_{01}^2(n_0), \quad \omega_{0i}^2(n_i^0) = 1.155\, k_i^2 \omega_{01}^2(n_0), \quad \omega_{01}^2 = \frac{\sqrt{E_1E_2}\,g}{\gamma R^2}\, 2\lambda_1^2 \varepsilon^{1/2} \tag{17}$$

$\omega_{01}(n)$ — наименьшая частота незагруженной ортотропной оболочки со свободно опертыми краями.

Запишем E_1 и E_2 в следующем виде (γ_1, γ_2—независимые параметры):

$$E_1 = \gamma_1 E, \quad E_2 = \gamma_2 E \tag{18}$$

Подставляя соотношения (16)—(18) в выражение (11), получаем

$$\omega_i^2(n_{0i}) = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}\, k_i^2 \omega_{01}^2(n_0)\left(1 - 0.883\,\frac{k_i^{-1}}{\gamma_1^{-3/4}\gamma_2^{3/4}}\,\frac{t^0}{t_*}\right)$$

$$\omega_i^2(n_i^0) = 1.155\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,k_i^2\omega_0^2(n_0)\left(1 - \frac{k_i^{-1}}{\gamma_1^{1/4}\gamma_2^{3/4}}\frac{t^0}{t_*}\right), \quad \omega_0^2(n_0) = \frac{Eg}{\gamma R^2}2\varepsilon^{1/2} \tag{19}$$

$$t^0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{qR}{Eh}, \qquad t_* = \frac{\sigma_*}{E} = 1.75\gamma_1\varepsilon^{3/4}, \qquad \frac{t^0}{t_*} = \frac{\sigma_0}{\sigma_*}$$

$\omega_0(n_0)$ — наименьшая частота изотропной оболочки с модулем упругости $E(E_1 = \gamma_1 E,\ E_2 = \gamma_2 E)$ при шарнирном закреплении краев; σ^0, σ_* — начальное и критическое напряжения.

Функция ω_i^2 при различных граничных условиях в зависимости от t^0/t_* для фиксированных n_{0i} и n_i^0, на основании выражений (19), представляет прямые A_iC_i и A_iC_i, показанные на фиг. 4. Абсцисса точки их пересечения (обозначим ее T_i^*) будет

$$T_i^* = \frac{t^0}{t_*} = 0.565\,k_i\gamma_1^{1/4}\gamma_2^{3/4} \tag{20}$$

Обозначив $n = x^2$, из выражения (10) получаем

$$2\omega_i^2 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\varepsilon x - 2k_i^4x^{-1} - \frac{t^0}{\gamma_2} = 0, \quad t^0 = 2x(\gamma_2\varepsilon - \gamma_1 k_i^4 x^{-4}) \tag{21}$$

Отсюда, в частности, при $t^0 = 0$ и $t^0 = \gamma_1^{1/4}\gamma_2^{3/4}k_i t_*$, получаем соотношения $x_{ij} = n_{0i}^2$ и $x_i^0 = (n_i^0)^2$.

Введем безразмерные величины

$$N = x x_0^{-1}, \qquad T = t^0 t_*^{-1}, \quad (x_0 = k_1\varepsilon^{-1/4}, \quad t_* = 1.75\gamma_1\varepsilon^{3/4}) \tag{22}$$

Тогда соотношение (21) примет вид

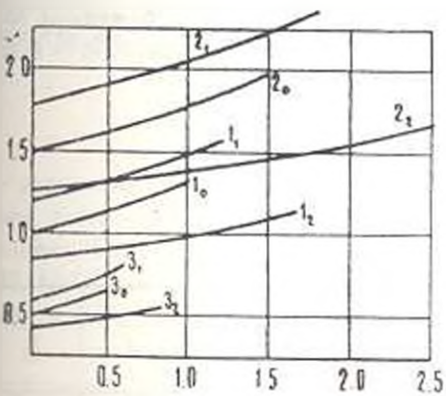
$$T = 1.15(\gamma_2 N - \gamma_1 k_i^4 N^{-3}) \tag{23}$$

а неравенство (14) будет

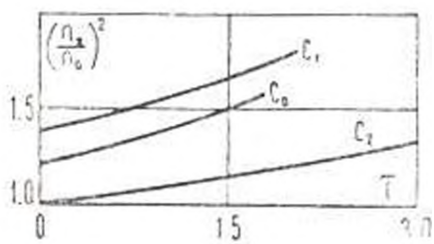
$$\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{1/4} k_i \le N \le 1.315\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{1/4} k_i \tag{24}$$

Задавая значения N из интервала (24), определим по формуле (23) соответствующие значения T. Построенные таким образом кривые зависимости $N_*(T)$ приведены на фиг. 2, в частности, для значений ($\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$) (0), ($\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 1$) (1) и ($\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$) (2) (при $i = 1, 3, 6$) соответственно кривые $1_0, 1_1, 1_2, 2_0, 2_1, 2_2$ и $3_0, 3_1, 3_2$. На фиг. 3 приведены аналогичные кривые для случаев (0), (1), (2), когда край упруго закреплен ($i = 7$) при $c_* = 16\frac{Eh}{l}$. Отметим, что в случае (1) относительная жесткость $\rho_* = \frac{c_*l}{\gamma_1 Eh} = \frac{c_*l}{2Eh}$, в случае же (2) $\rho_* = \frac{c_*l}{Eh}$.

Нетрудно видеть, что число волн в окружном направлении, при котором реализуется наименьшая частота загруженной оболочки, существенно зависит от параметров ортотропии, вида граничных условий, величины жесткости упругого закрепления и величины предварительного напряжения. На основании этих кривых и выражения (11) легко определить значения n_* и соответствующие минимальные частоты $\omega_i(n_*)$ при заданных граничных условиях и нагрузке t^0.



Фиг. 2.



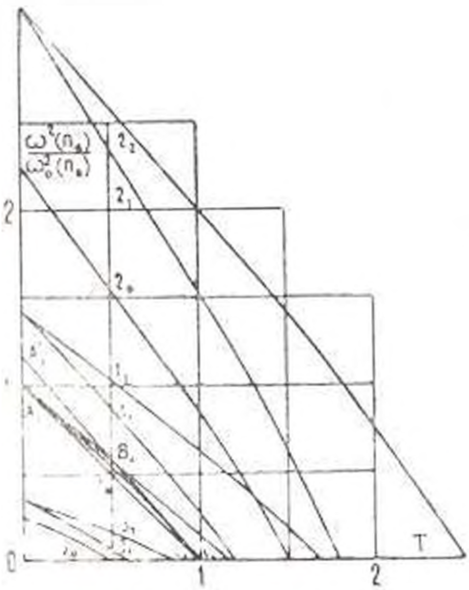
Фиг. 3.

Учитывая, что для внешнего давления, изменяющегося в интервале $0 \leqslant t^0 t_*^{-1} \leqslant$ [illegible] k_i, соответствующие значения n_* лежат в интервале [24], на основании выражения (11) легко построить кривые наименьших значений $\omega_i^2(n_*)$. Кривая эта заключена в области $A_i B_i C_i$, так как наименьший и наибольший угловые коэффициенты для прямой (11) будут у $C_i A_i$ и $C_i A_i$, уравнения которых имеют вид [19]. На фиг. 4 для краткости представлены только прямые $C_i A_i$ и $C_i A_i$. Запишем уравнение прямой $C_i A_i$

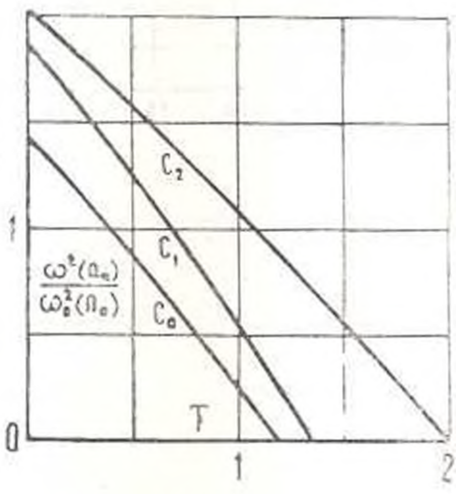
$$\omega_i^2 = \omega_i^2(n_0)\, k_i \sqrt{[illegible]} \left(1 - \frac{[illegible]}{[illegible]} \frac{t^0}{t_*}\right) \tag{25}$$

На фиг. 4 для вышеотмеченных случаев (0), (1), (2) представлены кривые наименьших частот при различных граничных условиях ($i = 1, 3, 6$) в зависимости от величины внешней нагрузки. Аналогичным образом нетрудно построить кривые для иных случаев и иных значений γ_1, γ_2. Легко заметить, что параметры ортотропии в продольном и окружном направлении по-разному влияют на частоту предварительно-напряженной оболочки. Если для незагруженной оболочки влияние их равноценно, то по мере увеличения внешней нагрузки большую роль начинает играть величина радиального модуля упругости. При этом нетрудно заметить, что вид граничных условий сильнее сказывается по мере возрастания внешней нагрузки и параметров ортотропии.

Случай упругого закрепления края $i=7$ при $c=c_*$ представлен на фиг. 5 как для изотропной оболочки $E_1=E_2=E$ (кривая C_0), так и для ортотропных оболочек $E_1=2E$, $E_2=E$ (кривая C_1) и $E_1=E$, $E_2=2E$ (кривая C_2). При сравнении кривых C_0, C_1, C_2 с 1_0, 1_1, 1_2 (фиг. 3) можно видеть степень влияния упругого закрепления как для изотропной оболочки, так и для ортотропной. Нетрудно заметить, что для ортотропной незагруженной оболочки, если $c=0$, то постоянные E_1 и E_2 в равной мере влияют на наименьшие частоты, тогда как для ортотропной оболочки с упругим закреплением $c=c_*$ влияние E_1 и E_2 на наименьшую частоту незагруженной оболочки различно. Это обусловлено тем, что при $i=7, 8$ имеем $k_i=k_i(\gamma)$, $\gamma=\dfrac{cl}{E_1 h}$.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Таким образом, все вышесказанное относится и к упругому закреплению края, за исключением того, что для незагруженной ортотропной оболочки влияние упругих постоянных материала на наименьшую частоту различно.

На основании (11) можно установить, что отношение $\omega_*^2(n)/\omega_0^2(n)$ будет минимальным при $\lambda_* = 1$ (для $n=n_i^*$), то есть независимо от l^*, в отличие от минимума частоты $\omega_1^2(n)$.

Рассмотрим колебания длинных цилиндрических оболочек, находящихся под действием внешнего давления. В данном случае, ввиду малости $\lambda_* = k_1(\gamma)/l_*$, величина n^2, при которой реализуется наименьшая частота, сравнима с единицей. Следовательно,

$$\omega_i^2 = \frac{Eg}{\gamma R^2}\,\frac{\gamma_1 k_i^2(\beta)\lambda_i^4 + \gamma_2 \varepsilon n^4(n^2-1)^2 - t^0 n^2(n^2-1)}{n^2(n^2+1)}, \quad t^0 = \frac{\sigma^0}{E} = \frac{qR}{Eh} \tag{26}$$

Учитывая из вышеизложенного, что при колебаниях предварительно-напряженной оболочки более существенную роль играют упругие свойства оболочки в радиальном направлении в сравнении с осевым следует, что при сохранении веса конструкции желательно вводить радиальные подкрепления. В частности, если оболочка подкреплена достаточно часто расположенными радиальными ребрами, симметричными относительно срединной поверхности, тогда для γ_1, γ_2 получаем следующие значения [3]:

$$\gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = 1 + \frac{12 J_z}{ah^3}$$

a — расстояние между подкрепляющими ребрами, J_z — момент инерции сечения радиального ребра относительно центральной оси осевого сечения оболочки. Подставляя данные значения γ_1, γ_2 в выражения (11), (18), (23), (24), получаем наименьшую частоту и соответствующую форму волнообразования для оболочки, подкрепленной шпангоутами.

Для ортотропных цилиндрических оболочек условием применимости полубезмоментной теории является соотношение

$$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/2} |w_i^{(2)}| \gg |w^{(2)}|$$

которое, как показали расчеты, в данном случае принимает вид

$$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/2} n_i^2 \gg \lambda_i^2$$

за исключением малых зон, примыкающих к краям оболочки. Отсюда получаем

$$\frac{l}{R} \geq M_0 k_i \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2} \tag{27}$$

В работе [8] при $k_i = 1$, $E_1 = E_2 = E$ приведена аналогичная оценка, при этом $M_0 = 15$. Подставляя это значение M_0 в (27), получаем условие применимости полубезмоментной теории, ограничивающее l снизу.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе

Поступила 22 XII 197

Ս. Ն. ԿՈՒԿՈՒՋԱՆՈՎ

ՏԱՆԳԵՆՑԻԱԼ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆԱԽԱՊԵՍ ԼԱՐՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է առաձգական նյութի օրթոտրոպիայի պարամետրների ազդեցության աստիճանը նախապես արտաքին ճնշման ազդեցության տակ գտնվող գլանային թաղանթի սեփական տատանումների ձևի և հաճախականության վրա տարբեր տանգենցիալ եզրային պայմանների ժամանակ առանցքային ուղղությամբ առաձգական ամրացմամբ ներառյալ։

Հիմնական ուշադրությունը դարձվում է ամենափոքր հաճախականություններին, որոնք գործնականորեն ավելի կարևոր են և ավելի զգայուն արտաքին ազդեցությունների նկատմամբ։

THE EFFECT OF TANGENTIAL BOUNDARY CONDITIONS ON FORCE VIBRATION OF THE PRESTRESSED ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL.

S. N. KUKUDJANOV

S u m m a r y

The effect is considered of elastic orthotropic material parameters on free vibration of a cylirdrical shell under the preliminary action of external pressure and different tangential boundary conditions, including elastic fixing in the axial direction. The main attention is given to the lowest frequencies actually most important and sensible to external influences.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Некоторые новые задачи строительной механики оболочек и тонкостенных конструкций. Известия АН СССР, ОТН, 1947, № 1.
2. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
3. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
4. *Кукуджанов С. Н.* О влиянии тангенциальных граничных условий на собственные колебания предварительно напряженной цилиндрической оболочки. Прикладная мех. АН УССР, 1973, т. IX, в. 11.
5. *Forsberg K.* Influence of boundary conditions of the modal characteristics of thin cylindrical shells. AIAA J., 1964, v. 2, № 12.
6. *Алфутов Н. А.* О влиянии упругого закрепления края цилиндрической оболочки в осевом направлении на значение верхнего критического давления. Проблемы устойчивости в строительной механике. М., 1965.
7. *Ананьев И. В.* Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем, 1946.
8. *Зюзин В. А.* Влияние условий закрепления торцов оболочки на величину критического внешнего давления. Труды VI Всесоюз. конф. по теор. оболочек и пл., Баку, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, №4, 1976 Механика

А. А. БАГДАСАРЬЯН, Н. С. МАЛЮТИН

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОЕДИНЕННОЙ КЛЕЕМ С КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ

В современной технике находят применение клеевые соединения оболочек и подкрепляющих их элементов [1]. Особенностью таких соединений является наличие между оболочкой и подкрепляющим элементом промежуточного слоя с упругими характеристиками, существенно отличающимися от характеристик соединяемых элементов, поэтому представляет интерес рассмотрение влияния этого слоя на колебания оболочек.

В данной работе решается задача о собственных колебаниях цилиндрической оболочки, соединенной с кольцевыми ребрами жесткости путем склеивания, при действии внешнего давления и осевых сил. Учитывается дискретный характер размещения ребер и эксцентриситет центра тяжести сечения ребер относительно срединной поверхности оболочек. Приводятся числовые результаты.

Уравнения собственных колебаний нагруженной оболочки запишем в виде [2]

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w + B\left[(-1)^k(1-\delta_{k1})\sum_{i=1}^{m} q_{ik}\delta(x-x_i) + \right.$$

$$\left. - (3c^2)^{1/2}\delta_{k3}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i q_{i2}\delta(x-x_i)\right] = 0 \qquad (1)$$

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \qquad B = \frac{(1-\nu^2)R}{Eh}, \qquad (k=1, 2, 3)$$

Здесь u, v, w — компоненты перемещений точек срединной поверхности; L_{kj} — дифференциальные операторы в частных производных по переменным x, y и t, содержащие члены с величинами внешнего давления и осевого усилия; t — время; Rx, Ry — координаты в осевом и окружном направлениях; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; R, h — радиус и толщина оболочки; m — количество ребер; q_{i1}, q_{i3} — составляющие погонных усилий взаимодействия оболочки и i-го ребра, приведенные к линии $x = x_i$; $\delta(x)$ — дельта-функция; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$; $\varepsilon_i = 1$ при внутреннем расположении ребра, $\varepsilon_i = -1$ при внешнем расположении ребра.

В случае использования теории пологих оболочек операторы L_{kj} будут иметь вид

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{(1-\nu^2)R^2}{E}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_{12} = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$L_{13} = \nu\frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{21} = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$L_{22} = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{(1-\nu^2)R^2}{E}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{31} = \nu\frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{33} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 + 1 + \frac{(1-\nu^2)R^2}{E}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{pR(1-\nu^2)}{Eh}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{q(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Здесь p — внешнее давление; q — осевое сжимающее напряжение; ρ — плотность оболочки.

Уравнения колебаний i-го ребра, имеющего поперечное сечение с осью симметрии, которая проходит по нормали к оболочке через приведенную точку контакта, можно представить в виде

$$l_{k2}^{(i)} V_i + l_{k3}^{(i)} w_i = q_{ik} \quad (k = 2, 3) \tag{2}$$

Здесь V_i и w_i — тангенциальные и радиальные перемещения точек, лежащих на осевой линии i-го ребра; $l_{kj}^{(i)}$ — обыкновенные дифференциальные операторы по переменным y и t, содержащие члены с начальным усилием T_i в ребре.

Операторы $l_{kj}^{(i)}$ имеют вид

$$l_{22}^{(i)} = \frac{E_i F_i}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \rho_i^* F_i \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad l_{23}^{(i)} = \frac{E_i F_i}{R^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$l_{32}^{(i)} = -\frac{E_i F_i}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - z_i\frac{z_i}{R}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right) + z_i\frac{I_i}{R} - \rho_i^* F_i \frac{\partial^3}{\partial y \partial t^2}$$

$$l_{33}^{(i)} = -\frac{E_i F_i}{R^2}\left(1 - z_i\frac{z_i}{R}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \rho_i^* F_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E_i I_i}{R^4}\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \frac{T_i}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Здесь F_i, I_i — площадь и центральный момент инерции сечения ребра; E_i — модуль упругости ребра; z_i — расстояние между осевой линией ребра и поверхностью клеевого слоя; ρ_i^* — плотность i-го ребра.

Исключая из уравнений (1) и (2) контактные усилия, получаем

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w + B\Bigg| (-1)^k (1-\delta_{k1}) \sum_{i=1}^{m} \left(l_{k2}^{(i)} V_i + l_{k3}^{(i)} w_i\right)\delta(x - x_i) +$$

$$+ (3c^2)^{1/2}\delta_{k3}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=1}^{m} z_i\left(l_{22}^{(i)} V_i + l_{23}^{(i)} w_i\right)\delta(x - x_i)\Bigg| = 0, \; (k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

Считая клеевой слой тонким и работающим только на сдвиг, запишем для него соотношения упругости

$$\frac{G_i \xi_i}{\gamma_i}\left[V_i - v_i - \varkappa_i\left(\lambda_i + \gamma_i + \frac{h}{2}\right)\frac{dw_i}{R\,dy} \right] = q_{i2} \tag{4}$$

$$v_i = v\,(x_i\,,\ y), \quad w_i = w\,(x_i\,,\ y)$$

где ξ_i—ширина клеевого слоя: G_i—модуль сдвига слоя; γ_i—толщина слоя.

Исключая q_{i2} из уравнений (2) и (4), получаем уравнение, связывающее V_i, v_i и w_i

$$l_1^{(i)} V_i + l_2^{(i)} v_i + l_3^{(i)} w_i = 0 \tag{5}$$

где

$$l_1^{(i)} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G_{0i} - \frac{R^2}{E_i^*}\,\rho_i^*\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad l_2^{(i)} = G_{0i}, \qquad l_3^{(i)} = \left(G_{0i}\,\frac{r_i}{R} + 1\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$r_i = \varkappa_i\left(\lambda_i + \gamma_i + \frac{h}{2}\right), \qquad G_{0i} = \frac{\xi_i\,G_i\,R^2}{\gamma_i E_i^* F_i}$$

Уравнения (3) и (5) являются разрешающими уравнениями задачи.

Решение уравнений (3) и (5) ищем в виде

$$u = f_1(x)\cos ny\,\sin \omega t, \quad v = f_2(x)\sin ny\,\sin \omega t \tag{6}$$

$$w = f_3(x)\cos ny\,\sin \omega t, \quad V_i = A_i \sin ny\,\sin \omega t$$

где ω — круговая частота собственных колебаний; n — параметр волнообразования по окружности поперечного сечения оболочки.

Тогда для функций f_1, f_2 и f_3 получаем уравнения

$$l_{k1} f_1 + l_{k2} f_2 + l_{k3} f_3 + B(-1)^k (1 - \delta_{1k}) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik} f_{2i} + b_{ik} f_{3i})\,\delta\,(x - x_i) = 0 \tag{7}$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3)$$

Здесь l_{kj} — обыкновенные дифференциальные операторы; a_{ik} и b_{ik} — постоянные, образующиеся соответственно из L_{kj}, $l_j^{(i)}$, $l_k^{(i)}$ и $l_3^{(i)}$ по выполнении дифференцирования по x, y и t согласно представлениям (6) и после отбрасывания тригонометрических функций.

Уравнения (7) имеют такую же структуру, как и уравнения работы [3] и их решение для случая шарнирно опертых краев оболочки имеет вид

$$f_k = 2B \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{\Delta'(s_j)} \left[(a_{i2} f_{2i} + b_{i2} f_{3i})\,\Delta_{2k}(s_j) - (a_{i3} f_{2i} + \right.$$

$$\left. + b_{i3} f_{3i})\,\Delta_{3k}(s_j) \right] \left[\frac{\operatorname{sh} s_j x}{\operatorname{sh} s_j l}\operatorname{sh} s_j (l - x_i) - \operatorname{sh} s_j (x - x_i)\,\sigma_0 (x - x_i) \right] \tag{8}$$

$$(k = 2,\ 3)$$

Здесь $\sigma_0(x)$ — единичная функция, равная единице при $x > 0$ и равная нулю при $x < 0$; $\Delta(s)$ — определитель, элементы которого c_{jk} получаются из l_{kj} заменой операции дифференцирования на параметр s; s_j — корни уравнения $\Delta(s) = 0$, среди которых нет отличающихся только знаком; Δ_{jk} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу c_{jk}.

В случае применения теории пологих оболочек будет

$$c_{11} = s^2 - \frac{1}{2}(1-\nu)n^2 + \Omega^2, \quad c_{12} = \frac{1}{2}(1+\nu)ns, \quad c_{13} = \nu s$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2}(1+\nu)ns, \quad c_{22} = \frac{1}{2}(1-\nu)s^2 - n^2 + \Omega^2, \quad c_{23} = -n$$

$$c_{31} = \nu s, \quad c_{32} = n$$

$$c_{33} = c^2(s^2 - n^2)^2 + 1 - \Omega^2 - (1-\nu^2)n^2\frac{pR}{Eh} + (1-\nu^2)\frac{q}{E}$$

$$a_{i2} = -\frac{E_i^* F_i}{R^2} M_{1i} z_i, \quad b_{i2} = -\frac{E_i^* F_i}{R^2}(1 - M_{1i}) r_{0i} z_i$$

$$b_{i3} = -\frac{E_i^* F_i}{R^2}\Big\{[1 - n^2 r_{0i}(1-\gamma_{0i})](1 - n^2 r_{0i}) - [1 + n^2 r_{0i}^2(1-\gamma_{0i})](n^2 - M_{1i}) -$$

$$(n^2 - M_{1i})(1 + M_{1i})\frac{1}{G_{0i}}\Big\} z_i - \frac{E_i^* I_i}{R^4} n^4 + n^2\frac{T_i}{R^2}$$

$$\Delta_{23} = -\frac{1}{2}n(1-\nu)[s^2(2+\nu) - n^2] - n\Omega^2, \quad \Delta_{32} = -\Delta_{23}$$

$$\Delta_{33} = \frac{1}{2}(1-\nu)(s^2 - n^2)^2 + \left[\frac{1}{2}(3-\nu)(s^2 - n^2) + \Omega^2\right]\Omega^2$$

$$\Delta_{22} = \left[s^2 - \frac{1}{2}(1-\nu)n^2 + \Omega^2\right]\Big[c^2(s^2 - n^2)^2 + 1 - \Omega^2 - (1-\nu^2)n^2\frac{pR}{Eh} +$$

$$+ (1-\nu^2)s^2\frac{q}{E}\Big] - \nu^2 s^2$$

$$\Delta = \Big[c^2(s^2 - n^2)^2 + 1 - \Omega^2 - (1-\nu^2)n^2\frac{pR}{Eh} +$$

$$+ (1-\nu^2)\frac{q}{E}\Big]\left\{\frac{1}{2}(1-\nu^2)(s^2 - n^2)^2 + \Omega^2\left[\frac{1}{2}(3-\nu)(s^2 - n^2) + \Omega^2\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\nu)[s^4(1-\nu^2) - (s^2 - n^2)^2] - \Omega^2(\nu^2 s^2 - n^2)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{R^2(1-\nu^2)}{E}\rho\omega^2, \qquad M_{1i} = n^2 - \frac{\gamma_{0i}\Omega^2}{1-\nu^2}$$

$$z_i = \frac{G_{0i}}{M_{1i}+G_{0i}}, \qquad r_{0i} = \frac{r_i}{R}, \qquad \gamma_{0i} = \frac{\gamma_i}{\gamma}, \qquad \eta_{0i} = \frac{\gamma_i E}{\gamma E_i}$$

Полагая в (8) последовательно $x = x_1, x_2, \ldots x_m$, получим систему $2m$ однородных алгебраических уравнений относительно f_{2i} и f_{3i}. Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем характеристическое уравнение.

Для одинаковых равнонагруженных и равномерно расположенных ребер величины a_{ik} и b_{ik} не будут зависеть от номера i ребра (поэтому далее индекс i опускается) и $x_i = \frac{il}{m+1}$.

Разыскивая решение системы в виде

$$f_{2i} = a\sin\frac{\pi N x_i}{l}, \qquad f_{3i} = b\sin\frac{\pi N x_i}{l}, \qquad (1 \leqslant N < m+1)$$

где a, b — постоянные; N — целое число, характеризующее форму колебаний, lR — длина оболочки, также, как и в работе [3], получаем характеристическое уравнение

$$B^2(a_2b_3 - a_3b_2)(\Phi_{32}\Phi_{23} - \Phi_{22}\Phi_{33}) - B(a_2\Phi_{22} - a_3\Phi_{32} + b_2\Phi_{23} - b_3\Phi_{33}) + 1 = 0$$

Здесь

$$\Phi_{ik} = \sum_{j=1}^{4}\frac{\Delta_{ik}(s_j)}{\Delta'(s_j)}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha_j}{\operatorname{sh}\alpha_j - \cos\beta}, \qquad \left(\alpha_j = \frac{s_j l}{m+1}, \quad \beta = \frac{\pi N}{m+1}\right)$$

Для варианта пологой оболочки характеристическое уравнение, разрешенное относительно изгибной жесткости, в безразмерном виде будет иметь вид

$$\frac{E^*I}{DR} = \frac{TR}{n^2D} + \frac{1}{n^4c^2}\,\frac{1 + zF_0(1-\nu^2)K}{zF_0(1-\nu^2)M_2(\Phi_{23}^2 + \Phi_{22}\Phi_{33}) + \Phi_{33}} \qquad (9)$$

Здесь

$$K = M_1\Phi_{22} + M_2\Phi_{23} + M_3\Phi_{33} + M_4(\Phi_{23}^2 + \Phi_{22}\Phi_{33})$$

$$M_2 = n[2 - M_1r_0(2-\gamma_0)], \qquad M_3 = -[1 - n^2r_0(1-\gamma_0)](1 - n^2r_0) +$$

$$+\left[1 + n^2r_0^2(1-\gamma_0) + (1+M_1)\frac{1}{G_0}\right](n^2 - M_1)$$

$$M_4 = (1+M_1)(n^2 - M_1)(1-\nu^2)F_0$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad F_0 = \frac{FE^*}{RhE}$$

Придавая n и N $(1 \leqslant N < m+1)$ различные целочисленные значения, находим величину жесткости, соответствующую определенной частоте колебаний. И наоборот, эта частота будет соответствовать найденной жесткости.

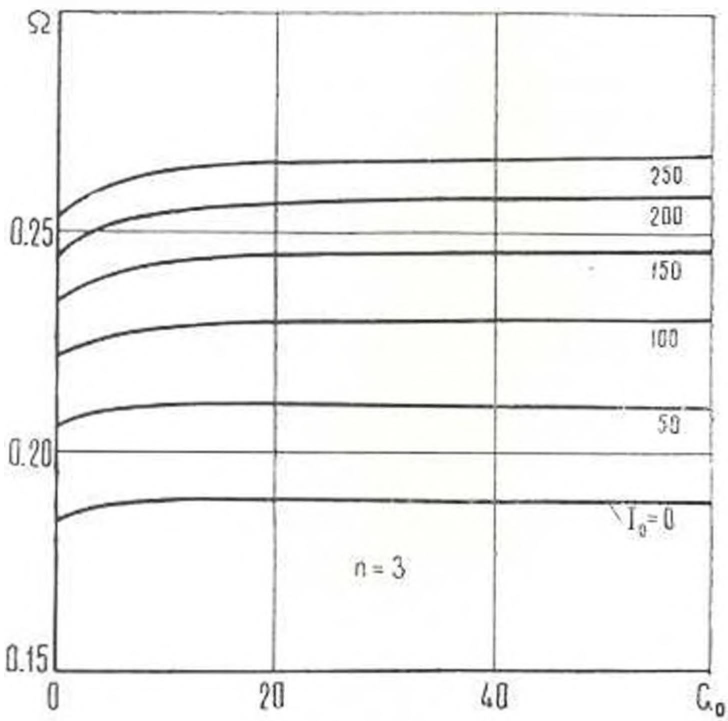
В случае, когда $G=0$, полученные результаты соответствуют решению при учете лишь радиального взаимодействия оболочки и ребер [2], если же $\gamma=0$, $G=\infty$, — то решению, учитывающему тангенциальное и радиальное взаимодействия при жестком соединении оболочки и ребер [3].

По формуле (9) был проведен расчет для оболочек, характеризующихся следующими данными:

$$c^2 = 1.33\cdot 10^{-8}, \quad r_0 = 0.02, \quad F_0' = 1, \quad l = 2, \quad m = 1, \quad \gamma_0 \leqslant 1$$

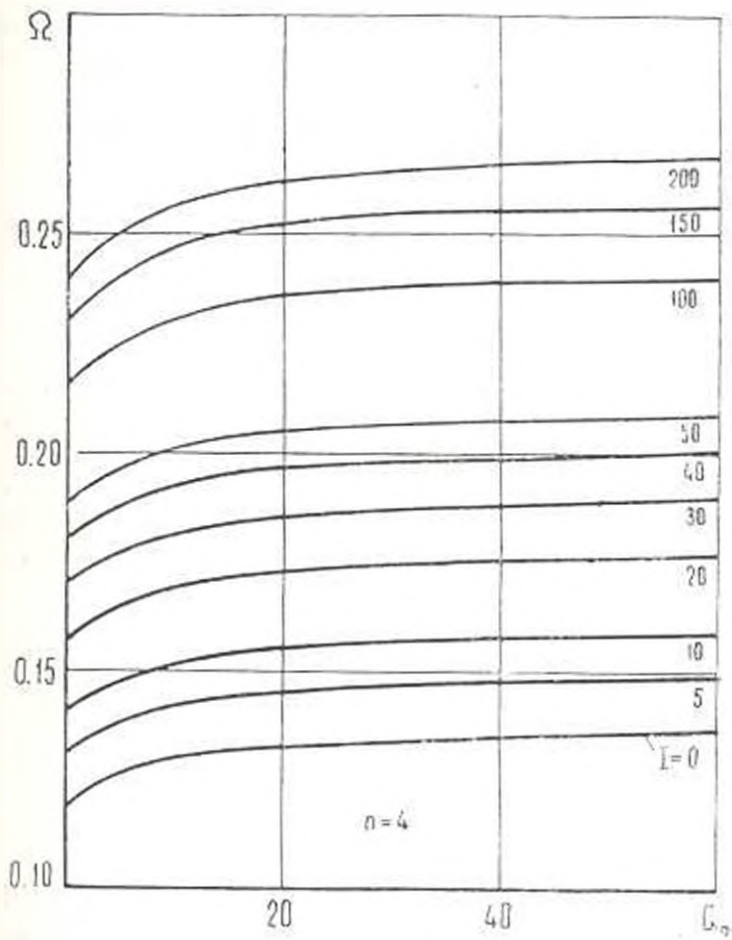
$$\nu = 0.3, \quad \chi_0 = 1$$

Начальное осевое усилие T принималось равным нулю.



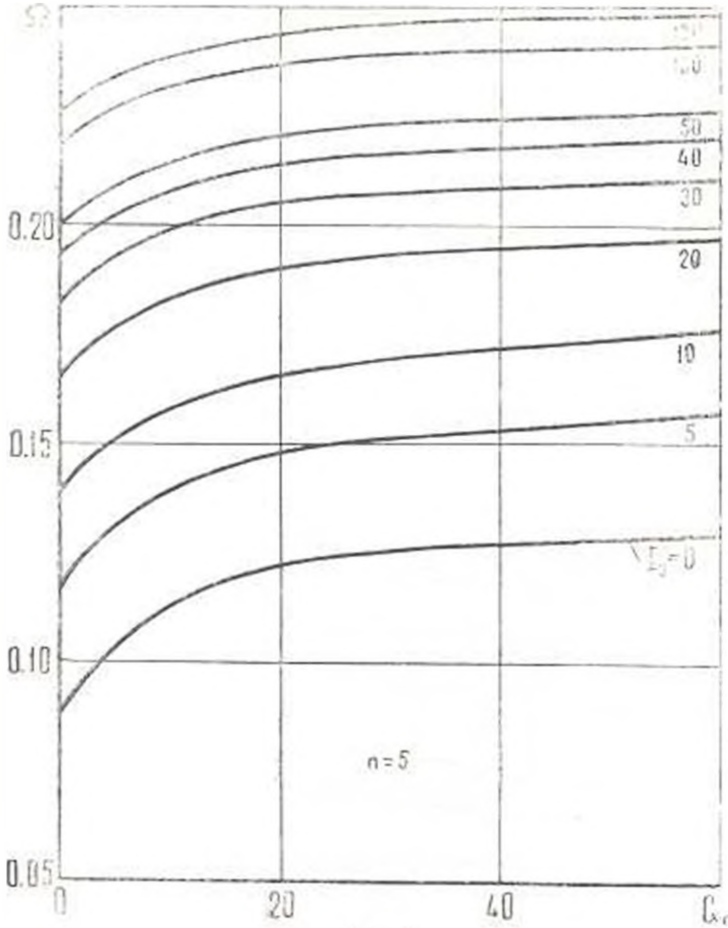
Фиг. 1.

На фиг. 1—3 представлены графики изменения Ω в зависимости от величины G_0, характеризующей жесткость клеевого слоя, для различных значений параметра жесткости ребра $I_0 = \dfrac{E^* I}{DRl}$ и параметра волнообразования n для колебаний по форме с «захватом» ребра. Точкам пересечения кривых с осью ординат соответствуют частоты для случая, когда отсутствует касательное взаимодействие оболочки и ребра. При увеличении жесткости клеевого слоя кривые асимптотически приближаются к значениям частот, соответствующим жесткому соединению оболочки и ребра.

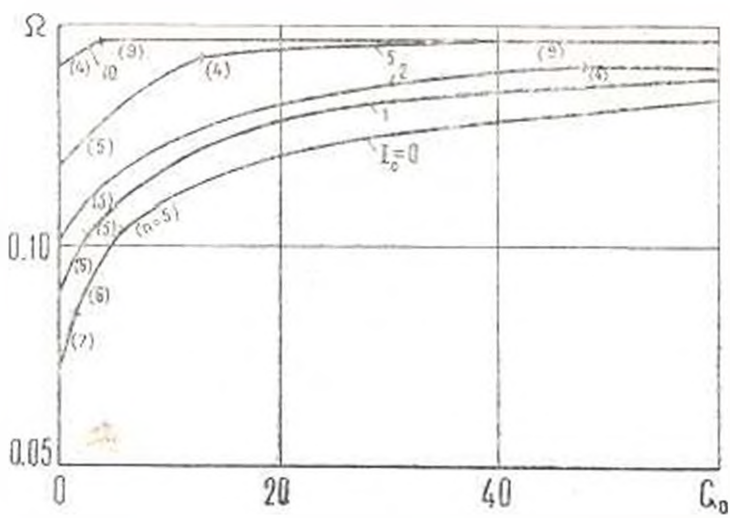


Фиг. 2.

На основании полученных результатов (в том числе для других значений n) был проведен анализ зависимости частоты колебаний Ω от параметра волнообразования n с целью определения экстремальных значений Ω как функции величины G_a, характеризующей жесткость клеевого слоя. На фиг. 4 показано изменение минимальных частот в зависимости от величины G_a для различных значений параметра жесткости ребра I_0 с указанием величины параметра волнообразования n, при которой реализуется минимальная частота. Верхнее значение параметра Ω ограничено величиной $\Omega = 0.147$, соответствующей минимальной частоте гладкой оболочки половинной длины, так как при любой жесткости ребра и клеевого слоя минимальная частота для оболочки с одним ребром не может превышать того значения, которому соответствует форма колебаний с узлом в среднем се-


Ω
0.20
0.15
0.10
0.05
0
20
40
C_0
100
50
40
30
20
10
5
$I_0=0$
n=5

Фиг. 3.


Ω
0.10
0.05
0
20
40
C_0
(4)
10
(9)
(4)
5
2
(9)
(4)
(5)
1
$I_0=0$
(5)
(5)
(n=5)
(5)
(6)
(7)

Фиг. 4.

чении (колебания без «захвата» ребра). В интервале между крайними значениями параметра Ω имеет место существенная зависимость его от параметра жесткости G_c клеевого слоя. С увеличением жесткости ребра влияние клеевого слоя на частоту колебаний падает.

Московский институт
теплотехники

Поступила 29 IX 1975

Ա. Ա. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ի. Ս. ՄԱԼՅՈՒՏԻՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԿՈՂԵՐԻՆ ՍՈՍՆՁՈՎ ՄԻԱՑՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԱԶԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Լուծվում է սոսնձման միջոցով օղակային կողերին միացված գլանային թաղանթի ազատ տատանումների մասին խնդիրը, երբ գործում են արտաքին ճնշումը և առանցքային ուժերը:

Հաշվի է առնվում կողերի տեղաբաշխման դիսկրետ բնույթը: Ստացված է բնութագրիչ հավասարումը: Ցույց է տրվում սոսնձի ազդեցությունը թաղանթի ազատ տատանումների հաճախության վրա:

FREE VIBRATION OF A CYLINDRICAL SHELL GLUED TO RING RIBS

A. A. BAGDASARIAN, I. S. MALYUTIN

Summary

The problem of free vibration of a cylindrical shell glued to ring ribs under external pressure and axial forces is solved considering the discrete nature of rib arrangement. The characteristic equation is obtained.

The effect of a glue on the frequency of free vibration of the shell is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капелюшник И. И., Михалев И. И., Эйдельман Б. Д.* Технология склеивания деталей в самолетостроении. М., Изд-во «Машиностроение», 1972.
2. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. М., Изд-во МГУ, 1969.
3. *Малютин И. С.* Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, при действии внешнего давления и осевых сил. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

Ю. М. ПОЧТМАН, З. И. ПЯТИГОРСКИЙ

О ВЛИЯНИИ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

1. В разработке общей теории оптимального проектирования конструкций весьма актуальными являются вопросы оптимизации приспосабливающихся конструкций. В работе [1] авторами введено понятие оптимальной по приспособляемости конструкции (ОПК). ОПК должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\exists \hat{\rho} \neq 0 \rightarrow (\forall r \in R \rightarrow \Phi(\sigma^e - \hat{\rho}) \leqslant k^2) \cap$$
$$\forall \hat{\rho} \neq \rho \rightarrow ((\exists r_1 \in R_1 \rightarrow \Phi(\sigma^e + \hat{\rho})_1 > k^2) \cup (\exists r_2 \in R_2 \rightarrow \tag{1.1}$$
$$\forall \alpha > 1 \rightarrow \Phi(\sigma^e \alpha - \hat{\rho})_2 > k^2)$$

определяющим ОПК как точку глобального экстремума (минимума) в пространстве остаточных напряжений. Здесь: σ^e — напряжения в любой момент времени, вычисленные в предположении упругости материала ($\sigma_т \rightarrow \infty$); ρ — остаточные напряжения; k^2 — константа материала; r — точки, а R_i — области ОПК.

Определение ОПК базируется на статической теореме Мелана о приспособляемости [2], одно из положений которой утверждает зависимость полей остаточных напряжений от истории нагружения. В инженерной практике весьма распространенным является нагружение, в котором известны лишь пределы изменения его независимых параметров. Для конструкций, нагруженных такой нагрузкой, статически возможные в состоянии приспособляемости поля ρ не единственны. Эта неединственность имеет место и в ОПК, в (1.1) входят огибающие σ^e, которые могут быть получены не единственным способом. Следовательно, рассматриваемая задача многоэкстремальна в пространстве управляющих параметров ρ. Огибающая составляющего вектора внутренних усилий квазистатической нагрузки в любой точке тела в зависимости от истории нагружения должна удовлетворять одной из следующих зависимостей (при $\sigma^+ > \sigma^-$):

$$\sigma^+ >, = 0 \cap \sigma^- =, < 0 \tag{1.2}$$

$$\sigma^+ >, < 0 \cap \sigma^- >, < 0 \tag{1.3}$$

$$\sigma^+ > 0 \cap \sigma^- < 0 \tag{1.4}$$

Из (1.3) выделением постоянной составляющей

$$(\sigma^+, \sigma^-) = \min(\mathrm{mod}(\sigma^+, \sigma^-)) \tag{1.5}$$

а из (1.4) выделением не влияющей на приспособляемость симметричной составляющей, также выбранной по (1.5), получаем (1.2). Таким образом, чтобы проанализировать всевозможные истории нагружения (1.2)—(1.4), необходимо прежде всего получить решение для огибающей (1.2), которое одновременно будет и решением для (1.4), а затем уже перейти к анализу (1.3).

Рассмотрим ОПК, нагруженную квазистатической нагрузкой, одним из пределов изменения которой является «0» (разгрузка), а $\sigma_т$ — const. Если обозначить через $f(\sigma)$ функцию текучести, то напряженное состояние в любой точке приспособившегося тела R должно удовлетворять одной из следующих зависимостей:

$$f(\sigma^e) > f(\sigma_т) \tag{1.6}$$

$$f(\sigma^e) = f(\sigma_т) \tag{1.7}$$

$$f(\sigma^e) < f(\sigma_т) \tag{1.8}$$

В дальнейшем область, удовлетворяющую выражению (1.6), будем называть «а», а выражениям (1.7) и (1.8) — «б» и «в», соответственно. В приспособившемся теле имеют место зависимости

$$f(\sigma^e+\rho)_{а,б,в} \leqslant f(\sigma_т) \tag{1.9}$$

свидетельствующие о том, что, с точки зрения деформаций, приспособляемость в рассматриваемом случае является итеративным процессом приближения к равновесному положению в области «а» — сверху, а в области «в» — снизу.

Приспособляемость наступает при выполнении в области «а» условия (1.9); при этом в «а» обязательно наличие точек, для которых (1.9) — строгое равенство (такие точки возможны и в «б»). Отсутствие таких точек в «в» свидетельствует о наличии в теле резерва прочности по приспособляемости; появление этих точек — об исчерпании резерва по приспособляемости, то есть о наступлении предельного состояния. Приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что пластические деформации в приспосабливающемся теле изменяются монотонно (это не относится к перемещениям [3]).

2. Для проектирования ОПК предлагается алгоритм, моделирующий описанный в (1.9) итеративный процесс.

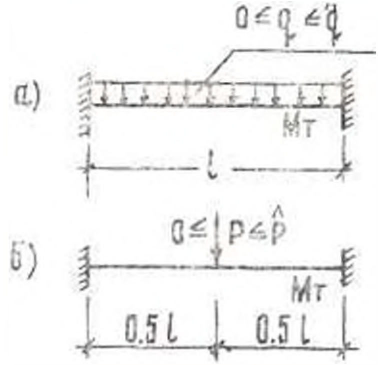
Рассмотрим несколько примеров стержневых приспосабливающихся конструкций, которые иллюстрируют единственность и неединственность статически возможных полей остаточных усилий M^0 в связях приспосабливающихся и не приспосабливающихся конструкций. Для схемы по фиг. 1а:

$$(\forall M_r \in (\dot{q}l^2:12 \geqslant M_r \geqslant \dot{q}l^2:16)) \to (M^0 \in (0 \leqslant M^0 \leqslant \dot{q}l^2:48))$$

при этом

$$(M_r = \dot{q}l^2:16) \to (M^0 = \dot{q}l^2:48)$$

Для схемы по фиг. 1б всегда $M^0 = 0$, поэтому при $M_T \leq 0.125\hat{P}l$ — $f(\sigma^*) < f(\sigma_T)$, то есть пластические деформации отсутствуют; при $S \cdot 0.125\hat{P}l \geq 0.125\hat{P}l$ — $f(\sigma^*) > f(\sigma_T)$, то есть пластические деформации имеют место, а приспособляемость наступает при нулевых остаточных усилиях в связях: остаточные напряжения уравновешиваются в сечении.



Фиг. 1.

Коэффициент $S > 1$ и в первом приближении может приниматься равным отношению пластического момента сопротивления сечения к упругому. При $M_T = S \cdot 0.125\hat{P}l$ образуется мгновенно изменяемый механизм разрушения.

При нарушении условий приспособляемости возможна и такая ситуация, когда пластическая деформация, будучи в цикле ограниченной, начиная с некоторого цикла, становится постоянной и ее накопление от цикла к циклу становится теоретически неограниченным. Как показал Б. Нил [4], для указанного прогрессирующего разрушения нет необходимости в образовании некоторого кинематически возможного механизма разрушения. Именно этот вид разрушения свойствен описываемым ниже пластинам.

Указанные примеры приведены в работе авторов [5]. Из описанных примеров видно, что в пространстве остаточных напряжений (усилий) процесс приспособления представляется некоторой траекторией фазовой точки, при этом начало траектории совпадает с началом координат. Отсюда следует, что моделирующий приспособляемость алгоритм должен иметь в пространстве параметров в качестве стартовой точки $M^0 = 0$. В рассмотренных примерах, так же как и в [3], поле остаточных усилий описывается конечным числом параметров. При рассмотрении же континуальных задач (например, приспособляемости пластин) возникают серьезные затруднения. Самоуравновешенное поле $M^0 = \{M_1^0, M_2^0, M_3^0\}$ должно удовлетворять условию равновесия:

$$\frac{\partial^2 M_1^0}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_3^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2^0}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.1)$$

Решения уравнения (2.1) в функциональном пространстве отсутствуют, а необходимый переход к конечномерному векторному пространству приводит к задачам большой размерности. При этом в формулировке соответствующей задачи математического программирования оказывается большое количество ограничений в виде равенств, затрудняющих построение поисковой процедуры. Следовательно, принимаемый для решения алгоритм должна отличать пониженная чувствительность к «проклятию размерности». Рассматриваемая задача (1.1) — многоэкстремальна, поэтому для определения глобального экстремума, а также для изучения формы и размеров области M^*, пределов возможных деформаций необходимо иметь возможность менять траекторию поиска, так как моделирующий алгоритм, как указано выше, должен иметь фиксированную стартовую точку. Методом, удовлетворяющим всем трем требованиям, является метод случайного поиска [6], для численной реализации которого нами разработан специальный алгоритм. Получаемая при этом фазовая траектория моделирует приспособляемость при нагружении, моделируемом как стохастический процесс.

В пространстве M строится базис B, для чего используется последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке. По направлению вектора $\beta_i \in B$, обеспечивающего улучшение функции цели, отыскивается локальный оптимум, после чего строится новый случайный базис. Неудачные шаги не включаются в траекторию — получаем случайную траекторию, моделирующую приспособляемость при некотором случайном нагружении. Рекуррентная формула для координаты фазовой точки имеет вид

$$X_i = \begin{cases} X_{i-1} + \Delta X_{i-1}, & \text{если } \Phi(X_{i-1} + \Delta X_{i-1}) \leqslant \Phi_{i-1} \\ X_{i-1} \pm a\beta_i, & \text{если } \Phi(X_{i-1} + \Delta X_{i-1}) > \Phi_{i-1} \cap \\ & \exists \beta_i \in B \to \Phi(X_{i-1} \pm a\beta_i) < \Phi_{i-1} \\ X_i := \text{exit} \to \text{конец} & \end{cases}$$

где Φ — функция цели; a — малая константа дискретности траектории (точность поиска).

3. Рассмотрим проектирование ОПК — пластины, нагруженной квазистатической нагрузкой. Область безопасности описывается условием Мизеса. В терминах математического программирования задача записывается следующим образом:

Найти min $H > 0$.

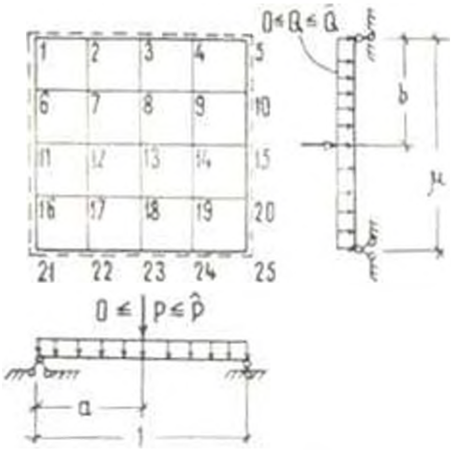
При ограничениях

$$g_i = ((M_1^e + X_1)^2 + (M_2^e + X_2)^2 - (M_1^e + X_1)(M_2^e + X_2) + 3(M_3^e + X_3)^2 \leqslant H^2)_i \tag{3.1}$$

$$t_i = (X_1^2 + X_2^2 - X_1 X_2 + 3X_3^2 \leqslant H^2)_i \tag{3.2}$$

$$w_i = (\Omega(X))_i = 0 \tag{3.3}$$

Здесь: M^* — значение переменных во времени изгибающих моментов, вычисленных в предположении $\xi_i \to \infty$; $i = 1, 2, 3, \ldots, 24, 25$ — номера точек сетки (фиг. 2); X — значения остаточных моментов в состоянии приспособляемости — управляемые параметры; Ω — линейный оператор дифференциального уравнения (2.1); $H = \xi h^2/6$. Система ограничений (3.1)—(3.3) описывает состояние приспособляемости при квазистатическом загружении, причем (3.2) описывает момент разгрузки.



Фиг. 2

При наличии постоянной составляющей $\bar{M}^*$ в составе M^*, l_i может быть приведено к виду φ_i с подстановкой $\bar{M}^*$ взамен M^*, однако продолжает оставаться самостоятельным ограничением.

Выше указано, что анализ всего многообразия историй нагружения может быть сведен к анализу двух историй нагружения: одна из которых имеет в качестве одного из пределов модуля нуль (разгрузку), а во второй истории оба предела, не равных по модулю, имеют один знак, что эквивалентно наличию постоянной составляющей.

В целях выявления влияния постоянной нагрузки на проект ОПК был рассмотрен предельный случай $\bar{M}^* = M^*$. Этот вид загружения нами назван квазипостоянным: повторно-переменная нагрузка, амплитуда изменения которой пренебрежимо мала по сравнению с модулем загружения. Очевидно, что в этом случае $l_i \equiv g_i$, то есть ограничение (3.2) снимается. Параллельно были рассмотрены пластины с различными коэффициентами Пуассона ν, влияющими на поле M^*. Результаты численного эксперимента для различных схем нагружения, выполненные на ЭЦВМ «Минск-22», по описанному алгоритму (при $\mu = 0.2$), приведены в таблице. Анализ результатов свидетельствует о том, что в рассматриваемом примере всегда $l_i < H$, то есть в (1.1) $K_1 \cap K_2 = 0$, что подтверждается непосредственным анализом X в состоянии приспособляемости. В результате этого ОПК для квазистатической и квазипостоянной нагрузок совпадают. Более того, сравнение загружений по схемам № 1 и № 2; № 3 и № 4 говорит о независимости оптимального проекта от величины ν.

Таблица

№№ схем загружения	Значения параметров								H_1/H_1 (%)
	α	ν	Q	P	a	b	квазист. H_1	квазипост. H_1	
1	1	0.3	100	—	—	—	4.39	4.39	100
2	1	0.1667	100	—	—	—	4.4	4.38	100.5
3	2	0.3	100	—	—	—	9.29	9.62	96.6
4	2	0.1667	100	—	—	—	9.59	9.57	100.3
5	3	0.3	100	—	—	—	11.63	11.62	100
6	1	0.3	—	100	0.5	0.5	16.66	15.8	105.2
7	3	0.3	—	100	1.5	1.5	14.15	14.9	95.2

$$H_1 = H \cdot \sqrt{Q \ldots}$$

Следует дополнительно подчеркнуть, что в численных экспериментах, результаты которых приведены в таблице, были получены значения составляющих статически возможных полей остаточных напряжений в пластинах в состоянии приспособляемости при квазистатической и квазипостоянной нагрузках, не приведенные в статье ввиду ограниченности ее объема. «Упругие» и «остаточные» напряжения оказались зависящими от коэффициента Пуассона, тогда как ОПК оказались тождественными. Этот результат, полученный при взаимодействии переменной нагрузки со статически возможными остаточными напряжениями, безусловно, нетривиален.

Отмеченные в таблице расхождения величин H_1 и H_1 объясняются дискретностью алгоритма и свидетельствуют о его высокой точности: приведенные результаты получены при $a = 0.2$.

4. Становится реальным следующее предложение: в ряде случаев для получения ОПК возможна следующая формулировка задачи математического программирования.

Найти min $H > 0$

при ограничениях

$$Y_1^2 + Y_2^2 - Y_1 Y_2 + 3 Y_3^2 = H^2 \qquad (4.1)$$

$$\Omega(Y) = Q \qquad (4.2)$$

Здесь Y — поле действующих в состоянии приспособляемости моментов при «огибающей» нагрузке Q.

Правомерность этой формулировки обосновывается следующим образом: в (3.1) M^* удовлетворяет условиям равновесия под нагрузкой и неразрывности деформаций; X — условиям самоуравновешенности; $Y = M^* + X$ должен удовлетворять уравнениям равновесия под нагрузкой, не удовлетворяя условий неразрывности деформаций, то есть, если (3.2) снимается, то (4.1)—(4.2) эквивалентны (3.1)—(3.3).

Предлагаемый подход позволяет исследовать и значительно более сложные задачи: например, задачу проектирования ОПК — пластины минимального веса переменной толщины (если узлы сетки принять за точки изменения толщины). Для решения этой задачи, в частности, целесообразно применить специально разработанный для задач математического программирования с ограничениями в виде равенств один из алгоритмов случайного поиска — алгоритм скользящего эллипса—АСЭ [7].

Вывод о возможности сформулировать задачу проектирования ОПК в виде (4.1)—(4.2), то есть без ограничений l_2 (3.2) приводит нас к обобщению, что в рассматриваемых случаях при квазипостоянном нагружении (а к нему можно отнести даже силу тяжести, меняющуюся, хоть и в очень незначительных пределах, но достаточно часто!), предельной является предельная «приспосабливающая» нагрузка. Превышение ее приводит конструкцию к неограниченным, медленно, циклически накапливающимся пластическим деформациям.

Внедрение в инженерную практику проектирования с учетом приспособляемости сдерживается в настоящее время необходимостью выполнять предварительный расчет по упругой схеме [8]. Выполнение же оптимальных проектов с учетом приспособляемости при параметрах, влияющих на расчет по упругой схеме, увеличивает количество вычислений на несколько порядков и практически неосуществимо в большинстве случаев. Полученные результаты свидетельствуют о существовании некоторого класса конструкций, для которых оптимальное проектирование с учетом приспособляемости может выполняться без расчета по упругой схеме.

Нам представляется, что этот путь чрезвычайно перспективен: на нем можно реализовать известное положение В. Койтера: «тело может выдержать внешние нагрузки, прилагаемые в любой последовательности, если на каждом этапе программы нагружения можно найти безопасное статически возможное распределение напряжений». Необходимо также отметить, что доказанная в [9] способность конструкций из произвольно упрочняющегося материала приспосабливаться расширяет границы реального оптимального проектирования с учетом приспособляемости.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила 2 II 1976

Յու. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ, Զ. Ի. ՊՅԱՏԻԳՈՐՍԿԻ

ՈՐՈՇ ՀԱՐՄԱՐՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍԱԿԵՏԻՑ ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ, ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՎՐԱ ԲԵՌՆԱՎՈՐՄԱՆ ՊԱՏՄՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են հարմարունակության տեսակետից լավագույն հեծաններ և սալեր, բեռնված կրկնվող փոփոխական (քվազիկայուն) բեռով նրա փոփոխ-

ման սահմանների տարբեր հարաբերությունների։ Որպես սահմանային անցման դեպք դիտարկվում է քվազիհաստատուն բեռ։ Հաշվի է առնվում ստատիկորեն հնարավոր մնացորդային ճիգերի դաշտերի ոչ միակությունը։

Մաթեմատիկական ծրագրավորման մեթոդների կիրառությամբ ցույց է տրված, որ դիտարկվող կառուցվածքների համար հարմարվողականության տեսակետից լավագույն նախագիծը նույնն է ինչպես քվազիհաստատուն, այնպես էլ քվազիստատիկ բեռի համար, որի վերին սահմանը հավասար է քվազիհաստատունի վերին սահմանին։ Այս հանգամանքը վկայում է որոշ դասի հարմարվողականության տեսակետից լավագույն նախագծման խնդիրների համար լուծում ստանալու հնարավորության, առանց համապատասխան առաձգական հաշվարկ կատարելու։

ON THE LOAD HISTORY INFLUENCE UPON LIMIT STATE OF CERTAIN OPTIMAL ADAPTIVE STRUCTURES

Y. M. POCHTMAN, Z. I. PYATIGORSKY

S u m m a r y

Optimal adaptive beams and plates subjected to variable repeated (quasi-statical) loading with various alteration limit ratio are examined, the quasi-constant load being considered as a limiting transition. The statically possible non-uniqueness of residual stress fields is taken into account. By means of mathematical programming the design of optimal adaptive structure for the constructions is question, subjected to quasi-constant or quasi-statical loading, is shown to be identical for the case of equality of the load superior limits.

The above makes it possible to obtain the optimal adaptive design for a certain group of structures, eliminating elastic calculus.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Почтман Ю. М., Пятигорский З. И.* Оптимальное проектирование конструкций как метод установления их предельного состояния. Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 1.
2. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М., ИЛ, 1961.
3. *Ихрин В. А., Филиппов В. В.* Оценка деформаций, накопленных к моменту приспособляемости плоских рам. Строительная механика и расчет сооружений. 1974. № 3.
4. *Нил Б. Г.* Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов. М., 1961.
5. *Почтман Ю. М., Пятигорский З. И.* Оптимальное проектирование конструкций, приспосабливающихся к квазистатическим нагрузкам. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 5.
6. *Растригин Л. А.* Системы экстремального управления. М., Изд. «Наука», 1974.
7. *Воронисский Э. И., Почтман Ю. М.* Алгоритм метода случайного поиска для оптимизации стержневых и континуальных систем. Строительная механика и расчет сооружений, 1974, № 5.
8. *Ходж Ф.* Приспособляемость упруго-пластических конструкций. В сб. «Остаточные напряжения». М., ИЛ, 1957.
9. *Киракосян Р. М.* Теорема о приспособляемости тел к переменным внешним воздействиям при произвольном упрочнении материала. Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 4.