ISSN 0321—1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXIX, № 2

1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ — ЕРЕВАН

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год
На русском языке

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

Индекс 77730

CONTENTS

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04288 Подписано к печати 30.X 1979 г. Тираж 535 Изд. 5127 Заказ 712
Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0
Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,45

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24
Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Д. Т. Багдасарян

Классы гармонических и голоморфных функций в многосвязной области и их параметрические представления

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 23/XI 1978)

а) Следуя работе М. М. Джрбашяна [1], будем считать, что неотрицательная и непрерывная на $[0, 1)$ функция $\omega(x)\in\Omega$, если

$$1)\ \omega(0)=1\quad \int_0^1 \omega(x)dx<+\infty$$

$$2)\ \int_r^1 \omega(x)dx>0\quad 0\leqslant r<1 \tag{1}$$

Далее условимся относить к классу P_ω любую функцию $p(r)$, представимую в виде

$$p(0)=1\quad p(r)=r\int_r^1 \frac{\omega(x)}{x^2}dx\quad r\in(0, 1] \tag{2}$$

с некоторой функцией $\omega(x)\in\Omega$.

Если $\omega(x)\in\Omega$, то положим

$$C(z, \omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k},\quad S(z, \omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}\quad (|z|<1) \tag{3}$$

где

$$\Delta_0=1\quad \Delta_k=k\int_0^1 x^{k-1}\omega(x)dx. \tag{4}$$

В работе [1] введен оператор

$$L^{(\omega)}\left\{\varphi(x)\right\}=-\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^1 \varphi(x\tau)dp(\tau)\right\}\quad x\in[0, 1) \tag{5}$$

в предположении, что в надлежащих классах допустимых функций определенных на $(0, 1)$, правая часть тождества (5) существует хотя бы почти всюду на $(0, 1)$.

В настоящей работе получен аналог теоремы (3) М. М. Джрбашяна ([1], стр. 1091) для функций голоморфных в многосвязной области $G((z_0R_0), (\alpha_1R_1)\cdot\cdot\cdot(\alpha_m, R_m))$. Определен класс функций $U_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_m}(G)$ гармонических в области $G((z_0, R_0), \ldots, (\alpha_m, R_m))$ и класс функций $R_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_m}(G)$ голоморфных в области G и получен аналог теорем (5) ([1], стр. 1095) и (7) ([1], стр. 1100) М. М. Джрбашяна для этих классов.

б) Пусть $G((z_0, R_0), (\alpha_1R_1), \cdot\cdot\cdot, (\alpha_m, R_m))$ $(m+1)$ связная область, граница которой состоит из $(m+1)$ окружностей

$$\Gamma(z_0R_0): \left\{z/|z-z_0|=R_0\right\}, \underset{k=1,\ldots,m}{\Gamma}(\alpha_k, R_k): \left\{z/|z-\alpha_k|=R_k\right\}, |z_0-\alpha_k|<R_0$$

где числа R_k, $k=1,\ldots, m$ выбраны так, что

$$\Gamma(z_0R_0)\underset{i}{\cap}\Gamma(\alpha_iR_i)=\varnothing \quad \Gamma(\alpha_iR_i)\underset{i\neq j}{\cap}\Gamma(\alpha_jR_j)=\varnothing$$

обозначим

$$G(z_0R_0): \{z/|z-z_0|<R_0\}, \quad G(\alpha_kR_k): \{z/|z-\alpha_k|>R_k\}.$$

Тогда

$$G=G((z_0R_0),(\alpha_1, R_1), \ldots,(\alpha_m, R_m))=G(z_0R_0)\bigcap_{i=1}^{m}G(\alpha_i, R_i)$$

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $G((z_0R_0)\ldots(\alpha_mR_m))$, выберем числа $R_0'<R_0$, $R_k'>R_k$ $k=1, 2, \ldots, m$ так, чтобы окружности $\Gamma(z_0R_0')$, $\Gamma(\alpha_k, R_k')$ удовлетворяли условию (19). В области $\overline{G}((z_0R_0'), (\alpha_1, R_1')\cdot(\alpha_m, R_m'))$ напишем обобщенную формулу Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(z_0R_0')}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\alpha_kR_k')}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right\}. \tag{1.1}$$

Интегралы представим в виде суммы рядов, равномерно сходящихся в соответствующих областях

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(0)}(z-z_0)^n+\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^{(k)}}{(z-\alpha_k)^n}\right\}, \tag{1.2}$$

где

$$b_n^{(0)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(z_0R_0)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta, \quad \underset{k=1,\ldots,m}{b_n^{(k)}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\alpha_k,R_k)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha_k)^{-n+1}}d\zeta \tag{1.3}$$

Так как функция $f(z)$ голоморфна в области $G((z_0, R_0)\times \times(\alpha_1R_1)\cdot(\alpha_mR_m))$, то в формулах (1. 1), (1. 2), (1. 3) числа R_k' $(k=0,\ldots, m)$ можем выбрать сколько угодно близко к R_k. Следовательно любая функция $f(z)$, голоморфная в области $G((z_0R_0), (\alpha_1, R_1)\cdot\cdot(\alpha_m R_m))$, представляется следующим образом:

$$f(z)=f_0(z)+f_1(z)+\ldots+f_m(z), \tag{1.4}$$

где

$$f_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_n^{(0)}(z-z_0)^n;\ f_k(z)=\sum_{\substack{n=1\\ k=1,\ldots,m}}^{\infty}\frac{b_n^{(n)}}{(z-\alpha_k)^n}. \tag{1.5}$$

Притом функция $f_k(z)$ $(k=0,1,\ldots,m)$ голоморфна в области $G(\alpha_k,R_k)$ и $f_k^{(\infty)}=0$ при $k=1,2,\ldots,m$.

Теорема 1.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $G((z_0, R_0)\cdot\cdot\cdot(\alpha_m, R_m))$.*

Пусть далее $\omega_k(x)\in\Omega$, $p_k(r)\in P_{\omega_k}$, а функции $f_k(z)$ определяются формулами (1. 3) *и* (1. 5).

Тогда

1°. *Функции*

$$f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})\equiv L^{(\omega_0)}\{f_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})\},$$

$$f_k^{(\omega_k)}\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)\equiv L^{(\omega_k)}\left\{f_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)\right\}\ k=1,\ldots,m$$

голоморфны соответственно в областях $G(z_0, R_0)$ и $G(\alpha_k, R_k)$

2°. *Для любой ρ_k $\underset{k=0\ldots m}{(0<\rho_k<1)}$, $z\in G\left((z_0, R_0\rho_0), \left(\alpha_1, \frac{R_1}{\rho_1}\right), \ldots, \left(\alpha_m, \frac{R_m}{\rho_m}\right)\right)$ справедливы интегральные формулы*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C\left(\frac{z-z_0}{R_0\rho_0}e^{-i\theta},\omega_0\right)f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C\left(\frac{R_k}{\rho_k(z-\alpha_k)}e^{-i\theta},\omega_k\right)f_k^{(\omega_k)}\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)d\theta \tag{1.6}$$

$$f(z)=iI_mf_0(z_0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{z-z_0}{R_0\rho_0}e^{-i\theta},\omega_0\right)Re\,f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{R_k}{\rho_k(z-\alpha_k)}e^{-i\theta},\omega_k\right)Re\,f_k^{(\omega_k)}\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)d\theta \tag{1.7}$$

Доказательство. Так как в (1.4) функции $f(z)$ $k=0,\ldots,m$ голоморфны в областях $G_0(z_0R_0)$ и $G(\alpha_kR_k)$, то написав теорему (3) ((1), стр. 1091) для функции $f_k^*(w)=f_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{w}\right)$ при $k\neq0$ и для функции

$f_0^*(w) = f_0(z_0+R_0 w)$ при $k=0$ и переходя к переменному z, получим утверждения.

Теорема 1. 2. *Пусть $u(z)$ гармоническая функция области*

$$G((z_0R_0)(a_1, R_1)\cdot\cdot\cdot, (a_m, R_m))$$

Тогда

1°. ***Функция $u(z)$ представляется следующим образом:***

$$u(z)=u_0(z)+u_1(z)+\ldots+u_m(z) \quad z\in G((z_0, R_0), (a_1,R_1)\ldots, (a_m,R_m)) \quad (1.8)$$

где функции $u_k(z)$ $k=0,\ldots, m$ гармоничны соответственно в областях $G(z_0, R_0)$ и $G(a_k, R_k)$

2°. ***Функции***

$$u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta})\equiv L^{(\omega_0)}\{u_0(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta})\},$$

$$\underset{k=1,\ldots,m}{u_k^{(\omega_k)}}\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}}\right)\equiv L^{(\omega_k)}\left\{u_k\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}}\right)\right\} \quad (1.8')$$

будут гармоничными соответственно в $G(z_0, R_0)$ и $G(a_k, R_k)$

3°. *Для любой* $\underset{k=0,\ldots,m}{\rho_k(0<\rho_k<1)}$, $z\in G\left((z_0,R_0\rho_0),\left(a_1,\frac{R_1}{\rho_1}\right),\ldots,\left(a_m,\frac{R_m}{\rho_m}\right)\right)$ ***справедлива интегральная формула***

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left|\varphi_0-\theta,\frac{r_0}{R_0\rho_0},\omega_0\right|u^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta})d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left|-\varphi_k-\theta,\frac{R_k}{r_k\rho_k},\omega_k\right|u_k^{(\omega_k)}\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}}\right)d\theta \quad (1.9)$$

где

$$\varphi_0=\arg(z-z_0),\ \varphi_k=\arg(z-a_k),\ r_0=|z-z_0|,\ r_k=|z-a_k|\ \ k=1,\cdot\cdot, m,$$

$$P(\theta, r, \omega)=ReS(re^{i\theta}, \omega)$$

Доказательство. С помощью функции $u(z)$ с точностью до слагаемого $i\Gamma$, где Γ — вещественное число, восстановим аналитическую в области $G((z_0, R_0), (a_1, R_1),\cdot\cdot\cdot (a_m, R_m^*))$ функцию $f(z)$, действительная часть которой совпадает с $u(z)$. В представлении (1.4) функции $f(z)$, приравнивая действительные части, получим тождество (1.8).

В представлении (1.8)

$$u_k(z)=Re f_k(z) \quad (1.8'')$$

где $f_k(z)$ определены формулами (1.3) и (1.5).

Доказательство 2° и 3° следует из теоремы 1.1).

Обозначим

$$U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\cdot\cdot\cdot,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)\equiv U_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})+$$

$$+U_1^{(\omega_1)}\left(a_1+\frac{R_1}{\rho_1 e^{i\theta_1}}\right)+\cdot\cdot\cdot+U_m^{(\omega_m)}\left(a_m+\frac{R_m}{\rho_m e^{i\theta_m}}\right) \quad (1.10)$$

и

$$U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta)\equiv U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)/_{\theta_0,\ldots,\theta_m=\theta}, \qquad (1.10')$$

где функции $u_k(z)$ и $u_k^{(\omega_k)}$ определены формулами (1.8), (1.8″) и (1.8′).

Далее обозначим через $U_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(G)$ и $U^{*}_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(G)$ классы функций $u(z)$, гармоничных в области $G((z_0,R_0),(a_1,R_1),\ldots,(a_m,R_m))$, которые соответственно удовлетворяют следующим условиям

$$\sup_{\substack{0<\rho_k<1\\ k=0,\ldots,m}}\Big\{\underbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}_{(m+1)}\Big|U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)\Big|d\theta_0\ldots d\theta_m\Big\}=C<+\infty \qquad (1.11)$$

и

$$\sup_{\substack{0<\rho_k<1\\ k=0,\ldots,m}}\Big\{\int_0^{2\pi}\Big|U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta)\Big|d\theta\Big\}=C^{*}<+\infty \qquad (1.11')$$

Теорема 1.3°. *Условия (1.11) и (1.11′) эквивалентны, каждое из них равносильно тому, чтобы одновременно выполнялись*

$$\sup_{0<\rho_i<1}\Big\{\int_0^{2\pi}\Big|u_i^{(\omega_i)}\Big(a_i+\frac{R_i}{\rho_i e^{i\theta}}\Big)\Big|d\theta\Big\}<C_i<+\infty \quad i\neq 0 \qquad (1.12)$$

$$\sup_{0<\rho_0<1}\Big\{\int_0^{2\pi}\Big|u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})\Big|d\theta_0\Big\}<C_0<+\infty \qquad (1.12')$$

Доказательство. Если выполняется условие (1.11), то фиксируя числа $\rho_0,\ldots,\rho_{l-1},\rho_{l+1},\ldots,\rho_m$, а ρ_l меняя в интервале (0,1), можем написать:

$$\sup_{0<\rho_l<1}\Big\{\underbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}_{(m+1)}\Big|U_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)\Big|d\theta_0,\ldots,d\theta_m\Big\}\leqslant C.$$

Так как

$$\Big|U^{(\omega_l)}\Big(a_l+\frac{R_l}{\rho_l e^{i\theta_l}}\Big)\Big|\leqslant\Big|U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)\Big|+$$

$$+\Big\{\Big|u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})\Big|+\ldots+\Big|u_{l-1}^{(\omega_{l-1})}\Big(a_{l-1}+\frac{R_{l-1}}{\rho_{l-1}e^{i\theta_{l-1}}}\Big)\Big|+$$

$$+\Big|u_{l+1}^{(\omega_{l+1})}\Big(a_{l+1}\frac{R_{l+1}}{\rho_{l+1}e^{i\theta_{l+1}}}\Big)\Big|+\ldots+\Big|u_m^{(\omega_m)}\Big(a_m+\frac{R_m}{\rho_m e^{i\theta_m}}\Big)\Big|\Big\}$$

то

$$(2\pi)^{m-1}\int_0^{2\pi}\Big|u_l^{(\omega_l)}\Big(a_l+\frac{R_l}{\rho_l e^{i\theta_l}}\Big)\Big|d\theta_l\leqslant C+(2\pi)^{m-1}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq l}}^{m}\int_0^{2\pi}\Big|u_k^{(\omega_k)}\Big(a_k+$$

$$+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta_k}}\Big)\Big|d\theta_k$$

$\rho_0,\ldots,\rho_{l-1},\rho_{l+1},\ldots,\rho_m$ мы могли фиксировать так, что сумма, написанная в правой части этого равенства, была ограниченной. Отсюда получаем (1.12). (1.12′) получается аналогично. Наоборот, если выполнены условия (1.12) и (1.12′), то так как

$$|u^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)|\leqslant|u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})|+$$

$$+\left|u_1^{(\omega_1)}\left(a_1+\frac{R_1}{\rho_1 e^{i\theta_1}}\right)\right|+\cdots+\left|u_m^{(\omega_m)}\left(a_m+\frac{R_m}{\rho_m e^{i\theta_m}}\right)\right|,$$

будет выполняться и условие (1.11).

Равносильность (1.11) и (1.12) (1.12′) доказывается аналогично

Теорема 1.4. 1°. *Класс $U_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(G)$ совпадает с множеством функций, представимых следующим образом*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\varphi_0-\theta,\frac{r_0}{R_0},\omega_0\right)d\psi_0(\theta)+$$

$$+\sum_{k=1}^m\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(-\varphi_k-\theta,\frac{R_k}{r_k},\omega_k\right)d\psi_k(\theta)\quad 0\leqslant\varphi_k\leqslant 2\pi \tag{1.13}$$

где $\psi_k(\theta)$ $k=0,\ldots,m$ вещественные функции с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$, а φ_k, r_k, $P(\varphi,r,\omega)$, те же, что и в теореме 1.2.

2°. *В представлении* (1.15) *функция $\psi_k(\theta)$ может быть определена с помощью предела*

$$\psi_0(\theta)=\lim_{n_0\to+\infty}\int_0^\theta U_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_{0,n_0}e^{i\varphi})d\varphi;\ \psi_k(\theta)=\lim_{n_k\to+\infty}\int_0^\theta U_k^{(\omega_k)}\Big(a_k+$$

$$+\frac{R_k}{\rho_{k,n_k}e^{i\varphi}}\Big)d\varphi, \tag{1.14}$$

где $\rho_{k,n_k}\uparrow 1$ при $n_k\to+\infty$

3°. $U^{(i)}_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(G)$, *для которой* $u_i^{(\omega_i)}\left(a_i+\dfrac{R_i}{\rho_i e^{i\varphi}}\right)\geqslant 0$ *в* $G(a_k,R_k)$, $i\neq 0$ *или* $u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\varphi})\geqslant 0$ *при $i=0$ в $G(z_0,R_0)$ в представлении* (1.15) *соответствующая функция $\psi_k(\theta)$ не убывает на $[0,2\pi]$.*

Доказательство. При условии (1.12) и (1.12′) (см. теорему 1.3) если напишем теорему (5) М. М. Джрбашяна ([1], стр. 1095) для функции $u_0^*(w)=u_0(z_0+R_0w)$ и функции $u_i^*(w)=u_i\left(a_i+\dfrac{R_i}{w}\right)=$ $=u_-(z)$ и переходим к переменному z, то из (1.8) получим доказательство теоремы.

Теорема 1.5 *Пусть функция $\omega_i(x)\in\Omega$ при $i=0,1,\ldots,m$. Тогда*

1°. *Если функция* $\omega_k(x)$ *не убывает на* $[0.1)$ *и* $\omega_k(x)\uparrow+\infty$ *при* $x\to 1$, *то*

$$U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G)\subset U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G) \tag{1.15}$$

2°. *Если функция* $\omega_k(x)$ *не возрастает на* $[0,1)$ *и* $\omega_k(x)\downarrow 0$ *при* $x\uparrow 1$, *то*

$$U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G)\subset U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G) \tag{1.16}$$

3°. *В соответствующих условиях включения* (1.15) *и* (1.16) *строгие.*

Здесь

$$U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G)\equiv U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G)\,/\,\omega_k(x)\equiv 1$$

Доказательство. Пусть $u(z)\in U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G)$. Тогда (см. доказательство теоремы 1.3 и 1.4)

$$u_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\theta_0-\theta,\rho_0,\omega_0)\,d\psi_0(\theta);$$

$$u_i\left(\alpha_i+\frac{R_i}{\rho_ie^{i\theta_i}}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\theta_i-\theta,\rho_i,\omega_i)\,d\psi_i(\theta)$$

Если $k=0$, то $P(\theta_0-\theta,\rho_0,\omega_0)\geqslant 0$, а при $k\neq 0$ $P(\theta_k-\theta,\rho_k,\omega_k)\geqslant 0$ (([1]), стр. 1093). Отсюда получим (([1]), стр. 1097)
при $k=0$

$$\sup_{0<\rho_0<1}\left\{\int_0^{2\pi}|u_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})|\,d\theta_0\right\}<+\infty \tag{1.17'}$$

а при $k\neq 0$

$$\sup_{0<\rho_k<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|u_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta_k}}\right)\right|d\theta_k\right\}<+\infty \tag{1.17}$$

Так как из условия (1.18) или (1.17′) и из условия (1.12′) или (1.14′) следует условие (1.11) при $\omega_k(x)=1$, то $u(z)\in U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G)$.

2.° Пусть $u(z)\in U_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\ldots,\omega_m}(G)$. Тогда выполняются условия (1.12) и (1.17′) или (1.12′), (1.17) и (1.12) при $i\neq k$. Положим $\omega_k(0)=1$. По аналогии (([1]), стр. 1098) получается

$$\sup_{0<\rho_k<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|u_k^{(-\omega_k)}\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta_k}}\right)\right|d\theta_k\right\}<+\infty \text{ при } k\neq 0$$

или

$$\sup_{0<\rho_0<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})\right|d\theta_0\right\}<+\infty \quad k=0$$

отсюда вытекает, что $u(z)\in U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$

3°. Обозначим

$$P(\varphi_0,\dots,\varphi_m,\theta,\omega_0,\dots,\omega_m)\equiv P\left(\varphi_0-\theta,\frac{r_0}{R_0},\omega_0\right)+\sum_{k=1}^{m}P\left(-\varphi_k-\theta,\frac{R_k}{r_k},\omega_k\right)$$

Тогда (([1]), стр. 1098–99) $P(\varphi_0,\dots,\varphi_m,\theta,\omega_0,\dots\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m)\subset$ $\subset U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$, но не принадлежит к классу $U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$, а функция $P(\varphi_0,\dots,\varphi_m,\theta,\omega_0,\dots,\omega_k,\dots,\omega_m)$ принадлежит к классу $U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$, но не принадлежит к классу $U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$.

Обозначим

$$f^{(\omega_0,\dots,\omega_m)}(\rho_0,\dots,\rho_m,\theta_0,\dots,\theta_m)\equiv f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})+f_1^{(\omega_1)}\left(a_1+\frac{R_1}{\rho_1e^{i\theta_1}}\right)+\dots$$

$$\dots+f_m^{(\omega_m)}\left(a_m+\frac{R_m}{\rho_m e^{i\theta_m}}\right), \qquad (1.18)$$

где функции $f_k(z)$ $k=0,\dots,m$ определяются формулой (1,5).

Обозначим через $R_{\omega_0,\dots,\omega_m}(G)$ класс функций, аналитических в $G((z_0,R_0),\dots,(a_m,R_m))$, удовлетворяющих условию:

$$\sup_{\substack{0<\rho_k<1\\ k=0\dots m}}\Bigg\{\underbrace{\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}}_{m+1}\left|Ref^{(\omega_0,\dots,\omega_m)}(\rho_0,\dots,\rho_m,\theta_0,\dots,\theta_m)\right|d\theta_0\dots d\theta_m\Bigg\}<+\infty. \qquad (1.19)$$

Теорема 1.6. 1°. *Класс $R^{\omega_0,\dots,\omega_m}(G)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде*

$$f(z)=iC_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{-i\theta}\frac{z-z_0}{R_0},\omega_0\right)d\psi_0(\theta)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{-i\theta}\frac{R_k}{z-a_k},\omega_k\right)d\psi_k(\theta), \qquad (1.20)$$

где $Im\ C_0=0$ $\psi_k(\theta)$ $k=0,\dots,m$ — вещественные функции с конечным изменением на $[0,2\pi]$

2°. *Если для $f(z)\in R_{\omega_0,\dots,\omega_m}(G)$ в разложении* (1.4) $Ref_0^{(\omega_0)}(z)\geq 0$ *или* $Ref_k^{(\omega_k)}(z)\geq 0$, *то в представлении* (1.20) $\psi_0(\theta)$ *или* $\psi_k(\theta)$ *неубывающая ограниченная функция на* $[0,2\pi]$.

Доказательство. Условие (1.19) эквивалентно следующим условиям (см. доказательство теоремы 1.3)

$$\sup_{0<\rho_k<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|\operatorname{Re} f_k^{(\omega_k)}\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta_k}}\right)\right|d\theta_k\right\}<+\infty \tag{1.21}$$

и

$$\sup_{0<\rho_0<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|\operatorname{Re} f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})\right|d\theta_0\right\}<+\infty$$

отсюда по теореме (7) М. М. Джрбашяна ([1]. стр 1100) получается доказательство.

Автор благодарит В. С. Захаряна за руководство.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Դ. Թ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Բազմակապ տիրույթներում հարմոնիկ և անալիտիկ ֆունկցիաների դասեր և նրանց պարամետրական ներկայացումները

Հոդվածում բազմակապ տիրույթների համար ստացված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի՝ շրջանում հարմոնիկ և անալիտիկ ֆունկցիաների համար արդյունքների անալոգները։

Բազմակապ տիրույթների համար, որոնց եզրերը շրջանագծեր են, սահմանված են հարմոնիկ ֆունկցիաների և անալիտիկ ֆունկցիաների դասեր և ստացվել է նրանց պարամետրական ներկայացումները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] М. М. *Джрбашян*, «Изв. АН СССР», сер. мат. 32 (1968).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. С. Степанян

Об интегральном представлении функций класса М. М. Джрбашяна $H_p(\sigma)$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22/III 1979)

Г. М. Голузин и В. И. Крылов [1] дали представление функции $f(z)$ класса H_1 Рисса по ее угловым граничным значениям, заданным на множестве точек единичной окружности, имеющем положительную меру.

Это представление имеет следующий вид:

$$f(z) = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i} \int_E \frac{e^{\sigma\psi(t)} f(t)}{t-z} dt, \ |z|<1, \tag{1}$$

где $\psi(z) = u(z) + iv(z)$ — аналитическая функция в круге $|z|<1$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_E(e^{i\theta}) P_r(\theta-\varphi) d\theta,$$

E — множество положительной меры по Лебегу, принадлежащее единичной окружности: $mE>0$, $E\subset\Gamma = \{t;\ |t| = 1\}$, $\lambda_E(e^{i\theta})$ представляет характеристическую функцию этого множества, $P_r(\theta-\varphi)$ — ядро Пуассона,

$$\lambda_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t\in E \\ 0, & \text{если } t\in\Gamma\setminus E, \end{cases}$$

$$P_r(\theta-\varphi) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)},$$

$$0\leq r<1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi.$$

σ — положительное число.

Вопросу представимости аналитических в единичном круге функций посвящены многочисленные исследования. Среди них важное место занимает известная работа М. М. Джрбашяна [2].

Им же еще в 1945 г. был определен класс $H_p(\alpha)$ голоморфных в единичном круге функций, который содержит в себе классы H_p Рисса ($p>0$). Этот класс определяется следующим образом (см. [3], а также [2]).

Отнесем к классу $H_p(\alpha)$ $(p>0,\ \alpha>-1)$ *все функции* $f(z)$, *голоморфные в единичном круге* $|z|<1$, *для которых интеграл*

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho d\rho d\theta$$

существует.

Нетрудно убедиться, что класс Рисса $H_p\subset H_p(\alpha)$ при любом $\alpha>-1$.

Для классов $H_p(\alpha)$ были установлены следующие теоремы о представлениях:

1. *Если* $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(p\geqslant 1,\ \alpha>-1)$, *то*

$$f(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{f(\rho e^{i\theta})}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta,\ |z|<1$$

(см. [2], теорему 1).

2. *Если* $f(z)\in H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$, *то*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\varphi_0(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}\cdot|dt|,\ |z|<1, \tag{2}$$

где функция

$$\varphi_0(z)=\frac{\alpha+1}{2}\int\limits_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}}f(\rho z)d\rho,\ |z|<1,$$

принадлежит классу H_2 *Рисса (см. [2], теорему* 5).

В настоящей статье рассматривается следующий вопрос: построить аналогичное представление типа (1) для класса М. М. Джрбашяна $H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$.

Теорема 1. *Для любой функции* $f(z)$ *класса* $H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$ *и произвольного множества* $E(mE>0)$ *единичной окружности существует функция* $\varphi(z)$ *из класса* H_2 *Рисса в круге* $|z|<1$, *такая, что*

$$f(z) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)P_\sigma(t, z)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+3}{2}\right]+1}} \cdot \frac{dt}{t}, \quad |z|<1, \tag{3}$$

где $P_\sigma(t, z)$ — многочлен степени $q = \left[\frac{\alpha+3}{2}\right]$ относительно z и определяется из равенства

$$\frac{1}{q!} \frac{d^q}{dz^q} \left\{ \frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{t-z} \right\} = \frac{P_\sigma(t, z)}{(t-z)^{q+1}} e^{-\sigma\psi(z)}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in H_2(\alpha)$ $(\alpha > -1)$. Выбирая $\beta = 2 \cdot \left[\frac{\alpha+3}{2}\right] - 1$, имеем, что $\alpha < \beta$. Поскольку $H_2(\alpha) \subset H_2(\beta)$, то имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\beta+3}{2}}} |dt|, \tag{5}$$

где

$$\varphi(z) = \left[\frac{\alpha+3}{2}\right] \int_0^1 (1-\rho)^{\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]} f(\rho z) d\rho, \quad |z|<1$$

принадлежит классу H_2 Рисса. По теореме Г. М. Фихтенгольца ([4], стр. 97) $\varphi(z)$ можно представить интегралом Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$f(z) = \frac{1}{q!} \frac{d^q}{dz^q} \left\{ \varphi(z) z^q \right\}, \tag{7}$$

где $q = \left[\frac{\alpha+3}{2}\right]$.

Из теории граничных значений интеграла Пуассона — Стильтьеса известно, что

$$\lim_{r \to 1} u(re^{i\varphi}) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_E(e^{i\theta}) P_r(\theta-\varphi) d\theta = \lambda_E(e^{i\varphi})$$

почти всюду на единичной окружности.

Функцию, гармонически сопряженную с $u(z)$, обозначим через $v(z)$. Тогда $\psi(z)=u(z)+iv(z)$ будет аналитической функцией в единичном круге. Построим новую функцию $e^{\sigma\psi(z)}$, где σ — положительное число; эта функция ограничена по модулю при любом σ

$$|e^{\sigma\psi(t)}|=\begin{cases} e^{\sigma}, & \text{если } t\in E \\ 1, & \text{если } t\in\Gamma\setminus E. \end{cases}$$

Следовательно, $z^q\varphi(z)e^{\sigma\psi(z)}\in H_1$ Рисса.

По теореме Г. М. Фихтенгольца функция $z^q\varphi(z)e^{\sigma\psi(z)}$ представима интегралом Коши

$$z^q\varphi(z)e^{\sigma\psi(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)t^q}{t-z}\,dt,\quad |z|<1.$$

Отсюда получим, что

$$z^q\varphi(z)=\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)t^q}{t-z}\,dt,\quad |z|<1. \tag{8}$$

Учитывая (7) и (8), можем написать

$$f(z)=\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)t^qP_s(t,z)}{(t-z)^{q+1}}\,dt,\quad |z|<1, \tag{9}$$

где $P_s(t, z)$ — многочлен степени q относительно z и определяется из равенства (4).

Из (9) имеем, что

$$f(z)=\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_{E}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)P_s(t,\ z)}{(1-\bar{t}z)^{q+1}}\cdot\frac{dt}{t}+\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\setminus E}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)P_s(t,z)}{(1-\bar{t}z)^{q+1}}\frac{dt}{t}. \tag{10}$$

Так как $\operatorname{Re}\psi(z)>0$, $|z|<1$, $|e^{\sigma\psi(t)}|=1$, $t\in\Gamma\setminus E$, то предел последнего интеграла (10) при $\sigma\to\infty$ равен нулю. Переходя к пределу в равенстве (10) при $\sigma\to\infty$, окончательно получим (3). Теорема доказана.

Функцию $f(z)$ можно представить и без знака предела. С этой целью воспользуемся следующей формулой Карлемана ([1]):

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E}\frac{F(t)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}d\sigma\int\limits_{E}\frac{F(t)}{t-z}\left|\frac{\gamma(t)}{\gamma(z)}\right|^{\sigma}\ln\frac{\gamma(t)}{\gamma(z)}\,dt,$$

где $F(z)\in H_1$ Рисса, $mE>0$, $|\gamma(t)|=1$, $t\in\Gamma\setminus E$, $|\gamma(z)|>1$, $|z|<1$. Мы можем взять $\gamma(z)=e^{\psi(z)}$, а вместо $F(z)$ взять $\frac{1}{q!}\varphi(z)z^q$. Тогда будем иметь

$$\frac{\varphi(z)z^q}{q!}=\frac{1}{2\pi i q!}\int\limits_F \frac{\varphi(t)t^q}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i q!}\int\limits_0^\infty d\sigma\int\limits_E \frac{\varphi(t)t^q}{t-z}\left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}}\right]^\sigma|\psi(t)-\psi(z)|\,dt.$$

Имея в виду (7) для функций $f(z)$ класса $H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$, получаем интегральное представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E \frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+3}{2}\right]+1}}\frac{dt}{t}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty d\sigma\int\limits_E \frac{\varphi(t)P_\sigma(t,z)e^{\sigma\psi(t)-\sigma\psi(z)}}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+3}{2}\right]+1}}\cdot\frac{dt}{t},$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства

$$\frac{1}{q!}\frac{d^q}{dz^q}\left\{\frac{\psi(t)-\psi(z)}{t-z}e^{-\sigma\psi(z)}\right\}=\frac{P_\sigma(t,z)}{(t-z)^{q+1}}e^{-\sigma\psi(z)}. \tag{11}$$

Дифференцирование под знаком интеграла здесь допустимо в силу известной теоремы анализа ([3], стр. 218).

Теперь перейдем к установлению интегрального представления функций класса $H_p(\alpha)$, $\alpha>-1$ для произвольного p, $0<p<\infty$.

Теорема 2. *Для любой функции $f(z)$ класса $H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty$, $\alpha>-1)$ и произвольного множества $E(mE>0)$ единичной окружности существует функция $\Phi(z)\in H_2$ Рисса, $|z|<1$ такая, что имеет место представление*

$$f(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_E\frac{e^{\sigma\psi(t)}\Phi(t)P_\sigma(t,z)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\frac{dt}{t},\quad |z|<1,$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства (4) *при* $q=\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1$.

Доказательство. Известна следующая оценка:

$$M_f(\rho)\leqslant\frac{C_f}{(1-\rho)^{\frac{\alpha+2}{p}}}, \tag{12}$$

где $M_f(\rho)=\max\limits_{0\leq\theta<2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|$, C_f — постоянное число для произвольной $f(z)\in H_p(\alpha)$. Учитывая (12), легко убедиться, что класс $H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty$, $\alpha>-1)$ содержится в классе $H_2(\beta)$, где $\beta>\frac{2(\alpha+2)}{p}-1$.

Действительно, из (12) имеем

$$\frac{\alpha+2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\beta|f(\rho e^{i\theta})|^2\rho d\rho d\theta < M\int_0^1(1-\rho)^{\beta-\frac{2(\alpha+2)}{p}}\cdot d\rho,$$

где M — постоянное число, а интеграл в правой части сходится вследствие условия $\beta>\frac{2(\alpha+2)}{p}-1$.

Принимая $\beta=2\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1$, имеем, что

$$2\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1>\frac{2(\alpha+2)}{p}-1.$$

Следовательно, если $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty,\ \alpha>-1)$, то

$$f(z)\in H_2(\beta),\ \text{где}\ \beta=2\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1.$$

Используя представление (2), имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\Phi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\cdot|dt|,$$

откуда вышеизложенным способом доказывается, что

$$f(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int_E\frac{e^{\sigma\psi(t)}\Phi(t)P_\sigma(t,z)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\cdot\frac{dt}{t}.$$

Теорема доказана.

С помощью формулы Карлемана функцию $f(z)$ можно представить и без знака предела следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_E\frac{\Phi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\cdot\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}d\sigma\int_E\frac{\Phi(t)P_\sigma(t,z)e^{\sigma\psi(t)-\sigma\psi(z)}}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\cdot\frac{dt}{t},$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства (11) при $q=\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1$.

Теперь получим представление типа (1) для функций класса H_p $(0<p<1)$ Рисса.

Теорема 3. *Для любой функции $f(z)$ класса H_p Рисса $(0<p<1)$ и произвольного множества E $(mE>)$ единичной окружности существует функция $\mu(z)\in H_2$ Рисса, $|z|<1$ такая, что имеет место представление*

$$f(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_E\frac{e^{\sigma\psi(t)}\mu(t)P_\sigma(t,z)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{1}{p}\right]+1}}\cdot\frac{dt}{t}, \tag{13}$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства (4) при $q=\left[\dfrac{1}{p}\right]$.

Действительно, известна следующая теорема (([6]), теорема 5.11) Г. Г. Харди — Дж. Е. Литтлвуда.

Если $0<p<q\leqslant\infty$, $f(z)\in H_p$, $\lambda\geqslant p$ и $\alpha=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$, то

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\alpha\lambda-1}\left\{M_q(r,f)\right\}^{\lambda}dr<\infty,$$

где

$$M_q(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Принимая $0<p<1$, $\lambda=2$, $q=2$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(1-r)^{2\alpha-1}|f(re^{i\theta})|^2 dr\,d\theta<\infty.$$

Это означает, что $f(z)\in H_2(2\alpha-1)$, $2\alpha-1=\dfrac{2}{p}-2$.

Выбирая $\beta=2\left[\dfrac{1}{p}\right]-1>\dfrac{2}{p}-2$, получаем представление (13).

Пользуясь формулой Карлемана, получаем представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E\frac{\mu(t)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{1}{p}\right]+1}}\cdot\frac{dt}{t}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty d\sigma\int\limits_E\frac{\mu(t)P_\sigma(t,z)e^{\sigma\psi(t)-\sigma\psi(z)}}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{1}{p}\right]+1}}\cdot\frac{dt}{t},$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства (11) при $q=\left[\dfrac{1}{p}\right]$.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Ս. Ս. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Մ. Մ. Ջրբաշյանի $H_p(\alpha)$ դասի ֆունկցիաների ինտեգրալային ներկայացումների մասին

Գ. Մ. Գոլուզինը և Վ. Ի. Կռիլովը Ռիսի H_1 դասի ֆունկցիաների համար տվել են ներկայացում միավոր շրջանագծի դրական չափի բազմության վրա տրված ֆունկցիայի անկյունային եզրային արժեքների միջոցով։

Ներկա հոդվածում ստացված են նման տիպի ներկայացումներ Մ. Մ. Ջրբաշյանի $H_2(\alpha)$, $H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty,\ \alpha>-1)$ և Ռիսի $H_p(0<p<1)$ դասերի ֆունկցիաների համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. М. Голузин, В. И. Крылов*, Мат. сб., 40 (2), 1933. [2] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948. [3] *М. М. Джрбашян*, ДАН Арм. ССР, т. 3, № 1 (1945). [4] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950. [5] *Г. М. Фихтенгольц*, О простых кратных интегралах, зависящих от параметра, 1918. [6] *L. Duren*, Theory of H_p spaces, New York and London, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Г. Инджеян

Об ахроматическом числе гиперграфов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 30/IV 1979)

В настоящей работе рассматривается полная раскраска гиперграфов и приводятся некоторые достижимые оценки для ахроматического числа. Обобщаются ранее известные результаты Д. Геллера и К. Гудсона для ахроматического числа графов ([1]).

Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в ([2]).

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ — произвольное множество, а E — произвольное семейство подмножеств из X, причем для любого $e\in E$ имеет место $|e|\geq 2$. Пара $H=(X, E)$ называется гиперграфом с множеством вершин X и множеством ребер E.

Раскраску вершин гиперграфа будем считать правильной, если все вершины одного и того же ребра разноцветны. Правильная n-раскраска гиперграфа цветами $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется полной, если любая пара цветов $i, j\in\{1, 2, \ldots, n\}$ смежна, т. е. существуют смежные вершины x и y, окрашенные в i и j.

Гиперграф $H=(X, E)$ называется гиперграфом полных смежностей, если в нем любые две вершины смежны, т. е. принадлежат какому-то общему ребру.

Отождествление любых двух несмежных вершин в гиперграфе назовем элементарным гомоморфизмом. Гомоморфизм гиперграфа H — это последовательность его элементарных гомоморфизмов.

Хроматическое число $\gamma(H)$ (ахроматическое число $\psi(H)$) — это наименьшее (наибольшее) число красок, требующихся для полной раскраски вершин гиперграфа H.

Пусть $E(x)=\{e\in E/x\in e\}$,

$$L(x)=\{y\in X/\exists e\in E(x)(y\in e)\}$$

и

$$H-x=(X\setminus\{x\}, E\setminus E(x)),$$

$$H-e=(X, E\setminus\{e\}).$$

Теорема 1. *Для любого гиперграфа* $H=(X, E)$ *и любого ребра* $e \in E$

$$\psi(H)-|e|+1 \leqslant \psi(H-e) \leqslant \psi(H)+\left[\frac{|e|}{2}\right].$$

Доказательство. Пусть $e=(x_1, x_2,\dots, x_l)$ и $\psi(H)=n$. Предположим сначала, что не выполнено правое неравенство, т. е. $\psi(H-e)=$ $=n+k>n+\left[\frac{|e|}{2}\right]$. Очевидно при любой полной $n+k$-раскраске гиперграфа $H-e$ должны существовать вершины из $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, которые окрашены в один и тот же цвет. Зафиксируем одну из таких раскрасок, и пусть $X_j(e)=\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, $|X_j(e)|\geqslant 2$, $j=\overline{1, m}$, причем вершины множества $X_j(e)$ окрашены цветом j. Очевидно, $m\leqslant\left[\frac{|e|}{2}\right]$. Докажем существование такой перекраски вершин гиперграфа H, при которой уничтожаются все одноцветные классы, а число красок уменьшается не более чем на m. Рассмотрим множество $X_1(e)$.

Случай 1. Существует вершина $x \in X_1(e)$, смежная с вершинами всех цветов, кроме, быть может, тех, которыми раскрашены вершины из $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$.

Тогда, оставив цвет вершины x без изменения, перекрасим все вершины $X_1(e)\setminus\{x\}$ в различные цвета, отличные от цветов вершин $x_1, x_2, \dots, x_l$, используя в случае необходимости новые цвета.

Случай 2. Для любой вершины $x \in X_1(e)$ существует цвет q такой, что ни одна вершина из $\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \cup L(x)$ не окрашена в q.

Выберем произвольную вершину $x \in X_1(e)$ и, оставив ее цвет без изменения, перекрасим все вершины $X_1(e)\setminus\{x\}$ в различные цвета, отличные от цветов вершин $x_1, x_2, \dots, x_l$, используя в случае необходимости новые цвета. Но тогда, возможно, нарушится смежность цвета 1 с какими-то цветами L_p. Если все эти цвета присвоены также некоторым вершинам из $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, то переходим к рассмотрению множества $X_2(e)$.

Пусть теперь существует такой цвет $l_c \in L_p$, в который не окрашена ни одна вершина из $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$. Тогда перекрасим все вершины цвета 1 в цвет l_c (очевидно, полученная раскраска будет правильной). Таким образом, уменьшив количество цветов не более чем на 1, мы уничтожили одноцветный класс $X_1(e)$. Проделывая то же самое со всеми остальными множествами $X_j(e)$, где $j=2, 3, \dots, m$, мы придем к полной раскраске вершин гиперграфа H, откуда $\psi(H)\geqslant\psi(H-e)-m$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства $\psi(H-e)\leqslant\psi(H)+\left[\frac{|e|}{2}\right]$.

Теперь докажем, что $\psi(H-e)\geqslant\psi(H)-|e|+1$. Пусть $\psi(H)=n$. Тогда, очевидно, существует гомоморфизм гиперграфа H на n-вершинный гиперграф полных смежностей K_n. Следовательно, для любого ребра e из H найдется ребро e' из K_n такое, что $|e'|=|e|$, и существует гомоморфизм $H-e$ на K_n-e'. Поэтому $\psi(H-e)\geqslant\psi(H)-|e|+1$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого гиперграфа $H=(X, E)$ и любой вершины $x\in X$*

$$\psi(H)-|L(x)|\leqslant\psi(H-x)\leqslant\psi(H)+\left[\frac{|L(x)|}{2}\right].$$

Доказательство. Пусть $\psi(H)=n$. Рассмотрим раскраску гиперграфа $H-x$, порожденную полной n-раскраской гиперграфа H, где x окрашена цветом j_1. Если эта раскраска не полная, то существуют цвета j_k и j_m, присвоенные вершинам из $L(x)\cup\{x\}$, такие, что ни одна вершина цвета j_k не смежна ни с одной вершиной цвета j_m. Перекрасим в цвет j_m все вершины цвета j_k. Если эта раскраска не полная, то опять должны существовать цвета j_p и j_q, присвоенные вершинам из $L(x)\cup\{x\}$, такие, что никакая вершина цвета j_p не смежна ни с какой вершиной цвета j_q. Тогда перекрасим в j_q все вершины цвета j_p и т. д.

Легко заметить, что путем таких перекрашиваний в конце концов получим полную раскраску вершин гиперграфа $H-x$ не менее чем $\psi(H)-|L(x)|$ цветами. А это значит, что $\psi(H-x)\geqslant\psi(H)-|L(x)|$.

Докажем справедливость неравенства $\psi(H-x)\leqslant\psi(H)+\left[\frac{|L(x)|}{2}\right]$. Пусть $\psi(H-x)=n$. Если полная n-раскраска гиперграфа $H-x$ такова, что она является правильной раскраской вершин $X\setminus\{x\}$ в H, то, окрасив x одним из цветов $1, 2, \ldots, n$ или, если это невозможно, цветом $n+1$, получим полную раскраску вершин H. Пусть теперь полная n-раскраска гиперграфа $H-x$ не является правильной раскраской вершин $X\setminus\{x\}$ в H, т. е. существует ребро $e=(x_1,x_2,\ldots,x_t)\in E(x)$ такое, что не все вершины из $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\setminus\{x\}$ окрашены различно. Пусть $X_j(e)\subseteq\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\setminus\{x\}$, $|X_j(e)|\geqslant2$ и все вершины в $X_j(e)$ окрашены цветом j. Для каждого ребра e, перекрасив вершины из $e\setminus\{x\}$ так, как это было сделано в доказательстве теоремы 1, мы получим полную раскраску вершин множества $X\setminus\{x\}$ в H. После этого окрасим вершину x в один из использованных цветов, а если это невозможно, придадим ей новый, еще не использованный цвет. Очевидно, число красок будет не менее $\psi(H-x)-\left[\frac{|L(x)|}{2}\right]$, а это значит, что $\psi(H)\geqslant\psi(H-x)-\left[\frac{|L(x)|}{2}\right]$, откуда $\psi(H-x)\leqslant\psi(H)+\left[\frac{|L(x)|}{2}\right]$. Теорема доказана.

Легко можно убедиться, что нижние оценки для $\psi(H-e)$ и $\psi(H-x)$, приведенные в теоремах 1 и 2, достижимы. Верхние оценки тоже достижимы; более того, для любого k существуют гиперграфы H и G, в которых можно найти ребро $e\in H$ и вершину $x\in G$ такие, что $\psi(H-e)=\psi(H)+k$ и $\psi(G-x)=\psi(G)+k$. Нетрудно убедиться, что для гиперграфа $H=(X, E)$, где

$$X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{4k}\},$$

$$E=\{(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})\}\cup\{(x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_{4k})\}\cup E_1\cup E_2,$$

$$E_1=\{(x_i, x_j)/i, j\in[1, 2k]\}\setminus(\bigcup_{i=1}^{k}(x_{2i-1}, x_{2i})),$$

$$E_2=(\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=2k+1}^{3k}(x_{2i-1}, x_j))\cup(\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=3k+1}^{4k}(x_{2i}, x_j)),$$

и для ребра $e=(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$ имеет место $\psi(H-e)=\psi(H)+k$.

Для гиперграфа $G=(Y, W)$, где

$$Y=\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{4k+6}\},$$

$$W=\{(y_{2k+5}, y_{2k+6}, \ldots, y_{4k+6})\}\cup\{(y_1, y_3, y_4, \ldots, y_{2k+2})\}\cup\{(y_1, y_2)\}\cup$$
$$\cup\{(y_2, y_{2k+3}, y_{2k+4})\}\cup W_1\cup W_2,$$

$$W_1=\{(y_i, y_j)/i, j\in[3, 2k+4]\}\setminus(\bigcup_{i=1}^{k+1}(y_{2i+1}, y_{2i+2})),$$

$$W_2=(\bigcup_{i=1}^{k+1}\bigcup_{j=2k+5}^{3k+5}(y_{2i+1}, y_j))\cup(\bigcup_{i=1}^{k+1}\bigcup_{j=3k+6}^{4k+6}(y_{2i+2}, y_j))$$

и для вершины $y_1\in Y$ имеет место $\psi(G-y_1)=\psi(G)+k$.

Пусть $H=(X, E)$ — произвольный t-хроматичный гиперграф, а X_i — независимые множества, где $\bigcup_{i=1}^{t} X_i=X$. Через $\bar{H}$ обозначим класс гиперграфов $H=(\bar{X}, \bar{E})$, в которых независимыми множествами являются те же самые X_i и вершины из разных независимых множеств смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в H. Нетрудно убедиться, что для любых двух гиперграфов $\bar{H}_1, \bar{H}_2\in\bar{H}$ имеем $k(\bar{H}_1)=k(\bar{H}_2)$, где $k(H)$ — число нетривиальных компонент гиперграфа H. Через $\tau_i(1\leqslant i\leqslant t)$ обозначим переменную, принимающую значение 1, если существует по крайней мере одна вершина из X_i, инцидентная всем вершинам из $X\setminus X_i$, и 0 в противном случае.

Теорема 3. *Если* $H=(X, E)-t$ *— хроматичный гиперграф, то*

$$|X|-\max_{1\leqslant i\leqslant t}|X_i|+1\geqslant\psi(H)\geqslant\sum_{i=1}^{t}\tau_i+k(H),$$

где $\bar{H}\in\bar{H}$

Доказательство. Очевидно, что в полной ψ-раскраске гиперграфа H число цветов, принадлежащих только X_l, не может превосходить 1. А это значит, что $\psi(H) \leq |X| - \max_{1 \leq l \leq t} |X_l| + 1$.

Докажем справедливость нижней оценки.

Пусть $k(\bar{H}) = k$ и $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \ldots, \bar{H}_k$ — нетривиальные компоненты гиперграфа $\bar{H}$. Пусть $B_i \in \bar{H}_i$ — максимальная по числу вершин t-дольная часть, в которой любые две вершины из разных долей смежны; окрасим все вершины этой части цветом i.

Если $\tau_i = 1$, то существует вершина $x \in X_i$, смежная со всеми вершинами из $X \setminus X_i$; окрасим ее цветом $k+i$ $(i \in [1, t])$. Очевидно, что в гиперграфе H все эти цвета попарно смежны и смежные вершины окрашены различно. Каждой еще не окрашенной вершине придадим один из использованных цветов, а если это невозможно, то окрасим эту вершину новым цветом. В конечном итоге получим полную раскраску вершин гиперграфа H не менее чем $\sum_{i=1}^{t} \tau_i + k(\bar{H})$ цветами, т. е. $\psi(H) \geq \sum_{i=1}^{t} \tau_i + k(\bar{H})$. Теорема доказана.

Пусть теперь $H = (X, E)$ — произвольный p-вершинный гиперграф, а $\bar{\boldsymbol{H}}$ — класс гиперграфов $\bar{H} = (X, \bar{E})$, в которых две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в H; $\tau(H)$ — число вершин, смежных с $p-1$ вершинами.

Теорема 4. *Для любого p-вершинного гиперграфа H*

$$k(\bar{H}) + \tau(H) \leq \psi(H) \leq p, \qquad \text{где } \bar{H} \in \bar{\boldsymbol{H}}.$$

Доказательство. Верхняя оценка очевидна. Докажем справедливость нижней оценки.

Пусть $k(\bar{H}) = k$ и пусть $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \ldots, \bar{H}_k$ — нетривиальные компоненты $\bar{H}$. В каждой $\bar{H}_l$ выберем максимальную по числу вершин часть полных смежностей B_l и раскрасим все вершины B_l цветом l, а изолированным вершинам H придадим цвета $k+1, k+2, \ldots, k+\tau(H)$. Очевидно, все использованные цвета в гиперграфе H попарно смежны и не существует смежных вершин, окрашенных в один и тот же цвет. Каждой еще не окрашенной вершине придадим один из использованных цветов, а если это невозможно, то новый цвет. Таким образом мы получим полную раскраску для H не менее чем $k(\bar{H}) + \tau(H)$ цветами, т. е. $\psi(H) \geq k(\bar{H}) + \tau(H)$. Теорема доказана.

Теорема 1 является обобщением результата Д. Геллера и К. Гудсона:

$$\psi(H) - 1 \leq \psi(H - e) \leq \psi(H) + 1,$$

где H — произвольный граф, а e — произвольное его ребро. Нетрудно убедиться, что при $|e|=2$ неравенства теоремы 1 совпадают с неравенствами (*).

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Ս. Դ. ԻՆՃԵՅԱՆ

Հիպերգրաֆների ախրոմատիկ թվի մասին

H հիպերգրաֆի գագաթների ամեն ներկումը կանվանենք ճիշտ, եթե գույների կամայական i և j զույգի համար գոյություն ունեն x և y կից գագաթներ, որոնք ներկված են համապատասխանաբար i և j գույներով։ $\psi(H)$-ով կնշանակենք գույների մաքսիմալ թիվը, որն անհրաժեշտ է H-ը ճիշտ ներկելու համար։

$H=(X, E)$ հիպերգրաֆի կամայական $e \in E$ կողի և կամայական $x \in X$ գագաթի համար ստացված են հետևյալ հասանելի գնահատականները՝

$$\psi(H) - |e| + 1 \leqslant \psi(H-e) \leqslant \psi(H) + \left| \frac{|e|}{2} \right|$$

$$\psi(H) - |L(x)| \leqslant \psi(H-x) \leqslant \psi(H) + \left| \frac{L(x)}{2} \right|$$

որտեղ՝

$$L(x) = \{y \in X / \exists e \in E (x, y \in e)\}$$

Ստացված են նաև հասանելի գնահատականներ $\psi(H)$-ի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. Geller, K. Hudson,* Fundamenta Mathematicae, LXXXV, 1974. [2] *C. Berge,* Graphes et hypergraphes, Paris, Dunod, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

Г. А. Назарян

О дизъюнктных разбиениях множеств булевых функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Варшамовым 29/V 1979)

Пусть задано множество M. Разбиением этого множества, как обычно, будем называть семейство попарно непересекающихся подмножеств множества M такое, что сумма всех подмножеств этого семейства равна M. Для каждого заданного разбиения каждое подмножество, принадлежащее разбиению, будем называть смежным классом. При $M' \subseteq M$ разбиение M будем называть дизъюнктным по отношению к множеству M', если никакие два различных элемента из M' не попадают в один и тот же смежный класс этого разбиения.

В дальнейшем нас будут интересовать дизъюнктные разбиения множеств булевых функций. Мы покажем, что существует прямая связь между сложностью алгоритмического задания дизъюнктных разбиений множеств булевых функций и сложностью алгоритмов синтеза, определенных для этих множеств.

1. В дальнейшем будем использовать следующие сокращения и обозначения: б. ф.—булева функция, н. ч. — натуральное число, о. р. ф. — общерекурсивная функция, ч. р. ф.— частично рекурсивная функция. Слова в $\{0, 1\}$ естественным образом будем отождествлять с н. ч. [1]. Длину н. ч. x будем обозначать посредством $l(x)$. Если Q есть конечное множество н. ч., то через $\overline{Q}$ будем обозначать мощность этого множества. Размерность б. ф. будем указывать верхним индексом, так что если F есть б. ф. размерности n (т. е. слово в $\{0, 1\}$ длины 2^n, содержащее информацию о всех значениях F), то будем писать F^n. Букву B будем использовать для обозначения множества всех б. ф., букву M—в качестве переменной для обозначения произвольного перечислимого множества б. ф. (при этом посредством M_n будем обозначать множество б. ф. размерности n, принадлежащих M), букву C—для обозначения н. ч., буквы T и t—для обозначения одноместных о. р. ф. и букву H—для обозначения двухместных о. р. ф. Символ λ_M используем для обозначения характеристической функции множества M.

Будем предполагать фиксированным некоторое положительное рациональное число $\varepsilon < 1/2$, относительно которого рассматриваются все приближения б. ф. Все вводимые далее определения и обозначения, относящиеся к приближенным вычислениям и содержащие ε, мы будем употреблять и при рассмотрении точных вычислений ($\varepsilon = 0$); при этом, сохраняя обозначения, будем употреблять их без ε. Буквами r и ρ будем обозначать такие функции, что для слов a и a' в $\{0, 1\}$ одинаковой длины $r(a, a')$ есть расстояние по Хеммингу между a и a' (т. е. число компонент, в которых a и a' различаются) и $\rho(a, a') = r(a, a')/l(a)$. Если $\rho(a, a') < \varepsilon$, то будем писать $a \underset{\varepsilon}{=} a'$ и говорить, что a и a' ε-равны. При сравнении функций α и β символы $<\cdot$ и $\dot{=}$ будем использовать в следующем смысле: $(\alpha <\cdot \beta) \equiv \exists C \forall n(\alpha(n) < \beta(n) + C)$, $(\alpha \dot{=} \beta) \equiv (\alpha <\cdot \beta) \& (\beta <\cdot \alpha)$.

В качестве основного алгоритмического языка будем рассматривать некоторую аддитивно оптимальную нумерацию ч. р. ф. ([2,3]) φ, т.е. такую нумерацию одноместных ч. р. ф., что для любой другой нумерации одноместных ч.р.ф. ψ можно указать о.р.ф. ν такую, что $\forall i \forall n((\varphi_{\nu(i)} = \psi_i) \& \& l(\nu(i)) <\cdot l(i)))$. Будем говорить, что ч. р. ф. α вычисляет б. ф. F^n, если $\forall x(l(x) = n \supset \alpha(x) = F^n(x))$, и что ч. р. ф. α ε-вычисляет F^n (и писать $\alpha \underset{\varepsilon}{\to} F^n$), если α вычисляет б. ф., ε-равную F^n. Для нумерации φ зафиксируем последовательность Φ, сигнализирующих ([4]), и с каждой Φ_p ассоциируем ч. р. ф. $\hat{\Phi}_p$ такую, что $\forall n(\hat{\Phi}_p(n) = \max\limits_{l(x)=n} \Phi_p(x))$. Под ε-алгоритмом синтеза будем понимать произвольную о. р. ф. (будем использовать сокращение ε-а. с.), под областью применимости ε-а. с. A будем понимать множество $D^A = \{F | \varphi_{A(F)} \underset{\varepsilon}{\to} F\}$. Если A есть ε-а. с., то посредством $[A(F^n)]^{-1}$ будем обозначать множество $\{\bar{F}^n | A(\bar{F}^n) = A(F^n)\}$. Будем говорить, что A есть ε-а. с. для M, если $M \subseteq D^A$, при этом псевдофункцией Шеннона ([1]) M по A будем называть такую псевдофункцию $L^{\varepsilon}_{M,A}$, что $\forall n(L^{\varepsilon}_{M,A}(n) = \max\limits_{F^n \in M_n} l(A(F^n)))$. Посредством L^{ε}_M будем обозначать псевдофункцию Шеннона множества M, понимаемую естественным образом, а именно $L^{\varepsilon}_M(n) = \max(\min l(p) | \varphi_p \underset{\varepsilon}{\to} F^n)$, где максимум берется по б. ф. размерности n, принадлежащим M. ε-а. с. A будем называть оптимальным для M, если $L^{\varepsilon}_{M,A} \dot{=} L^{\varepsilon}_M$. Посредством $L^{\varepsilon,T}$ будем обозначать такую ч. р. ф., что $\forall n \forall F^n(L^{\varepsilon,T}(F^n) = l(\min\{p | \varphi_p \underset{\varepsilon}{\to} F^n) \& (\hat{\Phi}_p(n) < T(n))\}))$. Пусть a есть булев вектор; множество векторов той же длины, что и a, ε-равных a, будем называть шаром радиуса ε с центром a. Под ε-мощностью множества Q (ее будем обозначать через $d^{\varepsilon}(Q)$) б. ф. одинаковой размерности будем понимать минимальное число шаров радиуса ε, достаточное для покрытия Q.

Будем рассматривать такие разбиения Ω множества B, что каждый смежный класс содержит б. ф. одной и той же размерности. Такие разбиения индуцируют разбиения B_n, которые будем обозначать посредством Ω_n, а их мощность посредством $\overline{\Omega_n}$. Будем предполагать, что рассматриваемые разбиения рекурсивны, а именно, что для каждого разбиения Ω существует рекурсивная „n-характеристическая функция" f, удовлетворяющая условию: для всякого n, для любых y и z, принадлежащих B_n, равенство $f(n, y)=f(n, z)$ имеет место тогда и только тогда, когда y и z принадлежат одному и тому же смежному классу разбиения B_n. Для удобства будем предполагать, что разбиение задается одноместной рекурсивной функцией $\bar{f}$ такой, что $\forall n \forall F^n(\bar{f}(F^n)=f(n,F^n))$. Разбиение Ω множества B будем называть дизъюнктным по отношению к M, если в каждом смежном классе разбиения Ω содержится не более одного элемента из M. Разбиение Ω, дизъюнктное по отношению к M, будем для краткости называть дизъюнктом M. Разбиение Ω множества B будем называть ε-дизъюнктом M, если б. ф. из M, принадлежащие произвольному смежному классу этого разбиения, содержатся в некотором шаре радиуса ε. Разбиение Ω множества B будем называть конструктивным ε-дизъюнктом множества M, если оно является ε-дизъюнктом и существует частичный алгоритм, который по элементу всякого смежного класса, имеющего непустое пересечение с M, выдает центр шара радиуса ε, в котором содержатся все б. ф. этого пересечения. Нетрудно убедиться в том, что ε-дизъюнкты рекурсивных множеств конструктивны. ε-дизъюнкт Ω (соответственно ε-а. с. A) будем называть T-ε-дизъюнктом (T-ε-а. с.), если можно указать программу φ_p, вычисляющую характеристическую функцию разбиения Ω (вычисляющую ε-а. с. A) такую, что $\forall_n^\infty(\hat{\Phi}_p(2^n)<T(n))$; для обозначения указанных фактов будем использовать также записи $\Omega \in R_T$, соответственно $A \in R_T$, а также $\lambda_M \in R_T$, для обозначения аналогичного факта для λ_M.

2. Рассмотрения этого пункта относятся к случаю $\varepsilon=0$. Последующие два утверждения иллюстрируют существование множеств б. ф., существенно отличающихся по мощности от своих дизъюнктов (примеры множеств, для которых существуют равномощные им дизъюнкты, нетрудно построить).

2.1. *Для любой монотонной неограниченной о. р. ф. α (сколь угодно медленно растущей) можно указать перечислимое множество M такое, что $\forall n(\overline{M}_n<\alpha(n))$ и для всякого дизъюнкта Ω множества M имеет место $\forall_n^\infty(\Omega_n=B_n)$.*

Следующее утверждение является рекурсивным аналогом 2.1.

2.2. *Для любой монотонной неограниченной о. р. ф. α (сколь угодно медленно растущей) и для любой о. р. ф. T можно указать рекурсивное M такое, что $\forall n(\overline{M}_n<\alpha(n))$ и для всякого T-дизъюнкта Ω множества M имеет место $\forall_n^\infty(\Omega_n=B_n)$.*

Следующая теорема показывает, что сложность (например, время работы) оптимальных а. с. для множеств находится в прямой зависимости от сложности задания разбиения дизъюнктов множеств, близких к ним по мощности.

Теорема 1. *Можно указать о. р. ф. H такую, что для всякого перечислимого M и для всякой о. р. ф. T выполнено:*

(а) *по всякому T-дизъюнкту Ω множества M можно указать а. с. A для M такой, что*

$$L_{M,A}(n) < l(\overline{\Omega}_n) \text{ и } A \in R_{H(n,T(n))};$$

(б) *по всякому T-а. с. A для M можно указать дизъюнкт Ω множества M такой, что*

$$l(\overline{\Omega}_n) < L_{B,A}(n) \quad \text{и} \quad \Omega \in R_{H(n,T(n))},$$

если $\lambda_M \in R_T$, то можно указать дизъюнкт Ω множества M такой, что

$$l(\overline{\Omega}_n) < L_{M,A} \quad и \quad \Omega \in R_{H(n,T(n))}.$$

Согласно пункту (б) теоремы, для множеств со сложной характеристической функцией мощность дизъюнкта является нижней оценкой функции $L_{B,A}$, а не $L_{M,A}$. Как показывает следующее утверждение, нижняя оценка для $L_{B,A}$ является нижней оценкой для $L_{M,A}$ для многих n.

2.3. Для любых перечислимого множества M и о. р. ф. $\gamma(n) < 2^n$ выполнено: $[\forall(\text{а. с. } A \text{ для } M)\forall_n^\infty(L_{B,A}(n) > \gamma(n))] \supset [\forall(\text{а. с. } A \text{ для } M)\exists_n^\infty(L_{M,A}(n) > \gamma(n))]$.

Из теоремы и утверждений 1, 2 и 3 следует существование множеств, либо вовсе не допускающих оптимальных а. с., либо не допускающих просто вычислимых оптимальных а. с.

Из теоремы также следует, что сложность а. с. для множеств б. ф. не определяется сложностью б. ф., из которых эти множества составлены; а именно, множество может быть составлено из сложных б. ф., но допускать просто вычислимый оптимальный а. с. Этот факт вытекает из теоремы посредством следующего рассуждения: разобьем (некоторым простым способом) для каждого n множество B_n на n подмножеств $Q_n^1, Q_n^2, \ldots, Q_n^n$ равной мощности ($l(Q_n^i) = 2^n - l(n)$), далее из каждого множества Q_n^i выберем сложную б. ф. (например, такую, что при достаточно большом ограничении T на время работы программ эта б. ф. вычисляется лишь программами объема больше чем $2^n - l(n)$); множество выбранных таким образом б. ф. объявим множеством б. ф. размерности n искомого множества M; существование просто вычислимого оптимального а. с. для этого множества следует из возможности простого разбиения B_n. Таким образом имеет место следующее утверждение (оно нам понадобится и для последующих рассмотрений).

2. 4. *Можно указать такую о. р. ф. t, что для всякой о. р. ф. T существует множество M мощности $\overline{M}_n=n$, удовлетворяющее условию $\forall n\forall(F^n\in M_n)(L^T(F^n)\geqslant 2^n-l(n))$ и обладающее оптимальным t-а. с.*

Как показывает следующее утверждение, если простой а. с. A синтезирует оптимальную программу для сложной б. ф. F, то мощность множества $|A(F)|^{-1}$ будет достаточно велика.

2. 5. $\exists H\ \forall$а. с. $\varphi_z\forall n\forall(F^n\in D^{\varphi_z})(l(d[\varphi_z(F^n)]^{-1})>L^{H(n,\hat{\Phi}_z(2^n))}(F^n)-$
$-2l(\varphi_z(F^n))-C)$.

3. В этом пункте рассмотрим случай $\varepsilon\neq 0$. Утверждения этого пункта представляют собой аналоги утверждений пункта 2. Обозначение ω_ε используется для следующей функции: $\omega_\varepsilon(n)=2^n-\log\sum_{i=0}^{[\varepsilon\cdot 2^n]}C_{2^n}^i$, содержательно эта функция для всякого n задает логарифм ε-мощности B_n.

3. 1. *Для любой монотонной неограниченной о. р. ф. α (сколь угодно медленно растущей) можно указать перечислимое M такое, что $\forall_n(d^\varepsilon(M_n)<\alpha(n))$ и для всякого ε-дизъюнкта Ω множества M выполнено $\forall_n^\infty(\overline{\Omega}_n>\omega_{2\varepsilon}(n))$.*

3.2. *Для любой монотонной неограниченной о. р. ф. α (сколь угодно медленно растущей) и для всякой о. р. ф. T можно указать рекурсивное M такое, что $\forall n(d^\varepsilon(M_n)<\alpha(n))$ и для всякого T-ε-дизъюнкта Ω множества M выполнено $\forall_n^\infty(\overline{\Omega}_n>\omega_{2\varepsilon}(n))$.*

Теорема 2. *Можно указать о. р. ф. H такую, что для всякого перечислимого M и для всякой о. р. ф. T выполнено:*

(а) *по всякому конструктивному T—ε-дизъюнкту Ω множества M можно указать ε-а. с. A для M такой, что*

$$L^\varepsilon_{M,A}(n)<\cdot\ l(\overline{\Omega}_n)\ \text{и}\ A\in R_{H(n,T(n))};$$

(б) *по всякому T-ε-а. с. A для M можно указать конструктивный ε-дизъюнкт Ω множества M такой, что*

$$l(\overline{\Omega}_n)<\cdot\ L^\varepsilon_{B,A}(n)\ \text{и}\ \Omega\in R_{H(n,T(n))};$$

если $\chi_M\in R_T$, то можно указать ε-дизъюнкт Ω множества M такой, что

$$l(\overline{\Omega}_n)<\cdot\ L^\varepsilon_{M,A}\ \text{и}\ \Omega\in R_{H(n,T(n))}.$$

3. 3. $\forall M\forall\gamma<\omega_\varepsilon[\forall(\varepsilon\text{-а. с. } A \text{ для } M)\ \forall_n^\infty(L^\varepsilon_{B,A}(n)>\gamma(n))]\supset[\forall(\varepsilon\text{-а.с. } A \text{ для } M)\exists_n^\infty(L^\varepsilon_{M,A}(n)>\gamma(n))]$.

3. 4. Можно указать о. р. ф. t такую, что для всякой о. р. ф. T существует множество M такое, что $d^\varepsilon(M_n)=n$, удовлетворяющее условию $\forall n\forall(F^n\in M)(L^{\varepsilon,T}(F^n)>\omega_\varepsilon(n)-l(n))$ и обладающее оптимальным t-ε-а. с.

3.5. $\exists H \forall \varepsilon$-а. с. $\varphi_z \forall n \forall (F^n \in D^{\varphi_z})(l(d^{\varepsilon} | \varphi_z(F^n)|^{-1}) > L^{\varepsilon, H(n, \hat{\Phi}_z(2^n))}(F^n) - 2l(\varphi_z(F^n)) - C)$.

4. В этом пункте мы рассмотрим а. с. частного типа, эти а. с. будем называть T-оптимальными. А именно, ε-а. с. A для M будем называть T-оптимальным, если выполнено: для б. ф. из M этот а. с. синтезирует программы, которые не хуже по объему T-минимальных программ, т. е. $\forall n \forall (F^n \in M) | (\varphi_{A(F)} \underset{\varepsilon}{\Rightarrow} F) \& (l(A(F^n)) \leq \min l(p) | (\varphi_p \underset{\varepsilon}{\overset{\cdot}{\Rightarrow}} F^n) \& \& (\hat{\Phi}_p(n) < T(n)))|$. При $\varepsilon = 0$ данное определение соответствует случаю точных вычислений. Примером T-оптимальных а. с., как нетрудно убедиться, могут служить а. с. из утверждений 2.3 и 3.3; указанные а. с. просто вычислимы и в то же время являются оптимальными для сложных множеств (множеств с трудно вычислимой характеристической функцией). Как показывают следующие утверждения, T-оптимальные а. с. могут быть просто вычислимыми только для множеств со сложной характеристической функцией.

4.1. *Можно указать о. р. ф. H такую, что для всякого рекурсивного M такого, что $\overline{\overline{M}}_n \to \infty$, и для всякой о. р. ф. T выполнено: если φ_p и φ_q суть соответственно T-оптимальный а. с. для M и характеристическая функция M, то* $\forall_n^{\infty}(H(n, \max(\hat{\Phi}_p(2^n), \hat{\Phi}_q(2^n))) > T(n))$.

4.2. *Можно указать о. р. ф. H такую, что для всякого рекурсивного M такого, что $d^{\varepsilon}(M_n) \to \infty$, и для всякой о. р. ф. T выполнено: если φ_p* и *φ_q суть соответственно T-оптимальный ε-а. с. для M и характеристическая функция M, то* $\forall_n^{\infty}(H(n, \max(\hat{\Phi}_p(2^n), \hat{\Phi}_q(2^n))) > T(n))$.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность И. Д. Заславскому за внимание и ряд существенных замечаний при написании работы.

Вычислительный центр
Министерства автомобильного транспорта
Армянской ССР

Հ. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Բուլյան ֆունկցիաների բազմությունների դիզյունկտ տրոհումների մասին

Բոլոր բուլյան ֆունկցիաների (բ. ֆ.) բազմության տրոհումը կանվանենք դիզյունկտ բ. ֆ. M բազմության նկատմամբ, եթե յուրաքանչյուր տրոհման դասում կա մեկից ոչ ավել բ. ֆ., որը պատկանում է M-ին։

Ցույց է տրվում, որ ր. ֆ. բազմության համար որոշված սինթեզող ալգորիթմի բարդությունը ուղիղ համեմատական կապի մեջ է այդ բազմության նկատմամբ դիզյունկտ տրոհման բարդությունից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Мальцев*, Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», М., 1965. [2] *А. Н. Колмогоров*, Проблемы передачи информации, 1, 1 (1965). [3] *И. Д. Заславский*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 16 (1969). [4] *М. Блюм*, Сб. пер. «Проблемы математической логики», М., «Мир», 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 2

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

О сходимости сферических средних Рисса кратных интегралов Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 31/V 1979)

В настоящей работе рассматривается сходимость по мере интегральных сферических средних Рисса при критическом показателе $\delta=\frac{N-1}{2}$ после изменения значения разлагаемой функции вне заданного совершенного нигде не плотного множества. Интегральными сферическими средними Рисса порядка δ называются интегралы

$$\sigma_R^\delta(x,f)=\int\limits_{|t|<R}\left(1-\frac{|t|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(t)\,e^{i(t,x)}\,d\,t,$$

где $\hat{f}(t)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{E^N} f(x)\,e^{-i(t,x)}d\,x$ — преобразование Фурье функции $f(x)\in L^1(E^N)$; $E^N - N$-мерное евклидово пространство $x=(x_1 x_2 \ldots \ldots x_N)\in E^N, |x|=(x_1^2+\ldots x_N^2)^{1/2}; (t,x)=t_1\cdot x_1+\ldots+t_N x_N$ — скалярное произведение t и x.

Стейном (см. ([1]), стр. 192) было доказано, что для любой функции $f(x)\in L^1(E^N)$ интегральные сферические средние порядка $\delta>\frac{N-1}{2}$ сходятся к ней почти всюду и в метрике $L^1(E^N)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $f(x)\in L^1(E^N)$ и $Q\subset E^N$ — любое совершенное нигде не плотное множество. Тогда можно определить функцию $F(x)\in L^1(E^N)$ такую, что $F(x)=f(x)$ на Q и ее интегральные сферические средние Рисса порядка $\delta=\frac{N-1}{2}$ сходятся к ней по мере.*

Основным средством для доказательства теоремы 1 является следующая

Лемма 1. *Пусть даны квадрат* $\Delta \subset E^N$, *совершенное нигде не плотное множество* $Q \subset \Delta$, *действительные числа* $R_0 > 1$, $\gamma \neq 0$ *и* $\varepsilon > 0$.

Тогда существуют ограниченная функция $\varphi(x)$ *и измеримое множество* E, $\operatorname{mes} E < [4\pi(\varepsilon + |\Delta|^{1/N})]^N$ *такие, что*

$$\text{а)} \quad \varphi(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in Q \\ 0 & \text{при } x \bar{\in} \Delta \end{cases};$$

$$\text{б)} \quad \int\limits_{E^N} |\varphi(x)|\, dx \leqslant 2\, |\gamma| \cdot |\Delta|;$$

$$\text{в)} \quad |\hat{\varphi}(y)| = \left| \int\limits_{E^N} \varphi(x)\, e^{-i(x,y)} dx \right| < \varepsilon \quad \text{при } |y| \leqslant R_0;$$

$$\text{г)} \quad \left| \sigma_R^{\frac{N-1}{2}}(x, \varphi) \right| < B\, \varepsilon^{-\nu} |\gamma|\, |\Delta| \quad \text{при } x \in E, \text{ для всех } R,$$

где B—абсолютная постоянная.

Лемму 1 можно доказать путем применения некоторых элементов конструкции Меньшова, предложенной им в работе ([2]).

Этот же метод можно применить для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *—полная в* $L^2[0,1]$, *ортонормированная система ограниченных функций и* $\varepsilon > 0$ *любое положительное число. Тогда существуют измеримое множество* E, $\operatorname{mes} E < \varepsilon$ *и возрастающая подпоследовательность натуральных чисел* $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ *со следующими свойствами: для любой функции* $f(x) \in L^1[0,1]$ *можно найти такую функцию* $F(x) \in L^1[0,1]$, *что*

$$F(x) = f(x) \qquad \text{при} \qquad x \in E^c = [0,1] \setminus E$$

и подпоследовательность $S_{N_k}(F, x)$ *частичных сумм* $S_n(F, x)$ *ряда Фурье функции* $F(x)$ *сходится к ней почти всюду и в метрике* $L^1[0,1]$.

В связи с этим отметим, что Марцинкевич (см. ([3]), стр. 358—362) доказал, что существуют $f_0(x) \in L[0, \pi]$ и полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченных функций такие, что любая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f_0(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится почти всюду на $[0, \pi]$.

Теорема 2 показывает, что любую функцию $f(x) \in L^1$ можно изменить на множествах, зависящих только от системы $\{\varphi_n(x)\}$ и имеющих сколь угодно малую меру, таким образом чтобы некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье вновь полученной функции сходилась бы к ней почти всюду.

Доказательство теоремы 2 основано на следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *—полная в* $L^2[0,1]$ *ортонормированная система ограниченных функций и* $\varepsilon > 0$.

Тогда существует измеримое множество E, $\operatorname{mes} E < \varepsilon$ *со следующими свойствами: для любых* $f(x) \in L^2[0,1]$, $N > 1$ и $\delta > 0$, *существует* $g(x) \in L^2[0,1]$ *такая, что*

$$1) \quad g(x) = f(x) \quad \text{при } x \in E^c;$$

$$2) \quad \int_0^1 |g(x)|\, dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)|\, dx;$$

$$3) \quad \left| \int_0^1 g(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right| < \delta, \quad 1 \leq k \leq N.$$

В работе автора ([4]) было установлено, что если *ПОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из непрерывных функций, то в формулировке теоремы 2 в качестве множества E^c можно взять любое нигде не плотное замкнутое множество.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну за постановку задач и внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ֆուրյեի բազմապատիկ ինտեգրալների սֆերիկ միջինների զուգամիտության մասին

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները։

Թեորեմ 1. Եթե $Q \subset E^N$ ամենուրեք նոսր կատարյալ բազմություն է, ապա ցանկացած $f(x) \in L^1(E^N)$ կարելի է փոխել Q—ից դուրս այնպես, որ նոր ստացված ֆունկցիայի կրիտիկական ցուցիչով Ռիսի ինտեգրալ սֆերիկ միջինները ըստ չափի զուգամիտեն իրեն։

Թեորեմ 2. Եթե $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$-ը $L^2[0,1]$—ում լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ է, ապա գոյություն ունեն չափելի բազմություն E և բնական թվերի ենթահաջորդականություն $N_1 < N_2 < \ldots < N_k < \ldots$ այնպիսիք, որ ցանկացած $f(t) \in L^1[0,1]$—ի համար կարելի է գտնել $F(t) \in L^1[0,1]$ $F(t) = f(t), t \in E$, այնպես, որ $F(t)$—ի Ֆուրյեի շարքի (ըստ $\{\varphi_n(t)\}$—սիստեմի) մասնակի գումարների $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$—համարներով ենթահաջորդականությունը համարյա ամենուրեք և $L^1[0,1]$ մետրիկայով զուգամիտի իրեն։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. Стейн, Г. Вейс.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, «Мир», М., 1974. [2] *Д. Е. Меньшов.* О рядах Фурье от суммируемых функций, ТММО, 1, 1952. [3] *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958. [4] *М. Ж. Григорян.* О сходимости двойных рядов в метрике $L^p[0,1] \times [0,1]$, $0 < p < 1$, ДАН Арм. ССР, т. 68, № 4 (1979).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 2

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. В. Бахшецян

О перестановках системы Уолша

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 12/VI 1979)

Пусть $\{f_k\}_0^\infty$ и $\{g_k\}_0^\infty$ — две перестановки системы Уолша*.

Определение. *Системы* $\{f_k\}$ *и* $\{g_k\}$ *называются сильно изоморфными, если существует сохраняющее меру отображение* $T:[0,1]\to[0,1]$, *которое взаимно-однозначно всюду за исключением, быть может, счетного множества, и для любого* k

$$f_k(Tx)=g_k(x) \qquad (x\in[0,1]).$$

Если же $\{f_k\}$ *и* $\{g_k\}$ *— перестановки системы Уолша внутри „пачек", то назовем их кусочно-изоморфными, если для любого* n *существует сохраняющее меру взаимно-однозначное отображение* T_n: $:[0,1]\to[0,1]$ *такое, что*

$$f_k(Tx)=g_k(x) \qquad (k=2^n,\ 2^n+1,\ \ldots,\ 2^{n+1}-1).$$

Очевидно, что ряды по сильно изоморфным системам неразличимы в вопросах сходимости в том или ином смысле. Известно, что системы Уолша и Уолша—Пэли сильно изоморфны ([2], [3]), а системы Уолша—Пэли и Уолша—Качмажа кусочно-изоморфны ([2])**, но не сильно изоморфны (см., например, ([3])).

Мы будем рассматривать класс Ω тех перестановок системы Уолша—Качмажа $\Psi=\{\psi_k\}_0^\infty$, которые кусочно-изоморфны системе Уолша—Качмажа.

В работе ([2]) вводятся *линейные* перестановки. В несколько иной терминологии эти же перестановки рассматривались и в работе ([3]), при этом оказывается ([2,3]), что класс линейных перестановок совпадает с классом сильно изоморфных перестановок. Далее в ([2]) опре-

* Определение систем Уолша, Уолша—Пэли и Уолша—Качмажа см., например, в ([1]).

** Этот результат одновременно и независимо от работы ([2]) был получен также Р. И. Овсепяном (не опубликовано).

деляются *кусочно-линейные* перестановки, которые задаются последовательностью матриц

$$P_n = (p_{ij}^n)_{i,j=0}^n \quad p_{ij}^n = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Из определения следует, что каждая кусочно-линейная перестановка является кусочно-изоморфной. Оказывается, что имеет место в некотором роде и обратное утверждение.

Теорема 1. *Ω можно представить в виде объединения непересекающихся классов попарно сильно изоморфных перестановок, из которых ровно одна кусочно-линейна.*

Пусть $\sigma \in \Omega$. Тогда по теореме 1 существует кусочно-линейная перестановка σ_0 такая, что системы $\{\psi_{\sigma(k)}\}$ и $\{\psi_{\sigma_0(k)}\}$ сильно изоморфны. Далее, пусть перестановка σ_0 задается последовательностью матриц (1). Через P_n^* обозначим транспонированные матрицы P_n, а через σ_0^* кусочно-линейную перестановку, порожденную последовательностью $\{P_n^*\}_0^\infty$. Тогда справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы Е. М. Семенова ([4]) (которой мы пользуемся для доказательства нашего утверждения).

Теорема 2. *Пусть $p \neq 2$, $p > 1$ и $\sigma \in \Omega$. Для того, чтобы существовал линейный ограниченный оператор $A: L^p \to L^p$ такой, что $A\psi_n = \psi_{\sigma(n)}$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого C и для любого n выполнялось неравенство*

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=2^k n}^{2^k n + 2^k - 1} \Delta_{\sigma_0^*(i)}\Big) \leqslant C\, 2^{-n} \quad \text{при} \quad p > 2$$

и

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=2^k n}^{2^k n + 2^k - 1} \Delta_{\sigma_0^{*-1}(i)}\Big) \leqslant C\, 2^{-n} \quad \text{при} \quad p < 2,$$

где σ_0^{*-1} — перестановка, обратная σ_0^*, $\Delta_k = \left[\dfrac{j-1}{2^m}, \dfrac{j}{2^m}\right]$ $(m = [\log_2 k]$, $j = k - 2^m)$.

Отсюда, в частности, вытекает

Теорема 3. *Пусть $p \geqslant 1$, $p \neq 2$. Не существует линейного ограниченного оператора $A: L^p \to L^p$ такого, что $A\psi_n = w_n$ $(n = 0, 1 \ldots)$, где $W = \{w_n\}_0^\infty$ — система Уолша — Пэли.*

Таким образом, система Уолша — Качмажа не является ни сильно изоморфной, ни даже изоморфной в обычном смысле (теорема 3) системе Уолша. И тем не менее, при $p > 1$ она базис и система сходимости в L^p. Для $p \geqslant 2$ это следует из оценки

$$\Big\| \sup_m \Big| \sum_1^m a_n(f) \psi_n(x) \Big| \Big\|_p \leqslant A_p \| f \|_p \quad \text{для любого } f \in L^p, \tag{2}$$

которую при $p = 2$ для кусочно-линейных перестановок получил Ф. Шипп ([2]), а при $p > 2$ для некоторого класса перестановок, который формально уже класса перестановок, кусочно-изоморфных системе Уолша—Пэли (см. ниже, теорему 4)—У.-С. Янг ([5]), причем У.-С. Янг пользуется методом Карлесона-Ханта*.

Из оценки (2) по соображениям двойственности следует, что система Ψ—базис и в L^p, $1<p<2$. Однако утверждение, что Ψ—система сходимости в L^p ($p<2$), доказывается другим методом ([5,6]). Оценка типа (2) для $p<2$ неизвестна.

Покажем, что для $p\geqslant 2$ (2) является следствием того, что Ψ кусочно-изоморфна системе Уолша—Пэли ([2]), для которой оценка типа (2) известна ([7]) при $p>1$. Собственно, эту идею использовал Ф. Шипп для получения оценки (2) при $p=2$ ([2]).

Теорема 4. *Для любого $p\geqslant 2$ существует постоянная A_p такая, что для произвольной системы $G=\{g_k\}_0^\infty$, кусочно-изоморфной системе Уолша—Пэли W, верно неравенство*

$$\| \sup_m | \sum_1^m a_n(f) g_n(x) | \|_p \leqslant A_p \| f \|_p \tag{3}$$

для всякого $f\in L^p$.

Доказательство.

$$\int \sup_m |\sum_1^m a_l g_l|^p \equiv \int \sup_m |S_m(f, G)|^p \leqslant 2^p \Big(\int \sup_n |S_{2^n-1}(f, G)|^p +$$

$$+ \int \sup_n \sup_{2^n<m<2^{n+1}} |\sum_{l=2^n}^m a_l g_l|^p \Big) \leqslant 2^p \Big(\int \sup_n |S_{2^n-1}(f, W)|^p +$$

$$+ \sum_{n=0}^\infty \int \sup_{2^n<m<2^{n+1}} |\sum_{l=2^n}^m a_l g_l|^p \Big) \leqslant 2^p C_p \Big(\int |f|^p + \sum_{n=0}^\infty \int |S_{2^{n+1}-1}(f, G) -$$

$$- S_{2^n-1}(f, G)|^p \Big).$$

Здесь использована кусочно-изоморфность системы G и наличие оценки типа (2) для системы W. Далее, пусть G и R—два полинома по разным „пачкам" системы Хаара. Тогда для $p\geqslant 2$ имеет место неравенство

$$\| Q \|_p^p + \| R \|_p^p \leqslant \| Q + R \|_p^p.$$

Это вытекает из числового неравенства

$$a^p + b^p \leqslant \frac{(a+b)^p + (a-b)^p}{2},$$

* Поскольку доказательство теоремы У.-С. Янга, насколько нам известно, в периодической литературе не публиковалось, то мы не знаем, проходит ли этот метод доказательства для класса кусочно-изоморфных перестановок.

верного для $a\geqslant b\geqslant 0$ при $p\geqslant 2$. Отсюда для любого N

$$\sum_{n=0}^{N-1}\int|S_{2^{n+1}-1}(f, G)-S_{2^n-1}(f, G)|^p\leqslant\int|S_{2^N-1}(f, G)|^p=\int|S_{2^N-1}(f, W)|^p\leqslant$$

$$\leqslant C_p\int|f|^p.$$

Это вместе с (4) дает (3). Теорема 4 доказана.

Заметим, что оценка типа (2) не верна для произвольной перестановки даже внутри „пачек" (ни при каком $p\geqslant 1$). Действительно, пусть ряд Фурье $\sum c_k(f)w_k(x)$ некоторой функции f из L^p расходится после некоторой перестановки τ (существование τ и f следует из того, что равномерно ограниченная нормированная система не является безусловным базисом в L^p ([8])). Выберем последовательность $\{l_k\}_1^\infty$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\sum_{l=n}^{m} c_l w_l\|_p<\frac{1}{2^k}\qquad \text{для любых } m>n>l_k,\ k=1, 2, \ldots$$

Далее, из расходимости ряда $\sum c_{\tau(l)}w_{\tau(l)}$ в L^p следует существование последовательности полиномов $P_k=\sum\limits_{l=i_k}^{j_k} c_{\tau(l)}w_{\tau(l)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ таких, что при любом k $\|P_k\|_p$ больше некоторого $\varepsilon_0>0$, причем $\{P_k\}$ можно выбрать так, чтобы для всех k было

$$l_k<n_k \quad\text{и}\quad m_k<n_{k+1},$$

где

$$n_k=\min_{i_k\leqslant l\leqslant j_k}\tau(l),\qquad m_k=\max_{i_k\leqslant l\leqslant j_k}\tau(l).$$

Пусть последовательность $\{N_k\}_1^\infty$ такая, что $2^{N_k}>m_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, и $\Omega_k=\{n: n_k<n<m_k,\ n\neq\tau(l)\quad(i_k\leqslant l\leqslant j_k)\}$.

Рассмотрим ряд (r_n—функции системы Радемахера)

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_{N_k}(P_k+\sum_{n\in\Omega_k} c_n w_n)=\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=i_k}^{j_k} c_{\tau(l)}w_{2^{N_k}+\tau(l)}+\sum_{n\in\Omega_k} c_n w_{2^{N_k}+n}),$$

который расходится (в силу $\|r_{N_k}P_k\|_p=\|P_k\|_p>\varepsilon_0$) и является перестановкой внутри „пачек" ряда Фурье функции $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=n_k}^{m_k} c_n w_{2^{N_k}+n}$. (Заметим, что $\|\sum\limits_{n=n_k}^{m_k} c_n w_{2^{N_k}+n}\|_p=\|\sum\limits_{n=n_k}^{m_k} c_n w_n\|_p<1/2^k$ и $\limsup\limits_{k\to\infty}\ \sup\limits_{n_k<m<m_k}\|\sum\limits_{n=n_k}^{m} c_n w_n\|_p=0$. Так что $g\in L^p$).

Из сказанного выше мы видим, что в L^p, $p>1$, ряды Фурье по системам Уолша—Пэли и Уолша—Качмажа ведут себя одинаково. Однако не так обстоит дело при $p=1$.

Предложение. *Существует $f\in L$ такая, что ее ряд*

Фурье — Уолша сходится п. в., однако в порядке Уолша—Качмажа расходится п. в.

В заключение автор благодарит Р. И. Овсепяна, под руководством которого выполнена эта работа.

Ереванский государственный университет

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵՑՅԱՆ

Ուոլշի սիստեմի տեղափոխությունների մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրված է Ուոլշի սիստեմի խմբերի ներսում տեղափոխությունների որոշ դաս։

Այդ դասի համար ստացված են Ուոլշ-Կաչմաժի սիստեմին իզոմորֆ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ (թեորեմ 2)։ Մասնավորապես նշված է (թեորեմ 3), որ Ուոլշ—Պեյլիի $\{w_n\}$ և Ուոլշ—Կաչմաժի $\{\psi_n\}$ սիստեմները իզոմորֆ չեն L^p-ում $(p\neq 2)$ սովորական իմաստով, այսինքն գոյություն չունի անընդհատ և սահմանափակ օպերատոր $A: L^p\to L^p$ այնպիսին, որ $A\psi_n = w_n$։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн*, Итоги науки, Сер. матем., матем. анализ, 1970, ВИНИТИ, М., 1971. [2] *Ф. Шипп*, Мат. заметки, т. 18, № 2 (1975). [3] *А. Б. Бахшецян*, Изв АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 10, № 1 (1975). [4] *Е. М. Семенов*, ДАН СССР, т. 242, № 6 (1978). [5] *Wo-Sang Young*, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974). [6] *Wo-Sang Young*, Proc. Amer. Math. Soc., 44 (1974). [7] *P. Sjölin*, Ark. mat., 7, № 6 (1969). [8] *В. Ф. Гапошкин*, УМН, т. XIII, вып. 4 (82) (1958).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 2

УДК 522.61

АСТРОФИЗИКА

Б. О. Карапетян, В. С. Осканян

К расчету информационных характеристик астрономической наблюдательной системы

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 12/V 1979)

В работе (¹) была рассмотрена в общем виде передача оптической информации при астрономических наблюдениях, определены обобщенные информационные характеристики наблюдательной системы, включающей в себя все звенья тракта, по которому проходит информация о наблюдаемом объекте. Такими звеньями являются, в частности, межзвездная среда и земная атмосфера, телескоп, оптический прибор-анализатор, светоприемник и регистратор. Было показано, что количество информации может служить обобщенным критерием, позволяющим учитывать влияние отдельных звеньев на информационные свойства системы в целом. В настоящей работе выводятся некоторые расчетные выражения, связывающие информационные характеристики системы с условиями наблюдений и параметрами оптических инструментов и приемной аппаратуры.

Если входное сообщение и шумы характеризуются максимальной неопределенностью, то количество информации на выходе осесимметричной системы

$$H = A \cdot H' = 2\pi A \int_0^\infty \log_2 [1 + m(o) \cdot T^2(\nu)] \, \nu \cdot d\nu \text{ бит}, \quad (1)$$

где H' — удельное количество информации, бит · $мм^{-2}$, A — площадь изображения, $мм^2$; ν — пространственная частота, $мм^{-1}$; $T(\nu)$ — частотно-контрастная характеристика (ЧКХ), $m(o)$ — число различимых градаций уровня сигнала при нулевой пространственной частоте.

В случае, когда приемная поверхность делится на n изопланатических областей, отличающихся друг от друга по ЧКХ,

$$H = 2\pi \sum_{i=1}^{n} A_i \int_0^\infty \log_2 [1 + m(o) \cdot T_i^2(\nu)] \, \nu \cdot d\nu \text{ бит}, \quad (2)$$

где A_i, $T_i(\nu)$ — соответственно площадь и ЧКХ i-ой области.

Как было отмечено в ([1]), носителями информации на выходе системы являются так называемые «сигнальные события» (электрические импульсы, почерневшие зерна фотоэмульсии, вспышки на экране ЭОП или ЭЛТ, деления шкалы измерительного прибора и т. д.), число которых в линейной системе пропорционально входному числу квантов и зависит от таких факторов, как экстинкция и рассеяние в атмосфере и в оптике, световая эффективность оптики, квантовый выход, чувствительность и коэффициент усиления приемника и т. д.

Согласно ([2]), если приход сигнальных и шумовых событий описывается распределением Пуассона, то число различимых градаций уровня сигнала

$$m(o)=\frac{\sqrt{k^2+8(\bar{N}_c+\bar{N}_ш)}-\sqrt{k^2+8\bar{N}_ш}}{2k}, \tag{3}$$

где $\bar{N}_c$ и $\bar{N}_ш$ — соответственно число сигнальных и шумовых событий, k — коэффициент достоверности, характеризующий точность измерений, т. е. определяющий вероятность того, что энергия сигнала находится в некотором интервале значений ΔW.

Определим $\bar{N}_c$ и $\bar{N}_ш$ на выходе системы, рассматривая последовательно влияние отдельных звеньев.

Среднее число квантов, приходящих от звезды (или элементарного разрешаемого участка наблюдаемого протяженного объекта) за время экспозиции t *сек* и собираемых в фокальной плоскости телескопа, равно

$$\bar{N}_{зв}=\bar{N}_m\ \frac{\pi}{4}D^2pqt \text{ квантов}, \tag{4}$$

где $\bar{N}_m$ — средняя плотность излучения от звезды m-й величины в заданном спектральном интервале на границе земной атмосферы, квант $\cdot$ *мм*$^{-2}$ *сек*$^{-1}$; D — диаметр апертуры телескопа, *мм*; p — коэффициент прозрачности атмосферы; q — коэффициент пропускания оптики телескопа.

От фона неба на площадке в фокальной плоскости, занятой изображением звезды, соберется в среднем

$$\bar{N}_ф=\bar{N}_{mф}\ \frac{\pi^2}{16}D^2p\ q\ \frac{\delta^2}{M^2}t \text{ квантов}, \tag{5}$$

где $\bar{N}_{mф}$ — число квантов фона, приходящих с одной квадратной секунды дуги на единичную площадку на границе земной атмосферы, квант $\cdot$ *мм*$^{-2}$ *сек*$^{-1}$ (*сек. дуги*)$^{-2}$; δ — диаметр изображения звезды, *мм*; M — масштаб, *мм* $\cdot$ (*сек. дуги*)$^{-1}$.

В тех случаях, когда в фокусе телескопа находится диафрагма фотометра или щель спектрографа, световой поток, собранный телескопом, может быть использован не полностью, поэтому в расчетах следует учитывать только ту его часть, которая проходит через диафрагму или щель. Пусть, например, щель с размерами $2b \times 2c$ сцентрирована с изображением звезды (см. рис. 1). Распределение интенсивности в турбулентном изображении звезды в фокальной плоскости телескопа (функция рассеяния) при длительных экспозициях осесимметрично и удовлетворительно описывается гауссовой кривой [3]: $f(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \times \exp(-x^2/2\sigma^2)$, где σ — среднеквадратичное отклонение. Подставив $u = x/\sigma$, переходим к стандартизованному виду нормального распределения. Найдем связь параметра распределения σ с величиной диаметра изображения звезды δ. Если задавать разрешение размерами кружка, в котором сосредоточены 99,7% излучения звезды, собранного телескопом, то при нормальном распределении это будет соответствовать значению $U_{max} = 3,0$ [4]. Отсюда $x_{max} = \delta/2 = 3\sigma$ и $\sigma = \delta/6$.

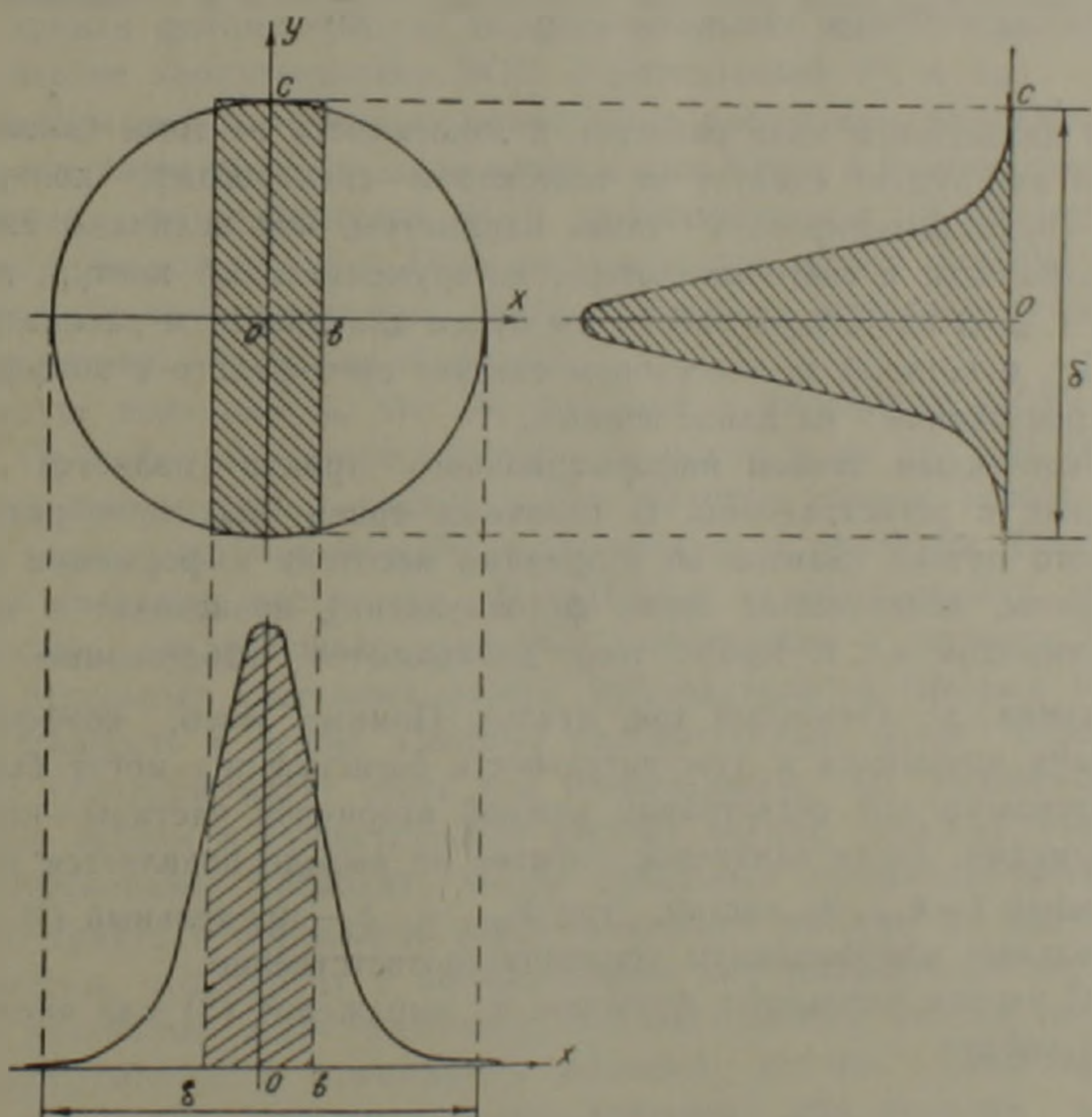

Рис. 1

Доля светового потока от звезды, пропущенная щелью

$$\eta = \int_0^b f(x)\,dx \int_0^c f(y)\,dy. \qquad (6)$$

Если высота щели равна диаметру изображения звезды, $2c = \delta$, то $\int\limits_0^c f(y)\,dy \cong 1{,}0$ и $\tau_i = \int\limits_0^b f(x)\,dx$. При подстановке $u = x/\sigma$ получим:

$$\tau_i = \int\limits_0^{b\sigma} f(u)\,du = \int\limits_0^{6b/\delta} f(u)\,du = \Phi\,[u - 6b/\delta],$$

где $\Phi\,[u]$—стандартизованный интеграл вероятностей.

Таким образом, число квантов от звезды, пропущенных щелью,

$$\bar{N}_{\text{зв. щ.}} = \tau_i\,\bar{N}_{\text{зв}} = \bar{N}_m \frac{\pi}{4} D^2 p\,q\,t\,\Phi[6\,b/\delta] \text{ квантов}, \quad (7)$$

и число квантов фона, пропущенных щелью с площадью 4 $(b \times c)$ *мм*^{2}

$$\bar{N}_{\text{ф. щ.}} = \frac{\pi}{4}\bar{N}_{m\text{ф}} \frac{D^2}{M^2} p\,q\,t\;4\;b\,c = \frac{\pi}{2}\bar{N}_{m\text{ф}} \frac{D^2\,\delta\,b}{M^2} p\,q\,t \text{ квантов}. \quad (8)$$

В дальнейшем ходе расчетов, в зависимости от того, какой оптический инструмент следует за телескопом—спектрограф, поляриметр и т. д.—будут фигурировать такие параметры, как величины световой эффективности и световых потерь, инструментальный контур, дисперсия и т. д. В настоящей работе мы будем для простоты рассматривать систему, в которой за телескопом следует светофильтр с коэффициентом пропускания τ на длине волны λ.

Оконченным звеном информационного тракта является светоприемник с регистратором. В реальных приемниках преобразование входного потока квантов во вторичные носители информации (фотоэлектроны, почерневшие зерна фотоэмульсии), происходит с квантовым выходом $\varepsilon < 1$. Кроме того, добавляются собственные шумы приемника $\bar{N}_n$ (темновой ток, вуаль). Помимо этого, коэффициент усиления приемника и чувствительность регистратора могут быть недостаточными для регистрации каждой вторичной частицы—носителя информации. Тогда единичное событие на выходе появляется при поступлении $l = k_{\text{пред}}/k_y$ частиц, где $k_{\text{пред}}$ и k_y—предельный [5] и действительный коэффициенты усиления соответственно.

С учетом указанных факторов в выражение (3) для числа градаций войдут

$$\bar{N}_c = \pi \cdot \bar{N}_m\,D^2\,p\,q\,\tau\,\varepsilon\,t/16\,l \quad (9)$$

и

$$\bar{N}_{\text{ш}} = \pi\delta^2 t\,(\bar{N}_{m\text{ф}}\,\pi\,D^2\,p\,q\,\tau\,\varepsilon/4\,M^2 + \bar{N}_n)/4l. \quad (10)$$

Для подсчета количества информации по формуле (1) или (2) необходимо знать ЧКХ отдельных звеньев, так как результирующая ЧКХ системы равна произведению ЧКХ последовательных звеньев. Определению аппаратной функции и ЧКХ различных составных частей системы (телескоп+турбулентная атмосфера, приемник изображения и др.) посвящена обширная литература, поэтому здесь этот вопрос подробно не рассматривается. Если аберрации и искажения в оптике невелики, то ЧКХ звена можно аппроксимировать кривой Гаусса

$$T(\nu)=\exp(-2\pi^2 \nu^2/a^2), \tag{11}$$

где параметр a соответствует условию $T(\nu_{max})=0{,}05$ при $\nu_{max}=R$, $мм^{-1}$ (R—разрешающая способность).

Важным критерием является информационная емкость системы, т. е. максимальное количество передаваемой информации. Предельное число градаций зависит от динамического диапазона, ограничиваемого сверху насыщением, а снизу—шумами. Наибольшая величина сигнала $\bar{N}_{max}$, при которой достигается насыщение, должна определяться из характеристик вход-выход приемника, таких как характеристическая кривая фотоматериала, дифференциальная и интегральная фотометрические характеристики ЭОП с фотопленкой ([6]) и др.

По описанной методике авторами были рассчитаны информационные характеристики двух телескопов с идеальным и квазиидеальным приемниками, фотопластинкой, ФЭУ, однокамерным и многокамерным ЭОП, электронной камерой. Произведены также оценки информационной эффективности некоторых эксплуатационных методов улучшения качества изображения на телескопе.

Следует подчеркнуть, что обсуждаемые в настоящей работе и в работе ([1]) информационные критерии не могут и не должны занять место тех параметров и характеристик, которые обычно используются для оценки астрономических инструментов и приборов. Вместе с тем они являются достаточно обобщенными и объективными характеристиками, отражающими сложные взаимосвязи и влияние параметров отдельных составных частей наблюдательной системы на ее информативность в целом. Поэтому рассмотренные здесь информационные критерии могут стать тем необходимым, но недостающим пока еще звеном в существующей системе оценок, которое позволит более обоснованно проводить выбор отдельных элементов наблюдательного тракта и определять соответствующие режимы их работы.

Заметим, что наряду с исследованием информационных характеристик различных астрономических наблюдательных систем, оптических инструментов и приемников, большой интерес представляет также применение информационных критериев при решении таких вопросов, как оценка методики наблюдений и обработки данных, избыточность, кодирование, стоимость астрономической информации и т. д.

Авторы выражают благодарность академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение настоящей работы и ценные замечания.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР
Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Բ. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Վ. Ս. ՕՍԿԱՆՅԱՆ

Աստղագիտական դիտողական համակարգի ինֆորմացիոն բնութագրերի հաշվարկի մեթոդիկան

Աստղագիտական դիտումների ժամանակ համատեղ օգտագործվող տարբեր օպտիկական և էլեկտրոնային սարքերը դիտարկվում են որպես մի ամբողջական համակարգ, որի տեղեկատվությունը գնահատվում է ընդհանրացված ինֆորմացիոն բնութագրերի օգնությամբ։ Որպես հիմնական բնութագիր օգտագործվում է հաղորդվող ինֆորմացիայի քանակը (երկնիշ թվանշաններով -բիտերով)։

Ներկա աշխատանքում դուրս են բերված բանաձևեր, որոնք արտահայտում են այդ ընդհանրացված բնութագրերի կախումը դիտողական համակարգում ընդգրկված առանձին սարքերի բնութագրերից։ Այդ բանաձևերը թույլ են տալիս թվային հաշվարկի միջոցով գնահատել ամեն մի սարքի և ամբողջ համակարգի կողմից բաց թողնվող տեղեկության քանակը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. О. Карапетян, В. С. Осканян*, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 5 (1978). [2] *Б. О. Карапетян, В. С. Осканян*, «Оптико-механическая промышленность», № 11, 1976. [3] *Дж. Койпер, Б. Миддлхерст* (ред.), Телескопы, М., ИЛ, 1963. [4] *Г. Корн, Г. Корн*, Справочник по математике, М., «Наука», 1977. [5] *Е. К. Завойский, М. М. Бутслов, Г. Е. Смолкин*, ДАН СССР, т. 111, стр. 966 (1956). [6] *Г. Е. Смолкин, Е. А. Стриганова*, «Приборы и техника эксперимента», № 3, 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 2

УДК 525.21—54—172

ГЕОФИЗИКА

Э. И. Пархоменко, С. А. Мкртчян

Явление типа горного удара при дегидратации натролита при высоких давлениях

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 3/V 1979)

Согласно существующим представлениям одной из причин возникновения сейсмических очагов могут являться физико-химические превращения вещества земных недр ([1,2]). Наиболее распространенными из них в верхней части земной коры являются процессы дегидратации и гидратации. Эти процессы сопровождаются не только значительным изменением физических параметров, но и в ряде случаев существенным увеличением или уменьшением объема вещества, а также нарушением теплового режима. Каждый из перечисленных факторов может стимулировать локальное перераспределение напряжений в земной коре.

Натролит ($Na_2Al_2Si_3O_{10} \cdot 2H_2O$; SiO_2 — 46,56%, Na_2O — 10% и H_2O — 10,9%) относится к классу цеолитов При атмосферном давлении в интервале температур 250—450°C он характеризуется непрерывным процессом выделения цеолитовой воды, что установлено термографическим методом, и сопровождается интенсивным уменьшением его электрического сопротивления.

Процесс дегидратации натролита при высоких давлениях изучали электрометрическим методом в изобарическом и изотермическом режимах на установке, описанной в работе ([3]). Результаты этих исследований в диапазоне 1—20 *кбар* в условиях высоких температур (100—600°C) изложены в работе ([4]). В качестве исследуемых объектов использовали образцы натролита диаметром 10 *мм* и высотой 4 *мм*.

В настоящей работе рассматривается явление типа горного удара, наблюдаемое при дегидратации натролита при высоких давлениях в полузакрытой системе. Особенностью результатов опытов в изобарическом режиме являются повышение начала температуры дегидратации и уменьшение скорости этого процесса с ростом давления. На фоне отмеченного изменения кинетики процесса при определенных P и t условиях наблюдается выброс вещества натролита, а также пирофиллита, выполняющего роль среды, передающей давление. Выброс происходил в зазор между пуансоном и матрицей. Опыты в изобарическом режим осуществляли при 2,5; 5; 15 и 20 *кабр*. С ростом давления интенсивность выброса повышалась. Это выражалось в усилении звукового эффекта и увеличении массы выброшенного материала.

При давлениях 5 и 10 *кбар* при $t \approx 450°C$ наблюдался выброс незначительного количества материала образца, 3—5% от его веса. При давлениях 15 и 20 *кбар* вес выброшенного вещества был существенно больше. В одном из опытов при $P = 20$ *кбар* и $t = 500°C$ он достиг 30% от всего материала натролита вместе с пирофиллитом, и выброс сопровождался сильным звуковым эффектом. Все это указывает на возможность аккумуляции большой потенциальной энергии при дегидратации даже в полузакрытой системе. В то же время в изотермическом режиме при таких же значениях P и t подобное явление не наблюдалось.

Анализируя условия и результаты опытов, нужно отметить следующее. В изобарическом режиме натролит находится в условиях нестабильной полузакрытой системы. При этом чем выше давление, тем меньше, естественно, проницаемость пирофиллита. Поэтому при определенных значениях P и t возможна такая ситуация, при которой скорость дегидратации $V_{дег}$ будет существенно больше скорости диффузии $V_{диф}$ синтезированной воды ($V_{дег} > V_{диф}$). Это может привести к превышению порового давления $P_{пор}$ воды над давлением твердой фазы $P_{тв}$. При критической величине соотношения $P_{пор}/P_{тв}$, по-видимому, и происходит выброс вещества из камеры.

В условиях изотермического режима опыта данное соотношение между $P_{пор}$ и $P_{тв}$ не достигается, ввиду того, что процесс дегидратации является функцией не только давления, температуры, но и времени. Во-первых, поцикличное повышение давления в изотермическом режиме создает при разгружении условия для увеличения скорости диффузии воды, во-вторых, время нахождения натролита в области $P = 10—20$ *кбар* существенно меньше, чем в изобарическом режиме, что также ограничивает достижение критической величины соотношения $P_{пор}/P_{тв}$.

К дополнительным факторам, стимулирующим явления выброса в натролите, следует отнести еще полиморфное превращение, которое в наших опытах проявлялось в виде сильной электрической поляризации в интервале 400—550°C, а также в изменении величины энергии активации токоносителей. Кроме того, рентгенографические исследования показали, что одновременное воздействие давления от 5 до 20 *кбар* и температуры от 250 до 650°C нарушает исходную решетку натролита.

Результаты описанных опытов показывают, что процесс дегидратации может быть одним из источников в перераспределении напряжения в верхней части земной коры.

Институт физики Земли
Академии наук СССР
Ордена Трудового Красного знамени
Институт геофизики и инженерной
сейсмологии Академии наук
Армянской ССР

Է. Ի. ՊԱՐԽՈՄԵՆԿՈ, Ս. Ա. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Բարձր ճնշման պայմաններում նատրոլիտի ջրազրկման ժամանակ լեռնային հարվածի տիպի երևույթ

Ժամանակակից պատկերացումների համաձայն երկրաշարժերի օջախների առաջացման հնարավոր պատճառներից մեկն է Երկրի ընդերքում լեռնային ապարների ֆիզիկա-քիմիական փոփոխությունները։ Այդ պատճառով գործնական հետաքրքրություն է ներկայացնում լաբորատոր պայմաններում ուսումնասիրել կառուցվածքային փոփոխությունների ժամանակ միներալների ֆիզիկական հատկությունները։

Հոդվածում ներկայացվում է ցեոլիտային տիպի միներալ նատրոլիտի ջրազրկման ուսումնասիրությունը մինչև 20 կբ ճնշման և 650°C ջերմաստիճանի պայմաններում։ Ենթադրվում է, որ իզոբար ռեժիմով կատարված փորձերում 450°C և 500°C ջերմաստիճաններում նմուշի դուրս շպրտումը բարձր ճնշման խցիկից, պայմանավորված է նատրոլիտի կառուցվածքի վերադասավորմամբ։

Նկարագրված փորձերի արդյունքները ցույց են տալիս, որ լեռնային ապարների ջրազրկման երևույթը կարող է հանդիսանալ Երկրի կեղևի վերին մասի լարվածությունների վերաբաշխման պատճառ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C. B. Releigh, M. S. Paterson*, J. Geophys. Res., 70, № 16 (1965). [2] *И. Д. Лившиц, Ю. И. Рябинин*, Сб. «Физические основания поисков методов прогноза землетрясения», «Наука», М., 1970. [3] *Э. И. Пархоменко, А. Т. Бондаренко*, Электропроводность горных пород при высоких давлениях и температурах, «Наука», М., 1972. [4] *Э. И. Пархоменко, Г. О. Пилоян, С. А. Мкртчян*, Сб. «Физические свойства горных пород и минералов при высоких давлениях и температурах», «Наука», М., 1978.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 550.835

ГЕОФИЗИКА

В. А. Арцыбашев, Е. П. Леман, А. А. Тамразян

Парциальные эффективные сечения взаимодействия фотонов с гетерогенной средой

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 13/VI 1979)

При любом процессе взаимодействия фотонов с гетерогенной средой, состоящей из гомогенного наполнителя и рудных включений изометрической формы, соответствующее массовое эффективное сечение можно представить в виде

$$K_{эф}=K^{H}\cdot(1-q)+K^{A}\cdot q\cdot t, \qquad (1)$$

где K—массовые коэффициенты взаимодействия для рудной фазы A или наполнителя H; q—массовая концентрация рудной фазы в гетерогенной среде; t—коэффициент самоэкранирования рудного включения. Выражение коэффициента t зависит от формы, размеров и распределения рудных включений. Если включения распределены по биномиальному закону, то, как показано в работе ([1]), эффективный массовый коэффициент полного ослабления фотонов

$$\bar{\mu}_{эф}=\bar{\mu}^{H}\cdot(1-q)-\frac{1}{\rho_A D}\cdot\ln\left[1-q\left(1-e^{-\bar{\mu}^{A}\rho_A D}\right)\right],$$

и следовательно,

$$t=-\frac{1}{\bar{\mu}^{A}\rho_A D\, q}\cdot\ln\left[1-q\cdot\left(1-e^{-\bar{\mu}^{A}\rho_A D}\right)\right], \qquad (2)$$

где ρ_A—плотность рудной фазы; $\bar{\mu}$—массовый коэффициент полного ослабления фотонов в рудной фазе A или наполнителе H; D—эффективный размер рудных включений. При малых концентрациях рудной фазы ($q\to 0$) биномиальное распределение переходит в пуассоновское, и следовательно ([2]),

$$\bar{\mu}_{эф}=\bar{\mu}^{H}\cdot(1-q)+\frac{q}{\rho_A D}\cdot\left(1-e^{-\bar{\mu}^{A}\rho_A D}\right),$$

откуда

$$t = \frac{1}{\bar{\mu}^A \rho_A D} \cdot (1 - e^{-\bar{\mu}^A \rho_A D}). \tag{3}$$

Для того, чтобы с помощью формулы (1) найти аналогичные выражения для парциальных эффективных сечений взаимодействия фотонов с гетерогенной средой, надо определить соответствующие выражения коэффициентов самоэкранирования рудного включения при фотоэлектрическом поглощении, рассеянии или образовании пар. Эта задача решается с помощью закона аддитивности, который, очевидно, должен соблюдаться и для эффективных сечений. Согласно закону аддитивности, для рудной фазы

$$\bar{\mu}^A_{эф} = \bar{\tau}^A_{эф} + \bar{\sigma}^A_{эф} + \bar{\chi}^A_{эф}, \tag{4}$$

где $\bar{\tau}^A_{эф}$, $\bar{\sigma}^A_{эф}$ и $\bar{\chi}^A_{эф}$—эффективные массовые сечения фотопоглощения, рассеяния и образования пар, каждое из которых выражается через соответствующие сечения и коэффициенты самоэкранирования следующим образом: $\bar{\tau}^A_{эф} = \bar{\tau}^A \cdot t_\tau$; $\bar{\sigma}^A_{эф} = \bar{\sigma}^A \cdot t_\sigma$; $\bar{\chi}^A_{эф} = \bar{\chi}^A \cdot t_\chi$; $\bar{\mu}^A_{эф} = \bar{\mu}^A \cdot t$. Чтобы выполнялось равенство (4), необходимо принять

$$t = t_\tau = t_\chi = t_\sigma, \tag{5}$$

так как $\bar{\mu}^A = \bar{\tau}^A + \bar{\sigma}^A + \bar{\chi}^A$.

Таким образом, коэффициент самоэкранирования рудных включений имеет одно и то же выражение как для полного, так и для парциальных эффективных сечений. При биномиальном распределении рудных включений в гетерогенной среде выражение коэффициента t дается формулой (2), а при пуассоновском—формулой (3). Следовательно, для двухкомпонентной гетерогенной среды парциальные коэффициенты взаимодействия фотонов выражаются следующими формулами:

$$\bar{\tau}_{эф} = \bar{\tau}^H \cdot (1-q) + \bar{\tau}^A \cdot q \cdot t;$$

$$\bar{\sigma}_{эф} = \bar{\sigma}^H \cdot (1-q) + \bar{\sigma}^A \cdot q \cdot t;$$

$$\bar{\chi}_{эф} = \bar{\chi}^H \cdot (1-q) + \bar{\chi}^A \cdot q \cdot t,$$

где t определяется равенствами (2) или (3). Используемое в теории рентгенорадиометрического метода массовое сечение фотоэффекта флуоресцирующей фазы, если она представлена включениями, равно эффективному значению $\bar{\tau}^A_{эф} = \bar{\tau}^A \cdot t$. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния вводится следующим образом. Выразим массовое дифференциальное (по углу) сечение рассеяния $d\bar{\sigma}/d\Omega$ через интегральное массовое сечение рассеяния $\bar{\sigma}$ и нормированную индикатриссу рассеяния W в виде

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \bar{\sigma} \cdot W.$$

Индикатрисса не зависит от неоднородности среды, поэтому для гетерогенной среды $d\bar{\sigma}_{эф}/d\Omega = \bar{\sigma}_{эф} \cdot W$, а для двухкомпонентной гетерогенной среды

$$\frac{d\bar{\sigma}_{эф}}{d\Omega} = \frac{d\bar{\sigma}^{н}}{d\Omega} \cdot (1-q) + \frac{d\bar{\sigma}^{л}}{d\Omega} \cdot q \cdot t,$$

где коэффициент t определяется формулами (2) или (3).

Полученные выражения для парциальных эффективных сечений взаимодействия фотонов с гетерогенной средой могут быть использованы при решении теоретических задач ядерной геофизики.

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ա. ԱՐՑԻԲԱՇԵՎ, Ե. Պ. ԼԵՄԱՆ, Ա. Ա. ԹԱՄՐԱԶՅԱՆ

Տարակազմ միջավայրի հետ ֆոտոնների փոխազդեցության մասնակային էֆեկտիվ կտրվածքներ

Տարակազմ միջավայրի հետ ֆոտոնների փոխազդեցության մասնակային էֆեկտիվ կտրվածքների համար՝, հաշվի առնելով հանքային հատիկների ինքնաէկրանացման էֆեկտը, ստացվել են անալիտիկ արտահայտություններ։ Ադիտիվության օրենքի հիման վրա ցույց է տրված, որ հատիկների ինքնաէկրանացման էֆեկտը մասնակային էֆեկտիվ կտրվածքներում անկախ ֆոտոնների փոխազդեցության պրոցեսից, ունի նույն արտահայտությունը, ինչ որ լրիվ էֆեկտիվ կտրվածքում և որոշվում է տարակազմ միջավայրի կոնկրետ կառուցվածքով։ Հանքային հատիկների բինոմալ և պուասոնյան օրենքներով բաշխված տարակազմ միջավայրի համար տրված են ինքնաէկրանացման գործակիցների անալիտիկ արտահայտությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е. П. Леман, А. А. Тамразян, В. А. Арцыбашев*, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 1 (1978). [2] *В. А. Арцыбашев, Е. П. Леман*, «Атомная энергия», т. 44, вып. 1 (1978).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 577.1

БИОХИМИЯ

С. П. Манджикян, А. С. Киракосова, Р. О. Карапетян,
член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Галоян

Влияние фрагментов лютеинизирующего рилизинг гормона (ЛРГ) на кининовую систему плазмы крыс

(Представлено 12/VI 1979)

На основании накопленных данных нами развивается положение о том, что не только гипоталамус продуцирует органотропные нейрогормоны (вазопрессин, окситоцин, кардиоактивные нейрогормоны — К, С, Г), но что и рилизинг и ингибирующие нейрогормоны, в частности соматостатин, ЛРГ, обладают органотропной активностью [1,2].

Нами было установлено (1975), что ЛРГ обладает явно выраженным кардиотропным свойством. Из гипоталамуса крупного рогатого скота выделен и идентифицирован кардиотропный гексапептид — ГП (Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH_2), который является С-концевым фрагментом ЛРГ [3]. Для выявления основной структуры, ответственной за кардиотропную активность ЛРГ и ГП, ранее была изучена биологическая активность фрагментов ЛРГ [2]. Опыты показали, что сокращение с N-конца молекулы ЛРГ увеличивает кардиотропную активность. Наибольшей активностью обладал ГП.

Для изучения механизма действия органотропных веществ важно было выяснить также их влияние на кининовую систему крови. В наших предыдущих работах сообщалось о воздействии ЛРГ на кининовую систему крови крыс in vivo [4].

В настоящей работе ставилась задача по изучению влияния различных фрагментов ЛРГ на калликреин-кининовую систему крови крыс. Были изучены следующие фрагменты ЛРГ:

(ЛРГ)	пГлу-Гис-Трп-Сер-Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH_2
I	Гис-Трп-Сер-Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH_2
II	Трп-Сер-Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH_2
III	Сер-Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH_2
IV	Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH_2
V	Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH_2
VI	Лей-Арг-Про-Гли-NH_2
VII	Арг-Про-Гли-NH_2

т. е. с I по VII пептидные фрагменты ЛРГ с последующим сокращени-

Влияние фрагментов лютеинизирующего рилизинг гормона (ЛРГ) на кининовую систему крови крыс

Определяемый компонент	Контроль	Фрагменты ЛРГ							
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
СА	25,6±1,36 (19)	114,5±20 (8) $p<0{,}002$	26,9±6,2 (7) $p<0{,}5$	25,4±4,9 (9) $p<0{,}5$	49±6,49 (5) $p<0{,}02$	22,2±2,9 (8) $p<0{,}5$	76,4±12,6 (8) $p<0{,}002$	17±1,9 (6) $p<0{,}01$	27,8±5,1 (7) $p<0{,}5$
ПКК	104,9±5,5 (19)	84,3±10 (8) $p<0{,}02$	119,9±15,5 (7) $p<0{,}5$	130,4±7,6 (9) $p>0{,}05$	161±5,0 (5) $p>0{,}002$	123,5±1,0 (8) $p<0{,}05$	108,3±11,3 (8) $p<0{,}5$	95,25±10,6 (6) $p<0{,}5$	113,8±11,9 (7) $p<0{,}5$
ИК	1,1±0,038 (19)	0,5±0,1 $p<0{,}001$ (8)	1,1±0,14 $p<0{,}5$ (7)	1,25±0,04 $p<0{,}05$ (9)	1,1±0,18 $p<0{,}5$ (5)	1,18±0,06 $p<0{,}5$ (8)	0,75±0,1 $p<0{,}05$ (8)	1,12±0,08 $p<0{,}5$ (6)	1,07±0,09 $p<0{,}5$ (7)

Обозначения: СА—спонтанная эстеразная активность (в *мкмолях* БАЭЭ в *мл* плазмы за 1 *час*); ПКК—прекалликреин (в *мкмолях* БАЭЭ в *мл* плазмы за 1 *час*); ИК—ингибитор калликреина (в условных единицах). В скобках указано количество опытов.

ем по одному аминокислотному остатку с С-конца молекулы и один трипептид с сокращением N-конца ЛРГ (Пир-Гис-Трп) (VIII).

Пептидные фрагменты ЛРГ и гексапептид (четвертый фрагмент) вводили крысам весом 100—200 *г* внутривенно под легким эфирным наркозом. Спустя 30 *мин* после введения веществ брали кровь путем декапитации.

Прежде чем выбрать дозу указанных веществ, экспериментально была установлена оптимально вводимая доза для гексапептида и фрагментов IV, V, VI, VII—1 *мкг*, для фрагментов I, II, III, VIII—0, 1 *мкг*.

Определяли три компонента калликреин-кининовой системы: 1) спонтанную эстеразную активность; 2) прекалликреин и 3) ингибитор калликреина по методу Колмана и соавт. ([5]) в некоторой модификации Гомазкова и соавт. ([6]). Подробности метода приведены в предыдущей нашей работе ([7]).

При изучении действия фрагментов I, II, III, VIII нами обнаружена следующая картина (таблица): фрагменты II, III и VIII не вызывали каких-либо заметных изменений в картине кининовой системы крови крыс, а под влиянием фрагмента I, который отличается от ЛРГ отсутствием только одной аминокислоты — а именно пироглютаминовой, происходило повышение спонтанной эстеразной активности от 25,6±1,36 *мкмоля* гидролизованного субстрата N-бензоил-L-аргинин-этилового эфира (БАЭЭ) до 114,4±20 *мкмолей* и снижение ингибитора калликреина от 1,1±0,038 до 0,5±0,1 условных единиц.

По-видимому, пироглютаминовая кислота закрывала активную часть молекулы пептида, а уменьшение пептида на одну аминокислоту приводило к повышению активности фрагмента, как бы к растормаживанию активности.

Под действием гексапептида (IV) получены следующие величины спонтанная эстеразная активность повышалась с 25,6±1,36 *мкмоля* гидролизованного субстрата БАЭЭ до 49±6,49 *мкмоля*. Одновременно повышался уровень прекалликреина с 104,9±5,5 *мкмоля* до 161±5. Ингибитор калликреина достоверно не изменялся.

Фрагмент VII понижал только спонтанную эстеразную активность до 17±1,9 *мкмоля* БАЭЭ, а фрагмент VI повышал ее до 76,4±12,6 *мкмоля* по сравнению с контрольной величиной, равной 25,6±1,36. Что же касается фрагмента V, при его введении животным не наблюдалось достоверного изменения компонентов кининовой системы.

Причем, если фрагмент VII понижал СА, фрагмент VI повышал ее выше контрольной величины, то сам гексапептид доводил этот показатель до средней величины, оставляя ее тем не менее достоверно выше контрольной.

Итак, фрагменты VI и VII вызывают только изменение спонтанной эстеразной активности плазмы крови крыс, а для того чтобы вызвать сдвиги в ферментной системе кининов, а именно прекалликреина, необходима полная аминокислотная последовательность, присущая гексапептиду.

Таким образом, появление в крови крыс таких незначительных количеств указанных пептидов порядка одной и менее гамм приводило к определенным сдвигам в показателях компонентов калликреин-кининовой системы крови крыс in vivo. Это указывает на важную роль пептидных гормонов в регуляции остальных фрагментных систем плазмы крови, в данном случае кининовой.

Институт биохимии
Академии наук
Армянской ССР

Ս. Գ. ՄԱՆՋԻԿՅԱՆ, Ա. Ս. ԿԻՐԱԿՈՍՈՎԱ, Ռ. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ Ա. Ա. ԳԱԼՈՅԱՆ

Լյուտեինիզացնող ռիլիզինգ հորմոնի (ԼՌՀ) ֆրագմենտների ազդեցությունը առնետների կալիկրեին-կինինային համակարգի վրա

Կատարված փորձերը ցույց են տվել, որ առնետներին ԼՌՀ-ի II, III, V, VIII ֆրագմենտների ներերակային ներարկման ժամանակ չի նկատվում կինինային սիստեմում որևէ նշանակալի փոփոխություն.

I, VI, ֆրագմենտները բարձրացնում են սպոնտան էստերազային ակտիվությունը, իսկ VII իջեցնում: Որպեսզի տեղի ունենա կինինային համակարգի ֆերմենտների տեղաշարժ, հատկապես պրեկալիկրեինի, անհրաժեշտ է ամինաթթուների այն հաջորդականությունը, որը հատուկ է հեքսապեպտիդին:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Галоян*, Биологический журн. Армении, т. 28, № 12 (1975). [2] *А. А. Галоян, Р. О. Карапетян*, Биологический журн. Армении, т. 29, № 12 (1976). [3] *А. А. Галоян*, ДАН Арм. ССР, т. 64, № 2 (1977). [4] *А. С. Киракосова, С. П. Манджикян, Р. О. Карапетян, А. А. Галоян*, ДАН Арм. ССР, т. 65, № 1 (1977). [5] *R. W. Colman, J. W. Mason, S. Sherry*, Ann. Intern. Med. 71, 763 (1969). [6] *О. А. Гомазков, Н. В. Комиссарова, Л. В. Большакова, Н. Н. Теплова*, Кардиология, 6, 25 (1972). [7] *А. С. Киракосова, С. П. Манджикян, А. А. Галоян*, ДАН Арм. ССР, т. 9, № 5 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 2

УДК 577.1

БИОХИМИЯ

Т. Г. Путинцева, Р. О. Карапетян

Влияние нейрогормона «С» на холино- и адреночувствительность тонкой кишки крысы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Галояном 12/VI 1979)

Из гипоталамуса различных животных было выделено новое кардиоактивное вещество, названное нейрогормоном «С» [1]. Нейрогормон «С» является полициклическим соединением, которое через 40 *мин* после внутривенного введения кошкам увеличивает за счет расширения капилляров сердца коронарный кровоток более чем в два раза [2]. Кроме того, это вещество оказывает влияние на различные биохимические процессы. Так, путем активирования фосфорилазы оно повышает процесс гликолиза [3], ингибирует фосфодиэстеразу 3,5-цАМФ сердца и мозга [4] и конкурирует с цАМФ за регуляторную единицу цАМФ-зависимой гистон киназы мозга [5]. Все это позволяет рассматривать нейрогормон «С» как внутриклеточный регулятор уровня циклических нуклеотидов.

Вышеперечисленное свидетельствует о высокой физиологической и биохимической активности нейрогормона «С». Поскольку нейрогормон, выделившись из гипоталамуса, поступает в кровеносное русло, то можно предположить, что по достижении с током крови различных органов он оказывает на них физиологическое действие.

В настоящей статье представлен экспериментальный материал, полученный при изучении влияния этого вещества на гладкую мускулатуру кишечника, в частности, на холино- и адренореактивность этого органа.

Опыты проводили на самцах белых крыс породы Вистар весом 180—250 *г*. Животных оглушали электрическим током и декапитировали. Отрезок тонкой кишки длиной 2 *см*, взятый на расстоянии 5—6 *см* после 12-перстной кишки, промывали раствором Тироде и помещали в термостатируемый сосуд с раствором Тироде (20 *мл*, 37°) при постоянной аэрации. Кимографическая запись сокращений отрезка тонкой кишки производилась обычным методом с помощью рычажка.

Чувствительность отрезка тонкой кишки к ацетилхолину и норадреналину определяли кинетическим методом [6,7]. Для этого на изолированном отрезке тонкой кишки до и после воздействия нейрогормона «С» получали накопительные кривые от последовательно вводимых пяти стандартных доз ацетилхолина или норадреналина, каждая из которых была в два раза больше, чем предыдущая (рис. 1). Получали по две накопительных кривых в норме, на фоне действия нейрогормона «С» и после отмывания кишки от нейрогормона раствором Тироде. Пос-

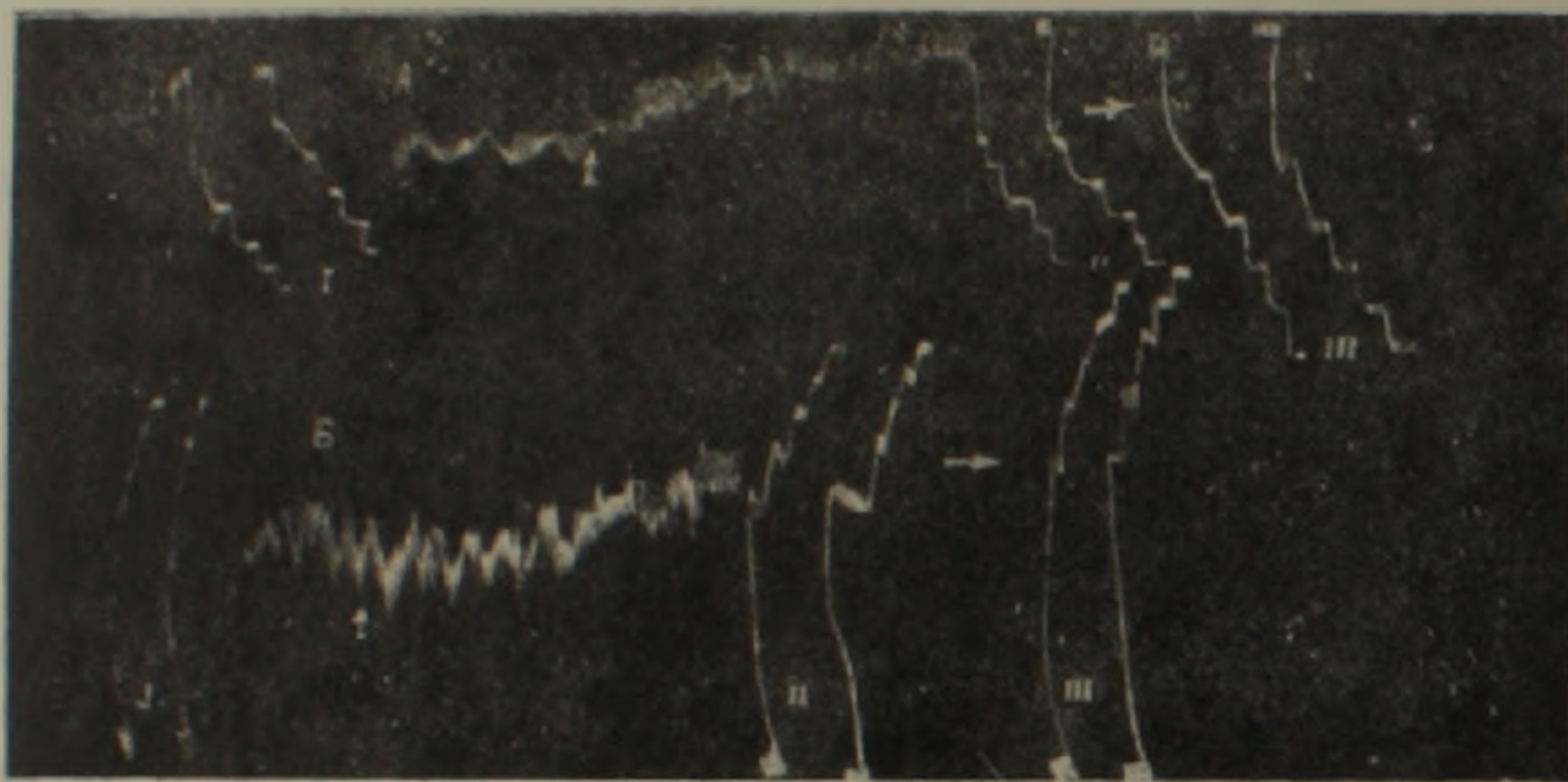

Рис. 1. Влияние нейрогормона «С» на чувствительность отрезка тонкой кишки крысы к норадреналину (*А*) и ацетилхолину (*Б*). Накопительные кривые от действия стандартных доз норадреналина и ацетилхолина, полученные в норме (I), во время действия на отрезок кишки нейрогормона «С» (II) и после отмывания ее раствором Тироде (III) в результате последовательного увеличения концентрации норадреналина и ацетилхолина в перфузате: $4{,}88\times10^{-8}+4{,}88\times10^{-8}+9{,}75\times10^{-8}+$ $+1{,}95\times10^{-7}+3{,}9\times10^{-7}$ *М*

ле измерения каждой пары накопительных кривых получали средние величины, по которым строили графики зависимости эффекта ацетилхолина или норадреналина от их концентрации в системе двойных обратных координат (рис. 2 и 3), и рассчитывали кажущиеся константы диссоциации комплексов ацетилхолин-холинорецептор ($K_{\text{ацх}}$) и норадреналин-адренорецептор ($K_{\text{норадр}}$), характеризующие специфическую чувствительность холино- и адренорецепторов. Эти константы численно равны концентрации медиатора, вызывающей эффект, равный половине максимального. Величина максимальной реакции ($P_{\text{м}}$) отрезка тонкой кишки на вводимый медиатор пропорциональна количеству активных рецепторов. Влияние нейрогормона «С» на чувствительность отрезка тонкой кишки крысы определяли после 40-минутной инкубации с нейрогормоном «С», поскольку именно через этот промежуток времени наблюдался наибольший эффект этого вещества на коронарные сосуды. Концентрация нейрогормона «С» в инкубационной среде была равна 1×10^{-6} *г/мл*. Результаты экспериментов обработаны статистически с использованием критерия Стьюдента.

Контрольные эксперименты показали, что в течение первых 1,5—2 *час* после начала опыта реакция изолированного отрезка тонкой кишки крысы на ацетилхолин и норадреналин практически не изменяется.

о чем свидетельствует идентичность в течение этого времени параметров $P_м$ и K холинэргической и адренэргической реакций. Опыт проводили в течение этого промежутка времени.

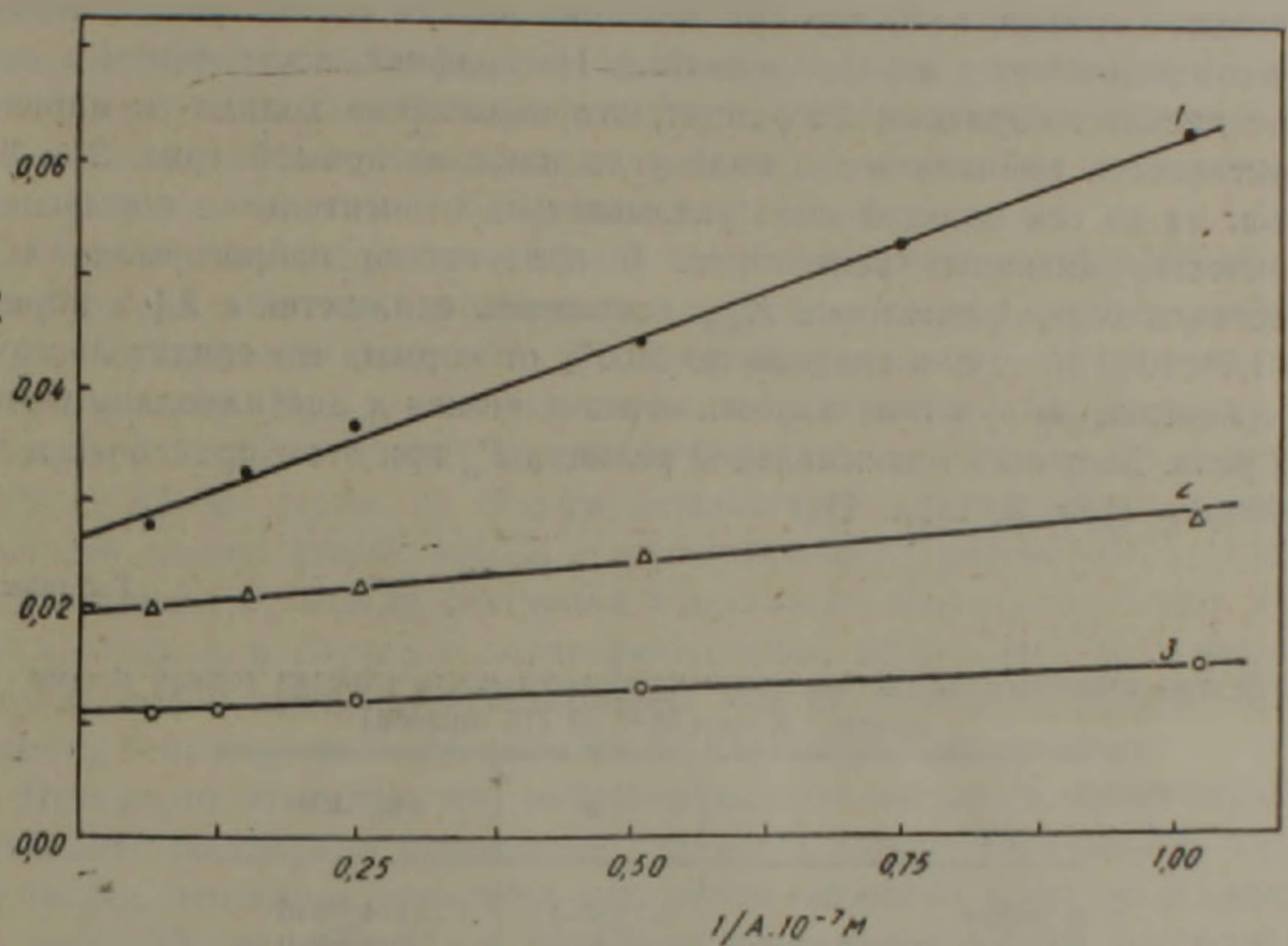

Рис. 2. Кривая зависимости эффективности действия норадреналина от его концентрации в норме *(1)*, на фоне действия нейрогормона «С» *(2)* и после отмывания от нейрогормона «С» *(3)*. По оси абсцисс — обратные величины концентрация норадреналина (1/А); по оси ординат—обратные величины эффективности действия норадреналина (1/У)

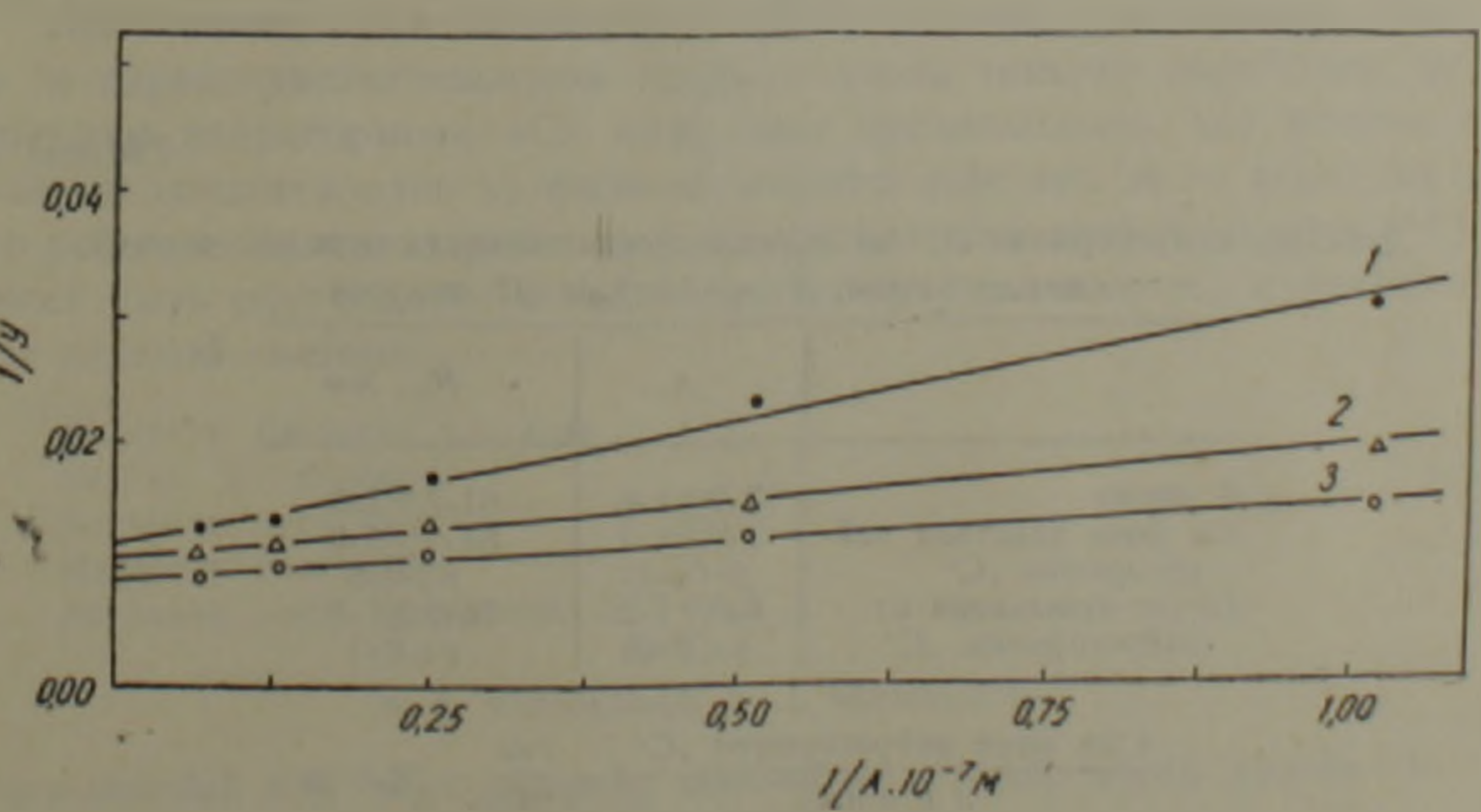

Рис. 3. Кривая зависимости эффективности действия ацетилхолина от его концентрации в норме *(1)*, на фоне действия нейрогормона «С» *(2)* и после отмывания от нейрогормона «С» *(3)*. Обозначения те же, что и на рис. 2

Инкубация отрезка тонкой кишки в течение 40 *мин* с нейрогормоном «С» в концентрации 1×10^{-8} *г/мл* повышает ее чувствительность к ацетилхолину и норадреналину. На рис. 1 отчетливо видно, что на фоне действия нейрогормона «С» увеличивается величина «шага» накопительной кривой, особенно при действии низких концентраций медиаторов ацетилхолина и норадреналина. На графике, построенном в системе двойных обратных координат, это повышение холино- и адренореактивности проявляется в виде угла наклона прямой (рис. 2 и 3). Сдвиг ее по оси ординат вниз указывает на относительное повышение количества активных рецепторов. В присутствии нейрогормона «С» константа холинорецепторов $K_{ацх}$ достоверно снижается с 2,1 в норме до $1{,}2\times10^{-7}$ *М*, т. е. в среднем до 50,0% от нормы, что свидетельствует о повышении чувствительности отрезка кишки к ацетилхолину почти в 2 раза. Величина максимальной реакции $P_м$ при этом практически не менялась (рис. 3, табл. 1).

Таблица 1

Действие нейрогормона „С" на холиночувствительность отрезка тонкой кишки крысы. $K=n\times10^{-7}$ *М* (15 опытов)

	n	$P_м$, *мм*
В норме	$2{,}1\pm0{,}3$	$84{,}4\pm8{,}6$
На фоне действия нейрогормона „С"	$1{,}2\pm0{,}1$ $p<0{,}01$	$92{,}8\pm9{,}0$ $p=0{,}5$
После отмывания от нейрогормона „С"	$1{,}0\pm0{,}1$ $p<0{,}01$	$91{,}2\pm7{,}9$ $p>0{,}5$

$$\frac{n \text{ на фоне нейрогормона „С"}}{n \text{ в норме}} = \frac{1{,}2}{2{,}1} = 57{,}0\ \%$$

Таблица 2

Действие нейрогормона „С" на адреночувствительность отрезка тонкой кишки крысы. $K=n\times10^{-7}$ *М* (15 опытов)

	n	$P_м$, *мм*
В норме	$13{,}2\pm1{,}6$	$61{,}2\pm7{,}0$
На фоне действия нейрогормона „С"	$7{,}6\pm1{,}2$ $p<0{,}01$	$64{,}1\pm5{,}0$ $p>0{,}5$
После отмывания от нейрогормона „С"	$6{,}6\pm1{,}2$ $p<0{,}01$	$75{,}5\pm7{,}6$ $p>0{,}1$

$$\frac{n \text{ на фоне нейрогормона „С"}}{n \text{ в норме}} = \frac{7{,}6}{13{,}2} = 58{,}0\ \%$$

Интересно отметить, что после 30-минутного отмывания отрезка тонкой кишки от нейрогормона «С» раствором Тироде чувствительность ее к ацетилхолину не возвращается к норме. Это можно объяснить тем, что либо концентрация нейрогормона оказалась очень высокой и для восстановления исходной чувствительности отрезка кишки к медиатору после действия нейрогормона необходимо более длительное время для отмывания, либо нейрогормон вызывает в ткани кишки биохимические сдвиги, которые, как правило, не возвращаются быстро к норме при отмывании вещества, вызывавшего этот сдвиг.

Аналогичные результаты были получены при изучении влияния нейрогормона «С» на адреночувствительность отрезка тонкой кишки крысы. Кажущаяся константа диссоциации комплекса норадреналин-адренорецептор $K_{\text{норар}}$ под влиянием нейрогормона «С» достоверно снижалась с 13,2 в норме до $7{,}6 \times 10^{-7}$ *М*, что составляет в среднем 58,0% от нормы (табл. 2). Это свидетельствует о повышении чувствительности тонкой кишки крысы к норадреналину. Достоверных различий в величине $P_{\text{м}}$ между контролем и опытом не обнаружено (табл. 2). Так же, как и в случае с холинорецептором, 30-минутное отмывание отрезка тонкой кишки от нейрогормона «С» раствором не снимает вызванного нейрогормоном повышения ее адреночувствительности.

Интересно отметить, что нейрогормон «С» вызывает практически одинаковое по степени повышение холино- и адренореактивности тонкой кишки, что характеризуется снижением величины констант в среднем до 57,0% от нормы для холинорецепторов и до 58,0% от нормы для адренорецепторов. Одинаковая степень повышения чувствительности холино- и адренорецепторов свидетельствует о действии нейрогормона «С» на какое-то общее звено. Этим звеном, вероятно, является фосфодиэстераза, активность которой снижается под влиянием нейрогормона «С» [4].

Полученные нами экспериментальные данные о повышении холино- и адреночувствительности гладких мышц тонкого кишечника под влиянием нейрогормона «С» позволяют предположить, что именно в этом заключается одно из физиологических действий этого вещества и что расширение коронарных сосудов, вызываемое этим гормоном [1,2], может быть обусловлено повышением их чувствительности к медиаторам нервной системы.

Институт биологии развития
им. Н. К Кольцова
Академии наук СССР
Институт биохимии
Академии наук Армянской ССР

Ի. Գ. ԳՈՒՏԻՆՅԵՎԱ, Ա. Հ. ԿԱՐԱԳԵՏՅԱՆ

Նեյրոհորմոն C-ի ազդեցությունը առնետների բարակ աղիքի խոլինո- և ադրենոռեցեպտորների վրա

Ցույց է տրված, որ նեյրոհորմոն C-ի ազդեցության տակ բարձրանում է բարակ աղիքի ակտիվությունը նորադրենալինի և ացետիլխոլինի նկատմամբ.

որը պահպանվում է նաև օրգանի կրկնակի լվացումից հետո։

Նեյրոհորմոնի այս ֆիզիոլոգիական ազդեցությունը հավանորեն պայմանավորած է ֆոսֆոդիէստերազային ակտիվության ընկճեցմամբ։ Սրտի պսակաձև անոթների լայնացումը նեյրոհորմոնի ազդեցության տակ, հավանորեն, պայմանավորված է ներվային սիստեմի մեդիատորների նկատմամբ նրանց զգացողության բարձրացմամբ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Галоян*, ДАН Арм. ССР, т. 34, № 3 (1962). [2] *С. С. Абрамян, М. А. Ростомян, А. А. Галоян*, Кровообращение, т. 8, № 2 (1975). [3] *Г. К. Парсаданян, Ж. Г. Абелян, А. А. Галоян*, ДАН Арм. ССР, т. 66, № 3 (1978). [4] *А. А. Галоян, Б. Я. Гурвиц, М. А. Погосян*. Вопросы биохимии мозга, XI, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1976. [5] *А. А. Галоян, Б. Я. Гурвиц*, ДАН Арм. ССР, т. 65, № 3 (1977). [6] *Т. М. Турпаев*, Медиаторная функция ацетилхолина и природа холинорецептора, Изд. АН СССР, М., 1962. [7] *Б. Н. Манухин*, Физиология адренорецепторов, М., 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 631.465

АГРОХИМИЯ

А. Ш. Галстян, В. Т. Вартанян

Определение активности аргиназы почвы

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 5/VI 1979)

Аргиназа (L-аргинин-уреогидролаза, КФ 3.5.3.1) играет важную роль в азотистом обмене веществ и способствует образованию подвижного азота в почве. Она осуществляет гидролитическое расщепление аргинина на карбамид и орнитин [1-4].

Аргинин содержит четыре атома азота и является одним из основных источников легкогидролизуемого азота в почве. Активность ферментов, участвующих в превращении аргинина в почве, до сих пор не изучена. В настоящей работе мы задались целью разработать методику определения активности аргиназы почвы и выяснить некоторые вопросы действия этого фермента в различных генетических типах почв.

Метод определения активности аргиназы почвы основан на учете количества аммиака, образующегося при гидролитическом расщеплении аргинина на карбамид и последующем его превращении в аммиак под действием уреазы. При определении активности аргиназы почвы нет необходимости прибавлять фермент уреазу, так как почвы обладают высокой уреазной активностью. Для разработки метода определения активности аргиназы были установлены соотношение почвы и субстрата, оптимальные условия реакции среды (pH), температуры и время инкубации. Активность аргиназы определяли в свежих воздушносухих, очищенных от растительных остатков и камней образцах почв. Почву просеивали через сито с отверстиями диаметром в 0,25 *мм*.

Ход анализа. Навески (1 *г*) почвы помещали в колбы емкостью 50 *мл*, приливали 5 *мл* 1%-ного раствора L-аргинина, приготовленного на фосфатном буфере (pH — 4,9). Приготовленный раствор имеет pH 7,2, который соответствует оптимуму pH действия аргиназы почвы. Сдвиг pH субстратного раствора обусловлен щелочной реакцией аргинина (pH водного раствора 10,0). При определении толуол не прибавляли, так как он ингибирует аргиназу почвы. Колбы закрывали корковыми пробками, встряхивали и ставили в термостат при 30° на 48 *час*. Контролем служили стерилизованная почва (180° за 3 *час*) и субстраты без почвы. По истечении времени взаимодействия субстрата с почвой в колбы добавляли 25 *мл* 1 н. раствора хлористого калия, 5 *мин* встряхивали для вытеснения из почвы поглощенного аммиака и содержимое колб фильтровали. Из фильтрата 10 *мл* переносили в прибор Кьельдаля для полумикроотгонки аммиака, прибавляли 5 *мл* 2%-ного раствора щелочи (KOH) и в течение 15 *мин* с момента закипания производили перегонку. В приемные колбы заранее брали 15 *мл* 0,1 н. раствора H_2SO_4. Количество аммиака учитывали обратным титрованием 0,1 н. раствором KOH. Активность аргиназы выражали в миллиграммах карбамида на 1 *г* почвы за 48 *час*. Ошибка определения до 4%. Для пересчета аммиака (*мг*) в карбамид полученные данные умножали на коэффициент 1,765.

Исследования показали, что в почве обнаруживается активность аргиназы, которая полностью снимается при стерилизации почвы сухим жаром, в результате тепловой инактивации фермента (табл. 1). Уровень активности аргиназы в почвах различный. Высокая активность фермента обнаруживается в горно-луговых и лесных почвах, затем в черноземах и каштановых, низкая — в бурых, в содовых солончаках ее действие не обнаруживается. Аргиназа в засоленных почвах быстро инактивируется под влиянием щелочности и растворимых солей.

Таблица 1

Активность аргиназы почв

Почва	Гумус, %	Азот: общий, %	Азот: легкогидролизуемый, *мг* на 100 *г* почвы	pH_{H_2O}	Активность аргиназы почвы: воздушно-сухая	Активность аргиназы почвы: стерилизованная
Горно-луговая дерновая	13,6	0,08	11,4	5,2	9,9	0,0
Коричневая лесная	10,5	0,99	7,3	6,4	9,0	0,0
Чернозем выщелоченный	7,1	0,37	6,3	6,8	4,2	0,0
Каштановая карбонатная	3,4	0,29	4,4	7,6	3,6	0,0
Бурая полупустынная	2,2	0,15	3,6	8,2	1,8	0,0
Содовый солончак	0,6	0,03	1,9	10,0	0,0	0,0

Наличие аргиназы в почве было доказано также хроматографическим анализом. В результате гидролиза аргинина в воздушно-сухой почве, по сравнению со стерилизованной, накопилось значительное количество орнитина. В горно-луговой почве наряду с орнитином образуется и цитруллин, что свидетельствует об отщеплении иминного азота гуанидиновой группы аргинина под действием аргининдезиминазы (L-аргинин-иминогидролаза, КФ 3.5.3.6).

В почве аргиназа активна в гумусовом горизонте, с глубиной ее действие резко снижается и в глубоких горизонтах не обнаруживается (рис. 1). Активность аргиназы находится в положительной тесной корреляционной связи с содержанием гумуса, общего и легкогидролизуемого азота и с амидазами почвы (табл. 2).

Таблица 2

Взаимосвязь активности аргиназы с амидазами, содержанием гумуса и азота в почве

Показатели	Коэффициент корреляции, $r \pm m_r$	Степень надежности, t
Аргиназа—гумус	0,80±0,11	7
Аргиназа—общий азот	0,83±0,10	8
Аргиназа—легкогидролизуемый азот	0,93±0,05	15
Аргиназа—уреаза	0,95±0,04	23
Аргиназа—глутаминаза	0,95±0,04	23
Аргиназа—аспарагиназа	0,99±0,01	99

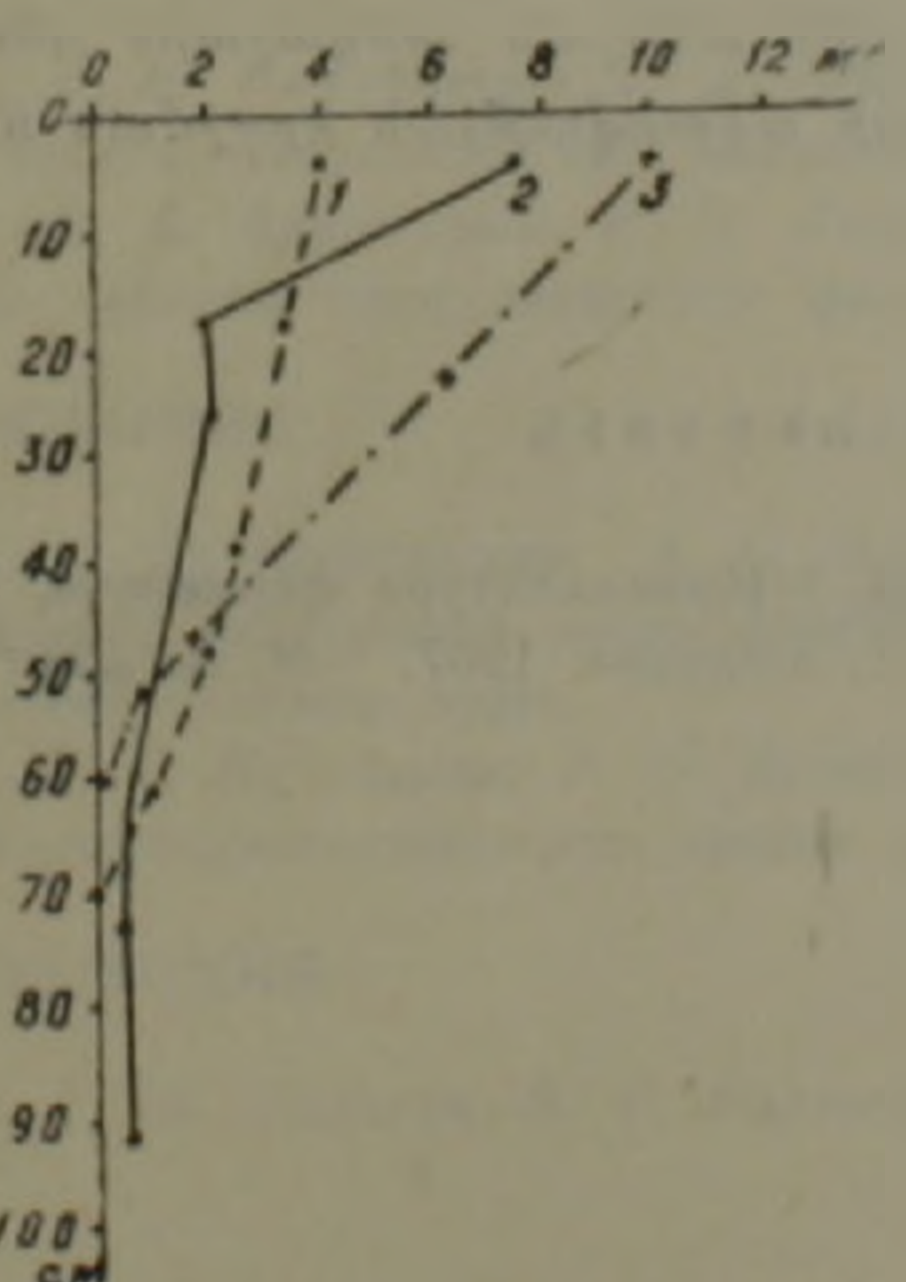

Рис. 1. Активность аргиназы по профилю почв. *1* — чернозем, *2* — бурая лесная, *3* — горно-луговая дерновая

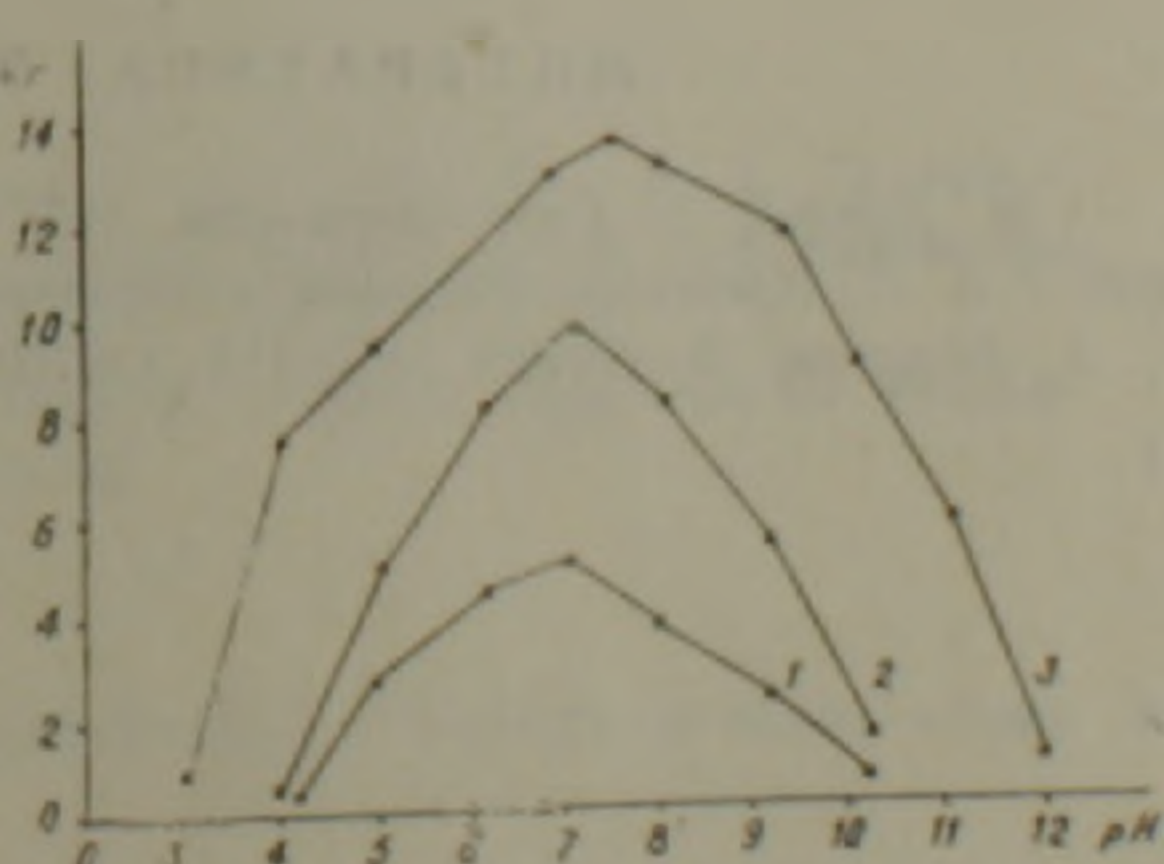

Рис. 2. Зависимость активности аргиназы почвы от pH среды. *1*—лугово-бурая; *2*—чернозем, *3*—горно-луговая

Активность аргиназы почвы в значительной степени зависит от кислотности среды, оптимум pH ее действия находится в нейтральном интервале pH 7,1—7,2. Его сдвиг в различных типах почв незначительный — 0,5 единиц (рис. 2).

Опыты показали, что тепловая инактивация аргиназы наступает при температуре выше 60°, определение ее активности проводится при 30°.

Таким образом, в почве обнаружена активность аргиназы, разработан метод ее определения и выявлены некоторые особенности действия этого фермента в почвах. Изучение активности аргиназы будет способствовать познанию азотистого обмена в почве с целью его регулирования в связи с питанием растений.

Институт почвоведения и
агрохимии МСХ Армянской ССР

Ա. Շ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ, Վ. Ժ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Հողի արգինազայի ակտիվության որոշումը

Հողի ֆերմենտային սիստեմում հայտնաբերված է արգինազայի ակտիվություն։ Այդ ֆերմենտի բարձր ակտիվություն ունեն լեռնամարգագետնային և անտառային հողերը, միջին՝ սևահողերը, ցածր՝ գորշ հողերը։ Աղուտներում արգինազայի ակտիվությունը չի հայտնաբերվում։ Հողի արգինազայի օպտիմում pH-ը գտնվում է չեզոք միջավայրում և ունի աննշան տեղաշարժ դեպի թույլ հիմնայինը։ Մշակված է հողի արգինազայի ակտիվության որոշման մեթոդը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Диксон, Э. Уэбб*, Ферменты, ИЛ, М., 1966. [2] Номенклатура ферментов, М., 1966. [3] *В. Л. Кретович*, Введение в энзимологию, М., «Наука», 1967. [4] *М. А. Давтян, Г. Х. Бунатян*, Биохимия, 35, 412 (1970).