

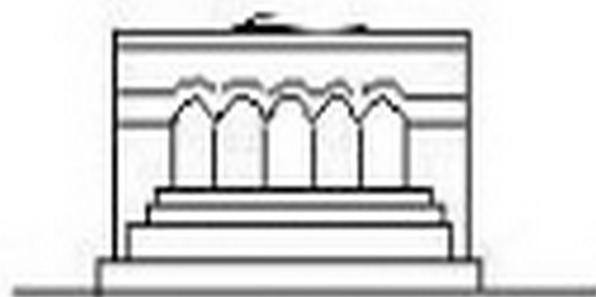
ՄԵՆԱՆԻՇՍ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1976

Տ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՅԱՆԻ

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК
 И ПЛАСТИН, ВЫПОЛНЕННЫЕ В АКАДЕМИИ НАУК
 АРМЯНСКОЙ ССР В ПЕРИОД С 1971 ПО 1975 гг.

Исследования в области теории оболочек и пластин, выполненные в Институте механики АН АрмССР в период 1971—1975 гг., охватывают различные направления. Выполнялись работы, представляющие интерес как с точки зрения общей теории, так и для приложений.

Исследования по общей теории пластин и оболочек приводились по двум основным направлениям, использующим а) метод гипотез, б) асимптотический метод.

В монографии [1] изложена общая теория анизотропных оболочек на основе метода гипотез. Приведена с достаточной полнотой теория Кирхгофа-Лива, основанная на классических допущениях. Построены две основные теории — итерационная и уточненная теории и их различные модификации. Показана применимость построенной теории для решения внутренней задачи анизотропной оболочки. Приведены многочисленные решения задач, интересных для приложений. Выявлены основные достоинства метода гипотез, который, будучи чрезвычайно наглядным, относительно просто приводит к окончательным результатам и прикладным рекомендациям. В монографии освещены общетеоретические и прикладные вопросы расчета на прочность, устойчивость и колебания анизотропных слоистых оболочек.

В работе [2] асимптотическим методом построен итерационный процесс, позволяющий определять внутреннее напряженно-деформированное состояние ортотропной пластины с наперед заданной асимптотической точностью. Разрешающее уравнение для исходного приближения этого процесса совпадает с уравнением, получаемым в теории Кирхгофа. Уравнение второго приближения практически совпадает с известным уравнением итерационной теории [1]. Показано, что различия между решениями по прикладным теориям и по трехмерной теории существенны вблизи краев и линий различного рода возмущений.

Не выходя за рамки привычных понятий классической теории, в [3] выведен асимптотически оптимальный вариант соотношений упругости для ортотропных оболочек

$$T_1 = 2h(B_{11}\epsilon_1 + B_{12}\epsilon_2) = A_1 m h$$

$$S_{12} = 2h B_{12}$$

$$M_1 = D_{11}\epsilon_1 + D_{12}\epsilon_2 = \left(\frac{D_{11}}{R_1} + \frac{D_{12}}{R_2} \right) (A_1 \epsilon_1 + A_2 \epsilon_2)$$

$$-D_{11} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \varepsilon_1 - \frac{1}{3} A_1 h^2 P_7$$

$$H_{12} = D_{66} \left(\tau - \frac{\nu}{2R_1} \right)$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3} h^3 B_{ik}, \quad A_1 = a_{13} B_{11} + a_{23} B_{12} = -\frac{E_1}{E_2} \frac{\nu_{12} + \nu_2 \nu_{23}}{1 - \nu_1 \nu_2}$$

т. ρ_7 — симметричные и антисимметричные компоненты внешней нормальной нагрузки.

Построен итерационный процесс, адекватный основным этапам расчета по безмоментной теории.

В работах [3, 4] установлена асимптотическая точность классической теории $\varepsilon = \max(\delta_1, \delta_2)$ в зависимости от показателя изменяемости напряженного состояния t и показателей анизотропии l_1, l_2

$$\delta_1 = \begin{cases} O(h_1^{2-t_1}) & \text{при } t < 1/2 \\ O(h_1^{2-4t-t_1}) & \text{при } t > 1/2 \end{cases}$$

$$\delta_2 = O(h_2^{2-2t-t_2}) \quad (h_2 = h R)$$

В [4] построен также итерационный процесс для расчета ортотропных оболочек с нулевой изменяемостью с учетом сдвигов в поперечных сечениях оболочки и нормального напряжения σ_z .

Для ортотропных прямоугольных пластин построен погранслои, позволяющий описать крайние напряженно-деформируемые состояния [5, 6]. Выведены трансцендентные уравнения, корни которых определяют зону затухания погранслоя.

В работе [7] выведены условия согласованности, необходимые для сращения решений внутренней задачи и погранслоя балок, пластин и оболочек. Установлена обобщенная ортогональность типа П. Ф. Павловича для функций, используемых в плоской задаче ортотропного тела.

Исследования по устойчивости и колебаниям тонких тел, имеющие значение для приложений, в основном, относились к вопросам устойчивости и колебаний анизотропных однородных и слоистых оболочек. Рассмотрен большой класс практически важных задач с выявлением специфических особенностей, выяснимых применением новых композиционных материалов при изготовлении элементов тонкостенных конструкций.

В работах [8, 9] рассмотрены задачи выпучивания слоистых анизотропных длинных пластин и цилиндрических панелей. На основе точных решений нелинейных задач исследуется послекритическое поведение пластин и оболочек. Показана возможность потери устойчивости пластины хлопком, а также возможность избежания хлопка соответствующим изменением расположения слоев.

В [10] рассмотрена задача устойчивости длинной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Показана независимость критической силы от угла между главными физическими и геометрическими направлениями.

Получены уравнения устойчивости и колебаний анизотропной пластинки с учетом начального плоского и изгибного состояний и с учетом влияния поперечных сдвигов [11]. На основе полученных уравнений показана необходимость учета начального изгибного состояния во многих задачах устойчивости и колебаний пластин. В частности, рассмотрены задача устойчивости опертой пластинки, находящейся под действием сдвигающих усилий на наружных плоскостях, и задача колебания балки, подверженной чистому изгибу.

В работах [12, 13] исследованы вопросы прочности пластин в закритической стадии. Показана возможность существенного увеличения несущей способности или уменьшения веса пластины путем допущения их работы в закритической стадии. Это обстоятельство имеет решающее значение при расчетах на прочность тонкостенных конструкций, имеющих сравнительно малые модули упругости и достаточно большие характеристики прочности.

Исследованы вопросы статической и динамической устойчивости оболочек с учетом моментности начального состояния [14—16]. В [14] получены уравнения устойчивости оболочки с учетом перерезывающей силы докритического состояния. На примере опертой арки, находящейся под действием внешнего давления, показано сильное влияние начальной перерезывающей силы на критическое значение внешнего давления. В работе [15] рассмотрена задача динамической устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки с учетом инерции докритического состояния. Показано существенное влияние инерции начального состояния на расположение области главного параметрического резонанса. Работа [16] посвящена постановке задачи динамической устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины.

Параметрическим колебаниям слоистой ортотропной цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, посвящена работа [17]. Показана возможность избежания параметрического резонанса путем варьирования анизотропии слоев оболочки.

В [18, 19] рассмотрена устойчивость упругой балки и цилиндрической оболочки при продольном ударе жесткой массой и при быстрых нагружениях. В отличие от существующих работ и этих работах учтены неоднородность напряженного состояния невозмущенного движения. Критическое время потери устойчивости определяется на основании теории устойчивости для конечного интервала времени.

В [20] определены собственные частоты цилиндрических оболочек открытых и замкнутых овальных сечений.

В [21] на основе деформационной теории пластичности рассматривается устойчивость пластинок с учетом влияния поперечных сдвигов в условиях продолжающегося нагружения.

Проводились исследования в сравнительно новой области теории оболочек и пластин — магнитоупругости тонких тел. В работах [22—23] методом совместного асимптотического интегрирования трехчленных уравнений электродинамики и теории упругости сформулированы гипотезы магнитоупругости для пластин и оболочек, находящихся во внешнем магнитном поле при отсутствии стороннего электрического поля. Гипотезы магни-

тнупругости тонких тел, наряду с гипотезами Кирхгоффа-Лява, предполагают неизменяемость по толщине оболочки тангенциальных компонент вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальной компоненты вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля.

Указанные гипотезы, позволяющие свести внутреннюю трехмерную задачу к двумерной, для пластинки аналитически запишутся следующим образом:

$$u_x = u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y, t)$$

$$e_x = \varphi(x, y, t), \quad e_y = \psi(x, y, t), \quad h_z = f(x, y, t)$$

Эти двумерные уравнения в частном случае задания внешнего магнитного поля $\vec{H} = (H_0, 0, 0)$ при предположении, что магнитная и диэлектрическая проницаемости материала пластинки равны единице и $u = v = 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\tau}{c} \left(\varphi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\tau}{c} \varphi &= -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} \\ D\Delta\Delta w + \frac{2\pi h^4}{3c} H_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) &- \frac{2\pi h^4}{3c^2} H_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2 \partial t} + \\ + \frac{2\pi h}{c} H_0 \left(\varphi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) &+ 2\pi h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, y, t) \end{aligned}$$

Здесь τ — проводимость материала пластинки, h_x^+ , h_x^- , h_y^+ , h_y^- — значения соответствующих компонент возбужденного магнитного поля на поверхностях пластинки $z = \pm h$, остальные обозначения общепринятые.

Как видно из уравнений, задача магнитоупругости остается все же трехмерной, так как и в двумерных уравнениях внутренней задачи присутствуют неизвестные величины h_x^+ , h_x^- , h_y^+ , h_y^- , требующие совместного рассмотрения трехмерных уравнений электродинамики в среде, окружающей тонкое тело.

В [22, 23] имеются также решения частных задач как на основе гипотез магнитоупругости, так и без их применения. Эти решения получены с целью дополнительного обоснования гипотез.

Гипотезы магнитоупругости тонких тел дали возможность исследовать ряд интересных задач по устойчивости и колебаниям пластин и оболочек в магнитном поле, решение которых весьма затруднительно без применения гипотез.

Получены как формулы, так и численные результаты, показывающие влияние магнитного поля и проводимости материала оболочки на частоту колебаний и на устойчивость [24—28].

Проведены многочисленные исследования по флаттеру пластин и оболочек в магнитном поле [29—33]. В [30] предложено обобщение известной «поршневой теории» на случай магнитогидродинамического течения при наличии продольного магнитного поля. Это обобщение при совместном применении гипотез магнитоупругости значительно упрощает исследование задач устойчивости пластин и оболочек в потоке проводящего газа в присутствии магнитного поля.

В работах [31—33] определены аналитические выражения для критических скоростей флаттера пластинки в случаях слабой и сильной электропроводности обтекаемого потока при действии поперечного или продольного магнитного поля.

В [34, 35] намечены два различных подхода к решению вопроса окончательного сведения трехмерных задач магнитоупругости к двумерным. В [34] предлагается способ определения электромагнитного поля во внешней области по неизвестным граничным условиям на поверхностях пластинки. В [35] для этой же цели делаются допущения о характере изменения возбужденного внешнего электромагнитного поля вблизи поверхностей пластинки.

Работы [36—41] посвящены исследованию поведения токонесущих пластин и оболочек в магнитном поле. В задаче колебаний токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле [36] показана возможность потери устойчивости пластинки. Полученная формула для определения критических значений напряженности магнитного поля и плотности электрического тока подтверждена экспериментом [37]. В [38] показана возможность потери устойчивости цилиндрической оболочки в магнитном поле протекающего по ней по направлению образующей электрического тока. Найдено значение критической плотности тока. В [39] на основе гипотез магнитоупругости выводятся уравнения магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки, несущей равномерно распределенный электрический ток. В [41] на основе этих уравнений рассмотрена частная задача термоупругой устойчивости токонесущей пластинки, подверженной джоулевым температурным напряжениям.

В работах [42—43] обсуждаются некоторые характерные специфические особенности, возникающие при постановке задач магнитоупругости.

Проведены исследования задач флаттера, статической и динамической устойчивости тонких тел, изготовленных из ферромагнитного материала [44—46]. Определены критическая скорость флаттера, критические значения напряженности магнитного поля и области динамической неустойчивости.

Опубликована обзорная статья [47], в которой приведен анализ результатов исследований по теории электромагнитоупругости тонких тел по 1973 г. и намечен дальнейший путь изысканий в этой области.

Кроме указанных основных направлений исследований по теории пластин и оболочек, выполнены также отдельные исследования, которые являются продолжением впервые начатых в Институте механики АН АрмССР исследований, в частности, разномодульной теории упругости, термоупругости слоистых анизотропных оболочек.

В работе [48] рассмотрен изгиб прямоугольной пластинки, изготовленной из разнотемпературного материала, моментами разных интенсивностей, действующих из взаимно перпендикулярных сторонах. Рассмотрены случаи моментов одинаковых и разных знаков. Приведены некоторые частные случаи, для которых получены окончательные формулы.

В работе [49] исследовано влияние переменного во времени температурного поля на свободные поперечные колебания пологой ортотропной оболочки.

Проведены также исследования, посвященные вопросам теории упруго-пластических оболочек и пластин [50, 51]. В [50] рассмотрен упруго-пластический изгиб защемленной по контуру круглой пластинки, несущей нагрузку, конусообразное распределение которой с течением времени при постоянной равнодействующей стремится к равномерному. Показано, что в упруго-пластическом случае во всей пластинке происходит только процесс разгрузки. В [51] в рамках безмоментной теории рассмотрена задача об упруго-пластическом деформировании оболочки эллиптического поперечного сечения при одном режиме сложного нагружения. Найдена область изменения давления и температуры, в которой не возникают новые пластические деформации.

В заключение автор выражает признательность сотрудникам отдела теории оболочек и пластин, в частности, А. А. Агаджяну, М. В. Белубекяну, А. А. Мовсисяну, а также ученому секретарю Института К. Б. Казариану за оказанную помощь при составлении настоящего обзора.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 13 II 1976

И. А. ԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ

1971-ԻՑ ԿՆԵՉԵՎ 1975 ԹԹ. ՀԱՅԿ. ՍՈՇ ԿԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱՆԿԵՆՈՒԱՅՈՒՄ ԲԱՆԱԿՆԵՐԻ ԵՎ ՍԱԼԵՐԻ ՏԵՈՐԻՅԱՆ
ԲԱՆԱԿԱՎՈՒԹՅՈՒՄ ԿԱՏԱՐՎԱԾ ՀԵՏԱԳՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ

Ա մ փ ո փ ո լ լ

Ս. Ա. Ամարցումյան հոդվածում քննարկվում են ՀԽՍՀ ԳԱ Անխանիկայի ինստիտուտում 1971-ից մինչև 1975 թթ. թաղանթների և սալերի տեսության տատարելում կատարված աշխատանքները, որոնք հիմնականում վերաբերվում են անիզոտրոպ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը, կալուսության և տատանումների խնդիրներին, բարակապատ մարմինների մագնիսա-առաձգականության տեսությունը:

THE INVESTIGATIONS IN THE THEORY OF SHELLS AND PLATES CARRIED OUT IN THE ACADEMY OF SCIENCES OF ARM. SSR DURING 1971-1975

S. A. AMBARTSUMIAN

S u m m a r y

The studies in the theory of shells and plates carried out at the Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of Arm.SSR during 1971—1975 are discussed in the survey.

The studies are mainly concerned with the general theory of anisotropic shells, the problem of stability and vibration, magnetoelasticity of thin bodies.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Наука, М., 1974.
2. Амбарцумян С. А. Об уравнениях изгиба анизотропных пластин. Сб. «Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок». Наука, М., 1970.
3. Агаджанян А. А. О некоторых соотношениях классической линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения. Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1972.
4. Агаджанян А. А. Об учете поперечных сдвигов при расчете ортотропных оболочек. Сб. «Тр. VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок». Наука, М., 1973.
5. Агаджанян А. А. О пограничных пластинок. Докл. АН АрмССР, т. LV, № 3, 1972.
6. Агаджанян А. А. О пограничных ортотропных пластинок. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 2, 1973.
7. Агаджанян А. А., Хачатрян Ш. М. Обобщенная ортогональность П. Ф. Папковича и условия существования заглушающих решений в плоской задаче для ортотропной подупоплаты. Докл. АН АрмССР, т. LX, № 3, 1975.
8. Гичин В. Ц., Микаелян Г. Э. Выпучивание длинных слоистых пластин и цилиндрических панелей. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 2, 1971.
9. Гичин В. Ц., Микаелян Г. Э. Об особенностях выпучивания длинных слоистых акцентрично закрепленных гибких пластинок. Сб. «Тр. VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок». Наука, М., 1973.
10. Багдасарян Г. Е., Гичин В. Ц. Об устойчивости анизотропной длинной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 1, 1973.
11. Мовсисян А. А., Пешгваладжян Д. В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVI, № 6, 1973.
12. Беллубекян Э. В., Гичин В. Ц. О прочности продольно сжатой прямоугольной пластинки в критической стадии. Докл. АН АрмССР, т. LIX, № 3, 1974.
13. Беллубекян Э. В., Гичин В. Ц. О прочности анизотропных слоистых пластин в критической стадии. Тезисы докладов Всесоюзной научно-техн. конференции «Проблемы механики конструкций из композиционных материалов», Челябинск, 1975.
14. Мовсисян А. А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Докл. АН АрмССР, т. LII, № 2, 1971.
15. Гичин В. Ц. Динамическая устойчивость моментного состояния цилиндрической оболочки с учетом инерции критического состояния. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 2, 1972.
16. Багдасарян Г. Е., Беллубекян М. В., Гичин В. Ц. Динамическая устойчивость моментного состояния цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью перемещ-

- ной глубины. «Колесания упругих конструкций с жидкостью» (Сб. научных докладов II симпозиума), Новосибирск, 1974.
17. Гкуни В. Ц., Коларян Р. С. Об одной оптимальной задаче динамической устойчивости лонетой ортотропной цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью. Сб. Тр. X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Тбилиси, 1975.
 18. Мовсисян А. А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 1, 1971.
 19. Мовсисян А. А. Устойчивость цилиндрических оболочек при быстрых нагружениях. Докл. АН АрмССР, т. LV, № 4, 1972.
 20. Мовсисян А. А., Саркисян В. Г. Колесания цилиндрических оболочек овального сечения. Изв. АН АрмССР, серия техн. наук, т. XXIV, № 2, 1971.
 21. Киракосян Р. М. Об устойчивости пластинок за пределами упругости с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVII, № 4, 1974.
 22. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
 23. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
 24. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. О колебаниях проводящих пластин в магнитном поле. МТТ, № 2, 1974.
 25. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. О колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 1, 1975.
 26. Багдасарян Г. Е. К теории колебаний и устойчивости проводящих пластин в продольном магнитном поле. Докл. АН АрмССР, т. LXI, № 1, 1975.
 27. Багдасарян Г. Е. О динамической устойчивости проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 2, 1975.
 28. Багдасарян Г. Е. О параметрических колебаниях проводящих пластин в продольном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 6, 1975.
 29. Аванкесян Г. Г. Флаттер анизотропной цилиндрической оболочки в потоке вязкоупругой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. Сб. трудов VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Наука, М., 1973.
 30. Багдасарян Г. Е. Об устойчивости проводящей цилиндрической оболочки в потоке проводящего газа в присутствии магнитного поля. Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1975.
 31. Багдасарян Г. Е. Об устойчивости упругих пластин в потоке проводящего газа при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 4, 1975.
 32. Багдасарян Г. Е. Устойчивость проводящей пластинки в потоке проводящего газа при наличии магнитного поля. Докл. АН АрмССР, т. LIX, № 2, 1974.
 33. Мкртчян П. А. Флаттер проводящей пластинки в потоке слабопроводящего газа при действии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 4, 1975.
 34. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Об уравнениях магнитоупругости тонких пластин. ПММ, т. 39, вып. 5, 1975.
 35. Белубекян М. В. К задаче колебаний токонесящих пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 2, 1975.
 36. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость токонесящей пластинки в поперечном магнитном поле. Докл. АН АрмССР, т. LVII, № 5, 1973.
 37. Овакян Р. Н., Косакян Ю. Ш., Мирзиросян Р. М. Экспериментальное исследование устойчивости токонесящей пластинки в магнитном поле. Изв. АН АрмССР, т. XXVII, № 6, 1974.
 38. Коларян К. Б. Колебания и устойчивость токонесящей цилиндрической оболочки. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVII, № 2, 1974.
 39. Белубекян М. В. К уравнениям магнитоупругости токонесящих пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVII, № 2, 1974.
 40. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. К задаче колебаний токонесящей пластинки-полосы. Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. 2, Кутаиси, 1975.

41. Бєлубєкян М. В., Казарян К. Б. К задаче термоупругой устойчивости токонесущих пластин. Прикл. механ., вып. 12, 1975.
42. Бєлубєкян М. В. Условия отсутствия электрического заряда в задачах электромагнитоупругости. Докл. АН АрмССР, т. LVI, № 5, 1973.
43. Бєлубєкян М. В. О некоторых особенностях задач магнитоупругости токонесущих пластин. Докл. АН АрмССР, т. LXI, № 2, 1975.
44. Багдасарян Г. Е., Бєлубєкян М. В. Устойчивость ферромагнитной пластинки в потоке газа при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 3, 1972.
45. Багдасарян Г. Е., Бєлубєкян М. В. Колебания и динамическая устойчивость цилиндрической оболочки в магнитном поле. Докл. АН АрмССР, т. LIV, № 4, 1972.
46. Мкртчян П. А. Устойчивость и колебания ферроупругой пластинки в переменном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 4, 1973.
47. Амбарцумян С. А. О некоторых вопросах развития исследований в области электромагнитоупругости тонких тел. Изв. АН СССР, МТТ, № 2, 1974.
48. Хачатрян А. А. Чистый изгиб прямоугольной пластинки, изготовленной из разномодульного материала. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 1, 1972.
49. Дурбарьян С. М. Свободные поперечные колебания полой ортотропной оболочки в переменном во времени температурном поле. Сб. «Тр. VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин». Наука, М., 1973.
50. Киракосян Р. М. Упруго-пластический осесимметричный изгиб круглой изоматериальной пластинки под действием распределенной переменной нагрузки. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 1, 1972.
51. Киракосян Р. М. Об одной упруго-пластической задаче оболочки лантанитического поперечного сечения. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVI, № 4, 1973.

Б. А. АБРАМЯН

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ, ПОЛУЧЕННЫХ АРМЯНСКИМИ
ИССЛЕДОВАТЕЛЯМИ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
И ПЛАСТИЧНОСТИ

В обзор включены работы по теории упругости и пластичности, которые были выполнены армянскими исследователями и опубликованы в научных изданиях АН СССР и Армянской ССР с 1971 года.

Пространственные задачи теории упругости

Несколько контактных задач о передаче нагрузки от балок-накладок и усиливающих тонких слоев к упругим телам исследовано в работах [1, 2]. Решены контактные задачи для полупространства, усиленного на своей граничной поверхности накладками малого поперечного сечения бесконечной, полубесконечной или конечной длины [1]. Решения этих задач сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям с ядрами, выражающимися полными эллиптическими интегралами первого и второго родов. В случае накладок бесконечной длины решение уравнения задачи строится при помощи преобразования Фурье. В двух других случаях решения уравнений осуществляются при помощи бесконечных систем линейных уравнений.

Исследована контактная задача о передаче кольцевой сосредоточенной горизонтальной нагрузки от бесконечной цилиндрической оболочки к бесконечному упругому сплошному цилиндру. При помощи преобразования Фурье построено замкнутое решение этой задачи. Установлены законы распределения касательных контактных напряжений и осевых напряжений в оболочке [2].

Задаче о передаче нагрузки от тонкой цилиндрической оболочки конечной длины к бесконечному упругому цилиндру посвящена работа [3]. Здесь решение задачи сведено к интегро-дифференциальному уравнению с сингулярным ядром. При помощи многочленов Чебышева первого рода решение этого уравнения строится в виде ряда, коэффициенты которого определяются из квазилинейной регулярной бесконечной системы линейных уравнений.

Одна неогесимметричная контактная задача для полупространства с жестким штампом исследовалась в работе [4]. Жесткий штамп с круглым основанием, сцепленный с полупространством, сдвигается вдоль поверхности полупространства силой, приложенной к штампу на некоторой высоте от поверхности полупространства. Решение этой задачи сведено к системе из двух интегральных уравнений второго рода относительно функций, определяющих контактные напряжения. Произведен анализ и сделаны выводы относительно характера распределения контактных напряжений.

Осесимметричная задача для полых, бесконечно длинной, толстостенной трубы, усиленной двумя жесткими втулками или бандажами на внешней поверхности, рассматривалась в работе [5]. Здесь получены формулы, позволяющие определить контактные напряжения под бандажами.

Две осесимметричные смешанные задачи для круглых цилиндров конечной длины рассматривались в работах [6, 7]. В первой работе исследована задача об изгибе толстой круглой плиты при смешанных граничных условиях. Во второй работе, в частности, исследовано растяжение круглого сплошного цилиндра конечной длины, имеющего в центральной части манетообразное ослабление. Решения этих задач сводятся к бесконечным системам линейных уравнений, которые разрешимы.

В работе [8] рассмотрена задача о цилиндрической трещине конечной длины в упругом пространстве, когда на боковой поверхности трещины действуют касательные силы. Задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, решение которого строится асимптотическим методом. Получены формулы для определения напряжений и предельной касательной нагрузки.

В двух работах [9, 10] рассматривались две задачи о кручении сферы, составленной из двух полушфер из различных материалов, сцепленных друг с другом полностью или частично с наличием экваториального кольцевого разреза [9], и одна смешанная осесимметричная задача для составного полупространства со сферической поверхностью раздела материалов [10].

Отметим еще, что осесимметричным задачам для составных цилиндров конечной длины посвящены работы [11, 12], в которых приведены результаты ряда расчетов.

Плоские (контактные и смешанные) задачи теории упругости

Из публикаций рассматриваемого периода большое число исследований посвящено контактной задаче о передаче нагрузок от накладок-креплений к упругим телам различного вида. Интерес к задачам такого рода обосновывается тем, что исследования в этой области могут способствовать разрешению ряда вопросов, связанных с проблемами судостроения и летательных аппаратов.

Некоторые контактные задачи для полуплоскости с упругими накладками рассматривались в работах [13, 14]. Здесь исследовалось действие двух накладок, полностью сцепленных с границей полуплоскости и принимающих нагрузку на себя [13], накладок, скрепленных с границей полуплоскости частично, при наличии под накладками незакрепленной зоны с одной стороны и с обеих сторон [14].

В этих исследованиях выделены особенности напряжений у скрепленного конца накладки и получен для напряжений конечный результат у закрепленной точки около частично скрепленной части. В этих исследованиях для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений предлагается эффективный метод со сведением решения к квазиполне регулярным бесконечным системам линейных уравнений (практически вполне ре-

гулярным), позволяющим для искомым величин получить оценки с любой степенью точности.

Рассмотрена также задача о вдавливании жесткого штампа в упругую полуплоскость, усиленную тонким покрытием. Решение этой задачи вначале сведено к системе из двух интегро-дифференциальных уравнений и далее к регулярным бесконечным системам линейных уравнений [15].

В другой работе при помощи преобразования Меллина построено замкнутое решение для задачи о передаче нагрузки от полубесконечного крепления к двум полубесконечным пластинам, соединенным креплением. Здесь определяются контактные, нормальные и касательные напряжения [16].

Для анизотропной полуплоскости с упругими накладками различные контактные задачи рассматривались в работе [17]. В двух рассмотренных задачах сингулярные интегро-дифференциальные уравнения получаются в ядрами Коши (случай двух накладок конечной длины) и Гильберта (в случае периодической задачи с двумя накладками в одном периоде). Здесь также в построенных решениях контактные напряжения представляются выражениями, в которых особенности напряжений у окрестности концов накладок содержится в явном виде.

Этими авторами рассматривались и другие контактные задачи о передаче нагрузок от накладок к анизотропным полуплоскостям [18—21]. В этих исследованиях установлено, что анизотропия среды существенным образом влияет на распределение контактных напряжений.

Одна контактная задача для полуплоскости с упругим включением конечной длины, расположенным вертикально к границе полуплоскости, когда нагрузка действует вдоль оси включения, рассматривалась в работе [22]. Для контактных напряжений численные результаты получены для случая, когда включение является абсолютно жестким.

Некоторые контактные задачи о передаче нагрузок от накладок или креплений к клиновидным упругим пластинам рассматривались в работах [23, 24]. В этих работах исследовались действия накладок на упругий клин и на клинья, расположенные с обеих сторон у накладки. Здесь также решения интегро-дифференциальных уравнений задач сподятся к бесконечным системам линейных уравнений, которые вполне регулярны или же квазиполне регулярны.

Некоторые контактные задачи для плоскости с круглым отверстием, когда отверстие имеет кольцевое усиление и когда оно усилено накладками на конечных отрезках своего контура, рассматривались в работах [25, 26]. Решения этих задач приводятся к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям. Для первой задачи получено замкнутое решение. Другие задачи сводятся к бесконечным системам линейных уравнений, регулярность которых исследуется. Численные результаты получены при помощи ЭВМ.

В другой работе рассмотрены контактные задачи для бесконечной пластинки с круговым отверстием, когда пластинка усилена системой накладок. Решения этих задач также получены упомянутым выше образом [27].

Распределение контактных напряжений вдоль линий соединения накладок-креплений с пластиной исследовалось также в работах [28, 29]. В первой работе рассмотрена бесконечная пластина с конечным числом одинаковых накладок конечной длины, расположенных в два ряда параллельно друг к другу. Во второй работе рассмотрена бесконечная пластина, усиленная большим числом периодически расположенных одинаковых накладок. При решении задач для функции, определяющей контактное напряжение, получается интегро-дифференциальное уравнение. Решение этого уравнения ищется в виде ряда по полиномам Чебышева. Коэффициенты же этого ряда определяются из квазилинейной регулярной бесконечной системы линейных уравнений.

Некоторые задачи о растяжении упругих прямоугольников, кромки которых полностью или частично усилены накладками, или ребрами жесткости, рассматривались в работах [30—32]. Решения задач сводятся здесь к бесконечным системам линейных уравнений, регулярность которых исследуется. Получены формулы для определения контактных напряжений.

Решение одной плоской задачи для прямоугольника с тонкостенным упругим включением дается в работе [33]. Еще одна задача для прямоугольной пластины, армированной упругим тонким включением из другого материала, рассмотрена в работе [34].

Ряд плоских смешанных и контактных задач для упругих однородных тел в форме прямоугольника, полосы и плоскости рассмотрен в работах [35—40]. В этих работах исследовались влияния различного вида разрезов, находящихся внутри упругих тел или идущих от границ, на распределение напряжений. Исследования велись методом сведения решений задач к системам парных рядов-уравнений с тригонометрическими функциями, которые в свою очередь сводились к бесконечным системам линейных уравнений. Рассматривались также некоторые контактные задачи о сжатии упругих прямоугольников жесткими штампами. В этих исследованиях определялись контактные напряжения под штампами.

Напряженное состояние полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом, когда на границе полуплоскости действуют симметричным образом приложенные нагрузка и штипы, исследовалось в работах [41, 42]. Рассматривалась также задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом, идущим от границы [43, 44]. В этих работах установлен характер особенности напряжений у корня разреза.

Одна несимметричная контактная задача для полуплоскости с вертикальным разрезом конечной длины рассмотрена в работе [45].

В работах [46, 47] рассматривались нового вида контактные задачи для двух прямоугольников, которые соединяются без сцепления и сжимаются жесткими штампами или силами с неизвестными зонами контакта. В рассмотренных задачах определяются зоны контакта, которые зависят от материалов прямоугольников, от их геометрических параметров и от способа приложения сжимающей нагрузки.

Расклинивание упругой полуплоскости узким жестким гибким клином треугольной формы, когда у вершины клина образуется трещина, рассматривалось в работе [48]. Решение задачи здесь сводится к сингулярному

интегральному уравнению первого рода, которое решается асимптотическим методом.

В работах [49—51] исследовались особенности напряжений около угловых точек линий раздела материалов в составном теле в плоской упругой и термоупругой задачах. Исследования приводятся к отысканию корня трансцендентного уравнения задачи с наименьшей положительной действительной частью, содержащего геометрические и физические параметры составного тела.

Исследованию характера напряженного состояния в окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела в условиях плоской задачи теории упругости посвящены также работы [52, 53], в которых приведены результаты ряда расчетов.

Плоской задаче деформации кольцевого сектора с одной защемленной радиальной стороной посвящена работа [54]. Решение этой задачи сведено к бесконечным системам линейных уравнений, которые квази вполне регулярны.

Две задачи теории трещины для областей с круговыми границами рассмотрены в работе [55]. Здесь исследовалась задача об одностороннем растяжении бесконечной упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием и имеющей две симметричные трещины, не выходящие на границу отверстия. Исследовалась также задача о находящемся под действием сжимающих сил круглом кольце, имеющем внутри два симметрично расположенных разреза. Решения этих задач сводятся к сингулярным интегральным уравнениям первого рода, которые решаются асимптотическим методом. Выведены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений на краях трещины.

Одна плоская смешанная задача термоупругости для прямоугольника, составленного из двух прямоугольников из различных материалов, рассмотрена в работе [56]. Здесь получены формулы для определения на контактной линии нормальных напряжений и перемещений.

В работе [57] указывается способ построения функций, конформно отображающих область кольца на некоторые двусвязные области. Этот результат может быть использован при решении ряда задач плоской теории упругости и пластичности.

Некоторым плоским задачам для круговой области, имеющей внутри прямолинейные разрезы, посвящены работы [58—60]. Решения рассмотренных задач методом использования функций комплексного переменного сведены к бесконечным системам линейных уравнений, которые или регулярны, или квази вполне регулярны. Вычисляются напряжения у края разреза.

В работе [61] рассмотрена одна контактная задача для эксцентричного кольца, сжимаемого вдоль своей оси симметрии двумя жесткими штампами. Решение этой задачи сведено к совокупности их 4-х бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается квази вполне регулярность полученных систем.

В двух других работах [62, 63] рассматривается плоская задача теории упругости для односвязных областей с угловыми точками при задан-

ных на границе напряжениях или перемещениях. Решения этих задач сводятся к интегральным уравнениям типа Шермана-Лауричеллы. Доказывается разрешимость полученных интегральных уравнений.

В одной работе [64] исследовалось вдавливание двух штампов в упругую полуплоскость с круговым отверстием. Решение задачи сведено к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое разрешимо.

В работе [65] для одной плоской задачи для ортотропной полосы построено однородное решение. Выведены условия, при которых в ортотропной полуплоскости, продольные стороны которой свободны от напряжений, под действием различных типов горцевых воздействий возникает затухающее напряженно-деформированное состояние.

В монографии [66], которая в основном посвящена применению новых методов для расчета полигональных, эллиптических, полуэллиптических и полукруглых плит, рассмотрен ряд специальных вопросов применения теории функций комплексного переменного и метода конформного отображения в теории изгиба плит. Результаты автора успешно могут быть использованы также для решения плоской задачи теории упругости для различных областей вышеупомянутого вида.

Динамические задачи

Некоторые динамические контактные задачи для полуплоскостей с упругими накладками рассматривались в работах [67—70]. Несколько известно автору данного обзора, подобные задачи ранее не рассматривались.

Здесь рассматривались для полуплоскости динамические контактные задачи, когда граница полуплоскости усилена накладками малой толщины: бесконечной, полубесконечной или конечной длины [67, 68]. Накладки возбуждаются изменяющимися в течение времени силами. Рассмотрены также задачи, когда от возбужденного крепления конечной или бесконечной длины возбуждение передается к двум полуплоскостям [69, 70]. При решении этих задач автор пользуется методами преобразования Фурье и Винера-Хопфа. В некоторых случаях решения исследуемых задач сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям или же к бесконечным системам линейных уравнений. В случае бесконечных накладок для перемещений и напряжений под накладками получены асимптотические формулы, в которых в явном виде выделены порции поверхностных волн, волн расширения и искажения. В случае накладок конечной длины решения задач сводятся к бесконечным системам линейных уравнений, которые квази вполне регулярны.

Несколько исследований посвящено задаче распространения упругих волн в электропроводящей среде при наличии внешнего магнитного поля.

В работе [71] исследуется распространение магнитоупругих волн в анизотропном полупространстве. Предполагается, что упругая среда является идеальным проводником, а внешнее магнитное поле постоянно и параллельно границе полупространства. Определяется зависимость распространения упругих волн от величины напряженности внешнего магнитного поля.

В двух других работах [72, 73] также исследуется изменение скоростей распространения волн в зависимости от величины магнитного поля и от угла между направлениями магнитного поля и движения волны.

Движение упругого полупространства и сплошной среды в магнитном поле под действием ударной нагрузки исследовалось в работах [74, 75]. В упругой слабонелинейной электропроводящей сплошной среде в каком-нибудь сечении допускается наличие малых возмущений в виде ударной нагрузки. Учитывается также вязкость среды. Выведены нелинейные уравнения для задачи и получены решения этих уравнений как для плоских волн, так и для случая наличия цилиндрической симметрии. Для случая полупространства, когда возмущение возникает при взрыве на поверхности полупространства, решение задачи ищется методом Смирнова—Соболева в виде интегралов, которые упрощены на фронтах полн.

Рассмотрена задача об определении параметров движения вязкотермомангнитоупругой среды при слабых ударных нагрузках вблизи окрестности фронтов полн [76]. Рассмотрена также общая задача об определении фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости для случая сосредоточенных импульсов [77]. Решение найдено методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа, а затем преобразовано к форме записи через аналитические функции.

Задача определения перемещений в упругой и магнитоупругой средах при наличии точечных импульсов в неограниченном пространстве рассматривалась в работе [78]. Здесь также решение найдено методом интегральных преобразований.

Еще одна плоская динамическая задача для анизотропной упругой среды при наличии прямолинейного разреза полубесконечной длины, когда на некотором расстоянии от начала разреза на обоих берегах разреза действуют сосредоточенные силы, рассматривалась в работе [79]. Задача решается методом Винера-Хопфа при периодических во времени граничных условиях.

Несколько осесимметричных задач о распространении упругих волн в однородном изотропном полупространстве, когда волны вызваны сильным взрывом на поверхности или бегущей по поверхности нормальной нагрузкой, рассматривались в работах [80—82]. Решения задач получены методом интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля. Рассмотрена также задача о распространении упругих волн в неограниченном упругом теле со сферической полостью, когда на поверхности полости давление задается осесимметричным образом [83].

Еще несколько задач о движении жесткого штампа со сверхзвуковой скоростью в цилиндрической полости упругой среды рассматривались в работе [84]. Здесь определяются напряжения и перемещения на поверхности цилиндрической полости.

Кручение призматических стержней

Некоторые задачи о кручении круглых призматических стержней, поперечные сечения которых имеют прямолинейные разрезы, перпендикулярные к радиусу круга, рассмотрены в работе [57].

Методом Д. И. Шермана в работе [85] задача о кручении бруса круглого сечения, ослабленного двумя продольными круговыми полостями, сводится к бесконечным системам линейных уравнений. В работе рассмотрен численный пример.

Несколько задач о кручении составных стержней круглого и секторального поперечного сечения с разрезами на радиальных линиях контакта материалов методом парных интегральных уравнений рассматривалось в работе [86].

Кручение круглого составного стержня, в поперечном сечении которого материалы разделяются дуговой линией, рассматривалось в работе [87].

В работе [88] рассматривалось кручение полого составного анизотропного призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса с внешней симметрично расположенной выточкой со стороны малой полуоси. Решение этой задачи сведено к бесконечным системам линейных уравнений, которые вполне регуляры. Приводится численный пример.

Отметим еще, что касательные напряжения в вершинах выступающих и входящих углов на контуре поперечного сечения анизотропного неоднородного стержня при кручении исследовались в работе [89]. Здесь определено влияние неоднородности, анизотропии, углов раствора на поведение касательных напряжений.

Большие деформации

По теории конечных упругих деформаций несколько задач для тел, составленных из различных материалов, рассматривалось в работах [90, 91]. Здесь рассматривалась задача о простом растяжении и симметричном расширении круглой цилиндрической трубы из несжимаемого материала. Исследован случай выворачивания наизнанку круглой цилиндрической трубы. Рассматривалась также задача о выпрямлении полой трубы до прямоугольного параллелепипеда.

В другой работе [92] для выражения связи между напряжениями и деформациями при больших деформациях предлагается пользоваться приближенным методом, который основан на идее кусочной линеаризации истинной связи в отдельных небольших участках.

Исследование [93] посвящено построению физических соотношений для тел, армированных волокнами, обладающими различной жесткостью при растяжении и сжатии. Построена система простых опытов для определения упругих постоянных.

Задачи теории пластичности

В одной работе [94] исследуются пластические деформации балки прямоугольного сечения, находящейся под действием сосредоточенной нагрузки, движущейся с большой скоростью от одного конца балки к другому. В другом исследовании [95, 96], на основе общих теорем теории упруго-пластических сред, доказываются некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тела при переменных внешних воздействиях. Еще в одной

работе [97] обобщаются минимальные принципы упруго-пластической краевой задачи для скоростей изменения напряжений и деформаций на случай нестационарных температурных полей.

В работе [98] на основе минимальных принципов краевых задач в термоупругой и термопластической постановках, получены некоторые неравенства, связывающие решения краевых задач, рассматриваемых отдельно в термоупругой и термопластической постановках.

В работе [99] исследовалось пластическое состояние толстостенной цилиндрической трубы из упрочняющегося несжимаемого материала, которая одновременно подвергается кручению, изгибу и осевому растяжению. Задача рассматривается для произвольного закона упрочнения материала. Решение задачи представляется в виде степенного ряда по малому физическому параметру. Сходимость этого ряда рассмотрена для случая кольцевой области и степенного закона упрочнения.

Такая же задача рассмотрена и для цилиндрических стержней произвольного профиля. Решение этой задачи строится в криволинейной ортогональной системе координат [100].

В другой работе [101] рассмотрена задача о пластическом кручении неполного тора. Такая задача встречается при исследовании напряженного состояния пружины с малым шагом при ее центральной сжатии. Решение задачи получено в торoidalной системе координат и представлено в виде степенного ряда по малому параметру. Сходимость ряда исследуется.

В работе [102] рассматриваются некоторые вопросы теории идеальной пластичности для изотропных тел, имеющих различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Получены основные уравнения и соотношения теории идеальной пластичности для тел с указанными свойствами.

Плоская контактная задача о соударении двух твердых тел при степенном законе связи между напряжениями и деформациями в рамках статической теории удара Г. Герца рассмотрена в работе [103]. Для конкретных форм поверхностей ударяемых тел получены основные механические характеристики теории удара в виде несложных формул.

Задаче о передаче нагрузки от степенно-упрочняющихся накладок к деформируемому основанию в виде полуплоскости, также из степенно-упрочняющегося материала, посвящены работы [104, 105]. Решения рассмотренных задач сводятся к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению при определенных граничных условиях. В этих работах полученное уравнение преобразуется в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна. Решение этого уравнения сводится к бесконечным системам нелинейных уравнений. Доказывается существование и единственность решения этой системы уравнений. Авторы в одной из работ рассмотрели численный пример и привели диаграммы для осевых и тангенциальных напряжений.

Отметим также работу [106], которая посвящена одной задаче теории вязкоупругости. Здесь исследовано нагружение бесконечной пластинки из вязкоупругого материала с эллиптическим отверстием. Нагрузка берется растягивающей, действие которой направлено по малой оси эллипса. Рассмотрен также случай всестороннего растяжения пластинки.

В заключение отметим еще работы [107, 108], которые посвящены единственности решений краевых задач в разномодульной теории упругости. В этих работах, исходя из энергетического принципа, доказывается, что краевые задачи разномодульной теории упругости имеют единственные решения.

С более ранними работами армянских исследователей по теории упругости и пластичности можно ознакомиться в обзорных статьях [109—111].

Данный обзор, безусловно, не является полным и автор просит извинения, если он упустил некоторые важные работы рассматриваемого периода.

Институт механики АН
Армянской ССР

Получила 13 II 1976

Վ. Լ. ԱՅՐԱՄՅԱՆ

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՈՒՍՈՒՄԵՆԱՍԻՐՈՂՆԵՐԻ ԿՈՂՄԻՑ ԱՌԱՋԳԱԿՈՆՈՒԹՅԱՆ
ԵՎ ՊԸԱՍՏԻՎՈՒԹՅԱՆ ՏՆՈՒԹՅԱՆ ԲԵՏԳԱՎԱՅՈՒՄԻՆ ՍՏԱՏՎԱԾ
ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՐԻՅՈՒՆՔՆԵՐԻ ՈՂԱԾԻՆ

Ա թ փ ո փ ո ռ ի մ

Ավանդույթը ընդգրկվել էն առաձգականության և պլաստիկության տեսության հարցերին նվիրված այն աշխատանքները, որոնք կատարվել են հայկական աստամաթրոզների կողմից և տպագրվել են ՍՍՀՄ ԳԱ և ՀՍՍՀ գիտական հրատարակչություններում 1971 թվականից:

SOME RESULTS OBTAINED BY ARMENIAN INVESTIGATORS IN THE FIELD OF THE THEORY OF ELASTICITY AND PLASTICITY

V. L. ABRAMIAN

S u m m a r y

The studies on the theory of elasticity and plasticity carried out by Armenian investigators and published in the scientific editions of the Academies of the USSR and Armenian SSR are included in the survey.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, успешно решены новыми выкладками. ПММ, т. 36, № 5, 1972.
2. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Контактная задача для упругого бесконечного цилиндра, усиленного бесконечной цилиндрической оболочкой. Со «Избранные проблемы прикладной механики», посвященный 60-летию академика В. Н. Челомея, М., 1974.

3. Саркисян С. О. Передача нагрузки от тонкой цилиндрической оболочки конечной длины к бесконечному упругому цилиндру. Докл. АН АрмССР, т. 60, № 3, 1975.
4. Абрамян В. А. Certain Asymmetric Contact Problems for Semi-space. Proceedings of IUTAM symposium, Ed. by A. D. de Peter and J. J. Kalker, University Press, Delft, 1975.
5. Мелконян А. П. Осесимметричная задача полого бесконечного цилиндра с двумя насаженными дисками. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 5, 1972.
6. Мелконян А. П. Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 2, 1971.
7. Мелконян А. П., Бабаян А. А. Об одной осесимметричной контактной задаче для цилиндра конечной длины. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 3, 1973.
8. Спиркин В. X. Цилиндрическая трещина в упругом пространстве. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 4, 1974.
9. Нишян Ю. С. О двух задачах, связанных с кручением составной сферы. Докл. АН АрмССР, т. 32, № 1, 1971.
10. Нишян Ю. С. О смешанной осесимметричной задаче для составного полупространства. Докл. АН АрмССР, т. 33, № 1, 1972.
11. Мартиросян З. А. О контактных напряжениях осесимметрично-нагруженного полого составного цилиндра. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 4, 1973.
12. Мартиросян З. А. Исследование некоторых вопросов трещинообразования на поверхности контакта составного цилиндра. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 3, 1974.
13. Арутюнян Н. X., Мхитарян С. М. Some Contact Problems for a Semi-plane with Elastic Stiffeners. Trends in Elasticity and Thermoelasticity; Witold Nawaicki Anniversary V. Wolters-Noordhoff Publ., 1971.
14. Арутюнян Н. X., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 2, 1972.
15. Арутюнян Н. X., Мхитарян С. М. Контактная задача о вдавлении штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. ПММ, т. 39, № 5, 1975.
16. Арутюнян Н. X., Мхитарян С. М. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинах, соединенных полубесконечной упругой накладкой. Сб. Механика деформируемых тел и конструкций, посвященный 60-летию академика Ю. Н. Работнова. Изд-во «Машиностроение», М., 1975.
17. Саркисян В. С., Овсепян А. О. О двух контактных задачах для анизотропной полуплоскости с упругими накладками. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 1, 1973.
18. Саркисян В. С., Овсепян А. О. Контактная задача для анизотропной полуплоскости с упругими накладками. Докл. АН АрмССР, т. 52, № 5, 1971.
19. Саркисян В. С., Овсепян А. О. Периодическая контактная задача для анизотропной полуплоскости с упругими накладками. Докл. АН АрмССР, т. 53, № 2, 1971.
20. Саркисян В. С., Овсепян А. О. Об одной контактной задаче для двух анизотропных полуплоскостей, соединяющихся по границам упругой накладкой конечной длины. Докл. АН АрмССР, т. 57, № 4, 1973.
21. Овсепян А. О. Периодическая контактная задача для анизотропной полуплоскости с двумя упругими накладками. Ученые записки ЕрГУ, № 3, 1972.
22. Абрамян В. А. Об одной контактной задаче для полуплоскости. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.
23. Гуляй К. Г. О двух плоских контактных задачах для канна с накладками. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.
24. Гуляй К. Г. Передача нагрузки от стержня конечной длины к двум канновидным упругим телам. Докл. АН АрмССР, т. 59, № 4, 1974.
25. Нишян Ю. С. Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на своей границе упругими накладками. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 1, 1974.
26. Шагинян С. С. Передача нагрузки от кольцевой накладки к плоскости с круговым отверстием. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.

27. Шатилян С. С. Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной системой упругих накладок. Докл. АН АрмССР, т. 59, № 3, 1974.
28. Атаян К. А. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.
29. Атаян К. А. Периодическая контактная задача для бесконечной пластины с упругими накладками. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 3, 1975.
30. Микаелян В. В. О двух задачах растяжения упругого прямоугольника упругими накладками. Докл. АН АрмССР, т. 56, № 4, 1973.
31. Микаелян В. В. Об одной задаче растяжения прямоугольника с упругими накладками. Докл. АН АрмССР, т. 58, № 1, 1971.
32. Микаелян В. В. Об одной задачегиба упругого прямоугольника с упругим тонким включением. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 2, 1975.
33. Хачикян А. С. Плоская задача теории упругости для прямоугольника с тонкостенным включением. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 4, 1971.
34. Садкисян В. Г., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние предварительно напряженного прямоугольника. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, № 1, 1973.
35. Мергян А. М. Плоская задача для полки с нецентральными разрезами. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 2, 1971.
36. Еббоян А. А., Мергян А. М. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 5, 1971.
37. Еббоян А. А., Мергян А. М. Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 5, 1971.
38. Еббоян А. А., Мергян А. М. Равновесие прямоугольника, ослабленного крестообразными разрезами. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 4, 1971.
39. Еббоян А. А., Гурджоян Н. О. Плоская задача теории упругости для прямоугольника со смешанными граничными условиями. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 2, 1973.
40. Гуфаян П. О. Об одной контактной задаче теории упругости для прямоугольника. ДМ, 9, № 4, 1975.
41. Точоян В. С., Мелконян С. А. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 4, 1971.
42. Точоян В. С., Мелконян С. А. О симметричной вдавливания двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость с вертикальным полубесконечным разрезом. Докл. АН АрмССР, т. 57, № 5, 1973.
43. Точоян В. С., Мелконян С. А. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 3, 1972.
44. Мелконян С. А. Контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Докл. АН АрмССР, т. 55, № 2, 1972.
45. Точоян В. С., Микаелян А. Ф. Несимметричная контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Докл. АН АрмССР, т. 61, № 5, 1975.
46. Еббоян А. А., Мелконян М. Г. О контакте двух прямоугольников с определенной области контакта. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 5, 1971.
47. Мергян А. М., Мелконян М. Г. Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 3, 1975.
48. Сарджян В. Х., Галаджева Н. Р., Сметанин Б. И. О расклинивании упругой полуплоскости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 2, 1971.
49. Чобанян К. С., Алексанян Р. К. Термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 5, 1971.
50. Чобанян К. С., Гелоркян С. Г. Поведение поля напряжений около угловой точки линии разреза в задаче плоской деформации составного тела. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 5, 1971.
51. Алексанян Р. К. Термоупругие напряжения составной полуплоскости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 4, 1971.

52. Аветисян А. Г. Исследования характера напряженного состояния в частично заделанной окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 5, 1972.
53. Аветисян А. Г., Чобанян К. С. Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 6, 1972.
54. Арутюнян Р. А. Плоская деформация кольцевого сектора с одной заделанной радиальной стороной. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 6, 1973.
55. Сиррунян В. Х. Две задачи теории трещин в областях с круговыми границами. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 3, 1971.
56. Мелконян М. Г. Об одной плоской контактной задаче термоупругости для составного прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 1, 1972.
57. Сапожжик О. М. Построение конформно отображающих функций для некоторых двусвязных областей с применением к задаче кручения. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 1, 1971.
58. Заргарян С. С., Эфиаджян Р. А. Равномерно растянутая круглая пластинка с радиальной трещиной. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 2, 1972.
59. Эфиаджян Р. А. Равномерно растянутая круглая пластинка с прямолинейной щелью, перпендикулярной к радиусу. Докл. АН АрмССР, т. 52, № 3, 1971.
60. Заргарян С. С., Эфиаджян Р. А. Плоская задача теории упругости для круга с радиальным разрезом. Докл. АН АрмССР, т. 54, № 3, 1972.
61. Заргарян С. С. Об одной контактной задаче для эксцентрического кругового кольца. Докл. АН АрмССР, т. 52, № 5, 1971.
62. Заргарян С. С. Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе внешних силах. Докл. АН АрмССР, т. 60, № 1, 1975.
63. Заргарян С. С. Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных по границе смещениях. Докл. АН АрмССР, т. 60, № 3, 1975.
64. Александрян М. А. Вдавливание двух штампов в полуплоскость с круглым отверстием. Докл. АН АрмССР, т. 53, № 1, 1971.
65. Азнаворян А. А., Хачатрян Ш. М. Обобщенная ортогональность Н. Ф. Полюжича в условии существования затухающих решений в плоской задаче для ортотропной полуплоскости. Докл. АН АрмССР, т. 60, № 3, 1975.
66. Сапожжик О. М. Нагиб тонких упругих плит. Изд. «Анаган», Ереван, 1975.
67. Григорян Э. Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими наклдами. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.
68. Григорян Э. Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. ПММ, т. 38, № 2, 1974.
69. Григорян Э. Х. Передача гармонической сосредоточенной силы от стержня бесконечной длины к двум упругим полуплоскостям. Докл. АН АрмССР, т. 59, № 5, 1974.
70. Григорян Э. Х. Динамическая задача для двух полуплоскостей, соединенных между собой упругой накладкой конечной длины. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 6, 1971.
71. Бадасарян Г. Е., Давоан Э. Н. Распространение упругих волн в анизотропном полупространстве при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 2, 1972.
72. Давоан Э. Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеальном проводящем изотропном среде. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 5, 1971.
73. Давоан Э. Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих колебаний от точечного источника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 1, 1975.
74. Аванян Ж. О., Вагдасян А. Г. Решение задачи о движении упругой среды в магнитном поле под действием ударной нагрузки. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 1, 1973.
75. Аванян Ж. О., Вагдасян А. Г. Движение упругого полупространства под действием ударной волны в магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 3, 1973.

76. Багдасян А. Г. Уравнения нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 1, 1974.
77. Багдасян А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 1, 1974.
78. Багдасян А. Г., Мартиросян А. Н. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 3, 1974.
79. Мартиросян А. Н. Решение некоторых нестационарных задач для анизотропной среды. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 1, 1975.
80. Саакян С. Г. Динамическая задача для границы упругого однородного изотропного полупространства при сильном ударе на поверхности. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 5, 1973.
81. Саакян С. Г. Волны в упругом полупространстве, вызванные бегущей осесимметричной нормальной нагрузкой. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 1, 1974.
82. Саакян С. Г. О неустановившемся движении поверхности упругого полупространства. Докл. АН АрмССР, т. 58, № 2, 1974.
83. Саакян С. Г. О распространении упругих волн при наличии осевой симметрии. Докл. АН АрмССР, т. 57, № 1, 1973.
84. Апикиан Ж. Г. Движение жесткого штампа в цилиндрической полости в упругой среде со сверхзвуковой скоростью. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 4, 1973.
85. Сароян С. Р. Кручение бруса круглого кольцевого сечения, ослабленного двумя продольными цилиндрическими круговыми полостями. Докл. АН АрмССР, т. 55, № 1, 1972.
86. Арцгулян А. А. Некоторые задачи кручения составных стержней. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 1, 1971.
87. Арцгулян А. А., Чабанян К. С. Кручение круглого составного стержня. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 4, 1972.
88. Саркисян В. С., Овсепян А. О. Кручение полого составного анизотропного призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса с выточкой. Ученые записки ЕрГУ, ест. н., № 3, 1971.
89. Нишанян Ю. С., Сиркисян В. С. О касательных напряжениях при кручении неоднородных анизотропных стержней. Сб. ЕрГУ «Молодой научный работник», серия ест. наук, № 2 (20), 1974.
90. Мкртчян Р. Е. Большие упругие деформации несжимаемого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 1, 1972.
91. Мкртчян Р. Е. Большие упругие деформации изгиба и удлинения части трубы из материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 1, 1972.
92. Мкртчян Р. Е. Кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями при больших деформациях. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 3, 1973.
93. Мкртчян Р. Е. Закон упругости для армированных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 6, 1975.
94. Киракосян Р. М. Упруго-пластический динамический изгиб несвободной балки под действием движущегося сосредоточенного груза. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 2, 1971.
95. Киракосян Р. М. Теорема о приспособляемости тел в переменном внешнем воздействии при произвольном упрочнении материала. Докл. АН АрмССР, т. 52, № 4, 1971.
96. Киракосян Р. М. Некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тела при переменных внешних воздействиях. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 6, 1971.
97. Киракосян Р. М. Минимальные принципы и некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тел при нестационарных силовых и температурных воздействиях. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 2, 1973.

98. Киракосян Р. М. О связи между решениями краевой задачи в термоупругой и термапластической постановках, когда пластические свойства материала зависят от температуры. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 4, 1975.
99. Задоян М. А. Пластическое состояние толстостенной цилиндрической трубы при совместном кручении и изгибе. Докл. АН АрмССР, т. 56, № 4, 1975.
100. Задоян М. А. Задача о пластическом состоянии цилиндрических стержней при совместном изгибе и кручении. Со. статей «Механика деформируемых тел и конструкций», посвященный 60-летию академика Ю. Н. Работнова. Изд. «Машиностроение», М., 1975.
101. Задоян М. А. Пластическое кручение непланого тора. Докл. АН СССР, с. 223, № 2, 1975.
102. Саркисян М. С. К теории идеальной пластичности тел, материал которых неравному сопротивляется растяжению и сжатию. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 4, 1972.
103. Шелли А. А. О соударении двух твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Докл. АН АрмССР, т. 59, № 4, 1974.
104. Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян А. О. Периодическая контактная задача для полуплоскости со степенно упрочняющимися накладками. Ученые записки Ереван. ун-та, сер. ест. наук, № 2, 1975.
105. Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян А. О. О передаче нагрузки от степенно упрочняющейся накладки к деформируемому основанию. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 5, 1975.
106. Вермишян Г. Б. Распределение температуры в пластинке с эластическим откликом на вязко-упругого материала под действием вибрационной нагрузки. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 5, 1975.
107. Хачатрян А. А. О единственности решения задачи в разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 6, 1972.
108. Хачатрян А. А. Единственность решения в разномодульной теории упругости. Докл. АН АрмССР, т. 56, № 4, 1973.
109. Абрамян Б. Л., Манцьян М. М. Механика. Сб. «АН АрмССР за 25 лет». Изд. АН АрмССР, Ереван, 1968.
110. Абрамян Б. Л., Задоян М. А. *Մեխանիկայի վիճակագրական տեսությունը. Պատմորիկական առաջնություն*. Наука в Армении за 50 лет, на арм. языке. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1972.
111. Абрамян Б. Л. Обзор результатов, полученных по контактным задачам в Академии наук Армянской ССР. Сб. «Контактные задачи и их приложения», докл. конференции. Изд. НИИМАШ, М., 1969.

К. С. КАРАПЕТЯН

О ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТВИ

В 1947—1949 годах разработана наиболее общая теория ползучести для стареющих материалов, в частности, для бетонов — теория упруго-ползучего тела [1]. Эта теория, которая была обобщена в монографии [2], получила всеобщее признание как у нас в Советском Союзе, так и за рубежом. Теоретические и экспериментальные исследования в этой области в Армянской ССР стали проводиться систематически с 1955 г., когда при АН АрмССР был создан Институт математики и механики, а при нем — специальная лаборатория ползучести и прочности материалов. Проведенные за 20 лет в этой лаборатории (которая с 1971 г. находится при Институте механики АН АрмССР) и других научно-исследовательских институтах, а также в высших учебных заведениях Армянской ССР исследования в области ползучести материалов сыграли важную роль в дальнейшем совершенствовании теории ползучести и в практическом применении. Сегодня Армянская ССР по праву считается одним из научных центров по этим исследованиям. За последние 5 лет в Армянской ССР состоялись Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона, а также Первый и Второй Всесоюзные симпозиумы по реологии грунтов.

В данной статье приводится краткий обзор теоретических и экспериментальных исследований в области теории ползучести, которые были выполнены учеными Армении за последние 5 лет.

Теоретические исследования

В работе [3] исследованы вариационные задачи теории ползучести бетона при решении статически неопределимых температурных задач. Обобщено вариационное уравнение Кастильяно для нелинейно-ползучей среды, находящейся в условиях высоких температур, с учетом температурных изменений упруго-мгновенной деформации и меры ползучести бетона. Дано конкретное применение теоремы Кастильяно для статически неопределимых балочных систем и, в частности, обобщен метод введения добавочной силы с учетом свойства ползучести материала. Выведено смешанное вариационное уравнение нелинейной теории ползучести, когда варьируются одновременно напряженное и деформированное состояния.

Использованием вариационных принципов теории ползучести бетона Маслова—Арутюняна разработана методика расчета железобетонных статически определимых и неопределимых конструкций [4—5]. Обобщена формула Кастильяно для выражения обобщенного перемещения железобетонной балки, когда учитывается наследственная ползучесть бетона.

Для иллюстрации применения полученных формул решен ряд конкретных задач строительной механики с учетом наследственной ползучести бетона.

В работе [6] исследована устойчивость гибких оболочек в условиях линейной ползучести. Уравнение равновесия пологой гибкой цилиндрической панели при поперечной равномерно распределенной нагрузке q сведено во втором приближении (несимметричная форма) по методу Бубнова—Галеркина к трем системам, каждая из которых состоит из четырех дифференциальных уравнений первого порядка по переменной t (время), разрешенных относительно производных. Задача определения критической нагрузки $q_{кр}$ решается на основе теории устойчивости движения Лиувилля, что доставляет необходимые и достаточные условия устойчивости в виде восьми алгебраических неравенств, содержащих частные решения при $t \gg T$ (T — сколько угодно большое число) упомянутых систем дифференциальных уравнений, соответствующих заданным фиксированным значениям q .

В работе [7] рассматриваются пологие гибкие оболочки (цилиндрические, двойной кривизны — прямоугольные в плане, сферические) при поперечной равномерно распределенной нагрузке q . На числовых примерах показана весьма важная характерная особенность работы гибких конструкций в условиях ограниченной ползучести, заключающаяся в том, что перемещения существенно возрастают с увеличением q .

Получено решение задачи в составных экспоненциально-неоднородных полосах, находящихся под действием теплового потока и взаимно-уравновешивающих нагрузок на ограниченном участке их стенок [8]. Путем представления функции Эйри в виде интеграла Фурье в комплексной форме задача сведена к решению системы 16 линейных алгебраических уравнений относительно функций, определяющих напряжения и перемещения.

В работе [9] в рамках теории пластической наследственности изучается напряженное состояние в полый сфере и во вращающейся трубе, находящейся в тепловом потоке, при действии давлений на поверхности. Задача сведена к уравнениям, для решения которых предложен видоизмененный метод последовательных приближений с численными иллюстрациями.

В монографии [10] излагаются методы решения задач кручения однородных и неоднородных тел постоянного и переменного сечения, находящихся в условиях неустановившейся ползучести, с учетом переменной во времени модуля мгновенной деформации материала. Нелинейные задачи решены методом малого параметра. Дано доказательство сходимости этого метода. Решения задач доведены до расчетных формул и числовых результатов.

В работе [11] доказывается, что решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления при двух участках контакта сводится к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений. Дается решение этих уравнений. Рассматривается случай кососимметричного нагружения двух тел и одновременно указывается метод решения задачи в случае симметричного нагружения.

В работе [12] доказывается, что решение плоской периодической контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления сводится к сов-

местному решению связанных между собой двух интегральных уравнений. Дается решение этих уравнений, когда не учитываются силы сцепления.

Экспериментальные исследования

В работах [13, 14] приведены результаты исследования ползучести бетона при постоянных и ступенчато-возрастающих растягивающих напряжениях с учетом фактора старения бетона. Исследования показали, что и при растяжении зависимость между напряжениями и деформациями ползучести бетона вообще нелинейна. Однако, до определенного уровня напряжения, которое зависит от возраста бетона в момент загрузки, нелинейность деформаций ползучести незначительна и поэтому можно принять, что практически имеет место линейная ползучесть.

На основании этих опытов установлено также, что длительное растяжение в зависимости от уровня напряжения и возраста бетона в момент длительного нагружения может привести как к снижению, так и к повышению прочности и модуля деформации бетона на растяжение [15].

В 1957 г. в Институте механики АН АрмССР впервые было установлено, что бетон в отношении прочности, модуля деформации и деформаций ползучести является существенно анизотропным материалом. Благодаря анизотропии в большинстве случаев прочность призм при испытании перпендикулярно слоям бетонирования меньше, а деформации больше, чем при испытании призм параллельно слоям бетонирования. Дальнейшие систематические исследования показали, что бетон анизотропен и в отношении прочности, модуля деформации и деформаций ползучести при растяжении. На основании этих исследований в СН и П 11—В.1—62* (Строительные нормы и правила) для учета анизотропии примененной прочности и прочности бетона при изгибе введен специальный коэффициент условий работы.

Учитывая важное научное и практическое значение этого вопроса, исследования анизотропных свойств бетона продолжают. В работах [16, 17] приводятся результаты исследования влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть керамзитобетона при сжатии и растяжении. Показано, что с увеличением возраста бетона к моменту испытания степень анизотропии керамзитобетона по прочности, модулю деформации и деформаций ползучести увеличивается, а с увеличением размеров поперечного сечения бетонного элемента — уменьшается. Установлено также, что водонасыщение старого бетона приводит к уменьшению его степени анизотропии по прочности и модулю деформации [18].

В работе [19], посвященной исследованию прочности, деформативности и ползучести бетона при сложном напряженном состоянии — растяжении с последующим кручением, установлено, что при данном напряженном состоянии растягивающее напряжение приводит к существенному увеличению деформаций ползучести сдвига (когда $\sigma_p/R_p = 0.3$, почти в два раза). При этом, если касательное напряжение не превышает половины предела прочности бетонных труб на кручение, то зависимость между касательными напряжениями и деформациями ползучести линейна.

В существующих теориях ползучести бетона принято, что ползучесть бетона не зависит от знака напряжения, то есть меры ползучести бетона при сжатии и растяжении равны. Однако, согласно исследованиям [20], отношение меры ползучести бетона при растяжении (C_p) к мере ползучести бетона при сжатии ($C_{сж}$) зависит от большого количества факторов и может быть меньше, равно и намного больше единицы. С увеличением сечения бетонного элемента $C_p/C_{сж}$ увеличивается, а с увеличением возраста бетона в момент длительного нагружения — уменьшается. При изолированных образцах $C_p/C_{сж}$ существенно больше, чем при изолированных образцах. Отношение $C_p/C_{сж}$ в большой мере зависит и от направления растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования.

В работе [21] приводятся результаты исследования влияния длительных постоянных и ступенчато-возрастающих сжимающих нагрузок на прочность и деформативность бетона. Показано, что в зависимости от возраста бетона и уровня напряжения в момент длительного нагружения длительное сжатие может привести как к снижению, так и к увеличению модуля деформации бетона при сжатии. Влияние длительного сжатия зависит также от режима нагружения образцов на ползучесть.

В работе [22] впервые показано, что при свободном влагообмене со средой общезвестная закономерность — уменьшение ползучести бетона при сжатии с увеличением сечения бетонного элемента, сохраняется не всегда. При невысокой влажности среды образцы небольших сечений в результате высыхания до нагружения могут существенно утратить способность к ползучести, поэтому сначала с увеличением размеров поперечного сечения бетонного элемента до некоторого размера ползучесть увеличивается, а затем с дальнейшим увеличением сечения — уменьшается.

Исследована ползучесть бетона при постоянных и ступенчато-возрастающих сжимающих напряжениях в зависимости от возраста в момент нагружения [23]. Установлено, что при ступенчато-повышающих напряжениях предел применимости принципа наложения воздействий в большой степени зависит от возраста бетона в момент нагружения. Для бетона, нагруженного в молодом возрасте, этот принцип справедлив в пределах условной линейной ползучести, а со старением бетона этот предел повышается до уровня напряжения, соответствующего $R_{акт}$. Показано, что для лучшего описания кривых ползучести коэффициенты α и β в функции напряжения теории нелинейной ползучести необходимо принять переменными, зависящими от длительности нагружения и возраста бетона.

В работе [24] приводятся результаты исследования влияния многократно повторной нагрузки на прочность, деформативность и ползучесть бетона в зависимости от базы испытания. Показано, что предварительное воздействие многократно повторной нагрузки приводит к уменьшению последующей ползучести бетона под длительной сжимающей нагрузкой (при базах испытания 70000 и 140000 циклов соответственно на 20 и 23%).

Исследовано также влияние длительного растяжения на прочность и деформативность бетона при растяжении в зависимости от масштабного фактора [25]. Установлено, что длительное растяжение приводит к сниже-

нию прочности на растяжение при последующем испытании бетона кратковременной нагрузкой, причем этот эффект зависит от масштабного фактора. Отмечено влияние длительного растяжения на модуль деформаций бетона.

Исследованию обратимости упруго-мгновенных деформаций и деформаций ползучести после разгрузки длительно обжатого бетона посвящена работа [26]. Показано, что с увеличением сечения бетонного элемента обратимые упруго-мгновенные деформации и деформации ползучести уменьшаются. Обратимость деформаций образцов, испытанных перпендикулярно слоям бетонирования, больше, чем образцов, испытанных параллельно слоям бетонирования.

В работе [27] рассматриваются результаты исследования прочности и деформаций цилиндрических бетонных оболочек при кручении с последующим сжатием. Установлено, что при кручении с последующим сжатием предварительное кручение не оказывает влияния на прочность цилиндрических бетонных оболочек на сжатие и кривая интенсивностей деформаций простого напряженного состояния — чистого сжатия, одновременно представляет кривую интенсивностей деформаций данного сложного напряженного состояния. В работе показано также, что бетон является разномодульным материалом. Исследована также ползучесть бетона при кручении с сжатием и показано, что при этом крутящий момент не оказывает влияния на продольные деформации ползучести, а с увеличением сжимающего напряжения деформации ползучести сдвига увеличиваются [28].

Работа [29] посвящена исследованию поперечных деформаций ползучести бетона. Установлено, что коэффициент поперечной деформации ползучести $\theta_2(t, \tau)$ в некоторый период после длительного нагружения больше, чем коэффициент поперечной деформации под кратковременной нагрузкой $\theta_2(\tau)$. С дальнейшим увеличением длительности нагружения $\theta_2(t, \tau)$ уменьшается до величины $\theta_2(\tau)$.

В работе [30] приведены результаты исследования усадки и ползучести легкого бетона на литондной пемзе в зависимости от некоторых технологических факторов. Авторы пришли к выводу, что все технологические факторы, способствующие уменьшению расхода цемента и воды, способствуют также уменьшению усадки и ползучести бетона. Этому же вопросу посвящена работа [31].

Влияние масштабного фактора на ползучесть изолированных бетонных балок исследовано в работе [32]. Установлено, что масштабный фактор оказывает существенное влияние на ползучесть сжатой зоны изолированных бетонных балок — с увеличением высоты балки деформации ползучести уменьшаются.

В течение 1971—1975 гг. проведена определенная работа и в области реологии глинистых грунтов. Исследования реологических свойств глинистых грунтов велись по трем основным направлениям: закономерности компрессионной и сдвиговой ползучести, термоползучести и виброползучести глинистых грунтов.

В работе [33] разработан новый метод определения семейства кривых ползучести при простом сдвиге испытанием трех образцов-близнецов. Ис-

исследована компрессионная ползучесть третичных и четвертичных глин естественного сложения приреванского района и установлено влияние геологического возраста и степени увлажненности на ползучесть [34]. Исследовано также разянтне во времени бокового давления плотной глины естественного сложения в зависимости как от величины нагрузки, так и от режима нагружения [35].

В работе [36] рассмотрен вопрос об использовании аппарата теории наследственной ползучести Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна для прогноза деформации во времени маловлажных просадочных грунтов, чувствительных к воздействию воды. Установлены закономерности ползучести и получены соотношения, в рамках указанной выше теории ползучести, для деформации формоизменения (сдвига) глинистых грунтов естественного сложения с учетом важнейшего для них фактора — изменчивости плотности-влажности под действием уплотняющих нагрузок [36—38].

В работе [39] установлена ранее неизвестная в механике грунтов закономерность деформации глинистых грунтов при сдвиге — независимость сдвиговой ползучести от состояния плотности-влажности (уплотняющего напряжения) в случае их определения при одинаковых значениях относительного касательного напряжения.

В работах [40, 41] приведены результаты разработки новой методики определения компрессионной термоползучести глинистых грунтов. Исследована компрессионная термоползучесть насыщененных глинистых грунтов при низких и высоких температурах [42—44]. В этих работах получены соотношения для записи закона компрессионной ползучести с учетом температурных эффектов многих характерных разновидностей глинистых грунтов естественного сложения. Для учета влияния температуры использовано понятие функции температуры, аналогичной функции старения теории наследственной ползучести и функции состояния в теории ползучести глинистых грунтов. Осуществлена проверка и доказана применимость (с той или иной степенью точности) теорий старения, упрочнения и наследственной ползучести для аппроксимации процессов деформирования во времени грунтов при переменных температурах и напряжениях. Установлены также закономерности и получены соотношения для аппроксимации деформации ползучести при сдвиге с учетом температурных эффектов [45, 46].

В работах [47—49] исследована виброползучесть глинистых грунтов и получены выражения мер ползучести, учитывающие влияние амплитуды и частоты колебаний на этот вид деформаций.

В 1971 г. впервые на армянском языке создано учебное пособие для вузов по лабораторным работам механики грунтов [50]. Кроме этого, опубликована монография, в которой обобщены работы последних лет, выполненные автором и его коллегами в области ползучести, термоползучести и виброползучести глинистых грунтов [51].

Проведена определенная работа и в области исследования ползучести металлов. В работе [52] получено, что в первых двух стадиях высокотемпературной ползучести ступенчатое уменьшение температуры приводит к существенному временному замедлению процесса ползучести, причем деформации, соответствующие первой стадии ползучести, оказываются необра-

жимыми при изменении температур. В связи с этим предложено видоизмененное нелинейно-наследственное уравнение, в общем правильно описывающее ползучесть при переменных температурах.

В работе [53] изучен вопрос адекватности влияния изменения напряжения и температур на явление высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали в первых двух стадиях в сравнении с предсказаниями теории упрочнения Малинина-Хажинского и видоизмененного уравнения наследственности на основе схемы Эндрейда в форме логарифмической аппроксимации. Получено, например, что уменьшение напряжения, сопровождающееся повышением температуры, приводит к временной обратной ползучести, наиболее точно предсказываемой теорией Малинина-Хажинского.

Высокотемпературная ползучесть хромо-никелевой стали в третьей стадии изучалась в работе [54]. Предложено феноменологическое операторное уравнение, с успехом описывающее деформации с возрастающей скоростью как при ступенчатом нагружении, так и при убывании действующих нагрузок.

В работе [55] приводятся результаты исследования высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали в третьей стадии при различных программах неравномерно-циклического приложения напряжений. Экспериментально подтвержден тезис о независимости скорости деформации ползучести в третьей стадии от наличия и продолжительности отдыхов, который вытекает из предложенного автором операторного уравнения. Построено обобщенное уравнение одноосной ползучести, учитывающее частичную обратимость деформаций, запаздывающую пластичность, а также 2-ю и 3-ю стадии ползучести, и дано экспериментальное подтверждение этого уравнения для случая многоступенчатых изменений напряжений.

В области полимерных композиционных материалов продолжались экспериментальные исследования прочности (статической и циклической) и ползучести стеклопластиков.

Исследована анизотропия усталостной прочности стеклопластика типа СВМ в зависимости от асимметрии цикла напряжений при осевой деформации [56]. Исследования показали, что под воздействием длительного нагружения в стеклопластике происходит изменение степени анизотропии усталостной прочности, зависящее от типа связующего, укладки волокон в композите, вида деформации и долговечности материала.

В работах [57, 58] исследована анизотропия статической и циклической деформативности стеклопластиков и ее влияние на разогрев. Установлено, что разрушение неизменно сопровождается повышением температуры до определенного значения при фиксированных условиях испытаний, зависящего только от свойства анизотропии, причем деформации также достигают своих критических величин, которые определяются видом деформации и свойством анизотропии материала.

Анизотропия усталостной прочности пластика в зависимости от вида деформации изучалась в работе [59]. Установлено, что прочность пластика при пульсирующем растяжении ниже, чем при сжатии, независимо от анизотропии. Изучение влияния термической обработки на усталостные свойства

тия нетканного стеклопластика привело к выводу, что она качественно не меняет кинетики циклической деформативности и разогрева, а в количественном отношении приводит к некоторому снижению усталостной прочности [60].

В работе [61] приводятся результаты исследования влияния предварительного пульсирующего растяжения на ползучесть при растяжении, а также на характер зависимости напряжение—деформация и предел прочности стеклопластика при кратковременном статическом растяжении. Показано, что модуль упругости при этом снижается примерно на 20%, а предел прочности — на 30%.

В работе [62] установлено, что при резонансном режиме нагружения стеклопластика типа СВМ его несущая способность исчерпывается при определенном и менее начальном значении частоты нагружения независимо от приложенного напряжения. Такое изменение в определенной мере служит количественной мерой повреждаемости материала. С этой точки зрения выявлено различие в характере разрушения стеклопластика в направлении армирования и в диагональном направлении.

Исследованию особенностей разогрева стеклопластика типа СВМ посвящена работа [63]. Показано, что высокотемпературный режим возникает тогда, когда в условиях высокой температуры разогрева происходят физико-химические превращения или же когда допускаются даже небольшие искажения в силовом режиме нагружения.

В работе [64] приводятся результаты исследования анизотропии выносливости ортогонально армированных стеклопластиков при циклическом перегибе. Исследования показали, что стеклошпаны на бутвар-фенольном связующем обладают относительно большей деформационной выносливостью, чем стеклошпаны на эпокси-фенольном связующем, а увеличение частоты перегиба не меняет характера усталости.

Работа [65] посвящена вопросу прогнозирования долговечности стеклопластиков по опытным данным механических свойств при кратковременном статическом нагружении. Для оценки малоциклового усталостного прочностного свойства стеклопластиков автором предложена зависимость $\sigma_{cr} = \sigma_{ст} N^{-0,05}$, где σ_{cr} — предел кратковременной прочности материала, N — число циклов до разрушения. Установлено удовлетворительное совпадение расчетных данных с имеющимися экспериментальными результатами.

В работе [66] приводятся результаты исследования влияния «отдыха» на ползучесть стеклопластиков типа СВМ. Установлено, что для принятого режима циклического нагружения (24 часа — нагрузка, 24 часа — «отдых») влияние «отдыха» тесно связано как с ориентацией образца, так и с величиной нагрузки.

Влияние нарушения структуры пластины СВМ на ее прочностные свойства изучалось в работе [67]. Под структурой в данном случае подразумевается заданное соотношение продольных и поперечных волокон пластины, которым в конечном счете определяются механические свойства пластины. Установлено, что нарушение порядка укладки стеклошпонов при составлении пакета приводит к нарушению заданного соотношения волокон пластины и к существенному изменению прочности стеклопластика.

В работе [68] исследована неоднородность линейного напряженного состояния при одноосном растяжении в окружном направлении (то есть при экспериментах на внутреннее давление) тонкостенных трубчатых образцов из стеклопластиков. Показано, что неоднородность напряженного состояния возникает в результате сил трения между уплотнительными кольцами, установленными в образце для создания замкнутого объема, и стенками образца. Неучет этих сил может привести к искажению действительной картины напряженного состояния.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 17 II 1976

Կ. Ս. ԿԱՐՊԵՏՅԱՆ

ՍՈՂԲԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԲՆԱԿԱՎԱՌՈՒԹՅԱՆ ԵՎ
ՓՈՐՁԱԿԱՆ ՈՐՈՒԹՅԱՆ ԹԵՐԻՅԱԿՈՆԵՑՈՒԹՅԱՆ ԵՐԱՄՈՆ

Ս. Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ավանդույթը բնորոշվել է սոզրի տեսության հարցերին նվիրված տեսական և փորձնական աշխատանքները, որոնք կատարվել են հայկական աստիճանափոխների կողմից և տպագրվել են ՍՍՀՄ և ՀՍՍՀ պիտական հրատարակություններում 1971 թվականից:

ON THE THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS IN THE THEORY OF CREEP

K. S. KARAPETIAN

S u m m a r y

The theoretical and experimental studies on the theory of creep carried out by Armenian investigators and published in the USSR and Armenian SSR are included in the survey.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Докл. АН АрмССР, т. 7, № 5, 1947.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
3. Зедоян М. А. Вариационное уравнение Кастильяно нелинейно-наследственной теории ползучести. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 5, 1972.
4. Зедоян М. А. О применении вариационных методов теории ползучести при расчете статически неопределенных железобетонных конструкций. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, т. 27, № 1, 1971.
5. Зедоян М. А. Применение вариационных методов теории ползучести при расчете железобетонных элементов. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, т. 28, № 3, 1975.

6. Григорян Г. С. К устойчивости пологих гибких оболочек в условиях линейной ползучести. Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати Институтом механики АН АрмССР, Ереван, 1974.
7. Григорян Г. С. К линейной ползучести гибких оболочек. Сб. Трудов Ерев. политех. ин-та, т. 26, 1975.
8. Симонян А. М. О плоской температурной задаче неоднородных составных слоев. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 4, 1971.
9. Симонян А. М. О некоторых температурных задачах теории пластической наследственности. Прочность и пластичность. Наука, М., 1971.
10. Минцкян М. М. Кручение тел с учетом ползучести. Изд. ЕрГУ, Ереван, 1972.
11. Минцкян М. М. Плоская контактная задача теории ползучести с учетом сил сцепления. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 5, 1973.
12. Минцкян М. М. Плоская периодическая контактная задача теории ползучести с учетом сил сцепления. Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати Институтом механики АН АрмССР, Ереван, 1974.
13. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Исследование зависимости между напряжениями и деформациями ползучести при растяжении. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 5, 1971.
14. Котикян Р. А. Ползучесть бетона при постоянных и ступенчато-возрастающих растягивающих напряжениях. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 1, 1973.
15. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние длительного растяжения на прочность и деформативность бетона. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 6, 1971.
16. Карапетян К. С., Мамедов А. Р. Влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона. Тр. совещания институтов строительных материалов и оборудования закавказских республик, Баку, 1971.
17. Мамедов А. Р., Котикян Р. А., Карапетян К. С. Исследование анизотропии прочности, модуля деформации и деформации ползучести керамзитобетона в зависимости от масштабного фактора. Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати Институтом механики АН АрмССР, Ереван, 1974.
18. Карапетян К. С. Изменение физико-механических и анизотропных свойств бетона при его ползучести. Докл. АН АрмССР, т. 57, № 2, 1973.
19. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Прочность, деформативность и ползучесть бетона при растяжении с кручением. Бетон и железобетон, № 2, 1973.
20. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Исследование отношений мер ползучести бетона при растяжении, сжатии и кручении. Механика твердого тела, № 5, 1972.
21. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние длительных постоянных и ступенчато-возрастающих сжимающих нагрузок на прочность и деформативность бетона. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 3, 1972.
22. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона. Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати Центральным управлением НПО строительной индустрии, М., 1974.
23. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Исследование ползучести бетона при постоянных и ступенчато-возрастающих сжимающих напряжениях. Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати Центральным управлением НПО строительной индустрии, М., 1974.
24. Карапетян К. С. Влияние многократно повторной сжимающей нагрузки на прочность, деформативность и ползучесть бетона в зависимости от числа циклов нагружения. Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати ЦНИИС Минтрансстроя СССР, М., 1971.
25. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние длительного растяжения на прочность и деформативность бетона в зависимости от масштабного фактора. Второе Всесоюз-

- ное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати ЦНИИС Минтрансстроя, М., 1974.
26. Кзылалсян К. С., Котикян Р. А., Шиладжян Р. М. Исследование обратимости деформаций после разгрузки длительно обожатого бетона. Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати Институтом механики АН АрмССР, Ереван, 1974.
 27. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Исследование прочности и деформаций цилиндрических бетонных оболочек при кручении с последующим сжатием. Докл. АН АрмССР, т. 59, № 1, 1974.
 28. Котикян Р. А. Ползучесть бетона при кручении со сжатием. Труды юбилейного совещания применения композиционных материалов в строительстве. Хабаровск, 1975.
 29. Петров В. И., Бильчичко А. В., Котикян Р. А. О коэффициенте поперечной деформации ползучести бетона. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 1, 1975.
 30. Симонов М. Э., Саркисян Р. Р., Лихарян Н. А. Влияние технологических факторов на усадку и ползучесть легкого бетона на антодидной шпальте. Научные сообщения АИСМ, вып. 16, 1972.
 31. Симонов М. Э. Технологические факторы регулирования усадки и ползучести бетонов. Второе Всесоюзное совещание по проблемам ползучести и усадки бетона. Доклады совещания, подготовленные к печати Институтом механики АН АрмССР, Ереван, 1974.
 32. Вартамян Г. В. Влияние масштабного фактора на ползучесть пазлированных бетонных балок. Сб. трудов АИСМ, вып. 23, 1974.
 33. Месчян С. Р. Метод определения кривых ползучести глинистых грунтов при сдвиге. Докл. АН АрмССР, т. 52, № 4, 1972.
 34. Галстян Р. Р., Месчян С. Р. Исследование компрессионной ползучести глины при переванского района. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 6, 1972.
 35. Месчян С. Р., Малакян Р. М. К вопросу о боковом давлении глинистых грунтов. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 5, 1974.
 36. Месчян С. Р. Об одной возможной форме описания процесса деформирования мало-влажных и просадочных грунтов во времени. Труды первого Всесоюзного симпозиума по реологии грунтов. Изд. ЕрГУ, Ереван, 1972.
 37. Месчян С. Р. К вопросу об описании кривых ползучести глинистых грунтов при сдвиге. Изв. ВУЗов, Строительство и архитектура, № 4, 1974.
 38. Месчян С. Р. Деформации ползучести простого сдвига глины при изменении ее состояния. Изв. ВУЗов, Строительство и архитектура, № 11, 1974.
 39. Месчян С. Р., Бадалян Р. Г. Влияние состояния грунта на деформации ползучести при сдвиге. Гидротехническое строительство, № 8, 1975.
 40. Галстян Р. Р., Месчян С. Р. Метод определения кривых компрессионной термолзучести водонасыщенных грунтов. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 1, 1971.
 41. Галстян Р. Р., Месчян С. Р. Практический метод определения кривых ползучести компрессионной термолзучести водонасыщенных глинистых грунтов. Основания, фундаменты и механика грунтов, материалы 3-го Всесоюзного совещания. Изд. Будивильника, Киев, 1971.
 42. Галстян Р. Р., Малакян Р. П., Месчян С. Р. Исследование термолзучести водонасыщенного глинистого грунта при одномерном сжатии. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 3, 1971.
 43. Месчян С. Р., Галстян Р. Р. Исследование компрессионной ползучести глинистого грунта с учетом температурных воздействий. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 4, 1972.
 44. Месчян С. Р. Исследование компрессионной термолзучести грунта при высоких температурах. Изв. ВУЗов, Строительство и архитектура, № 11, 1973.
 45. Месчян С. Р., Тер-Степанян Г. Н., Галстян Р. Р. Исследование ползучести глинистых грунтов при сдвиге. Труды к 8-му Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. Стройиздат, М., 1973.

46. Месчян С. Р., Галстян Р. Р. Исследование ползучести глинистого грунта при сдвиге с учетом температурных эффектов. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 2, 1973.
47. Ахназарян Н. Г., Месчян С. Р. Об исследовании виброползучести грунтов. Докл. АН АрмССР, т. 52, № 1, 1971.
48. Месчян С. Р., Ахназарян Н. Г. Исследование виброползучести подонасыщенного глинистого грунта. Тр. координационного совещания по гидротехнике, вып. 50. Изд. «Энергия», Л., 1973.
49. Месчян С. Р., Ахназарян Н. Г., Галстян Р. Р. Некоторые вопросы исследования ползучести и виброползучести глинистых пород при одномерном сжатии. Вопросы теоретической и экспериментальной геологии горных пород, вып. 3. Изд. «Наукова думка», Киев, 1971.
50. Месчян С. Р. Руководство к лабораторным работам по механике грунтов (на армянском языке). Изд. «Лупс», Ереван, 1971.
51. Месчян С. Р. Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения. Изд. «Недра», М., 1971.
52. Симонян А. М. Исследование ползучести стали X18H10T при переменных температурах. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 2, 1972.
53. Симонян А. М. К вопросу неизотермической ползучести хромоникелевой стали. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 6, 1972.
54. Симонян А. М. Исследование ползучести стали X18H10T при больших деформациях. Приблизы прочности, № 6, 1975.
55. Симонян А. М. Исследование высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали в условиях ступенчатых изменений напряжения. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 4, 1974.
56. Саркисян Н. Е. Анизотропия усталостной прочности стеклопластиков типа СВМ. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 2, 1971.
57. Саркисян Н. Е. Анизотропия статической и циклической деформативности стеклопластиков типа СВМ. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 3, 1971.
58. Саркисян Н. Е. Влияние анизотропии на циклическую деформативность и разогреп слоистых пластиков типа СВМ. Механика полимеров, № 5, 1971.
59. Саркисян Н. Е. Анизотропия усталостной прочности ортогонально армированного стеклопластика. Тезисы докладов 2-ой Всесоюзной научно-технической конференции «Проблемы механики конструкций из композиционных материалов», Челябинск, 1975.
60. Саркисян Н. Е. О влиянии термической обработки на усталостные свойства некачанного стеклопластика. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 5, 1972.
61. Саркисян Н. Е. О влиянии предварительного циклического нагружения на статическую прочность и деформативность стеклопластика. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 26, № 1, 1973.
62. Саркисян Н. Е. Выносливость и деформативность ориентированного стеклопластика при высокой загрузке. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 27, № 6, 1974.
63. Саркисян Н. Е. Об особенностях разогрепа стеклопластика СВМ при испытаниях на малоцикловую усталость. Механика полимеров, № 3, 1975.
64. Саркисян Н. Е., Саркисян М. М. Сопротивляемость ортогонально армированных стеклопластиков циклическому перегибу. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 3, 1975.
65. Саркисян Н. Е. К вопросу прогнозирования малоцикловой усталостной прочности стеклопластиков. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 4, 1975.
66. Мартиросян М. М. О влиянии отдыха на ползучесть стеклопластика СВМ. Механика полимеров, № 3, 1974.
67. Мартиросян М. М. Влияние точности сборки пакета на прочность пластины СВМ. Межвузовский сб. научных трудов, сер. 19, вып. 1, Ереван, 1974.
68. Мартиросян М. М. Об экспериментальном исследовании труб из стеклопластиков. Заводская лаборатория, № 3, 1975.

А. Г. БАГДОЕВ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ГИДРОМЕХАНИКЕ. ПРОВЕДЕННЫЕ
 В АРМЯНСКОЙ ССР В ПЕРИОД 1971—1975 гг.

За рассматриваемый период с 1971 по 1975 гг. проводились исследования по ряду направлений теоретической и прикладной гидромеханики.

А. М. Мхитаряном, А. С. Аюпяном и М. Г. Дагестанян написана монография [1], в которой приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований в области испарения и конвективного теплообмена в атмосфере. В работе излагаются результаты исследования влагообмена в зоне аэрации и испарения с поверхности суши при глубоком и высоком стоянии уровня грунтовых вод. На основании проведенных асимметрических исследований в течение ряда лет выведена формула зависимости испарения грунтовых вод от уровня их залегания в виде

$$E = E_0 e^{-\sigma z}$$

Здесь E — расход грунтовых вод на испарение и влагообмен в зоне аэрации, E_0 — испаряемость, z — глубина стояния уровня грунтовых вод, σ — размерный параметр.

Для расчета испарения введена формула

$$E = (r + \bar{A}) \exp \left[-b(T_{\text{max}} - T)^2 \right]$$

Здесь \bar{A} и b — некоторые параметры, $(r + \bar{A})$ — максимально возможное испарение при температуре $T = T_{\text{max}}$.

Эта формула позволила рассчитать суммарное испарение с рассматриваемой территории.

Во второй части работы излагаются результаты теоретических исследований влияния различных факторов в процессе испарения и конвективного оттока тепла, турбулентного обмена в вертикальном и горизонтальном направлениях, процесса влаго- и теплообмена в постановке нелинейной нестационарной задачи о локальной атмосферной циркуляции над температурно-неоднородной подстилающей поверхностью. На этой основе можно оценить точность тех полумпирических и полутеоретических формул, которые широко применяются на практике для расчета испарения.

А. М. Мхитаряном и А. С. Саакяном [2, 3] рассмотрены вопросы, связанные с определением коэффициента турбулентного обмена в различных условиях. При этом используется соотношение для коэффициента интегрального обмена в виде

$$D = \frac{r \frac{du}{dz}}{\ln \frac{z}{z_0}}$$

где u — скорость ветра, z — высота, l — длина пути смещения, а также другое выражение для D , получаемое с помощью уравнения теплового баланса. Показано на хорошее совпадение значений D по обеим формулам и выведена путем обработки результатов вычислений экспоненциальная зависимость D от высоты. Полученные соотношения использованы для определения коэффициента турбулентного обмена

$$P = C_p D \Delta T$$

где C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, ΔT — перепад температур. Эти результаты позволили изучить вопросы, связанные с определением контуров теплового баланса [4].

Р. М. Барсегином [5] изучена фильтрация жидкости с произвольным числом водоносных слоев.

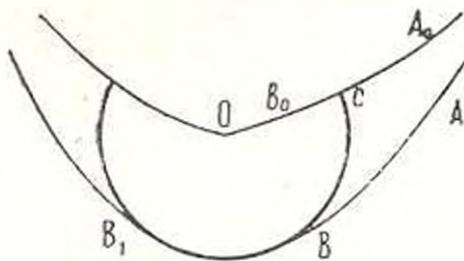
Г. А. Бабаджаняном и Л. Е. Даниеляном рассмотрена задача неустановившегося движения реального газа в трубе с проницаемыми стенками [6]. Система уравнений движения газа приводится к нелинейному уравнению параболического типа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{\xi}{4\eta g R T} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\alpha P}{r_0}} \sqrt{\frac{4\xi}{g R T} \frac{\partial P}{\partial x}}$$

где $P = p^2$, $p(x, t)$ и T — давление и температура газа, ξ — коэффициент сопротивления стенки, скорость отсоса $v = \alpha p$, δ — гидравлический радиус, r_0 — радиус трубы, R — газовая постоянная. Формулируется задача о начальных и граничных условиях, причем начальное условие получается из решения задачи стационарного движения газа. Решение указанного уравнения определяется численными методами.

Г. А. Бабаджаняном рассмотрена изотермическая задача о движении реального газа при наличии уклона трассы [7]. Та же задача при наличии нестационарности после линеаризации решена в [8]. Приведены кривые распределения давления скорости и расхода газа по длине. Стационарное неизотермическое движение рассмотрено в [9]. Нестационарное неизотермическое течение рассмотрено Л. Е. Даниеляном [10] методом конечных разностей.

А. Г. Багдоевым исследована окрестность точек (линий) касания волны AB (фиг. 1) заданного профиля с точечной или дифракционной вол-



Фиг. 1.

ной CBV , для произвольной линейной гиперболической системы уравнений [11]. Для произвольной граничной задачи и произвольного числа волн

можно сформулировать эквивалентную задачу о начальных условиях для каждой волны в виде

$$u_i = a_i (\zeta^i)^2 (s)^2, \quad a_i = S_i^n a^0 \text{ при } t = 0 \quad (1)$$

где S_i^n есть начальное значение собственного вектора S_i системы уравнений, u_i — компоненты искомого вектора, $\zeta = 0$ дает уравнение $A_0 B_0$ или начального положения волны AB , s — координата вдоль $A_0 B_0$, a_i , λ , β — постоянные.

Решение для уравнений с постоянными коэффициентами находится методом преобразования Фурье, а для уравнений с переменными коэффициентами — с помощью формулы Грина и формы лучевого решения в окрестности характеристического коноида и имеет вид $u_i = S_i u$, причем в области позади волны CBV_1

$$u = \frac{a^0 \Phi}{V^2} \zeta^{-(\lambda+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\lambda+1) c_0^{\frac{1}{2}}}{(k_1 - k_2)^{\frac{1}{2}}} 2^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} \times \\ \times (1 - \tau_0)^{\lambda+\beta+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\lambda+\frac{3}{2}+\beta)} F\left(-\lambda+\frac{1}{2}, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda+\frac{3}{2}+\beta, \frac{1-\tau_0}{\tau_0^2}\right) \quad (2)$$

и в области между волнами AB и CBV_1

$$u^0 = \frac{a^0 \Phi}{(k_1 - k_2)^{\lambda+\frac{1}{2}}} \delta^\lambda (\theta_0 - \theta)^3 F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta+1}{2}, \lambda+1, \frac{1}{\tau_0^2}\right) \quad (3)$$

Здесь

$$\tau_0 = \frac{\theta_0 - \theta}{V 2(k_1 - k_2) c_0}, \quad \delta = \tau + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2) c_0}, \quad s = \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}$$

$\tau = 0$ есть уравнение CBV_1 ; $\delta = 0$ — уравнение AB , $\theta = \text{const}$ дает лучи волны CBV_1 , θ_0 — значение θ в B ; k_2 — кривизна $A_0 B_0$, k_1 — кривизна обращенной по отношению к CBV_1 волны с центром в B , вычисленная в начальной точке; Φ и $\frac{\Phi}{V \sqrt{k_1 - k_2}}$ дают амплитуды лучевого решения на

CBV_1 и AB ; c_0 — начальное значение нормальной скорости волн. Формулы (2), (3) дают решение в окрестности касания волн различной кривизны не только в плоской, но и в пространственной задаче, в которых решение в окрестности точки или линии касания волн существенно зависит от двух переменных τ , θ по нормали и в касательном направлении к волне.

При зависимости решения лишь от τ получается в окрестности волн просто лучевое решение, а пример трехмерной задачи в окрестности волн указан далее.

Поскольку линейное решение (2), (3) не при всех значениях λ и β (например, при $\lambda = \beta = 0$) является корректным, необходимо учесть нелинейные эффекты в окрестности волны. В работах [11, 12] в двумерной по x, y задаче получены упрощенные нелинейные уравнения движения произвольной недиссипативной среды в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c_0}{2} \frac{d(k_1 - k_0)}{dt} \frac{\partial v_1}{\partial z} - u \frac{d \ln \Phi}{dt} - \frac{\lambda + 1}{H_1} u \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial z}$$

где u — проекция на нормаль к волне возмущенной скорости частицы, H_1 — невозмущенное значение нормальной скорости волны, $\lambda + 1$ — коэффициент в формуле для нормальной скорости волны в нелинейной задаче $C_n + v_n = -H_1 + (\lambda + 1)u$, смысл v_1 выясняется для конкретной среды из уравнений движения в проекции на направление медленного изменения искомых величин (0).

В [12] определены также уравнения, описывающие окрестность точки бесконечной кривизны волны, в виде

$$u = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1}$$

$$y_1 \frac{\partial^3 \bar{z}}{\partial y_1 \partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial y_1^2} = 3t \frac{\lambda + 1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x_1^2} \right)$$

где

$$x_1 = x_0 x + y_0 y - t$$

$$y_1 = \frac{x + y_0 y}{t^{1/3}} \left(\frac{2}{z_0} \right)^{1/3} (z_0 - z_0 z_0)^{1/3}$$

причем $x_0 = \text{const}$ и $y_0 = \text{const}$ являются касательными в указанной точке к волне и лучу соответственно, $\bar{z} = \bar{z}(z)$ есть дисперсионное уравнение среды, $z_0 = \bar{z}(z_0)$.

Получено [11, 12] решение системы уравнений (4), сравниваемое с линейным решением (2) для скачкообразной волны АВ ($\lambda = \beta = 0$). А. Г. Багдоевым и Э. Н. Данюшиным получены нелинейные уравнения [13, 14] для трехмерной задачи в окрестности волны

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) - u \frac{d \ln \Phi}{dt} =$$

$$= - \frac{\lambda + 1}{H_1} u \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad (5)$$

где $dx_2 = H_2 d\beta$, $dx_3 = H_3 d\gamma$, $\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$ дают уравнение луча, $\alpha = \alpha(\beta, \gamma)$ есть характеристическое уравнение в системе координат x_1, x_2, x_3 , связанной с полной; $dx_1 = H_1 d\tau$. Конкретизированы значения v_{x_1}, v_{x_2} и коэффициентов в (5) для задачи магнитной газодинамики неоднородной первоначально движущейся среды.

На примере вязкотермомагнитоупругой среды [15] показано, что уравнения (5) списывают также движение в окрестности воли для слабо-диссипативной среды, что достигается формальным включением в коэффициент $(\lambda + 1)$, получаемый из условий совместности на нелинейной характеристике, диссипативных членов, пропорциональных $\frac{\partial^2 u / \partial \tau^2}{u \frac{\partial u}{\partial \tau}}$. Отсюда,

в частности, следуют [14] результаты для магнитной газодинамики. В работе [16] найдено линейное решение в окрестности точки касания плоской, цилиндрических и сферической воли в задаче об отражении плоской волны от прямого угла, а также определено нелинейное решение уравнений (5) в данной трехмерной задаче, на выходе из окрестности волны переходящее в линейное.

Показано, что в двумерной задаче уравнения (5) и (4), полученные из различных соображений, а именно, с помощью разложения характеристического многочлена по степеням малых операторов и путем сращивания с линейным решением соответственно, совпадают. М. М. Минасяном показано [17], что лучевое решение Φ , входящее в (2)—(5), в задаче магнитной газодинамики может быть получено из уравнения сохранения возмущенной энергии волн

$$\rho_0 \frac{d\Phi^2}{d\tau} = \frac{H_1^2}{c_n} = \text{const} \quad (6)$$

Здесь ρ_0 и c_n — невозмущенные значения плотности и нормальной скорости волн относительно частиц, Σ — площадь волны внутри выбранной лучевой трубки. Φ есть лучевое решение для полной скорости частицы, а значение лучевого решения Φ для u найдется через Φ из условий совместности на волне.

Уравнение (6) значительно упрощает задачу определения лучевого решения, или решения геометрической акустики. Для газовой динамики оно получено О. С. Рыжовым и Г. М. Шефтером, а для произвольной среды — путем эвристических рассуждений, вытекающих из вариационного принципа, Брегертоном и Гарретом. Кроме того, в [17] методом, отличным от методов [13, 14], примененных при получении (4) и (5), выведены трехмерные уравнения коротких волн в магнитной газодинамике.

М. М. Минасяном также решена в линейной и нелинейной постановке магнитогазодинамическая задача о проникании клина в жидкость [18], получены нелинейные уравнения для разреженной анизотропной плазмы и изучены общие соотношения для неоднородных сред [19].

А. Г. Багдоевым получены нелинейные уравнения [12], описывающие окрестность точки бесконечной кривизны волны, которые в отличие от (5) будут уравнениями третьего порядка.

Получены нелинейные уравнения в окрестностях особых точек медленной магнитозвуковой волны, причем для точек, лежащих на направлении магнитного поля, уравнения существенно отличаются от вышеуказанных и будут различными для плоской и осесимметричной задач.

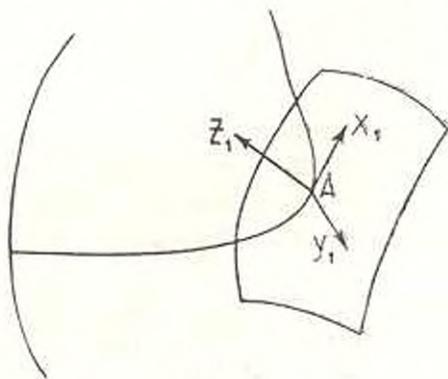
А. Г. Багдоевым продолжено исследование нелинейного решения в окрестности каустики для произвольной недиссипативной среды [20].

Для случая $n+1$ независимых переменных i, x , где t — время, x есть радиус-вектор точки, показано, что если обозначить через x^0 радиус-вектор точки A (фиг. 2) касания выбранного луча с каустикой, через $\bar{k} = \{\alpha_i\}$ и $\bar{N} = \{N_i\}$ — векторы нормали к волне и каустике в точке A , через $\Delta(\alpha_i, \lambda)$ — характеристический определитель в линейной постановке, то уравнение в окрестности каустики в переменных

$$x_1 = (x - x^0)\bar{k}, y_1 = (x - x^0)\bar{N}$$

можно записать в виде

$$\left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial y_1} y_1 + (\alpha_i \Delta_{\alpha_i}) (x - x^0) \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \\ + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = - \frac{\alpha_i \Delta_{\alpha_i}}{H_1} (i+1) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \quad (7)$$



Фиг. 2.

В плоской задаче для произвольной среды можно еще больше конкретизировать [21] коэффициенты и записать уравнение в виде

$$y_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \Delta_{\beta_j \beta_k}^{\alpha_i \alpha_j}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = \frac{i+1}{H_1} (\alpha \Delta_\alpha + \beta \Delta_\beta) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \quad (8)$$

где $x_1 = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$, $y_1 = -(x - x_0)\Delta_\beta + (y - y_0)\Delta_\alpha$, $1/R$ есть разность кривизны каустики и луча, причем это уравнение лишь

множителем $\lambda = \frac{(1 + \beta^2)^{3/2}}{\beta^2}$, равным радиусу кривизны линии нормалей, отличается от уравнений вблизи каустики для неоднородной жидкости.

Уравнения (7) и (8) можно, вводя новые независимые переменные и искомые функции, записать в виде

$$(u + y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

что дает правило подобия вблизи каустики для любых сред и совпадает с правилом, полученным в газовой динамике, причем [21] линейное решение вблизи каустики также следует этому правилу.

В работе [21] произведен также численный расчет приходящей к каустике ударной волны.

Г. Г. Оганяном проводилось [22] исследование ряда задач по распространению волн в химически активной газовой смеси при наличии диссипации. Методом, предложенным О. С. Рыжовым и Л. Дж. Наполитано, получены нелинейные уравнения в окрестности волны для одномерной задачи (с плоскими и цилиндрическими волнами) для квазиравновесных и квазизамороженных процессов и получено их аналитическое решение [21, 23]. Выведены также уравнения, описывающие полную окрестность для специального (хотя и широко распространенного) вида сред с близкими скоростями звука (для квазиравновесного и квазизамороженного процесса) причем за счет взаимовлияния релаксационных и диссипативных эффектов эти уравнения будут содержать четвертую производную, что приводит к дисперсионным эффектам и появлению осцилляций перед волной.

Г. Г. Оганяном также получены нелинейные уравнения для указанной среды вблизи каустики в плоской задаче при наличии начальной неоднородности в распределении плотности ρ_0 и скорости звука a_0 [24]. Для квазиравновесного процесса уравнение имеет вид

$$u = \frac{1}{\beta^2 \lambda a_0} \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial t} - \left(a_0 \frac{\beta_1}{R} + \lambda_0 u \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{a_1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} = \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} \quad (10)$$

где α_0 есть значение $(\lambda + 1)$ в газовой динамике, δ — диссипативный коэффициент, включающий вязкость, теплопроводность, диффузию, эффект химической реакции. Интересно, что уравнения (7) и (8) получены в порядке $\gamma^{2/5}$, где γ есть интенсивность волны вдали от каустики, в то время как уравнения (10) верны в порядке $\gamma^{-1/5} \sim u$. В [24] получены также уравнения вблизи каустики для остальных видов волн. В линейной постановке второе слагаемое в скобках можно отбросить и после применения преобразования Фурье по x_1 найти φ и u в виде свертки от идеального решения ($\delta = 0$). На самой каустике решение найдено в виде функций параболического цилиндра. А. Г. Багдасарьян и Г. Г. Оганяном получены уравнения вблизи каустики в пространственной задаче. Уравнение (10) снова имеет место, причем при переменном δ в указанной свертке для линейного решения ха-

рактрным диссипативным множителем является $\int_0^t \sigma dt$. Интересно, что в (10) из всего лучевого решения (6) фигурирует лишь множитель $(\rho_0 \sigma_0)^{-1/2}$ (здесь $H_1 = c_n = a_1$).

Этот факт имеет место и для первоначально движущейся неоднородной жидкости, если координаты (x, y, z) и скорости частиц в системе координат, движущейся с невозмущенной скоростью частицы в точке A , причем снова имеют место уравнения (10), только

$$u = \Phi e^{\frac{1}{2} \int_0^t \sigma dt} \frac{\partial \tau}{\partial x_1}$$

где

$$k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{d \ln \Sigma}{H_1 \sigma z}, \quad H_1 = a_1$$

k есть сумма главных кривизн волны для произвольной среды, Σ — площадь волны. Эти соотношения для u и k верны для произвольной среды, а уравнения для нее даются комбинированием (8) и (10). Впереди волны линейное решение для сред с наличием наложения диссипативных и дисперсионных эффектов содержит осцилляции.

А. Г. Багдоевым и Г. С. Безиргеняном [25] получены нелинейные уравнения в окрестности волн в стационарных течениях, в которых волна неподвижна и состоит из лучей. Выбирая криволинейные координаты τ, a_1, a_2 , где $\tau = \text{const}$ дает волну, a_1 отсчитывается вдоль бихарактеристик, a_2 — вдоль ортогональных к ним линий на волне, обозначая через $\Delta(\tau, 1) = 0$, где $\Delta = \frac{\partial \tau}{\partial x_1}$, характеристическое уравнение линейной задачи и вводя уравнение лучей $\frac{dx_1}{d\tau} = \Delta_1$, можно получить уравнение вблизи волны [25]

$$\frac{\sigma^2 u}{\sigma z \sigma z} + \Gamma \frac{\sigma^2 u}{H_1^2 \sigma a_1^2} - \frac{\sigma u}{\sigma z} \frac{d \ln \Phi}{dz} = - \frac{\sigma}{\sigma z} \left(\frac{1}{H_1} + u \frac{\sigma u}{\sigma z} \right) \quad (11)$$

Γ, H_1, H_2 — коэффициенты Ламе по τ, a_1, a_2 , $\Gamma = \frac{1}{2} \Delta_1 \Delta_2 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_2}$.

Если совместить оси x_1, x_2, x_3 с касательными к линиям τ, a_1, a_2 и обозначить $\Delta_1 = \Delta$, то

$$\Gamma = \Delta \sigma, \quad \frac{da_1}{dz} = \frac{\Delta_2}{H_1}$$

В работе [25] рассматривается плановое течение бурного потока, в котором второе слагаемое (11) отсутствует. Φ дается уравнением (6), где

для стационарных течений H_1 , уже не есть нормальная скорость волны, а определяется из уравнений лучей (кроме того, Φ содержит множитель, соответствующий учету трения), $k+1 = \frac{3}{2}$.

В частности, если невозмущенное течение зависит лишь от координаты z в направлении основного потока U , то $H_1 = \cos \alpha$, где $\cos^2 \alpha = \frac{1}{Fr} = \frac{gh \cos \nu}{U^2}$. Fr —число Фруда, ν —углон. Проведено исследование слабых скачков, образующихся в течении при сужении профиля стенки. Интересно, что если невозмущенное течение зависит от x, y , то $H_1 = \sin \alpha$.

Г. С. Безиргеняном рассмотрено также линейное решение во всей возмущенной области расширяющегося потока для больших Fr [26].

На основании исследования уравнений (11) А. Г. Багдоевым и Г. Г. Гургеняном исследовано уравнение (11) для задачи обтекания крыла магнитогазодинамической химически активной смесью. От t, a_1, a_2 делается переход к координатам (неортогональным) τ, θ, z , где $\theta = \text{const}$ дает проекцию лучей на сечение $z = \text{const}$. Тогда

$$a_1 = a_1(z, \tau), \quad a_2 = a_2(\theta, \tau), \quad \tau = -1, \quad \Delta_\tau = z\Delta_\tau + \beta\Delta_z$$

и уравнение (11) примет вид

$$\Delta_\tau \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\beta^2(z) \Delta_\tau^2 (z^2 + \beta^2) \partial^2 u}{H_1^2 \Delta_\tau^2} - \beta \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u \frac{d \ln \Phi}{dz} \right) = - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{k+1}{H_1} u \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \quad (12)$$

Далее удастся, как и в нестационарной задаче, записать уравнение в форме (4) и найти нелинейное решение в окрестности линии касания волны, исходящей из передней кромки и коноида, произведенного вершиной крыла.

При отбрасывании производных по θ получится одномерное по τ уравнение, описывающее нелинейное решение в окрестности коноида. Наличие диссипации и дисперсии в (12) учитывается включением в $(k+1)$ старших производных, причем указанная зависимость находится из условий совместности на нелинейной характеристике, в которые формально включены малые слагаемые от диссипации и дисперсии.

А. Г. Багдоевым и Л. Д. Азатян развит [27] подход, позволяющий рассчитывать дифракционные области в задаче с сильными ударными волнами в магнитной газодинамике. Он основан на применении к линеаризованным уравнениям магнитной газодинамики метода Смирнова—Соболева.

Для получения простых конформных отображений области дифракции на прямоугольник проводится разложение дисперсионного уравнения магнитной газодинамики по степеням квадрата скорости альфвеновских волн, которое используется лишь вблизи ударной волны, что позволяет привести задачу к соответствующей газодинамической задаче.

Л. Д. Азатян получила замкнутое аналитическое решение [28] задачи о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны от вер-

шины тупого клина. Кроме того, она рассмотрела задачу о прохождении волны около клина и помимо определения решения линейной задачи провела рассмотрение окрестностей слабых быстрых и медленных ударных волн в нелинейном приближении.

А. Г. Петросяном проводились исследования движения жидкостей с моментными напряжениями как в обычной, так и в магнитной гидродинамике. В [29] получены уравнения асимметричного магнитогидродинамического пограничного слоя. В [30] дается решение задачи об асимметричном пограничном слое. В [31] дается вывод уравнений асимметричной магнитной гидродинамики и решается задача установившегося движения по трубе. Дается сравнение с Пуазейлевским профилем.

Р. Ш. Соломомяном рассмотрена задача определения нестационарного схода потока за крылом конечного размаха при сверхзвуковом движении [32].

Н. А. Асрян [33] исследовал удар твердой пластинки о поверхность несжимаемой жидкости при наличии между ними несжимаемого или сжимаемого слоя газа.

В. С. Галоян и О. А. Барсегян рассмотрели задачи термодинамической теории движения нелетучих аэрозольных частиц в поле градиентов температуры и концентрации в бинарной газовой смеси [34]. В [35] рассматривается методом Каньяра распространение пыли в слое жидкости под действием переменной нагрузки.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 22 I 1976

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՀԵԳՐՈՄԵԿԱՆԻԿԱՅԻ ԱՍԿՐԵԶՈՒՄ,
ՈՐՈՒՔ ԿՈՏԱՐՎԵԼ ԵՆ ՀՈՍԷ-ՈՒՄ 1971—1975 ԹՎԱԿԱՆՆԵՐԻ
ԺԱՄԱՆԱԿԱՐԹԱՅՔՈՒՄ

Բերվում է նշված ժամանակարաններում հիդրոգինամիկայի բնագավառում կատարված աշխատանքների քննարկումը:

THE INVESTIGATIONS ON HYDROMECHANICS CARRIED OUT IN ARM. SSR DURING 1971—1975

A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

The survey of the studies on hydromechanics carried out during the above period is presented. The investigations deal with meteorology, gas motion in tubing, asymmetric hydromechanics, the theory of flow

around the wing, the penetration of body into fluid, the filtration theory. A special attention is paid to the problem of propagation of linear and nonlinear waves in continuous media.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мхитарян А. М., Авакян А. С., Дависетлян М. Г. Закономерности расхода грунтовых вод на испарение и количественный учет факторов, влияющих на испарение и конвективный теплообмен. Тр. ЗагНИГМИ, вып. 51 (57), 1972.
2. Мхитарян А. М., Саакян А. С. Определение коэффициента турбулентного обмена. Докл. АН АрмССР, 1973, т. 57, № 1, 19—25.
3. Мхитарян А. М., Саакян А. С. Определение турбулентного теплообмена. Докл. АН АрмССР, 1974, т. 59, № 2, 97—103.
4. Мхитарян А. М., Авакян А. С., Саакян А. С. Контур теплового баланса. Докл. АН АрмССР, 1974, т. 59, № 3, 172—178.
5. Балсегян Р. М. Неравномерная фильтрация жидкости в прямоугольном массиве с произвольным числом подошвенных горизонтов. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 1, 1972, 64—75.
6. Бабаджанян Г. А., Дависетлян А. Е. Неустойчившееся движение реального газа в цилиндрической трубе с пористыми стенками. Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 6, 3—13.
7. Бабаджанян Г. А. Движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 5, 85—89.
8. Бабаджанян Г. А. Стационарное неизотермическое движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 3, 47—53.
9. Бабаджанян Г. А. Нестационарное движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния угла наклона газопровода. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 3, 21—30.
10. Дависетлян А. Е. Неустойчившееся неизотермическое движение реального газа в длинном газопроводе. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4, 37—44.
11. Балдосв А. Г. Исследование окрестности волны вблизи особой линии. Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 1, 16—37.
12. Балдосв А. Г. Определение нелинейных уравнений движения среды в окрестности точки касания ударных волн. Докл. АН АрмССР, 1971, т. LII, № 4, 201—208.
13. Балдосв А. Г., Давоян З. Н. Вывод нелинейных уравнений движения среды вблизи волны. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 1, 51—63.
14. Балдосв А. Г., Давоян З. Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Журнал вычисл. физики и матем. физики, 1972, т. XII, № 6, 1512—1529.
15. Балдосв А. Г. Уравнения нелинейной вязкотермомангнитоупругой среды вблизи фронтовой волн. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 1, 63—77.
16. Балдосв А. Г. Определение параметров движения жидкости в задаче отражения ударной волны от пластинки в линейной и нелинейной постановке. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 6, 18—32.
17. Минисян М. М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. Докл. АрмССР, 1972, т. I.V, № 5.
18. Минисян М. М. Проникание тела в полупространство сжимаемой жидкости при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 3, 29—39.
19. Минисян М. М. Распространение слабых ударных волн в неоднородных движущихся средах. Ученые записки ЕрГУ, № 1, 1975.

20. Багдоев А. Г. Определение нелинейных уравнений движения среды вблизи каустики. Докл. АН АрмССР, 1971, т. I, III, № 1, 3—10.
21. Манукян С. М. Определение параметров движения среды вблизи каустики. Ученые записки ЕрГУ, 1974, № 3.
22. Оганян Г. Г. Распространение слабых ударных волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 6, 3—17.
23. Оганян Г. Г. Слабые цилиндрические волны в химически активной среде. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2, 31—43.
24. Оганян Г. Г. Определение параметров движения химически активной среды в окрестности каустики. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 3, 31—46.
25. Багдоев А. Г., Безирямян Г. С. Исследование сверхзвукового течения в открытом водоводе конформной формы с произвольным продольным уклоном. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2, 44—60.
26. Безирямян Г. С. Расчет бурного потока в расширяющемся открытом водоводе с произвольным продольным уклоном. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 5, 63—80.
27. Азатян А. А., Багдоев А. Г. Некоторые задачи дифракции волн в электропроводящей жидкости, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Цахкадзор, т. II, 1973.
28. Азатян А. А. Задача о дифракции сильной магнитогидродинамической ударной волны около клина. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 5, 47—62.
29. Петросян А. Г. Уравнения пограничного слоя асимметрической магнитной гидродинамики. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 6, 50—60.
30. Петросян А. Г. Об одной задаче пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 3, 47—57.
31. Петросян А. Г. Об одной задаче асимметрической магнитной гидродинамики. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 6, 44—55.
32. Соломонян Р. Ш. Нестационарный снос потока за треугольным крылом при сверхзвуковом движении. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 5, 45—64.
33. Асриян Н. Г. Удар твердой пластинки о поверхность несжимаемой жидкости при наличии между ними газовой прослойки. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 6, 32—49.
34. Газини В. С., Барсекия О. А., Яламов К. Я. Термодинамическая теория движения нелетучих умеренно крупных и крупных аэрозольных частиц. Сб. научных трудов Ер. Пед. ин-та, вып. 7, 1975.
35. Саакян С. Г. Распространение трехмерных нестационарных волн давления в полупространстве. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 6.

Ա. Ա. ԱՐՄԵՆՅԱՆ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ОБЛАСТИ, ОБРАЗОВАННОЙ ИЗ ДВУХ ЛУНОЧЕК

В работах [1—3] методом Фурье в биполярной координатной системе получено замкнутое решение первой основной задачи теории упругости однородного тела для луночной области.

Настоящая работа посвящается решению плоской задачи теории упругости для составной области, ограниченной дугами окружностей.

1. Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для области, состоящей из двух областей в виде луночек, с коэффициентами Ляме μ_k и ν_k ($k = 1, 2$).

В биполярных координатах одна из составляющих материалов занимает область ($\beta_0 < \beta < \beta_1$, $-\infty < z < \infty$), а другой — область ($\beta_2 < \beta < \beta_3$, $-\infty < z < \infty$) — (фиг. 1).

Между материалами осуществляется полное сцепление. Составное тело нагружается по краям $\beta = \beta_k$ ($k = 1, 2$).

Задачу решаем при помощи функций напряжений $\Phi_k(z, \beta)$ ($k = 1, 2$), каждая из которых удовлетворяет бигармоническому уравнению

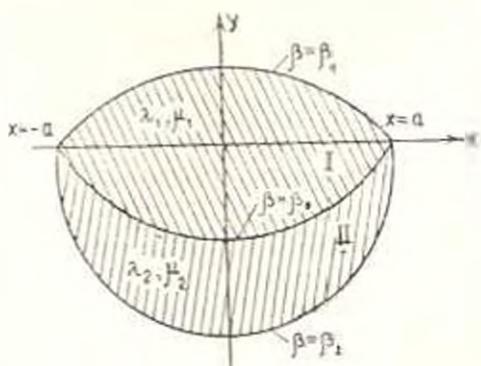
$$\left[\frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g \Phi_k) \quad (1.1)$$

где $g = \frac{\text{ch } z + \cos \beta}{a}$ характеризует масштаб преобразования.

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функций напряжений:

$$g \Phi_k(a, \beta) \Big|_{\beta = \beta_k} = \varphi_k(z), \quad \frac{\partial [g \Phi_k(z, \beta)]}{\partial \beta} \Big|_{\beta = \beta_k} = \psi_k(z) \quad (k = 1, 2) \quad (1.2)$$

Предполагается, что $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ ($k = 1, 2$) удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.



Фиг. 1.

На линии контакта имеем следующие условия:

$$g\Phi_1(z, \beta)|_{\beta=\beta_0} = g\Phi_2(z, \beta)|_{\beta=\beta_0}, \quad \frac{\partial |g\Phi_1(z, \beta)|}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} = \frac{\partial |g\Phi_2(z, \beta)|}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} \quad (1.3)$$

$$u_1(z, \beta_0) = u_2(z, \beta_0), \quad v_1(z, \beta_0) = v_2(z, \beta_0) \quad (1.4)$$

Перемещения u_k и v_k ($k=1, 2$) выражаются через $\Phi_k(z, \beta)$ ($k=1, 2$)

$$u_k(z, \beta) = \frac{g}{2\nu_k} \left[\frac{\nu_k}{i_k + \nu_k} \frac{\partial \Phi_k(z, \beta)}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_k(z, \beta)}{\partial \beta} \right] \quad (1.5)$$

$$v_k(z, \beta) = \frac{g}{2\nu_k} \left[\frac{\nu_k}{i_k + \nu_k} \frac{\partial \Psi_k(z, \beta)}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_k(z, \beta)}{\partial z} \right] \quad (k=1, 2)$$

где $\Psi_k(z, \beta)$ ($k=1, 2$) — бигармоническая функция, связанная с $\Phi_k(z, \beta)$ ($k=1, 2$) формулой

$$g\Psi_k(z, \beta) = \frac{i_k + 2\nu_k}{2(i_k + \nu_k)} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] (g\Phi_k) d\alpha d\beta \quad (1.6)$$

Функции $\Phi_k(z, \beta)$ ищем в виде интеграла Фурье

$$g\Phi_k(z, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, \beta) e^{-it\alpha} dt \quad (k=1, 2) \quad (1.7)$$

где

$$f_k(t, \beta) = A_k(t) \operatorname{ch} t(\beta_k - \beta) \cos(\beta - \beta_0) + B_k(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_0) \cos(\beta_k - \beta) + \\ + C_k(t) \operatorname{sh} t(\beta_k - \beta) \sin(\beta - \beta_0) + D_k(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \sin(\beta_k - \beta) \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.6) и учитывая (1.8), для бигармонической функции $g\Psi_k(z, \beta)$ ($k=1, 2$) получаем следующие выражения:

$$g\Psi_k(z, \beta) = \frac{i(i_k + 2\nu_k)}{1 - 2\pi(i_k + \nu_k)} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(t, \beta) e^{-it\alpha} dt \quad (k=1, 2) \quad (1.9)$$

где

$$G_k(t, \beta) = A_k(t) \operatorname{sh} t(\beta_k - \beta) \cos(\beta - \beta_0) - B_k(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \cos(\beta_k - \beta) + \\ + C_k(t) \operatorname{ch} t(\beta_k - \beta) \sin(\beta - \beta_0) - D_k(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_0) \sin(\beta_k - \beta) \quad (1.10)$$

Условия (1.2) и (1.3) приводят к четырем системам для определения неизвестных функций A_k , B_k , C_k и D_k ($k=1, 2$).

$$A_k(t) \cos \gamma_k + B_k(t) \operatorname{ch} t \gamma_k = N_k(t)$$

$$A_k(t) \operatorname{ch} t \gamma_k + B_k(t) \cos \gamma_k = P_k(t)$$

$$\begin{aligned}
 tC_k(t) \sin \gamma_k + D_k(t) \operatorname{sh} t\gamma_k &= N_{k-2}(t) \\
 C_k(t) \operatorname{sh} t\gamma_k + tD_k(t) \sin \gamma_k &= N'_{k-4}(t) \quad (k=1, 2) \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= \beta_k - \beta_0 \\
 N_{k-2}(t) &= -N_{k-6}(t) - A_k(t) \sin \gamma_k + tB_k(t) \operatorname{sh} t\gamma_k \\
 N_{k-4}(t) &= P_2(t) + tA_k(t) \operatorname{sh} t\gamma_k - B_k(t) \sin \gamma_k \quad (k=1, 2) \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

А функции $N_k(t)$ и $M_{k+6}(t)$ ($k=1, 2$) являются преобразованиями Фурье функций $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ ($k=1, 2$)

$$N_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) e^{itx} dx, \quad N_{k+6}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x) e^{itx} dx \quad (1.13)$$

Функции $P_k(t)$ ($k=1, 2$) связаны с функциями $f_k(t, \beta)$ ($k=1, 2$)

$$P_1(t) = f_k(t, \beta_0), \quad P_2(t) = \left. \frac{\partial f_k(t, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} \quad (1.14)$$

Из (1.11) определяем

$$\begin{aligned}
 A_k(t) &= \frac{P_1(t) \operatorname{ch} t\gamma_k - N_k(t) \cos \gamma_k}{\operatorname{ch}^2 t\gamma_k - \cos^2 \gamma_k}, \quad B_k(t) = \frac{N_k(t) \operatorname{ch} t\gamma_k - P_1(t) \cos \gamma_k}{\operatorname{ch}^2 t\gamma_k - \cos^2 \gamma_k} \\
 C_k(t) &= \frac{N'_{k-4}(t) \operatorname{sh} t\gamma_k - tN_{k-2}(t) \sin \gamma_k}{\operatorname{sh}^2 t\gamma_k - t^2 \sin^2 \gamma_k} \\
 D_k(t) &= \frac{N_{k-2}(t) \operatorname{sh} t\gamma_k - tN_{k-4}(t) \sin \gamma_k}{\operatorname{sh}^2 t\gamma_k - t^2 \sin^2 \gamma_k} \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

Условия (1.4) представим в следующем виде:

$$u_1(z, \beta_0) + iv_1(z, \beta_0) = u_2(z, \beta_0) + iv_2(z, \beta_0) \quad (1.16)$$

Удовлетворяя условию (1.16), получаем

$$\left. \frac{\partial K_{11}(t, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} - tK_{11}(t, \beta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx - i\beta x}}{\operatorname{sh}(t-\tau)} K_{11}(x, \beta_0) dx \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned}
 K_{11}(t, \beta) &= \left(\frac{1}{i_1 + \nu_1} - \frac{1}{i_2 + \nu_2} \right) f_1(t, \beta) - \\
 &= \frac{i_1 + 2i_1}{\nu_1(i_1 + i_1)} G_1(t, \beta) + \frac{i_2 + 2i_2}{\nu_2(i_2 - i_2)} G_2(t, \beta) \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Разделяя четные и нечетные части (1.17) и имея в виду, что $f_1(t, \beta)$ — четная функция, а $G_k(t, \beta)$ — нечетная, получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\sum_{m=1}^2 a_{km}(t) P_m(t) = I_k(t) - b_k(t) \quad (k = 1, 2) \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= -tE^* + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{v_k^*}{\Delta_k(t)} t(t^2 + 1) \sin^2 \gamma_k \\ a_{12}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{v_k^*}{\Delta_k(t)} (\operatorname{sh} 2t\gamma_k - t \sin 2\gamma_k) \\ a_{21}(t) &= \frac{t}{2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{v_k^*}{\Delta_k(t)} (\operatorname{sh} 2t\gamma_k + t \sin 2\gamma_k) \\ a_{22}(t) &= E^* + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{v_k^*}{\Delta_k(t)} t^2 \sin^2 \gamma_k \\ b_1(t) &= \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{v_k^*}{\Delta_k(t)} [N_{k+1}(t) (t \operatorname{ch} t\gamma_k \sin \gamma_k - \operatorname{sh} t\gamma_k \cos \gamma_k) - \\ &\quad - N_k(t) (t^2 + 1) \operatorname{sh} t\gamma_k \sin \gamma_k] \\ b_2(t) &= t \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{v_k^*}{\Delta_k(t)} [N_{k+1}(t) \operatorname{sh} t\gamma_k \sin \gamma_k - \\ &\quad - N_k(t) (t \operatorname{ch} t\gamma_k \sin \gamma_k + \operatorname{sh} t\gamma_k \cos \gamma_k)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$I_1(t) = E^* \left[\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} P_1(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} [v^* G_1(\tau, \beta_0) - G_2(\tau, \beta_0)] d\tau \right]$$

$$I_2(t) = -E^* \left[\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} P_1(\tau) d\tau - \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} [v^* G_1(\tau, \beta_0) - G_2(\tau, \beta_0)] d\tau \right]$$

$$\Delta_k(t) = \operatorname{sh}^2 t\gamma_k - t^2 \sin^2 \gamma_k \quad (k = 1, 2) \quad (1.21)$$

$$E^* = \frac{v_2(t_2 + v_1) - v_2 - v_1 - v_1}{(v_1 + v_1)(t_2 + 2v_2)}, \quad v_1 = v^* = \frac{v_2(t_2 + v_2)(t_1 + 2v_1)}{v_1(t_1 + v_1)(t_2 + 2v_2)}, \quad v_2 = 1$$

Введем обозначения

$$\varphi_1(t) = e^{i\beta_0 t} \left\{ P_1(t) [1 - a_{21}(t)] + P_2(t) \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} - b_2(t) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11}(t) &= \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} [a_{11}(t) + a_{21}(t)] - \left| \frac{a_{21}(t)}{t} - 1 \right| [a_{12}(t) + a_{22}(t)] \\
 A_{12}(t) &= e^{2\gamma_1} \left\{ \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} [a_{11}(t) + a_{21}(t)] - \right. \\
 &\quad \left. - \left| \frac{a_{21}(t)}{t} - 1 \right| [a_{12}(t) + a_{22}(t)] \right\} \\
 U_1(t) &= 2e^{t(\gamma_1 - \alpha_1)} \left\{ \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} b_1(t) - [E^* + a_{22}(t)] \frac{b_2(t)}{t} \right\} \\
 c(t) &= -2i \frac{a_{22}(t) - E^*}{t}, \quad \vartheta(t) = e^{2t\alpha}
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Уравнения (1.19) приводятся к функциональному интегральному уравнению

$$A_{11}(t) \varphi_1(t) + e^{-2\gamma_1} A_{12}(t) \varphi_1(-t) = \frac{c(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta(\tau) \varphi_1(\tau)}{\vartheta(\tau) - \vartheta(t)} d\tau + U_1(t) \tag{1.23}$$

Уравнение (1.23) может быть представлено в виде характеристической системы сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{m=1}^2 A_{km}(t) \varphi_m(t) = \frac{c(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta(\tau) \varphi_k(\tau)}{\vartheta(\tau) - \vartheta(t)} d\tau + U_k(t) \quad (k=1, 2) \tag{1.24}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(t) &= e^{-2\gamma_2} \varphi_1(-t), & U_2(t) &= e^{-2\gamma_2} U_1(-t) \\
 A_{21}(t) &= A_{12}(-t), & A_{22}(t) &= A_{11}(-t)
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

2. Интегральные уравнения (1.24) сведем к краевой задаче Римана [4—7].

Нетрудно заметить, что $\vartheta(z)$ — простая однопериодичная автоморфная функция, фундаментальной областью которой является горизонтальная полоса шириной 1.

Введем однопериодичные автоморфные функции

$$R_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta(\tau) \varphi_k(\tau)}{\vartheta(\tau) - \vartheta(z)} d\tau \quad (k=1, 2) \tag{2.1}$$

исчезающие на бесконечности.

Если l — любая точка контура, то по формуле Сохоцкого получаем

$$R_k^+(l) - R_k^-(l) = \varphi_k(l)$$

$$R_k^+(l) + R_k^-(l) = \frac{1}{-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta(\tau) \varphi_k(\tau)}{\vartheta(\tau) - \vartheta(l)} d\tau \quad (k=1, 2) \tag{2.2}$$

Подставляя эти выражения в данную систему сингулярных интегральных уравнений (1.24), получаем следующие краевые задачи:

$$R_k^{\pm}(t) = \sum_{m=1}^2 c_{km}(t) R_m^{\pm}(t) + T_k(t) \quad (k=1, 2) \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11}(t) &= \frac{t}{(t-i)\Delta(t)} \left[\Delta(t) + 2iE^* \sum_{k=1}^2 v_k^* \Delta_{k-1}(t) e^{t\gamma_k} \sin(-1)^k \gamma_k \right] \\ c_{12}(t) &= -\frac{ie^{2t\gamma_2}}{(t-i)\Delta(t)} \left[\Delta(t) - 2E^{*2} \Delta_1(t) \Delta_2(t) + \right. \\ &\quad \left. + E^* \sum_{k=1}^2 v_k^* \Delta_{k-1}(t) \operatorname{sh}(-1)^{k-1} 2t\gamma_k \right] \\ T_1(t) &= \frac{\Delta_1(t) \Delta_2(t)}{E^* [a_{22}(t) - E^*] (t-i) \Delta(t)} \{ [A_{22}(t) + 2iE^* (a_{22}(t) - \\ &\quad - E^*)] U_1(t) - A_{12}(t) U_2(t) \} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$c_{22}(t) = \overline{c_{11}}(-t), \quad c_{21}(t) = \overline{c_{12}}(-t), \quad T_2(t) = \overline{T_1}(-t)$$

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \Delta_1(t) \Delta_2(t) E^{*2} - v_k^* \Delta_{3-k}(t) \operatorname{ch}^2 t\gamma_k + \right. \\ &\quad \left. + v^* \left[\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t\gamma_1 \operatorname{sh} 2t\gamma_2 - \frac{t}{4} \sin 2\gamma_1 \sin 2\gamma_2 - t^2 (\operatorname{sh}^2 t\gamma_k + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 \gamma_k) \sin \gamma_{3-k} \right] - t^2 (v^* - 2E^* - 1) v_k^* \Delta_{3-k}(t) \sin(-1)^{k+1} \gamma_k \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначая матрицу коэффициентов через $G(t)$, а векторы с составляющими $R_k(t)$ и $T_k(t)$ ($k=1, 2$) — через $R(t)$ и $T(t)$, можно записать краевые задачи (2.3) в матричной форме

$$R^{\pm}(t) = G(t) R^{\pm}(t) + T(t) \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.6) в общем случае проводится путем регуляризации, то есть приведением к интегральному уравнению Фредгольма.

Над обеими частями уравнения по определенным правилам производится операция, устраняющая интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши.

$$R^+(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^+(z) R^+(z)}{\theta(z) - \theta(t)} dz, \quad R^-(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^-(z) R^-(z)}{\theta(z) - \theta(t)} dz \quad (2.7)$$

Подставляя $R^-(t)$ из уравнения (2.6) в первое уравнение (2.7), получаем

$$G(t) R^-(t) + T(t) = \frac{1}{-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b'(\tau)}{b(\tau) - b(t)} [G(\tau) R^-(\tau) + T(\tau)] d\tau \quad (2.8)$$

Умножая эти уравнения на $[G(t)]^{-1}$ и сложив со вторым уравнением (2.7), получаем

$$\begin{aligned} R^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b'(\tau)}{b(\tau) - b(t)} \{ [G(t)]^{-1} G(\tau) - E \} R^-(\tau) d\tau = \\ = \frac{[G(t)]^{-1}}{2} \left[\frac{1}{-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b'(\tau)}{b(\tau) - b(t)} T(\tau) d\tau - T(t) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

где E — единичная матрица.

Интеграл в левой части (2.9) — собственный, так как подынтегральное выражение не имеет особенности в точке $\tau = t$. Таким образом, мы пришли к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Разрешимость этого уравнения обеспечена, так как на контуре элементы матрицы $G(t)$ и свободные члены, входящие в уравнение (2.6), удовлетворяют условию Гёльдера, а определитель матрицы отличен от нуля

$$\det G(t) = \frac{t+i}{t-i} \neq 0 \text{ — на контуре} \quad (2.10)$$

Индекс рассматриваемой краевой задачи -1 , и однородная задача имеет лишь нулевое решение. При этом уравнение Фредгольма (2.9) всегда эквивалентно исходному.

После несложных преобразований и упрощений векторное уравнение (2.9) представим относительно $P_k(t)$ ($k=1,2$)

$$P_k(t) = \frac{\Delta_1(t) \Delta_2(t)}{\Delta(t)} (t^2 + 1)^{k-1} \left[\sum_{m=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} M_{km}(t, \tau) P_m(\tau) d\tau + F_k(t) \right] \quad (2.11)$$

$$(k=1, 2)$$

где

$$\begin{aligned} M_{11}(t, \tau) = & \left| \frac{a_{22}(\tau)}{\tau} [-E^* + a_{11}(t)] - a_{12}(\tau) [tE^* - a_{11}(\tau)] \right| \frac{\text{sh}(\tau - t) \beta_0}{\text{sh}(\tau - t) \pi} + \\ & + \left| E^* a_{11}(\tau) - E^* a_{11}(t) - \frac{\tau - t}{\tau} a_{12}(t) a_{21}(\tau) \right| \frac{\text{ch}(\tau - t) \beta_0}{\text{sh}(\tau - t) \pi} \\ M_{22}(t, \tau) = & \left| E^* a_{22}(t) + \frac{a_{22}(t) - E^* a_{11}(\tau) - a_{12}(t) a_{21}(\tau)}{t} \right| \frac{\text{sh}(\tau - t) \beta_0}{\text{sh}(\tau - t) \pi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E^* |a_{12}(\tau) - a_{12}(t)| \left| \frac{\operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \right. \\
& \quad \left. M_{21}(t, \tau) = \right. \\
& = \left| \frac{a_{21}(t) a_{21}(\tau) - a_{22}(t) - E^*}{t} a_{11}(\tau) - E^* a_{22}(t) \right| \frac{\operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} + \\
& + \left| -\frac{a_{22}(t) - E^*}{t} a_{21}(\tau) + a_{22}(t) \frac{a_{11}(\tau)}{\tau} - E^* \frac{a_{21}(t)}{t} \right| \frac{\operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \quad (2.12) \\
& M_{22}(t, \tau) = \left| \frac{a_{22}(\tau) - E^*}{\tau} a_{21}(t) - \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} a_{11}(\tau) \right| \frac{\operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} + \\
& - \left| \frac{a_{22}(\tau) - E^*}{\tau} a_{22}(t) - \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} a_{22}(\tau) \right| \frac{\operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \\
& F_1(t) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \left\{ |a_{12}(t) \operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0 - E^* \operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0| b_1(\tau) - \right. \\
& - \left. [(a_{11}(t) + E^*) \operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0 - a_{12}(t) (\tau - t) \operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0] \frac{b_2(\tau)}{\tau} \right\} d\tau + \\
& \quad + a_{11}(t) b_1(t) - \frac{t^2 - 1}{t} a_{12}(t) b_2(t) \\
& F_2(t) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \left\{ \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} \operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0 b_1(\tau) - \right. \\
& - \left. \left[(\tau - t) \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} - E^* \right] \operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0 - \right. \\
& - \left. \frac{a_{21}(t)}{t} \operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0 \right\} \frac{b_2(\tau)}{\tau} d\tau - \frac{a_{11}(t) b_2(t)}{t} + \frac{a_{21}(t) b_1(t)}{t} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

В случае, когда составляющие материалы имеют одинаковые упругие постоянные, то есть $E^* = 0$, $\nu^* = 1$, уравнение (2.11) решается в замкнутой форме, и решение рассматриваемой задачи совпадает с решением, полученным в [3].

3. Рассмотрим поведение напряжений в окрестности края поверхности контакта.

Приведем формулы для напряжений, выраженных через функцию напряжений [3]

$$\begin{aligned}
z_x^{(k)} &= \left| g \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\operatorname{ch} x}{a} \right| [g^{\Phi_k}(x, \beta)] \\
z_\beta^{(k)} &= \left| g \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a} \right| [g^{\Phi_k}(x, \beta)] \quad (3.1) \\
\tau_{\alpha\beta} &= -g \frac{\partial^2 [g^{\Phi_k}(x, \beta)]}{\partial x \partial \beta} \quad (k = 1, 2)
\end{aligned}$$

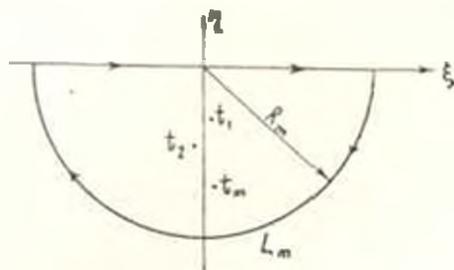
Согласно (1.7), (1.15) и (2.11) напряжения выражаются несобственными интегралами вида

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{z}(x, t)}{\Delta(t)} \frac{(a+x)^{-(1+i)t}}{(a-x)^{-(1-i)t}} dt \quad (3.2)$$

которые можно находить приближенно с помощью различных численных методов после определения $\bar{z}(x, t)$.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x = \pm a$ (то есть $x = \pm \infty$) интеграл (3.2) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x < 0$ или $a < 0$) или нижней (при $x > 0$ или $a > 0$) полуокружности радиуса R с центром в начале координат.

При увеличении радиуса полуокружности (фиг. 2) последовательность R_m может быть подобрана так, чтобы интеграл (3.2) по полуокружности L_m стремился к нулю при $m \rightarrow \infty$.



Фиг. 2.

Применяя теорему о вычетах, представим (3.2) в виде бесконечного ряда

$$\sigma(x) = 2\pi i \left\{ \frac{\bar{z}(x, t_1)}{\Delta'(t_1)} \frac{(a+x)^{-\gamma_1-i\eta_1}}{(a-x)^{-\gamma_1+i\eta_1}} + \sum_{k=2,3,\dots} \text{выч} \{ f(x, t_k, \eta_k) \} \right\} \quad (3.3)$$

Здесь $f(x, t)$ — подынтегральная функция (3.2), а $t_k = \xi_k - i\eta_k$ — корни уравнения

$$\Delta(t) = 0 \quad (3.4)$$

которые расположены в порядке возрастания положительных значений η_k .

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x = a$ ($a = \infty$) определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1 = \xi_1 - i\eta_1$ уравнения (3.4). Если $\eta_1 > 1$, имеем нулевое напряженное состояние, если $\eta_1 < 1$, имеет место явление сильной концентрации напряжений. В случае же $\eta_1 = 1$ напряжения на краях поверхности контакта конечны и в общем случае отличны от нуля.

Корни с большими номерами могут быть найдены по асимптотическим формулам.

После несложных преобразований можно представить $\Delta(t)$ в таком виде

$$\Delta(z) = B_1 \cos z(\gamma_1 - \gamma_2) + B_2 \cos z\gamma_1 \cos z\gamma_2 + B_3 z^2 \cos z\gamma_1 + B_4 z^2 \cos z\gamma_2 + B_5 \cos z\gamma_1 - B_6 \cos z\gamma_2 + B_7 z^4 + B_8 z^2 + B_9 \quad (3.5)$$

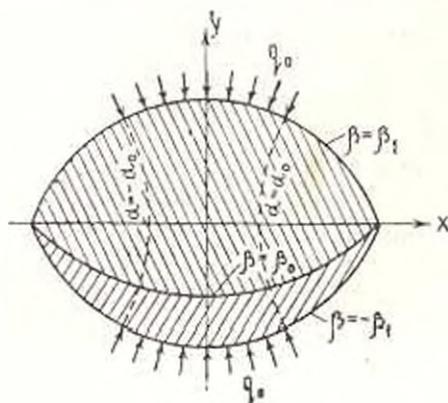
$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{v^*}{2}, & B_2 &= \frac{1}{4} |E^{*2} - (v^* - 1)^2| \\
 B_3 &= |(E^* + 1)^2 - v^{*2}| \frac{\sin^2 \gamma_2}{8}, & B_4 &= \frac{1}{8} [(v^* - E^*)^2 - 1] \\
 B_5 &= \frac{1}{4} |v^{*2} - E^{*2} - 1|, & B_6 &= -\frac{1}{4} |E^{*2} + v^{*2}| \\
 B_7 &= \frac{(E^* - v^* + 1)^2}{16} \sin^2 \gamma_1 \sin^2 \gamma_2 & (3.6) \\
 B_8 &= \frac{1}{8} [(E^* - v^*)^2 - 1] \sin^2 \gamma_1 + \frac{v^*}{2} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \\
 B_9 &= \frac{1}{4} |E^{*2} + v^{*2} + 1| + \frac{v^{*2}}{2} \sin^2 \gamma^2, & z &= 2it
 \end{aligned}$$

Трансцендентное уравнение $\Lambda(z) = 0$ содержит четыре неизвестных параметра γ_1, γ_2, E^* и v^* . Поэтому провести исчерпывающее общее исследование зависимости корня от параметров задачи невозможно.

Часть найденных значений первых корней указанных уравнений при различных значениях параметров приведена в первой строке табл. 1.

Уравнение (3.4) ранее получено в работах [8—10] и др. при рассмотрении задачи теории упругости составного бесконечного клина.

4. В качестве примера рассмотрим конкретную задачу, когда $\beta_2 = -\beta_1$ и тело подвергается по участкам боковой поверхности $|u| < a$, равномерно обжатую с интенсивностью q_0 (фиг. 3).



Фиг. 3.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d\Lambda}{dz} = \frac{-q_0 |z| - z_0}{|0| |x| > z_0} \\
 & \frac{d\Lambda}{dz} = 0 \quad (k=1, 2) \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

В дальнейшем, в силу симметрии напряженного состояния по координате z , рассматривается лишь половина всей луночной области, где $0 < z < \infty$, $\beta_0 < \beta < \beta_1$ для первого материала и $-\beta_1 < \beta < -\beta_0$ — для второго.

Составим граничные значения бигармонической функции $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1, 2$) и ее производной $\frac{\partial \Phi_k(z, \beta)}{\partial \beta}$ ($k=1, 2$) по значениям касательного и нормального напряжений на контуре (4.1).

Используем известные связи между значениями производных $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_k}{\partial y}$ ($k = 1, 2$) и составляющими X_k и Y_k ($k = 1, 2$) напряжения, действующего по площадке с нормалью

$$X_k^{(k)} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right) = \mp g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

$$Y_k^{(k)} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right) = \mp g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right)$$

Здесь верхний знак относится к случаю $\beta > 0$, а нижний — к случаю $\beta < 0$.

В этом случае

$$X_k^{(k)} = \begin{cases} (-1)^k q_0 \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \Big|_{z=1-1/\beta} & z < a_0 \\ 0 & z > a_0 \end{cases}$$

$$Y_k^{(k)} = \begin{cases} (-1)^k q_0 \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \Big|_{z=1-1/\beta} & z < a_0 \\ 0 & z > a_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Имея в виду, что

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = - \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{g^2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \quad (4.4)$$

из (4.2) и (4.3) находим контурные значения величин $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi_k}{\partial y}$ ($k = 1, 2$)

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \Big|_{z=1-1/\beta} = \begin{cases} -q_0 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \Big|_{z=1-1/\beta} = -q_0 x_0 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \Big|_{z=1-1/\beta} & z < a_0 \\ 0 & z > a_0 \end{cases}, \quad \text{где } x_0 = x \Big|_{z=1-1/\beta} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \Big|_{z=1-1/\beta} = \begin{cases} -q_0 \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \Big|_{z=1-1/\beta} = (-1)^{k-1} q_0 y_0 \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \Big|_{z=1-1/\beta} & z < a_0 \\ 0 & z > a_0 \end{cases}$$

где $y_0 = y \Big|_{z=1-1/\beta}$

Пользуясь формулами

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \quad (4.6)$$

и (4.5), для значения $\frac{\partial \Phi_k}{\partial z}$ и $\frac{\partial \Phi_k}{\partial z}$ ($k = 1, 2$) на контуре получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} = \\
 = & \begin{cases} -\frac{q_0}{2} \frac{\partial r^2}{\partial z} \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} + q_0 \left[x_0 \frac{\partial x}{\partial z} + (-1)^{k+1} y_0 \frac{\partial y}{\partial z} \right] \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \\
 & \frac{\partial \Phi_k}{\partial z^2} \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} = \\
 = & \begin{cases} -\frac{q_0}{2} \frac{\partial^2 r^2}{\partial z^2} \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} + q_0 \left[x_0 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + (-1)^{k+1} y_0 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right] \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

(k = 1, 2)

где

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2 (\operatorname{ch} z - \cos \beta)}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (4.8)$$

Контурные значения функций напряжений $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1,2$) можно получить интегрированием соотношения (4.7), постоянные интегрирования выбираем так, чтобы $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1,2$) было непрерывным

$$\begin{aligned}
 & \Phi_k(z, \beta) \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} = \\
 = & \begin{cases} -\frac{q_0}{2} (r^2 + r_0^2) \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} + q_0 [x_0 x + (-1)^{k+1} y_0 y] \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$

После некоторых выкладок получаем следующие выражения для $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ ($k=1,2$):

$$\varphi_k(z) = \begin{cases} \frac{\alpha q_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_1} [1 - \operatorname{ch}(z - z_0)] & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\psi_k(z) = 0 \quad (k=1,2)$$

Функции $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1,2$) в силу симметрии могут быть представлены в виде

$$\Phi_k(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_k(t, \beta) \cos t \alpha dt = \frac{1}{1 - 2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_k(t, \beta) e^{-i\alpha t} dt \quad (4.11)$$

Учитывая граничные условия (4.10) и вычисляя квадратуры, входящие в преобразование Фурье $q_k(\alpha)$ (4.10), приходим к следующим выражениям для $N_k(t)$ и $N_{k-0}(t)$ ($k=1, 2$):

$$N_k(t) = N'_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a q_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta_0} \frac{\sin \alpha_0 - t \sin \alpha_0}{t(t^2 + 1)}$$

$$N_{k-0}(t) = 0 \quad (4.12)$$

После удовлетворения условий на линии контакта (1.3) и (1.4), получаем следующие выражения для неизвестных A_k , B_k , C_k и D_k ($k=1, 2$), входящих в выражение функции напряжений:

$$A_k(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t_{ik} - \cos^2 \gamma_k} \{ P_1(t) \operatorname{ch} t_{ik} - N(t) \cos \gamma_k \}$$

$$B_k(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t_{ik} - \cos^2 \gamma_k} \{ N(t) \operatorname{ch} t_{ik} - P_1(t) \cos \gamma_k \}$$

$$C_k(t) = \frac{1}{\Delta_k(t)} \left\{ P_2(t) \operatorname{sh} t_{ik} - P_1(t) \left[t \operatorname{ch} t_{ik} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} t_{ik} \sin 2\gamma_k}{2(\operatorname{ch}^2 t_{ik} - \cos^2 \gamma_k)} \right] - \right.$$

$$\left. N(t) \left[t \cos \gamma_k - \frac{(t^2 - 1) \operatorname{sh} 2t_{ik} \sin \gamma_k}{2(\operatorname{ch}^2 t_{ik} - \cos^2 \gamma_k)} \right] \right\} \quad (4.13)$$

$$D_k(t) = \frac{1}{\Delta_k(t)} \left\{ P_2(t) t \sin \gamma_k - P_1(t) \left[t \cos \gamma_k - \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t_{ik} \sin \gamma_k}{2(\operatorname{ch}^2 t_{ik} - \cos^2 \gamma_k)} \right] - \right.$$

$$\left. N(t) \left[t \operatorname{ch} t_{ik} - \frac{(t^2 - 1) \operatorname{sh} t_{ik} \sin 2\gamma_k}{\operatorname{ch}^2 t_{ik} - \cos^2 \gamma_k} \right] \right\}$$

Неизвестные $P_k(t)$ ($k=1, 2$) определяются из систем уравнений Фредгольма второго рода (2.11), где нужно учесть соотношения (4.12).

Учитывая найденные значения для контактных напряжений, из (3.1) в частном случае имеем

$$\tau_{\theta} \Big|_{\theta=\alpha} = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{a} \frac{\cos \beta_0}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \left\{ t P_1(t) \sin t \alpha dt \right.$$

$$\sigma_{\theta} \Big|_{\theta=\alpha} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \left\{ \left(t^2 - \frac{\cos \beta_0}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0} \right) \cos t \alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{t \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0} \sin t \alpha \left[P_1(t) + \frac{\sin \beta_0}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0} P_2(t) \cos t \alpha \right] dt \right\} \quad (4.14)$$

В табл. 1 приведены некоторые значения коэффициентов особенности для контактных напряжений τ_{θ} (во второй строке) и σ_{θ} (в третьей

строке) на краю поверхности контакта при $\mu = 0.25$, $\alpha_0 = 1.1$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 3.6$, где $\mu = \frac{\gamma_2}{\beta_1}$, а α_1 и α_2 — представление Мусхелишвили.

Таблица 1

α_1	$\gamma_1 = 165^\circ$ $\gamma_2 = -15^\circ$ $\gamma_0 = -75^\circ$	$\gamma_1 = 150^\circ$ $\gamma_2 = -30^\circ$ $\gamma_0 = -60^\circ$	$\gamma_1 = 130^\circ$ $\gamma_2 = -45^\circ$ $\gamma_0 = -45^\circ$	$\gamma_1 = 120^\circ$ $\gamma_2 = -60^\circ$ $\gamma_0 = -30^\circ$	$\gamma_1 = 105^\circ$ $\gamma_2 = -75^\circ$ $\gamma_0 = -15^\circ$	$\gamma_1 = 90^\circ$ $\gamma_2 = -90^\circ$ $\gamma_0 = 0$
2.2	-1.448 -0.5824 -0.1131	1.538 -0.5624 -0.1908	1.730 -0.0931 -0.3710	1.992 -0.2361 -1.6151	1.940 -0.2578 -0.2092	1.868 -0.2787 -0.2430
2.04	1.520 -0.8759 -0.2689	1.568 -0.7759 -0.2784	1.758 -0.1191 -0.6032	1.998 -0.0883 -0.6348	1.906 -0.1703 -0.2750	1.824 -0.1719 -0.2922
1.88	1.552 -1.1023 -0.3966	1.600 -1.0946 -0.4112	1.792 -0.1590 -0.0358	2.003 0.0000 0.0000	1.886 -0.0994 -0.2933	1.800 +0.1525 -0.2922
1.8	1.572 -1.2730 -0.4758	1.620 -1.3243 -0.5080	1.814 -0.1886 -1.4306	2.024 0.0000 0.0000	1.884 -0.0853 -0.3269	1.786 -0.1496 -0.3533
1.72	1.592 -1.5038 -0.6131	1.640 -1.4808 -0.6319	1.836 -0.2264 -2.0204	1.846 -0.0218 -1.0541	1.884 -0.0629 -0.3475	1.764 -0.1505 -0.3520
1.64	1.610 -1.9819 -0.6903	1.658 -1.9805 -0.7869	1.864 -0.2817 -3.1205	2.076 0.0000 0.0000	1.884 -0.0275 -0.3613	1.764 -0.1554 -0.3940

Из таблицы видно, что при увеличении $-\gamma_2$ порядок особенности сначала уменьшается, а затем увеличивается, а коэффициенты особенности для касательного напряжения уменьшаются, для нормального напряжения сначала увеличиваются, а затем уменьшаются. При увеличении α_1 при $-\gamma_2 < 60^\circ$ порядок уменьшается, а коэффициент особенности для касательного напряжения увеличивается, а при $-\gamma_2 > 60^\circ$ — наоборот. При увеличении α_1 коэффициент особенности для нормального напряжения монотонно возрастает.

Вычислительный центр АН
Армянской ССР и ЕРГУ

Поступила 12 XI 1974

Լ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԵՐԿՈՒԻ ԼՈՒՍՆԱԿՆԵՐԻՅ ԿԱԶՄՎԱԾ ՏԻՐՈՒՅԹՈՎ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ
ՄՍԲՄՆԻ ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՈՒՒԹՅԱՆ, ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Երկրեն կոորդինատական սխեմանում դիտարկվում է շրջանային աղեղով երկու յուանածն մարմիններից միացումով կազմված բաղադրյալ մարմնի հարթ ատածգականության տեսության առաջին եզրային խնդիրը:

Խնդիրը լուծվում է յարումների ֆունկցիայի օգնությամբ:

Նզրային պայմանները բավարարելուց հետո անհայտ գործակիցների որոշման համար ստացված է սինգուլյար ինտեգրալ համասարումների սխեմա: Ավտոմորֆ ֆունկցիաների օգնությամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սխեմանը բերված է Հիլբերտ միմանի եզրային խնդրին: Այնուհետև եզրային խնդիրը բերված է Նրեդհոլմի երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սխեմանի:

Նյութերի ատածգական հատկություններից և միացման անկյուններից կախված ռադիուսարկված են անկյունային կետերում յարումների եզակիությունները: Արտշվում է եզակիության գործակիցը: միացման ղծի և ախրույթի արտարին եզրագծի հատման կետի շրջակայքում:

THE PLANE PROBLEM IN THE THEORY OF ELASTICITY FOR A COMPOSITE BODY IN THE REGION CONSISTING OF TWO LUNES

L. A. HARUTIUNIAN

S u m m a r y

The first fundamental problem in the theory of elasticity for a composite body restricted by arcs of crossing circles is considered in a bipolar coordinate system.

A full cohesion between the materials is effected along the contact line.

The problem is solved by the function of stresses and reduced to the solution of a characteristic system of singular integral equations. By the theory of automorphic functions of SIE it is reduced to the Hilbert-Riman boundary problem. The solution of the boundary problem for the general case is obtained by regularization i. e. by reduction to a solvable system of the Fredholm integral equations of the second kind.

The transcendental equation is obtained making it possible to determine the order and coefficient of the stress singularity at the cross points of boundary and contact lines.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ГТТИ. М., 1950.
2. Jeffery G. B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., A, № 221, 1921, 265.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. «Наука», Л., 1968.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. «Наука», М., 1968.
5. Веква Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. Изд. «Наука», М., 1970.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
7. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Калужск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956.
8. Ахсентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, т. 31, вып. 1, 1967.
9. Боджи Л. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. Прикл. мех., Тр. ASME, т. 38, сер. E, № 2, 1971.
10. Алексанян Р. К., Чобанян К. С. Термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела. Изв. АН Арм. ССР. Механика, т. XXIV, № 3, 1971.

Н. Е. САРКИСЯН

УСТАЛОСТНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНО АРМИРОВАННОГО НЕРАВНОПРОЧНОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА

Исследование механических свойств ортогонально армированных неравнопрочных композиционных материалов в условиях длительного нагружения представляет определенный интерес [1]. Между тем имеется крайне мало данных о механическом поведении этих материалов при циклическом воздействии нагрузки [2].

Целью настоящей работы явилось экспериментальное изучение усталостных свойств ортогонально ориентированного стеклопластика типа СВАН 5:1 на бутвар-фенольном (БФ-4) связующем при многоцикловом симметричном осевом растяжении—сжатии. Рассмотрено влияние анизотропии материала, для чего нагрузка прикладывалась вдоль волокон ($\varphi = 0^\circ$ и 90°)^{*} и в диагональном направлении ($\varphi = 45^\circ$).

Методика экспериментального исследования и статистической обработки опытных результатов описана в работе [2]. Усталостные испытания проводились в режиме нагружения $P = \text{const}$ при частоте 1200 циклов/мин. На каждом уровне циклического напряжения было испытано 3 образца. Для определения статической кратковременной прочности композита испытывалось по 5 образцов. Испытания проводились в нормальных условиях среды при температуре, колебавшейся в пределах 19—23°C.

§ 1. На фиг. 1 показаны усталостные диаграммы Велера. Параметры линейного корреляционного уравнения $\sigma_d = \lg N$ по участкам диаграмм приведены в табл. 1. Там же помещены значения пределов прочности стеклопластика σ_b при растяжении, которые соответствуют постоянной скорости перемещения захватов разрывной машины, равной 6 мм/мин. Замечен существенный разброс данных по σ_b , относящихся к образцам, вырезанным в диагональном направлении.

Сравнение полученных здесь результатов с данными экспериментов над стеклопластиком типа СВАН 5:1 на эпокси-фенольном связующем [2] дает некоторое представление о влиянии типа связующего на усталостные свойства композита^{**}.

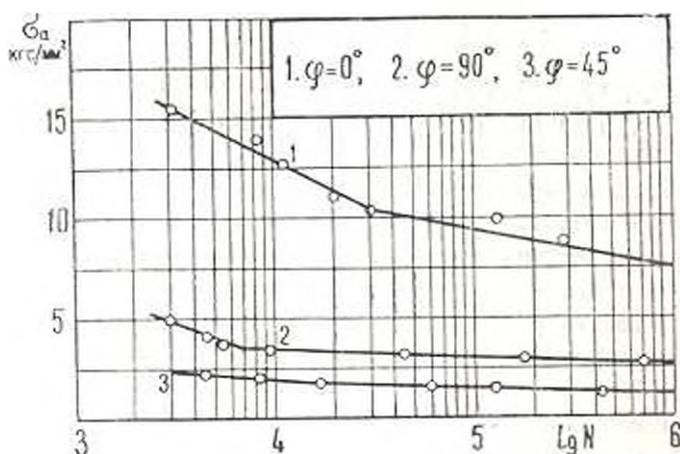
В данном случае тип связующего (эпокси-фенольное с применением фенольных смол резольного типа и бутвар-фенольное) мало влияет как на статическую кратковременную прочность стеклопластика при растяжении, так и на усталостную прочность при симметричном растяжении—сжатии.

При нагружении композита в направлении $\varphi = 0^\circ$, когда нагрузку воспринимают волокна, величина σ_b и усталостной прочности для обоих

* Отсчет угла φ здесь ведется от направления укладки большего числа волокон.

** Влияние типа связующего, в частности, на циклическую прочность стеклопластиков изучено во многих работах [3], [4] и др.

стеклопластиков практически одинакова, а в диагональном направлении прочность СВМ 5:1 на БФ-4 на 15% ниже.



Фиг. 1

Между тем, в обсуждаемых здесь опытах кратковременная прочность пластика на смоле БФ-4 в направлении $\varphi = 90^\circ$ оказалась даже выше ($\sim 10\%$), чем стеклопластика на эпокси-фенольном связующем, в то время как усталостная прочность для обоих стеклопластиков почти одинакова.

Таблица 1

Угол надреза образца φ , град.	Предел прочности σ_b , кгс/мм ²	Коэфф. вариации σ_b , %	Уст. прощ. точки перехода диаграммы кгс/мм ²	Номер участка диагр.	Параметры корреляции $\sigma_b - A - B \lg N$			Коэф. уст. проч. на базе 10^6 цикл.	Критическая температура разогрева T_k , °C	Температура разогрева при разрушении T_p , °C
					A	B	коэфф. корреляции			
0	55.75	2.74	10.80	1	33.0680	5.0403	-0.9647	0.11	32.0 ± 0.5	42.5 ± 2.5
					19.8936	2.0585	0.8390			
45	12.15	11.92	1.80	1	5.7628	0.9480	-0.5206	0.10	32.0 ± 1.0	46.0 ± 1.5
					3.1496	0.3242	-0.8333			
90	25.05	2.32	3.65	1	16.7337	3.4345	-0.8873	0.11	56.0 ± 1.5	77.5 ± 3.0
					5.3729	0.4481	-0.9698			

Если иметь в виду заметно низкую адгезионную прочность бутпар-фенольного связующего к стекловолокну [3], то указанное несоответствие может быть лишь следствием неточности в порядке укладки стеклошпона в листе (неточного набора пакета) в ортогональных направлениях. Как известно [5], это заметно искажает (в нашем случае повышает) предел прочности ортогонально неравнопрочного стеклопластика в направлении меньшего числа волокон, хотя его влияние может не проявляться в основном направлении армирования, где укладываемое число волокон в 5 раз больше.

Следует отметить, что циклическая прочность образцов в точке перегиба усталостной диаграммы $\sigma_{1/2} = \lg N$, которая характеризует особенности процесса многоциклового усталости материалов [6], меняется пропорционально $\sigma_{1/2}$ в зависимости от типа связующего при $\varphi = 0^\circ$ и 45° , в то время как в направлении $\varphi = 90^\circ$ имеет место уже обратная пропорциональная зависимость.

Указанное здесь несоответствие между величиной $\sigma_{1/2} = 25.05 \text{ кгс/мм}^2$ (22.20) и усталостной прочностью образцов в точке перегиба $\sigma_{1/2} = \lg N$, равной 3.65 кгс/мм^2 (4.20)¹, вместе с тем свидетельствует об отсутствии жесткой корреляции между $\sigma_{1/2}$ и усталостной прочностью материала.

В этой связи рассмотрим влияние типа связующего на изменение параметра B в корреляционном уравнении $\sigma_{1/2} = \lg N$. Очевидно, чем больше значение параметра B , тем материал более чувствителен к циклическому нагружению.

С другой стороны, чувствительность стеклопластиков к циклическому нагружению определяется другим параметром — коэффициентом усталостной прочности K . Чем меньше значение K , тем материал более чувствителен к циклическому нагружению.

Для полной оценки сопротивляемости материала усталостному разрушению, на наш взгляд, следует не ограничиваться только коэффициентом K , а желательно рассматривать также и параметр B . Для идеального материала имели бы $K = 1.00$ и $B = 0$, для реальных материалов — $K < 1$ и $B > 0$.

Что касается коэффициента усталостной прочности K , вычисляемого в данной работе по отношению к пределу прочности на растяжение $\sigma_{1/2}$, то на базе 10^6 циклов он оказывается равным ~ 0.10 и не зависящим как от угла нагружения φ , так и от типа связующего (см. табл. 1 и работу [2]).

Как показывает анализ полученных данных, в области малой долговечности падение усталостной прочности для СВМ 5:1 на эпокси-фенольном связующем независимо от угла φ в 1.5—1.7 раза больше, чем для пластика на связующем БФ-4. На участке большой долговечности, который с инженерной точки зрения представляет нам большой интерес, это отношение составляет 1.3 и 2.2 ($\varphi = 45^\circ$ и 90°) и, наоборот, 0.63 для образцов, вырезанных в направлении $\varphi = 0^\circ$.

Рассмотрим также изменение отношения $B/\sigma_{1/2}$. Как показывают расчеты, по этому отношению тоже, независимо от угла φ , более чувствительным к циклическому нагружению является стеклопластик на эпокси-фенольном связующем.

Таким образом, можно заключить, что стеклопластик СВМ 5:1 на эпокси-фенольном связующем в целом более чувствителен к циклическому растяжению—сжатию, чем СВМ 5:1 на смоле БФ-4. По нашим данным, только при $\varphi = 0^\circ$ и большой долговечности чувствительность стеклопластика на БФ-4 больше, чем пластика на эпокси-фенольном связующем.

¹ Цифры в скобках соответствуют СВМ 5:1, $\varphi = 90^\circ$, на эпокси-фенольном связующем [2].

§ 2. Стеклопластики проявляют высокую чувствительность к направлению внешней нагрузки, что проявляется в анизотропии прочности материала.

Установлено, что анизотропия прочности ориентированного стеклопластика при циклическом нагружении выражена сильнее, чем при статическом воздействии нагрузки [2, 7].

Численной характеристикой чувствительности стеклопластика к направлению действия нагрузки может служить коэффициент степени анизотропии прочности ψ , определяемый отношением величины прочности при данном угле нагружения (τ°) к соответствующей прочности при $\varphi = 0^\circ$ [7]

$$\psi = \frac{\sigma^\circ}{\sigma^\tau}$$

где σ° и σ^τ — статическая, либо усталостная прочность композита при одинаковой долговечности N и идентичности прочих экспериментальных условий нагружения.

В работах [2, 7] было обнаружено определенное изменение степени анизотропии усталостной прочности стеклопластиков в зависимости от долговечности, при этом рассматривалось влияние угла нагружения φ , асимметрии цикла напряжений, типа связующего и соотношения волокон в ортогональных направлениях. Примечательным оказалось то, что по мере увеличения долговечности анизотропия усталостной прочности СВАМ на эпокси-фенольном связующем во всех случаях усиливалась (коэффициент ψ уменьшался) [2], в то время как для СВАМ 1:1 на бутвар-фенольном связующем, наоборот, анизотропия уменьшалась [7].

Анализ полученных экспериментальных результатов показывает (табл. 2), что и для ортогонально неравнопрочного СВАМ 5:1 на связующем БФ-4 анизотропия усталостной прочности выражена сильнее, чем анизотропия предела прочности σ_b , и, кроме того, она снова проявляет тенденцию к ослаблению по мере увеличения долговечности. В этом заключена одна из принципиальных особенностей влияния типа рассмотренных связующих на усталостные свойства стеклопластика.

§ 3. Циклический разогрев ортогонально неравнопрочного стеклопластика проявляется при испытаниях на многоцикловую усталость.

На фиг. 2 приведены характерные кривые кинетики разогрева $\Delta T - N$ в зависимости от амплитудной величины напряжения и угла φ ориентации нагрузки.

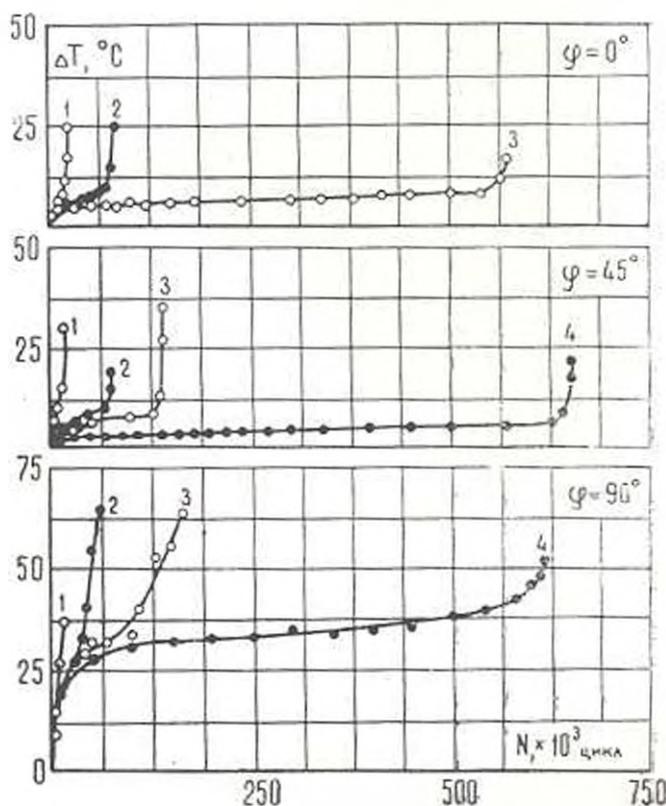
Температура разогрева измерялась на поверхности образца в зоне излома с помощью медноконстантановых термомпар. На некоторых кривых виден существенный разброс измеренных температур разогрева при разрушении по сравнению со средне-статистической величиной T_0 . Это является следствием малой теплопроводности стеклопластика, проявляющейся в значительной локализации нагрева по длине образца [8].

* Расположение термомпар на поверхности образца в данных опытах могло отклоняться от фактического места излома в пределах до 2—3 мм. При достаточно больших значениях долговечности, в случае совпадения места крепления термомпары с сечением

В табл. 1 помещены среднеарифметические значения критической температуры разогрева T_k и температуры разрушения T_p , полученные при различных напряжениях и вычисленные с учетом температуры окружающей среды. Показан разброс среднего значения, равный s/\bar{V} и что, соответ-

Таблица 2

Угол вырезки образца φ , град	$\bar{\Delta T}$ при статич. нагружении	$\bar{\Delta T}$ при долговечности N циклов					
		$5 \cdot 10^3$	10^4	$5 \cdot 10^4$	10^5	$5 \cdot 10^5$	10^6
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
45	0.185	0.156	0.152	0.162	0.161	0.160	0.159
90	0.381	0.288	0.280	0.319	0.328	0.344	0.358



Фиг. 2. Кинетика циклического разогрева СВМ 5:1 на связующем БФ-4.

$\varphi = 0^\circ$, 1. — 10.95, 2. — 9.94, 3. — 8.79 кгс/мм²

$\varphi = 45^\circ$, 1. — 1.76, 2. — 1.66, 3. — 1.50, 4. — 1.38 кгс/мм²

$\varphi = 90^\circ$, 1. — 3.50, 2. — 3.23, 3. — 2.98, 4. — 2.85 кгс/мм²

излома, искажение и измеряемом значении T_p может быть обусловлено недостаточностью времени для передачи тепла гистерезисного нагрева из глубины на поверхность образца.

ствует значимости ≈ 0.67 по распределению Стьюдента (s — среднеквадратическое отклонение температуры разогрева, n — число опытов). Величина температуры T_p определялась по методике, предложенной в [9].

Как показывают полученные результаты, при заданной частоте нагружения и напряжениях, соответствующих долговечности 10^4 — 10^5 циклов, соблюдается условие независимости критических значений температур T_p и T_r от напряжения. Эти условия впервые были получены в [10] для температуры T_p и в [8] для температуры разрушения T_r , затем подтверждены в ряде работ других авторов, в том числе [2, 11 и др.].

Вместе с тем, следует отметить, что возможно не всегда соблюдается условие постоянства температуры разогрева в момент разрушения, например, при более широком диапазоне амплитуд напряжений [12—14].

Заметное влияние типа связующего на разогрев проявляется в случаях деформирования стеклопластика в направлениях армирования, особенно в направлении укладки меньшего числа волокон (табл. 1). Сравнение полученных здесь значений с соответствующими характеристиками разогрева стеклопластика, испытанного в работе [11], указывает на значительно более сильный разогрев СВМ 5:1 на бутвар-фенольном связующем (более 1.5 раза при $\varphi = 90^\circ$ и 1.2—1.4 раза, когда $\varphi = 0^\circ$). В этом случае температура разогрева при разрушении практически достигает температуры теплостойкости материала [15]*.

При деформировании образцов, вырезанных в диагональном направлении, характерные значения температуры разогрева стеклопластика на смоле БФ-4 оказываются, наоборот, несколько ниже, чем пластика на эпокси-фенольном связующем. Несмотря на это, разрушение образцов на СВМ 5:1 на БФ-4 при этом носит выраженный тепловой характер, проявляющийся и в том, что образец при температуре T_r , вследствие теплового размягчения смолы, практически теряет свою жесткость. В пользу преимущественно теплового характера разрушения СВМ на указанной смоле может свидетельствовать и то обстоятельство, что если прервать опыт при температуре разогрева между T_p и T_r и дать образцу некоторое время для остывания, то он почти полностью восстанавливает свою первоначальную жесткость.

Выводы. 1. Тип связующего (эпокси- и бутвар-фенольное) мало влияет на статическую кратковременную прочность стеклопластика СВМ 5:1 при растяжении, так и на его усталостную прочность при симметричном осевом растяжении—сжатии.

2. Установлено, что анизотропия усталостной прочности ориентированных стеклопластиков типа СВМ выражена сильнее, чем анизотропия предела прочности. При этом в зависимости от долговечности анизотропия усталостной прочности может усиливаться (эпокси-фенольное связующее) и ослабевать (бутвар-фенольное связующее).

3. Температура разогрева при разрушении СВМ 5:1 на связующем БФ-4 практически достигает температуры теплостойкости материала по

* Теплостойкость стеклопластика на связующем БФ-4, например, по Маргелю почти в 3 раза ниже, чем теплостойкость стеклопластика на эпокси-фенольном связующем (65° и 200°C) [15].

Մարտենսու. В частном случае, когда нагрузка действует в направлении $\varphi = 45^\circ$, вследствие размягчения смолы разрушение образцов носит выраженный тепловой характер.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 14 VII 1975

Կ. Է. ՍԱՐԿԻՍԻԱՆ

ՕՐԹՈՂՈՆԱԿԱՆ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻԿԻՆ ԱՐՄՐՎԱԿՐԻՎԱԿԱՆ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻ
ՀՈՒՆԱՆՈՒՄԻՆ ՀԱՏՎԱԿԵՅԻՄԱՆ ԿՐՄԱՆԱԿՐԻՎԱԿԱՆ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Փ Ն Փ

Կատարված է ՇՅԱՄ 5:1 տիպի ապակեպլաստի ցիկլիկ ամրության և ինքնատրամացման փորձնական նետադատություն 1200 ց/րոպ. հաճախականությամբ բազմաշրիկային սիմետրիկ ձգման-սեղման ղեկբում: Էներ կիրառվել է թեղիկներին զուգահեռ ($\varphi = 0^\circ$ և 90°) և անկյունաղծային ուղղությամբ:

Ստացված է, որ փորձարկված ապակեպլաստի նոգնածային ամրության անիզոտրոպիան արտահայտվում է ավելի ուժեղ, քան ամրության սահմանի անիզոտրոպիան և կախված հարատևությունից այն կարող է ուժեղանալ կամ թուլանալ (նայած խեժի տիպին):

Ինքնատրամացման ջերմաստիճանը բուստար-ֆենոլային խեժի վրա պատրաստված ապակեպլաստի քայքայման ղեկբում զորձնականորեն նույնում է այդ նյութի ջերմակայունության ջերմաստիճանին (բառ Մարտենսի): Մասնավոր ղեկբում, երբ $\varphi = 45^\circ$, խեժի փափկեցման հետևանքով նմուշների քայքայումը կրում է արտահայտված ջերմային բնույթ:

FATIGUE CHARACTERISTICS OF UNUNIFORMLY
ORTHOGONALLY REINFORCED GLASSFIBRE PLASTIC

N. E. SARKISIAN

S u m m a r y

The experimental results of investigation on cyclic strength and heating of glassfibre reinforced plastic, CBAM 5:1 type, under multicyclic symmetrical tension—compression at a frequency of 1200 $c/min.$, are presented. The load is applied along the fibre ($\varphi = 0^\circ$ and 90°) as well as in diagonal direction ($\varphi = 45^\circ$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роженс К. А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига, Зинатис, 1971.

2. Саркисян Н. Е. Анизотропия усталостной прочности стеклопластиков типа СВАН. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 2.
3. Андреевская Г. Д. Высокопрочные ориентированные стеклопластики. М., Наука, 1966.
4. Owen M. J. Dynamic Fatigue of Reinforced plastics. „Fatigue and creep in reinforced plastics“. London, 1967.
5. Мартиросян М. М. Влияние неточности сборки пакета на прочность пластин СВАН. Межузловский сб. научных трудов. Серия 19 (химическая технология), вып. 2, 1975.
6. Finney J. M. A review of the discontinuity or hump phenomenon in fatigue S/N curves: theories and further results. „J. Austral. Inst. Metals“, 1968, 13, No. 1.
7. Саркисян Н. Е. Прочность и деформативность стеклопластика типа СВАН при циклическом осевом нагружении. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. XXII, № 6.
8. Олдырев П. П. Температура разогрева и разрушение пластмасс при циклическом деформировании. Механика полимеров, 1967, № 3.
9. Олдырев П. П. Определение усталостной долговечности пластмасс при циклическом деформировании. Механика полимеров, 1967, № 1.
10. Стинские А. В. Изучение усталостных свойств жестких пластмасс. Автореф. канд. дисс. М., 1963.
11. Саркисян Н. Е. Влияние анизотропии на циклическую деформативность и разогрев стеклопластиков типа СВАН. Механика полимеров, 1971, № 5.
12. Запцев Г. П., Стрелица В. С. Сопротивление стеклопластиков разрушению при малоцикловом нагружении. В кн.: Прочность при малом числе циклов нагружения. М., Изд. Машиностр., 1969.
13. Пелев Я., Сергеев С. В., Стрелица В. С. Прочность пластмасс. М., Изд. Машиностр., 1971.
14. Сидоренков А. Н., Золотов В. П. Саморазогрев стеклопластиков при циклическом нагружении. В сб.: Свойства судостроительных стеклопластиков и методы их контроля. Л., Изд. Судостр., 1974, вып. № 3.
15. Физические и механические свойства стеклопластиков. Справ. пособ. под ред. Ю. М. Молчанова. Рига, Изд. Зинатне, 1969.

Տ. Ա. ՄՈԼԱՏՅԱՆ

К ВОПРОСУ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПО НЕПОДВИЖНОЙ
 ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
 ИМПУЛЬСНОЙ СИЛЫ

В настоящее время изучению вопроса о движении тела, лежащего на шероховатой плоскости, под действием импульсной силы уделено мало внимания. Между тем оно представляет интерес в связи с теорией вибрационных двигателей [1, 2], а также в связи с другими приложениями. Целью настоящей работы является определение средней скорости и характера установившегося движения тела под действием импульсной силы.

Дифференциальное уравнение движения тела под действием импульсной силы

Твердое тело, идеализируемое в дальнейшем в виде материальной точки, массой m расположено на неподвижной шероховатой плоскости. На тело действуют сила сухого трения f и импульсная сила $Q(t)$ (фиг. 1).

Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = Q(t) \sin \gamma - f \quad (1)$$

причем

$$f = \begin{cases} -fN & \text{при } x > 0 \\ +fN & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

где f — коэффициент сухого трения, N — нормальная реакция.

Импульсную силу $Q(t)$ будем считать периодической функцией с периодом T , определенной соотношениями

$$Q(t) = \begin{cases} H & \text{при } 0 < t < t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < t < T \end{cases} \quad (3)$$

График этой функции изображен на фиг. 2. При решении задачи предположим, что время действия импульса $t_1 > 0$, и сила $H > \infty$, причем

$$Ht_1 = S_0 \quad (4)$$

Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$ до действия импульсной силы тело находится в покое, то есть $x(0) = 0$.

Импульс, мгновенно приложенный к телу, не успевает вызвать заметного изменения его положения в интервале времени действия $(0; t_1)$, однако приводит к резкому изменению его количества движения. Исходя из сказанного, для первого периода действия импульсной силы имеем

$$m\dot{x}(t_1) = S_0 (\sin \gamma - f \cos \gamma) \quad (5)$$

Отсюда видно, что движение тела из состояния покоя под действием данной импульсной силы возможно, если

$$S_0 (\sin \gamma - f \cos \gamma) > 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \gamma > f$$

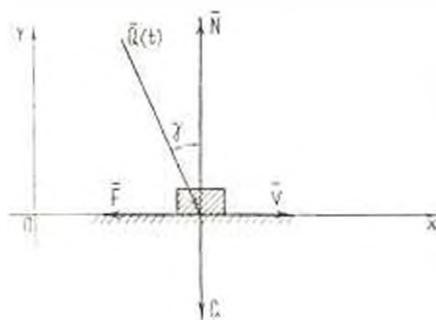
то есть линия действия импульсной силы должна лежать вне конуса трения. Рассмотрим дальнейшее движение тела. Начальные условия теперь будут при

$$t = t_1, \quad x(t_1) = 0$$

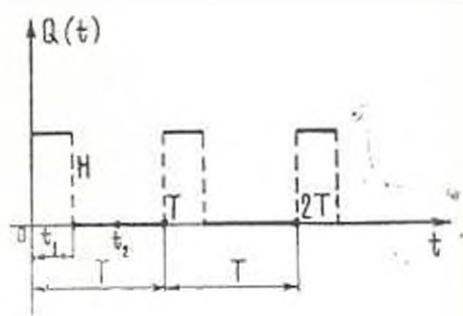
$$x(t) = \frac{S_0}{m} (\sin \gamma - f \cos \gamma) = \frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin (\gamma - \varphi) \quad (6)$$

а уравнение движения согласно (1) и фиг. 1 и 2 запишется в виде

$$\ddot{x} = -fg \quad (7)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Интегрируя это уравнение при условиях (6), получим

$$\dot{x}(t) = \frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin (\gamma - \varphi) - fg(t - t_1) \quad (8)$$

$$x(t) = (t - t_1) \left[\frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin (\gamma - \varphi) - \frac{fg}{2}(t - t_1) \right] \quad (9)$$

Допустим, что до начала действия второго импульса тело останавливается. Определим момент остановки тела t_2 . Из условия $x(t_2) = 0$ согласно (8)

$$t_2 = t_1 + \frac{S_0 \sin (\gamma - \varphi)}{maf \cos \varphi} \quad (10)$$

Тело действительно останавливается до начала действия второго импульса, если выполняется условие

$$t_2 - t_1 < T$$

или

$$\frac{S_0}{S_1} < \frac{\cos \varphi}{\sin(\gamma - \varphi)} \quad (11)$$

где через

$$S_1 = mgfT$$

обозначен импульс силы трения и предположении, что время ее действия равно периоду T .

График изменения скорости тела в рассмотренном режиме изображен на фиг. 3.

Теперь определим перемещение тела за период T . Из (9) получим

$$x(t_2) = (t_2 - t_1) \left[\frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin(\gamma - \varphi) - \frac{fg}{2} (t_2 - t_1) \right]$$

или

$$\dot{x}(t_2) = \frac{S_0 \sin^2(\gamma - \varphi)}{m^2 g \sin 2\varphi} \quad (12)$$

Средняя скорость движения тела под действием импульсов в рассматриваемом режиме будет

$$V = \frac{x(t_2)}{T} = \frac{S_0 \sin(\gamma - \varphi)}{m^2 g T \sin 2\varphi} \quad (13)$$

Допустим теперь, что тело до момента поступления импульса $t = T$ не останавливается. Исходя из (8), определим скорости движения тела в этот момент времени

$$\dot{x}(T) = \frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin(\gamma - \varphi) - fg(T - t_1)$$

Перемещение тела за промежуток времени $(0; T)$, согласно (9), будет

$$x(T) = (T - t_1) \left[\frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin(\gamma - \varphi) - \frac{fg}{2} (T - t_1) \right]$$

Так как $t_1 \rightarrow 0$, последние формулы могут быть записаны в более простом виде

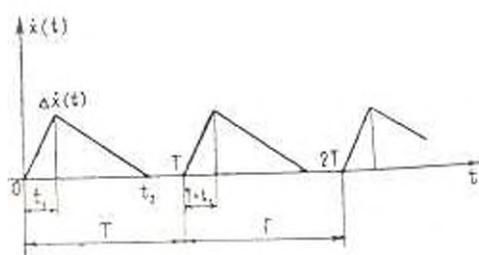
$$\dot{x}(T) = \frac{S_0 \sin(\gamma - \varphi)}{m \cos \varphi} - fgT \quad (14)$$

$$x(T) = T \left[\frac{S_0 \sin(\gamma - \varphi)}{m \cos \varphi} - \frac{1}{2} fgT \right] \quad (15)$$

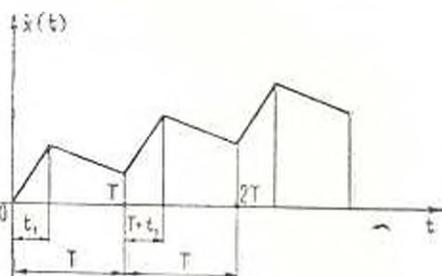
Нетрудно заметить, что формула (14) одновременно дает приращение скорости тела за произвольно выбранный период времени $[kT; (k+1)T]$, то есть

$$x|T(k-1)| - x(kT) = \frac{S_0 \sin(\gamma - \rho)}{m \cos \rho} - fgT \quad (16)$$

График изображения скорости тела в ускоренном режиме движения изображен на фиг. 4.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для среднего ускорения тела в этом последнем режиме имеем

$$a = \frac{x|(k-1)T| - x(kT)}{T} = \frac{S_0 \sin(\gamma - \rho)}{mT \cos \rho} - fg$$

Итак, если ранее рассмотренный режим с остановками тела был регулярным [3], то данный режим без остановок является ускоренным.

Заметим в заключение, что скорость и координата тела в двух возможных режимах движения могут быть приближенно определены соответственно по формулам

$$x(t) \approx vt; \quad x(t) \approx x(0) + vt$$

$$x(t) \approx x(0) - vt; \quad x(t) \approx x(0) - x(0)t + \frac{1}{2} \omega t^2$$

Аштыканский филиал Ерванского
политехнического института
им. К. Маркса

Получила 4 IX 1975

Ա. Ա. ՄՈԼՅԱԿԻՆ

ԱՆՇՆՐԻՔ ԱՆՇՆՐԻՔ ՉՈՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱՅՈՎ ԽՊՊՈՒՄԱՅԻՆ ՈՒԹՅ
ԱՉԳՆՑՈՒԹՅԱՆ ՏՐԿԻ ՄՈՐՐԴԵՐ ՇՈՐԹՈՒՆ ՉՈՐՑԻ ՎԵՐԱԵՐՅՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո մ

Չողագածում ստացված է աչին սնհրածեչա պալմաներ, որի դեպքում պիկոյ մարմինն իր վրա պոզոզ իմպուլսային ուժի ազդեցության ասակ կարող է շարժվել անշարժ անճարթ նարթության վրայով:

Իրտարկվում է մարմնի շարժումը կանգատումներով անճարթ նարթության վրայով, որի դեպքում ստացված է իմպուլսային ուժի չարտրանչուր պարբերությունը և տեղափոխման շափր:

Պահանջվում է նաև մարմնի տեղեկացումը շարժումը: Պահանջվում է, որ վերջին դեպքում մարմնի շարժումը և արագացումը: Առաջվել է մարմնի աշխարհի շարժման միջին արագությունը և արագացումը:

ON MOTION OF A SOLID OVER A FIXED ROUGH PLANE SURFACE UNDER THE ACTION OF IMPULSE FORCE.

S. A. MOLASIAN

S u m m a r y

The necessary condition is obtained under which a solid can move over a fixed rough plane surface under the action of impulse force.

The stop-motion of a solid over a fixed rough plane surface with the mean velocity and transference of each impulse force period is considered.

The non-stop motion of a solid is also discussed. In the latter case the solid moves with acceleration; the mean velocity and acceleration of the solid for a particular motion are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ратульскис К. М., Бансевичюс Р. Ю. О преобразовании высокочастотных механических колебаний в непрерывное движение. Научн. тр. высших учебных заведений Литовской ССР. Каунас, 1973. Вибротехника, 3 (20).
2. Бансевичюс Р. Ю., Грубляускис Д. А., Коцикя А. В., Можелис В. В., Ратульскис К. М., Славюс А. Ю., Улокас Р. В. Некоторые вопросы высокочастотного вибрационного перемещения. Научн. тр. высших учебных заведений Литовской ССР. Каунас, 1973. Вибротехника, 3 (20).
3. Блекман И. И. в Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. Изд. «Наука», М., 1964.