

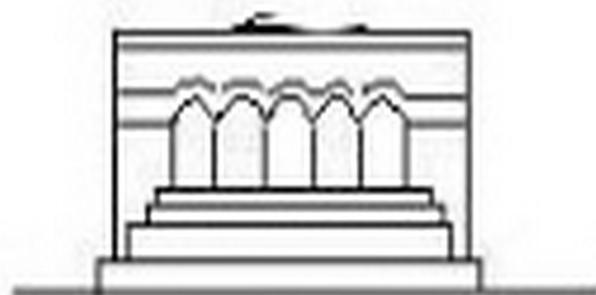
ՄԵՆԱՆԻՇՍ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1976

М. С. ГАБРИЕЛЯН

ЗАДАЧА О СБЛИЖЕНИИ ГРУППОВЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается задача оптимального преследования группового объекта при минимаксе среднеквадратичной величины моментов встреч различных его частей, когда входящие в группу игроки подчиняются обыкновенным нестационарным линейным дифференциальным уравнениям. Поставленная задача решается методом экстремальных конструкций, хорошо изложенным в [1], для двух игроков. Подробно изучены грубый, очень регулярный и регулярный случаи для данной постановки.

§ 1. Рассмотрим некоторую группу игроков, состояния которых определяются k -мерными векторами-столбцами x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть векторы $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют системам уравнений вида

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + u_i - f_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

Здесь $A_i(t) = (k \times k)$; $f_i(t) = (k \times 1)$ — матрицы с непрерывными элементами на $[t_0, T]$, k -мерные векторы u_i — управляющие воздействия, допустимые реализации которых измеримы по t на $[t_0, T]$ и принадлежат выпуклым замкнутым и ограниченным множествам U_i , не зависящим от t . Пусть T — достаточно большое постоянное число. Предположим, что игроки $x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(1)}, \dots, x_{i_{m_1}}^{(1)}$, преследуя игроков $x_{j_1}^{(2)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_{m_2}}^{(2)}$, стараются сблизиться с ними в моменты θ_λ ($\lambda = 1, \dots, m$), а преследуемая группа $\{x_{i_1}^{(2)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_{m_2}}^{(2)}\}$, наоборот, старается уклониться от преследующей группы.

Здесь

$$\theta_1^{(1)} < \theta_2^{(1)} < \dots < \theta_{m_1}^{(1)}, \quad \theta_1^{(2)} < \theta_2^{(2)} < \dots < \theta_{m_2}^{(2)}$$

$\theta_i^{(1)} \neq \theta_j^{(2)}$ при любых $i, j = 1, \dots, m$; числа m_λ удовлетворяют соотношению

$$1 \leq m_\lambda \leq \frac{2n-1 + (-1)^\lambda}{4}$$

Пусть близость между играющими группами определяется следующей величиной:

$$\omega = \max_{1 \leq \alpha \leq m} \left[\sum_{j=1}^{m_\alpha} \sum_{i=1}^k \left(x_{z_j^{(\alpha)}}^{(i)} - x_{z_j^{(\alpha)}}^{(i)} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.2)$$

Примечание 1.1. При приведенной постановке игроки в различных этапах игры могут меняться ролями, то есть преследующий может стать преследуемым и наоборот.

Предположим, что целью преследующей группы является такое сближение с преследуемой группой, при котором в $k m_\alpha$ -мерном пространстве $\{q_\alpha\}$ избегающая точка $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}, x_{z_2^{(\alpha)}}^{(2)}, \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}\}$ попадает в некоторую область влияния M_α точки $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}, x_{z_2^{(\alpha)}}^{(2)}, \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}\}$ в пока неизвестный момент θ_α ($\alpha = 1, \dots, m$). Эти области влияния M_α , присутствующие в $m_\alpha \cdot k$ -мерном пространстве $\{q_\alpha\}$ точке $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}, x_{z_2^{(\alpha)}}^{(2)}, \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}\}$, опишем при помощи некоторых замкнутых шаров с центрами в точках $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}, \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}\}$. Моменты θ_α определяются следующим образом: пусть движение системы (1.1) началось в некоторый момент $t = t_0$. Момент времени $t = \theta_\alpha > t_0$, когда впервые точка $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}[\theta_\alpha], \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}[\theta_\alpha]\}$ окажется в области влияния M_α точки $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}[\theta_\alpha], \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}[\theta_\alpha]\}$, назовем моментом встречи игроков $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}, \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}\}$ и $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}, \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}\}$ ($\alpha = 1, \dots, m$).

Конфликт в рассматриваемой игре состоит в следующем: преследующая группа $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}[t], \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}[t]\}$ стремится захватить преследуемую группу $\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}[t], \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}[t]\}$ ($\alpha = 1, \dots, m$) в области влияния M_α ($\alpha = 1, \dots, m$) так, чтобы эти события осуществились как можно раньше, преследуемая группа, напротив, избегает захвата точек

$$\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}[t], \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}[t]\} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

областями влияния M_α точек

$$\{x_{z_1^{(\alpha)}}^{(1)}[t], \dots, x_{z_{m_\alpha}^{(\alpha)}}^{(m_\alpha)}[t]\} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Пусть платой в рассматриваемой игре будет следующая величина:

$$\gamma = \sum_{\alpha=1}^m A_\alpha \theta_\alpha^2 \quad (1.3)$$

Здесь $A_\alpha > 0$ — число, характеризующее важность требуемой встречи.

Примечание 1.2. Вместо величины γ (1.3) можно было взять любую гладкую, определенно-положительную функцию, определенную в области

$$t_0 \leq \theta_i < \infty \quad (i = 1, \dots, m)$$

Сформулируем следующую задачу.

Задача 1.1. Среди допустимых стратегий $U_p(t, x)$ ([1], стр. 65) преследующей группы требуется найти оптимальную минимаксную $U_p^{(0)}(t, x)$, которая обеспечивает неравенство

$$\gamma(X[U_p^{(0)}, u_i; t_0, x_0]) \leq \min_{U_p(u_i, t)} \sup_{x_i, t_i} (\gamma(X[U_p, u_i; t_0, x_0])) \quad (1.4)$$

какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, x_0\}$ системы (1.1) и какой бы ни оказалась допустимая реализация $u_i[t]$ управления u_i преследуемой группы на данном этапе игры. Здесь символом $\gamma(X[U_p, u_i; t_0, x_0])$ обозначено значение величины γ (1.3) на семействе движений системы (1.1) при $u_i[t] \in H_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Для выделения регулярного случая и решения задачи 1.1 применим метод экстремальной конструкции.

Пусть T — достаточно большое число, большее, чем любое из чисел θ_i , (значения которых мы определим по ходу решения задачи 1.1).

Предположим, что реализуется позиция $\{t, x\}$, которую мы фиксируем. Рассмотрим движение $x_i[\tau]$ системы (1.1) при $t_0 \leq \tau \leq t$; $\{x_i(t) = x_i\}$.

Составим области достижимости $G_i^{(1)}(t, x, T)$ и $G_i^{(2)}$ для преследующих и преследуемых групп в $N = k \sum_{i=1}^m m_i$ -мерном линейном пространстве следующим образом [2.3]. Область $G_i^{(1)}$ определяется неравенством

$$\varepsilon + \rho^{(1)}(t, T, l) + \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{m_s} l_{si} x_{i(s)}^{(0)}(t, x, \theta_{si}) - \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{m_s} l_{si} q_{si} > 0 \quad (1.5)$$

а $G_i^{(2)}$ —

$$\rho^{(2)}(t, T, l) + \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{m_s} l_{si} x_{i(s)}^{(0)}(t, x, \theta_{si}) - \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{m_s} l_{si} q_{si} > 0 \quad (1.6)$$

при

$$|l| = \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=1}^{m_s} \sum_{j=1}^k (l_{si}^{(j)})^2 \right]^{1/2} = 1$$

Здесь

$$\rho^{(2)}(t, T, l) = \max_{u_{i(s)}^{(0)} \in \bar{H}_{i(s)}^{(0)}} \int_{t_0}^T \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{m_s} l_{si} \bar{X}_{i(s)}^{(0)}(\theta_{si}, \tau) u_{i(s)}^{(0)}(\tau) d\tau$$

$$y^{(2)}(t, T, t) = \max_{u_{\alpha_j^{(2)}} \in H_{\alpha_j^{(2)}}} \int_t^T \sum_{z=1}^m \sum_{i=1}^{m_z} l_{iz} \bar{X}_{\alpha_j^{(2)}}(t_{\alpha_j}, \tau) u_{\alpha_j^{(2)}}(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

$$x_j^{(0)}(t, x, t_{\alpha_j}) = \bar{X}(t_{\alpha_j}, t) x_j + \int_t^{t_{\alpha_j}} \bar{X}(t_{\alpha_j}, \tau) f_j(\tau) d\tau$$

l_{iz} — k -мерный вектор-строка с компонентами $(l_{iz}^1, \dots, l_{iz}^k)$ ($z = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, m_z$), $k \times k$ -матрицы $\bar{X}(t_{\alpha_j}, \tau)$, определяемые следующим образом:

$$\bar{X}_j(t_{\alpha_j}, \tau) = \begin{cases} X_j(t_{\alpha_j}, \tau) & \text{при } t \leq \tau \leq t_{\alpha_j}, \\ 0 & \text{при } \tau > t_{\alpha_j}, \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.8)$$

$X_j(\tau, t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x}_j = A_j(t)x_j$; $X_j(t, t) = E$.

Пока фиксируя моменты t_{α_j} ($j = 1, \dots, m$), определим наименьшее значение $\varepsilon^{(0)}$, при котором имеет место следующее включение:

$$G^{(2)} \subset G_{\varepsilon^{(0)}}^{(1)} \quad (1.9)$$

откуда получается

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(t, x, \{t_{\alpha_j}\}) = \max_{t \in [t-1, t]} & \{y^{(2)}(t, \{t_{\alpha_j}\}, T) - y^{(1)}(t, \{t_{\alpha_j}\}, T) + \\ & + \sum_{z=1}^m \sum_{i=1}^{m_z} l_{iz} x_{\alpha_j^{(2)}}^{(0)}(t, x, t_{\alpha_j}) - \sum_{z=1}^m \sum_{i=1}^{m_z} l_{iz} x_{\alpha_j^{(2)}}^{(0)}(t, x, t_{\alpha_j}) \} \quad (1.10) \end{aligned}$$

и $\varepsilon^{(0)}(t, x, \{t_{\alpha_j}\}) = 0$, если правая часть в (1.10) не положительна.

Следует заметить, что условие

$$\varepsilon^{(0)} \geq 0 \quad (1.11)$$

обеспечивает $\varepsilon^{(0)}$ — сближение преследующих и преследуемых групп в моменты t_{α_j} , даже более [2] (1.10) является гипотетическим рассогласованием задачи сближения соответствующей задачи 1.1.

Вышеуказанные области M определим следующим образом. Предположим [1, стр. 285], что в ходе игры величина $\varepsilon^{(0)}$ (1.10) всегда постоянная, равная $\nu > 0$, а величины $\{t_{\alpha_j}\}$ — переменные, зависящие от положения $(t, x[t])$ системы (2.1), то есть

$$\varepsilon^{(0)}(t, x[t], \{t_{\alpha_j}\}) = \nu \quad (1.12)$$

для любого $(t, x[t]; t_0 \leq t \leq T)$.

Следовательно, области $\{M\}$ можно получить проектированием выпуклой, замкнутой и ограниченной области $\varepsilon^{(0)}(t, x[t_{\alpha_j}], \{t_{\alpha_j}\}) = \nu$ (описываемой вектором $(x_{\alpha_j}, \{t_{\alpha_j}\})$ ($j = 1, 2, \dots, m$)) на подпространство, порожденное векторами $(x_{\alpha_j^{(2)}})$ (моменты $\{t_{\alpha_j}\}$ определяются про-

граммно). Прежде чем привести дальнейшие выкладки, решающие задачу 1.1, сформулируем принцип максимума, из которого определяются оптимальные стратегии, прицеливающие преследующую группу на общую часть границы $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ при (1.9)–(1.12) и при фиксированных $\{u_i\}$. Нетрудно заметить, что эти условия в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^{m_\alpha} l_{\alpha i}^{(0)} \bar{X}_{z_i^{(1)}}(t_{z_i}, \tau) u_{z_i}^{(0)}(\tau) = \max_{u_{z_i}^{(0)} \in H_{z_i}^{(0)}} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^{m_\alpha} l_{\alpha i}^{(0)} \bar{X}_{z_i^{(2)}}(t_{z_i}, \tau) u_{z_i}^{(0)}(\tau)$$

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^{m_\alpha} l_{\alpha i}^{(0)} \bar{X}_{y_i^{(2)}}(t_{y_i}, \tau) u_{y_i}^{(0)}(\tau) = \max_{u_{y_i}^{(0)} \in H_{y_i}^{(0)}} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^{m_\alpha} l_{\alpha i}^{(0)} \bar{X}_{y_i^{(1)}}(t_{y_i}, \tau) u_{y_i}^{(0)}(\tau) \quad (1.13)$$

при $z_i^{(1)} > 0$ (1.10) и $\{u_i^{(0)}(\tau)\} = H_i$ при $z_i^{(0)} = 0$. Здесь $l_{\alpha i}^{(0)}$ ($i = 1, \dots, m_\alpha$; $\alpha = 1, \dots, m$) — k -мерные векторы строки, на которых в (1.10) достигается максимум.

Для решения задачи 1.1 рассмотрим уравнение (1.12). Это уравнение, зависящее от неизвестных $\{t_x, \dots, t_m\}$ ($t < t_x$; $x = 1, \dots, m$). Для определения этих неизвестных минимизируем функцию γ (1.3) при (1.12), то есть определяем $\{t_x\}$ из следующих условий:

$$\min_{\{t_x\}} \gamma = \min_{\{t_x\}} \sum_{i=1}^m A_i t_x^2$$

при

$$F(t, \{t_x\}) = \varepsilon^{(0)}(t, \{t_x\}) - \nu = 0 \quad (1.14)$$

$$(t \neq 0; t_c \leq t; t_c \leq t_x; x = 1, \dots, m)$$

Пусть минимум функции γ (1.3) достигается на границе области $\{t_x \geq t_c\}$, то есть некоторые из $t_x = t_c$, тогда из постановки обсуждаемой задачи 1.1 следует, что соответствующие сближения осуществляются в момент t_c . Таким образом, не нарушая общности, можем предполагать, что $t_x \geq t_c$ ($x = 1, \dots, m$). Так как функции γ и F (1.14) имеют непрерывные частные производные по $\{t_x\}$ (функция F при $t \neq t_c$), то точку минимума γ при $F = 0$ можно найти методом неопределенных множителей Лагранжа, то есть решением системы уравнений

$$F(t, t_1, \dots, t_m) = \varepsilon^{(0)}(t, t_1, \dots, t_m) - \nu = 0$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial t_x} = 2A_x t_x + \lambda \frac{\partial F}{\partial t_x} = 2A_x t_x + \lambda \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial t_x} = 0 \quad (1.15)$$

$$t_c \leq t; t \neq t_c$$

Следует отметить, что решением системы (1.15) определяются как точки минимума функции γ , так и точки максимума. После этого будем предполагать, что точки минимума выделены. Однако этот

вопрос мы подробно не обсуждаем, так как существует несколько способов выделения точек минимума.

Выделим регулярный случай.

Определение 1.1. Если максимум в (1.10) достигается на единственном единичном векторе $\{E_i^0\}$ при $t_0 \leq t < T$; $t \neq \theta$, и если

$$\dot{\gamma}[t] = \sum_{i=1}^m A_i(\theta_i[t])^2 \quad (1.16)$$

не возрастает ($\{\theta_i[t]\}$ — решение системы (1.15), минимизирующее γ (1.13)), то будет регулярный случай игры из задачи 1.1.

Обсудим подробнее регулярный случай. Возможно [1, стр. 286], что γ (1.3) и течение всей игры осталась постоянной.

Укажем достаточные условия, при которых в регулярном случае задача 1.1 решается экстремальной стратегией из условия (1.13) для преследующей группы при любом допустимом управлении для преследуемой группы.

Пусть имеет место следующее условие:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \gamma^0}{\partial \theta_i} < 0 \quad (t < \theta_i) \quad (1.17)$$

при любой позиции $(x_i[t], t_0 < t; t \neq \theta)$. Покажем, что в регулярном случае при (1.17) задача 1.1 решается экстремальными стратегиями (1.13) для преследующей группы.

Функция $e^{00}(t, x[t]; \{\theta_i\})$ (1.10) [2] абсолютно непрерывна в промежутках $t_0 \leq t < \min \theta_i$ и $\theta_i < t < \theta_{i+1}$ (если числа θ_i упорядочены по порядку возрастания), а в точках θ_i имеет разрывы сущь первого рода, причем в точках разрыва она не возрастает. Известно также, что при поддержке экстремальной стратегии преследующей группой, когда $\theta_i = \text{const}$ ($i = 1, \dots, m$) при почти всех $t \in [t_0, T]$, имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt} e^{00}(t, x[t]; \{\theta_i\}) / t_{i_0} \text{ const} < 0 \quad (1.18)$$

Исходя из (1.15) — (1.18), покажем, что

$$\frac{d\dot{\gamma}[t]}{dt} < 0 \quad (1.19)$$

когда преследующая группа выбирает экстремальную стратегию из условия (1.13), причем имеет место знак равенства, когда преследуемая группа также придерживается экстремальной стратегии (1.13).

В самом деле,

$$\frac{d\dot{\gamma}[t]}{dt} = 2 \sum_{i=1}^m A_i \theta_i \frac{d\theta_i}{dt} \quad (1.20)$$

с другой стороны, из (1.15) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt} &= \left[\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt} \right]_{\{z_i = \text{const}\}} + \sum_{\alpha} \frac{d\varepsilon^{(0)}}{d\vartheta_{\alpha}} \frac{d^{(i)}_{\alpha}}{dt} = \\ &= \left[\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt} \right]_{\{z_i = \text{const}\}} - \frac{2}{t} \sum_{\alpha} A_{\alpha} \vartheta_{\alpha} \frac{d^{(i)}_{\alpha}}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

но из (1.15) и (1.17) следует, что $t > 0$ при $t < t_0$; $t \neq \vartheta_{\alpha}$. Тогда из (1.18)–(1.21) следует, что

$$\frac{d\gamma}{dt} = t \left[\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt} \right]_{\{z_i = \text{const}\}} \quad (1.22)$$

при почти всех $t \in [t_0, T]$.

Проверим справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1. В регулярном случае при (1.17) задача 1.1 решается экстремальной стратегией (1.13) для преследующей группы, причем $\gamma[t] < \gamma(t_0, \{x^{(0)}\})$ какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, \{x^{(0)}\}\}$ и какой бы ни оказалась допустимая реализация управления преследуемой группы.

Для доказательства теоремы 1.1 прежде всего необходимо доказать существование таких моментов $\vartheta_{\alpha}[t]$ ($\alpha = 1, \dots, m$), которые обеспечивают выполнение условий (1.9)–(1.12) при поддержке экстремальной стратегией преследующей группы.

При $t < \vartheta_{\alpha}[t]$ и из (1.22) имеем

$$t^2 \sum_{\alpha} A_{\alpha} < \gamma(\vartheta_{\alpha}[t], \{x[t]\}) \leq \gamma(\vartheta_{\alpha}[t_0], \{x[t_0]\}) \quad (1.23)$$

откуда следует, что при увеличении t величины $\vartheta_{\alpha}[t, \{x[t]\}]$ и какой-то последовательности должны стать меньше, чем t , то есть существуют моменты $\vartheta_{\alpha}[t]$ ($\alpha = 1, \dots, m$), удовлетворяющие условиям теоремы 1.1.

Остальные утверждения теоремы 1.1 доказываются точно так, как теорема 3.1 работы [2]. Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

Отметим лишь одно обстоятельство. При решении задачи 1.1 с помощью экстремальных стратегий, когда $t > t_0$ увеличивается, величина $\gamma[t]$ (1.16) может уменьшаться по всем $\vartheta_{\alpha}[t]$ до момента $t = \min \{\vartheta_{\alpha}[t]\}$, после чего наименьшая из величин ϑ_{α} остается постоянной и совершается точно такая же игра, как при $t_0 < t = \min \{\vartheta_{\alpha}[t]\}$ и. т. д.

Когда t проходит через $\vartheta_{\alpha}[t]$, остальные непостоянные $\{\vartheta_{\alpha}[t]\}$ не могут возрасти, так как функция $F(t, \{\vartheta_{\alpha}[t]\})$, хотя в точках ϑ_{α} терпит разрывы первого рода, но в этих точках она не возрастает.

В промежутках непрерывности функции $F(t, \{\vartheta_{\alpha}[t]\})$ величины $\vartheta_{\alpha}[t]$, определяемые вышесказанным образом, при увеличении t не все одновременно убывают, некоторые из них могут даже возрастать.

Таким образом, при поддержке экстремальной стратегии преследующей группой в ходе игры может меняться очередности требуемых встреч.

Играя со стороны преследуемой группы, в рассматриваемой игре можно сделать следующие выводы.

Опираясь на теорему 3.2 из [2], когда преследуемая группа поддерживается экстремальной стратегией, определяемой из условия (1.13), а преследующая — любой допустимой, и из (1.15), (1.17), (1.20), (1.21) получим

$$\frac{d\gamma}{dt} - \lambda \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t_0} = 0 \quad (\lambda > 0) \quad (1.24)$$

почти при всех значениях $t \in [t_0, T]$, причем имеет место знак равенства, когда преследующая группа также придерживается экстремальной стратегии из условия (1.13).

Так как функция $\gamma[t]$ непрерывна на отрезке $[t_0, T]$, то из (1.24) следует, что

$$\gamma[t] \geq \gamma[t_0] \quad (t \geq t_0) \quad (1.25)$$

Но при условии (1.25) включение (1.9) раньше (в смысле γ), чем $\gamma[t_0]$ при любых (t_0, x_0) , осуществляться не может, поэтому экстремальная стратегия из (1.13) для преследуемой группы охраняет от γ -встречи с преследующей в смысле γ -времени до $\gamma[t_0]$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 1.2. В регулярном случае при (1.17) экстремальная стратегия из условия (1.13) охраняет от γ -встречи с преследующими не раньше, чем $\gamma[t_0]$ в смысле γ -времени, при любых (t_0, x_0) и при любой допустимой реализации управления преследующей группы.

Опираясь на теоремы 1.1 и 1.2 легко можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.3. Экстремальные стратегии, определяемые из условия максимума (1.13) и выбираемые обеими группами, в регулярном случае при (1.17) обеспечивают следующее неравенство:

$$\begin{aligned} (\gamma[X(U_0, \{u_i[t]\}; t_0, x_0)] &= (\gamma[X(U_0, U_i; t_0, x_0)] \\ &< (\gamma[X(\sigma_i[t], U_i; t_0, x_0)] \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь через $X(U_0, \{u_i[t]\}; t_0, x_0)$ обозначено любое движение системы (1.1) при поддержке преследующей группой экстремальной стратегии (1.13), а преследуемой — любой допустимой, при начальных условиях (t_0, x_0) . Согласно принятой в [1] терминологии рассмотренный случай назовем грубым.

§ 2. Условия (1.17), наложенные на функцию F (1.14), очень жесткие, поэтому целесообразно избавиться от этих условий. Как показано в [1, стр. 278], даже в случае двух игроков при нарушении

условий (1.17) экстремальные стратегии, определяемые на принципах максимума, не решают задачу 1.1, то есть при поддержке экстремальной стратегии преследующим возможно неограниченное удаление момента поглощения области $G^{(2)}$ областью $G^{(1)}$. Имел ввиду вышесказанное, как в [1, стр. 301], добавим в число переменных $\{t, x(t)\}$, реализующихся по ходу игры, еще m переменных $\vartheta_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$), от которых потребуем, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

1°. Если в системе (1.1) реализовалась позиция $\{t, x(t)\}$, то отвечающие этой позиции реализации переменных $\{\vartheta_\alpha(t)\}$ должны удовлетворять уравнению

$$F^*(t, x(t), \vartheta_1, \dots, \vartheta_m) = 0 \quad (2.1)$$

и минимизировать функцию γ (1.3).

2°. Реализации $\vartheta_\alpha(t)$ должны обеспечивать невозрастание величины γ (1.3) как функции времени.

В дальнейшем нам понадобится еще одно ограничение. Предположим, что регулярны не только ситуации $\{t, x; \{\vartheta_\alpha\}\}$, для которых $F = 0$, но регулярны также все ситуации, для которых

$$0 < F(t, x; \vartheta_1, \dots, \vartheta_m) < \mu \quad (2.2)$$

Здесь μ — малая постоянная.

Этот случай называется очень регулярным.

Для построения управляющего воздействия, решающего поставленную задачу 1.1 при условиях (1.1), (2.1) и (2.2), используем дискретную схему формирования управления. Построим систему полуинтервалов $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) $\tau_0 = t_0$, $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta > 0$. Предположим, что

$$u_i^{(k)}(t) = u_i^{(k)}(\tau_i) \quad (\tau_i < t < \tau_{i+1}) \quad (2.3)$$

(это допустимо, так как множества I_i не зависят от времени). Здесь через $u_i^{(k)}(t)$ обозначен вектор управляющего воздействия преследующей группы на данном этапе игры, а управляющее воздействие преследуемого обозначим через $u^{(2)}(t)$. Переменные $\vartheta_\alpha(t)$ тоже будем считать постоянными на каждом полуинтервале $\tau_i < t < \tau_{i+1}$, то есть

$$\vartheta_\alpha(t) = \vartheta_\alpha^{(i)}(t) = \vartheta_\alpha^{(i)}(\tau_i) \quad (\tau_i < t < \tau_{i+1}) \quad (2.4)$$

В момент $t = t_0 = \tau_0$ полагаем

$$\vartheta_\alpha^{(0)}(t_0) = \vartheta_{\alpha,0}(t_0, x_0) \quad (\alpha = 1, \dots, m) \quad (2.5)$$

Здесь через $\vartheta_{\alpha,0}(t_0, x_0)$ обозначены значения моментов времени, минимизирующих γ , при выполнении условия $G^{(2)} \subset G^{(1)}$ ($F = 0$), когда преследующая группа прицеливается на общую часть границы областей $G^{(2)}$ и $G^{(1)}$, исходя из начальной позиции (t_0, x_0) . Определим дальнейшее изменение величин $\vartheta_\alpha^{(i)}(t)$ следующим образом.

Пусть в момент $t = \tau_j$ реализовалась позиция $\{\tau_j, x[\tau_j]\}$, определим для этой позиции совокупность чисел $\vartheta_{\alpha, \beta}(\tau_j, x[\tau_j])$, минимизирующих γ и обеспечивающих поглощение $G^{(2)} \subset G^{(1)}$.

Если

$$\gamma(\{\vartheta_{\alpha, \beta}(\tau_j, x[\tau_j])\}) < \gamma(\{\vartheta_{\alpha, \beta}^{(1)}[\tau_{j-1}]\}) \quad (2.6)$$

то полагаем

$$\vartheta_{\alpha, \beta}^{(2)}[\tau_j] = \vartheta_{\alpha, \beta}(\tau_j, x[\tau_j]) \quad (2.7)$$

а в противном случае

$$\vartheta_{\alpha, \beta}^{(2)}[\tau_j] = \vartheta_{\alpha, \beta}^{(1)}[\tau_{j-1}] \quad (2.8)$$

Подберем $u_j^{(2)}[\tau_j]$ следующим образом: если

$$\gamma(\{u_j^{(2)}[\tau_j]\}) < \gamma(\{\vartheta_{\alpha, \beta}(\tau_j, x[\tau_j])\}) \quad (2.9)$$

то будем выбирать в качестве $u_j^{(2)}[\tau_j]$ любое управление u_p , прицеливающее преследующую группу в момент $t = \tau_j$ в общую часть границы $G^{(2)}(\tau_j, x[\tau_j]; \{\vartheta_{\alpha, \beta}[\tau_j]\})$ и наименьшей ε -окрестности

$$G_{\varepsilon, \beta}^{(1)}[\tau_j](\tau_j, x[\tau_j]; \{\vartheta_{\alpha, \beta}[\tau_j]\})$$

области $G^{(1)}(\tau_j, x[\tau_j]; \{\vartheta_{\alpha, \beta}[\tau_j]\})$, содержащей $G^{(2)}$, если же

$$\gamma(\{\vartheta_{\alpha, \beta}^{(2)}[\tau_j]\}) = \gamma(\{\vartheta_{\alpha, \beta}(\tau_j, x[\tau_j])\}) \quad (2.10)$$

то в качестве $u_j^{(2)}[\tau_j]$ будем выбирать любое управление $u^{(p)}$, удовлетворяющее условию $u^{(p)} \in |И|$. Однако, такой выбор управления $u_j^{(2)}[\tau_j]$ имеет смысл пока

$$\varepsilon[\tau_j] < \Delta \quad (2.11)$$

Для доказательства условия (2.11) достаточно показать, что

$$\varepsilon[\tau_j] \rightarrow 0, \text{ если } \Delta \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

Пусть полуинтервал $[\tau_p, \tau_{p+1})$ не содержит точек $\vartheta_{\alpha, \beta}$ ($\alpha = 1, \dots, m$), тогда гипотетическое рассогласование [2], являясь абсолютно непрерывной функцией от $t \in [\tau_p, \tau_{p+1})$ при фиксированных $\{\vartheta_{\alpha, \beta}\}$, обеспечит условие (2.12). Это утверждение доказано в [4, 5].

Если же некоторые из точек $\vartheta_{\alpha, \beta}^{(2)}[\tau_j]$ являются внутренними точками полуинтервала $[\tau_j, \tau_{j+1})$, то можно точками $\vartheta_{\alpha, \beta}^{(1)}[\tau_j]$ разделить полуинтервал $[\tau_j, \tau_{j+1})$ на конечное число полуинтервалов и относительно каждого из них, не содержащего точек $\vartheta_{\alpha, \beta}^{(2)}[\tau_j]$ и имеющего длину не больше, чем Δ , привести прежние рассуждения.

Таким образом, условие (2.11) выполняется.

Построим движение системы (1.1).

Имеем систему ломаных

$$\{x_i^{(i)}[t], x_i[t], \{0_i^{(i)}[t]\} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

которые удовлетворяют условию $\Delta \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, причем точки $\{0_i\}$ тоже являются точками деления. В отрезках

$$t_0 < t \leq \min \theta_{i_1}, \quad \theta_{i_1} < t \leq \theta_{i_1-1} \quad (\theta_{i_1} = \theta_{i_1}, \quad \theta_{i_1-1}) \quad (2.14)$$

функции $\{x_i^{(i)}[t]\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, следовательно, можно подобрать подпоследовательность $\{x^{(i_1)}[t]\}$, сходящуюся равномерно к некоторой абсолютно непрерывной функции $x[t]$. Не нарушая общности, можем предполагать, что монотонно невозрастающие функции $\gamma(\{0_{i_1}^{(i_1)}[t]\})$ сходятся в основном (то есть кроме быть может множества меры нуль) к некоторой невозрастающей функции $\gamma(\{0_{i_1}^*[t]\})$. В точках $\theta_{i_1}^*[t]$ функции $x[t]$ могут терпеть разрывы суть первого рода.

Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 2.1. В очень регулярном случае игры из задачи 1.1 тормозящая экстремальная стратегия $U_p(t, x; \{0_{i_1}\})$ обеспечивает существование движения $\{x[t]; \{0_{i_1}[t]\}$ замкнутой системы при $t_0 < t < \theta_{i_1}$, где θ_{i_1} — момент времени, когда осуществляется ϵ -сближение объектов групп при минимизации γ (13). При этом

$$\gamma_* \leq \gamma(\{0_{i_1}, [t_0, x_0]\}) \quad (2.15)$$

какова бы ни была исходная позиция $[t_0, x[t_0]]$ и какой бы ни оказалась допустимая реализация $u_i[t]$ управления преследуемой группы.

Приведенные рассуждения позволяют решить задачу 1.1 в случае, когда условие (2.2) заменяется более слабым требованием

$$0 < F(t, x[t]; \{0_{i_1}[t]\}) < \epsilon \quad (2.16)$$

то есть не требуется существование единственной опорной гиперплоскости общей части границ областей $G^{(2)}$ и $G_{\epsilon}^{(2)}$ при $\epsilon^m = \epsilon$.

Если этот случай назвать регулярным и обозначить через $\gamma^{(2)}$ величину

$$\sup_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{u_i[t]} \gamma(\{0_{i_1}, [X|U_p^{(2)}, u_i; t_0, x_0]\}) = \gamma^{(2)}$$

то можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.2. В регулярном случае игры из задачи 1.1 тормозящая экстремальная стратегия $U_p^{(2)}(t, x; \{0_{i_1}\})$ обеспечивает преследующей группе предельный результат

$$\gamma^{(2)} \leq \gamma(\{0_{i_1}, [t_0, x_0]\})$$

Теорему 2.2 можно доказать, используя свойство (2.12) тормозящей экстремальной стратегии и совершая предельный переход при $\Delta \rightarrow 0$. Однако, в пределе получается система дифференциальных уравнений в континуентах, почти также, как и в случае двух игроков.

Таким образом, задача 1.1 полностью решена.

Ереванский государственный
университет

Получена 2 II 1976

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՎԵՆԿԱՎԱՐՎՈՂ ԽՈՒՐՁՅԻՆ ՕՓՅԵԿՏՆԵՐԻ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ԵՆԳՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Վիտարկվում է օպտիմալ ճետապնդման խնդիրը խմբային օբյեկտի համար, որն, տարրեր մասերի հաստիքման պահերի միջին-բառակուսային մեծության միջնամասի դիպրոմ, երբ խմբի խաղացողները ենթարկվում են սովորական, ոչ ստացիոնար, զծային դիֆերենցիալ հավասարումների սխառմաներին: Ըստ որում տարրեր խաղացողներ խաղի տարբեր կտապներում կարող են փոխվել դերերով:

Խնդիրը լուծված է երկու խաղացողների համար հաշտնի էկստրեմալ կոնսարուցիաների էդանակով: Մանրամասնորեն ճետապնդված են կոպիտալատ սեղույլար և սեղույլար դիպրեր:

THE PROBLEM ON CONVERGING CONTROLLED GROUP OBJECTS

M. S. GABRIELIAN

S u m m a r y

The problem on optimum pursuit for a group object is studied at minimax of a mean-square value of the moments of encounters of its different parts when the players of the group obey the systems of common non-stationary linear differential equations. Therewith, individual players at various stages of the game can exchange their roles.

The problem is solved by the method of extreme constructions well known to two players. The rough, regular and very regular cases for the given statement are studied in some detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. И. Первые задачи о встрече движений. М., Наука, 1970.
2. Габриелян М. С. О конфликтной форме голижения для групповых объектов. Ученые записки Ереванского университета, 1975. 3.

3. Габриелян М. С. Об игровой задаче наведения на выпуклые области. Ученые записки ЕрГУ. 1976, 1.
4. Красовский Н. Н. К задаче об игровой встрече движений. Докл. АН СССР. 1967, т. 173, № 3.
5. Красовский Н. Н. Об одной особенности игровой встречи движений. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 5.

Т. А. МАРТЫНОВИЧ, В. Е. ЮРИНЕЦ, И. А. ПИЩЕНКО

НЕОДНОРОДНАЯ ОРТОТРОПНАЯ ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРАЕМ

1. Рассмотрим полубесконечную ($y \leq 0$) неоднородную ортотропную полуплоскость толщины $2h$, прямолинейный край которой по всей длине подкреплён упругим стержнем постоянного сечения. Сопряжение пластинки со стержнем осуществлено на фактической плоскости их спая. Модули упругости и модуль сдвига пластинки-полуплоскости меняются по закону

$$E_1(y) = E_1^{(0)} e^{-ky}, \quad E_2(y) = E_2^{(0)} e^{-ky}, \quad G(y) = G^{(0)} e^{-ky} \quad (1.1)$$

где k — величина, характеризующая степень неоднородности материала. Предполагается, что модуль сдвига $G^{(0)}$ связан с модулями упругости $E_1^{(0)}$ и $E_2^{(0)}$ следующим образом:

$$G^{(0)} = \frac{E_1^{(0)} E_2^{(0)}}{E_1^{(0)}(1 + 2\nu_2) + E_2^{(0)}} \quad (1.2)$$

что даёт возможность, как будет показано ниже, рассматривать численные примеры в относительных величинах $E_1^{(0)}, E_2^{(0)}$. В противном случае для $G^{(0)}$ можно брать конкретные числовые данные, не учитывая выражения (1.2). Коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 приняты постоянными.

К стержню приложены внешние усилия $N(x)$ и $T(x)$ (N, T — нормальная и касательная составляющие заданных усилий). Со стороны стержня на пластинку будут передаваться контактные (внутренние) усилия $N^{(0)}(x), T^{(0)}(x)$. Следовательно, на контуре спая пластинки со стержнем ($y = 0$) имеются следующие условия сопряжения (фиг. 1):

$$(u_1)_{y=0} = u_2, \quad (v_1)_{y=0} = v_2, \quad (\tau_{xy})_{y=0} = N^{(0)}(x), \quad (\sigma_{xy})_{y=0} = T^{(0)}(x) \quad (1.3)$$

где u_1, v_1 и u_2, v_2 — компоненты вектора смещения пластинки и стержня соответственно.

Пластинка испытывает обобщенное плоское напряженное состояние.

2. При малых деформациях в отсутствии объемных сил зависимость между компонентами вектора перемещений и деформаций для пластинки в случае обобщенного плоского напряженного состояния дается соотношениями

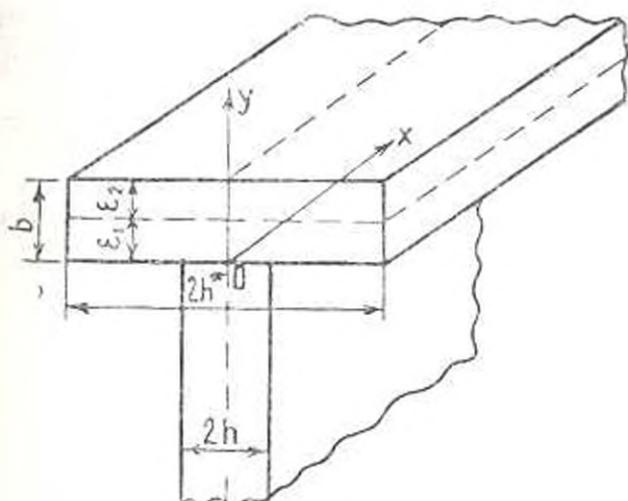
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \epsilon_x, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \epsilon_y, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \gamma_{xy} \quad (2.1)$$

и удовлетворяются условиям совместности [1]

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнения обобщенного закона Гука, которые связывают компоненты деформаций с компонентами тензора напряжений для ортотропной пластинки, имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_2} (\sigma_y - \nu_2 \sigma_x), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.3)$$



Фиг. 1.

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют условиям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Подставляя выражения (2.3) в уравнения (2.2), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \nu_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

где $F(x, y)$ — функция напряжений, через которую компоненты тензора напряжений выражаются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.1), (2.3), (2.4), (2.6) и (1.1) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} &= \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right) \\ \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} &= \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1}{G} \right) \frac{\partial^5 F}{\partial x^4 \partial y} - \frac{1}{E_1} \frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^3} - \frac{k}{E_1} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В работе используется интегральное преобразование Фурье по переменной x

$$\bar{f}(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{ixt} dx, \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t, y) e^{-ixt} dt. \quad (2.8)$$

Подставляя выражения (1.1), (1.2) в уравнения (2.5) и применяя интегральное преобразование Фурье (2.8), получим

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dy^2} + 2k \frac{d \bar{F}}{dy} - \left[k^2 - \nu^2 \left| \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) - (1 - 2\nu_1) \right| \right] \frac{d \bar{F}}{dy} - - k^2 k \left| \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) - (1 - 2\nu_1) \right| \frac{d \bar{F}}{dy} + \nu^2 \left(\nu^2 \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} - \nu_2 k^2 \right) \bar{F} = 0 \quad (2.9)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (2.9) запишется в виде

$$\bar{F}(t, y) = \sum_{n=1}^4 C_n e^{\lambda_n y - \frac{\nu}{2} |y|} \quad (2.10)$$

где λ_n удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \lambda^4 - 2 \left[\frac{k^2}{4} - \frac{\nu^2}{2} \left| \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) - (1 - 2\nu_1) \right| \right] \lambda^2 - \\ & + \frac{k^4}{16} - \frac{1}{4} k^2 \nu^2 \left| \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) - (1 - 2\nu_1) \right| - \\ & - \frac{\nu^4}{4} \left| \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 + 2\nu_2) - (1 - 2\nu_1) \right|^2 = \\ & = \nu^4 \left[\frac{1}{4} \left| \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right|^2 - \frac{k_0^2}{E_2} \right] - \lambda^2 \nu_1 k^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.11) находим

$$\lambda_n = \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - p_0 \nu^2 \pm \nu \sqrt{(p^2 - k_0) - \nu_1 k^2}} \quad (2.12)$$

где обозначено

$$k_0 = \frac{E_1^{(0)}}{E_2}, \quad p_0 = \frac{1}{2} [k_0 (1 - 2\nu_2) - (1 - 2\nu_1)]$$

Так как на бесконечности напряжения должны равняться нулю, то в решении уравнения (2.9) в виде (2.10) с учетом (2.12) нужно удерживать члены, исчезающие на бесконечности. Тогда

$$F(x, y) = C_1 e^{(\alpha_1 - \frac{k}{2})y} + C_2 e^{(\alpha_2 - \frac{k}{2})y} \quad (2.13)$$

где

$$\alpha_{1,2} = \left\{ -\frac{k^2}{4} + \rho_0^2 \pm \epsilon \sqrt{\rho_0^2 (\rho_0^2 - k_0^2) - \nu_1 k^2} \right\} \quad (2.14)$$

Применяя к уравнениям (2.7) интегральное преобразование Фурье (2.8) и подставляя в них выражение (2.13), учитывая при этом граничные условия (1.3), будем иметь

$$\begin{aligned} (i^2 \bar{u}_1)_{y=0} &= \frac{1}{E_1 \alpha_1} (s_1 \bar{N}^{(1)} + i s_2 \bar{T}^{(1)}) \\ (i^2 \bar{v}_1)_{y=0} &= \frac{1}{E_2 \alpha_2} (s_2 \bar{N}^{(2)} + i s_1 \bar{T}^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} s_1 &= \nu_1 \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \frac{k}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{k^2}{4}, & s_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 - k \\ s_3 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \left[\alpha_1 \alpha_2 - \frac{k}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{k^2}{4} \right] \\ s_4 &= \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2) - \epsilon^2 [\nu_1 - k_0 (1 + 2\nu_1) - 1] \end{aligned}$$

3. Расчет стержня основывается на гипотезе плоского нормального сечения. Исходя из уравнений равновесия элемента стержня, находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dx^2} &= 2h^* \left(N - \epsilon_2 \frac{dT}{dx} \right) - 2h \left(N^{(1)} + \epsilon_1 \frac{dT^{(1)}}{dx} \right) \\ \frac{dV}{dx} &= 2h^* T - 2h T^{(1)}; \quad Q = -\frac{dM}{dx} - \epsilon_1 \frac{dV}{dx} - 2h^* b T \end{aligned} \quad (3.1)$$

где V , Q — продольное и поперечное усилия; M — момент, действующий в произвольном сечении стержня; ϵ_1 , ϵ_2 — расстояния волокон стержня от его оси соответственно внутреннего и внешнего края; $b = \epsilon_1 + \epsilon_2$ — высота стержня; $2h^*$ — толщина того края стержня, который не соприкасается с пластиной.

Принимая гипотезу нормального сечения, при малых деформациях вдоль контура спая пластинки со стержнем будем иметь следующие кинематические соотношения

$$\frac{du_2}{dx} = \epsilon_0 + \epsilon_1 \frac{d\theta}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = \theta \quad (3.2)$$

где θ — угол поворота сечения стержня, ϵ_0 — деформация оси стержня.

При малых деформациях закон Гука для стержня сводится к следующим соотношениям

$$e_0 = \frac{V}{g_1}, \quad \frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{M}{g_2} \quad (3.3)$$

где $g_1 = E^* S_n$ — жесткость стержня на растяжение, $g_2 = E^* I$ — жесткость стержня на изгиб, S_n — площадь нормального сечения стержня, E^* — модуль упругости, I — момент инерции.

Из равенств (3.1), (3.2) и (3.3), используя интегральное преобразование Фурье (2.8), находим

$$\begin{aligned} i^2 \bar{u}_2 &= -\frac{2h\varepsilon_1 \bar{N}^{(i)}}{g_2} - i \frac{2h}{G_1} \bar{T}^{(i)} - \frac{2h^* \varepsilon_1 \bar{N}}{g_2} + i \frac{2h^* \bar{T}}{G_2} \\ i^2 \bar{v}_2 &= -\frac{2h}{g_2} \bar{N}^{(i)} - i \frac{2h\varepsilon_1}{g_2} \bar{T}^{(i)} + \frac{2h^* \bar{N}}{g_2} - i \frac{2h^* \varepsilon_2 \bar{T}}{g_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\frac{1}{G_1} = \frac{1}{g_1} + \frac{\varepsilon_1^2}{g_2}, \quad \frac{1}{G_2} = \frac{1}{g_2} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_1}{g_2}$$

4. Исходя из условий равенства перемещений на контуре сая (1.3), на основании соотношений (2.15) и (3.4) получим

$$\begin{aligned} a_{11} \bar{N}^{(i)} + a_{12} \bar{T}^{(i)} &= b_{11} \bar{N} + b_{12} \bar{T} \\ a_{21} \bar{N}^{(i)} + a_{22} \bar{T}^{(i)} &= b_{21} \bar{N} + b_{22} \bar{T} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2h\varepsilon_1 + \frac{g_2 S_1}{E_1^{(0)}}, & a_{12} &= i \left(\frac{2h}{G_1} + \frac{g_2 \varepsilon_2}{E_1^{(0)}} \right) \\ a_{21} &= 2h + \frac{g_2 \varepsilon_2}{E_1^{(0)}}, & a_{22} &= i \left(2h\varepsilon_1 + \frac{g_2 S_1}{E_1^{(0)}} \right) \end{aligned}$$

$$b_{11} = 2h^* \varepsilon_1, \quad b_{12} = i \frac{2h^* g_2}{G_2}, \quad b_{21} = 2h^*, \quad b_{22} = -i 2h^* \varepsilon_2$$

Система уравнений (4.1) служит для определения трансформант контактных усилий $\bar{N}^{(i)}$, $\bar{T}^{(i)}$ при подкреплении неоднородной ортотропной полуплоскости прямолинейным стержнем. Сами же усилия восстанавливаются при помощи формулы обращения (2.8).

Рассмотрим случай нагружения подкрепляющего стержня нормальным усилием $\lambda(x)$ ($T=0$). Тогда

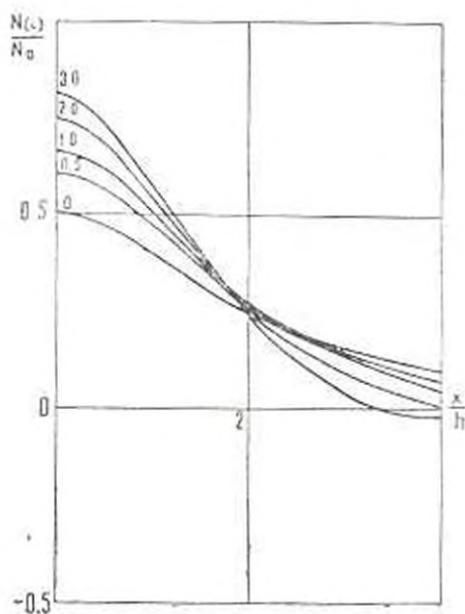
$$b_{12} = b_{22} = 0 \quad (4.2)$$

Решение системы уравнений (4.1) в этом случае с учетом формулы обращения (2.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 N^{(i)}(x) &= \frac{b_{21}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_1(i)}{R(i)} di \int_0^{\infty} N(t) \cos i(t-x) dt \\
 T^{(i)}(x) &= \frac{b_{21}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_2(i)}{R(i)} di \int_0^{\infty} N(t) \sin i(t-x) dt
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 R(i) &= a_{11}a_{22}^* - a_{12}^*a_{21}, & R_1(i) &= \varepsilon_1 a_{22}^* - a_{12}^* \\
 R_2(i) &= a_{11} - \varepsilon_1 a_{21}, & a_{12}^* &= \frac{2hg_2}{G_1} + \frac{g_2 s_2}{E_1^{(0)}}, & a_{22}^* &= 2h\varepsilon_1 + \frac{g_2 s_1}{E_1^{(0)}}
 \end{aligned}$$



Фиг. 2.

Если на стержень действует сосредоточенная сжимающая сила N_0 , то в формулах (4.3) следует положить

$$N(t) = -N_0 \delta(t) \tag{4.4}$$

и учесть, что

$$\int_0^{\infty} \delta(t) \cos i(t-x) dt = \cos ix, \quad \int_0^{\infty} \delta(t) \sin i(t-x) dt = -\sin ix \tag{4.5}$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака.

5. Для примера рассмотрим неоднородную ортотропную полуплоскость и подкрепляющий стержень прямоугольного сечения $b \times 2h^*$ со следующими упругими, жесткостными и геометрическими характеристиками:

$$\frac{2k^*}{2h} = 2.5, \quad \frac{E^*}{E_1^{(0)}} = \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} = 3.0, \quad g_1 = 2E^*hk^*, \quad b = 2h$$

$$g_2 = \frac{1}{b} E^*I^*b^3, \quad \nu^* = \nu_1 = 0.3, \quad z_1 = z_2 = h$$

На фиг. 2 изображена зависимость контактных усилий $X^{(0)}$ от координаты x при различных значениях параметра k , характеризующего степень неоднородности материала полуплоскости.

Вычисления контактных усилий производились на ЭВМ «Минск-22» по методу Гаусса с точностью до 10^{-3} знака.

Львовский государственный
университет им. Ив. Франко

Получено 24 XI 1975

S. I. MARTYNOVICH, V. E. YURMEN, I. A. NISHCHENKO

ԱՄՐԱՅՈՒԱՆ ԵՅՐՈՎ ԱՉ ՀԱՄԱՍԵՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿՐՈՒՀԱԿՐՈՒԹՅՈՒՆ

Ա մ փ ո փ ո ս

Ճուրջի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով լուծված է ամրացված եզրով ոչ համասեռ օրթոտրոպ կիսաճարձկան լարված գիծափի մասին խնդիրը:

NON-HOMOGENEOUS ORTHOTROPIC SEMI-PLANE WITH HINGED EDGE

T. L. MARTYNOVICH, V. E. YURMEN, I. A. NISHCHENKO

S u m m a r y

By using the method of integral Fourier transformations the problem of strained state of a non-homogeneous orthotropic plate with hinged edge is solved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лавинский С. Г. Аналитическое решение М. Госттеориздат, 1957

А. А. АБГАРИН, М. И. КИСЕЛЕВ

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Искусственные спутники Земли (ИСЗ) все шире используются для обеспечения передачи информации. Приближается время, когда «спутники связи» станут основой Всемирной системы связи [1]. Поэтому возрастают требования к поддержанию синхронизма обращения группы ИСЗ и их регулярного расположения друг относительно друга в пределах группы, например, в вершинах правильного многоугольника [2]. Вместе с тем, известно, что, как и всякое небесное тело, ИСЗ претерпевает возмущающие его движения воздействия, среди которых можно указать: аэродинамические возмущения, возмущения, вызываемые притяжением Луны и планет, аномалиями гравитационного поля Земли [3], а также давлением солнечного света [4] и корпускул солнечного ветра, взаимодействием поверхностного электрического заряда ИСЗ и его проводящих и магнитомягких конструкционных материалов с геомагнитным полем [5], [6] и ударами микрометеоритов.

Следует отметить, что техника измерений орбитальных параметров ИСЗ непрерывно прогрессирует: в настоящее время точность определения положения центра масс ИСЗ достигает 1 м [7] и в перспективе, как следует из опубликованной программы экспериментов с ИСЗ «Геос-С», с помощью лазерной локации можно ожидать 1 см [8] и менее.

При этом возможны два подхода к теоретическому описанию движения ИСЗ и интерпретации измерения его орбит.

С одной стороны, можно продолжать наращивание количества возмущающих членов в уравнениях небесной механики и обрабатывать получающиеся громоздкие дифференциальные уравнения с помощью ЭВМ.

С другой стороны, кроме указанного детерминированного, возможен и статистический подход. Так, например, А. А. Красовским [9] отмечено, что движение спутника всякой реальной планеты должно описываться стохастическими уравнениями, поскольку кроме «правильной» составляющей гравитационного поля, соответствующей «правильной» фигуре однородной планеты, имеют место гравитационные аномалии различных пространственных масштабов (материковые, региональные и т. п.), связанные с нерегулярностью фигуры и распределения масс планеты. Поэтому входящие в уравнения движения производные гравитационного потенциала вдоль траектории ИСЗ содержат случайные функции времени, возникающие благодаря наличию указанных гравитационных аномалий. С развитием лазерной техники траекторных измерений, открывающей возможности определения все более тонкой структуры и траекторных возмущений, сформулированная в

[9] задача статистического описания поведения ИСЗ на орбите с помощью аппарата уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка — Колмогорова (ЭФПК) будет становиться все более актуальной. При этом представляет интерес распространить статистический подход и на описание влияния других возмущающих факторов, упомянутых в начале этой заметки.

В плане обоснования возможности такого подхода приведем следующие соображения качественного характера. Возмущения за счет гравитационных аномалий, притяжения Луны и ближайших планет, аэродинамического сопротивления, солнечного светового давления и т. п. действуют на ИСЗ независимо друг от друга, некоторые из них известны до сих пор лишь по порядку величины. Результирующая возмущающих воздействий содержит высокочастотную компоненту, создаваемую мелкомасштабными пространственными неоднородностями и кратковременными возмущениями. Эта высокочастотная компонента при наличии эффективного демпфирования возмущений, стабилизирующего параметры орбиты, так что последствие каждого отдельного возмущения подавляется, может быть представлена на некотором конечном интервале времени как стационарный случайный процесс $\xi(t)$. При этом можно надеяться на достаточно компактное решение проблемы, поскольку результирующая случайная функция будет соответствовать марковскому процессу и удовлетворять требованиям, оправдывающим применение аппарата уравнений ЭФПК. Низкочастотная компонента возмущений, если она не подавляется в результате демпфирования и не приводит к движению с перемещением в фазовом пространстве за счет конечного времени — релаксации [10], может быть учтена детерминированно.

Запишем уравнения небесной механики для плоского движения [11], вводя в их первые части компоненты случайных ускорений $a_x = \xi_1(t)$ и $a_y = \xi_2(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 - \frac{V_1^2}{r} &= -\frac{2}{r^2} + \xi_1 \\ \dot{V}_2 + \frac{V_1 V_2}{r} &= \xi_2 + a_{h_0}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Предположим, что интеграл второго уравнения системы (1) можно представить в виде

$$r \frac{d\eta}{dt} = h_0(t) [1 + \eta_2(t)] \quad (2)$$

Это означает, что закон площадей соблюдается квазистационарно, в пренебрежении изменением радиуса орбиты за один оборот, и что случайные тангенциальные ускорения создают случайную составляющую орбитального момента количества движения ИСЗ, пропорциональную некоторой случайной функции $\eta_2(t)$. Квазистационарное монотонное изменение параметра $\eta(t)$ возможно при тонкой коррекции орбит с помощью корректирующей двигательной установки, создающей малое тангенциальное ускорение $a_{h_0}(t)$.

Таким образом, представляется возможным описать эволюцию положения на орбите, близкой к круговой, правильной синхронной группы ИСЗ, создаваемую их бортовыми корректирующими установками, с учетом случайных возмущений.

Поясним более детально используемое нами квазистационарное приближение. Представим радиус орбиты и угловую скорость обращения в виде

$$\begin{aligned} r &= r_0(t) + r_1(t) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$r_1(t) \ll r_0(t), \quad \dot{r}_1(t) \ll \dot{r}_0(t) \sim 0, \quad \dot{\psi}_1(t) \ll \dot{\psi}_0(t) \sim 0 \quad (4)$$

Это означает, что регулярная невозмущаемая случайными силами составляющая радиуса орбиты зависит от времени как от параметра и в соответствии с принятым квазистационарным приближением ее производными по времени можно пренебречь.

Используя первое уравнение системы (1) и (2) с учетом (3) и (4), имеем, удерживая линейные члены по ψ_1 и кубические по $x = r_1/r_0$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Omega_0^2(t)[1 - 6\gamma_0]x - 3\Omega_0^2(t)[1 - 4\gamma_0]x^2 + 6\Omega_0^2(t) \left[1 + \frac{10}{3}\gamma_0\right]x^3 = \\ = -2\gamma_0(1 + \gamma_0 x^2)x - 2\Omega_0^2(t)\gamma_0 - \gamma_0 \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Omega_0(t) = (d\psi/dt)_0 = 1/\tau_0$ — мгновенное значение возмущенной угловой частоты обращения, $\gamma_0 = \dot{r}_1/\dot{\psi}_0(t)$, в уравнение введен член $-2\gamma_0(1 + \gamma_0 x^2)x$, характеризующий нелинейное демпфирование колебаний, создаваемое бортовым корректирующим устройством и гарантирующий, как будет показано ниже, устойчивость ИСЗ на орбите при γ_0 принимающих целочисленные значения, большие единицы. Дальнейшие расчеты будут проведены при $\gamma = 3$.

Полученное уравнение для малых относительных возмущений радиуса орбиты ИСЗ эквивалентно уравнению одноконтурного генератора, режим работы которого претерпевает некоторое систематическое изменение и случайные возмущения, в том числе и параметрические. Интересно отметить, что первоначально методы описания систем с параметрическими возмущениями, получившие широкое применение и развитие в радиофизике, были применены А. И. Мандельштамом в связи с проблемами небесной механики [12]. Дифференциальное уравнение (5) содержит случайные коэффициенты и поэтому в процессе его решения должна быть найдена функция плотности распределения, характеризующая поведение системы, описываемой этим уравнением.

Воспользуемся известным методом Крылова—Боголюбова [13] и, введя замену переменных

$$x = \frac{a(t)}{\sqrt{\Omega}} \cos \varphi, \quad x = -a(t) \sqrt{\Omega} \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \int \Omega(\tau) d\tau + z(t) \quad (6)$$

построим эквивалентную уравнению (5) систему дифференциальных уравнений для определения амплитудного фактора a и фазы φ , которая после операции усреднения имеет вид

$$\frac{da}{dt} = -za - \frac{3\alpha\gamma a^3}{32\Omega} + \frac{3a\Omega_0^2}{\Omega} \overline{\zeta_2 \sin 2\varphi} - \frac{12\Omega_0^2 a^3}{\Omega^{3/2}} \overline{\zeta_2 \cos^3 \varphi \sin \varphi} +$$

$$+ \frac{20a^3 \Omega_0^2}{\Omega^2} \overline{\zeta_2 \cos^3 \varphi \sin \varphi} - \frac{2\Omega_0^2}{\Omega^{1/2}} \overline{\zeta_2 \sin \varphi} - \frac{1}{\Omega^{1/2}} \overline{\zeta_1 \sin \varphi} \quad (7)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} + \frac{9a^2 \Omega_0^2}{4\Omega^3} + \frac{6\Omega_0^2}{\Omega} \overline{\zeta_2 \cos^2 \varphi} - \frac{12\Omega_0^2 a}{\Omega^{3/2}} \overline{\zeta_2 \cos^2 \varphi} +$$

$$+ \frac{20a^2 \Omega_0^2}{\Omega^2} \overline{\zeta_2 \cos^4 \varphi} - \frac{2\Omega_0^2}{a\sqrt{\Omega}} \overline{\zeta_2 \cos \varphi} - \frac{1}{a\sqrt{\Omega}} \overline{\zeta_1 \cos \varphi} \quad (8)$$

где черта над слагаемыми означает усреднение по времени.

Применяя к случайным членам последних уравнений процедуру усреднения по Стратоновичу [14], имеем

$$\frac{da}{dt} = -za - \frac{3\alpha\gamma a^3}{32\Omega} + m_1 + \zeta_1(t)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} + \frac{9a^2 \Omega_0^2}{4\Omega^3} + m_2 + \zeta_2(t) \quad (9)$$

где введены следующие обозначения:

$$\zeta_1(t) = \left[\frac{3a\Omega_0^2}{\Omega} \sin 2\varphi - \frac{3a^2 \Omega_0^2}{\Omega^{3/2}} (\sin \varphi + \sin 3\varphi) + \frac{5a^3 \Omega_0^2}{2\Omega^2} (2 \sin \varphi + \sin 4\varphi) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\Omega_0^2}{\sqrt{\Omega}} \sin \varphi \right] \zeta_2 - \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \zeta_1 \sin \varphi \quad (10)$$

$$\zeta_2(t) = \left(\frac{6\Omega_0^2}{\Omega} \cos^2 \varphi - \frac{12\Omega_0^2 a}{\Omega^{3/2}} \cos^3 \varphi + \frac{20a^2 \Omega_0^2}{\Omega^2} \cos^4 \varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{2\Omega_0^2}{a\sqrt{\Omega}} \cos \varphi \right) \zeta_2 - \frac{1}{a\sqrt{\Omega}} \zeta_1 \cos \varphi \quad (11)$$

Полученной системе дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами (9) соответствуют следующие уравнения ЭФПК для плотности распределения фактора a и фазы φ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \left[m_1 - \tau a - \frac{3\tau_1 a^3}{32\Omega} \right] P \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} [z_1^2 P] \quad (12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[m_2 + \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} + \frac{9a^2\Omega_0^2}{4\Omega^2} \right] W \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [z_2^2 W] \quad (13)$$

где

$$m_1 = \overline{\tau_1(t)}, \quad m_2 = \overline{\tau_2(t)}, \quad z_1^2 = \tau_1^2(t), \quad z_2^2 = \tau_2^2(t)$$

Принимая, что время корреляции $\tau_{\text{кор}}$ удовлетворяет условию: $\tau_{\text{кор}} \ll \Delta$, где Δ — такой сдвиг по времени, что $|a - a_{-1}| \ll a_0$, $|\tau - \tau_{-1}| \ll 1$, получаем

$$m_1 = Aa + Ba^{-1} + Ca^3 + Da^5, \quad m_2 = \overline{\tau_2(t)} = 0 \quad (14)$$

где

$$A = \frac{6\Omega_0^4 z(\Omega)}{\Omega^2} + \frac{3\Omega_0^2 S_0}{\Omega^2} + \frac{9\Omega_0^4 z(2\Omega)}{2\Omega^2}$$

$$B = \frac{2\Omega_0^2 S_0}{\Omega} + \frac{S}{\Omega} + \frac{\Omega_0^4 z(\Omega)}{\Omega}$$

$$C = \frac{27\Omega_0^4 z(\Omega)}{4\Omega^3} + \frac{45\Omega_0^4 z(2\Omega)}{2\Omega^3} + \frac{27\Omega_0^4 z(3\Omega)}{4\Omega^3}$$

$$D = \frac{25\Omega_0^4 z(2\Omega)}{\Omega^4} + \frac{25\Omega_0^4 z(4\Omega)}{4\Omega^4}$$

Для τ_1^2 имеем

$$\tau_1^2 = A^* + B^* a^2 + C^* a^4 + D^* a^6 \quad (15)$$

где

$$A^* = \frac{2\Omega_0^4 z(\Omega)}{\Omega} + \frac{S}{\Omega} + \frac{2\Omega_0^2}{\Omega}$$

$$B^* = \frac{6\Omega_0^4 z(\Omega)}{\Omega^2} + \frac{9\Omega_0^4 z(2\Omega)}{\Omega^2} + \frac{3\Omega_0^2 S_0}{\Omega^2}$$

$$C^* = \frac{9\Omega_0^4 z(\Omega)}{\Omega^3} + \frac{15\Omega_0^4 z(2\Omega)}{\Omega^3} + \frac{9\Omega_0^4 z(3\Omega)}{2\Omega^3}$$

$$D^* = \frac{25\Omega_0^4 z(2\Omega)}{2\Omega^4} + \frac{25\Omega_0^4 z(4\Omega)}{2\Omega^4}$$

$z(\Omega)$, $z(2\Omega)$, $z(3\Omega)$, $z(4\Omega)$ — спектральные плотности случайного процесса на соответствующих частотах

$$S_0 = \int_{-\infty}^0 \frac{\eta_0(t) \eta_1(t + \tau) \sin \Omega t \sin (\Omega t + \tau)}{\tau_0(t) \tau_1(t + \tau)} dt$$

$$S = \int_{-\infty}^0 \frac{\eta_1(t) \eta_1(t + \tau) \sin \Omega t \sin (\Omega t + \tau)}{\tau_1(t) \tau_1(t + \tau)} dt$$

Найдем плотность распределения $P(a, t)$ в квазистатистическом приближении, когда время входит в функции как параметр и можно полагать

$$\frac{\partial P}{\partial t} \sim 0$$

$$P(a, t) = \frac{C_0}{\sigma_1^2} e^{-\int \left(\frac{2m_1}{\sigma_1^2} - \frac{2\lambda a}{\sigma_1^2} - \frac{3\pi_1 a^2}{16\Omega \sigma_1^2} \right) da} \quad (16)$$

где C_0 — постоянная, определяемая из условия нормировки

$$\int_0^{\infty} P(a, t) da = 1 \quad (17)$$

Из уравнения (13) следует диффузионное распределение фазы, распределение которой характеризуется нормальным законом распределения

$$W(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2 t}} \exp \left\{ - \left| \varphi - \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} - \frac{9\Omega_0^2 a^2}{48\sigma_1^2} \right|^2 / 2\sigma_2^2 t \right\} \quad (18)$$

Выражение (16) при всех a ограничено и экспоненциально стремится к нулю при $a \rightarrow \infty$ благодаря выбранному выше закону демпфирования.

Для модельной задачи, учитывающей только тангенциальные случайные возмущения гамильтона стационарного белого шума, получено следующее стационарное распределение плотности вероятности нахождения ИСЗ на околокруговой орбите в более простом виде [15]

$$P(a) = C a^2 e^{-\lambda(\omega) a^2} [\alpha^2 + \beta(\omega)]^{-\nu(\omega)} \quad (19)$$

где $\lambda(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\nu(\omega)$ — положительные функции, зависящие от уровня шума и динамических параметров системы.

Полученные плотность распределения амплитудного фактора a и фазы φ позволяют определять средние статистические характеристики группы ИСЗ (16), (18), совершающей стационарное синхронное, орбитальное движение или его плавную «адиабатическую» коррекцию. В случае $\rho = \text{const}$ время выпадает из соотношения (16). Отметим, что предположение о стационарности уровня случайных возмущений справедливо, конечно, для достаточно малого интервала изменения радиусов орбит.

Предлагаемый способ статистического описания поведения ИСЗ может быть опробирован и может совершенствоваться по мере расширения информации о возмущающих астрофизических и геофизических факторах околоземного космического пространства и их влияния на движение ИСЗ.

ВНИИ оптико-физических измерений

Поступила 28 VIII 1975

Ա. Ա. ԱՐԳԱՐՅԱՆ, Մ. Ի. ԿԻՍԵԼԵՎ

ԵՐԿՐԻ ԱՐՇԽԱՏԱԿԱՆ ԱՐԴԱՆՅԱԿՆԵՐԻ ԽՈՏՈՐՎԱՆ ՇԱՐՃԵԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԿԱՆ ԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ԻՎԱՆՈՎ

Ա. Վ. Փ. Ո. Փ. Ո. Վ.

Երկրի արհեստական արբանյակի վրա ազդող զրգուղմների զուամար սերկայացում է պատահական արդյունքորոշ ֆունկցիայով, որը ներմուծվում է երկնային մեխանիկայի զոսանագլմոմ ճաճաարումների մեջ և այն ճաարավորություն է ստեղծում վիճակագրական աճալներով նկարագրել արբանյակի ճաարը՝ ճաճանականություն բաշրման ֆունկցիայի աղևությունը:

ON STATISTIC DISCRPTION OF PERTURBED MOTION OF ARTIFICIAL EARTH SATELLITES

A. A. ARGARIAN, M. I. KISELEV

S u m m a r y

Totality of impulses influencing the motion of artificial Earth satellites is a resultant random function which is introduced into linearized equations of celestial mechanics thus allowing to describe the behaviour of the satellite statistically by means of the probability distribution function.

Л И Т Е Р А Т У Р А

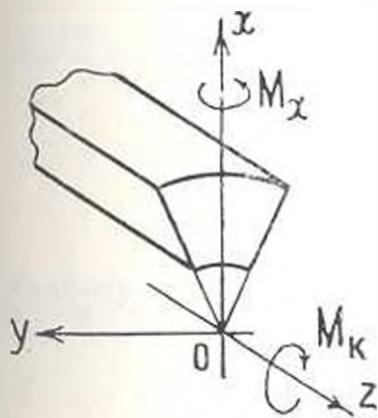
1. Сиверс А. П. Основы космической радиолектроникки. М., «Советское радио», 1969.
2. Можого Г. В. Задача о непрерывном обзоре Земли и кинематически правильные спутниковые системы. I. Космические исследования, 1972, X, 6, 833.
3. Евтушенко Ю. Г., Крылов Н. А., Мертянов Р. Ф., Самойлович Г. В. Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли. М., Вычислительный центр АН СССР, 1967.
4. Шувалов В. В. Световое давление как динамический фактор в движении искусственных небесных тел. Уч. записки Ярославского педагогического института, астрономия, 1963, вып. 56, стр. 189.
5. Ларичева В. В., Рейн М. В. Об одном способе построения решений уравнений плоского возмущенного движения небесной механики. Космические исследования, 1963, III, вып. 3, 359.

6. Павлов А. М., Сана В. А. Эволюция орбиты проводящего спутника под действием магнитного поля центрального диполя. Космические исследования, 1974, XII, 4, 512.
7. Жолар Ю. Х., Жолар Н. В. Возможности вычисления локального гравитационного поля Земли по наблюдениям ИСЗ. Латвийский ордена Трудового Красного Знамени Государственный университет им. П. Случки. Уч. записки, 1974, т. 202, Астрономия, вып. 10.
8. Sity I. M., Volbua F. O. Future applications of laser ranging systems, Int. Symp. Earth's Gravit. Field and Secul. Variat. Possit. Sydney, Nov., 1973, 3 pp.
9. Красовский А. А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М., Изд. Наука, 1974.
10. Заславский Г. М. Статистическая неэргодичность в нелинейных системах. М., Изд. «Наука», 1970.
11. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г., Яришевич В. А. Минирирование космических аппаратов. М., Изд-во «Машиностроение», 1970.
12. Мельников А. И., Шварцман Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хильман С. Я. Новые исследования нелинейных колебаний. М., Радиоиздат, 1936.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Изд. «Наука», 1974.
14. Стратонович Р. А. Синхронизация автогенератора при наличии помех. Радиотехника и Электроника, 1958, № 4, 477.
15. Джусумкулов Т. А., Киселев М. И. О статистическом прогнозировании вариации орбит небесных тел. Тр. Фрунзенского политехи. ин-та, 1975, вып. 90, стр. 144.

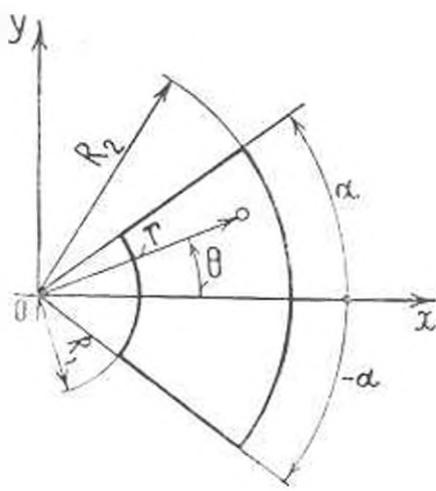
Ս. Վ. ԳԱԼՍՅԱՆ

ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ В ВИДЕ КРУГОВЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ СЕКТОРОВ ПРИ СОВМЕСТНОМ КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ

Задача пластического состояния призматического стержня при совместном изгибе и кручении впервые рассматривалась в работах Гандельмана [1] и Хилла [2], в которых получено уравнение задачи для идеально жестко-пластического стержня. Позднее Пехник и Жичковский [3, 4] рассмотрели решение задач для прямоугольных и круговых сечений. При помощи некоторого полуобратного метода в работах [5, 6] получены уравнения, определяющие напряженное состояние упрочняющихся призматических стержней при совместном воздействии крутящих и изгибающих моментов и получено решение для кругового кольцевого сечения. В настоящей работе рассматривается напряженно-деформированное состояние призматических стержней с поперечными сечениями в виде круговых и кольцевых секторов при совместном воздействии крутящего и изгибающего моментов, приложенных на концевых сечениях (фиг. 1). Материал стержня подчиняется условию изотропного упрочнения.



Փիգ. 1.



Փիգ. 2.

1. В системе цилиндрических координат рассмотрим призматический стержень, боковые поверхности которого представляют собой координатные поверхности $r = R_1$, $r = R_2$ и $\theta = \pm \alpha$ (фиг. 2).

Имеем [6] компоненты тензора деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{1}{2} \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_z = Ar \sin \theta + Br \cos \theta + C \\ \gamma_{rs} = 0, \quad \gamma_{rz} = E \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z} = E \left(r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

компоненты тензора напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_z = \frac{3}{2} f(z, r) (Ar \sin \theta + Br \cos \theta + C) \\ \tau_{rz} = Ef(z, r) \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \tau_{\theta z} = Ef(z, r) \left(r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z}$ представляют отношения компонент напряжения к $2G$ (G — модуль сдвига), f — заданная функция, характеризующая закон упрочнения материала стержня с некоторым физическим параметром z ($0 \leq z \leq \frac{1}{2}$). Для линейно-упругого случая $f(z, 0) = 1$. A, B, C, E — постоянные, определяемые из статических условий, ψ — некая функция r и θ .

$$z = \sqrt{\frac{3}{4} (Ar \sin \theta + Br \cos \theta + C)^2 + E \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right]} \quad (1.2)$$

интенсивность деформации сдвига.

Перемещения имеют вид

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{4} (A \sin \theta + B \cos \theta) (r^2 - 2z^2) - \frac{1}{2} Cz \\ v = -\frac{r}{4} (A \cos \theta - B \sin \theta) (r^2 - 2z^2) - 2Erz \\ w = 2E \psi(r, \theta) + Arz \sin \theta + Brz \cos \theta + Cz \end{aligned}$$

Задача сводится к внутренней задаче Неймана относительно функции перемещения ψ [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[r f(z, r) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[f(z, r) \left(r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_r = \frac{d}{ds} \left(\frac{r^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где r — расстояние точки контура Γ области Ω поперечного сечения стержня от начала координат, s — дуга контура, а ν — направление внешней нормали контура.

Решение (1.3) ищем в виде ряда

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \psi_k \quad (1.4)$$

Тогда (1.3) сводится к граничной задаче

$$\begin{aligned} \Delta \psi_0 &= 0, \quad \text{когда } (r, \theta) \in \Omega - \Gamma \Omega \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{r^2}{2} \right), \quad \text{когда } (r, \theta) \in \Gamma \Omega \end{aligned} \quad (1.5)$$

и системе рекуррентных граничных задач

$$\begin{aligned} \Delta \psi_{n-1} &= Q_n, \quad \text{когда } (r, \theta) \in \Omega - \Gamma \Omega \\ \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \nu} &= 0, \quad \text{когда } (r, \theta) \in \Gamma \Omega \end{aligned} \quad (1.6)$$

(n = 0, 1, 2, ...)

где (1.5) определяет линейно-упругое напряженное состояние стержня [9, 10]. В (1.6)

$$Q_n = \frac{\partial F_n}{\partial \theta} - \sum_{k=0}^n \text{grad } \psi_k \text{ grad } F_{n-k} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_n(r, \theta) &= -\frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} \ln f_k}{dz^{n+1}} \Big|_{z=0}, \quad f_k(\omega, z) = f(z, i), \quad z = E \frac{\omega}{\omega_0} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2E} (Ar \sin \theta + Br \cos \theta + C)^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right)^2 + \left(r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \right)^2 - \sum_{k=1}^n r^k \omega_k \\ \omega_0 &= \frac{3}{4E^2} (Ar \sin \theta + Br \cos \theta + C)^2 + r^2 + 2 \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} + \text{grad}^2 \psi_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\omega_n = 2 \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} + \sum_{k=1}^n \text{grad } \psi_k \text{ grad } \psi_{n-k}$$

Известно [9, 10], что

$$\psi_0(r, \theta) = -\frac{4R_0^2}{\pi} \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{\text{sh } z \theta}{z(z^2 + 4) \text{ch } z\pi} \cos \left(z \ln \frac{r}{R_0} \right) dz \quad (1.9)$$

2. Рассмотрим вопрос об условиях существования решения задачи (1.6). Для этого необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\Omega} \int Q_n d\Omega = 0$$

Из (1.7) и (1.9) заключаем, что это условие выполняется, если Q_n — нечетная функция по θ , а последнее имеет место, если ψ — нечетная по θ , а F_1 — четная по θ . Но F_1 будет четной функцией, если в выражении (1.2)

$$\text{или} \quad \begin{aligned} 1) & A = 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0 \\ 2) & A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

3. Решение задачи (1.6) ищем в виде ряда

$$\varphi_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \varphi_{k,n-1}(r) \sin n\theta \quad (3.1)$$

Разложим в ряд Фурье функцию $Q_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k,n}(r) \sin k\theta$. Подставив разложения φ_{k+1} и Q_n в первое уравнение (1.6) и сравнивая коэффициенты рядов левой и правой частей для одной и той же функции, получим

$$a_{k,n+1}(r) + \frac{1}{r} a_{k,n-1}(r) - \frac{k^2}{r^2} a_{k,n-1}(r) = x_{k,n}(r), \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (3.2)$$

Собственные числа $\lambda_k = \frac{k^2}{2r}$ ($2k-1$) определим из граничного условия (1.6).

Общее решение уравнения (3.2) будет

$$a_{k,n+1}(r) = C_1 r^{\lambda_k} + C_2 r^{-\lambda_k} + \frac{r^{\lambda_k}}{2\lambda_k} \int_{R_1}^r x_k(\xi) \xi^{-\lambda_k-1} d\xi - \frac{r^{-\lambda_k}}{2\lambda_k} \int_{R_2}^r x_k(\xi) \xi^{\lambda_k+1} d\xi \quad (3.3)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничного условия (1.6), которому удовлетворим, приняв $a_{k,n-1}(R_1) = 0$, $a_{k,n-1}(R_2) = 0$.

Для коэффициентов $x_{k,n}(\xi)$ имеем

$$x_{k,n}(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} Q_n(\xi, \varphi) \sin n\theta d\varphi$$

Подставив значения $a_{k,n-1}$ из (3.3) в (3.1) после некоторых преобразований, вводя при этом безразмерные координаты $\tau = r/R_1$, $\xi = \xi/R_2$ приводим его к виду

$$\varphi_{k+1}(R_2\tau, \theta) = \iint Q_n(R_2\xi, \varphi) L(\tau, \varphi; \xi, \theta) d\xi d\varphi$$

где $L(\tau, \varphi; \xi, \theta)$ — функция Грина для рассматриваемой области в виде кольцевого сектора, $L = L_0(\tau, \varphi; \xi, \theta)$ при $\xi \leq \tau$, $L = L_0(\tau, \theta; \xi, \varphi)$ при $\xi \geq \tau$.

$$L_0(\zeta, \varphi; \gamma, \theta) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| \zeta^{\lambda_k} + \zeta^{-\lambda_k} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2i_k} \right| (\gamma^{\lambda_k} + \gamma^{-\lambda_k}) \sin \lambda_k \varphi \sin \lambda_k \theta}{i_k \left| \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2i_k} - 1 \right|}$$

При $R_1 \rightarrow 0$ отсюда получим функцию Грина $G(\zeta, \varphi; \gamma, \theta)$ для области в виде кругового сектора. $G = G_0(\zeta, \varphi; \gamma, \theta)$ при $\zeta \leq \gamma$, $G = G_0(\gamma, \theta; \zeta, \varphi)$ при $\zeta > \gamma$.

$$G_0(\zeta, \varphi; \gamma, \theta) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^{\lambda_k} (\gamma^{\lambda_k} - \gamma^{-\lambda_k}) \frac{1}{i_k} \sin \lambda_k \varphi \sin \lambda_k \theta$$

Просуммировав последнее соотношение, получим

$$G(\zeta, \varphi; \gamma, \theta) = \frac{1}{8\pi} \left[\ln \frac{1 + 2(\zeta\gamma)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi - \theta) + (\zeta\gamma)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 - 2(\zeta\gamma)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi - \theta) + (\zeta\gamma)^{\frac{\pi}{\alpha}}} + \right. \\ \left. + \ln \frac{1 - 2\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi - \theta) + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 - 2\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi - \theta) + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}} - \right. \\ \left. - \ln \frac{1 + 2(\zeta\gamma)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi + \theta) + (\zeta\gamma)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 - 2(\zeta\gamma)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi + \theta) + (\zeta\gamma)^{\frac{\pi}{\alpha}}} - \right. \\ \left. - \ln \frac{1 + 2\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi + \theta) + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 - 2\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi + \theta) + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}} \right]$$

В случае степенного упрочнения имеем $f_* = (E^*)^{-1}$. При этом из (1.7), (1.8) получим

$$Q_0 = \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{\omega_0} \text{grad } \psi_0 \text{ grad } \omega_0 \quad (3.1)$$

$$Q_n = \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \psi_n}{\partial \varphi} + \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=0}^n \text{grad } \psi_k \text{ grad } \omega_{n-k} - \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^n \omega_k Q_{n-k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

где принимаем одно из условий (2.1).

4. Рассмотрим вопрос сходимости ряда (1.4) в случае степенного закона упрочнения. Так как

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^1 d\zeta \int_{-\eta}^{\eta} Q_n(\zeta, \varphi) L(\zeta, \varphi; \eta, \eta) d\varphi = \\ = \int_{\eta}^1 d\zeta \int_{-\eta}^{\eta} Q_n(\zeta, \varphi) G(\zeta, \varphi; \eta, \eta) d\varphi, \quad \eta_1 > 0$$

то достаточно рассмотреть сходимость в случае $\eta_1 \leq \zeta, \eta \leq 1$. Заметим при этом, что первое уравнение (1.6) удовлетворяет условиям, при которых справедливы априорные оценки Шаудера [7]. Так как φ_n принадлежит к классу $C_{2-\eta_1}$ ($0 < \eta_1 < 1$), то из (3.4) следует, что Q_0 принадлежит C_{η_1} . Следовательно, φ_1 принадлежит $C_{2+\eta_1}$ и согласно (3.4) Q_n принадлежит C_{η_1} , а $\varphi_n \in C_{2+\eta_1}$.

Введем норму в $C_{2+\eta_1}$,

$$\|X\| = \max_{M, N} |X(M) - X(N)| = \max_{M, N} \frac{|X(M) - X(N)|}{MN^{\eta_1}}$$

Так как $|\varphi_{k+1}| < |\varphi_{k+1}| < c_1 |\varphi_k|$, $c_1 = \frac{m(\Omega)}{\pi} |L| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{MN^{\eta_1}} \right)$, где \overline{MN}^{η_1} определяется из условия

$$\max_{M, N} \frac{\left| \iint_{\Omega} |L(\zeta, \varphi; M) - L(\zeta, \varphi; N)| d\Omega \right|}{\overline{MN}^{\eta_1}}$$

то для сходимости ряда (1.4) достаточно показать сходимость ряда

$$\sum_{k=-m}^{\infty} k^k \|Q_k\|. \text{ Из (3.4) будем иметь } \|Q_n\| < \left| \frac{1}{\omega_0} \right| \|V_n\|,$$

$$\|V_n\| \leq \left| \frac{\partial v_n}{\partial b} \right| + \sum_{k=1}^n \|\omega_k\| \|Q_{n-k}\| + \sum_{k=0}^n \left(\left\| \frac{\partial^2 v_k}{\partial r^2} \right\| \left\| \frac{\partial v_{n-k}}{\partial r} \right\| + \right. \\ \left. - \left\| \frac{1}{r^2} \right\| \left\| \frac{\partial^2 v_k}{\partial b} \right\| \left\| \frac{\partial v_{n-k}}{\partial b} \right\| \right) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (4.1)$$

Можно получить оценку

$$\|D^2 v_{n+1}\| < c_2 \|Q_n\| \quad (4.2)$$

где

$$c_2 = \max \left| \frac{m(\Omega)}{\pi} |D_{\omega_k}| |L| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{MN}^{\eta_1}} \right) \right|, \text{ а } \overline{MN}^{\eta_1} \text{ определяется из ус-}$$

ловия

$$\max_{M, N} \frac{\left| \iint D_{\alpha\beta} |L(\xi, \eta; M) - L(\xi, \eta; N)| d\Omega \right|}{MN^2}$$

Далее, используя эту оценку и априорные оценки Шаудера

$$|D^{n-1}| < c_1 |Q_n| \quad (4.3)$$

где c_1 — определенная постоянная, зависящая от геометрии области [7, 8], получим

$$|w_n|, |D^{n-1}| < c_2 q_n$$

где $q_n = |Q_{n-1}| + \sum_{k=1}^{n-1} |Q_{k-1}| |Q_{k-1}|$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), а c_2 — определенная постоянная, зависящая от c_1 и c_3 . Используя эту оценку, из (4.1) получим

$$|Q_n| < c_3 \left(q_n + |Q_{n-1}| + \sum_{k=1}^{n-1} |Q_{k-1}| q_{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} |Q_{n-k}| q_k \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.4)$$

где c_3 — определенная постоянная, зависящая от c_1 и c_2 .

Предположим, что до n -ого члена имеет место неравенство $|Q_k| \leq K n^{-\gamma} R^{-n}$, где K , γ и R — некоторые положительные параметры, причем $\gamma > 1$. Выясним условия, при которых оно имеет место и при $n+1$. Используя неравенство

$$\sum_{k=1}^{N-1} k^{-\gamma} (N-k)^{-\gamma} \sim \frac{2^{-\gamma-1}}{\gamma-1} N^{-\gamma}$$

из (4.4) получим

$$|Q_{n+1}| < K(n+1)^{-\gamma} R^{-n-1} (a_5 R^5 + a_4 R^4 + a_0 R) \quad (n = 5, 6, 7, \dots)$$

откуда следует, что R определяется из уравнения $a_5 R^5 + a_4 R^4 + a_0 R = 1$, где

$$a_5 = \left(2^5 |Q_0| \gamma + \frac{2^{5-1}}{\gamma-1} K_1 + 2^5 q_5 \right) c_3$$

$$a_4 = \left(2^4 \gamma + 2^5 |Q_0| + \frac{2^{5-1}}{\gamma-1} K - 2^{5-1} q_2 + 2^5 |Q_0| \gamma + \frac{2^{5-1}}{\gamma-1} K_1 \right) c_3$$

$$a_0 = \left(2^{5-1} + 2^5 q_1 + 2^5 |Q_0| - \frac{2^{5-1}}{\gamma-1} K \right) c_3, \quad \gamma = 2 |Q_0| + \frac{2^{5-1}}{\gamma-1} K$$

$$K = \max |Q_k| \quad (k = 1, 2, \dots, 5)$$

Таким образом, имеем $|Q_n| < K \left(\frac{1}{R} \right)^{\gamma} n^{-\gamma}$ ($n = 6, 7, 8, \dots$),

откуда заключаем, что ряд (1.4) сходится абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\rho = R$. Из (4.2), (4.3) и из последнего неравенства следует, что ряды, составленные из производных $\sum_{k=0}^{\infty} r^k D_{\alpha\beta}^k$,

$\sum_{k=0}^{\infty} i^k D^{2k} \varphi_k$, также сходится абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = R$. Следовательно, допустимо дважды почленное дифференцирование ряда (1.4).

5. Рассмотрим случай полукругового сечения ($\alpha = \pi/2$) при совместном действии крутящего и изгибающего моментов, принимая второе условие из (2.1).

Разложим в ряд по λ функцию $f_*(\omega, \lambda) = (E^2 \omega_0)^{-1}$

$$f(\omega, \lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{i^k}{k!} \ln^k (E^2 \omega) = 1 - i \sum_{k=1}^{\infty} i^k F_k + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{i^k}{k!} \ln^k (E^2 \omega_0) \quad (5.1)$$

Согласно (1.4), в первом приближении $\varphi = \varphi_0 + \lambda \varphi_1$. Подставляя последнее выражение и (5.1) в (1.1), имея в виду, что $\left. \frac{\partial f_*}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = -\ln (E^2 \omega_0)$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{3}{2} AR_2^2 \sin^2 \theta [1 - i \ln (E^2 \omega_0)] \\ \varphi_{10} &= \frac{E}{R_2} \left[\frac{\partial \varphi_0(R_2 \gamma, \theta)}{\partial \gamma} + i \frac{E}{R_2} \left| \frac{\partial \varphi_1(R_2 \gamma, \theta)}{\partial \gamma} - \frac{\partial \varphi_0(R_2 \gamma, \theta)}{\partial \gamma} \ln (E^2 \omega_0) \right| \right] \\ \varphi_1 &= E \left[R_2 \gamma + \frac{1}{R_2 \gamma} \frac{\partial \varphi_0(R_2 \gamma, \theta)}{\partial \theta} \right] - \\ &= E \left[\frac{1}{R_2^2 \gamma} \frac{\partial \varphi_0(R_2 \gamma, \theta)}{\partial \theta} - R_2 \gamma \ln (E^2 \omega_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_2 \gamma} \frac{\partial \varphi_0(R_2 \gamma, \theta)}{\partial \theta} \ln (E^2 \omega_0) \right] \quad (5.2) \end{aligned}$$

где $\omega_0^*(\gamma, \theta) = \omega_0(R_2 \gamma, \theta)$. При $\lambda = 0$ получаются упругие решения.

Из (1.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1(R_2 \gamma, \theta)}{\partial \gamma} &= \frac{4R_2^2}{\pi \gamma} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sh} z \theta}{(z^2 + 4) \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} z} \sin(z \ln \gamma) dz \\ \frac{\partial \varphi_{10}(R_2 \gamma, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{4R_2^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{ch} z \theta}{(z^2 + 4) \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} z} \cos(z \ln \gamma) dz \end{aligned}$$

Для производных ψ , будем иметь

$$\frac{\partial \psi_1(R, \varphi, \varphi)}{\partial \eta} = R_2^2 \int_0^{\varphi} d\tau \int_{\tau=2}^{\varphi} Q_0(R, \tau, \varphi) \frac{\partial G}{\partial \eta} d\tau$$

$$\frac{\partial \psi_2(R, \varphi, \varphi)}{\partial \theta} = R_2^2 \int_0^{\varphi} d\tau \int_{\tau=2}^{\varphi} Q_0(R, \tau, \varphi) \frac{\partial G}{\partial \theta} d\tau$$

где

$$Q_0(R, \tau, \varphi) = \frac{\partial F_1(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} + \frac{1}{R_2^2} \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} \frac{\partial F_2(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} - \frac{1}{R_2^2} \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} \frac{\partial F_2(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial F_2(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} = \frac{1}{\sin(\tau, \varphi)} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R}{E} \right)^2 R_2^2 \sin \tau \cos \tau + 2 \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{R_2} \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \frac{2}{R_2^2} \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau^2} \right]$$

$$\frac{\partial F_2(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} = \frac{R}{\sin(\tau, \varphi)} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R}{E} \right)^2 R_2^2 \sin^2 \tau + 2R_2^2 + \frac{2}{R_2} \frac{\partial^2 \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau^2} \right]$$

$$- \frac{2}{R_2^2} \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \frac{2}{R_2^2} \left| \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} \right|^2 -$$

$$- \frac{2}{R_2^2} \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau^2} \left| \right.$$

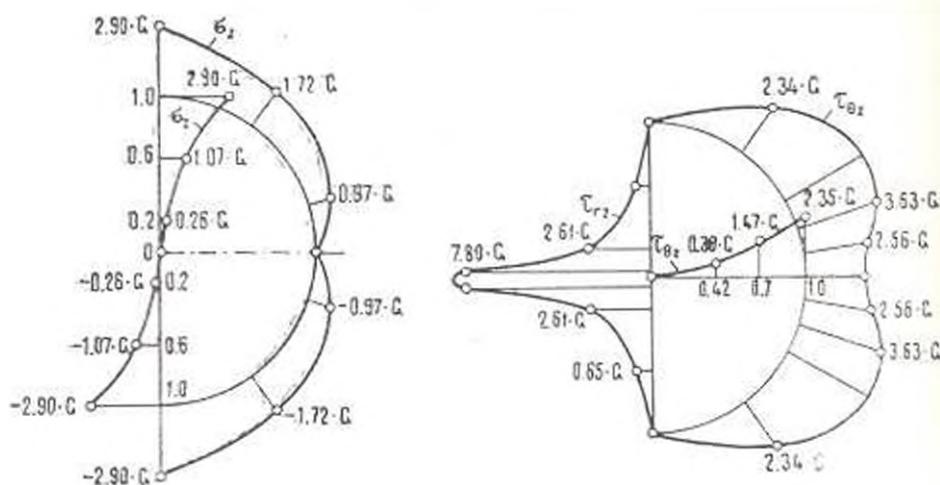
Постоянные A и E в (5.2) определяются на статических условий на торцах

$$M_x = \frac{3}{2} AR_2^2 \int_0^{\varphi} \int_0^{\varphi} \sin^2 \tau \cos \tau \ln [E^2 \psi_0(\tau, \theta)] d\tau$$

$$M_k = ER_2 \int_0^{\varphi} \int_0^{\varphi} R_2^2 \tau + \frac{\psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \tau} - \frac{\psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \theta} - R_2^2 \tau \ln [E^2 \psi_0(\tau, \theta)] - \\ - \frac{\partial \psi_0(R, \tau, \varphi)}{\partial \theta} \ln [E^2 \psi_0(\tau, \theta)] \Big| d\Omega$$

где M_x — изгибающий момент относительно оси x (фиг. 1), M_k — крутящий момент. Отметим, что если примем первое условие (2.1) при $C=0$, то получим изгибающий момент относительно оси y . Случай $B=0, C \neq 0$ и $E \neq 0$ будет соответствовать совместному кручению и растяжению стерж-

ия. Как частные случаи отсюда получаются решения пластического кручения или изгиба.



Фиг. 3.

Эиоры распределения напряжений в сечении при $\lambda = 1/4$, $R_1 = 1$ см, $A = 1$, $E = 2$ приведены на фиг. 3. Этим значениям A и E соответствуют $M_1 \approx 1.1 G$, $M_k \approx 0.8 G$.

Автор выражает благодарность проф. М. А. Задояну за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 19 XII 1975

Պ Վ ՂԱՊՃԵԱՆ

ՈՂՍԻՆՅՆ ԵՎ ՇՐՋՆԱՅԻՆ ՍԵՎՏՈՐԻ ՉԵՎ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿՏՐՈՒՄԵՐՆԵՐՈՎ
ՊԵՐՋՐԱՏԻՎ ՉՈՂԵՐԻ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԸ ՀԱՄԱՏԵՂ ՆՈՒՄԱՆ
ԵՎ ՈՂՐԻՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Վ Ո Ւ Փ Ո Ւ Մ

Ստուճնադրվում է օղակաչին և շրջանաչին սեկտորի ձև ունեցող կտրր-վածքներով պրիզմատիկ ձողերի պլաստիկական վիճակը, երբ ձողի ծայրաին կտրվածքների վրա կիրառվել են ծողղ և սյուսող մոմենտներ: Չողի նյութը ենթարկվում է իզոտրոպ ամրապնդման:

Խնդիրը բերվում է անդափոխությունների ֆունկցիայի նկատմամբ երկ-րորդ և զրրային խնդիրն: Այդ խնդրի լուծումը փնտրվում է աստիճանաչին շարքի անսցով, բաց սրոշ ֆիզիկական պարամետրի և հանգեցվում բեկուր-րենտ երկրորդ և զրրային խնդիրների անվերջ համակարգի: Նաուցվում են այդ խնդիրների լուծումները և ցույց է տրվում շարքի զուգամիտությունը:

Կիսաշրջանի կարվածքով ձողի համար կատարված է թվային հաշվարկ
և քերված են լարումների էպյուրաները:

THE PLASTIC STATE OF PRISMATIC BARS WITH CROSS-SECTIONS IN THE FORM OF CIRCULAR AND RING SECTORS UNDER JOINT TORSION AND BENDING

P. V. GALPCHIAN

S u m m a r y

The plastic state of prismatic bars with cross-sections in the form of circular and ring sectors under the joint effect of torsional and bending moments applied to the end sections is considered. The material of the bars obeys the condition of isotropic strengthening.

The problem is reduced to a second boundary one with respect to the function of displacement. The solution of the latter is sought for in the form of a power series by some physical parameter and is reduced to an infinite system of recurrent second boundary problems. The solutions of these problems are presented along with the series convergence.

For a bar of semi-circular cross-section a numerical calculation is made and stress diagrams are drawn.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Handelman G. H.* A variational principle for a state of combined plastic stress. *Quart. J. Appl. Math.*, 1941, 1.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., ИЛ, 1956.
3. *Piechnik S.* The influence of bending on the limit state of a circular bar subjected to torsion. *Arch. Mech. stes.*, 1961, vol. 13, No. 1.
4. *Piechnik S., Zyczkowski M.* On the plastic interaction-curve for bending and torsion of a circular bar. *Arch. Mech. stes.*, 1961, vol. 13, No. 5.
5. Задоян М. А. Задача упругоупрочнившейся ползучести призматического стержня при совместном растяжении, изгибе и кручении. Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т. 21, 3.
6. Задоян М. А. Пластическое состояние телостержня цилиндрической трубы при совместном кручении и изгибе. Докл. АН АрмССР, 1973, т. LV1, № 4.
7. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
8. Ладженская О. А., Ураловская Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., Изд. «Наука», 1964.
9. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
10. Лурье А. И. Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1970.

А. М. СИМОНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ХРОМО-НИКЕЛЕВОЙ СТАЛИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЯХ НАПРЯЖЕНИЙ

Вопрос прогнозирования высокотемпературной ползучести материалов при циклических изменениях напряжений привлекает внимание исследователей и инженеров. К настоящему времени накопилось определенное количество экспериментальных данных о циклической ползучести, не позволяющих, однако, выработать единый подход к вопросу о предсказании ползучести при циклических изменениях напряжений.

Согласно классическим теориям ползучести [1], факт частых изменений напряжения не должен приводить к более интенсивному протеканию разрушения, чем это имеет место при соответствующих постоянных напряжениях, и деформации ползучести, как, впрочем, и скорости деформации при циклической ползучести должны заключаться в пределах соответствующих значений при наибольшем и наименьшем постоянных напряжениях. Наряду с подтверждением этой точки зрения [2, 3], в ряде работ [4—8] показано, что циклическость действующего напряжения приводит к более интенсивному разрушению, чем это предсказывается классическими теориями. В работе [9], в математической аналогии с [10], для материалов без III стадии ползучести строится структурная теория, согласно которой при циклических изменениях напряжения имеет место так называемая «ускоренная» деформация.

Факт более интенсивного разрушения материала при циклических изменениях напряжения по сравнению с действием постоянных напряжений подтвердился и при изучении долговечности и длительной прочности [11—13], хотя в некоторых опытах [14, 5] это и не подтверждалось. В работе [15] предпринят полезный для приложений эмпирический подход к описанию циклической ползучести, не позволяющий, однако, предсказывать, например, ползучесть при случайных неравномерных циклах изменений нагрузок. Вероятно, указанная противоречивость в оценке циклической ползучести, в некоторой мере, связана с отсутствием учета деформаций III стадии ползучести. В работе [16] предлагается теория ползучести и длительной прочности для материалов, у которых ползучесть при постоянных напряжениях протекает с непрерывно-возрастающей скоростью. Более простые уравнения ползучести для материалов с разрушением, экспериментально подтвержденные при одноступенчатом изменении напряжения для нержавеющей стали, рассмотрены в работе [17].

Настоящая работа посвящена исследованию циклической ползучести хромо-никелевой стали X18H10T при 700°C и при существенно неравно-

мерных циклах изменения напряжения, а также оценке ряда теоретических положений.

1. Методика исследований

Опыты производились на цилиндрических образцах $\Phi 8$ мм при базе измерения деформации 100 мм. В процессе испытаний температура измерялась в непосредственной близости от поверхности образца и регулировалась путем периодического включения и выключения нагревательных устройств в печи, при этом имели место колебания температуры $\pm 2^\circ\text{C}$ с периодом около 2 мин.

Растягивающая нагрузка на образец передавалась плавно с помощью двуступенчатого рычажного приспособления, а изменение ее в течение опыта осуществлялось вручную при строжайшем недопущении динамических эффектов. Точность измерения деформации образцов, обеспечиваемая оптическим устройством, составляла $\sim 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Явление окалинообразования не учитывалось; действительно, как показывают расчеты на основе [18], окалинообразование у испытанных образцов может привести лишь к 0.06% уменьшения первоначальной площади поперечного сечения образца.

2. Теоретические положения

В работе [17] рассматривалось уравнение ползучести при одноосном растяжении в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \{ \beta_2 [\sigma(\tau)] + \beta_0 [\sigma(\tau)] \tau e^{-\nu(\tau-\tau)} \} d\tau + \\ + \int_0^{\theta_1} \beta_1 [\sigma(\tau + \theta_2)] \tau e^{-\nu(\tau-\tau)} d\tau + 3k \int_0^t \left(\frac{\sigma(\tau)}{R} \right) \left[\int_0^{\tau} \left(\frac{\sigma(\xi)}{R} \right) d\xi \right] d\tau \quad (2.1)$$

где первый член соответствует упругой обратимой деформации, второй член описывает деформации установившейся ползучести и затухающие обратимые деформации наследственности, третий член определяет затухающие необратимые деформации наследственности (затухающую пластичность), а четвертый член описывает деформации с возрастающей скоростью (θ_1 — сумма промежутков времени, в течение которых действующее растягивающее напряжение не меньше максимально достигнутого за предшествующее время нахождения образца под нагрузкой [17], $\theta_1 + \theta_2 = t$). Функции, входящие в (2.1), определяются из опытов при постоянных напряжениях и из обратную ползучесть.

Уравнение ползучести (2.1) довольно точно описывает деформационные кривые ползучести нержавеющей стали X18H10T при $\lambda = 10$, $\nu = 1.65$ как в случае ступенчатости возрастания, так и в случае ступенчатого убывания действующего напряжения [17]. В случае, когда продолжительность

испытания и действующие напряжения относительно невелики, можно пренебречь последним членом, который фактически описывает разупрочнение материала, приводящее к разрушению. Наоборот, при относительно большой продолжительности испытания, как показывают опыты, преобладающими оказываются деформации установившейся ползучести $\left(\int_0^t \dot{\epsilon} [\dot{\epsilon}(\tau)] d\tau \right)$

и последний член (2.1).

Ниже будут отдельно исследованы деформации с возрастающей скоростью $\dot{\epsilon}_{III}(t)$, соответствующие последнему члену (2.1), то есть деформации за вычетом затухающей и установившейся ее частей

$$\epsilon_{III}(t) = 3k \int_0^t \left(\frac{\dot{\epsilon}(\tau)}{R} \right) \left[\int_0^{\tau} \left(\frac{\dot{\epsilon}(\xi)}{R} \right) d\xi \right]^2 d\tau \quad (2.2)$$

При постоянном напряжении ($\sigma(t) = \sigma$) формула (2.2) дает

$$\epsilon_{III}(t) = k \left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{2-\nu} t^3 \quad (2.3)$$

Рассмотрим нижеследующую программу неравномерно циклического ступенчатого изменения напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &= \sigma_0 \quad \text{при} \quad t_{2j} < \tau < t_{2j+1} \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \sigma(\tau) &= \sigma_1 \quad \text{при} \quad t_{2i+1} < \tau < t_{2i+2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласно (2.2) для программы (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_{III}(t_{2n}) &= k \left[\left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{2-\nu} - \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^{2-\nu} \left| \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^i \theta_{2j-1} + \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^{i-1} \theta_{2j} \right]^2 - \right. \right. \\ &\quad - \left. \left[\left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^i \theta_{2j-1} + \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^i \theta_{2j} \right]^2 \right] + k \left[\left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{2-\nu} - \right. \\ &\quad - \left. \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^{2-\nu} \left| \left[\left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^n \theta_{2j-1} + \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{2j} \right]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^{2-\nu} \left[\left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^n \theta_{2j-1} - \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^n \theta_{2j} \right]^2 \right] \quad (2.5) \end{aligned}$$

где $\theta_{2i} = t_{2i} - t_{2i-1}$, $\theta_{2i+1} = t_{2i+1} - t_{2i}$ — суть продолжительности действия нагрузок σ_1 и σ_0 на соответствующем этапе циклического нагружения.

Более удобными для приложений являются рекуррентные формулы для описания деформаций при неравномерно-циклическом ступенчато изменяющемся напряжении

$$\begin{aligned} \varepsilon_{III}(t_{2n+1}) = \varepsilon_{III}(t_{2n}) + k \left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{n-1} & \left\{ \left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \theta_{2j-1} + \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^n \sum_{j=1}^n \theta_{2j} \right\} - \\ & - \left[\left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^n \sum_{j=1}^n \theta_{2j-1} + \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^n \sum_{j=1}^n \theta_{2j} \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{III}(t_{2n+2}) = \varepsilon_{III}(t_{2n+1}) + k \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^{n-1} & \left\{ \left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \theta_{2j-1} + \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^n \sum_{j=1}^n \theta_{2j} \right\} - \\ & - \left[\left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \theta_{2j-1} + \left(\frac{\sigma_1}{R} \right)^n \sum_{j=1}^n \theta_{2j} \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

В случае циклического нагружения, чередующегося с отдыхом ($\sigma_1=0$), согласно (2.5), имеем

$$\varepsilon_{III}(t_{2n}) = k \left(\frac{\sigma_0}{R} \right)^{2n} \left(\sum_{j=1}^n \theta_{2j-1} \right)^2 \quad (2.8)$$

то есть деформации с возрастающей скоростью определяются общей продолжительностью нахождения образца под нагрузкой, независимо от наличия и продолжительности отдыха, причем при отсутствии нагрузки изменения ε_{III} не имеют места. Аналитичный тезис подтверждается формулой (2.5) и при $\sigma_1=0$, $\sigma_0 \neq 0$. Отметим, что этот тезис в известной мере аналогичен гипотезе суммирования повреждений при изучении длительной прочности металлов [19].

Если в формуле (2.2) положить $\lambda = \nu$, то она вырождается в уравнение ползучести, являющееся обобщением (2.3) на случай переменных напряжений, согласно теории упрочнения.

Ниже придется экспериментально проверить формулу (2.2) при различных неравномерно-циклических изменениях напряжений.

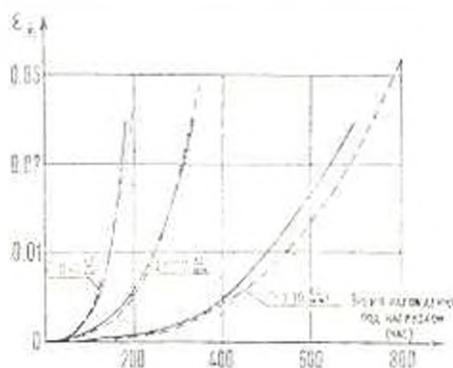
3. Результаты экспериментальных исследований

Проведены исследования ползучести хромо-никелевой стали X18H10T при 700°C и при существенно неравномерных циклических ступенчатых изменениях осевого растягивающего напряжения.

В одной серии экспериментов производилось нагружение образцов до одного и того же напряжения, чередующееся с полной разгрузкой. Напряжения были взяты равными 9.3 кг/мм², 11.15 кг/мм² и 12.4 кг/мм². Было проведено от 8 до 12 испытаний при каждом из указанных напряжений, причем в каждом эксперименте была принята своя программа испытания из циклическую ползучесть при существенно неравномерных продолжительностях нахождения образца под нагрузкой и в разгруженном состоянии. Выдержка образцов под нагрузкой в пределах одного цикла менялась от 1 до 840 час, причем общее количество циклов доходило до 35. Отношение общей продолжительности нахождения образцов под нагрузкой к общей продолжительности испытания принималось в пределах 0.3 ÷ 0.8.

В отдельности для каждого испытанного образца были определены значения затухающей ползучести ($\beta_0 + \beta_1$) и скорости установившейся ползучести (α)⁸, а затем вычислены деформации с возрастающей скоростью $\varepsilon_{III}(t)$, определяющие наступление третьей стадии ползучести. Экспериментальные кривые были построены в координатах $\varepsilon_{III} - \sum_{i=1}^n t_i$ (время нахождения образца под нагрузкой), причем кривые эти группировались около экспериментальных усредненных кривых $\varepsilon_{III}(t)$ при соответствующих постоянных напряжениях. Отклонения этих кривых от усредненных не достигали 20% и не отмечено какой-либо закономерности этих отклонений в зависимости от средней продолжительности цикла или от продолжительности отдыхов.

На фиг. 1 приведены усредненные кривые $\varepsilon_{III} - \sum_{i=1}^n t_i$ циклической ползучести (показаны сплошными линиями), а также штриховыми линиями показаны кривые, построенные по формуле (2.8), где значения $k = 5.35$ /час, $R = 62$ кг/мм², $\lambda = 10$, $\nu = 1.65$ были найдены при исследовании ползучести при постоянных и одноступенчато-переменных напряжениях [20]. Штриховыми линиями ограничены области, в которых с вероятностью 0.9 заключено математическое ожидание соответствующей экспериментальной кривой. Незначительные расхождения теоретических и экспериментальных кривых говорят в пользу уравнения (2.2).



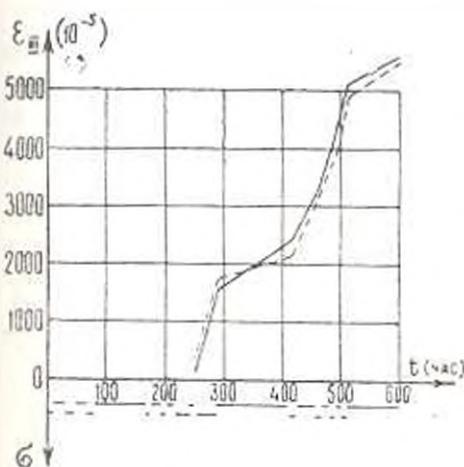
Фиг. 1.

В работе [21] указано, что степень разупрочнения при циклических изменениях напряжения тем больше, чем больше амплитуда изменения напряжения (σ_n) лишь до определенного значения σ_c , после чего имеет место обратный эффект — чем более существенны изменения напряжения, тем меньше разупрочнение. В таком случае наиболее существенное расхождение формулы (2.2), не учитывающей ускоренного разупрочнения из-за факта цикличности приложения нагрузки, с экспериментальными данными следует ожидать не при полной, а при частичной разгрузке на каждом цикле.

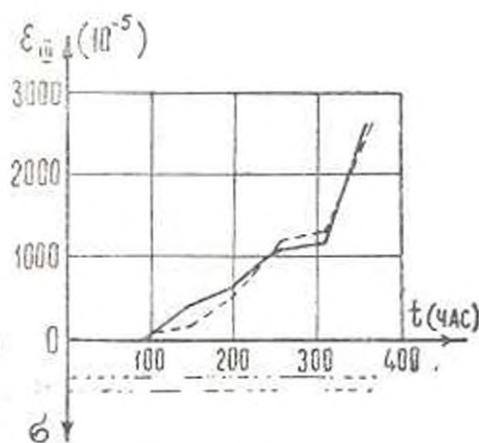
⁸ Усредненные значения $\beta_0 + \beta_1$ для напряжений 9.3 кг/мм², 11.15 кг/мм² и 12.4 кг/мм² соответственно составили 0.00046, 0.0020 и 0.0047, а $\nu(1/\text{час}) = 2.1 \cdot 10^{-5}$, $7.73 \cdot 10^{-5}$ и $11 \cdot 10^{-5}$.

В связи с этим были проведены исследования ползучести при различных программах циклического изменения напряжения от 9.3 кг/мм^2 до 11.15 кг/мм^2 , от 11.15 кг/мм^2 до 12.4 кг/мм^2 и от 9.3 кг/мм^2 до 12.4 кг/мм^2 .

Как показали испытания, сразу же после уменьшения напряжения в первых циклах изменения нагрузки имели место весьма незначительные деформации обратной ползучести, однако в последующих циклах обратная ползучесть при частичной разгрузке уже почти не наблюдалась. Временной эффект неизменности деформаций после частичной разгрузки (так называемый инкубационный период) в настоящих исследованиях, в отличие от [21, 22], не имел места.



Фиг. 2.



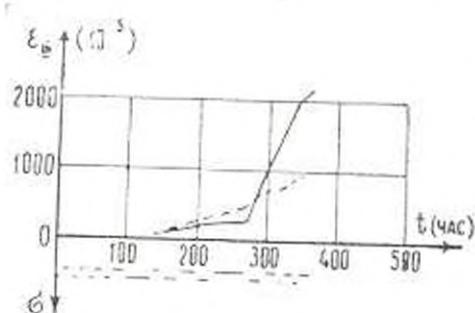
Фиг. 3.

На фиг. 2 и 3 приведены экспериментальные кривые $\epsilon_{III}(t)$ (показаны сплошными линиями) в сравнении с соответствующими теоретическими (показаны штриховыми линиями), построенными согласно (2.5), при двух различных программах циклических изменений напряжения от 9.3 кг/мм^2 до 12.4 кг/мм^2 . Как заключаем из данных фиг. 2 и 3, формула (2.5) хорошо описывает деформации ползучести ϵ_{III} при вышеуказанных циклических изменениях напряжения.

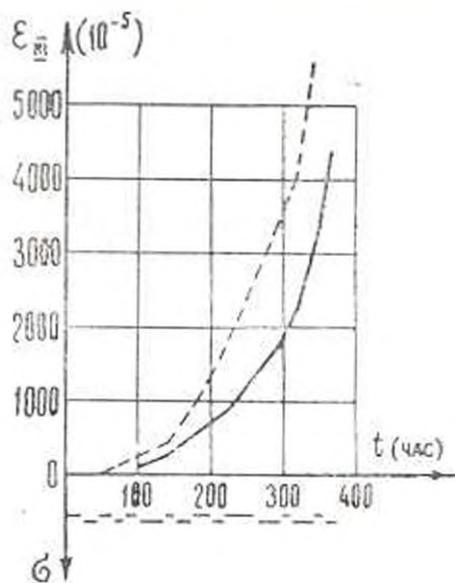
На фиг. 4 и 5 приведены аналогичные экспериментальные и теоретические кривые $\epsilon_{III}(t)$ при циклических изменениях напряжения соответственно от 9.3 кг/мм^2 до 11.15 кг/мм^2 и от 11.15 кг/мм^2 до 12.4 кг/мм^2 . Легко видеть, что если при относительно малых напряжениях факт циклического изменения напряжения приводит к большему разупрочнению материала, чем это предсказывается уравнением (2.2), то при относительно больших напряжениях имеет место обратный эффект — действительное разупрочнение меньше предсказываемого уравнением (2.2).

Отметим еще одну особенность циклической ползучести с неполной разгрузкой: зачастую, в пределах одного цикла скорость деформации тре-

твей стадии ползучести $\epsilon_{II}(\cdot)$ на ступени наибольшего напряжения оказывается несколько большей, чем это предсказывается расчетом, а на ступени наименьшего напряжения, наоборот, меньшей, иначе говоря, чувствительность $\epsilon_{II}(\cdot)$ к изменению напряжения значительно превышает предсказываемой уравнением (2.2). Указанная особенность не имела места при циклических испытаниях с полной разгрузкой.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

На основе проведенных исследований, вероятно, можно заключить, что разупрочнение при циклической ползучести, вообще говоря, может быть описано с помощью феноменологического уравнения (2.2).

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 XI 1975

Ա. Մ. ՍԻՄՈՅԱՆ

ԽՐՈՒՐԱՆԻՐԵՒՅԻՆ ԳՈՂՊԱՏԻ ԸՍԲԶՐԶԵՐՄԱՍԻՃԱՆԱՅԻՆ ՍՈՎԵՏԻ
ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԿԱՐԿԱՆ ՑԻՒՄՅԻՆ ՓՈՒՈՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԳԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ս. Վ. Փ Ո Փ Ո Ւ Ա

Հետազոտվում է ՄԻՍՈՒՄՈՒՄ արդյատի սողքը ձրոզ շարունակի ու Նա-
մասեն ցիկլային կիրառումների և փոփոխությունների ժամանակ:

Բերված է ֆենոմենոլոգիական սողքի նախասարումը, որտեղ նաշվի է
անվել սուշագող պլաստիկության, ժառանգականության տեսության հե-

առաջարկելի դեֆորմացիաները, ինչպես նաև դեֆորմացիաները, որոնք հա-
մապատասխանում են սողի երրորդ փուլին:

AN INVESTIGATION ON HIGH-TEMPERATURE CREEP OF CHROME-NICKEL STEEL IN CONDITIONS OF CYCLIC CHANGES IN STRESS

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

The creep of chrome-nickel steel in conditions of non-uniformly cyclic loadings and cyclic changes in stresses are investigated. A phenomenologic equation, describing deformations of "delay plasticity", reversible deformations of the theory of heredity as well as deformations of the third stage of creep are derived.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Работнов Ю. П. Ползучесть элементов конструкций. М. Изд. «Наука», 1966
 2. Taira S. Lifetime of structures subjected to varying load and temperature. Creep in structures. Springer, 1962.
 3. Брыгалкин Г. П. К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков. ПМТФ. 1963, № 6.
 4. Кеннеди А. Дж. Влияние переменных напряжений на ползучесть и отдых. Сп. Усталость металлов. М. ИЛ. 1961.
 5. Гварниери Г. Характеристика длительной прочности листовых материалов при циклических нагрузках и температурах. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. Госэнергоиздат, 1960.
 6. Александровский С. В., Колесников Н. А. Нелинейная ползучесть бетона при ступенчатом-меняющихся напряжениях. Бетон и железобетон, 1971, № 6.
 7. Coughy R. H., Hoyt W. B. Effect of Cyclic loadings on velocity of creep and time to destruction of inconel with 92° and 930°. Symposium of Cyclic Heating and Stressing on Metals at Elevated Temperatures. ASTM. S. T. P., 1954, No. 165.
 8. Смит Г., Гаустон Е. Опыты по изучению влияния переменных напряжений и температур на длительную прочность сталей. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. Госэнергоиздат, 1960.
 9. Lagneborg R. A theoretical approach to creep deformation during intermittent load. Trans. ASME, ser. D, 1971, 93, No. 2.
 10. Малинин Н. Н., Хажинский Г. М. К построению теории ползучести в анизотропном упрочненном МТТ. 1969, № 4.
 11. Франссон А. Влияние одновременного циклического изменения напряжения и температуры на жаропрочный материал. Усталость металлов. М. ИЛ. 1961.
 12. Малинин Н. Н. О наследственной теории ползучести и малоциклоной усталости полимерных материалов. Механика полимеров, 1970, № 4.
 13. Куров В. Д., Мельников Г. П., Соколов А. А. Влияние структуры материала на длительную прочность. Научные труды института механики МГУ, 1973, № 23.
 14. Simmons W. F., Cross H. C. Different materials test on creep by constant and variable stressess. Symposium on Effect of Cyclic Heating and Stressing on Metals at Elevated Temperatures. ASTM. S. T. P., 1954, No. 165.
- 4 Известия АН Армянской ССР. Механика, № 3

15. Мажаровский И. С., Ахипов В. А. Пластичность и разрушение жаропрочных материалов при малом числе циклов одновременного изменения температуры и нагрузки. Проблемы прочности, 1972, № 4.
16. Соснин О. В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов. Сообщение 1. Проблемы прочности, 1973, № 5.
17. Симокин А. М. Исследование ползучести стали X18H10T при больших деформациях. Проблемы прочности, 1975, № 6.
18. Никитин В. И., Комиссаров И. П., Панаратова Н. В. Экспериментальная проверка параметрического метода расчета жаростойкости металлов при переменной температуре. Физико-химическая механика материалов, 1973, т. 9, № 3.
19. Бурдужский В. В., Озидт И. А. Процесс повреждаемости металлов при ползучести. Изв. АН СССР, ОТИ, 1956, № 5.
20. Симокин А. М. Исследование высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали в условиях ступенчатых изменений напряжения. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4.
21. Vidal G. Sur le fluage periodique des alliages resistants a chaud. Revue de Metallurgie, 1956, v. 53, No. 7.
22. Davies P. W., Nemes G., Williams K. R., Wilshire B. Stress-change experiments during high-temperature creep of copper, iron and zinc. "Metal Sci. J.", 1973, 7, May.

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, В. М. СМОЛЬСКИЙ, А. Г. ТАГИ-ЗАДЕ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В данной статье излагается подход, позволяющий оптимально проектировать некоторые клеевые соединения на основе принципа равнопрочности. Анализируется прямая задача о плоском напряженном состоянии многослойной клееной панели с непроскальзывающими слоями и со сквозными трещинами. Выделяются безаварийный и аварийный режимы работы панели, приводящие к сходным математическим проблемам итерационного программирования. Для решения этих проблем используется гибкая процедура перебора с правилом Балаша, реализуемая на компьютере. Рассмотрение годится также для многослойных безмоментных оболочек.

1. Принцип равнопрочности

При оценке работоспособности конструкции весьма полезен эвристический принцип равнопрочности. Прежде чем сформулировать этот принцип, остановимся на допущениях, определяющих область его применения.

А. Конструкция сделана из достаточно надежного материала, то есть не содержит опасных трещиноподобных дефектов металлургического происхождения, не обнаруженных методами неразрушающего контроля.

Б. Конструкция работает в условиях, исключающих опасное развитие в ней эксплуатационных трещин за требуемый промежуток времени. К эксплуатационным относятся усталостные, коррозионные, водорододиффузионные и др. трещины.

Эти допущения позволяют считать конструкцию «бездефектной» и для определения условия локального разрушения пользоваться феноменологическими теориями, в которых отсутствуют структурные параметры, характеризующие структурные несовершенства материала (размер трещины, величину зерен или пор и т. д.). Существенным недостатком теорий прочности является то, что в случае сложного напряженного состояния локальное разрушение часто не приводит к разрушению всей конструкции. Фактически, в опасной точке появляется либо пластическая зона, либо образуется трещина, которая развивается с увеличением нагрузок. Поэтому теории прочности дают неудовлетворительные результаты в местах надрезов, выточек и др. концентраторов напряжений. Примем следующее допущение.

С. Локальное разрушение приводит к разрушению или потере работоспособности конструкции в целом.

Тем самым, пренебрегается устойчивым развитием пластических эли и трещин от момента их возникновения до потери несущей способности всей конструкции. Очевидно, это допущение идет в запас прочности.

Конструкцию, удовлетворяющую допущениям A, B, C , будем называть равнопрочной, если она спроектирована так, что разрушение начинается в ней одновременно во всех точках конструкции (или же, если последнее невозможно, в максимально большой части конструкции).

Очевидно, что в такой конструкции материал «работает» наиболее равномерно и экстремум, получаемый на основании принципа равнопрочности, вообще говоря, будет локальным в силу зависимости от исходной геометрии конструкции. Поэтому необходимо стремиться к его использованию в проектировании на как можно более ранней стадии и в наиболее общих геометрических формах.

2. Плоско-напряженное состояние многослойных клееных панелей

Пусть панель представляет собой пластину постоянной толщины h , составленную из k различных упругих слоев толщины $h_i (i=1, 2, \dots, k)$, склеенных друг с другом. Будем считать, что панель симметрична относительно срединной плоскости (включая внешние нагрузки и геометрию панели). Введем допущение: средние смещения u, v и средние деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ всех слоев одинаковы в соответствующих точках, расположенных на одной и той же нормали к срединной плоскости (x, y — прямоугольные координаты в этой плоскости). Это допущение справедливо в том случае, когда взаимное проскальзывание слоев невозможно, а величина h гораздо меньше размеров пластины в плане.

Предположим также: коэффициенты Пуассона всех слоев одинаковы. Напомним, что для большинства металлов они близки по величине.

В указанных предположениях для смещений u, v и суммарных усилий A_x, N_x, A_y получаются обычные уравнения теории плосконапряженного состояния для пластины толщины h и материала с упругими постоянными

ν и E , где $E = \sum_{i=1}^k E_i h_i / h$.

Напряжения в i -ом слое определяются через средние напряжения формулами

$$\sigma_x^{(i)} = \sigma_y \frac{E_i}{E}, \quad \sigma_y^{(i)} = \sigma_x \frac{E_i}{E}, \quad \tau_{xy}^{(i)} = \tau_{xy} \frac{E_i}{E} \quad (2.1)$$

и поэтому для сквозных трещин нормального разрыва коэффициент интенсивности напряжений в i -ом слое равен

$$K_I^{(i)} = K_I \frac{E_i}{E} \quad \left(K_I = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i K_I^{(i)} \right) \quad (2.2)$$

Величина K_I вычислена в зависимости от геометрии и внешних нагрузок в весьма многих случаях; наиболее полная сводка этих результатов помещена в книгах [1—3].

Можно показать также, что формулы (2.1), (2.2) справедливы, когда многослойная панель образует произвольную криволинейную оболочку, на-

ходящуюся в безмоментном состоянии (x, y — декартовы координаты в касательной плоскости к срединной поверхности оболочки в рассматриваемой точке).

3. Некоторые задачи оптимального проектирования

Определим прочность растягиваемой многослойной панели. Будем различать два основных режима ее работы: безаварийный, когда панель можно считать бездефектной и нужно применять обычную теорию прочности; аварийный, когда панель имеет сквозной дефект (например, усталостную трещину, брешь от метеорита или сваряда и т. п.). Сквозной дефект можно моделировать разрезом-трещиной даже в тех случаях, когда его фактическая форма довольно далека от математического разреза [1]. В зависимости от назначения конструкции тот или другой режим будет определяющим при оптимальном проектировании.

Безаварийный режим.

Пусть сплошная плоская панель растягивается напряжением σ .

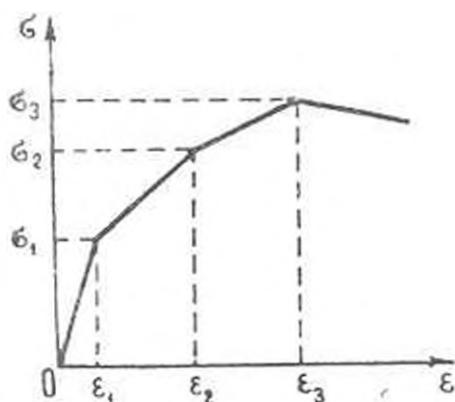
Примем следующее допущение: каждый слой работает на разрушение также, как если бы его боковые поверхности были свободны от напряжений. Это допущение справедливо [4], когда клей, соединяющий слои, сравнительно слабо сопротивляется скалывающим напряжениям, так что при разрушении одного из слоев в соседних неразрушенных слоях можно пренебречь концентрацией напряжений на продолжении разрыва вследствие образования трещины вдоль клея.

В указанном допущении диаграмма σ — ε для многослойной панели будет кусочно-линейной (фиг. 1), если можно пренебречь пластичностью. Угловые точки на диаграмме соответствуют последовательному разрушению слоев. Величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ суть предельные деформации отдельных слоев в момент разрушения, переименованных в порядке убывания их жесткости. Условие равнопрочности выполняется, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n$. Однако, в большинстве случаев наибольшей удельной прочности σ/ε можно добиться на неравнопрочных панелях.

Найдем последовательно напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ на диаграмме σ — ε (фиг. 1)

$$\sigma_1 = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n h_i \sigma^{(1)}(\varepsilon_1), \quad \sigma_2 = \frac{1}{h} \sum_{i=2}^n h_i \sigma^{(1)}(\varepsilon_2), \dots \quad (3.1)$$

Пусть наибольшее напряжение σ_{max} , выдерживаемое панелью, достигается при разрыве n -го слоя, то есть



Фиг. 1. Диаграмма σ — ε многослойной пластины.

$$\varepsilon_k = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i \sigma^{(i)}(z_m) \quad (3.2)$$

Отсюда удельная прочность равна

$$\frac{\sigma_k}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^k h_i \sigma^{(i)}(z_m)}{\sum_{i=1}^k h_i \rho_i} \quad \left(\gamma = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i \rho_i \right) \quad (3.3)$$

где ρ_i — плотность материала i -го слоя.

В случае линейно-упругого поведения всех слоев будет

$$\frac{\sigma_k}{\gamma} = z_m \frac{\sum_{i=1}^k h_i E_i}{\sum_{i=1}^k h_i \rho_i} \quad (3.4)$$

Поставим следующую задачу проектирования оптимальной панели. Пусть имеется n заготовок-листов, каждая из которых характеризуется величинами $\rho_i, h_i, \rho_i, \sigma^{(i)}(z_m)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), и задана матрица взаимного склеивания

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если лист } i \text{ склеивается с листом } j, \\ 0, & \text{если склеивание листов } i \text{ и } j \text{ невозможно.} \end{cases} \quad (3.5)$$

(Склеивание может оказаться невозможным по экономическим соображениям).

Введем n бинарных независимых переменных x_i , которые характеризуют присутствие i -ой заготовки в панели.

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая заготовка имеется в панели,} \\ 0, & \text{если } i\text{-ой заготовки нет в панели.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Требуется по переменным x_i и z_m максимизировать удельную прочность

$$\frac{\sum_{i=1}^n h_i \sigma^{(i)}(z_m) x_i}{\sum_{i=1}^n h_i \rho_i x_i} \quad (3.7)$$

при следующих ограничениях

$$a) \quad \sum_{i=1}^n h_i \sigma^{(i)}(z_m) x_i \geq N_0, \quad \sum_{i=1}^n K \sigma^{(i)} h_i x_i \geq K_0 \quad (3.8)$$

$$b) \quad \text{выполнено условие склеивания листов в панель.} \quad (3.9)$$

При выполнении (3.8) несущее усилие и вязкость разрушения панели будут не меньше некоторых величин, заданных из конструктивных соображений; условие (3.9) нет необходимости записывать аналитически.

Заметим, что к ограничениям (3.8), (3.9) могут быть добавлены другие условия; например, толщина панели может быть задана в допустимых границах.

Аварийный режим.

Пусть по каким-либо непредвиденным причинам в панели образовалась сквозная трещина: требуется так спроектировать панель, чтобы работоспособность конструкции с трещиной была максимальной. Развитие трещины в панели, подвергнутой некоторому растяжению, зависит от коэффициента интенсивности напряжений на краю трещины. Согласно условию хрупкого разрушения развитие трещины вначале произойдет в том месте, где впервые будет достигнуто равенство $K_I^{(i)} = K_{IC}^{(i)}$. Это продвижение фронта трещины вызовет перераспределение напряжений и дальнейшее поэтапное развитие фронта трещины проследить трудно. Однако предельный режим роста трещины, когда локальное разрушение на фронте трещины во всех слоях происходит одновременно

$$K_I = \frac{E}{E_i} K_{IC}^{(i)} \quad (3.10)$$

отвечает условию равнопрочности, так как каждый из слоев предельно сопротивляется разрушению на фронте трещины.

Стационарному распространению трещины отвечает напряжение

$$\sigma = \lambda \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi l}} \quad (3.11)$$

где

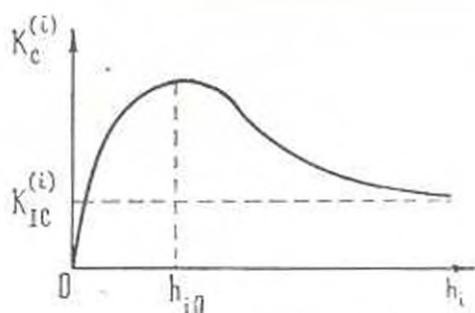
$$K_{IC} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n h_i K_{IC}^{(i)} \quad (3.12)$$

λ —некоторый безразмерный множитель, зависящий от формы панели и плане и расположения трещины, величина $K_{IC}^{(i)}$ характеризует предельное сопротивление i -ого слоя развитию трещины. Она зависит от толщины слоя h_i ; характерная зависимость $K_{IC}^{(i)}$ от h_i для металлов изображена на фиг. 2. Эта зависимость согласно допущению, сформулированному в начале анализа безаварийного режима работы, может быть определена в опытах на одном свободном слое.

Таким образом, если действующее в панели напряжение меньше σ , определяемого формулой (3.11), то образование щели длины $2l$ не приведет к мгновенному хрупкому разрушению. Удельная прочность панели со сквозной трещиной, σ/l , при одинаковой геометрии панели и трещины, согласно (3.11), (3.12) пропорциональна множителю

$$\frac{\sum_{i=1}^n h_i K_c^{(i)}}{\sum_{i=1}^n h_i \gamma_i} \quad (3.13)$$

Поэтому при расчете и прогнозе аварийных ситуаций для обеспечения максимальной живучести конструкции естественно проектировать панель так, чтобы величина (3.13) была максимальной.



Фиг. 2. Зависимость вязкости разрушения листа от его толщины.

Таким образом, в случае n заготовок-листов заданной толщины приходим к следующей задаче оптимального проектирования: требуется максимизировать функцию

$$\frac{\sum_{i=1}^n h_i K_c^{(i)} x_i}{\sum_{i=1}^n h_i \gamma_i x_i} \quad (3.14)$$

по переменным x_i при ограничениях (3.8)—(3.9).

Если толщина листов может быть любой, то есть завод-изготовитель заранее заказывает нужные ему листовые заготовки, то оптимальная толщина листов равна величине h_{i0} , соответствующей максимуму вязкости разрушения слоя (фиг. 2). Если по технологическим или экономическим соображениям этого достичь невозможно, то есть для всех заготовок $h_i \geq h_{i0}$, то оптимальная толщина листов отвечает минимальной величине h_i .

4. Реальные задачи оптимального проектирования

Получающиеся задачи дробно-линейного программирования решаются методами исследования операций. При малом числе заготовок задача легко решается полным перебором всех вариантов.

Нетрудно заметить, что из n заготовок без учета ограничений можно создать $\sum_{i=1}^n C_{i-1}^{n-1} \approx e^{n-1} \cdot 2$ различных панелей, поэтому уже при $n = 7$ ре-

шать задачу полным перебором нерационально. Для решения задачи применяется метод частичного перебора.

Кроме того, для выбранных листов панели проверка условия склеивания является достаточно сложной задачей. Поэтому для выбранного набора листов сначала проверяется выполнение (3.8), затем увеличение функции (3.7) или (3.14) и, наконец, как самое трудоемкое, выполнение условия (3.9).

Проверку ограничений (3.8) и увеличения функции (например, 3.14) лучше [5] проводить одновременно, то есть решать серию задач на линейные неравенства

$$\max_{x_i} \sum_{i=1}^n (y_i - Kc^{(i)}) h_i x_i < 0 \quad (4.1)$$

при ограничении (3.8). Эта задача решается гибкой процедурой перебора с правилом Балаша [6].

В процедуре перебора каждая переменная приобретает наименование: свободная, выбранная или помеченная. Свободные и помеченные переменные имеют значение 0, а выбранные равны единице.

Состояние поиска характеризуется списком и ранее определенным допустимым решением. Список содержит номера выбранных и помеченных переменных, причем помеченные переменные отличает знак минус перед номером: свободные переменные в список не вносятся. Например, список

$$\{2, 4, 6, -8, -7, 10, 11, 14, -3, -5, -1\} \quad (4.2)$$

определяет переменные $x_2 = x_4 = x_6 = x_{10} = x_{11} = x_{14} = 1$ как выбранные, $x_8 = x_7 = x_3 = x_5 = x_1 = 0$ как помеченные, $x_0 = x_{12} = x_{13} = 0$ как свободные переменные, тем самым, списком определяются значения всех переменных.

По значениям переменных можно составить величину невыполнения ограничений d . Так, для нашей задачи $d = \sum_{i=1}^3 d_i$, где

$$d_i = \begin{cases} s_i - 10^{-7}, & s_i < 0, \\ 0, & s_i > 0, \end{cases} \quad s_i = \sum_{j=1}^n (Kc^{(j)} - y_j) h_j x_j \quad (4.3)$$

соответствует ограничению (4.1) (малая постоянная 10^{-7} обеспечивает $d_i = 0$ при выполнении (4.1)), остальные d_i строятся аналогично, а именно, если (3.8) записать в виде $s_j > 0$ ($j = 2, 3$), то

$$d_j = \begin{cases} s_j, & s_j < 0 \\ 0, & s_j > 0 \end{cases} \quad j = 2, 3 \quad (4.3)$$

Допустимым решением считается набор значений переменных, для которых выполнены ограничения ($d = 0$). Цель процедуры — перебрать допустимые решения с большими значениями максимизируемой функции.

Для получения начального списка найдем допустимое решение вспомогательной задачи линейного программирования

$$\max \sum_{i=1}^n \frac{K_i^{(0)}}{c_i} x_i \quad (4.4)$$

при ограничениях (3.8). Искомое решение получается последовательным включением в панель заготовки с наибольшей удельной вязкостью разрушения, пока (3.8) не выполняются. Начальный список процедуры перебора составляется по полученному решению и состоит только из выбранных переменных; это же решение с критерием (3.14) является начальным допустимым решением.

Шаг процедуры состоит из анализа списка, его изменения и проверки допустимого решения, если оно встретится.

При анализе списка определяется возможность выполнения ограничений, если некоторым или всем свободным переменным придать значение 1. Так, если для нашей задачи и текущего списка не выполнено условие (4.1) ($d_i < 0$), то придав значение 1 тем свободным переменным, для которых $K_i^{(0)} - c_i \geq 0$, посчитаем слова d_i . Если $d_i < 0$, то выполнить ограничения, в частности, первое, свободными переменными нельзя. Аналогично осуществляется проверка других ограничений. Если ограничения можно выполнить свободными переменными, то определяется та из них, перевод которой в выбранные и внесенные в список сделает для нового списка максимальной величиной d . Если для нового списка $d = 0$, то он определяет допустимое решение: для этого решения вычисляется максимизируемая функция и сравнением с z определяется, фиксировать ли новое допустимое решение (и менять z) или нет. Так, например, если список (4.2) допускает выполнение ограничений и в выбранную переменную надо обратить x_{11} , то новый список будет

$$\{2, 4, 6, -8, -7, 10, 11, 14, -3, -5, -1, 12\}$$

Если ограничения выполнить свободными переменными нельзя или допустимое решение найдено, то определяется, есть ли в списке выбранные переменные. При отсутствии их поиск заканчивается. Если выбранные переменные в списке есть, то из последней группы (крайней справа) выбранных переменных переводится в помеченные та, которая для нового списка сделает максимальной d . Новая полученная переменная ставится в списке в конце (справа) группы выбранных переменных, к которой она принадлежала, все помеченные переменные справа от нее переименовываются в свободные (исключаются из списка). Так, если для списка (5.2) в помеченные надо перевести переменную x_{11} , то новый список будет $\{2, 4, 6, -8, -7, 10, 14, -11\}$.

Итак, на шаге процедуры, либо в список вносятся одна переменная и возможно допустимое решение, либо список не увеличивается и возможен конец поиска.

В процессе решения задачи каждое допустимое решение проверяется на «склеиваемость» следующим образом. Составим матрицу из тех элемен-

тов c_{ij} для номеров i и j которых $i = j - 1$. Полученную матрицу дополняем единичными строкой и столбцом и нулевым элементом по диагонали.

В этой матрице порядка $n_1 = \sum_{i=1}^n x_i + 1$ требуется отыскать n_1 элементов, равных единице, из которых можно составить замкнутый маршрут, то есть так упорядочить, чтобы номер столбца предыдущего элемента совпадал с номером строки последующего и номер столбца последнего элемента совпадал с номером строки первого.

Для решения этой задачи использован алгоритм ветвления, аналогичный [7]. Объектом ветвления является набор элементов исходной матрицы и матрица, корядок которой равен разности n_1 и числа элементов в наборе (сначала набор элементов объекта пуст).

Для объекта определяется возможность ветвления: если матрица содержит нулевую строку или столбец, то ветвление объекта заканчивается.

Для ветвления объекта определяются элементы ветвления и замыкания. Элемент ветвления $c_{ij} = 1$ является единственной единицей в строке i или столбце j , а если такого элемента в матрице нет, то для него сумма элементов в строке и столбце наименьшая. Элемент замыкания с некоторыми или всеми элементами набора и элементом ветвления составляет замкнутый маршрут.

Ветвление объекта A сводится к получению двух объектов. Один объект содержит тот же набор элементов, что и A , а маршрут его отличается лишь элементом ветвления c_{ij} равным 0. Набор другого объекта содержит набор A и элемент c_{ij} . Матрица другого объекта получается из матрицы объекта A исключением строки i и столбца j и обращением в 0 элемента замыкания.

Алгоритм заключается в ветвлении объекта, набор которого содержит наибольшее число элементов. Если закончено ветвление всех объектов, то выбранные листы образуют панель не могут. Если матрица одного из объектов имеет вид $\|1\|$, то листы склеиваются в панель; порядок склеивания предписывается набором этого объекта.

Физический смысл алгоритма проверки (3.9) заключается в том, что к уже отображенным коммуникациям c_{ij} всегда добавляется такая, чтобы оставшиеся разрешенные коммуникации создавали как можно больше склеиваемых комбинаций.

3. Численный пример

На ЭЦВМ М-20 численно сконструированы 4 панели из 10 наборов заготовок из трех материалов (алюминиевые и титановые сплавы, характеристики заготовок даны в табл. 1). В каждом наборе имелось по 2 заготовки. Требовалось создать 2 панели с максимальной удельной вязкостью разрушения при ограничениях на их толщины $2 \text{ см} \leq h \leq 4 \text{ см}$ и $4 \text{ см} \leq h \leq 6 \text{ см}$ соответственно, возможность склеивания не проверялась. Аналогичный расчет приведен с проверкой условия склеивания (матрица склеивания помещена в табл. 3). Удельная вязкость разрушения оптимальных па-

Таблица 1

№ заготовки	Характеристики материалов											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Материал	Сталь ВКС-1	Алюминиевый сплав 1201			Титановый сплав BT14			Сталь ВА1Д	Алюминиевый сплав 7075-T6			
Состав в %	C 0,39, Cr 1,75 Si 1,08, Ni 0,6 Mn 0,83, V 0,07 Mo 0,53	Cu 5,8-6,8 Mn 0,3 Ti 0,02-0,1 Zr 0,1-0,25 V 0,05-0,15 Si 0,2 Fe 0,3 Mg 0,2			Al 3,5-5,5 Mo 2,5-3,8 V 0-1,5 Zr 0,01-0,1			C 0,3 Mn 0,9 Ni 1 W 1,07 Si 0,9 Cr 0,5 Mo 0,5	Zn 5-7, Mg 1,8-2,8 Cu 1,4-2,0, Mn 0,2-0,6 Cr 0,1-0,25			
Состояние материала	Закалка 940 и охлажд. на возд. отпуск 3 часа при 270	Закаленное и состаренное			Закаленное и состаренное			Закалка 930 охлажд. на воздухе отпуск 3 часа при 210	Закаленное и охлажденное до исходного состояния			
$\rho \cdot 10^3$, кг/см ³	7,79	2,6			4,52			7,9	2,6			
E , кг/мм ²	20 500	7 330			11 500			20 500	7 100			
$\sigma_{0,2}$, кг/мм ²	157	24			120			140	42			
σ_b , кг/мм ²	185	36			130			171	50			
δ_5 , %	5	6			6			7	8			
h , см	0,2	0,35	0,6	1	0,12	0,14	0,24	0,2	0,26	0,3	0,4	0,5
K_t , кг/см ^{3/2}	7,425	6110	5350	4660	8900	8124	5714	18,800	9165	8367	7714	7000

нелей и номера входящих в них заготовок представлены в табл. 2. Проверка на склеиваемость значительно увеличивает время счета задачи. Так, определение оптимальной панели без проверки условия склеивания потребовало 0.4 и 3 мин, а с проверкой этого условия 8 и 17 мин для соответствующих ограничений на толщину.

Таблица 2

Результаты расчета			
Ограничения	Проводилась проверка условий склеивания	Номера заготовок, входящих в оптимальную панель	Критерий ($\text{см}^3/\text{д}$)
$2 \text{ см} \leq h \leq 4 \text{ см}$	нет	2, 9, 10, 11, 11, 10, 9, 2	$3.001 \cdot 10^6$
	да	4, 9, 10, 11, 11, 10, 9, 1	$2.48 \cdot 10^6$
$4 \text{ см} \leq h \leq 6 \text{ см}$	нет	3, 4, 10, 11, 12, 12, 11, 10, 9, 3	$2.743 \cdot 10^6$
	да	5, 3, 2, 6, 9, 10, 11, 11, 10, 9, 6, 2, 3, 5	$2.56 \cdot 10^6$
Аварийный режим	1, 2, 3, 5, 9, 10, 11, 12, 12, 11, 10, 9, 5, 3, 2, 1		$2.53 \cdot 10^6$
Безаварийный режим	1, 5, 6, 7, 8, 9, 7, 6, 5, 1		25200 д.м

В двух других примерах из всего множества материалов табл. 1 сконструированы 2 панели для работы в аварийном ($K_0 = 1500 \text{ кг/см}^2$) и безаварийном ($K_0 = 10000 \text{ кг/см}^2$) режимах. Условие склеивания не проверялось. Как видно из табл. 2, две последние панели состоят, в основном, из различных листов.

Таблица 3

Фиктивная матрица склеивания (1-номер заготовки в табл. 1)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
5	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
6	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
10	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
11	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
12	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

Следует заметить, что при ограничениях (3.8) изложенный выше алгоритм следует применять при «дефиците» заготовок в наборе. Если допустить произвольное число заготовок в наборе, то по всем примерам оптимальной по критерию максимума удельной вязкости разрушения будет панель из одинаковых заготовок № 9 табл. 1, а при учете склеивания — панель из заготовок № 9 и 10, склеенных поочередно: 9—10—9—10—9 для $2 \text{ см} \leq h \leq 4 \text{ см}$.

6. Заключение

В данной статье задачи оптимального проектирования многослойных клеевых панелей с помощью принципа равномерности сведены к задачам целочисленного программирования, для которых предложен алгоритм решения, реализуемый на ЭВМ.

Московский орден Трудового Красного
Знамени горный институт

Поступила 24 II 1976

Պ. Պ. ՉԵՐԵՊԱՆՈՎ, Վ. Մ. ՏՄՈԼՍԿԻ, Ա. Գ. ԹԱԳԻ-ՅԱԴԵ

ՈՐՈՇ ԻՆՏԵՆՏԻՎԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՈՍԻՏԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՍՏՐԱԿՏԻՆ ԿՐԱՍՆՅԱՆ

Ա ճ զ ի ռ զ ի ռ ը

Արդյունաձեռքով համասարամասնության սկզբունքի հիման վրա բազմաշերտ ստեղծված պակեիկ օպտիմալ նախագծման խնդիրը բերվել է ամբողջաթիվ ծրագրավորման խնդրին, որի համար առաջարկվել է կլեկտրոնային հաշվի մեքենայի վրա իրագործվող լուծման ալգորիթմ:

ON OPTIMAL DESIGN OF A LAMINATED PANEL

G. P. CHEREPANOV, V. M. SMOLSKY, A. G. TAGY-ZADE

S u m m a r y

In this paper, on the basis of the uniform strength principle, the problem of optimal design is reduced to an integer programming problem and, for the solution of the latter, an algorithm is suggested to be computerized.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., Изд. «Наука», 1974, 640.
2. Sih G. C. *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*. Noordhoff Intern. Publishing, Leyden, 1973, 517 p.
3. Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. *The Stress Analysis of Cracks*. Handbook DEL Res. Corporat., 1973, 488 p.
4. Черепанов Г. П. Вязкость разрушения листов, панелей и многослойных клеевых панелей из алюминия. Тр. Америк. общ. мех.-инжен., сер. D, 1967, т. 87, № 3, 57-62.
5. Johnson R. J. *Computational Experiments with a "Balancing" Integer Programming Algorithm*. Oper. Research, 1955, t. 11, No. 15, 935-941.
6. Johnson Ph. *Taken A Flexible Tree-Search Method for Integer Programming Problems*. Oper. Research, 1971, t. 19, No. 1, 115-122.
7. Little J. D. C., Murty M. G., Swersey D. W., Karel G. *An Algorithm for the Travelling Salesman Problem*. Oper. Research, 1973, t. 21, No. 11, 972-989.

Р. М. БАРСЕГЯН

ОЦЕНКИ СПОСОБОВ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ
 УРАВНЕНИЙ БЕЗНАПОРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ
 ФИЛЬТРАЦИИ

Двухмерное движение воды в гидравлически связанных двух подоносных горизонтах, которые разделены горизонтальной слабопроницаемой прослойкой, описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \omega^2 (h - H) = 0 \quad (1)$$

где $h(x, y)$ — глубина фильтрационного потока верхнего безнапорного горизонта; H — постоянный напор нижнего напорного горизонта; $\omega^2 = \frac{\bar{k}}{kT}$, \bar{k} — коэффициент фильтрации напорного горизонта; \bar{k} и T — соответственно коэффициент фильтрации и мощность слабопроницаемой прослойки.

При осесимметричном движении из уравнения (1) получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r h \frac{dh}{dr} \right) - \omega^2 (h - H) = 0 \quad (2)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Существуют различные способы приближенного решения уравнения (2). Наиболее эффективные приближенные решения этого уравнения основаны на приближенной ее аппроксимации линейными уравнениями (линеаризация).

При первом способе линеаризации глубина фильтрационного потока h в квадратных скобках уравнения (2) заменяется некоторым средним значением h_{cp} и в результате нелинейное уравнение (2) заменяется следующим линейным уравнением:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh}{dr} \right) - \frac{\omega^2}{h_{cp}} (h - H) = 0 \quad (3)$$

При четвертом способе линеаризации [1] уравнение (2) заменяется линейным уравнением

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{\omega^2}{H} (u - u_0) = 0 \quad (4)$$

где

$$u = h^2, \quad u_0 = H^2$$

Вышеуказанные способы линеаризации широко применяются в теории как установившейся, так и не установившейся фильтрации, несмотря на то, что до настоящего времени не даны оценки точности этих способов.

Ниже, с помощью метода квазилинеаризации доказывается, что уравнения, линеаризованные первым и четвертым способами, совпадают с первыми приближениями последовательностей квазилинейных уравнений. Будет также показано, что решения последовательности квазилинеаризованных уравнений чрезвычайно быстро сводятся к решению исходного нелинейного уравнения и поэтому решения линеаризованных первым и четвертым способами уравнений как решения первых приближений сходящихся последовательностей действительно будут приближенными решениями для исходных нелинейных уравнений. Метод квазилинеаризации дает возможность найти оценки любого приближения. В частности, оценка первого приближения в последовательности линейных уравнений является и оценкой способов линеаризации при удобном выборе нулевого приближения.

Пусть требуется найти решение уравнения (2) с условиями

$$h|_{z=0} = H_1, \quad h|_{z=1} = H_2 \quad (5)$$

С помощью подстановки $\frac{h^2}{2} = u$ из задачи (2), (5) получим задачу (6), (7)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{du}{dr} \right] - u^2 (1 - 2u - H) = 0 \quad (6)$$

$$u|_{z=0} = \frac{H_1^2}{2} = \bar{u}_1, \quad u|_{z=1} = \frac{H_2^2}{2} = \bar{u}_2 \quad (7)$$

В дальнейшем параллельно будут рассмотрены следующих два случая. В первом случае напор нижнего напорного горизонта больше, чем граничные значения H_1 и H_2 ($H_1 < H_2 < H$). Этот случай отвечает отбору воды из напорного горизонта. Во втором случае напор H нижнего горизонта меньше, чем $\min(H_1, H_2)$, ($H < H_1 < H_2$). Этот случай отвечает нагнетанию воды в напорный горизонт.

Перепишем уравнение (6) в общем виде

$$u' = f(u', u, r) \quad (8)$$

$$f(u', u, r) = u^2 (1 - 2u - H) - \frac{u'}{r}$$

По методу квазилинеаризации [2] заменим уравнение (8) следующей последовательностью линейных уравнений:

$$u'_n = f(u'_n, u_n, r) + f_{u'}(u'_n, u_n, r)(u'_n - u'_{n-1}) + f_u(u'_n, u_n, r)(u_n - u_{n-1}) \quad (9)$$

Задача нахождения решения уравнения (9) для каждого n при граничных условиях

$$u_{n+1}|_{r=r_c} = \bar{u}_1, \quad u_{n+1}|_{r=l} = \bar{u}_2$$

равносильна нахождению функции $u_{n+1}(r)$ из интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u_{n+1} = f_0(r) - \int_{r_c}^l G(r, y) [f(n) + f_u'(n)(u_n - u_{n-1}) + f_u''(n)(u_n - u_{n-1})] dy$$

где обозначены: $f(n) = f(u_n', u_n, r)$, $f_0(r) = \bar{u}_1 + \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{l - r_c}(r - r_c)$

$$G(r, y) = \begin{cases} \frac{y(l - r_c - r)}{r_c - l} & \text{при } y \ll r \\ \frac{r(l - r_c - y)}{r_c - l} & \text{при } r \ll y \end{cases}$$

Составим аналогичное уравнение для разности $(n+1)$ -го и n -го шагов

$$u_{n+1} - u_n = \int_{r_c}^l G(r, y) \{f(n) - f(n-1) + f_u'(n)(u_n' - u_{n-1}') + f_u''(n)(u_n - u_{n-1}) + f_u'(n)(u_{n-1} - u_n) - f_u'(n-1)(u_n' - u_{n-1}') - f_u''(n-1)(u_n - u_{n-1})\} dy \quad (10)$$

По формуле Тейлора второго порядка для функции $f(n)$ в точке $(n-1)$ имеем

$$f(n) = f(n-1) + (u_n' - u_{n-1}') f_u'(n-1) + (u_n - u_{n-1}) f_u''(n-1) - \\ - \frac{1}{2} f_u'''(\theta_n) (u_n' - u_{n-1}')^2 + \frac{1}{2} f_u'''(\theta_n) (u_n - u_{n-1})^2 - \\ + f_u'''(\theta_n) (u_n' - u_{n-1}') (u_n - u_{n-1})$$

где $f_u'''(\theta_n) = \frac{\partial^3 f[u_{n-1}' + \theta(u_n' - u_{n-1}'), u_{n-1} + \theta(u_n - u_{n-1}), r]}{(\partial u')^2}$ и т. д.

Подставляя последнее выражение в (10), получим

$$u_{n+1} - u_n = \int_{r_c}^l G(r, y) \left\{ \frac{1}{2} f_u'''(\theta_n) (u_n' - u_{n-1}')^2 + \frac{1}{2} f_u'''(\theta_n) (u_n - u_{n-1})^2 + \right. \\ \left. + f_u'''(\theta_n) (u_n' - u_{n-1}') (u_n - u_{n-1}) + f_u'(n) (u_{n-1}' - u_n') - \right. \\ \left. + f_u''(n) (u_{n-1} - u_n) \right\} dy \quad (11)$$

Здесь без доказательства отметим, что из сходимости функций $u_n(r)$ следует сходимость в среднем их первых производных.

Далее, в виду того, что

$$\max G(r, y) = \frac{l-r_c}{4}$$

из (11) следует неравенство

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| < \frac{l-r_c}{4} \int_{r_c}^l \left\{ \frac{1}{2} [\max |f'_n(b_n)| (u'_n - u'_{n-1})^2 + \right. \\ \left. + |f'_n(b_n)| (u_n - u_{n-1})] + M |u'_n - u'_{n-1}| + \right. \\ \left. + N |u'_{n+1} - u'_n| + |f'_n(n)| |u_{n+1} - u_n| \right\} dy \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$M = \max |f'_{n+1}(b_n)| \max |u_n - u_{n-1}|, \quad N = \max |f'_n(n)|$$

В силу равенства, справедливого для любого n ,

$$\int_{r_c}^l (u'_{n+1} - u'_n) dy = u_{n+1}|_{r_c} - u_n|_{r_c} = 0$$

имеет место

$$\int_{r_c}^l M |u'_n - u'_{n-1}| dy = \int_{r_c}^l N |u'_{n+1} - u'_n| dy = 0$$

и тогда с помощью максимизации и интегрирования из (12) получим

$$\begin{aligned} \max |u_{n+1} - u_n| < \frac{(l-r_c)^2}{2[4 - q(l-r_c)^2]} [\tau \max |u'_n - u'_{n-1}|^2 + \\ + p \max |u_n - u_{n-1}|^2] \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\tau = \max |f'_n(b_n)|, \quad p = \max |f'_n(b_n)|, \quad q = \max |f'_n(n)|$$

Из неравенства (13) можно перейти к более простому неравенству. С этой целью рассмотрим разность

$$u_n(r) - u_{n-1}(r) = u_n(r_c) - u_{n-1}(r_c) + \int_{r_c}^r [u'_n(y) - u'_{n-1}(y)] dy$$

откуда, учитывая условия

$$u_n(r_c) = u_{n-1}(r_c)$$

получим

$$u_n(r) - u_{n-1}(r) = \int_r^l [u_n(y) - u_{n-1}(y)] dy$$

или

$$|u_n(r) - u_{n-1}(r)|^2 = \left| \int_r^l (u_n - u_{n-1}) dy \right|^2$$

В силу неравенства Буниковского

$$|u_n(r) - u_{n-1}(r)|^2 \leq (l - r) \int_r^l (u_n - u_{n-1})^2 dy$$

Заменив справа r через l , усилим это неравенство

$$|u_n(r) - u_{n-1}(r)|^2 \leq (l - r) \int_r^l (u_n - u_{n-1})^2 dy$$

откуда с помощью максимизации и интегрирования имеем

$$\max |u_n - u_{n-1}|^2 \leq (l - r_c)^2 \max |u_n' - u_{n-1}'|^2$$

Подставляя последнее неравенство в (13), получим

$$\max |u_{n+1} - u_n| \leq B \max |u_n - u_{n-1}|^2 \quad (14)$$

где

$$B = \frac{(l - r_c) [1 - p(l - r_c)]}{2[4 - q(l - r_c)^2]}$$

Для дальнейшего преобразования этого неравенства нам необходимо заметить, что производная u_n' ввиду выпуклости графика функции u_n в первом случае и вогнутости графика во втором случае, принимает наибольшее значение на концах интервала (r_c, l) . Так, при $H_1 < H_2 < H$ функция u_n' принимает максимальное значение в точке $r = r_c$, а при $H < H_1 < H_2$ — в точке $r = l$.

Принимая без строгого доказательства монотонность последовательности $\{u_n'\}$ (причем для $H_1 < H_2 < H$ эта последовательность будет монотонно убывающей, а для $H < H_1 < H_2$ — монотонно возрастающей), по (14) можно доказать сходимость метода и найти оценки погрешности любого нужного приближения.

По формуле Тейлора первого порядка для функций u_{n-1} и u_n в точке \bar{r} имеем

$$\begin{aligned} u_{n-1}(r) &= u_{n-1}(\bar{r}) + u'_{n-1}(\bar{r})(r - \bar{r}) + R_1, \\ u_n(r) &= u_n(\bar{r}) + u'_n(\bar{r})(r - \bar{r}) + R_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\bar{r} = r_c$ при $H_1 < H_2 < H$

$$\bar{R}_2 = u''_{n-1}(\xi) \frac{(r - r_c)^2}{2}, \quad R_2 = u''_n(\xi) \frac{(r - r_c)^2}{2}, \quad r_c < \xi < r$$

и $\bar{r} = l$ при $H < H_1 < H_2$, $r < \xi < l$.

Подставляя в (14) полученные таким способом выражения для $u_{n-1}(r)$ и $u_n(r)$ из (15) и учитывая, что $u_n(r_c) = u_{n-1}(r_c)$, $u_n(l) = u_{n-1}(l)$, получим для первого случая

$$\begin{aligned} (l - r_c) \max |u'_{n+1}(r_c) - u'_n(r_c)| &< \max |(r - r_c) [u'_n(r_c) - u'_{n-1}(r_c)] + \\ &+ (R_n - R_{n-1})| \leq B \max |u_{n-1}(r) - u_n(r)| \end{aligned}$$

Имея ввиду вышесказанное о наибольшем значении производной функции $u_n(r)$, это неравенство можно написать в виде

$$u'_n(r_c) - u'_{n-1}(r_c) < \frac{B}{l - r_c} \max |u'_n - u'_{n-1}|^2 \quad (16)$$

Для второго случая аналогично имеем

$$u'_{n-1}(l) - u'_n(l) < \frac{B}{l - r_c} \max |u'_n - u'_{n-1}|^2 \quad (17)$$

Неравенства (16) и (17) можно выразить одним неравенством

$$\max |u'_{n+1}(r) - u'_n(r)| < \frac{B}{l - r_c} \max |u'_n(r) - u'_{n-1}(r)|^2 \quad (18)$$

Сходимость последовательности $\{u'_n(r)\}$ зависит от величины c_1 . Если

$$c_1 = \frac{B}{l - r_c} \max |u'_1 - u'_0| < 1$$

то, как показывает (18), эта сходимость будет квадратичной.

Из неравенства (18) можно перейти к неравенству

$$|u'_n(r) - u'_{n+1}(r)| < \frac{B}{l - r_c} \max |u'_n - u'_{n-1}|^2$$

откуда видно, что последовательность $\{u'_n(r)\}$ сходится равномерно к некоторой предельной функции $u'_n(r)$, так как правая часть этого неравенства не зависит от r и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Далее, учитывая монотонность последовательности $\{u_n\}$, из неравенства

$$|u_{n-1}(r) - u_n(r)| \leq B \max |u_n' - u_{n-1}'|^2$$

вытекающего из (14), следует равномерная сходимость последовательности $\{u_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r) = u(r)$$

Предельная функция $u(r)$ будет удовлетворять интегральному уравнению

$$u(r) = f_0(r) + \int_{r_c}^l G(r, y) f(u) dy$$

и тем самым является решением исходного уравнения.

Найдем оценки первого и m -го приближений последовательности $\{u_n\}$.

Из неравенства (18) для первого случая ($H_1 < H_2 < H$) имеем неравенства

$$u_1' - u_2' \leq \frac{c_1^2}{R_1}, \dots, u_{n-1}' - u_n' \leq \frac{c_1^{2^{n-1}}}{R_1} \quad (19)$$

а для второго случая — неравенства

$$u_2' - u_1' \leq \frac{c_1^2}{R_1}, \dots, u_n' - u_{n-1}' \leq \frac{c_1^{2^{n-1}}}{R_1} \quad (20)$$

Складывая неравенства (19), получим

$$u_1' - u_n' \leq \frac{1}{R_1} \sum_{i=1}^{n-1} c_1^{2^i} \quad (21)$$

Аналогично из (20) имеем

$$u_n' - u_2' \leq \frac{1}{R_1} \sum_{i=1}^{n-1} c_1^{2^i} \quad (22)$$

Неравенства (21) и (22) верны для любого r из интервала (r_c, l) , поэтому эти неравенства можно объединить:

$$\max |u_n' - u_1'| \leq \frac{1}{R_1} \sum_{i=1}^{n-1} c_1^{2^i} \quad (23)$$

Учитывая неравенства (19)–(23), на основе неравенства (14) получим

$$\max |u_{n-1} - u_n| \leq (l - r_c) c_1^{2^{n-1}}$$

$$\max |u_n - u_1| \leq (l - r_c) \sum_{i=1}^{n-1} c_1^{2^i}$$

$$\max |u_n - u_m| \leq (l - r_c) \sum_{i=m}^{n-1} c_1^i$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, из последних неравенств получим

$$\max |u - u_1| \leq (l - r_c) \sum_{i=1}^{\infty} c_1^i < \frac{c_1^2 (l - r_c)}{1 - c_1^2} \quad (24)$$

$$\max |u - u_m| \leq (l - r_c) \sum_{i=m}^{\infty} c_1^i < \frac{c_1^m (l - r_c)}{1 - c_1^2} \quad (25)$$

Неравенства (24) и (25) являются оценками соответственно для первого и m -го приближений.

Найдем ошибку, которую допускаем при линеаризации уравнения (2) четвертым способом при решении этого уравнения с условиями (5).

Первое приближение, полученное из уравнения (2) методом квазилинеаризации, есть уравнение

$$u_1' - \omega^2 (\sqrt{2u_0} - H) + \frac{\omega^2}{\sqrt{2u_0}} (u_1 - u_0) - \frac{1}{r} u_1 \quad (26)$$

Уравнение (26) совпадает с линеаризованным четвертым способом уравнением (4) при

$$u_0 = \frac{H^2}{2}$$

Решение уравнения (26) с условиями (5) имеет вид

$$u_1 = u_0 + (u_1 - u_0) \Phi_1(\omega r) + (u_2 - u_0) \Phi_2(\omega r)$$

где

$$\Phi_1(\omega r) = R \{ I_0(\omega r) K_0(\omega l) - K_0(\omega r) I_0(\omega l) \}$$

$$\Phi_2(\omega r) = R \{ I_0(\omega r_c) K_0(\omega r) - K_0(\omega r_c) I_0(\omega r) \}$$

$$R^{-1} = I_0(\omega r_c) K_0(\omega l) - K_0(\omega r_c) I_0(\omega l)$$

I_n и K_n — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка соответственно первого и второго родов.

Тогда, учитывая, что

$$f(u', u, r) = \omega^2 (\sqrt{2u} - H) - \frac{u'}{r}$$

$$q = \max |f_n'(0)| = \max \frac{\omega^2}{\sqrt{2u_0}} = \frac{\omega^2}{H}$$

$$r = \max |f_n'(l_0)|, \quad p = \max |f_n'(l_0)| = \max \frac{\omega^2}{(2l_0)^{3/2}}$$

для первого случая, то есть при случае перетока жидкости из нижнего горизонта в верхний ($H_1 < H_2 < H$)

$$\frac{\omega^2}{H^2} < p < \frac{\omega^2}{H_1^2}$$

а для второго случая ($H < H_1 < H_2$)

$$\frac{\omega^2}{2 | \bar{2} | u_0 + (\bar{u}_1 - u_0) \Phi_1(\omega r_0) + (u_2 - u_0) \Phi_2(\omega r_0) |^2} < p < \frac{\omega^2}{H^2}$$

Поэтому в первом случае

$$c_1 < \frac{\omega^2 (l - r_c)^2 H}{2 [4H - \omega^2 (l - r_c)^2] H_1^2} | (\bar{u}_1 - u_0) \Phi_1(\omega r_c) + (\bar{u}_1 - u_0) \Phi_2(\omega r_c) | \quad (27)$$

где r_c — корень уравнения

$$\frac{\Phi_1(\omega r)}{\Phi_2(\omega r)} = \frac{\bar{u}_i - u_0}{u_0 - u_1} \quad \Phi_i = \frac{d\Phi_i}{dr} \quad (i = 1, 2) \quad (28)$$

и во втором случае

$$c_1 < \frac{\omega^2 (l - r_c)^2}{2 [4H - \omega^2 (l - r_c)^2] H^2} | (u_2 - u_0) \Phi_1(\omega r_0) + (u_2 - u_0) \Phi_2(\omega r_0) | \quad (29)$$

где r_c — корень уравнения (28).

В частном случае при $H_1 = H_2 = H$ ($u_2 = u_1 = \bar{u}$) учитывая, что $r_0 = \frac{l - r_c}{2}$, из (27) и (29) соответственно получим

$$c_1 < \frac{\omega^2 (l - r_c)^2 H}{2 H^2 [4H - \omega^2 (l - r_c)^2]} \left| (\bar{u} - u_0) \left[\Phi_1\left(\omega \frac{l - r_c}{2}\right) + \Phi_2\left(\omega \frac{l - r_c}{2}\right) \right] \right| \quad (30)$$

$$c_1 < \frac{\omega^2 (l - r_c)^2}{2 H^2 [4H - \omega^2 (l - r_c)^2]} \left| (\bar{u} - u_0) \left[\Phi_1\left(\omega \frac{l - r_c}{2}\right) + \Phi_2\left(\omega \frac{l - r_c}{2}\right) \right] \right| \quad (31)$$

При достаточно малых ω оценки (27), (29) — (31) представляют малую величину порядка $\omega^2 (l - r_c)^2$, то есть

$$c_1 \approx M_1 | \omega (l - r_c) |^2 \quad (M_1 = \text{const})$$

тогда в силу неравенства (24)

$$\max |u| - \max |u_1| < \omega^2 (l - r_c)^2 A_2 B_0$$

причем для (27) и (29) имеем соответственно

$$A_2 = \frac{H^2}{H_1^2} \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{1}{H^2}$$

$$B_0 = \frac{| (\bar{u}_1 - u_0) \Phi_1(\omega r_c) + (\bar{u}_1 - u_0) \Phi_2(\omega r_c) |}{2 [4H - \omega^2 (l - r_c)^2]}$$

для (30) и (31) — соответственно

$$A_2 = \frac{H^2}{H^0} \text{ и } A_3 = \frac{1}{H^0}, \quad B_0 = \left| (\bar{u} - u_0) \left[\Phi_1 \left(\omega \frac{l-r_c}{2} \right) + \Phi_2 \left(\omega \frac{l-r_c}{2} \right) \right] \right|$$

то есть расхождение между решением исходного нелинейного уравнения (2) и линеаризованного четвертым способом уравнения (4) есть малая величина порядка $[\omega(l-r_c)]^4$.

Чтобы найти оценку при первом способе линеаризации, рассмотрим линеаризованное этим способом уравнение (3) и следующее уравнение, являющееся первым приближением последовательности квазILINEАРИЗОВАННЫХ уравнений

$$h_1 = f(h_0, h_0) + f_h(h_0, h_0)(h_1 - h_0) + f_h(h_0, h_0)(h_1 - h_0)$$

где h_0 — некоторое нулевое приближение и

$$f = \frac{(h')^2}{h} = \omega^2 \left(1 - \frac{H}{h} \right), \quad f_h = -\frac{2h'}{h}, \quad f_{hh} = \frac{\omega^2 H}{h^2} + \frac{(h')^2}{h^2}$$

при постоянном h_0

$$\dot{h}_1 = \frac{\omega^2 H}{h_0^2} (h_1 - h_0) - \frac{\omega^2}{h_0} (H - h_0) \quad (32)$$

Уравнения (3) и (32) тождественны при $h_0 = h_{00} = H$ и поэтому оценка для первого приближения уравнения (32) будет оценкой и для первого способа линеаризации.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Получила 17.11.1976

Ե. Մ. ԲԱՐՏԵԳՅԱՆ

ՈՉ ԿՆՇՈՒՄԱՅԻՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՈՉ ԳԻՄԱՅԻՆ
ԳԻՆՆՐԵՆՑԻԱԿ ԸՎՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԳՄԱՅՆԱՑՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԻ
ԳՆԱՀԱՏՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ոչ գծային շափասարումների ճշգրիտ լուծումներ գտնելը կապված է մաթեմատիկական դժվարությունների հետ:

Այդ պատճառով ոչ ճշումային ֆիլտրացիայի շափասարումները լուծում են գծայնացման եղանակներով:

Մակայն, որքան հայտնի է գոյություն չունեն ասարեր մեկերով կատարված գծայնացումների հետևանքով առաջացող նյարավոր սխալների համար գնահատականները կշիտատանքում ենվելով քվադրատայնացման մեթոդի վրա, առաջարկվում է եղանակ, որը նյարավորություն է տալիս որոշելու այն սխալի մեծությունը, որն առաջանում է ոչ գծային դիֆերենցիալ շափասարումը այն եղանակով գծայնացնելուց:

EVALUATION OF MODES OF LINEARIZATION
OF NON-LINEAR EQUATIONS FOR NON-PRESSURE
AXISYMMETRIC FILTRATION

R. M. BARSEGHIAN

S u m m a r y

The solution of non-linear differential equations for the non-pressure filtration theory is of a considerable mathematical difficulty. Therefore, various modes of linearization of these equations are in use. However, no strict substantiation of modes of linearization has been available so far.

The present paper describes the method of evaluating the errors in the modes of linearization, thus enabling to substantiate the applicability of a particular method in question.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Полубаринова-Кочина И. Я. () дебите скважин и безнапорном движении со слабо-проницаемым водоупором. Изв. АН СССР, ОТН. Мех. и машиностроение, 1960 № 3.
2. Белман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М. Изд. «Мир», 1968.

О Т З Ы В

на монографию О. М. Сапонджяна «Изгиб тонких упругих плит»
 (Ереван, Издательство «Айастан», 1975, 435 стр.)

Широкое применение тонких плит (пластинок) и оболочек в различных отраслях современной техники, авиастроения, ракетостроения и в строительном деле обуславливает непрерывающийся интерес ученых, инженеров и конструкторов к проблемам теории тонких плит и оболочек.

Имея в арсенале классический метод Колосова—Мусхелишвили, профессор О. М. Сапонджян разработал в своей монографии эффективные способы решения задач теории тонких плит применительно к ряду широких классов упругих изогнутых плит, в частности, к расчету полигональных, эллиптических, полуэллиптических и полукруглых плит.

Основу монографии составляют оригинальные исследования автора. Расстановка материала и изложение его выполнены на высоком научном уровне. Монография построена таким образом, что, не вдаваясь в суть построения способов, а имея перед собой строго обоснованные и легко используемые формулы, таблицы и графики, инженер-конструктор может в своей практической работе воспользоваться ими при рассмотрении той или иной задачи.

Монография состоит из семи глав.

В первых четырех параграфах первой главы приводятся основные определения и необходимые допущения, дифференциальные уравнения и контурные условия изгиба тонких упругих плит. При этом, основываясь на теореме единственности решения задачи теории упругости, дан исчерпывающий вывод контурных условий плиты. В пятом параграфе доказывается любопытная теорема, согласно которой, если в выражении прогиба свободно опертой плиты с произвольным контуром коэффициент Пуассона формально устремить к бесконечности, то получится выражение прогиба заделанной плиты. Центральное место в этой главе занимают результаты, приведенные в шестом параграфе. Здесь даются двусторонние приближения для задачи изгиба свободно опертой плиты. Прогиб свободно опертой плиты представляется в виде ряда по некоторому физическому параметру. Для неизвестных производящих функций получается система рекуррентных бигармонических краевых задач. Основываясь на минимальных принципах гармонических и субгармонических функций, автор очень изящно и строго доказывает сходимость решения. Затем установлены двусторонние приближения для прогиба, для контурного значения угла наклона упругой поверхности и для изгибающих моментов. Рассмотрена конкретная задача для эллипса.

В остальных параграфах, отклоняясь от традиционного пути, автор исследует ряд специфических вопросов применения аналитических функций комплексного переменного к теории изгиба тонких упругих плит.

Во второй главе изложен способ построения общего решения дифференциального уравнения упругой поверхности плиты при действии нагрузки, непрерывно распределенной по некоторой части области плиты (по площади круга, эллипса, эллипса и так далее). Представляет определенный интерес выведенные автором формулы, согласно которым прогиб свободно опертой многоугольной плиты при равномерно распределенной нагрузке по площади круга определяется по известному выражению прогиба той же плиты под действием сосредоточенной силы. Имеет важное прикладное значение общее решение задачи об изгибе плиты в случае, когда нагруженная и ненагруженная части плиты разделены прямой линией. Вторая глава завершается очень важным результатом о применении функций Грина в общем решении задачи изгиба плиты при нагрузке, равномерно распределенной по площади круга. Как видно из четвертой и пятой глав, это решение приводит к эффективным результатам.

Используя некоторые результаты предыдущих глав, в третьей главе решается ряд задач об изгибе эллиптической плиты, заделанной по всему контуру, и полуэллиптической плиты, заделанной по криволинейной и опертой по прямолинейным частям контура.

В четвертой главе приводится решение задачи об изгибе свободно опертой по контуру многоугольной плиты под действием нагрузки, равномерно распределенной как по площади круга, так и по всей площади многоугольника. Исследованы задачи об изгибе бесконечной полосы, правильного многоугольника и ромба. Исследовано поведение деформаций и напряжений в угловых точках контура. В этой главе существенным результатом является общий случай разложения в ряд отображающей функции Шварца—Кристоффеля. Эти результаты применены при решении ряда интересных конкретных задач.

В пятой главе методом Н. И. Мусхелишвили решены задачи об изгибе заделанной по контуру плиты при нагрузке, равномерно распределенной как по площади круга, так и по всей площади плиты при предположении, что область единичного круга конформно отображается на область плиты с помощью полинома.

Рассмотрено большое количество задач и примеров. Все эти задачи доведены до числовых результатов, представленных в виде таблиц и графиков, наглядно показывающих картину изменения необходимых механических величин.

Исследованию одной из сложных задач изгиба плит, а именно задачи изгиба свободно опертой по контуру эллиптической плиты, посвящена шестая глава. Здесь, опираясь на некоторые предыдущие результаты и пользуясь методом Н. И. Мусхелишвили, автор дает новое решение задачи об изгибе свободно опертой по контуру эллиптической плиты.

Методом дополнительных воздействий, близким по идее методу фиктивных нагрузок и компенсирующих нагрузок, в седьмой главе решен ряд задач об изгибе полукруглой плиты и круглой плиты, опирающейся вдоль одного из диаметров на упругую балку.

Следует отметить простоту и компактность изложения, достигнутые без ущерба научной строгости книги, удачность компоновки и продуманную логическую взаимосвязь глав.

В заключение отметим, что книга написана предельно ясно и на высоком теоретическом уровне. Нет сомнения, что она найдет многочисленных читателей не только у нас в стране, но и за ее пределами.

Несмотря на безусловную ценность рецензируемой книги нужно отметить и некоторые недочеты. В частности, монография снабжена не очень богатой библиографией, а также имеется некоторое количество опечаток, впрочем легко устранимых.

Отмеченные недочеты ни в какой мере не снижают ценности рецензируемой монографии. Следует приветствовать ее появление, являющееся ценным вкладом в научную и техническую литературу.

Член-корр. АН Аз ССР, чл. Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, доктор физ.-мат. наук, профессор

АМЕНЗАДЕ Ю. А.

Доктор физико-математических наук, профессор

САРКИСЯН В. С.