

ՀԱՅԿՍՏԱՆԻ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
 Д О К Л А Д Ы

LXIX, №1

1979

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկեա-
 ծու (պատ. Բարձրագր), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Ք. ԲԱԲԱ-
 ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
 ՅՈՒՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
 ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Վ. Մ. ԹՍՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-ան-
 դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
 Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
 (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱՔ-
 ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր),
 Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Ս. Մ. ՍԱԳՈՆՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ
 ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՉՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. Т. БАБЛЯН, академик
 АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
 мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
 демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),
 И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм-
 ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
 АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
 чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
 ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
 ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
 ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
 ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
 В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԻՄԱՏԻԿԱ

Կ. Պ. Եզերիչև—Նույնությունների ընտանիք պերմանենտի համար	3
Ա. Ա. Կիւրալյան—Ֆեյերի կորիզի մի ընդհանրացման մասին	9
Կ. Մ. Բրոդսկի, Ա. Գ. Գրիգորյան—Մոդուլների լեզոմորֆիզմների ողակների մասին	15
Ս. Մ. Նաբիմանյան—Տպույտգիական խմբերի վրա արված պատահական թափառումների հավասարաչափ բաշխվածության մասին	17
Ա. Ա. Սրբյան, Գ. Վ. Զույնակյան—Ինդեքսային լեզուների շարահյուսական վերլուծության ալգորիթմ	24
Ս. Գ. Ինչեյան—Հարթ հիպերհրաֆների Ց-ներկման մասին	30

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Ա. Համբարձումյան, Ա. Մ. Դուրգաբյան—Հրիտրոցիտի անցումը կապիլյար անոթով	31
--	----

ՍՈՂԷԻ ՏԵՄՈՒԹՅՈՒՆ

Զ. Ա. Դավթյան—Բարակ ծածկույթով ուժեղացված անվերջ գլանի ուղորման երկու խեղրի մասին անհամասեռ սողքի պայմաններում	45
--	----

ԱՍՏՂԱՅԻՉԻԿԱ

Գ. Տ. Պետրով—I տիպի Սեյֆերտի գալակտիկաների և առաջման լայն գծերով ռադիո-գալակտիկաների միջուկների ճիմիական բաղադրությունը և իոնների պարունակությունը	52
Ս. Գ. Խեկուրյան—I և II տիպի գալակտիկաների հավանական թեկնածուներ Արվի առյուծի օբյեկտների շրջանում	57

ԲԱԻՅՍԵՐԻ ՏԻՋԻՈՂՈՑԻԱ

Ն. Վ. Իսախանյան, Ժ. Ա. Հաբարյան—Պլաստիկային պիգմենտների քանակական վառարկությունները պլաստիկային ալիքների խնձորենիների տերմիններում՝ հերթիցիդների կիրառման ազդեցության տակ	61
---	----

Основана в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год
На русском языке

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
<i>Г. П. Егорычев</i> —Семейство тождеств для перманента	3
<i>А. А. Китбалян</i> —Об одном обобщении ядра Фейера	8
<i>Г. М. Бродский, А. Г. Григорян</i> —О кольцах эндоморфизмов модулей.	15
<i>С. М. Нариманян</i> —О равномерной распределенности случайных блужданий на топологических группах	19
<i>А. А. Ордян, Г. В. Джулакян</i> —Алгоритмы синтаксического анализа для индексных языков	24
<i>С. Г. Инджеян</i> —О 3-раскраске плоских гиперграфов	30
МЕХАНИКА	
<i>С. А. Амбарцумян, С. М. Дургарьян</i> —Прохождение эритроцита через капилляр	34
ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ	
<i>З. А. Давтян</i> —О двух задачах кручения усиленного тонким покрытием бесконечного цилиндра в условиях неоднородной ползучести	45
АСТРОФИЗИКА	
<i>Г. Т. Петров</i> —Содержание ионов и химический состав в ядрах сейфертовских галактик типа I и радиогалактик с широкими линиями.	52
<i>С. Г. Искусдарян</i> —Вероятные кандидаты в I и II галактики среди объектов атласа Арпа	57
ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ	
<i>Н. В. Бажанова, Ж. А. Арутюнян</i> —О количественных изменениях пигментов пластид в листьях яблонь пальметтных садов в связи с применением гербицидов.	61

CONTENTS

MATHEMATICS

	P.
<i>G. P. Egorychev</i> —The family of identities for permanent	3
<i>A. A. Kitbalian</i> —On a generalization of Peyer's kernel	8
<i>G. M. Brodski, A. G. Grigorian</i> —On endomorphism rings of modules	15
<i>S. M. Narlmanian</i> —On the uniform distribution of random walks on the topological groups	19
<i>A. A. Ordian, G. V. Djulhakian</i> —Parsing algorithm for indexed languages	24
<i>S. G. Indjeyan</i> —On 3-coloring of planar hypergraphs	40

MECHANICS

<i>S. A. Ambartsumian, S. M. Durgarian</i> —The erythrocyte passing across capillary	34
--	----

THEORY OF CREEP

<i>Z. A. Davtian</i> —Two problems of torsion for infinite cylinder reinforced by a thin cylindrical surface under creep conditions	45
---	----

ASTROPHYSICS

<i>G. T. Petrov</i> —The ion content and chemical composition in the nuclei of I type Seyfert galaxies and broad line radio galaxies	52
<i>S. G. Iskudarian</i> —The probable Irril type candidates among Arp's atlas objects	57

PLANT PHYSIOLOGY

<i>N. V. Bazhanova, G. A. Harutyunian</i> —Quantitative difference of the apple leaf pigments of the palmetto gardens under the application of herbicides	61
---	----

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04619. Подписано к печати 19 09 1979 г. Тираж 535. Изд 5103. Заказ 622.
 Формат бумаги 70×108^{1/16}. Печ. л. 4,25. Бум. л. 2,12.
 Усл. печ. л. 5,95. Уч. изд. листов 4,38.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутин, 24
 Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин

УДК 519.1+517.55

МАТЕМАТИКА

Г. П. Егорычев

Семейство тождеств для перманента

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашинном 26/1 1979)

Найдено семейство формул для вычисления перманента прямоугольной матрицы, которые при частных значениях параметров дают известные формулы типа включения-исключения Райзера и Вильфа. Прямое доказательство опирается на кратный интеграл Коши.

Определения и обозначения. Пусть $1 \leq k \leq n \leq m$. $Q_{k,m}$ — множество всех строго возрастающих последовательностей $J_k = (j_1, \dots, j_k)$, составленных из чисел $1, \dots, m$; $G_{k,m}$ — множество всех k -выборок (без повторений) $J_k = (j_1, \dots, j_k)$ из чисел $1, \dots, m$; $F_{n,m}$ — множество $n \times m$ матриц над полем комплексных чисел. Последовательность $a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n}$ называется диагональю матрицы $A = (a_{ij}) \in F_{n,m}$, если $J_n = (J_1, \dots, J_n) \in G_{n,m}$, $J_k^{(n)} = (1, 2, \dots, [j_1], \dots, [j_k], \dots, n)$, где $[\dots]$ — знак пропуска. Под перманентом матрицы $A = (a_{ij}) \in F_{n,m}$ понимается число

$$\text{perm } A = \sum_{J_n \in G_{n,m}} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}. \tag{1}$$

Теорема 1. Пусть матрицы $B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in F_{n,n}$ такие, что произведение элементов любой диагонали матрицы $B + C$ равно 1. Тогда, если $A = (a_{ij}) \in F_{n,n}$, то

$$\text{perm } A = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{J_k \in G_{k,n}} \left\{ \prod_{r=1}^k \left(\sum_{i \in J_k^r} b_{ri} a_{ri} - \sum_{i \in J_k^r} c_{ri} a_{ri} \right) \right\}. \tag{2}$$

Теорема 1 может быть просто доказана путем подсчета коэффициентов при произведениях $a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$, $j_1, \dots, j_n = 1, n$, получаемых при раскрытии скобок в правой части (2). Эти коэффициенты в силу условий теоремы равны 1 при каждом $J_n = (j_1, \dots, j_n) \in G_{n,n}$ и равны 0 при $J_n \in G_{n,n}$. Заметим, однако, что в этом доказательстве мы исходим из знания ответа (2). В следующей теореме указывается прямой вывод формулы (5), эквивалентной формуле (2), в котором ис-

пользуется представлением перманента в виде n -кратного контурного интеграла в C^n .

Теорема 2. Пусть $B = (b_{ij}) \in F_{n,n}$, а $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = \overline{1, n}$, — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\prod_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = 1. \quad (3)$$

Тогда, если $A = (a_{ij}) \in F_{n,n}$, то справедливы формулы

$$\text{perm } A = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{J_k \in Q_{k,n}} \left\{ \prod_{r=1}^n \left(\sum_{j \in J_k} b_{rj} a_{rj} - \alpha_r \sum_{j \in J_k^c} \beta_j a_{rj} \right) \right\}; \quad (4)$$

$$\text{perm } A = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{J_k \in Q_{k,n}} \left\{ \prod_{r=1}^n \left(\gamma_r - \alpha_r \sum_{j \in J_k} \beta_j a_{rj} \right) \right\}. \quad (5)$$

Отметим, что формула (4) содержит $n^2 + 2n - 1$, а формула (5) — $(3n - 1)$ независимых переменных. В (2) при выборе B и C необходимо, чтобы произведение элементов любой диагонали матрицы $B+C$ равнялось 1. Покажем, что формулы (2), (4), (5) эквивалентны.

Действительно, (4) следует из (5), если положить $\gamma_r = \sum_{j=1}^n b_{rj} a_{rj}$.

Докажем обратное. Если A содержит какую-либо нулевую строку, то (4) и (5) дают общее значение для $\text{perm } A$, равное 0. Если же какие-либо a_{11}, \dots, a_{nn} отличны от нуля, то обозначая $\gamma_r = a_{r,r} b_{r,r}$, $r = \overline{1, n}$, в силу произвольности выбора $B \in F_{n,n}$ из (4) следует (5). Эквивалентность (2) и (4) устанавливается с помощью следующего простого рассуждения.

Лемма.* Для того, чтобы матрица $D = (d_{ij}) \in F_{n,m}$ имела равные отличные от нуля произведения элементов диагоналей, необходимо и достаточно, чтобы

$$d_{ii} = \alpha_i \beta_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

где α_i, β_j — некоторые отличные от нуля комплексные числа.

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости приравняем произведения элементов двух диагоналей матрицы D , различающихся лишь элементами i_1, i_2 -строк и j_1, j_2 -столбцов. После сокращения общих сомножителей получаем, что для произвольных пар $i_1 \neq i_2, j_1 \neq j_2$ справедливы равенства $d_{i_1 j_1} d_{i_2 j_2} = d_{i_1 j_2} d_{i_2 j_1}$, т. е. ранг матрицы D равен 1. Отсюда следует (6).

Другое непосредственное доказательство формулы (5) (а с ней (2) и (4)) было первоначально получено автором с помощью подхода, развитого в (3), исходя из известного интегрального представления для перманента

$$\text{perm } A = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{(P)} \left\{ \left(\prod_{r=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{rj} w_j \right) \right) / w_1^2 \dots w_n^2 \right\} dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n, \quad (7)$$

* Это утверждение возникло в ходе обсуждения с А. М. Кыгмановым.

где $\Gamma(\rho)$ — остов полидиска $U(\rho) = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in C^n; |w_j| \leq \rho, 0 < \rho_j < \infty, j = \overline{1, n}\}$. Доказательство проводится путем некоторых преобразований числителя или знаменателя подынтегрального выражения в (7), не изменяющих величины интеграла (7), с дальнейшим его вычислением. Это оказалось возможным в силу того, что в числителе и знаменателе подынтегрального выражения в (7) стоят однородные многочлены от w_1, \dots, w_n .

Тождество (5) (равно (2), (4)) допускает и другие доказательства, как требующие, так и не требующие знания ответа.

Следствие 1. Пусть $A \in F_{n,n}$. Тогда для любого набора $I_s = (i_1, \dots, i_s) \in Q_{s,n}, s = \overline{1, n-1}$, справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{J_k \in Q_{k,n}} \left\{ \prod_{r \in I_s} \left(\gamma_r - \alpha_r \sum_{l \in J_k} \beta_l a_{rl} \right) \right\} = 0, \quad (8)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = \overline{1, n}$ — произвольные комплексные числа. Если $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — комплексные числа, удовлетворяющие условию (3), то для любых $s, t = \overline{1, n}$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \alpha_s \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{J_k \in Q_{k,n}} \left\{ \sum_{l \in J_k} \beta_l a_{sl} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^n \left(\gamma_r - \alpha_r \sum_{l \in J_k} \beta_l a_{rl} \right) \right\} = \\ & = \beta_t \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{J_k \in Q_{k,n}^{(t)}} \left\{ \sum_{l=1}^n \alpha_l a_{tl} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq t}}^n \left(\gamma_r - \alpha_r \sum_{l \in J_k} \beta_l a_{rl} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где через $Q_{k,n}^{(t)}$ обозначено множество последовательностей $J_k = (j_1, \dots, j_k) \in Q_{k,n}$, хотя бы один из членов которых равен t .

Докажем (8). Пусть S_{I_s} — выражение в левой части (8). Из (5) имеем $S_{I_s} = \text{per} A_{I_s} = 0$, где A_{I_s} — матрица, получаемая из A заменой элементов всех строк, исключая i_1, \dots, i_s -ую, нулями. Формула (8) может быть также получена путем дифференцирования (5) по всем γ_i , исключая $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_s}$. Формула (9) получается из (5) путем рассмотрения полной частной производной по α_s и β_t .

Очевидно, тождества (8) равносильны тождеству (5). Используя этот факт, можно показать, что тождество (5) для перманента является некоторым аналогом известного полиномиального тождества для детерминанта: детерминант исходной матрицы равен детерминанту матрицы, получаемой из A добавлением к одной из ее строк произвольной линейной комбинации остальных $n-1$ строк.

Теорема 3. Пусть $\alpha_i, \beta_j, \gamma_r, i, r = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\prod_{i=1}^n \alpha_i \prod_{j=1}^m \beta_j = 1. \quad (10)$$

Тогда, если $A = (a_{ij}) \in F_{n,m}$, то

$$\text{per} A = \sum_{k=m-n}^m (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} \sum_{J_k \in Q_{k,m}} \left\{ \prod_{r=1}^n (\gamma_r - \sum_{i \in J_k} \beta_i a_{ri}) \right\}. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $D \in F_{m,m}$ — матрица вида

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы Лапласа для перманента, примененной к последним $m-n$ строкам матрицы D , следует, что $\text{per} A = \text{per} D / (m-n)!$, и вычисляя $\text{per} D$ из (5) при $\alpha_i = \beta_i = 1$, получим

$$\text{per} A = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-n)!} \prod_{r=n+1}^m (\gamma_r - k) \sum_{J_k \in Q_{k,m}} \left\{ \prod_{r=1}^n \left(\gamma_r - \sum_{i \in J_k} a_{ri} \right) \right\}. \quad (12)$$

Отсюда, полагая $\gamma_{n+r} = r-1$, $r = \overline{1, m-n}$, получаем (11) (при $\alpha_i = \beta_i = 1$), замечая, что при этих значениях γ_i члены суммы в (12) при $k = \overline{0, m-n-1}$ обращаются в нуль. Для окончания доказательства при произвольных α_i и β_i , удовлетворяющих условию (10), достаточно заметить, что согласно определению перманента $\text{per} (a_{ij}) = \text{per} (\alpha_i \beta_j a_{ij})$.

Переносим выражения, стоящие в правых частях формул (2), (4), (5), (11), в левые части тех же соотношений, получаем соответствующие семейства тождеств для перманента. Придавая параметрам α_i , β_j , γ_r и членам матрицы B в указанных формулах конкретные значения, можно получать различные частные формулы для вычисления перманента. Например, при всех $\alpha_i = \beta_j = 1$ и $\gamma_r = \sum_{j=1}^m a_{rj}$, $r = \overline{1, n}$, (11) дает известную формулу Райзера (1)

$$\text{per} A = \sum_{k=m-n}^m (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} \sum_{J_k \in Q_{k,m}} \left\{ \prod_{r=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{rj} - \sum_{i \in J_k} a_{ri} \right) \right\},$$

а при всех $\alpha_i = \beta_j = 1$ и $\gamma_r = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_{rj}$, $r = \overline{1, n}$, где каждое $\varepsilon_j = \pm 1$, либо каждое $\varepsilon_j = 1/2$, (5) переходит в формулы Вильфа (2)

$$\text{per} A = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{J_k \in Q_{k,n}} \left\{ \prod_{r=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_{rj} - \sum_{i \in J_k} a_{ri} \right) \right\}. \quad (13)$$

Заметим, что в случае $\varepsilon_j = 1/2$, $j = \overline{1, n}$, после приведения подобных в правой части (13) эта формула содержит лишь 2^{n-1} членов

суммы при нечетном n и $2^{n-1} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} / 2$ членов при четном n .

Из (4) при всех $\alpha_i = \beta_i - 1$ и $B = P$ вытекает

Теорема 4. Пусть $P = (p_{ij}) \in F_{n,n}$ — матрица перестановки, порожденная некоторой фиксированной перестановкой (i_1, \dots, i_n) чисел $1, \dots, n$. Тогда, если $A \in F_{n,n}$, то

$$\text{perm } A = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{J_k \in Q_{k,n}} \left\{ \prod_{r=1}^n \left(a_{r i_r} - \sum_{j \in J_k} a_{r j} \right) \right\}, \quad (14)$$

причем члены суммы в правой части (14) равны нулю при $k=1$.

Институт физики
им. Л. В. Киренского
СО АН СССР

Գ. Գ. ԵՐՈՒԻՉԵՎ

Նույնօրյունների ընտանիք պերմանենտի համար

Գտնված է ուղղանկյուն մատրիցայի պերմանենտի հաշվման համար բանաձևերի ընտանիք, որոնք պարամետրերի մասնավոր արժեքների դեպքում տալիս են ներառման-բացառման տիպի Ռայդերի և Վիլֆի հայտնի բանաձևերը:

Անմիջական ապացույցը ամբողջովին հենվում է Կոշու բազմաչափ ինտեգրալի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Г. Дж. Райзер, Комбинаторная математика, 152 с., „Мир“, М., 1966. ² H. S. Wilf, Journal of Combinatorial Theory, 4, № 3, 246–258 (1968). ³ П. Г. Егорычев, Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм, 286 с., „Наука“, СО АН СССР, Новосибирск, 1977.

УДК 517.53

А. А. Китбалян

Об одном обобщении ядра Фейера

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/II 1979)

В работе (1) впервые был изучен вопрос об обычной сходимости рядов Фурье по системе ортогональных рациональных функций. В ней было построено компактное обобщение ядра Дирихле для системы рациональных функций, ортогональных на единичной окружности, а также были получены аналоги признаков Жордана-Дирихле и Дини-Липшица для разложений в ряд Фурье по рациональным функциям.

В статье (2) была построена система рациональных функций, обобщающая классическую тригонометрическую систему, и были исследованы разложения по этой системе в ряды типа Фурье.

В настоящей заметке строится аналог классического ядра Фейера для некоторой системы рациональных функций и приводится теорема об аппроксимации функций, непрерывных на единичной окружности, рациональными функциями, образованными посредством ядер такого рода.

1°. Пусть $\{a_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в единичном круге: $|a_k| < 1$ ($k=1, 2, \dots$). Ассоциируем с ней систему рациональных функций $\{\pi_n(z)\}_0^\infty$ следующим образом:

$$\pi_0(z) \equiv 1,$$

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z} \cdot \frac{1 - \overline{a_k}}{1 - a_k} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Функции $\pi_n(z)$ аналитичны в замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$ и имеют полюсы вне него в точках $z_k = 1/\overline{a_k}$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Легко заметить, что на единичной окружности $z = e^{ix}$ ($0 \leq x < 2\pi$) функции $\pi_n(z)$ обладают следующими свойствами:

а) $|\pi_n(e^{ix})| = 1$

б) $\pi_n(1) = 1$

в) $[\pi_n(e^{ix})]^{-1} = \overline{\pi_n(e^{ix})}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). (2)

В частном случае, при $\alpha_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) система функций $\{\pi_n(z)\}_0^\infty$ переходит в классическую степенную систему $\{z^n\}_0^\infty$.

2°. В классическом случае ядро Фейера $K_n(u)$ выражается посредством ядра Дирихле $D_n(u)$ по формуле (см., например, (2), стр. 138)

$$K_{n-1}(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(u).$$

В частности, на единичной окружности $|z| = 1$ с выколотой точкой $z = 1$

$$D_n(z) = \sum_{j=-n}^n z^j = \frac{1}{1-z} \left(\frac{1}{z^n} - z^{n+1} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и, соответственно,

$$K_{n-1}(z) = \frac{z}{n(1-z)^2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} - 2 \right), \quad (3)$$

где $z = e^{ix}$ ($0 < x < 2\pi$), $n = 1, 2, \dots$.

Следуя приведенной схеме, аналогично формуле (3) введем в рассмотрение систему функций $\{\Phi_n(\zeta)\}_1^\infty$:

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{\zeta}{R_n(1-\zeta)^2} \left[\pi_n(\zeta) + \frac{1}{\pi_n(\zeta)} - 2 \right], \quad (4)$$

где величина R_n будет определена ниже.

Каждая функция $\Phi_n(\zeta)$ ($n = 1, 2, \dots$) является рациональной функцией в комплексной плоскости ζ с полюсами в точках $\zeta = \alpha_k$ и $\zeta = 1/\bar{\alpha}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Отметим, что выражение

$$\omega_n(\zeta) = \pi_n(\zeta) + \frac{1}{\pi_n(\zeta)} - 2$$

без остатка делится на $(1-\zeta)^2$. В самом деле, так как

$$\omega_n'(\zeta) = \pi_n'(\zeta) \left[1 - \frac{1}{\pi_n^2(\zeta)} \right],$$

то с учетом свойства (2) б) имеем:

$$\omega_n(1) = \omega_n'(1) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Это значит, что точка $\zeta = 1$ является устранимой особой точкой функции $\Phi_n(\zeta)$, иначе говоря, функцию $\Phi_n(\zeta)$ можно так доопределить в точке $\zeta = 1$, чтобы она стала непрерывной на всей единичной окружности $|\zeta| = 1$.

Упростим выражение для $\Phi_n(\zeta)$ на единичной окружности. Пусть $\zeta = e^{i\theta}$ ($0 < |\theta| \leq \pi$), тогда с учетом свойств (2) функций $\pi_n(e^{i\theta})$ получим:

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{R_n(1-e^{i\theta})^2} \left[\pi_n(e^{i\theta}) + \frac{1}{\pi_n(e^{i\theta})} - 2 \right] =$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\varphi_n(\theta)}{2}}{R_n \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (5)$$

где $\varphi_n(\theta) = \arg \pi_n(e^{i\theta})$.

Вычислим $\varphi_n(\theta)$. Пусть $a_k = |a_k|e^{i\psi_k}$, тогда легко видеть, что

$$\frac{e^{i\theta} - a_k}{1 - \bar{a}_k e^{i\theta}} \cdot \frac{1 - \bar{a}_k}{1 - a_k} = \exp \left(i \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \theta - |a_k| \sin \psi_k}{\cos \theta - |a_k| \cos \psi_k} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{|a_k| \sin \psi_k}{1 - |a_k| \cos \psi_k} - \theta \right) \right). \quad (6)$$

Обозначим

$$y_k(\theta) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \theta - |a_k| \sin \psi_k}{\cos \theta - |a_k| \cos \psi_k} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{|a_k| \sin \psi_k}{1 - |a_k| \cos \psi_k} - \theta$$

и заметим, что

$$y_k(0) = 0, \quad y'_k(\theta) = \frac{1 - |a_k|^2}{1 - 2|a_k| \cos(\theta - \psi_k) + |a_k|^2}.$$

Тогда из (1) и (6) имеем:

$$\pi_n(\theta) = \exp \left(i \sum_{k=1}^n y_k(\theta) \right) = \exp \left(i \sum_{k=1}^n \int_0^\theta y'_k(t) dt \right) =$$

$$= \exp \left(i \sum_{k=1}^n \int_0^\theta \frac{1 - |a_k|^2}{1 - 2|a_k| \cos(u - \psi_k) + |a_k|^2} du \right).$$

Итак, функции $\varphi_n(\theta)$ и $\Phi_n(e^{i\theta})$ имеют следующий вид:

$$\varphi_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_0^\theta \frac{1 - |a_k|^2}{1 - 2|a_k| \cos(u - \psi_k) + |a_k|^2} du, \quad (7)$$

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^\theta \frac{1 - |a_k|^2}{1 - 2|a_k| \cos(u - \psi_k) + |a_k|^2} du}{R_n \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (8)$$

где $\psi_k = \arg a_k$.

3°. Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi_n(z, \zeta) \equiv \Phi_n\left(\frac{z}{\zeta}\right) = \frac{z\zeta}{R_n(\zeta - z)^2} \left[\pi_n\left(\frac{z}{\zeta}\right) + \pi_n^{-1}\left(\frac{z}{\zeta}\right) - 2 \right], \quad (4')$$

где $\zeta = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — параметр. Полюсы этой функции лежат в точках $z_k = a_k e^{i\theta}$ и $z_k = e^{i\theta} / \bar{a}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Вычислим интеграл

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| \quad (9)$$

при $z = e^{ix}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). Обозначим $\max_{1 < k < n} |a_k| = r_n$.

Очевидно, что $r_n < 1$ и с учетом приведенного выше соображения относительно непрерывности функции $\Phi_n(\theta)$ на единичной окружности, можно утверждать, что функция $\Phi_n(z, \zeta)$ непрерывна в кольце $r_n < |z| < 1$. Поэтому при вычислении интеграла (9) будем считать, что z лежит в кольце $r_n < |z| < 1$. После замены переменной $z/\zeta = w$ интеграл (9) примет вид:

$$J_n(z) = - \frac{1}{2\pi i R_n} \int_{|w|=r} \frac{\pi_n(w) + \pi_n^{-1}(w) - 2}{(1-w)^2} dw, \quad (10)$$

где $r = |z|$, $r_n < r < 1$.

Так как функции $\pi_n(w)$ и $(1-w)^{-2}$ аналитичны в замкнутом круге $|w| \leq r$, то из (10) имеем:

$$\begin{aligned} J_n(z) &= - \frac{1}{2\pi i R_n} \int_{|w|=r} \frac{dw}{(1-w)^2 \pi_n(w)} = - \frac{1}{R_n} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{d}{dw} \left[\frac{1}{\pi_n(w)} \right] = \\ &= \frac{1}{R_n} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{[\ln \pi_n(w)]'}{\pi_n(w)} = \frac{1}{R_n} \lim_{r \rightarrow 1} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\log(w - a_k) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \log(1 - \bar{a}_k w) \right] \right\}' = \frac{1}{R_n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из формулы (11) следует, что интеграл $J_n(z)$ не зависит от z и если в качестве множителя R_n выбрать частичные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2} \quad (12)$$

$$R_n = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2}, \quad (13)$$

то при таком выборе R_n будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

при $z = e^{ix}$ ($0 \leq x < 2\pi$).

В частном случае, при $\varepsilon_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), $R_n = n$, $\varphi_n(\theta) = n\theta$, а функция $\Phi_n(e^{i\theta})$ переходит в классическое ядро Фейера:

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = \frac{\sin^2 \frac{n\theta}{2}}{n \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Сформулируем теперь лемму об основных свойствах функции $\Phi_n(\cdot)$.

Лемма. Функция $\Phi_n(\cdot)$, введенная по формуле (4), на единичной окружности обладает всеми свойствами, присущими классическому ядру Фейера, а именно:

а) $\Phi_n(e^{i\theta}) \geq 0$ при $0 < |\theta| \leq \pi$ ($n = 1, 2, \dots$)

б) $\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| = 1$ при $z = e^{ix}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) (15)

в) $\Phi_n(\theta) \leq \frac{\pi^2}{R_n \theta^2}$ при $0 < |\theta| \leq \pi$

г) если дополнительно предположить, что ряд (12) расходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\delta} \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| = 1,$$

где для любого δ ($0 < \delta < \pi$) γ_δ — дуга единичной окружности $|\zeta| = 1$, $-\delta < \arg \zeta < \delta$.

Доказательство. Как видно из (13), $R_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), поэтому свойство а) непосредственно следует из представления (8); свойство б) доказано выше (см. 14)).

Далее, в силу известной оценки $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), име-

ем: $\sin^2 x \geq \frac{4}{\pi^2} x^2$ ($|x| \leq \frac{\pi}{2}$) или $\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \leq \frac{\pi}{\theta^2}$ при $0 < |\theta| \leq \pi$. С учетом

этого неравенства, из (8) получим свойство в) леммы:

$$\Phi_n(\theta) \leq \frac{1}{R_n \sin^2 \frac{\theta}{2}} \leq \frac{\pi^2}{R_n \theta^2} \quad \text{при } 0 < |\theta| \leq \pi.$$

В частности, при $0 < \delta \leq |\theta| \leq \pi$ отсюда следует:

$$\Phi_n(\theta) < \frac{\pi^2}{R_n \delta^2}$$

и если $R_n \rightarrow +\infty$, то при любом δ ($0 < \delta < \pi$) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\delta < |\theta| < \pi} \Phi_n(\theta) = 0. \quad (16)$$

Непосредственно из свойства б) следует:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\tau_0} \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |\arg \zeta| < \pi} \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| \right] = 1, \end{aligned}$$

откуда, ввиду (16), вытекает свойство г) леммы.

4°. Докажем наконец теорему об аппроксимации.

Допустим, что функция $f(z)$ непрерывна на единичной окружности, и введем в рассмотрение систему рациональных функций $\{f_n(z)\}_1^\infty$:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Теорема. Если ряд (12) расходится, то для любой функции $f(z)$, непрерывной на единичной окружности, последовательность рациональных функций $\{f_n(z)\}_1^\infty$, определенная по формуле (17), сходится к $f(z)$ равномерно на единичной окружности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z).$$

Доказательство. В силу свойства (15) б) и по (17) имеем

$$f(z) - f_n(z) = \int_{|\zeta|=1} [f(z) - f(\zeta)] \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta|. \quad (18)$$

Далее, в силу непрерывности $f(z)$ на единичной окружности, для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что при $|\arg z - \arg \zeta| < \delta$ имеем $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$ равномерно на всей единичной окружности. Обозначим также

$$\sup_{|z|=1} |f(z)| = M$$

и с учетом свойства (15) а) оценим интеграл (18), предварительно разбив его на два интеграла:

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\tau_0} |f(z) - f(\zeta)| \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |\arg \zeta| < \pi} |f(z) - f(\zeta)| \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| < \varepsilon \int_{\tau_0} \Phi_n(z, \zeta) |d\zeta| + \end{aligned}$$

$$+ 2M \int_{|z|=|z_k|-\epsilon} \Phi_n(z, z_k) |d\zeta|.$$

Наконец, ввиду свойств (15) в) и г) ядра $\Phi_n(z, z_k)$ отсюда получим

$$|f(z) - f_n(z)| < C\epsilon$$

равномерно на всей окружности ($C = \text{const}$).

Теорема доказана.

Таким образом, возможность равномерной аппроксимации непрерывных на единичной окружности функций системой рациональных функций, образованных обобщенным ядром Фейера $\Phi_n(z, z_k)$, существенно зависит от скорости сгущения точек последовательности $\{z_k\}$ к единичной окружности.

Следует также отметить, что полюсы рациональных функций $f_n(z)$ в общем случае не совпадают с полюсами ядра $\Phi_n(z, z_k)$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԿԻՏԲԱԼՅԱՆ

Ֆեյերի կորիզի մի ընդհանուրացման մասին

Հոդվածում ⁽¹⁾ առաջին անգամ ուսումնասիրվել էր ըստ ուսցիոնալ ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգի կառուցված Ֆուրյեի շարքերի սովորական զուգամիտության հարցը: Այնտեղ կառուցվել էր Դիրիխլեի ընդհանրացված կորիզը միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ ուսցիոնալ ֆունկցիաների համակարգի համար, ապացուցվել էին ժորդան—Դիրիխլեի և Դինի—Լիպշիցի հայտանիշների անալոզները:

Կառուցվել էր դասական եռանկյունաչափական համակարգն ընդհանրացնող ուսցիոնալ ֆունկցիաների համակարգ և հետազոտվել էին Ֆուրյեի շարքերի վերլուծութայնները ըստ այդ համակարգի⁽²⁾:

Ներկա հոդվածում կառուցվում է Ֆեյերի դասական կորիզի անալոզը ուսցիոնալ ֆունկցիաների որոշ համակարգի համար և ապացուցվում է թեորեմ՝ նշված կորիզի միջոցով կառուցված ուսցիոնալ ֆունկցիաներով միավոր շրջանագծի վրա անընդհատ ֆունկցիաների մոտարկման վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашян, „Известия АН Арм. ССР“, серия физ.-мат. наук, т. 9, № 7 (1956). ² А. А. Китбальян, „Известия АН Арм. ССР“, серия физ.-мат. наук, т. 16, № 6 (1963). ³ Н. К. Барн, Тригонометрические ряды, М., 1961.

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Г. М. Бродский, А. Г. Григорян

О кольцах эндоморфизмов модулей

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 18/III 1979)

Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и, если не оговорено противное, правые унитарные модули: гомоморфизмы записываются слева от элемента. Список обозначений: $r(S)$ и $l(S)$ — правый и левый аннуляторы подмножества S некоторого кольца; $L_r(X)$ и $L'_r(X)$ (соответственно $L_l(X)$ и $L'_l(X)$) — множества всех и всех конечно порожденных подмодулей правого (левого) модуля X соответственно; $\aleph(X)$ — наименьшая бесконечная мощность ω , для которой модуль X будет ω -связанным ⁽¹⁾; $E(X)$ — кольцо эндоморфизмов модуля X ; $\text{Im } S = \sum_{\varphi \in S} \text{Im } \varphi$ для подмножества $S \subseteq E(X)$;

$\bar{K} = \bigcap \{ \text{Ker } \varphi \mid \varphi \in E(X), K \subseteq \text{Ker } \varphi \}$, $\delta_1(K) = K$ и $\delta_2(K) = \bar{K}$ для всех $K \in L_r(X)$; i — одно из двух чисел: 1, 2. Класс b_R модулей над кольцом R называется *абстрактным*, если $X \in b_R$ и $X \cong Y$ влечет $Y \in b_R$. Если a и b — функции, сопоставляющие каждому кольцу R некоторое множество a_R его правых идеалов и некоторый (абстрактный) класс b_R модулей над R соответственно, то скажем, что a и b являются *свойством правых идеалов* и (*абстрактным*) *свойством модулей* соответственно. При этом если c — свойство правых идеалов (модулей) и $X \in c_R$, то условимся говорить, что правый идеал (модуль) X *обладает свойством c* , и писать $c_R(X)$. Классы $M_R, IP_R, T_R, P_R, FT_R, W_R, F_R$ и F_R^α всех, всех внутренне проективных ⁽²⁾, всех не имеющих кручения в смысле Басса, всех проективных, всех точных без кручения в смысле Басса, всех внутренне проективных образующих без кручения в смысле Басса, всех свободных и всех свободных, имеющих бесконечный ранг R -модулей определяют абстрактные свойства модулей M, IP, T, P, FT, W, F и F^α соответственно. Если K — свойство модулей, то пару (a, b) , где a — свойство правых идеалов, а b — абстрактное свойство модулей, назовем (*частичной h -парой i -го рода для K*), если для любых кольца R , модуля $U \in K_R$ и (конечно порожденного) правого идеала I кольца $E(U)$ имеет место:

$$a_{E(U)}(I) \leftrightarrow b_R(U/\delta_I(\text{Im } I))$$

Теорема 1. Если K — такое свойство модулей, что $F_R^1 \subseteq K_R$ для всякого кольца R и (a, b) — частичная h -пара первого рода для K , то следующие условия равносильны: 1) в кольце эндоморфизмов любого модуля из K_R все конечно порожденные правые идеалы обладают свойством a ; 2) в кольце эндоморфизмов любого свободного R -модуля достаточно большого ранга все главные правые идеалы обладают свойством a ; 3) все R -модули обладают свойством b . Если, более того, (a, b) есть h -пара первого рода для K , то этим условиям равносильно 4) в кольце эндоморфизмов любого модуля из K_R все правые идеалы обладают свойством a .

Теорема 2. Если K — такое свойство модулей, что $F_R^2 \subseteq K_R \subseteq T_R$ для всякого кольца R и (a, b) — частичная h -пара второго рода для K , то следующие условия равносильны: 1) в кольце эндоморфизмов любого модуля из K_R все конечно порожденные правые идеалы обладают свойством a ; 2) в кольце эндоморфизмов любого свободного R -модуля достаточно большого ранга все главные правые идеалы обладают свойством a ; 3) все R -модули без кручения в смысле Басса обладают свойством b . Если, более того, (a, b) есть h -пара второго рода для K , то этим условиям равносильно 4) в кольце эндоморфизмов любого модуля из K_R все правые идеалы обладают свойством a .

Пусть заданы свойство модулей K и свойство правых идеалов a , причем $F_R^2 \subseteq K_R \subseteq T_R$ для всякого кольца R и поставлена задача описания таких колец R , что в кольце эндоморфизмов любого модуля из K_R все (все конечно порожденные) правые идеалы обладают свойством a . Схема применения теорем 1 и 2 к ее решению такова: для произвольного кольца R составляем два класса R -модулей $b_R^{(i)} = \{U/\delta_i(\text{Im } I) \mid U \in K_R, I \in L_i(E(U)) \text{ (соответственно } I \in L_i'(E(U)))\}$, отвечающих двум различным значениям i . Если хотя бы для одного значения $i = i_0$ удастся подобрать такое абстрактное свойство модулей $\bar{b}^{(i_0)}$, что

$$b_R^{(i_0)}(U/\delta_{i_0}(\text{Im } I)) \leftrightarrow \bar{b}^{(i_0)}(U/\delta_{i_0}(\text{Im } I))$$

для всех $U \in K_R, I \in L_{i_0}(E(U))$ (соответственно $I \in L_{i_0}'(E(U))$), то $(a, \bar{b}^{(i_0)})$ — (частичная) h -пара i_0 -го рода, и остается применить теорему 1. Если заданное свойство модулей K для всякого кольца R удовлетворяет лишь более слабому условию $F_R^1 \subseteq K_R$, то, разумеется, следует пытаться применить только теорему 1.

Определим свойства правых идеалов a^j и абстрактные свойства модулей b^j ($j = 1, 2, \dots, 8$), положив

$$a_R^1 = \{R\}, a_R^2 = \{eR \mid e^2 = e \in R\}, a_R^3 = \{r(J) \mid J \in L_1(R)\},$$

$$a_R^4 = \{r(J) \mid J \in L_1'(R)\}, a_R^5 = a_R^7 \mid \{I \mid l(I) = 0\},$$

$$a_R^6 = \{I \mid e \in l(I) \text{ для некоторого } 0 \neq e = e^2 \in R\},$$

$a_R^8 = |I| l(I) = Re$ для некоторого $e = e^2 \in R$.

$b_R^1 = b_R^7 = \{0\}$, $b_R^2 = b_R^8 = P_R$, $b_R^3 = T_R$,

$b_R^4 = \{X \mid X \text{ вкладывается в свободный модуль ранга } r(X)\}$,

$b_R^5 = \{X \mid \text{Hom}_R(X, R) = 0\}$, $b_R^6 = \{X \mid 0 \neq X/K \in P_R \text{ для некоторого } K \in L_r(X)\}$.

Предложение 1. (a^1, b^1) , (a^2, b^2) , (a^3, b^3) и (a^4, b^4) — частичные h -пары первого рода для IP , IP , W и F^n соответственно, (a^5, b^5) и (a^6, b^6) , есть h -пары первого рода для FT и P соответственно; (a^7, b^7) и (a^8, b^8) есть h -пары второго рода для R , M и P соответственно.

Кольцо R называется левым S -кольцом, если $R \neq I \in L_r(R)$ влечет $l(I) \neq 0$. Назовем R -модуль X микроинъективным, если $\text{Hom}_R(Y, X) \neq 0$ для всякого подмодуля $Y \neq 0$ инъективной оболочки модуля X . Кольцо R назовем самоинъективным (тестовым) справа, если модуль R_R микроинъективен (тестовый $(^3)$).

Среди следствий теорем 1 и 2 и предложения 1 — не только известные результаты, например, теоремы 1 и 4 из $(^4)$, теорема 2 из $(^5)$, теорема 2 из $(^6)$, теоремы 3.7 и 3.8 из $(^7)$, но и ряд новых.

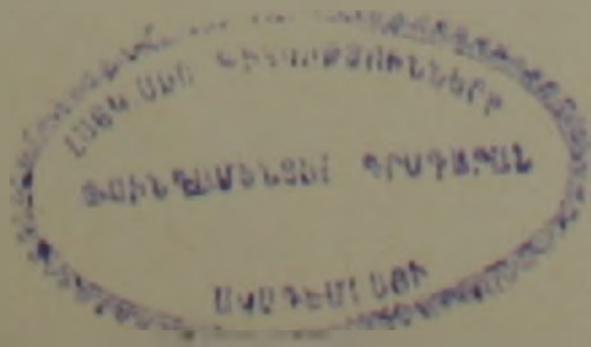
Теорема 3. Следующие свойства кольца R равносильны: 1) в кольце эндоморфизмов любого проективного R -модуля левый аннулятор всякого собственного конечно порожденного правого идеала содержит ненулевой идемпотент; 2) в кольце эндоморфизмов любого свободного R -модуля левый аннулятор всякого необратимого справа элемента содержит ненулевой идемпотент; 3) R классически полупросто.

Теорема 4. Следующие свойства кольца R равносильны: 1) в кольце эндоморфизмов любого проективного R -модуля всякий ненулевой левый аннулятор содержит ненулевой идемпотент; 2) в кольце эндоморфизмов любого свободного R -модуля всякий ненулевой левый аннулятор элемента содержит ненулевой идемпотент; 3) в кольце R всякий ненулевой правый идеал имеет ненулевое проективное прямое слагаемое (как R -модуль).

Теорема 5. Следующие свойства кольца R равносильны: 1) в кольце эндоморфизмов любого внутренне проективного точного R -модуля без кручения в смысле Басса всякий собственный конечно порожденный правый идеал имеет ненулевой левый аннулятор; 2) в кольце эндоморфизмов любого свободного R -модуля всякий правый делитель нуля имеет правый обратный; 3) R тестовое справа; 4) R самоинъективное справа левое S -кольцо (ср. $(^8)$, теорема 2; $(^9)$, предложение 3).

В связи с теоремой 5 интересна также полученная методом, предложенным в работах $(^7)$, $(^{10})$,

Теорема 6. Следующие свойства кольца R равносильны: 1) кольцо эндоморфизмов любого (некоторого) проективного обра-



зующего R -модуля самомикроективно справа; 2) R самомикроективно справа.

Как известно (¹¹), ни над каким кольцом R все кольца эндоморфизмов проективных образующих не могут быть левыми S -кольцами и, тем более, тестовыми справа. Теоремы 5 и 6 показывают, в какой степени свойство кольца быть тестовым справа наследуется кольцами эндоморфизмов проективных образующих над ним.

Ярославский государственный университет
Вычислительный центр Госплана Армянской ССР

Գ. Մ. ԲՐՈԴՍԿԻ, Ա. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Մոդուլների էնդոմորֆիզմների օղակների մասին

Առաջարկված է նոր մեթոդ, որը թույլ է տալիս բնութագրել օղակների զանազան դասեր ազատ, պրոյեկտիվ և որոշ այլ մոդուլների էնդոմորֆիզմների օղակների հատկությունների միջոցով: Որպես հետևություններ ստացված են ինչպես նախկինում հայտնի թեորեմներ, այնպես էլ մի շարք նոր արդյունքներ: Մասնավորապես վերոհիշյալ ձևով բնութագրվում են՝ 1) դասական կիսապարզ օղակները, 2) այնպիսի R օղակները, որոնց յուրաքանչյուր ոչզրոյական աջ իդեալը պարունակում է ոչզրոյական պրոյեկտիվ ուղիղ գումարելի (որպես R -մոդուլ) և 3) աջ տեստային օղակները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ H. Lenzing, Math. Z., 114, № 3 (1970). ² Г. М. Бродский, Матем. зам., 16, № 6 (1974). ³ T. Cheatham, R. Cumble, Proc. Amer. Math. Soc., 49, № 2 (1975). ⁴ Г. М. Цукерман, Сиб. матем. журн. 7, № 5 (1956). ⁵ В. Стефенсон, Г. М. Цукерман, Сиб. матем. журн, 11, № 1 (1970). ⁶ Г. М. Бродский, Матем. зам., 14, № 4 (1973). ⁷ Г. М. Бродский, Матем. сб., 94, № 6 (1974). ⁸ Г. М. Бродский, Матем. сб., 88, № 1, (1972). ⁹ T. Kato, Tohoku Math. J., 20, № 2 (1968). ¹⁰ Г. М. Бродский, Вестн. Моск. ун-та, матем.-мех., № 3, 106 (1974). ¹¹ Т. С. Тольская, Матем. зам., 10, № 6 (1971).

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

С. М. Нариманян

О равномерной распределенности случайных блужданий на топологических группах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/III 1979)

Пусть G — локально компактная группа, μ — левоинвариантная мера Хаара на G , а X_n — однородная марковская цепь на G с переходной функцией $P(n, x, \Gamma) = P_x \{X_n \in \Gamma\}$. Мы предполагаем, что переходная функция $P(1, x, \Gamma)$ абсолютно непрерывна относительно меры μ (как функция Γ), и через $p(x, y)$ обозначим соответствующую плотность. Если переходная плотность инвариантна (слева), т. е. $p(x, y) = p(e, x^{-1}y)$, e — единица группы, то говорят, что X_n представляет случайное блуждание на G . Дадим некоторые необходимые для дальнейшего определения, предполагая, что для некоторого n_0 переходная плотность $p(n_0, x, y)$ за n_0 шагов непрерывна.

Определение 1. Марковская цепь X_n на G называется связной и неперiodичной, если для любых $x, y \in G$ существует номер $m_n = m_0(x, y) \geq n_0$, такой, что $p(m, x, y) > 0$ при $m \geq m_0$.

Определение 2. Пусть K — класс компактных подмножеств K группы G , таких, что $\mu(K) > 0$. Мы скажем, что случайное блуждание X_n равномерно распределено на G , если для любых $K_1, K_2 \in K$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n, e, K_1)}{P(n, e, K_2)} = \frac{\mu(K_1)}{\mu(K_2)}$$

В работе (1) Аве доказал теорему о равномерной распределенности симметрических случайных блужданий на широком классе дискретных (счетных) групп. Цель нашей статьи — перенести результат Аве на случай локально компактных топологических групп. Применяемая при этом техника имеет ряд особенностей.

Предложение 1. Пусть X_n — связное и неперiodическое случайное блуждание на G с переходной плотностью $p(e, x) = p(x)$. Если $p \in L^2(G, d\mu)$, то для любого $K \in K$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n, x, K)} = \rho$$

равномерно по x на каждом компакте и не зависит от K . Постоянное ρ называется спектральным радиусом случайного блуждания X_n .

Это предложение доказывается стандартными методами теории цепей Маркова с использованием операции урезания. Близкий результат см. в (2).

Теперь перейдем к сформулированию основного результата этой статьи. Мы будем предполагать, что рассматриваемое случайное блуждание X_n (с переходной плотностью $p(x)$) на G симметрично. Это означает, что $p(x) = p(x^{-1})$.

Теорема 1. Пусть X_n — симметрическое связное и неперiodическое случайное блуждание на G с переходной плотностью $p \in L^2(G)$. Тогда если спектральный радиус $\rho = 1$, то X_n равномерно распределено на G , т. е. для любых $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n, e, K_1)}{P(n, e, K_2)} = \frac{\mu(K_1)}{\mu(K_2)} \quad (1)$$

Доказательство теоремы 1 требует ряда вспомогательных предположений.

Лемма 1. Для любого $x \in G$

$$p(2n, e, x) \leq p(2n, e, e). \quad (2)$$

В самом деле, воспользовавшись уравнением Колмогорова — Чепмена, инвариантностью и симметричностью переходной плотности, а также неравенством Коши — Буняковского, будем иметь

$$p(2n, e, x) = \int p(n, e, y) p(n, e, x^{-1}y) d\mu(y) \leq \left(\int p^2(n, e, y) d\mu(y) \right)^{1/2} \cdot \left(\int p^2(n, e, x^{-1}y) d\mu(y) \right)^{1/2} = \int p^2(n, e, y) d\mu(y),$$

откуда в силу равенства

$$p(2n, e, e) = \int p(n, e, y) p(n, y, e) d\mu(y) = \int p^2(n, e, y) d\mu(y)$$

немедленно получим (2).

Лемма 2. Существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(2n+2, e, e)}{p(2n, e, e)} = 1.$$

Доказательство. Существование предела доказывается точно так же, как и в (1). При доказательстве основную роль играет неравенство (2), с помощью которого показывается, что отношение

$\frac{p(2n+2, e, e)}{p(2n, e, e)} \leq 1$ и монотонно возрастает по n . Покажем, что

$\sqrt[2n]{p(2n, e, e)} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, и тем самым лемма 2 будет доказана.

Действительно, по условию теоремы 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{P(2n, e, K)} = 1$$

для любого $K \in \mathcal{K}$, и поскольку (в силу леммы 1) $P(2n, e, K) \leq p(2n, e, e) \mu(K)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{p(2n, e, e)} \geq 1$. Сопоставляя с неравен-

ством $\frac{p(2n+2, e, e)}{p(2n, e, e)} \leq 1$, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{p(2n, e, e)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(2n+2, e, e)}{p(2n, e, e)} = 1.$$

Лемма 3. Семейство функций

$$f_n(x) = \frac{p(2n, e, x)}{p(2n, e, e)}, x \in G$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство. Равномерная ограниченность немедленно следует из леммы 1. Далее, из лемм 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| &\leq \int \frac{p(2n, e, z)}{p(2n+2, e, e)} |p(2, z, x) - p(2, z, y)| d\mu(z) \leq \\ &\leq c \int |p(2, e, z^{-1}x) - p(2, z^{-1}y)| d\mu(z). \end{aligned} \quad (3)$$

Известно (2), что если $\varphi \in L^p$ ($p \geq 1$), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность единицы V , что из $s \in V$ следует $\left(\int |\varphi(s^{-1}x) - \varphi(x)|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon$. Учитывая, что $p(2, e, x) \in L^1(G)$, из (3) получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность единицы V такая, что при $y^{-1}x \in V$

$$|f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| < \varepsilon, x, y \in G.$$

Это и означает, что семейство функций f_n равностепенно непрерывно. Лемма 3 доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 1. Сначала покажем, что

$$\frac{p(2n, e, x)}{p(2n, e, e)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty \quad (4)$$

равномерно на каждом $K \in \mathcal{K}$.

Действительно, рассмотрим функции $f_n(x)$ на K . В силу теоремы

Арцела множество предельных точек семейства $\{f_n\}$ в $C(K)$ не пусто, и пусть g — какая-то предельная точка. Покажем, что $g(x) \equiv 1$ на K , и тем самым будет доказано (4). Пусть $f_{n'} \rightarrow g$ равномерно на K . В силу связности и неперIODичности X_n и непрерывности $p(n, e, x)$, $n \geq 2$ можно выбрать l так, чтобы $p(2l, e, x) > 0$ для всех $x \in K$. Поэтому из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\begin{aligned} \int_K (1 - g(x)) d\mu(x) &= \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_K \left(1 - \frac{p(2n', e, x)}{p(2n', e, e)} \right) d\mu(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta} \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_K p(2l, e, x) \left(1 - \frac{p(2n', e, x)}{p(2n', e, e)} \right) d\mu(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta} \lim_{n' \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p(2n' + 2l, e, x)}{p(2n', e, e)} \right), \end{aligned}$$

где $\delta = \min_{x \in K} p(2l, e, x)$. Но правая часть последнего соотношения в силу леммы 2 равна нулю. Значит

$$\int_K (1 - g(x)) d\mu(x) = 0,$$

и, следовательно, $\mu\{x \in K: 1 - g(x) > 0\} = 0$. Отсюда, учитывая непрерывность функции $g(x)$, получим, что $g(x) \equiv 1$ на K . Таким образом соотношение (4) доказано.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, покажем еще, что равномерно по $x \in K$

$$\frac{p(2n + 1, e, x)}{p(2n + 1, e, e)} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

для чего достаточно доказать, что

$$g_n(x) = \frac{p(2n + 1, e, x)}{p(2n, e, e)} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty \quad (6)$$

равномерно по $x \in K$.

Из очевидного представления

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \int p(e, z) \frac{p(2n, e, z^{-1}x)}{p(2n, e, e)} d\mu(z) = \\ &= \int p(e, z^{-1}x) \frac{p(2n, e, z)}{p(2n, e, e)} d\mu(z) \end{aligned}$$

и из леммы 1 немедленно следует компактность семейства функций $g_n(x)$. Повторяя все предыдущие рассуждения, относящиеся к последовательности f_n (только l выбирается так, чтобы $p(2l + 1, e, x) > 0$, $x \in K$), получим (6). Объединяя (4) — (5), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n, e, x)}{p(n, e, e)} = 1 \quad (7)$$

равномерно по $x \in K$, $K \in K$. Отсюда и из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости сразу получим соотношение (1). Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема Аве, упомянутая выше, утверждает также равномерную распределенность симметрического связного и непериодического случайного блуждания на счетной группе с дискретной топологией, в предположении, что спектральный радиус $\rho=1$. Другими словами, теорема 1 обобщает теорему Аве на гораздо более широкий класс непрерывных групп. Однако в дискретном случае теорема о равномерной распределенности допускает другую изящную формулировку. Именно, условие $\rho=1$ в этом случае, согласно результату Кестена, эквивалентно аменабельности группы (определение см. (4)). Мы не знаем, справедлив ли аналог теоремы Кестена в непрерывном случае. Если это так, что представляется весьма правдоподобным, то и в теореме 1 условие $\rho=1$ можно будет заменить условием аменабельности группы G .

В заключение приношу глубокую благодарность С. А. Молчанову за руководство работой.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

ՈՒՄՆԱՐԻՄԱՆՅԱՆ

Տոպոլոգիական խմբերի վրա տրված պատահական բափառումների հավասարաչափ բաշխվածության մասին

*Իրցուք G -ն լոկալ կոմպակտ խումբ է, μ -ն ձախ ինվարիանտ չափիչ է G -ի վրա, իսկ X_n -ը սիմետրիկ, կապակցված և ոչ պարբերական պատահական թափառում է G -ի վրա, որի անցման ֆունկցիան է՝ $P(n, x, \Gamma) = P_x\{X_n \in \Gamma\}$, ենթադրվում է, որ $P(1, x, \Gamma)$ -ն բացարձակ անընդհատ է/որպես ֆունկցիա Γ -ից/և չափի նկատմամբ և համապատասխան խտությունը նշանակվում է $p(x, y)$ -ով:

Ստացված է հետևյալ արդյունքը: Եթե X_n -ի սպեկտրալ շառավիղը հավասար է մեկի, իսկ $p(e, x) = p(x) \in L^2(G, d\mu)$, ապա X_n -ը հավասարաչափ է բաշխված G -ի վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Շ Ը Ն ՈՒ Բ Յ ՈՒ Ն

¹ A. Avez, Comptes Rendus, 276, №4, (1973). ² С. М. Нариманян, Вестник МГУ, Матем., №6, 1975. ³ А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, Изд. иностр. лит., М., 1950. ⁴ Ф. Гриклиф, Инвариантные средние на топологических группах и их приложения, "Мир", М., 1973.

УДК 681.142.2

МАТЕМАТИКА

А. А. Ордян, Г. В. Джулакян

Алгоритм синтаксического анализа для индексных языков

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 3/IV 1979)

Для описания синтаксиса языков программирования широко используются формальные грамматики, введенные Хомским (¹). Для класса контекстно-свободных (КС) формальных грамматик разработаны достаточно эффективные алгоритмы синтаксического анализа, успешно применяемые в современных синтаксически-ориентированных трансляторах. Однако с помощью КС-грамматик невозможно полностью описать синтаксис языков программирования высокого уровня (таких как АЛГОЛ-60, ФОРТРАН, ПЛ-1 и т. д.), так как в синтаксических конструкциях последних существенно используются так называемые контекстные условия.

Известно (²), что контекстные условия можно моделировать (описать) с помощью контекстно-чувствительных формальных грамматик, класс которых полностью включает в себя класс КС-грамматик.

Настоящая работа посвящена описанию нового алгоритма синтаксического анализа для индексных языков, порождаемых индексными грамматиками (³). Класс индексных грамматик (языков) шире класса КС-грамматик (языков), но является собственным подклассом класса контекстно-чувствительных грамматик (языков).

Разработанный алгоритм использует автомат нового типа — D-автомат, переходы которого осуществляются с помощью некоторых бинарных отношений — отношений предшествования.

Определение некоторых понятий, не приведенных в этой работе, можно найти в (³⁻⁵).

Индексной грамматикой называется пятерка $G = (N, T, F, P, S)$, где

N — конечное множество терминальных символов;

T — конечное непустое множество нетерминальных символов;

F — конечное множество символов, называемых индексами или посредниками;

P — конечное множество упорядоченных пар вида (X, χ) , где либо $X \in N$, $\chi \in (NF^* \cup T)^*$, либо $X \in NF$, $\chi \in (N \cup T)^*$.

Пара $(X, \chi) \in P$ называется правилом грамматики G и обозначается $X \rightarrow \chi$, а P называется множеством правил грамматики G ; $S \in N$ — выделенный (начальный) символ грамматики G .

В этом определении предполагается, что $N \cap T \cap F = \emptyset$ и для каждого индекса $f \in F$ имеется хотя бы одно правило вида $Af \rightarrow X_1 \dots X_k$.

Пусть $\alpha, \beta \in (NF^* \cup T)^*$. Говорят, что в G из α непосредственно порождается β , $\alpha \Rightarrow \beta$, если либо

$$1. \alpha = \gamma A \xi \delta, (A \rightarrow X_1 \eta_1 \dots X_k \eta_k) \in P,$$

$$\beta = \gamma X_1 \theta_1 \dots X_k \theta_k \delta, \text{ где } \theta_i = \eta_i \xi \text{ для } X_i \in N, \theta_i = \varepsilon \text{ для } X_i \in T, 1 \leq i \leq k, \text{ либо}$$

$$2. \alpha = \gamma A f \xi \delta, (A f \rightarrow X_1 X_2 \dots X_k) \in P,$$

$$\beta = \gamma X_1 \theta_1 \dots X_k \theta_k \delta, \text{ где } \theta_i = \xi \text{ для } X_i \in N, \theta_i = \varepsilon \text{ для } X_i \in T, 1 \leq i \leq k.$$

В этих обозначениях ε — пустое слово, $A \in N$, $f \in F$, $\gamma, \delta \in (NF^* \cup T)^*$, $\xi, \eta_i, \theta_i \in F^*$.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in (NF^* \cup T)^*$.

Рекурсивно определяется n -ая степень ($n \geq 0$) отношения \Rightarrow , а именно

$$1. \alpha \Rightarrow^0 \alpha;$$

$$2. \alpha \Rightarrow^{n+1} \beta, \text{ если } \alpha \Rightarrow^n \gamma, \gamma \Rightarrow \beta \text{ для некоторого } \gamma.$$

Транзитивное замыкание отношения \Rightarrow обозначается через \Rightarrow^+ , а транзитивное и рефлексивное замыкание — через \Rightarrow^* . Ясно, что $\alpha \Rightarrow^* \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \Rightarrow^i \beta$ для некоторого $i \geq 0$, и $\alpha \Rightarrow^i \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \Rightarrow^i \beta$ для некоторого $i \geq 1$.

Говорят, что β выводится из α , если $\alpha \Rightarrow^* \beta$. Если $\alpha \in (NF^* \cup T)^*$ и $S \Rightarrow^* \alpha$, то α называется сентенциальной формой.

Слово из символов вида $A\xi$, где $A \in N$, $\xi \in F^+$, называется индексированным нетерминалом. Пусть G — индексная грамматика. Множество $L(G) = \{w / w \in T^*, S \Rightarrow^+ w\}$ называется индексным языком.

Для языка $L(G)$ задача синтаксического анализа заключается в следующем: дать алгоритм, определяющий для любого $w \in T^+$ истинность логического выражения $w \in L(G)$. В случае, если действительно $w \in L(G)$, алгоритм дает последовательность выполнения правил, с помощью которых порождается w в грамматике G . Для однозначных грамматик, а именно такие мы рассматриваем, выходом алгоритма синтаксического анализа при работе над словом w является последовательность a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 , где $a_n = w$, $a_1 = S$. Переход от a_{i+1} к a_i ($1 \leq i \leq n-1$) называется редукцией. Отношение редукции обозначим через \rightarrow_R .

Из определения непосредственного вывода для индексных грамматик следует:

$\beta \rightarrow_R \alpha$, если либо

$$1. \beta = \gamma X_1 \theta_1 \dots X_k \theta_k \delta, \text{ где } \theta_i = \eta_i \xi \text{ для } X_i \in N, \theta_i = \varepsilon \text{ для } X_i \in T$$

- $\alpha = \gamma A \xi \delta$ и имеется правило $A \rightarrow X_1 \eta_1 \dots X_k \eta_k$, либо
- $\beta = \gamma X_1 \theta_1 \dots X_k \theta_k \delta$, где $\theta_i = \xi$ для $X_i \in N$, $\theta_i = \varepsilon$ для $X_i \in T$,
 - $\alpha = \gamma A f \xi \delta$ и имеется правило $A f \rightarrow X_1 \dots X_k$.

В частности, если $\beta = a B \gamma \xi C \theta \xi b$ и имеется правило $A \rightarrow a B \eta C \theta b$, то $\beta \Rightarrow_R \alpha$, где $\alpha = A \xi$.

Если $\beta = a B \xi C \xi$ и имеется правило $A f \rightarrow a B C$, то $\beta \Rightarrow_R \alpha$ где $\alpha = A f \xi$.

Пусть Z — некоторая цепочка. X назовем префиксом (суффиксом) Z , если $Z = XY$ ($Z = YX$), где Y некоторая (возможно пустая) цепочка.

Пусть дана грамматика $G = (N, T, F, P, S)^1$.

В последующих определениях предполагается, что $x, y \in (NF^* \cup T)$, $f \in F$, $\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1 \in (NF^* \cup T)^*$, $\xi, \xi' \in F^*$, $A, B, C \in N \cup NF$, $Z \in NF^*$, $\beta', \gamma' \in (F^* \cup NF^* \cup T)^*$.

Определим следующие бинарные отношения над множеством $T \cup NF^* \cup F$:

- $X \doteq Y$, если существует некоторое правило $(A \rightarrow \alpha X Y \beta) \in P$,
- $X < Y$, если существуют некоторое правило $(A \rightarrow \alpha Z B \beta) \in P$ и вывод $B \Rightarrow^+ Y \gamma$, где X — любой префикс Z .
- $X > Y$, если существуют некоторое правило $(A \rightarrow \alpha B \xi C \beta) \in P$ и выводы $B \Rightarrow^+ \gamma Z$ и $C \Rightarrow^+ Y \gamma_1$, где X — любой префикс Z .
- $X \sqsubseteq | f$, если существует вывод $S \Rightarrow^+ \alpha X f \beta'$ такой, что в сен-тенциальной форме $\alpha X f \beta'$ элементы X и f не порождаются одновременно с помощью некоторого правила вида $(B \rightarrow \gamma X f \gamma') \in P$.

Отношения 1—4 назовем отношениями предшествования. Пусть $\alpha, \beta \in (NF^* \cup T)^*$, $X_1, X_2 \in (NF^* \cup T)$, $\xi_1, \xi_2 \in F^*$.

Теорема 1. Если $\alpha = \alpha X_1 \xi_1 X_2 \xi_2 \beta$ — некоторая сен-тенциальная форма, то между X_1 и X_2 имеет место хотя бы одно из отноше-ний 1—3. Если $X_1 = X_2$ — единственное отношение и $X_1, X_2 \in T$ или $X_1, X_2 \in NF^*$ одновременно, то $\xi_1 = \xi_2$.

Грамматику $G = (N, T, F, P, S)$ назовем приведенной, если для G выполняются следующие условия:

- Если $(A \rightarrow \alpha) \in P$, то $\alpha \neq \varepsilon$, где ε — пустое слово;
- Если $\gamma_1 A \gamma_2$ сен-тенциальная форма, то в G существует вывод $A \Rightarrow^+ \omega$, где $\omega \in T^+$;
- Для всех $A \in N F \cup N$ не имеет места $A \Rightarrow^+ A$.

Приведенную грамматику назовем грамматикой предшествова-ния, если выполняются следующие условия:

- Правые части всех правил различны;
- $|\langle \cdot \rangle \cap | \cdot \rangle| = \emptyset$;
- Если $(|\langle \cdot \rangle \cap | \cdot \rangle) \cup (|\cdot \rangle \cap | \cdot \rangle) = |(X_i, Y_i)|$, где $i = 1, 2, \dots$, $X_i, Y_i \in NF^*$, то для всех сен-тенциальных форм $\rho_i = \alpha X_i \xi_i Y_i \xi_i \beta$ име-ет место $\xi_i, \xi_i \neq \varepsilon$. Если $\xi_i = \xi_i$, то в ρ_i элементы X_i и Y_i появились

¹ Здесь и далее, если нет специальной оговорки, под грамматикой будем понимать индексную грамматику.

одновременно применением некоторого правила вида $A \rightarrow a_i X_i Y_i \beta_i$;

4) если $X_i \sqsupseteq f$, то P не содержит правила вида $A \rightarrow a X f \beta$, но содержит хотя бы одно правило вида $B \rightarrow a_1 X \beta_1$.

Пусть для грамматики предшествования G все правила вывода пронумерованы натуральными числами, образующими множество Q .

Ниже приводится определение D -автомата, реализующего синтаксический анализ цепочек, порождаемых грамматикой предшествования.

D -автоматом называется пятерка $D = (V, R, Q, L_H, L_K)$, где

$V = N \cup T \cup F$ — множество входных символов автомата;

R — отображение множества $E = (\perp (V \cup \{\diamond\})^* \times F^* \times V^* \perp \times (Q \diamond \diamond)^*)$ на множество $E \cup \{\text{ОШИБКА}\}$;

$L_H = [\perp, \epsilon, w \perp, \epsilon]$ — начальная конфигурация автомата, где w — анализируемая цепочка;

$L_K = [\perp, \epsilon, S \perp, \pi]$ — заключительная конфигурация автомата, где $\pi \in (Q \diamond)^*$ — слово, указывающее последовательность редукций.

Автомат останавливается либо при достижении состояния ОШИБКА, либо на конфигурации L_K . В последнем случае $w \in L(G)$ и выводится в G с помощью правил P_1, P_2, \dots, P_n , где $P_1 \diamond P_2 \diamond \dots \diamond P_n \diamond = \pi$. Вспомогательные символы \perp и \diamond не принадлежат множеству V .

Включение $(a, b) \in R$ обозначим $a \vdash_R b$.

Пусть $H_{00} = [\perp X_1 \dots X_r, \epsilon, X_{r+1} \dots X_n \perp, \delta]$,

$H_{01} = [\perp X_1 \dots X_r X_{r+1}, \epsilon, X_{r+2} \dots X_n \perp, \delta]$,

$H_{02} = [\perp X_1 \dots X_r \diamond, Y, X_{r+2} \dots X_n \perp, \delta]$,

$H_{03} = [\perp \beta, \epsilon, \beta_1 A X_{r+1} \dots X_n \perp, q \diamond \delta]$,

$H_{10} = [\perp X_1 \dots X_r \diamond \dots X_r, Y, X_{r+1} \dots X_n \perp, \delta]$,

$H_{11} = [\perp X_1 \dots X_r \diamond \dots X_r X_{r+1}, Y, X_{r+2} \dots X_n \perp, \delta]$,

$H_{12} = [\perp X_1 \dots X_r \diamond \dots X_r X_{r+1}, Y, X_{r+3} \dots X_n \perp, \delta]$,

$H_{13} = [\perp X_1 \dots X_r Z_r \dots X_r Z_r X_{r+1} \diamond, Y'', X_{r+3} \dots X_n \perp, \delta]$,

$H_{14} = [\perp X_1 \dots X_r Z_r \dots X_r Z_r X_{r+1}, \epsilon, X_{r+2} \dots X_n \perp, \delta]$.

Пусть для всех $X \in N F^* \cup T$ имеет место $\perp \langle X \text{ и } X \rangle \perp$.

Отображение R определяется следующим образом.

I. $H_{00} \vdash_R H_0$, причем

$H_0 = H_{01}$, если $(X_r \prec X_{r+1}) \vee (X_r = X_{r+1})$;

$H_0 = H_{02}$, если $(X_r \sqsupseteq X_{r+1})$, где $Y = f_1 \dots f_r$ — слово максимальной длины из F^+ , следующее за X_r , при этом $f_1 = X_{r+1}$;

$H_0 = H_{03}$, если $(X_r \succ X_{r+1}) \wedge (X_k \prec X_{k+1}) \wedge (X_j \doteq X_{j+1})$, где $k+1 \leq j \leq r-1$ и $(A \rightarrow X_{k+1} \dots X_r) \in P$ — правило с номером q , β — терминальный префикс максимальной длины цепочки $X_1 \dots X_k$;

$H_0 = \text{ОШИБКА}$, если либо X_r и X_{r+1} не связаны никакими отношениями предшествования, либо нет правила с правой частью $X_{k+1} \dots X_r$.

II. $H_{10} \vdash_R H_1$, причем

$H_1 = H_{11}$, если $(X_r \doteq X_{r+1}) \wedge (X_{r+1} \in T)$;

$H_1 = H_{12}$, если $(X_r \doteq X_{r+1}) \wedge (X_{r+1} \sqsupset X_{r+2}) \wedge (Y \doteq Y')$, где $Y' = f_1 \dots f_c$ — слово максимальной длины из F^+ , следующее за X_{r+1} , при этом $f_1 = X_{r+2}$;

$H_1 = H_{13}$, если $(X_r \doteq X_{r+1}) \wedge (X_r < X_{r+1}) \wedge (X_{r+1} \sqsupset X_{r+2}) \wedge (Y \neq Y')$, где $Z_i = Y$ для $X_i \in NF^+$, $Z_i = \varepsilon$ для $X_i \in T$, $i \leq r$, $y' = f_1 \dots f_c$ — слово максимальной длины из F^+ , следующее за X_{r+1} , при этом $f_1 = X_{r+2}$;

$H_1 = H_{14}$, если $X_r < X_{r+1}$, где $Z_i = Y$ для $X_i \in NF^+$, $z_i = \varepsilon$ для $X_i \in T$, $i \leq r$;

$H_1 = H_{15}$, если [либо $((X_r > X_{r+1}) \wedge (\neg(X_r \doteq X_{r+1})))$, либо $((X_r > X_{r+1}) \wedge (X_r \doteq X_{r+1}) \wedge (X_{r+1} \sqsupset X_{r+2}) \wedge (Y \neq Y'))$, где $Y = f_1 \dots f_c$ — слово максимальной длины из F^+ , следующее за X_{r+1} , при этом $f_1 = X_{r+2}$] \wedge [либо $((X_k < X_{k+1}) \wedge (X_j \doteq X_{j+1}))$, где $k+1 \leq j \leq r$], при этом $A \rightarrow X_{k+1} \dots X_r$ — правило с номером q , β терминальный префикс максимальной длины цепочки $X_1 \dots X_k$;

$H_1 = \text{ОШИБКА}$, если либо X_r и X_{r+1} не связаны никакими отношениями предшествования, либо нет правила с правой частью $X_{k+1} \dots X_r$, либо $(X_r \doteq X_{r+1})$ единственное отношение между X_r и X_{r+1} $\wedge (X_{r+1} \sqsupset X_{r+2}) \wedge (Y \neq Y')$, где $Y' = f_1 \dots f_c$ — слово максимальной длины из F^+ , следующее за X_{r+1} , при этом $f_1 = X_{r+2}$.

Так как в общем случае отношения предшествования 1--4 определены для цепочек (индексированные нетерминалы), то необходимо решить вопрос однозначного выбора X_{r+1} для указанных отображений.

Пусть текущая конфигурация автомата — $[\perp X_1 \dots X_r, Y, X_{r+1} \dots X_n \perp, \delta]$, где $Y \in F^*$. X_{r+1} выбирается по следующей схеме;

$X_{r+1} = a$, если $a \in T$ — первый элемент второго магазина;

$X_{r+1} = f$, если $f \in F$ — первый элемент второго магазина;

$X_{r+1} = A\xi$, если $A \xi \in NF^*$ строка символов слева во втором магазине. При этом, если во втором магазине содержится слово $A f_1 \dots f_k f_{k+1} \dots f_m X_{r+2} \dots X_n \perp$, то либо $\xi = f_1 \dots f_k$, если $A f_1 \dots f_k \sqsupset f_{k+1}$, либо $\xi = f_1 \dots f_m$, если ни для какого k , $1 \leq k \leq m$, не имеет место $A f_1 \dots f_k \sqsupset f_{k+1}$.

Для индексных грамматик предшествования указанным способом обеспечивается однозначный выбор X_{r+1} .

Теорема 2. *D-автомат распознает те и только те цепочки, которые порождаются индексными грамматиками предшествования.*

При этом содержание четвертого составляющего заключительной конфигурации показывает порядок применения правил для получения исходной цепочки.

Ереванский комплексный отдел
ВНИИЭГазпрома

Ինդեքսային լեզուների շարահյուսական վերլուծության ալգորիթմ

Հոդվածում ուսումնասիրվում են ենթատեքստից կախված ֆորմալ լեզուների սեփական ենթադասի՝ ինդեքսային լեզուների վերլուծության և ճանաչման հարցերը:

Սահմանվում են նախորդման ինդեքսային լեզուները, որոնց համար կառուցվում է շարահյուսական վերլուծության ալգորիթմ: Ալգորիթմի աշխատանքն էապես հենվում է նոր տիպի պահունակային D-ավտոմատի գործունեության վրա: Վերջինիս միարժեք անցումները որոշվում են նախորդման բինար հարաբերությունների օգնությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

¹ Н. Хомский, Кибернетический сборник, вып. 2, 1961. ² И. Л. Братчиков, Синтаксис языков программирования, «Наука», М., 1975. ³ А. Ахо, в сб. «Языки и автоматы», «Мир», М., 1975. ⁴ А. Ахо, Дж. Ульман, Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции, т. I, «Мир», М., 1978.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Г. Инджеян

О 3-раскраске плоских гиперграфов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 30/IV 1979)

В настоящей работе доказывается справедливость одной гипотезы М. И. Бурштейна ⁽¹⁾. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в ⁽²⁻⁴⁾.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ — произвольное множество, а E — произвольное семейство его подмножеств. Пара $H = (X, E)$ называется гиперграфом с множеством вершин X и множеством ребер E . Будем считать, что $|e| \geq 2$ для любого $e \in E$.

Под раскраской гиперграфа понимается правильная раскраска его вершин в смысле Эрдеша — Хайнала, т. е. такая, при которой каждое ребро содержит по крайней мере две вершины разного цвета.

Каждому гиперграфу адекватно соответствует его граф инцидентий, множеством вершин которого является $X \cup E$, а множеством ребер $\{(x, e) \in X \times E : x \in e\}$. Гиперграф называется плоским, если его соответствующий граф инцидентий является плоским графом.

$m(H)$ обозначает число ребер гиперграфа H , а H' — граф, состоящий из его ребер степени 2 и инцидентных им вершин (в H' не может быть изолированных вершин).

Гипотеза М. И. Бурштейна состоит в следующем:

Если H — плоский гиперграф, для которого $m(H') \leq 8$ и H' не содержит полных четырехвершинных подграфов K_4 , то H раскрашивается в 3 цвета.

Для доказательства ее справедливости установим одну теорему о плоских триангуляциях.

Плоский граф G с помеченными ребрами называется n -квазираскрашиваемым, если его вершины можно окрасить n цветами так, чтобы концы помеченных ребер были окрашены различно и край каждой грани содержал хотя бы две вершины разного цвета. Если все ребра графа G помечены, то квазираскраска совпадает с обычной раскраской.

Через $n_i = n_i(G)$ обозначим число вершин степени i в графе G . Известно, что для любого плоского графа

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12. \quad (1)$$

Напомним, что триангуляцией называется плоский граф, все грани которого — простые циклы длины 3. Допускаются кратные ребра (разумеется при условии, что пара таких ребер не образует края какой-то грани).

Теорема 1. *Вершины каждой плоской триангуляции с не более, чем 8 помеченными ребрами, которые не составляют K_4 , можно квазираскрасить в 3 цвета.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и пусть G — триангуляция с наименьшим числом вершин, удовлетворяющая условиям теоремы, но не допускающая 3-квазираскрасок. Она обладает следующими свойствами.

1. Если вершина $x \in G$ имеет степень 3, то все инцидентные ей ребра помечены.

2. $n_3(G) \leq 3$.

3. Если вершина $x \in G$ имеет степень 4, то по крайней мере два инцидентных ей ребра помечены, причем если их ровно два, то они находятся на краю одной и той же грани.

4. Пусть вершина $x \in G$ степени 4 инцидентна ребрам (x, x_1) , (x, x_2) , (x, x_3) , (x, x_4) ; если два последних ребра не помечены, то и ребро (x_3, x_4) не помечено и принадлежит некоторому подграфу K_4 , все остальные ребра которого помечены.

5. Число таких вершин $x \in G$ степени 4, у которых помечены лишь два инцидентных ребра, не может превосходить 1.

6. Если вершина $x \in G$ имеет степень 5, то по крайней мере два инцидентных ей ребра помечены.

Все эти шесть свойств доказываются методом от противного. В свойствах 2 и 5, если предположить обратное, получается, что G должен содержать не менее 9 помеченных ребер.

В свойствах 1, 3, 4 и 6, если предположить обратное, удаляется вершина $x \in G$ и добавляется, в случае необходимости, недостающее ребро. Получается новая триангуляция G' — удовлетворяющая условиям теоремы, но содержащая на одну вершину меньше, чем G . Из экстремальности G вытекает, что вершины новой триангуляции должны раскрашиваться в 3 цвета. После раскраски G' восстанавливается G и вершина x раскрашивается в один из трех цветов так, чтобы не образовалась одноцветная грань и концы помеченных ребер были окрашены различно. Таким образом, G раскрашивается в 3 цвета, вопреки нашему первоначальному предположению.

Пусть $m' = m'(G)$ — число помеченных ребер триангуляции G . Тогда из свойств 1–6 следует, что

$$2m' \geq \begin{cases} 3n_3 + 3n_4 - 1 + 2n_5, & \text{при } n_4 > 0 \\ 3n_3 + 2n_5, & \text{при } n_4 = 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что достаточно рассмотреть те системы значений n_2, n_4, n_5 , для которых в (1) имеет место равенство.

С л у ч а й 1. $n_2=3, n_4=0, n_5=3$.

Если никакие две вершины степени 3 не имеют общего ребра, то противоречие очевидно. Пусть вершины x_1, x_2, x_3 имеют степень 3 и вершины x_1 и x_2 имеют общее ребро. Нетрудно убедиться, что кроме 8 помеченных ребер, инцидентных вершинам степени 3, должно быть помечено еще одно, что является противоречием.

С л у ч а й 2. $n_2=3, n_4=1, n_5=1$.

Аналогичным образом мы приходим к противоречию и в этом случае.

С л у ч а й 3. $n_2=2, n_4=0, n_5=6$.

Так как $2m' \geq 3n_2 + 2n_5 = 18$, то $m' \geq 9$, что является противоречием.

С л у ч а й 4. $n_2=2, n_4=1, n_5=4$.

Пусть x и y есть вершины степени 3, а x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 — вершины, смежные соответственно x и y . Пусть вершины степени 3 имеют общее ребро, и таким ребром является (x, x_2) , т. е. $y = x_2$, $x = y_2$ и $x_1 = y_1, x_3 = y_3$. Нетрудно убедиться, что $\rho(x_i) > 4$, при $i=1$ или 3, где $\rho(x_i)$ — степень вершины x_i . Нетрудно также убедиться, что $\rho(x_i) = 5$ только при $i=1$ (или $i=3$). А это значит, что кроме 5 помеченных ребер должны быть помечены еще по крайней мере 4 ребра, что является противоречием.

Пусть теперь x и y не имеют общего ребра. Возможны следующие четыре подслучая.

а) $x_i = y_i$ при $i = \overline{1, 3}$.

Нетрудно убедиться, что с вершинами x_i в худшем случае могут совпасть две вершины степени ≤ 5 , а это значит, что кроме 6 ранее помеченных ребер должны быть помечены еще 3, что является противоречием.

б) $x_1 = y_1$ и $x_3 = y_3$.

Если, в худшем случае, обе вершины $x_1 = y_1, x_3 = y_3$ обладают степенью 5, то, очевидно, $\rho(x_2) \geq 6, \rho(y_2) \geq 6$, а это значит, что должны быть помечены еще 3 ребра, т. е. $m' \geq 9$, воперки условию теоремы.

в) $x_2 = y_2$.

В худшем случае четыре вершины степени ≤ 5 могут совпасть с вершинами x_1, x_2, y_1, y_2 . Но каждой из этих вершин инцидентно не более 1 помеченного ребра из прежних 6 помеченных. А это значит, что кроме 6 помеченных ребер должны быть помечены еще по крайней мере $\frac{1+1+1+1+2}{2} = 3$ ребра, т. е. $m' \geq 9$.

г) $x_i \neq y_i$ при $i = \overline{1, 3}$.

Вершины степени ≤ 5 могут совпасть с вершинами x_i, y_i , где $i = \overline{1, 3}$, т. е. кроме 6 ранее помеченных ребер должны быть помечены еще по крайней мере 3 ребра, т. е. $m' \geq 9$.

С л у ч а й 5. $n_2=2, n_4=2, n_5=2$.

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что и в этом случае мы приходим к противоречию.

Случай 6. $n_2 = 2, n_4 = 3, n_5 = 0$.

Здесь тоже разделяются подслучаи а), б), в) и г), в каждом из которых мы приходим к противоречию.

Случай 7. $n_2 = 1, n_4 \in [0, 3], n_5 \in [3, 9]$.

Так как $2m' \geq 3n_2 + 3n_4 - 1 + 2n_5 \geq 17$ для любой $n_4 \in [0, 3]$ и соответствующей $n_5 \in [3, 9]$, то противоречие очевидно.

Случай 8. $n_2 = 1, n_4 = 4, n_5 = 1$.

Пусть вершина x имеет степень 3. Нетрудно убедиться, что лишь 2 вершины степени ≤ 5 могут быть смежны вершине x . А это значит, что кроме 3 помеченных должно быть помечено еще не менее

менее $\frac{1+1+3+3+3}{2}$ ребер, т. е. $m' \geq 9$, что противоречит условию

теоремы.

Случай 9. $n_2 = 0, n_4 \in [0, 6], n_5 \in [0, 12]$ так, что $2n_4 + n_5 \geq 12$.

Так как $2m' \geq 3n_4 - 1 + 2n_5 \geq 17$ для любых $n_4 \in [0, 6]$ и соответствующих $n_5 \in [0, 12]$, то противоречие и в этом случае очевидно.

Полученные противоречия во всех 9 случаях доказывают справедливость теоремы.

Из доказанной теоремы вытекает справедливость гипотезы М. И. Бурштейна. Это можно сделать так, как сделано, например в работе (2).

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

И. Գ. ԻՆՆԻՅԱՆ

Հարց հիպերգրաֆների 3-ներկման մասին

Աշխատանքը նվիրված է հիպերգրաֆի գաղաթների էրդյոշ-Հայնալի իմաստով ներկման պրոբլեմին: H' -ով նշանակենք H հիպերգրաֆի գրաֆային կողերով և նրանց կից գաղաթներով ծնված գրաֆը, $m(H)$ -ով H հիպերգրաֆի կողերի քանակը: Մ. Ի. Բուրշտեյնը ապացուցել է, որ 5-ից ոչ ավելի թվով գրաֆային կողերով կամայական հարթ հիպերգրաֆ 3-ներկելի է և առաջ է քաշել հետևյալ վարկածը.

Վարկած. H հարթ հիպերգրաֆը 3-ներկելի է, եթե $m(H') \leq 8$ և H' -ը չի պարունակում K_4 .

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ 8-ից ոչ ավելի թվով նշված կողերով յուրաքանչյուր եռանկյունացված հարթ մուլտիգրաֆ 3-քվազիններկելի է, եթե նշված կողերը չեն կազմում K_4 : Այստեղից հետևում է Մ. Ի. Բուրշտեյնի վարկածի ճշմարտացիությունը:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. И. Бурштейн, «Сообщения АН Груз. ССР», 84, № 1 (1976). ² С. Berge, Graphes et hypergraphes, Paris, Dunod, 1970. ³ А. А. Зыков, УМН, 6, 1974. ⁴ М. И. Бурштейн, «Сообщения АН Груз. ССР», 75, № 1 (1974).

УДК 577.31:612.111

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР С. А. Амбарцумян, С. М. Дургарьян

Прохождение эритроцита через капилляр

(Представлено 5/II 1979)

О структуре эритроцита известно немного, а о его механических свойствах имеются лишь смутные представления. Дискутируется вопрос о природе эритроцита: является ли он упругим «мешком», содержащим жидкость, или в целом представляет собой пропитанное жидкостью деформируемое тело с весьма малым модулем упругости.

Вне поля зрения оказался вариант моделирования эритроцита оструктуренным, пропитанным жидкостью деформируемым телом с явно выраженной анизотропией механических свойств.

С целью восполнить этот пробел и выполнена настоящая работа. Ее основное отличие от ранее выполненных заключается в том, что здесь предпринята попытка объяснить известные экспериментальные результаты, описывающие прохождение эритроцита через капилляр, не на модели изотропного деформируемого твердого тела или изотропной замкнутой тонкой оболочки, заполненной жидким содержимым, а на модели деформируемого твердого тела, обладающего явно выраженной структурной анизотропией механических свойств в радиальном и окружном направлениях.

1. Эритроцит моделируется круглой, гибкой, ортотропной пластинкой (мембраной) переменной толщины, главные направления упругости которой совпадают с координатными линиями цилиндрической системы координат. Предполагается, что после деформации срединная плоскость пластинки преобразуется в поверхность вращения, меридиан которой изображен на рис. 1, а.

Введем обозначения: R — радиус мембраны до деформации; ρ — радиус основания деформированной мембраны; H_1 , H — толщины мембраны соответственно до и после деформации; q — интенсивность распределенной нагрузки; r — значение X до деформации; y — отношение прогиба w к радиусу мембраны до деформации ($y=w/R$); ϵ_i , σ_i , E_i — в направлении i соответственно полная относительная де-

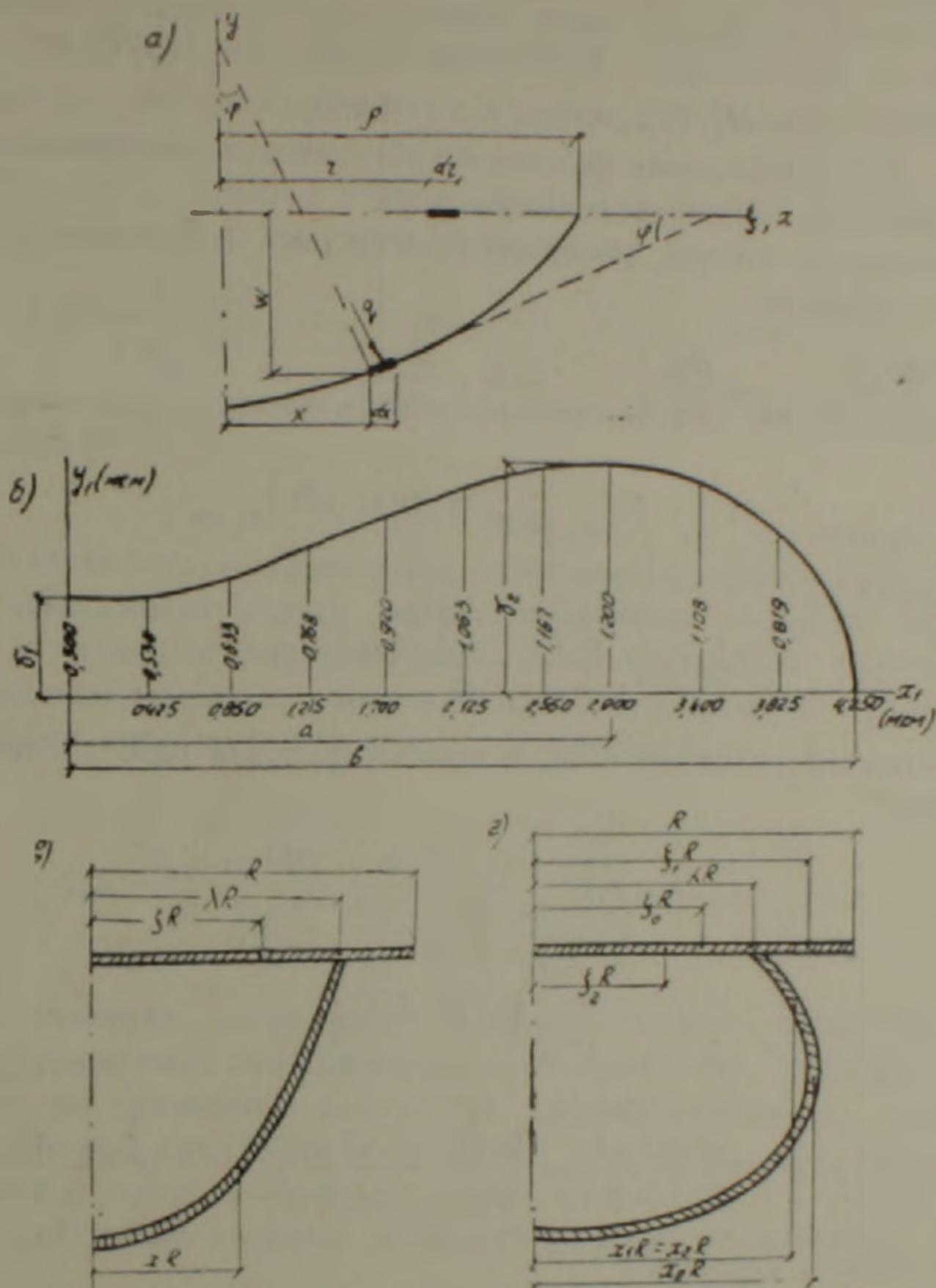


Рис. 1. а — Меридиан срединной поверхности деформированной мембраны. б — кривая, характеризующая изменение толщины эритроцита вдоль радиуса; в, г — две возможные равновесные формы деформированной мембраны

формация, логарифмическая (натуральная) главная деформация, нормальное напряжение и приведенный (в связи с наличием жидкого компонента) модуль Юнга материала мембраны; ν_{ij} — коэффициент Пуассона, показывающий относительную поперечную деформацию в направлении j при действии напряжения вдоль направления i ; i (или j) = 1, 2, 3 — соответственно радиальное направление, окружное направление и направление нормали к изогнутой срединной поверхности; $x = X/R$; $\xi = r/R$; $\lambda = p/R$; H_1^0 , H_1^* — толщина мембраны до де-

формации соответственно в центре ($\xi=0$) и на контуре ($\xi=1$); H^0 , H^* — толщина мембраны после деформации соответственно в центре ($x=0$) и на контуре ($x=1$); $h = H/H_1^0$; $h_1 = H_1/H_1^0$; $h^* = H^*/H_1^0$; $h^0 = H^0/H_1^0$; $h_1^* = H_1^*/H_1^0$; $p_i = \sigma_i/E_i$; $z = h/h_1$.

2. Для определения функции $h_1(\xi)$ воспользуемся экспериментальными данными, приведенными в (1).

Уравнение кривой, изображенной на рис. 1, б, должно удовлетворять условиям:

$$\left. \frac{dy_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} = \left. \frac{dy_1}{dx_1} \right|_{x_1=a} = 0, \quad \left. \frac{dy_1}{dx_1} \right|_{x_1=b} = -\infty; \quad (2.1)$$

$$y_1 \Big|_{x_1=0} = \gamma_1, \quad y_1 \Big|_{x_1=a} = \gamma_2, \quad y_1 \Big|_{x_1=b} = 0. \quad (2.2)$$

Принимая

$$\left. \frac{dy_1}{dx_1} \right| = C_1 \frac{x_1(a-x_1)}{(b-x_1)^{1-\beta}} \quad (\beta < 1), \quad (2.3)$$

удовлетворим условиям (2.1), а проинтегрировав (2.3) с учетом (2.2), получаем

$$y_1 = -C_1 (b-x_1)^2 \left[\frac{(a-b)b}{\beta} + \frac{2b-a}{1+\beta} (b-x_1) - \frac{1}{2+\beta} (b-x_1)^2 \right],$$

где

$$C_1 = \gamma_1 b^{-(2+\beta)} \left(\frac{1-k}{\beta} - \frac{2-k}{1+\beta} + \frac{1}{2+\beta} \right)^{-1}, \quad k = \frac{a}{b} < 1,$$

а β — корень уравнения

$$[2(1-k) - k\beta] \gamma_2 - (1-k)^{1+\beta} (2+k\beta) \gamma_1 = 0.$$

Учитывая, что $H_2 = 2y_1$, а $\xi = \frac{x_1}{R}$, будем иметь

$$h_1 = A (1 - \Omega \xi)^2 \left[\frac{1-k}{\beta} - \frac{2-k}{1+\beta} (1 - \Omega \xi) + \frac{1}{2+\beta} (1 - \Omega \xi)^2 \right], \quad (2.4)$$

где

$$A = \left(\frac{1-k}{\beta} - \frac{2-k}{1+\beta} + \frac{1}{2+\beta} \right)^{-1}, \quad \Omega = \frac{R}{b} < 1.$$

Введение коэффициента $\Omega < 1$ (при значениях $\Omega \approx 1$) позволяет без значительных погрешностей избежать особенности, обусловленные нулевой толщиной мембраны на контуре.

Принимая $h_1^* = h_1|_{\xi=1} = 1$ и используя значения (1)

$\gamma_1 = 0,50$ мкм; $\gamma_2 = 1,20$ мкм; $a = 2,90$ мкм; $b = 4,25$ мкм, получаем

$$\beta = 0,7193; A = 23,27; k = 0,6824; \Omega = 0,9564. \quad (2.5)$$

Заметим, что функция (2.4) с учетом (2.5) вполне удовлетворительно согласуется с результатами измерений *in vivo* (2-4).

3. В случае больших перемещений для полных относительных деформаций e_i можно получить соотношения

$$e_1 = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dx}{d\xi} - 1, \quad e_2 = \frac{x}{\xi} - 1, \quad e_3 = z - 1.$$

Введя в рассмотрение логарифмические (натуральные) главные деформации (3-7)

$$\varepsilon_i = \ln(1 + e_i)$$

и воспользовавшись в уравнениях обобщенного закона Гука (описывающих зависимости между логарифмическими главными деформациями ε_i и главными напряжениями σ_i) общепринятым упрощением, обусловленным малостью нормального напряжения σ_3 по сравнению с нормальными напряжениями σ_1 и σ_2 , будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2, & \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2, \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_2. \end{aligned}$$

Для описания напряженно-деформированного состояния эритроцита, равномерно, поступательно и прямолинейно движущегося в капилляре, из уравнений равновесия дифференциального элемента деформированной срединной поверхности мембраны при постоянной интенсивности распределенной нагрузки ($q = \text{const}$) и с учетом (2.4) получим систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\xi} = \left(\frac{x}{\xi}\right)^n z^m \cos \varphi; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{1}{\ln \left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^{a_1} z^{a_1} \right] + a_1} \left\{ \frac{z}{x} \ln \left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^{n_1} z^{m_1} \right] - \frac{z}{x} a_2 + \right. \\ &+ \frac{a_2 z^{1-m}}{\xi \left(\frac{x}{\xi}\right)^n \cos \varphi} + \frac{z^{1-m} \Omega \ln \left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^{a_1} z^{a_1} \right]}{\left(\frac{x}{\xi}\right)^n (1 - \Omega \xi) \cos \varphi} \times \\ &\times \left. \frac{1 - k - (2 - k)(1 - \Omega \xi) + (1 - \Omega \xi)^2}{\frac{1 - k}{\beta} - \frac{2 - k}{1 + \beta} (1 - \Omega \xi) + \frac{1}{2 + \beta} (1 - \Omega \xi)^2} \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

и формулы

$$p_1 = \ln \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^{a_1} z^{a_1} \right]; \quad p_2 = \ln \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^{a_2} z^{a_2} \right]; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi = \\ = \frac{Q x}{Az(1-\Omega\xi)^\beta \left[\frac{1-k}{\beta} - \frac{2-k}{1+\beta} (1-\Omega\xi) + \frac{1}{2+\beta} (1-\Omega\xi)^2 \right] \ln \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^{a_1} z^{a_1} \right]}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}, \quad (3.5)$$

где

$$a_1 = - \frac{1}{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}}, \quad a_2 = - \frac{\nu_{23}}{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}}, \quad a_3 = - \frac{\nu_{12}}{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}},$$

$$a_4 = \frac{\nu_{13}}{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}}, \quad m = a_1 - \nu_{21} a_3, \quad n = a_2 - \nu_{21} a_4,$$

$$n_1 = \nu_{21} a_4 - a_3, \quad m_1 = \delta a_3 - a_1, \quad \delta = E_2 / E_1, \quad Q = q R / 2 H_1^0 E_1.$$

Заметим, что полученные уравнения и соотношения (3.1) — (3.5) представляют собой обобщение результатов работы (8) на случай мембраны переменной толщины.

В зависимости от значения параметра λ , интенсивности равномерно распределенного давления q и отношения δ модулей упругости в окружном и радиальном направлениях для деформированной срединной поверхности мембраны возможны две равновесные формы, изображенные на рис. 1, в, г для случая $\lambda < 1$ ($\lambda \geq x \geq 0$, $1 \geq \xi \geq 0$).

Из рисунка видно, что x всегда является однозначной функцией ξ , в то время как ξ может быть и неоднозначной функцией x . В связи с этим в (3.1) — (3.5) в качестве независимой переменной целесообразно выбирать ξ , а не x .

Через ξ_0 обозначим то значение независимой переменной ξ , при котором выполняются условия

$$\cos \varphi |_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \cos \varphi |_{0 < \xi < \xi_0} > 0, \quad \cos \varphi |_{\xi > \xi_0} < 0, \quad (3.6)$$

а через x_0 обозначим значение x , соответствующее значению ξ .

Возвращаясь к формуле (3.5), заметим, что знак перед корнем должен выбираться в соответствии с (3.6) в зависимости от значения ξ (или x). Если же во всем диапазоне изменения ξ ($1 \geq \xi \geq 0$) косинус угла φ нигде не обращается в нуль, то в формуле (3.5) перед

корнем необходимо сохранить только положительный знак.

Из очевидного соотношения $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ с учетом (3.1), (3.4) и условия $y|_{\xi=1} = 0$ (или $y|_{x=\lambda} = 0$) нетрудно получить уравнение меридиана

$$y = \frac{Q}{A} \int_1^{\xi} \frac{\left(\frac{x}{\xi}\right)^{n+1} z^{m-1} \xi d\xi}{(1-\Omega\xi)^\beta \left[\frac{1-k}{\beta} - \frac{2-k}{1+\beta} (1-\Omega\xi) + \frac{1}{2+\beta} (1-\Omega\xi)^2 \right] \ln \left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^a z^{a_1} \right]} \quad (3.7)$$

поверхности вращения, в которую преобразуется деформированная срединная плоскость мембраны.

Если координаты точек внутренней и внешней поверхностей деформированной мембраны обозначить соответственно через (x^-, y^-) и (x^+, y^+) , то в пределах гипотезы Кирхгофа — Лява будем иметь

$$\begin{aligned} x^- &= x - \frac{H}{2R} \sin \varphi, & y^- &= y + \frac{H}{2R} \cos \varphi, \\ x^+ &= x + \frac{H}{2R} \sin \varphi, & y^+ &= y - \frac{H}{2R} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, решая систему дифференциальных уравнений (3.1) и (3.2), по формулам (3.3) определяем напряжения, а по (3.7) и (3.8) — форму деформированного эритроцита.

В последующем ограничимся случаем, когда $\delta > 1$, а граничные условия задачи заданы в виде,

$$\begin{aligned} x=0, & \quad \xi=0, & \varphi=0, & \quad h=1; \\ x=\lambda, & \quad \xi=1, & y=0. \end{aligned}$$

4. В (9) отмечено, что для частицы сложного внутреннего строения представление местного сокращения радиуса частицы (вызванного разностью между давлением в данной точке и эталонным давлением p_0) до значения, меньшего величины, определяемой формулой

$$r = r_0 - \frac{1}{2} \gamma x^2 - \beta (p - p_0),$$

является единственным сравнительно простым допущением.

Далее, в этой же статье приводится значение $\beta = 6 \text{ мкм/м бар}$ и отмечается, что другие методы оценки, базирующиеся на данных Рэнда и Бартона, дают такой же порядок величины для β и за отсутствием других данных используется именно это значение (здесь имеется в виду статья (10)). К аналогичному заключению приходит и Фитц-Джералд в статье (11).

В приведенной выше формуле x — расстояние вдоль оси рассма-

триваемой точки от точки, соответствующей максимальному радиусу поперечного сечения частицы r_0 .

Принимая $x=0$, имеем (в обозначениях (°))

$$r|_{p=p_0} - r|_{p=0} = \Delta r = u = r_0 - \beta(p - p_0) - r_0 - \beta p_0 = -\beta p,$$

где u — перемещение в радиальном направлении.

Приводя это значение радиального перемещения в соответствие с решением задачи Ляме для изотропного круглого диска без отверстия, получаем

$$E = \frac{(1-\nu)R}{\beta}.$$

Принимая $\nu=0,5$ (это предположение вполне оправдано для материалов с коэффициентом Пуассона около $1/2$, которые имеются в большинстве биологических систем (°)), $R=4,25$ мкм, $\beta=6$ мкм/мбар, получаем $E=35,42$ н/м².

Если же воспользоваться экспериментальными данными, приведенными в (12) и обработанными в (13), то в обозначениях статьи (12) будем иметь (предварительно приняв $\frac{1}{\lambda} = 1,36$)

$$0,01 \leq \mu v_c / E_c D_c \leq 0,08$$

$$V_c = 0,5 \text{ см/сек}; D_c = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}; \mu = 0,018 \text{ пуаз}$$

$$\frac{\mu V_c}{0,01 D_c} \geq E_c \geq \frac{\mu V_c}{0,08 D_c}$$

или

$$120 \text{ н/м}^2 \geq E_c \geq 15 \text{ н/м}^2. \quad (4.1)$$



Рис. 2. Эритроциты *in vivo* при прохождении через капилляр (12)



Рис. 3. Эритроциты *in vivo* при прохождении через капилляр (4)

Воспользовавшись данными, приведенными в (12), можно получить значения q для различных отношений $1/\lambda$ (выполненные нами расчеты показали, что при $1/\lambda = 1,36; 1,13; 0,98$ интенсивность q равномерно распределенной нагрузки соответственно равна 20,80; 6,514 3,463 н/м²).

5. Имеющиеся в литературе фотоснимки, *in vivo* запечатлевшие прохождение через капилляры эритроцита, позволяют сделать некоторые предположения о его структурных особенностях.

Следует считать достоверным факт, что при прохождении через капилляр эритроцит, деформируясь, приобретает «пулевидную» форму. Это отчетливо видно хотя бы по рис. 2 и 3, заимствованным из работ (4,13). Сопоставляя экспериментально установленный факт «пулевидности» деформированного эритроцита с полученными выше результатами, можно прийти к выводу, что при моделировании эритроцита следует исключить из рассмотрения случай, изображенный на рис. 1, с. Наиболее естественным допущением, качественно согласующимся с результатами экспериментов, нам представляется предположение о сильной структурной анизотропии эритроцита — о весьма незначительной податливости в окружном направлении и о значительной деформативности вдоль радиуса.

В связи с этим рассмотрим частный случай, когда значение модуля упругости материала мембраны в кольцевом направлении несоизмеримо велико по сравнению со значением модуля упругости в радиальном направлении ($\beta = E_2/E_1 \gg 1$).

Очевидно, что в рассматриваемом случае задача существенно упростится, так как можно будет приближенно принять $x \rightarrow \xi$. Тогда из (3.1)–(3.4) получим трансцендентное уравнение

$$Qx + ah_1 z \sqrt{1-z^{2a}} \ln z = 0, \quad (5.1)$$

где $a = 1/\nu_{11}$, а h_1 определяется по (2.4) с учетом (2.5).

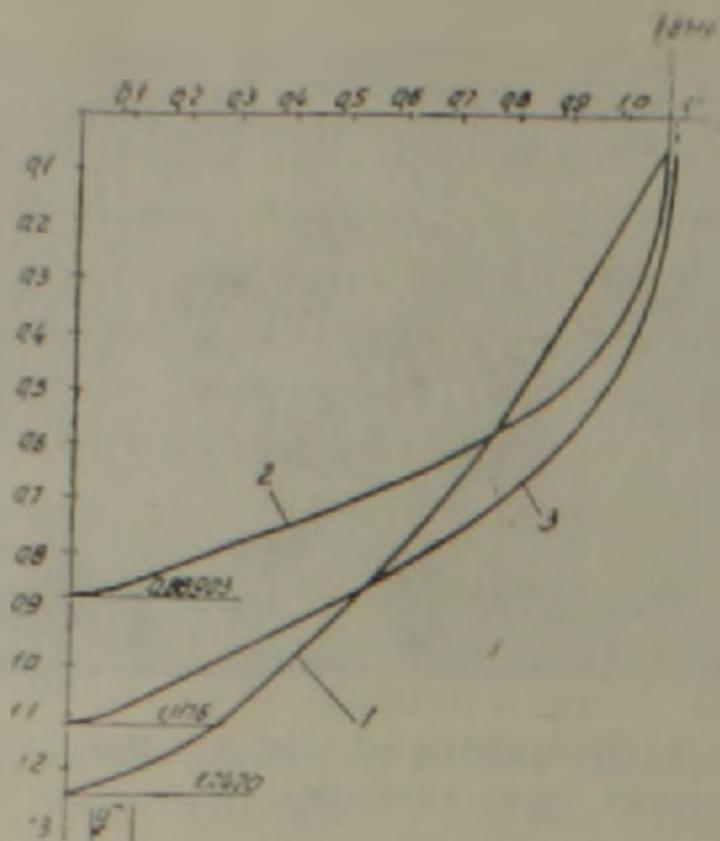


Рис. 4. Меридианы внешних поверхностей деформированных мембран.

На рис. 4 изображены меридианы внешних поверхностей деформированных эритроцитов при значениях $1/\lambda = 0,98$; $\alpha = 2$. Кривая 1 относится к мембране постоянной толщины ($\Omega = 0$, $h_1 = 1$) при $E_1 = 15$ н/м² ($Q = 0,48485$), что соответствует минимальному значению (14) модуля упругости эритроцита, определенному по данным работ (12,13). Кривые 2 и 3 относятся к мембранам, толщины которых изменяются по (4) с учетом (5). При этом кривая 2 соответствует значению $E_1 = 15$ н/м² ($Q = 0,48485$), а кривая 3 — значению $E_1 = 9,9695$ н/м² ($Q = 0,7295$).

Из кривых, изображенных на рис. 4, видно, что моделирование двояковогнутого эритроцита мембраной постоянной толщины обуславливает существенное искажение формы меридиана внешней деформированной поверхности. Следовательно, при определении напряженно-деформированного состояния эритроцита необходимо учитывать переменность его толщины.

Выполненные нами вычисления показали, что по мере уменьшения значения модуля упругости E_1 внешняя поверхность деформированного эритроцита, вытягиваясь в осевом направлении, все в большей степени приближается к «пулевидной» форме.

Сравнение кривых рис. 4 с фотоснимками, запечатлевшими *in vivo* эритроциты в процессе их прохождения через капилляр, показывает, что при рассмотрении деформаций эритроцита не только не могут быть использованы значения E_1 , близкие к верхнему пределу оценки (4.1), полученной на основе данных работ (12,13), но даже нижний предел оценки (4.1) является несколько завышенным.

Очевидно, что по мере уменьшения отношения E_2/E_1 кривая, изображающая меридиан деформированной внешней поверхности эритроцита, должна все больше и больше отходить от «пулевидной» формы. Поэтому при моделировании двояковогнутого эритроцита изотропным диском переменной толщины меридиан его деформированной внешней

поверхности будет в еще большей степени отличаться от «пулевидной» формы, чем меридиан рассмотренной мембраны с характеристиками $E_1/E_2 \gg 1$, $E_1 = 15 \text{ н/м}^2$.

Изложенное позволяет заключить, что оценки значений модулей упругости эритроцита, основанные на данных работ (^{19,20}) не являются бесспорными, так как, во-первых, они получены без учета анизотропии механических свойств и, во-вторых, приводят к завышенному значению E_1 даже при использовании нижнего предела неравенств (4.1).

Дальнейшее подробное исследование полученной полной системы уравнений (3.1) — (3.5), вероятно, позволит внести некоторые уточнения в представления о структуре эритроцита.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԴԱ ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, Ս. Մ. ԳՈՒՐԳԱՐՏԱՆ

Էրիտրոցիտի անցումը կապիլյար անոթով

Էրիտրոցիտի կազմվածքի մասին շատ քիչ տեղեկություններ կան, իսկ նրա մեխանիկական հատկությունների մասին գոյություն ունեն միայն աղոտ պատկերացումներ: Էրիտրոցիտի բնույթը քննարկելիս աչքաթող է արվել հնարավոր տարբերակ, երբ նա մոզելացվում է հեղուկով հագեցված, բացահայտ անիզոթրոպ հատկություններով օժտված դեֆորմացվող մարմնով:

Աշխատությունում էրիտրոցիտը պատկերված է որպես փոփոխական հաստություն ունեցող կլոր, ճկուն, օրտոթրոպ թաղանթ (մեմբրան), Ֆույց է տրված, որ հաշվարկային արդյունքները կարող են բավարար չափով համապատասխանել գոյություն ունեցող փորձարարական տվյալներին, եթե հաշվի առնվի էրիտրոցիտի բարձր աստիճանի անիզոթրոպիան: Բացի այդ յույց է տրված, որ գրականության մեջ օգտագործում ստացած էրիտրոցիտի առած-գականության մոդուլի անգամ նվազագույն արժեքը գերազանցում է հնարավոր սահմանային արժեքին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Физиология системы крови. Руководство по физиологии. «Наука», Л., 1968.
² E. Ponder, Hemolysis and Related Phenomena. Grune and Stratton, Inc., New York 1948. ³ Y. C. Fung, Theoretica! Considerations of the Elasticity of Red Cells and Small Blood Vessels. Fed. Proc., 25, 1966. ⁴ R. Skalak, Mechanics of the Microcirculation. Biomechanics: Its Foundations and Objectives. Y. C. Fung, N. Perrone and M. Anliker, editors. Plentice—Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. ⁵ A. Надау, Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ, М., 1954. ⁶ E. Дэвис, Теория пластичности. Сборник статей. ИЛ, М., 1948. ⁷ E. Дэвис, Теория пластичности. Сборник статей, ИЛ, М., 1948. ⁸ И. С. Мамедов, Инженерный журнал АН СССР, т. 3, вып. 1,

(1963). ⁹ М. Лайтхилл, Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей, 6, 124 (1970) ¹⁰ R. P. Rand, A. C. Burton, *Biophys. J.*, 4, 115 (1964). ¹¹ Д. М. Фитц-Джералд, Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей, 4, 128, (1971) ¹² В. W. Zweifel, M. Intaglietta, *Microvasc. Res.*, 1, N 1-68. ¹³ Фан Ян-чен Гидродинамика кровообращения. Сборник переводов по редакции С. А. Реннера, "Мир", М., 1971.

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

З. А. Давтян

О двух задачах кручения усиленного тонким покрытием бесконечного цилиндра в условиях неоднородной ползучести

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 8/II 1979)

В настоящей статье, на основе результатов работ (1-3) в рамках теории ползучести Н. Х. Арутюняна для неоднородно стареющих тел, построены эффективные решения двух контактных задач о передаче нагрузки от тонкой бесконечной цилиндрической оболочки к бесконечно длинному сплошному цилиндру или бесконечному пространству с цилиндрическим отверстием при кручении, когда материалы контактирующих пар обладают свойствами ползучести и имеют разные возрасты. Указанные задачи математически описываются интегро-дифференциальными уравнениями. Построены их замкнутые решения.

1. Упомянутые две задачи будут рассматриваться параллельно.

В первой задаче бесконечно длинный сплошной цилиндр радиуса R , усиленный по своей поверхности покрытием в виде тонкой бесконечной цилиндрической оболочки малой толщины h , скручивается касательными силами интенсивности $q_0(z, t)$, приложенными на двух симметрических отрезках $(-b, -a)$ и (a, b) (рис. 1).

Во второй задаче бесконечное пространство с цилиндрическим отверстием радиуса R , усиленное тонкой бесконечной цилиндрической оболочкой толщины h , опять скручивается касательными силами интенсивности $q_0(z, t)$, действующими на отрезках $(-b, -a)$ и (a, b) .

Будем считать, что материалы оболочки и цилиндра обладают свойствами ползучести. Пусть $C_1(t, \tau)$ — мера ползучести, $\sigma_1(t)$ — переменный во времени модуль упругости и $\tau_1(z)$ — зависящий от осевой

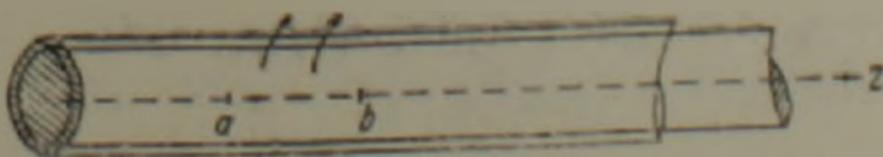


Рис. 1

координаты возраст материала тонкого покрытия. Пусть $C_1(t, \tau)$ будет мерой ползучести, $\tau_1(z)$ — возрастом и $G_1(t)$ — переменным во времени модулем сдвига материала цилиндра. В дальнейшем примем, что

$$G_1(t) = G_1 = \text{const}, \quad G_2(t) = G_2 = \text{const}, \quad \tau_1(z) = \text{const}.$$

Выведем разрешающие уравнения поставленных задач. Сначала обратимся к первой задаче. Согласно теории тонких оболочек (7) напряженно-деформированное состояние тонкой цилиндрической оболочки при кручении описывается уравнением

$$\frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z} = \frac{2(1+\mu)}{G_1 h} \left[-q_0(z, t) - q(z, t) \right]. \quad (1.1)$$

Здесь $v_1(z, t)$ — перемещение точек оболочки в тангенциальном направлении, μ — коэффициент Пуассона материала оболочки, h — толщина, а $q(z, t)$ — искомый закон распределения тангенциальных контактных напряжений на поверхности соединения оболочки с цилиндром.

С другой стороны, перемещение с учетом ползучести материала через упруго-мгновенное перемещение, выражается применительно к разбираемому случаю следующей формулой (6):

$$v_1^*(z, t) = v_1(z, t) - E_1 \int_{\tau_0}^t K_1[t + \rho_1(z), \tau + \rho_1(z)] v_1(z, \tau) d\tau; \\ K_1(t, \tau) = \frac{\partial c_1(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad \rho_1(z) = \tau_1(z) - \tau_0(0). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) с учетом (1.1) примет вид

$$\frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z} = - \frac{2(1+\mu)}{G_1 h} \left[q_0(z, t) + q(z, t) + \frac{2(1+\mu)}{h} \times \right. \\ \left. \times \int_{\tau_0}^t K_1[t + \rho_1(z), \tau + \rho_1(z)] [q_0(z, \tau) + q(z, \tau)] d\tau. \quad (1.3) \right.$$

Перемещения же $v_2^*(z, t)$ граничных точек скручиваемого сплошного цилиндра с учетом ползучести на основе преобразования Фурье определяются формулой

$$v_2^*(z, t) = - \frac{2}{\pi G_2} \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(z, z_0) q(z_0, t) dz_0 + \frac{2}{\pi} \int_{\tau_0}^t K_2[t + \\ + \rho_2, \tau + \rho_2] d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(z, z_0) q(z_0, \tau) dz, \quad (1.4)$$

где

$$K_{11}(z, z_0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(sz_0) \cdot \sin(st) I_1(Rs)}{s I_2(Rs)} ds;$$

$$K_2(t, \tau) = \frac{\sigma C_2(t, \tau)}{\sigma \tau}, \quad \rho_2 = \tau_2 - \tau_0, \quad \tau_0 = \tau_1(0).$$

Здесь $I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента первого рода индекса n , а s параметр преобразования Фурье.

Далее, принимая во внимание условие контакта

$$v_1^*(z, t) = v_2^*(z, t) \quad (-\infty < z < \infty)$$

и учитывая формулы (1.3) и (1.4), задачу определения неизвестных контактных напряжений $q(z, t)$ сводим к решению следующего интегродифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma K_{11}(z, z_0)}{\sigma z} \varphi'(z_0, t) dz_0 - \lambda \varphi(z, t) &= G_2 \int_{\tau_0}^t K_2[t + \rho_2, \tau + \rho_2] d\tau \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma K_{11}(z, z_0)}{\sigma z} \varphi'(z_0, \tau) dz_0 - \lambda^* \int_{\tau_0}^t K_1[t + \rho_1(z), \tau + \\ + \rho_1(z)] \varphi(z, \tau) d\tau &= -\theta f(z, t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где положено

$$\varphi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x, t) dx, \quad \lambda = \frac{\pi G_2(1+\mu)}{G_1 h}, \quad \lambda^* = \frac{\pi G_2(1+\mu)}{h}, \quad \theta = \pi G_2(1+\mu),$$

$$f(z, t) = -\frac{1}{G_2 h} \int_{-\infty}^{\infty} q_0(x, t) dx + \frac{1}{h} \int_{\tau_0}^t K_1[t + \rho_1(z), \tau + \rho_1(z)] d\tau \int_{-\infty}^{\infty} q_0(x, \tau) dx.$$

Подчеркнем, что напряжение $q_0(z, t)$ действует на отрезках $[-b, -a]$ и $[a, b]$, хотя они могут быть распределены произвольным образом.

Поступая вполне аналогичным образом, находим, что решение второй задачи сводится к решению следующего интегродифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma K_{12}(z, z_0)}{\sigma z} \varphi'(z_0, t) dz_0 - \lambda \varphi(z, t) &= C_2 \int_{\tau_0}^t K_2[t + \rho_2, \tau + \rho_2] d\tau \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma K_{12}(z, z_0)}{\sigma z} \varphi'(z_0, \tau) dz_0 - \lambda^* \int_{\tau_0}^t K_1[t + \rho_1(z), \tau + \rho_1(z)] \varphi(z, \tau) d\tau &= \end{aligned}$$

$$-\theta f(z, t), \quad (1.6)$$

где

$$K_{12}(z, z) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(sz_0) \cdot \sin(sz) K_1(Rs)}{s K_2(Rs)} ds.$$

Здесь $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента второго рода индекса n .

2. Как указано в работе (2), при произвольной функции $\rho_1(z)$ решение уравнения (1.5) затруднительно. В частном случае, когда возраст оболочки не зависит от z , но отличен от возраста цилиндра и равен $\rho_1(z) = \rho_1 = \text{const}$, решения уравнения (1.5) можно получить в замкнутой форме. Легко видеть что можно положить $\rho_1 = 0$.

С указанной целью применим к обеим частям уравнения (1.5) преобразования Фурье по z , в результате чего приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$[\lambda + 2\pi u I_1(Ru)/I_2(Ru)] \Phi(u, t) = \int_{\tau_0}^t [\lambda^* K_1(t, \tau) + 2\pi u G_2 I_1(Ru)/I_2(Ru) \times \\ \times K_2(t + \rho_2, \tau + \rho_2)] \Phi(u, \tau) d\tau - iu\theta F(u, t), \quad (2.1)$$

где $\Phi(u, t)$, $F(u, t)$ — трансформант и Фурье от $\varphi'(z_0, t)$ и $f(z, t)$ соответственно. Если для мер ползучести примем выражение (2)

$$C_1(t, \tau) = \varphi_1(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad C_2(t, \tau) = \varphi_2(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

где $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ — функции, определяющие процесс старения материала оболочки и цилиндра соответственно, и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то можно показать, что решение интегрального уравнения (2.1) эквивалентно решению дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\Phi''(u, t) + A(u, t)\Phi'(u, t) = P(u, t). \quad (2.2)$$

При начальных условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(u, t)|_{t=\tau_0} = -iu\theta I_2(Ru) F(u, \tau_0) / [\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)] \\ \Phi'(u, t)|_{t=\tau_0} = \gamma\theta [\lambda^* \varphi_1(\tau_0) + 2\pi u G_2 \varphi_2(\tau_0) I_1(Ru)/I_2(Ru)] \times \\ \times iu [I_2(Ru)/\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)]^{-1} F(u, \tau_0) - \\ - iu\theta I_2(Ru) F'(u, \tau_0) / [\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)]. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Здесь

$$A(u, t) = \gamma [\lambda + 2\pi u \Psi(u) + \lambda^* \varphi_1(t) + 2\pi u \Psi(u) \varphi_2(t + \tau_2 - \tau_0)], \\ \Psi(u) = I_1(Ru)/I_2(Ru), \\ P(u, t) = -iu\theta [F''(u, t) + \gamma F'(u, t)] I_2(Ru) / [\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)].$$

Решение дифференциального уравнения (2.2) при начальных условиях (2.3) имеет вид (4).

$$\Phi(u, t) = \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma(u, \tau)} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\gamma(u, y)} P(u, y) dy + \Phi'(u, \tau_0) \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma(u, \tau)} d\tau + \Phi(u, \tau_0). \quad (2.4)$$

где

$$\tau_1(u, t) = \int_{z_0}^t A(u, \tau) d\tau$$

При помощи обратного преобразования Фурье определим решение исходного уравнения (1.5)

$$\varphi'(z, t) = q(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, t) e^{-iuz} du. \quad (2.5)$$

Рассмотрим частный случай внешней нагрузки $q_0(z, t) = Q\delta(z - z_0)H(t - \tau_0)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда. При указанной нагрузке будем иметь

$$f(z, t) = -\frac{Q}{G_1 h} H(z - z_0) H(t - \tau_0) + \frac{Q}{h} H(z - z_0) \int_{z_0}^t K_1(t, \tau) H(\tau - \tau_0) d\tau, \quad (2.6)$$

где

$$F(u, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) e^{iuz} dz.$$

Далее находим

$$F(u, t) = \frac{Q}{iuh} \left\{ \frac{1}{G_1} + \varphi_1(\tau_0) [1 - e^{-\gamma(t-\tau_0)}] \right\}, \quad t \geq \tau_0. \quad (2.7)$$

Подставив $F(u, t)$ из формулы (2.7) в (2.4), получим

$$\begin{aligned} \Phi(u, t) = & -iQ \frac{I_2(Ru)}{iI_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)} \left\{ 1 + 2\pi u \gamma \frac{I_1(Ru)}{iI_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)} \times \right. \\ & \left. \times [G_1 \varphi_1(\tau_0) - G_2 \varphi_2(\tau_0)] \int_{z_0}^t e^{-\gamma(u, \tau)} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда

$$q(z, t) = -$$

$$\frac{Q\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\beta + u\Psi(u)} \left[1 + \gamma u \Psi(u) \frac{G_1 \varphi_1(\tau_0) - G_2 \varphi_2(\tau_0)}{\beta + u\Psi(u)} \int_{z_0}^t e^{-\gamma(u, \tau)} d\tau \right] \right\} \cos(uz) du, \quad (2.9)$$

где

$$\beta = \frac{G_2(1 + \mu)}{2G_1 h}, \quad \beta_1 = \frac{G_2(1 + \mu)}{2h},$$

$$\chi(u, t) = 2\pi\gamma \int_0^l |\beta + u\Psi(u) + \beta_1\varphi_1(\tau) + G_2 u\Psi(u)\varphi_2(\tau + \tau_2 - \tau_0)| d\tau.$$

Если деформации ползучести оболочки цилиндра пропорциональны их упругим деформациям $G_1\varphi_1(\tau_0) = G_2\varphi_2(\tau_2)$, то для контактных напряжений $q(z, t)$, согласно (2. 9), получим

$$q(z) = -\frac{Q\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(uz)}{\beta + u\Psi(u)} du. \quad (2. 10)$$

С целью выяснения поведения функции $\Psi(u)$ при $u \rightarrow \infty$ пользуемся известными асимптотическими представлениями функций $I_1(u)$ и $I_2(u)$ из (6). В результате приходим к асимптотической формуле

$$\Psi(u) \cong 1. \quad (2. 11)$$

Учитывая (2. 11), можем записать

$$\frac{1}{\beta + u\Psi(u)} = \frac{1}{\beta + u} + \Psi_0(u),$$

где

$$\Psi_0(u) = \frac{1 - \Psi(u)}{(\beta + u)[\beta + u\Psi(u)]} u.$$

Теперь из (2. 10) будем иметь

$$q(z) = -\frac{Q\beta}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(uz)}{\beta + u} du + \int_0^{\infty} \cos(uz)\Psi_0(u) du \right].$$

После некоторых элементарных вкладок

$$q(z) = \frac{Q\beta}{2\pi} \left[\cos(\beta z) \cdot \text{ci}(\beta z) + \sin(\beta z) \cdot \text{si}(\beta z) \right] - \frac{Q\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos(uz)\Psi_0(u) du, \quad (2. 12)$$

где $\text{ci}(\bar{x})$, $\text{si}(\bar{x})$ — интегральные косинус и синус функций.

Первое слагаемое в (2. 12) с точностью некоторых коэффициентов совпадает с известным решением Мелана (6).

Поступив совершенно аналогичным способом, находим, что решение второй задачи в указанном частном случае внешней нагрузки будет даваться формулой

$$q(z, t) = -$$

$$-\frac{Q\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\beta + u\Psi_1(u)} \left[1 + \gamma u\Psi_1(u) \frac{G_1\varphi_1(\tau_0) - G_2\varphi_2(\tau_2)}{\beta + u\Psi_1(u)} \int_0^l e^{-\gamma u(\tau_0 - \tau)} d\tau \right] \right\} \cos(uz) du. \quad (2. 13)$$

Здесь

$$\Psi_1(u) = \frac{K_1(Ru)}{K_2(Ru)},$$

$$\chi_1(u, \tau) = 2\pi_1 \int_0^{\tau} |\beta + u\psi_1(u) + \beta_1\tau_1(\tau) + G_2 u\psi_1(u)\tau_2(\tau + \tau_2 - \tau_0)| d\tau.$$

Если положить $G_1\tau_1(\tau_0) = G_2\tau_2(\tau_2)$, то для контактных напряжений $q(z, t)$ находим

$$q(z) = -\frac{Q\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(uz)}{\beta + u\psi_1(u)} du.$$

Автор весьма признателен академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну и С. М. Мхитаряну за постановку задач и ценные указания.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Չ. Ա. ԴԱՎՔՅԱՆ

Բարակ ծածկույթով ուժեղացված անվերջ զլանի ոլորման երկու խնդրի մասին անհամասեռ սողի պայմաններում

Աշխատանքում դիտարկված են Ն. Խ. Հարությունյանի կողմից առաջարկված անհամասեռորեն ծերացող մարմինների սողի տեսության շրջանակներում, բարակ գլանային թաղանթից անվերջ հոծ զլանին կամ զլանային անցքով տարածությանը ուժի փոխանցման երկու ոլորման խնդիրներ, երբ փոխադրելիության մեջ գտնվող մարմիններն օժտված են սողի հատկությամբ և ունեն տարրեր հասակները նշված խնդիրները մաթեմատիկորեն ձևակերպված են ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների տեսքով:

Կառուցված են նրանց փակ լուծումները:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Շ Ա Ն Ո Ւ Ր Տ Ո Ւ Ն

- ¹ Н. Х. Арутюнян, МТТ, № 3, 1976. ² Н. Х. Арутюнян, ДАН СССР, т. 229, № 3 (1976).
³ Н. Х. Арутюнян, ДАН СССР, т. 231, № 3 (1976). ⁴ Н. Х. Арутюнян, ПММ т. 32, вып. 4 (1968). ⁵ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, сб. «Избранные проблемы прикладной механики», М., 1974. ⁶ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М.—Л., 1952. ⁷ В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Л., «Супролгаз» 1951. ⁸ E. Melan, Ingenieur Archiv, 3, no 2, (1932). ⁹ Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1949.

УДК 523.858

АСТРОФИЗИКА

Г. Т. Петров

Содержание ионизованного газа и химический состав в ядрах
 сейфертовских галактик типа I и радиогалактик
 с широкими линиями

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 9/1 1979)

Химический состав излучающего газа можно определить, зная относительные интенсивности эмиссионных линий, электронную плотность и электронную температуру. Определение относительного содержания водорода и гелия возможно по рекомбинационным линиям 6563 H α , 4861 H β , 5876 HeI, 4686 HeII и др. Для всех элементов тяжелее гелия использование разрешенных линий при определении химического состава практически невозможно, так как для этого необходимо знать поле радиации в любой точке излучающего объема газа. На практике содержание тяжелых элементов определяется по запрещенным линиям. При этом явления стратификации во внимание не принимаются. Обзоры по определению химического состава приведены в (1-3).

На основе относительных интенсивностей линий, приведенных в (4,5), нами определено относительное содержание ионов O 0 , O $^+$, O $^{++}$, N $^+$, S $^+$, He $^+$, He $^{++}$ и элементов He, N, O и S по отношению к H. Относительные интенсивности линий были скорректированы за межзвездное поглощение по формуле:

$$\lg I_0 = \lg I_{\text{набл.}} + C f(\lambda).$$

Функция $f(\lambda)$, представляющая закон межзвездного поглощения света Уитфорда, бралась из (6). Она незначительно отличается от табуляции, приведенной в (7). Поглощение C определяли по бальмеровскому декременту для $T_e = 10^4$ К и $n_e = 10^4$ см $^{-3}$ (зависимость от n_e слабая) согласно (8).

Для определения содержания ионов применяли методику, предложенную в (9) и (10). Электронную температуру определяли по линиям [O III] λ 4363, 4959 и 5007. Уравнение, связывающее относительные интенсивности небулярных и авроральных линий, решали графическим

методом при помощи данных, приведенных в (10). Поскольку в (11) для 36 сейфертовских галактик (СГ) типа I и 5 радиогалактик с широкими линиями (РГШЛ) получено среднее значение $\lg n_e = 6,7$, то уравнение решали при $n_e = 6,5$. Соответствующие средние значения логарифмов электронных температур и их дисперсии для сейфертовских галактик типа I равны $3,96 \pm 0,13$, а для радиогалактик с широкими линиями — $3,94 \pm 0,09$.

Остерброк (4) указывает, что $T_e = 10 - 15000^\circ \text{K}$ для $n_e = 10^5 - 10^6 \text{ см}^{-3}$.

В табл. 1 и 2 для 36 сейфертовских галактик и 15 радиогалактик с широкими линиями соответственно представлены логарифмы относительных чисел ионов и атомов в галактиках, перечисленных в первых столбцах таблиц, в предположении, что число водородных атомов равно 10^{12} .

Таблица 1

Относительное содержание ионов в ядрах СГ типа I и РГШЛ

Объект	O ⁰	O ⁺	O ⁺⁺	N ⁺	S ⁺	He ⁺	He ⁺⁺	He	N	O	S
<i>Mrk</i> 10	6,35	6,60	7,46	6,22	5,48	11,11	10,64	11,24	7,14	7,55	6,40
40	6,98	7,30	7,34	6,30	5,58	11,30	10,34	11,34	6,63	7,71	5,91
69		7,04	7,13	6,85	5,82	11,18	10,62	11,28	7,20	7,39	5,36
79	6,32	6,62	7,10	6,14	5,10	11,11	10,15	11,15	6,74	7,28	6,00
106		6,43	6,96	5,95		10,85	10,45	11,00	6,59	7,11	
110	6,43	7,94	7,22	5,96	5,51	10,78	10,30	10,91	6,03	8,02	5,58
124		7,33	7,29			10,72	10,41	10,89		7,61	
141		6,48	7,08	6,74	5,78	10,79	10,26	10,95	7,44	7,18	6,47
142		6,43	6,90	5,70	4,76	11,27	10,57	11,34	7,30	7,02	6,36
236	7,60	6,68	7,15	6,00	5,65	11,15	10,58	11,26	6,59	7,77	6,24
279	6,55	6,72	6,80	6,22	5,38	11,02	10,20	11,08	6,56	7,18	5,72
290	6,42	6,38	7,29	5,83	5,20	11,08	10,20	11,13	6,78	7,39	6,16
291	6,97	7,44	7,47	7,03	6,10	11,04	10,96	11,30	7,35	7,82	6,41
304	5,48	5,79	6,32	5,59	4,71	11,04	10,18	11,10	6,21	6,48	5,33
335		5,59	6,86			11,08	10,52	11,18		6,89	
352		5,43	6,54			11,04	10,64	11,19		6,58	
358	6,79	6,59	7,13	6,37	5,90	10,84	10,77	11,11	7,03	7,37	6,55
374			7,12	5,59	5,22	11,21	10,46	11,28			
376			6,64	6,30	4,87	10,98					
382		6,51	7,42	6,59	6,40	11,08	10,81	11,26	7,55	7,47	7,36
478		6,78	6,88			10,72				7,13	
486			6,82			10,87	10,30	10,97			
504			6,90			11,10	10,62	11,23			
506	6,66	6,91	7,36	6,43	5,67	11,23	10,48	11,30	6,90	7,55	6,14
509		6,17	6,88			11,15	10,46	11,23		6,96	
541		6,19	6,86	6,88		11,41	10,76	11,50	7,64	6,94	
590	7,05	6,90	7,22	6,53	5,58	11,04			7,02	7,55	6,08
<i>Mrk</i> 618	6,43	6,65	7,13	6,93	6,18	11,20	10,62	11,30	7,54	7,32	6,79
NGC 3227	6,08	6,18	7,60	6,07	5,14	11,26	10,72	11,36	7,51	7,63	6,58
NGC 3516		6,97	7,21			11,15	10,38	11,20		7,41	
NGC 5548	6,57	6,83	7,38	5,97	5,23	10,62	9,32	10,64	6,64	7,54	5,90
NGC 7469		6,96	7,21			11,08	10,40	11,16		7,40	
I Zw 1			7,12			10,95					
II Zw 1	6,69	6,93	7,58	6,80	5,96	11,08	10,66	11,23	7,54	7,71	6,70
II Zw 136		6,24	7,03			11,38	10,15	11,40		7,09	
II Zw 2	6,35	6,41	7,00	5,76	5,26	10,95	9,84	10,98	6,44	7,17	5,95

В табл. 3 приведены средние по полученным нами результатам данные о сейфертовских галактиках типа I и радиогалактиках, а также некоторые данные, относящиеся к среднему химическому составу планетарных туманностей, туманности Ориона и звезд по результатам, опубликованным, соответственно, в (12-14).

Таблица 2

Содержание ионов и атомов для РГШЛ

Объект	N ⁺	S ⁺	O ⁰	O ⁺	O ⁺⁺	He ⁺	He ⁺⁺	He	N	O	S
3C 120	6.14	6.19	6.32	6.56	7.43	11.08	10.36	11.50	7.07	7.52	7.11
227	7.96	7.02	8.63	6.83	7.40	10.72	10.40	10.90	8.64	8.66	7.71
234	6.2	5.82	6.02	7.88	8.46	10.48	10.40	10.78	7.20	8.60	6.50
287-1	6.43	5.79	6.40	9.14	7.93				6.45	9.17	5.81
332	6.56	5.64	6.29	9.04	8.44		10.66		6.66	9.14	5.74
381	7.56	6.74	8.04	8.52	8.76		10.64		8.00	9.01	7.18
282	4.83	4.90	6.08	6.35	6.78	10.91	9.60	10.95	5.30	6.95	5.46
310.3	5.85	5.05	6.69	6.97	7.46	10.98	9.30	11.00	6.46	7.63	5.66
3C 345	6.00	5.36	6.77	6.36	7.90	10.57			7.56	7.94	6.93
0353-027					7.77		9.95				
1417-19	6.68	5.65	5.75	6.90	7.81	10.48	9.70	10.45	7.64	7.86	6.51
2349-01	6.28	5.27	4.78	6.76	7.07	10.69			6.76	7.26	5.75
4C 29.06	6.61	5.81	6.17	7.30	7.72	10.11	9.66	10.26	7.18	7.87	6.38
4C 35.37				6.92	7.28					7.43	
IV Zw 29	6.69	5.74	6.05	7.34	7.61				7.15	7.81	6.20

Таблица 3

Среднее содержание ионов и атомов для некоторых объектов

Объекты	N ⁺	S ⁺	O ⁰	O ⁺	$\frac{+}{0}$	He ⁺	He ⁺⁺	He	N	O	S	n
СГ типа I	6.27	5.51	6.57	6.33	7.09	11.05	10.34	11.17	6.97	7.33	6.19	36
РГШЛ	6.47	5.77	6.46	7.35	7.72	10.67	10.07	10.85	7.08	8.06	6.39	15
Орион	7.52	5.98		8.51	8.24	10.87		11.00	7.76	8.75	7.41	12
Планетарные туманности	7.05	5.90		7.61	8.49	10.95	10.03	11.04	8.18	8.76		13
Звезды								11.21	8.5	8.95		

Сравнение полученных нами результатов с аналогичными величинами для других объектов показывает, что:

1. Относительное содержание гелия в сейфертовских галактиках типа I в среднем в полтора раза превосходит его содержание в планетарных туманностях или туманности Ориона; в этих галактиках относительное содержание близко к звездному.

Относительное содержание гелия в радиогалактиках с широкими линиями примерно в полтора раза меньше, чем в планетарных туманностях или туманности Ориона.

2. По сравнению с туманностью Ориона сейфертовские галактики типа I содержат примерно на порядок меньшие относительные коли-

чества азота и кислорода, а радиогалактики с широкими линиями в пять раз меньше количества азота и кислорода.

3. В среднем по сравнению с сейфертовскими галактиками типа I радиогалактики с широкими линиями содержат в два раза меньшее относительное количество гелия, примерно такое же количество азота и в пять раз меньшее количество кислорода. При этом в радиогалактиках с широкими линиями относительное содержание ионов O^+ на порядок больше, а ионов O^{++} — в четыре—пять раз больше, чем в сейфертовских галактиках типа I. Это обстоятельство является отражением того факта, что относительные интенсивности линий $[O III]$ и $H\beta$ в радиогалактиках с широкими линиями много больше, чем в сейфертовских галактиках типа I.

4. Относительное содержание серы, приводимое нами, является нижней границей, поскольку интенсивности линий $[S III]$ в (4) и (5) не приведены. Вследствие этого приведенная величина может быть недооценена в несколько раз. С другой стороны, число ионов S^+ в сейфертовских галактиках типа I, радиогалактиках с широкими линиями, туманности Ориона и планетарных туманностях отличается не больше, чем в три раза, поэтому вероятно, что количество серы у этих объектов отличается не так сильно, как приведенные в таблице значения.

5. Различия в химическом составе сейфертовских галактик типа I и радиогалактик с широкими линиями в среднем небольшие, но поскольку температуры в зонах $O III$ для этих объектов практически одинаковы, то вероятно, что выведенные различия в химическом составе реальны.

В (2) отмечается, что радиогалактики с широкими линиями отличаются от сейфертовских галактик типа I тем, что:

а) бальмеровский декремент для радиогалактик с широкими линиями очень крут;

б) линии $Fe II$ в радиогалактиках с широкими линиями слабы;

в) отношение $[O III]/H\beta$ больше для радиогалактик с широкими линиями.

На основе полученных результатов можно заключить, что одной из возможных причин высокого отношения $[O III]/H\beta$ является повышенное содержание кислорода. Чтобы однозначно выяснить, чем вызвано различие в содержании кислорода в объектах обоих типов, необходимы более детальные спектрофотометрические исследования, охватывающие ультрафиолетовую область спектра до примерно 3300 Å. В этом случае можно однозначно определить температуры и давления в зонах, излучающих запрещенные линии, а затем и химический состав излучающего газа.

Автор благодарен М. А. Аракеляну за ценное обсуждение.

1 տիպի Սեյֆերտի գալակտիկաների և առաջման լայն գծերով
 ուղիղգալակտիկաների միջուկների Իմիական բաղադրությունը և
 իոնների սլաբունակությունը

1 տիպի 36 Սեյֆերտի գալակտիկաների և 15 առաջման լայն գծերով ուղիղգալակտիկաների համար որոշված են որոշ իոնների և ատոմների հարաբերական քանակությունները ⁽⁴⁾ և ⁽⁵⁾-ում բերված առաջման գծերի հարաբերական ինտենսիվությունների միջոցով:

Նշված օբյեկտներում հելիումի, ազոտի և թթվածնի ատոմների հարաբերական քանակությունները որոշ շափով տարբերվում են այդ նյութերի հարաբերական քանակություններից Օրիոնի միգամածությունում, մոլորակածև միգամածություններում և աստղերում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ M. Seaton, Rept. Progr. in Phys., 23, 313, 1960. ² D. E. Osterbrock, Quart. J. R. A. S., 11, 199, 1970. ³ D. E. Osterbrock, in „Astrophysics of Gaseous Nebulae“, 1974. ⁴ D. E. Osterbrock, Ap. J., 215, 735, 1977. ⁵ S. A. Grandt, D. E. Osterbrock, Ap. J., 220, 783, 1978. ⁶ J. B. Kaler, L. H. Aller, S. J. Czyzak, H. W. Epps, Ap. J. Suppl., 31, 163, 1976. ⁷ M. Brocklehurst, M. N. R. A. S., 153, 471, 1971. ⁸ M. Peimbert, Ap. J., 154, 33, 1968. ⁹ M. Peimbert, Bol. Obs. Ton. y Tac., 6, 97, 1971. ¹⁰ A. A. Боярчук, P. E. Гершберг, Н. В. Годовников, В. И. Проник, Известия Крымской астроф. об., 39, 217, 1969. ¹¹ Г. Т. Петров, Астрофизика, 15, 383, 1979. ¹² M. Peimbert, S. Torres-Peimbert, Ap. J., 168, 413, 1971. ¹³ M. Peimbert, S. Torres-Peimbert, M. N. R. A. S., 179, 217, 1977. ¹⁴ L. H. Aller, S. J. Szizak, IAU Symp., 34, 209, 1968.

УДК 521.852.35

АСТРОФИЗИКА

С. Г. Искударян

Вероятные кандидаты в IggII галактики
 среди объектов атласа Арпа

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 2/V 1979)

Атлас Арпа (¹) содержит крупномасштабные снимки пекулярных галактик, полученные, как правило, на пятиметровом телескопе. С другой стороны, объекты типа IggII часто причисляют к пекулярным галактикам. Поскольку нами были выполнены поиски кандидатов в IggII галактики на картах Паломарского атласа (^{2,3}), то выделение галактик IggII из атласа Арпа могло бы дать представление о том, в какой мере нами пропущена часть кандидатов в IggII из-за малого разрешения снимков Паломарских карт.

При выполнении этой работы мы пользовались двумя внешними характеристиками этих объектов: их неправильной формой и обилием пыли. О цветах же этих кандидатов можно было судить по Паломарским картам. Было выделено 54 объекта. После исключения уже известных галактик типа IggII (⁴⁻⁹), а также тех объектов, которые вошли в наши списки кандидатов в IggII, в списке осталось 11 объек-

NGC, IC*, α , δ (1970)	Номер в атласе Арпа	Примечания
0 ^h 5 ^m .4 +8° 12'	246	Заметно ядро
0 44-8 -13 37	230	
942-43	309	VV 217
1316	154	Очень напоминает NGC 3077
2633	80	Объектом типа IrrII является деталь, находящаяся в перемычке галактики
575*	292	VVIII
3627	16	Галактика типа Sb, спектрального типа Q2, $V_r = +633$ км/сек
16 3-1 -14 57	101	VV318
Спутник NGC 7469	298	
1505*	295	VV34
7625	212	CI ~ +0 ^m 7 согласно нашим глазомерным оценкам на Паломарских картах
		VV 280

тов. В таблице мы приводим этот список с примечаниями для каждого объекта.

В первом столбце таблицы даны номера галактик по NGC и IC*. Для тех галактик, которые не входят в NGC, даются их координаты L, δ на 1970 г. Во втором столбце таблицы приводятся номера галактик из атласа Арпа, и в последнем столбце даются примечания.

У NGC 1316 склонение порядка -37° , так что он не смог бы войти в наши списки. Области неба -36° и -42° в Паломарском атласе не имеют красных карт, так что по картам нельзя судить о цвете этого объекта. Однако согласно каталогу (') он довольно красный, $B-V = +0^m 90$. NGC 2633 и NGC 3627 представляют собой обыкновенные спирали, но одна из них—NGC 2633, содержит в своей перемычке деталь, напоминающую объект типа IggII, а NGC 3627 может быть отнесена к этому типу из-за богатства пыли и из-за своего красного цвета, хотя она имеет нормальную спиральную форму.

Объекты Арп 246, 309, 101, 295 на Паломарских картах кажутся обыкновенными E галактиками. NGC 7625 и IC 575 представляют собой разновидности типа NGC 5128, поэтому они не были включены в наши списки.

Изображение NGC 5665 несколько ярче на голубой карте Паломарского атласа, поэтому этот объект не был включен в наши списки. Следует отметить, однако, что голубая карта пары, на которой находится объект, более чувствительна, чем красная карта (здесь отметим, что относительная чувствительность пары карт определяется путем подсчетов звезд на пробных площадках обеих карт (²)). Но, все же, для осторожности этот объект не был включен также и в приведенный выше список.

Спутник известной сейфертовской галактики NGC 7469 не вошел в наши списки из-за своей слабости.

Объект Арп 230 находится среди тех полуторатысячи объектов, которые были выделены нами на Паломарских картах как объекты типа IggII. Но при ревизии (²) он был исключен из списков.

Среди объектов, перечисленных в таблице, нельзя найти хотя бы два объекта, которые вместе входили бы в один и тот же подкласс объектов Арпа, а галактики NGC 942+43 и спутник NGC 7469 так же как всем известный M82 не отнесены Арпом ни к какому из определенных им подклассов. Вместе с M82 в атлас Арпа входят еще четыре известные IggII галактики. Две из них—NGC 520 и NGC 3656 входят в подкласс галактик «разрушенных, с внутренним поглощением», одна входит в подкласс «материя, изверженная из ядра» (NGC 3448) и одна входит в подкласс «компоненты с высокой поверхностной яркостью» (спутник M51).

Из 338 объектов атласа Арпа только 54 выделены нами как объекты типа IggII, но в нашем списке, составленном по картам Паломарского атласа, пропущено 11 из них, что дает представление о степени полноты нашего обзора. Из 54 объектов—вероятных кандидатов

в IrgII галактики из атласа Арпа—только пять представляют собой известные IrgII галактики. Фактически из этих пяти галактик (а известных IrgII галактик в настоящее время имеется около тридцати (4-6)) только две внесены Арпом в наиболее подходящий для галактик IrgII подкласс объектов «разрушенных, с внутренним поглощением». Значит, остальные 49 выделенных кандидатов и 3 известные IrgII галактики показывают двойную пекулярность: одна по Арпу а Арп пекулярность галактик своего атласа в основном связывает с выбросами и с образованием новых компонент (6), другая—как объект типа IrgII, хотя для последних нет специального подкласса в атласе. Как упоминалось выше, даже M82 не отнесена Арпом ни к какому определенному подклассу атласа, а все II выделенных нами кандидатов в IrgII галактики из атласа, которые ни в какие списки не входят, как подобные объекты, входят в *разные* подклассы атласа. Все это, хотя и косвенно, но все же говорит в пользу предположения, сделанного в работе (3), что тип IrgII—это определенное физическое состояние галактик, в котором могут оказаться как галактики различных морфологических типов, так и отдельные их подсистемы или детали.

Автор выражает благодарность академику В. А. Амбарцумяну за внимание, проявленное к настоящей работе.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ս.Գ. ԻՍԿՈՒԴԱՐՅԱՆ

IrgII տիպի գալակտիկաների հավանական բեկնածուներ Արփի ատլասի օբյեկտների շրջանում

Նախորդ աշխատանքում (2) նկարագրված ձևով Արփի ատլասի օբյեկտներից ընտրված են IrgII գալակտիկա կոչվելու հավանական թեկնածուները Այն փաստը, որ այդ հավանական թեկնածուները մտնում են Արփի ատլասի տարրեր ենթադասերը և նրանց մեջ չկան գոնե երկուսը, որ միասին մտնեն ատլասի միևնույն ենթադասը, անուղղակի կերպով խոսում է (3) աշխատանքում արված այն ենթադրության օգտին, որ գալակտիկաների IrgII տիպը ավելի շուտ իրենից ներկայացնում է այլ մորֆոլոգիական տիպերի գալակտիկաների որոշակի ֆիզիկական վիճակ, որում կարող են գտնվել ոչ միայն իրենք գալակտիկաները, այլև նրանց առանձին ենթաստեմները և մանրամասները:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Н. Арп. Atlas of Peculiar Galaxies, Pasadena, 1966. 2 С. Г. Искударян, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 2 (1978). 3 С. Г. Искударян, ДАН Арм. ССР, т. 68, № 3 (1979):

4 O. K. Krlenke Jr., P. W. Hodge, A. J., 79, 1242, 1974. 5 Б. Е. Муркарян, Сообщ. Бюраканской обс., вып. 34, 1963. 6 P. Nilson, Uppsala General Catalogue of Galaxies, Uppsala, 1973. 7 G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, H. G. Corwin Jr., Second Reference Catalogue of Bright Galaxies, Austin, London, 1976. 8 Г. Ари, С6, Вопросы физики и эволюции Вселенной, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1978.

УДК 577.475.632.93

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Н. В. Бажанова, Ж. А. Арутюнян

О количественных изменениях пигментов пластид в листьях яблонь пальметтных садов в связи с применением гербицидов

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Казаряном 9/IV 1979)

Одним из путей повышения урожайности и качества продукции является применение гербицидов. Однако, попадая в растительный организм, они в какой-то степени нарушают его ритм развития.

По современным представлениям (1-6) гербициды, внесенные в почву, способны быстро передвигаться по растению, образовывать комплексные метаболические формы и оказывать определенное влияние на физиолого-биохимические процессы. Пигментный аппарат растений охарактеризован с этой точки зрения крайне неполно.

В настоящем сообщении приведены результаты по динамике накопления пяти основных пигментов листьев в связи с применением гербицидов. Работа проводилась в течение двух лет. Пробы листьев яблони сорта Пармен зимний золотой привозили из совхоза «Наири» Октемберянского района. Для получения более выравненного материала среднюю пробу, взятую с верхних и нижних ярусов, составляли из верхушек листьев от 20—30 растений.

Определяли: хлорофиллы *a* и *b*, каротин, лютеин и виолаксантин методом хроматографии на бумаге (7). Абсолютное содержание пигментов рассчитывали в мг/кг свежего веса листьев.

Данные по накоплению хлорофиллов *a* и *b* в листьях верхнего и нижнего ярусов за 1977 г. и листьях среднего яруса за 1978 г. представлены на рис. 1. Он показывает, что содержание хлорофиллов в листьях подвержено сильным изменениям в процессе онтогенеза и, независимо от вариантов опыта, наблюдается возрастание их концентрации к концу вегетации.

Обнаружена большая разница в накоплении хлорофиллов между листьями верхних и нижних ярусов, с явным преобладанием их у последних.

С первых дней анализа отмечалось довольно высокое содержание хлорофилла *b*, иногда превышающее количество хлорофилла *a*. Факт

большого накопления хлорофилла б подтвердился и в последующие сроки взятия проб, к тому же аналогичные результаты мы встретили и в литературе (8). Предположив, что это связано с изомеризацией хлорофилла а, изомеры которого на хроматограмме идут вместе с хлорофиллом б, нам удалось обнаружить ошибку.

Действительно, в начальные сроки весенне-летнего развития листьев яблони в них накапливаются изомеры хлорофилла а (иногда до 4-х), но методически они не обнаруживались, так как на хроматограмме располагались под хлорофиллом б. При изменении методики определения и удлинении времени разгонки изомеры хлорофилла а отделяются от хлорофилла б, и в результате получается нормальное соотношение этих пигментов в пределах 3а : 1б.

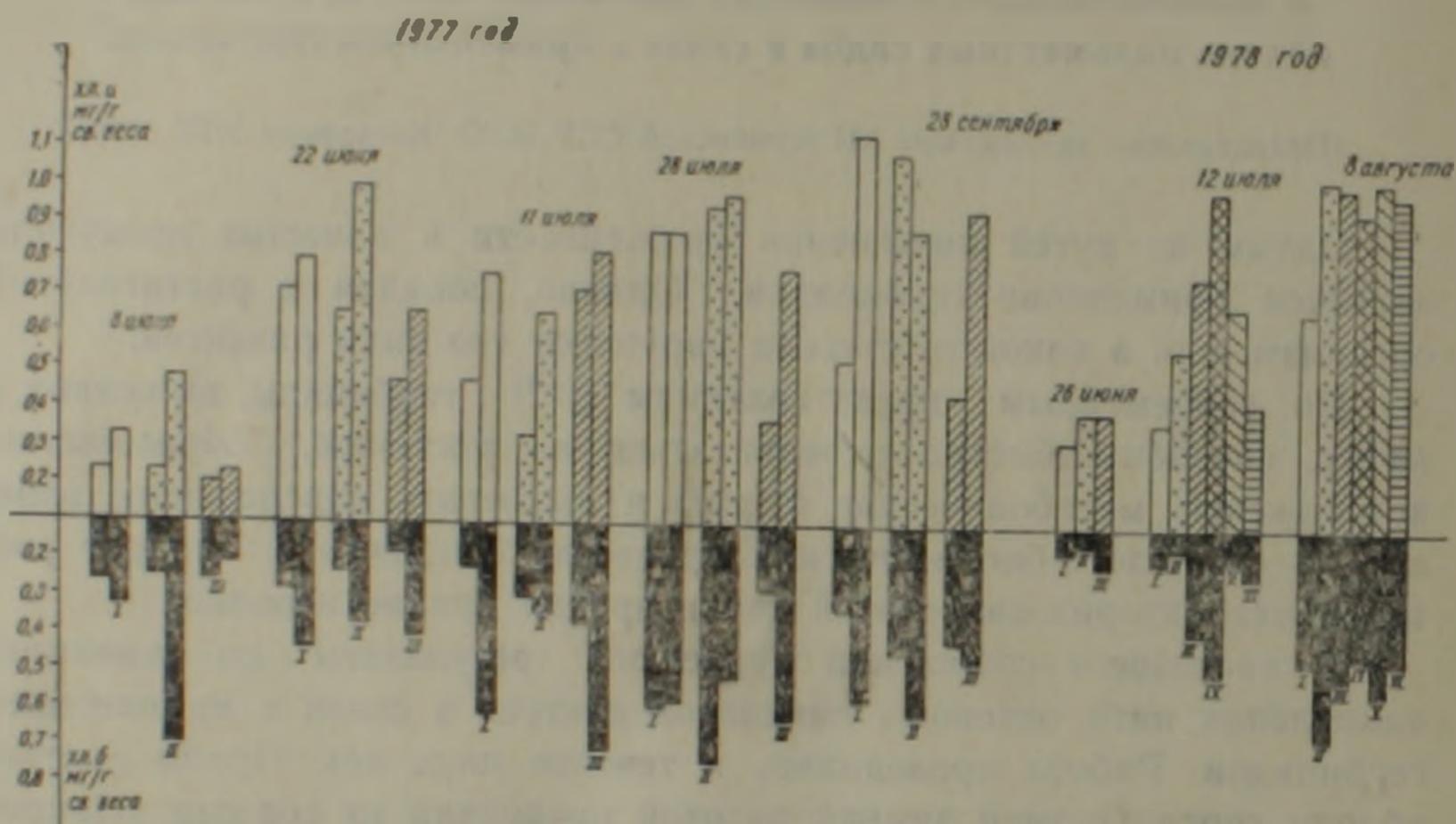


Рис. 1. Изменения в содержании хлорофиллов а и б в листьях яблони в зависимости от воздействия гербицидов. Расположение столбиков: вверх—хлорофилл а; вниз—хлорофилл б, слева—количество хлорофиллов а и б в листьях верхнего яруса, справа—количество хлорофиллов а и б в листьях нижнего яруса. I—Контроль; II—радокор; III—карагард; IV—линурон; V—диурон; VI—тербацил

Применение гербицидов также является существенным фактором, влияющим на содержание хлорофиллов. Обнаружена четкая разница между вариантами, и зафиксировано наибольшее количество зеленых пигментов в листьях растений, обработанных карагардом, линуроном и радокором, что, вероятно, можно связать с их проникновением в хлоропласт в тех дозах, которые стимулируют накопление зеленых пигментов.

Изучение каротиноидного состава листьев также представляет большой интерес в связи с их биологической активностью. Основные компоненты каротиноидного состава листа яблони определены и находятся в следующем приблизительном соотношении: лютеин (40—55%), каротин (20—25%) и виолаксантин (15—20%).

В течение онтогенеза и по вариантам количество желтых пигментов также не остается постоянным. Чтобы не загромождать табл. I цифровыми данными, приведена только разность (большая с плюсом, меньшая с минусом) процентного содержания каротиноидов в опытных вариантах от контроля. Данные свидетельствуют, что во всех вариантах отмечается увеличение каротиноидов по сравнению с контролем. Исключение составляют сроки: 28.VII и 28.IX за 1977 г., когда наблюдается явное уменьшение каротиноидов, что, видимо, связано с более активным перемещением компонентов пластид в почки (в период закладки плодовых почек) и в плоды (в момент их съемной зрелости). Только в варианте с тербацилом отмечается подавление синтеза каротина.

Таблица I

Разность процентного содержания каротиноидов* между опытными и контрольными вариантами

Вариант	Пигмент	1977 г.					1978 г.		
		8.VI	22.VI	11.VII	28.VII	28.IX	26.VI	12.VII	8.VIII
Диурон в дозе 6 кг/га	К							+24	+12
	Л							+28	+64
	В							+48	+24
Карагард в дозе 10 кг/га	К	-35	+46	+64	-55	+14	+30	+32	+30
	Л	-46	+43	+16	-23	-72	+65	-22	+68
	В	-19	+11	+20	-22	-14	+5	+46	0
Линурон в дозе 8 кг/га	К							+33	+20
	Л							+38	+50
	В							+29	+30
Радокор в дозе 10 кг/га	К	+22	+43	+17	-45	-10	+25	+15	+26
	Л	+54	+49	+49	+30	-24	+53	-50	+63
	В	+24	+9	0	+25	-66	+22	0	+11
Тербацил в дозе 6 кг/га	К							0	-30
	Л							0	+59
	В							+24	0

* К—каротин; Л—лютеин; В—виолаксантин.

Таким образом, накопление хлорофилла на протяжении всего вегетационного периода характеризуется одинаковой направленностью этого процесса по всем вариантам с максимумом накопления, наступающим в период закладки плодовых почек.

Внесенные гербициды вызывают отклонения в накоплении хлорофиллов и каротиноидов, как правило, в сторону их увеличения.

Պլաստիդային պիգմենտների Բանակական փոփոխությունները պլազմետային ալգիների խնձորենիների տերևներում՝ հերբիցիդների կիրառման ազդեցությամբ

Սույն աշխատանքում բերված է խնձորենու տերևներում հինգ հիմնական պլաստիդային պիգմենտների (քլորոֆիլներ ա և բ, կարոտին, քլոտենին, վիլաքսանտին) կուտակման դինամիկան՝ կասկած հերբիցիդների կիրառման հետ:

Ուսումնասիրությունները ցույց տվեցին, որ փորձի բոլոր տարբերակներում քլորոֆիլի կուտակումը բնութագրվում է այդ պրոցեսի միտոքինակ ուղղվածությամբ՝ կուտակման մաքսիմումով վեգետացիայի վերջում:

Կիրառված հերբիցիդները հարուցում են քլորոֆիլների և կարոտինոիդների կուտակման շեղումներ, որպես կանոն, նրանց քանակական ավելացման ուղղությամբ:

Բույսերի զարգացման զարնանու-ամառային շրջանում խնձորենու տերևներում հայտնաբերված են քլորոֆիլ ա-ի մի քանի իզոմերներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. А. Угулава, Р. А. Хубутя, Агрохимия, № 1, 1972. ² Н. И. Мельников, Химия и технология пестицидов, М., 1974. ³ T. D' Souza, Application and mode of action, of triazine herbicides, Pesticides, 10, 3 (1976). ⁴ Н. В. Бажанова, А. А. Калантаров, М. Г. Алтунян, М. А. Севумян, Ж. А. Арутюнян, Тезисы докладов на VIII сессии Закавказского совета по координации науч.-исслед. работ по защите растений, Ереван, 1977. ⁵ А. Г. Агаронян, Н. В. Бажанова, Ж. А. Арутюнян, В. С. Хачатрян, Тезисы докладов на VIII сессии Закавказского совета по координации науч.-исслед. работ по защите растений, Ереван, 1977. ⁶ М. Г. Алтунян, Ж. А. Арутюнян, М. А. Севумян, Тезисы докладов науч. конф. молодых ученых, Эчмиадзин, 1977. ⁷ Н. В. Бажанова, М. Г. Алтунян, Биол. журн. Армении, № 9, 1976. ⁸ А. М. Меликян, Тезисы докладов науч. конф. молодых ученых, Эчмиадзин, 1977.

