

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
 ДОКЛАДЫ

LXVIII, № 4

1979

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնա-
 ծու (պատ. Բաբուրյան), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Ք. ԲԱԲԱ-
 ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
 ՅԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
 ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Վ. Մ. ԹՍՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-ան-
 դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
 Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
 (պատ. Խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹ-
 ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագիր),
 Գ. Ո. ՈԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Օ. Մ. ՈԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ
 ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՆԱՆԱՐՋՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
 АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
 мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
 демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),
 И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм-
 ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
 АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
 чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
 ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
 ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
 ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
 ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
 В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

42

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Գ. Գ. Էմին—Վերջավոր բազալորվող բազմաձևությունները և լոկալիզացիաները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում 134
- Է. Գ. Մելիքեյան—Դիրիխլեի խնդիրը թույլ կապակցված, երկրորդ կարգի երկու անկախ փոփոխականներով էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար . . . 134
- Մ. Ժ. Գրիգորյան—Կրկնակի շարքերի $L^p[0,1] \times [0,1]$, $0 < p < 1$, մետրիկայով զուգամիտության մասին 203
- Ս. Գ. Սիմոնյան, Լ. Ա. Բաղդասարյան—Ողորկ և պարբերական պոտենցիալով Դիրակի միաչափ օպերատորի սպեկտրի լակուների մասին 205

ԿՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Ա. Ա. Բարաշանյան—Գծային բալանսային հավասիրումների սխեմաների կատարյալ ազդեցություն 213
- Շ. Ն. Բոգոյան—Լուկասիվիչի լեզվի հարմարեցումը ֆունկցիոնալ սխեմաների նկարագրությամբ 219

ՇՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԵՐ

- Կ. Ս. Կաբապետյան, Ռ. Ա. Կոսիկյան, Կ. Ա. Կաբապետյան—Ջրահագեցման ազդեցությունը յոտոդային պեմզաքստոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա սեղմման և ձգման դեպքում 227

ՅՈՒԴԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

- Ս. Բ. Ղուկասյան, Կ. Ա. Կոստանյան—Ալյումինումի իոնի կոորդինացիայի մասին $Na_2O-Al_2O_3-(SiO_2, GeO_2, B_2O_3)$ սխեմաների ապակիներում 236

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ն. Կ. Հերբելյան—Mayridia և Litomistix սեռերի նոր տեսակներ (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) Հայաստանից 242
- Կ. Ա. Զանգեմեն—Diglochis Förster (Hymenoptera, Chalcidoidea, Pieromallidae) սեռի պտերոմալիդներ—մոզերի պարագիտներ Հայաստանում և ՍՍՀՄ այլ շրջաններում 247
- Վ. Ա. Տրյապիցին, Ն. Կ. Հերբելյան—Նոր սեռ Tetralophisca էնցիրտիդների (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) Գալիարկտիկայի արիդային գոնայից . . . 253

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Г. Г. Эмин — Конечнобазиремые многообразия и локализации в категории модулей над всеми кольцами 193
- Э. П. Меликсетян — Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными 198
- М. Ж. Григорян — О сходимости двойных рядов в метрике $L^p[0,1] \times [0,1]$, $0 < p < 1$ 203
- С. Г. Симонян, Л. А. Багдасарян — О лакунах в спектре одномерного периодического оператора Дирака с потенциалом конечной гладкости 208

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- А. А. Бабаджанян — Совершенное агрегирование систем линейных балансовых уравнений 213
- Ш. Е. Бозоян — Приспособление языка Лукасевича к описанию функциональных схем 219

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- К. С. Каралетян, Р. А. Котикян, К. А. Каралетян — Влияние водонасыщения на прочность и деформативность бетона на литондной пемзе при сжатии и растяжении 227

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- С. Б. Гукасян, К. А. Костанян — О координации иона алюминия в стеклах систем $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - (\text{SiO}_2, \text{GeO}_2, \text{B}_2\text{O}_3)$ 236

ЭНТОМОЛОГИЯ

- Е. К. Эртевцян — Новые виды родов *Mayridia* и *Lilomastix* (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) из Армении 242
- К. А. Джанокмен — Птеромалиды рода *Diglochis* Förster (Hymenoptera, Chalcidoidea, Pteromalidae) — паразиты слепней в Армении и других районах СССР 247
- В. А. Тряпцын, Е. К. Эртевцян — *Tetralophitsca* — новый род энциртид (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) из аридной зоны Палеарктики 253

CONTENTS

MATHEMATICS

P.

G. G. Emln—Finite based varieties and localizations of category of modules over all rings 193

E. P. Melicksetian—Dirikhley's problem for weakly connected elliptic systems of second order for two differential equations 198

M. G. Grigorian—On the convergence of $L_p[0,1] \times [0,1]$, $0 < p < 1$ metric by multiple series 203

S. G. Simonian, L. A. Baghdassarlian—About lacuna in the spectrum of one-dimensional periodic operator of Dirac with a potential of final smoothness 208

APPLIED MATHEMATICS

A. A. Babadjanian—Perfect aggregation of systems of linear balance equations 213

Sh. E. Bozoyan—The consequence of Lukasiewicz's description of the logical schemes 219

BUILDING MATERIALS

K. S. Karapetian, R. A. Kotiklan, K. A. Karapetian—An influence of water saturation upon strength and deformability of concrete on littoral pumice by compression and tension 227

PHYSICAL CHEMISTRY

S. B. Gukaslan, K. A. Kostanian—About coordination the ion of alumine in glasses of system 236

ENTOMOLOGY

E. K. Herthetizian—New species of the genera *Mayridia* and *Litomastix* (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) from Armenia 242

K. A. Dzhanokmen—Pteromalids of the genus *Diglochis* Förster (Hymenoptera, Chalcidoidea, Pteromalidae)—parasites of horse-flies in Armenia and other regions of the USSR 247

V. A. Tryapitzin, E. K. Herthetizian—*Tetralophisca* a new encyrtid genus (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) from arid zone of Palearctica 253

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 05948 Подписано к печати 13.07.1979 г. Тираж 535. Изд. 5065 Заказ 290

Формат бумаги 70×108^{1/16}. Печ. л. 4,0 Бум. л. 2

Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,32

Издательство АН АрмССР, Ереван, Барекамутян 24-г.
 Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин

УДК 512

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Эмин

Конечнобазлируемые многообразия и локализации в категории модулей над всеми кольцами

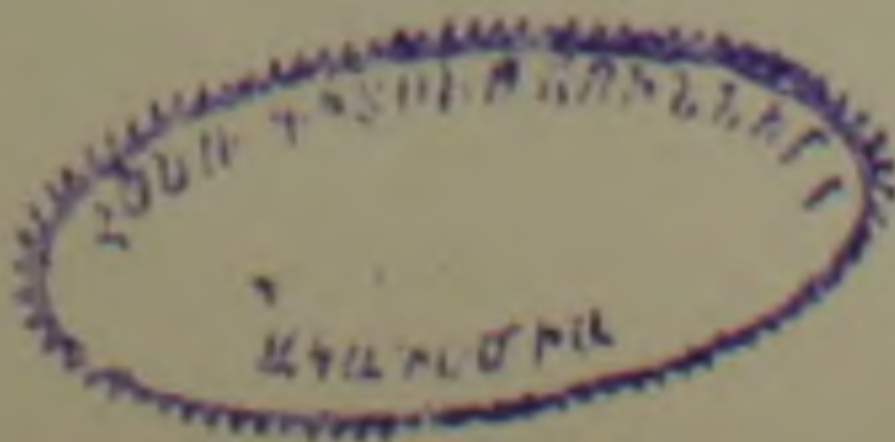
(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 10/XII 1978)

Рассматривается категория MOD , категория модулей над всеми кольцами. Объекты этой категории — всевозможные пары (A, U) , где U — ассоциативное кольцо не обязательно с единицей, A — правый U -модуль. Множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар (φ_A, φ_U) , где φ_A — гомоморфизм абелевой группы A в абелеву группу B , а φ_U — гомоморфизм кольца U в кольцо V , причем $(a \cdot u) \varphi_A = a \varphi_A \cdot u \varphi_U$, $a \in A$, $u \in U$.

Зафиксируем тройку вида (n, T, T') , где n — натуральное число или нуль, а T и T' — многообразия категории ассоциативных колец As , удовлетворяющие условию $T' \subseteq T \cap T(n)$, где $T(n)$ — многообразие категории As с одним тождеством $nx=0$. Обозначим через $N(n, T, T')$ полную подкатегорию категории MOD , порожденную всеми теми модулями (A, U) , для которых выполнены условия $na=0$, для любого $a \in A$, кольцо $U \in T$ и $a \cdot u=0$, для любого $a \in A$ и для любого $u \in V_{T'}(U)$, где $V_{T'}(U)$ — значение вербала многообразия T' на кольце U . $N(n, T, T')$ — это многообразие категории MOD , и для любого многообразия N категории MOD существует такая единственная тройка (n, T, T') , что $N=N(n, T, T')$ ⁽¹⁾.

Пусть $N=N(n, T, T')$ — многообразие категории MOD , а $(A(X), U(Y))$ — свободный модуль с системой свободных образующих (X, Y) , где X и Y — счетные множества ⁽¹⁾, стр. 215). Значение вербала V_N на модуле $(A(X), U(Y))$ равно $(nA(X) + A(X) \cdot V_{T'}(U(Y)), V_{T'}(U(Y)))$ ⁽¹⁾, предложение 2.5), поэтому многообразие N состоит из всех таких модулей (A, U) , что в кольце U выполнены тождества многообразия колец T , а в модуле (A, U) выполнены тождество $nx=0$ и битождества ⁽²⁾, стр. 103) $a \cdot u=0$, где $a \in A(X)$ и $u \in V_{T'}(U(Y))$.

Многообразие будем называть конечнобазлируемым, если его можно задать конечным числом тождеств и битождеств. Конечнобазлируемое многообразие будем называть шпехтовым, если каждое его подмногообразие конечнобазлируемо.



Лемма 1.1. Многообразие $N(n_1, T_1, T_1)$ тогда и только тогда является подмногообразием многообразия $N(n_2, T_2, T_2)$, когда n_1 — делитель n_2 , или $n_2=0$, $T_1 \subseteq T_2$ и $T_1' \subseteq T_2'$.

Теорема 1.1. Многообразие $N(n, T, T')$ категории MOD тогда и только тогда шпехтово, когда T — шпехтово многообразие категории ассоциативных колец.

Доказательство. Пусть T — шпехтово многообразие. Тогда подмногообразие T' многообразия T также шпехтово, т. е. его можно задать конечным числом тождеств. Получили, что $N(n, T, T')$ — конечно-базлируемое многообразие, так как из конечнобазлируемости многообразия T' следует, что идеал $V_{T'}(U(Y))$ задается как вербальный идеал конечным числом элементов $u_1 = u_1(y_1, \dots, y_{n_1}), \dots, u_l = u_l(y_1, \dots, y_{n_l})$, поэтому тождества $a \cdot u = 0, a \in A(X), u \in V_{T'}(U(Y))$, вытекают из тождества $a \cdot u_i = 0, i = 1, \dots, l$. Из сказанного выше и из леммы 1.1, поскольку T и T' — шпехтовы многообразия, следует, что любое подмногообразие многообразия $N(n, T, T')$ также конечнобазлируемо.

Обратно. Если многообразие $N(n, T, T')$ шпехтово, то его подмногообразие $N(1, T, T(1)) = \{(0, U) | U \in T\}$ также шпехтово. Теорема доказана.

Модуль (A, U) будем называть конечным модулем, если A — конечная абелева группа и U — конечное кольцо.

Модуль называется локально-конечным, если все его конечно-порожденные подмодули конечны.

Лемма 1.2. Модуль (A, U) тогда и только тогда локально-конечен, когда A — локально-конечная абелева группа и U — локально-конечное кольцо.

Многообразие категории MOD будем называть локально-конечным, если все его элементы являются локально-конечными модулями.

Модуль (A, U) будем называть критическим модулем, если он конечен и не лежит в многообразии, порожденном своими собственными подмодулями и собственными гомоморфными образами.

Многообразие категории MOD будем называть кроссовым, если оно локально-конечно, конечнобазлируемо и в нем существует только конечное число неизоморфных критических модулей.

Аналогично тому, как это делается в работе (1) для случая ассоциативных колец, можно доказать следующие предложения:

Предложение 1.1. Каждое кроссово многообразие категории MOD шпехтово. Подмногообразие кроссова многообразия кроссово.

Предложение 1.2. Локально-конечное многообразие категории MOD тогда и только тогда имеет только конечное число подмногообразий, когда оно имеет только конечное число неизоморфных критических модулей.

Предложение 1.3. Каждое локально-конечное многообразие категории MOD порождается своими критическими модулями.

Теорема 1.2. Многообразие $N(n, T, T')$ категории MOD тогда и только тогда кроссово, когда $n \neq 0$ и T —кроссово многообразие категории As .

Доказательство. Если многообразие $N(n, T, T')$ —кроссово, то его подмногообразия $N(n, T(1), T(1))$ и $N(1, T, T(1))$ также кроссовы.

Обратно. Пусть $n \neq 0$ и T —кроссово многообразие. С помощью леммы 1.2 легко проверить, что $N(n, T, T')$ —локально-конечное многообразие. Далее, так как T —кроссово, следовательно шпехтово многообразие категории As , то в силу теоремы 1.1, $N(n, T, T')$ —конечнобазлируемое многообразие.

Многообразие T —кроссово, следовательно, в силу теоремы 2.3 работы (3), оно имеет только конечное число подмногообразий. То же самое можно сказать и о подмногообразии T' многообразия T . Из леммы 1.1 следует, что многообразие $N(n, T, T')$ имеет только конечное число подмногообразий. Значит, в силу предложения 1.2, многообразие $N(n, T, T')$ имеет только конечное число неизоморфных критических модулей. Теорема доказана.

Используя лемму 1.1, теорему 1.2 и теоремы 2.3 и 2.4 работы (3), можно доказать следующие две теоремы:

Теорема 1.3 Многообразие категории MOD тогда и только тогда кроссово, когда оно содержит только конечное число подмногообразий.

Теорема 1.4. Многообразие категории MOD тогда и только тогда кроссово, когда решетка его подмногообразий удовлетворяет условию максимальности.

Теорема 1.5. Многообразие категории MOD тогда и только тогда кроссово, когда оно порождается одним конечным модулем.

Доказательство. Пусть $\text{Var}(A, U) = N(n, T, T')$ —многообразие категории MOD , порожденное конечным модулем (A, U) . Известно (2), что $\text{Var}(A, U) = QSC(A, U)$, где C —оператор взятия всех прямых произведений, S —оператор взятия всех подмодулей, Q —оператор взятия всех гомоморфных образов и QSC означает, что сначала применяем оператор C , затем S , а потом Q . Очевидно, что $\text{Var}(O, U) = N(1, T, T(1))$, где $T = \text{Var}(U)$ —многообразие категории As , порожденное кольцом U . Так как модуль (O, U) как подмодуль модуля (A, U) принадлежит многообразию $\text{Var}(A, U)$, то $\text{Var}(O, U) \subseteq \text{Var}(A, U)$. Значит, $\hat{T} \subseteq T$. Обратно, пусть кольцо $W \in T$. Тогда модуль $(O, W) \in N(n, T, T') = \text{Var}(A, U) = QSC(A, U)$, следовательно, модуль $(O, W) \in QSC(O, U) = \text{Var}(O, U)$. Значит, кольцо $W \in \hat{T}$, поэтому $T = \hat{T} = \text{Var}(U)$. Из теоремы 2.5 работы (3) следует, что $\text{Var}(U)$ —кроссово многообразие категории As . Кроме того, $n \neq 0$, так как из того, что A —конечная абелева группа, следует, что существует такое наименьшее натуральное число n , что $na = 0$, для любого $a \in A$.

Обратно. Каждое кроссово многообразие порождается своими критическими модулями. Значит, оно порождается прямым произведением своих критических модулей, то есть одним конечным модулем. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2, теоремы 3.1 работы (1) и теоремы 2.3 работы (1) следует

Теорема 1.6. *Произведение двух кроссовых многообразий категории MOD является кроссовым многообразием этой категории.*

Многообразие называется почти кроссовым, если оно не является кроссовым, но каждое его собственное подмногообразие кроссово.

Теорема 1.7. *Многообразие $N(n, T, T')$ тогда и только тогда почти кроссово, когда или $n=0$ и $T=T'=T(1)$, или же $n=1$, следовательно $T'=T(1)$ и T —почти кроссово многообразие категории As.*

Категория MOD не является абелевой категорией, поэтому понятие подкатегории локализации используется в том виде, как оно было определено в работе (5). Стюарт (6) доказал, что в категории As нет нетривиальных подкатегорий локализаций в смысле Е. Г. Шульгейфера.

Теорема 1.8. *В категории MOD имеется лишь одна нетривиальная подкатегория локализации, состоящая из всех модулей вида $(A, 0)$.*

Радикал R , в смысле А. Г. Куроша (7), категории ассоциативных колец называется строгим радикалом, если для любого ассоциативного кольца U любое R -подкольцо кольца U содержится в R -радикале $R(U)$.

Пользуясь теоремой 2.1 работы (6), можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.9. *Совокупность всех строгих радикалов категории ассоциативных колец не является множеством.*

Следствие. *Совокупность всех строгих радикалов категории MOD не является множеством.*

Автор благодарен М. Ш. Цаленко за руководство работой.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Կ. ԷՄԻՆ

Վերջավոր բազմությունից բաղաձևություններ և լոկալիզացիաները
բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում

Դիտարկվում է MOD կատեգորիան, որի օբյեկտները, բոլոր (A, U) զույգերն են (U —ն ասոցիատիվ օղակ է, A —ն աջ U —մոդուլ), իսկ մորֆիզմները, բոլոր ախպիսի (φ_A, φ_U) հոմոմորֆիզմների զույգերն են, որ $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$, $a \in A$, $u \in U$.

Նկարագրված են այդ կատեգորիայի կրոսյան, շպեխտյան և համարյա կրոսյան բազմաձևությունները: Որպեսզի բազմաձևությունը լինի կրոսյան, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա ծնված լինի մեկ հատ վերջավոր մոդուլից: Ապացուցված է, որ MOD կատեգորիայում գոյություն ունի միայն մեկ ոչ տրիվիալ լոկալիզացիայի ենթակատեգորիա: Այն բազմաձևացած է բոլոր (A, O) տեսքի մոդուլներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ր Յ ՈՒ Ն

- ¹ Г. Г. Эмин, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., IX, № 3, 212—235 (1974). ² Б. И. Плоткин, Латв. матем. ежегодник, 10, 75—132 (1972). ³ И. В. Львов, Алгебра и логика, 12, № 3, 269—297 (1973). ⁴ И. В. Львов, Алгебра и логика, 12, № 6, 667—688 (1973). ⁵ Е. Г. Шультгейфер, Труды ММО, 19, 271—301 (1968). ⁶ Farick N. Stewart, Proc. Amer. Math. Soc., 39, № 2, 273—278 (1973). ⁷ А. Г. Курош, Матем. сб., 33, № 1, 13—26 (1953).

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Э. П. Меликсетян

**Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем
дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми
переменными**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 7/II 1979)

Пусть D односвязная область, ограниченная аналитической кривой Γ . В работе рассматривается следующая задача.

Задача Дирихле. Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение слабо связанной эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$L(U) \equiv AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = 0, \quad (1)$$

непрерывное в замкнутой области $D + \Gamma$ и удовлетворяющее граничному условию

$$U(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y), \quad (2)$$

где $A, B, C, a(x, y), b(x, y)$ и $c(x, y)$ вещественные квадратные матрицы n -го порядка, $f(x, y) = [f_1(x, y), \dots, f_n(x, y)]$, заданная на Γ вещественная вектор-функция, а $U(x, y) = [U_1(x, y), \dots, U_n(x, y)]$ — искомое решение.

Предполагается, что A, B и C — постоянные матрицы, $a(x, y) \in C_0^1(D + \Gamma)$, $b(x, y) \in C_0^1(D + \Gamma)$, $c(x, y) \in C_0(D + \Gamma)$, а вектор-функция $f(x, y) \in C(\Gamma)$.

Система (1) называется слабо связанной, если система

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0 \quad (3)$$

является слабо связанной.

Понятие слабой связанности системы (3) дано в монографии А. В. Бицадзе ⁽¹⁾.

В случае, когда $f(x, y) \in C_0^1(\Gamma)$, а решение $U(x, y)$ ищется в классе $C_0^1(D + \Gamma)$, задача (1) — (2) исследована в монографии ⁽¹⁾.

Наряду с задачей (1) — (2) рассмотрим также сопряженную однопородную задачу Дирихле.

Сопряженная задача Дирихле. Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$L^*(V) \equiv V_{xx}A + V_{xy}B + V_{yy}C - (V \cdot a(x, y))_x - (V \cdot b(x, y))_y + V \cdot c(x, y) = 0, \quad (4)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$V(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

где $V(x, y) = (V_1(x, y), \dots, V_n(x, y)) \in C^1(D + \Gamma)$.

В настоящей работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Числа линейно независимых решений однородной задачи (1)–(2) и (4)–(5) конечны и равны.

Теорема 2. Для разрешимости задачи (1)–(2) необходимо и достаточно, чтобы $f(x, y)$ удовлетворяло следующим условиям

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \hat{N}} [A \cos^2(\hat{N}, x) + B \cos(\hat{N}, x) \cdot \cos(\hat{N}, y) + C \cos^2(\hat{N}, y)] f(x, y) ds = 0, \quad (6)$$

где $\varphi_j(x, y)$, $(j = 1, \dots, m)$ линейно независимые решения задачи (4)–(5), а $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \hat{N}}$ производные по нормали.

Теорема 3. Если выполнены условия (6), то частное решение задачи (1)–(2) дается формулой

$$U(x, y) = \int_{\Gamma} K(z, t) f(t) dt, \quad z = x + iy, \quad t = \xi + i\eta, \quad (7)$$

где $K(z, t)$ – некоторая квадратная матрица порядка n , причем $U(x, y)$ и элементы k_{ij} матрицы $K(z, t)$ удовлетворяют оценкам

$$|U(x, y)| = \left| \int_{\Gamma} K(z, t) f(t) dt \right| \leq c_0 \max_{t \in \Gamma} |f(t)| \quad (8)$$

и

$$|k_{ij}(z, t)| \leq \frac{c_1}{|z - t|}, \quad (9)$$

В случае, когда $f(x, y) \in C^1_*(\Gamma)$ и решение задачи (1)–(2), $U(x, y)$ ищется в классе $C^1_*(D + \Gamma)$, теоремы 1 и 2 получены в работах (1) и (2). В этих работах задача (1)–(2) приведена к сингулярному интегральному уравнению нормального типа в классах Гёльдера.

В наших предположениях не удастся задачу (1)–(2) непосредственно привести к сингулярным интегральным уравнениям. Исследования проводятся по следующей схеме.

Пусть $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$. В предположении, когда $f(x, y) \in C^2(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (6) по методам (1) и (2), строится некоторое частное решение, которое удовлетворяет оценке

(8). В дальнейшем, используя оценку (8), доказывается, что условие (6) является необходимым и достаточным для разрешимости задачи (1)–(2), при этом построенное решение является частным решением и в том случае, когда $f(x, y) \in C(\Gamma)$. Общий случай доказательства теорем (1)–(3) приводится к этому случаю следующим образом.

Обозначим через $L_0(V)$ и $L_1(V)$ операторы

$$L_0(V) \equiv AV_{xx} + BV_{xy} + CV_{yy}, \quad (10)$$

$$L_1(V) \equiv a(x, y)V_x + b(x, y)V_y + c(x, y)V, \quad (11)$$

где $V(x, y) = [v_1(x, y), \dots, v_n(x, y)]$.

Ясно, что систему (1) можно написать в виде

$$L_0(U) + L_1(U) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим уравнение

$$L_0(W(x, y)) = g(x, y), \quad (13)$$

где $g(x, y)$ непрерывна в $D + \Gamma$ и удовлетворяет условию Гельдера в любой подобласти D_0 области D , а $W(x, y) = [W_1(x, y), \dots, W_n(x, y)]$ — искомое решение.

Пусть $\varphi(x, y)$ квадратная матрица n -го порядка, являющаяся фундаментальным решением системы (13). Тогда частное решение системы (13) дается формулой (см. (2))

$$W(x, y) = \iint_D \varphi(x - \xi, y - \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (14)$$

В классе $C^2(D) \cap C(D + \Gamma)$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} M(U) \equiv \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi(x - \xi, y - \eta) a(\xi, \eta)) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\varphi(x - \xi, y - \eta) b(\xi, \eta)) - \right. \\ \left. - \varphi(x - \xi, y - \eta) c(\xi, \eta) \right] U(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} &= \iint_D \varphi(x - \xi, y - \eta) \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) U(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta = \\ &= - \int_{\Gamma} \varphi(x - \xi, y - \eta) [a(\xi, \eta) \cos(\hat{N}, \hat{\xi}) + b(\xi, \eta) \cos(\hat{N}, \hat{\eta})] U(\xi, \eta) ds + M(U), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\hat{N}$ — внешняя нормаль к границе Γ в точке интегрирования (ξ, η) .

Ясно, что контурный интеграл в правой части (16) в области D удовлетворяет уравнению $L_0(V) = 0$, а левая часть, согласно формуле (14), удовлетворяет уравнению

$$L_0(V) = g(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (17)$$

где

$$g(x, y) = -a(x, y)U_x - b(x, y)U_y - c(x, y)U(x, y) = -L_1(U). \quad (18)$$

Следовательно, применяя к обеим частям (16) оператор L_0 , получим

$$-L_1(U(x, y)) = L_0(M(U)), \quad (x, y) \in D. \quad (19)$$

Согласно соотношению (19) систему (12) (т. е. систему (1)) можно написать в виде

$$L_0(U - M(U)) = 0. \quad (20)$$

Отсюда получим

$$U - M(U) = V(x, y), \quad (21)$$

где $V(x, y) = [v_1(x, y), \dots, v_n(x, y)]$ является решением однородной системы

$$AV_{xx} + BV_{xy} + GV_{yy} = 0. \quad (22)$$

Так как $U(x, y)$ принадлежит классу $C^2(D) \cap C(D + \Gamma)$, то из (21) следует, что $V(x, y)$ также принадлежит этому классу.

Учитывая равенство (21), граничное условие (2) можно написать в виде

$$V(x, y) = f(x, y) - M(U(x, y)) \text{ при } (x, y) \in \Gamma. \quad (23)$$

Так как $f(x, y) \in C(\Gamma)$ и $U(x, y) \in C^2(D) \cap C(D + \Gamma)$, то правая часть (23) принадлежит классу $C(\Gamma)$. Решим задачу (22) — (23) относительно вектор-функции $V(x, y)$. Используя теоремы 2 и 3 при $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$, имеем, что задача (22) — (23) относительно $V(x, y)$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} [f(x, y) - M(U(x, y))] \psi_j(x, y) ds = 0, \quad (j = 1, \dots, m), \quad (24)$$

где $\psi_j(x, y)$ — некоторые n -мерные вектор-функции из класса $C(\Gamma)$. Если выполнены условия (24), то решение задачи (22) — (23) дается формулой

$$V(x, y) = \int_{\Gamma} K(z, \zeta) (f(\zeta) - M(U)) ds + \sum_{j=1}^m c_j v_j(x, y), \quad (25)$$

где $K(z, \zeta)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая квадратная матрица n -го порядка при $(x, y) \in D$ и $\zeta \in \Gamma$: $v_1, \dots, v_m$ линейно независимые решения однородной задачи $L_0(V) = 0$ в D , $V(x, y)|_{\Gamma} = 0$, а $c_1, \dots, c_m$ произвольные действительные постоянные. Подставляя значение $V(x, y)$ из (25) в (21), получим

$$U(x, y) = M(U) - \int_{\Gamma} K(z, \zeta) M(U) ds + \int_{\Gamma} K(z, \zeta) f(\zeta) ds + \sum_{j=1}^m c_j v_j(x, y) \quad (x, y) \in D. \quad (26)$$

Из (15) и (9) следует, что уравнение (26) можно написать в виде

$$U(x, y) = \int_D \int K_0(z, \zeta) U(\zeta) d\zeta d\eta + \int_{\Gamma} K(z, \zeta) f(\zeta) ds + \sum_{j=1}^m c_j v_j(x, y), \quad (27)$$

где $K_0(z, \zeta)$ некоторая квадратная матрица n -го порядка, элементы которой, дважды непрерывно дифференцируемые по z , при $z \neq \zeta$ и удовлетворяют оценке (9).

Ясно, что задача (1)–(2) эквивалентна уравнению (27) с условиями (24). Легко показать, что любое решение уравнения (27) в классе $C(D+\Gamma)$ внутри области D дважды дифференцируемо, поэтому уравнение (27) можно решить в классе $C(D+\Gamma)$. Уравнение (27) относительно вектор-функции $U(x, y)$ в классе $C(D+\Gamma)$ является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Решая уравнение Фредгольма (27) с условиями (24), тем самым получим решение задачи (1)–(2) и утверждение теоремы (1)–(3).

В заключение выражаю глубокую признательность моему научному руководителю, Н. Е. Товмасыну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Է. Պ. ՈՆԼԻՔՈՆԻՅԱՆ.

Դիֆուզիայի խնդիրը բույլ կապակցված, երկրորդ կարգի երկու անկախ փոփոխականներով էլիպտիկ դիֆերենցիալ հսկայապարամետրի համակարգի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը. գտնել միակապ D տիրույթում, որը սահմանափակված է Γ անալիտիկ կորով $L(U) \equiv AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U(x, y) = 0$ էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի $U(x, y)$ լուծումը, որը բավարարում է $U(x, y)/r = f(x, y)$ եզրային պայմանին, որտեղ A, B, C — հաստատուն, իսկ $a(x, y), b(x, y)$ և $c(x, y)$ n -րդ կարգի քառակուսի մատրիցներ են, ընդ որում՝ $a(x, y), b(x, y) \in C^1_+(D+\Gamma), c(x, y) \in C_0(D+\Gamma), f(x, y) \in C(\Gamma), U(x, y) \in C^2(D) \cap C(D+\Gamma)$:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ ՈՒ Ն

- ¹ А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Изд. «Наука», М., 1966. ² Н. Е. Товмасын, Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, не удовлетворяющих условию Я. Б. Лопатинского, С. М. Ш., т. VII, № 4 (1966).

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

О сходимости двойных рядов в метрике $L^p[0,1] \times [0,1]$, $0 < p < 1$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 8/II 1979)

1. В 1922 г. А. Н. Колмогоровым ⁽¹⁾ было доказано существование суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции, ряд Фурье которой по тригонометрической системе расходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Вместе с тем имеет место следующая

Теорема А (Д. Е. Меньшов ⁽²⁾). Пусть $f(x)$ — любая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция и Q — любое совершенное нигде не плотное множество на $[0, 2\pi]$. Тогда можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, что

$$g(x) = f(x) \text{ на } Q$$

и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.

Далее, Марцинкевич ⁽³⁾, стр. 358–364) доказал, что существуют функция $f_0(x) \in L^p[0, \pi]$, для всех p , $1 \leq p < 6/5$ и перестановка натуральных чисел $\{\nu(k)\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что любая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f_0(x)$, по системе $\{\cos \nu(k)x\}_{k=1}^{\infty}$ расходится почти всюду на $[0, \pi]$.

В связи с этим естественно поставить следующий вопрос: возможно ли любую суммируемую функцию изменить вне заданного нигде не плотного множества Q так, чтобы некоторая подпоследовательность частичных сумм, ряда Фурье вновь полученной функции $F(x)$ по системе $\{\cos \nu(k)x\}_{k=1}^{\infty}$ сходилась почти всюду на $[0, \pi]$? Положительный ответ на этот вопрос получается из следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная в $L^2[0,1]$, ортонормированная система функций, каждая из которых может иметь лишь конечное число точек разрыва. Тогда для любого совершенного нигде не плотного множества Q и любой суммируемой функции $f(x)$, существует суммируемая функция $F(x)$, такая, что $F(x) =$

$=f(x)$ на Q и некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье функции $F(x)$, по системе $|\varphi_n(x)|_{n=1}^{\infty}$ сходилась к ней почти всюду и в метрике $L^1[0, 1]$.

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть функции $f(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)$ определены на отрезке Δ , причем каждая из них имеет лишь конечное число точек разрыва.

Тогда для любого совершенного нигде не плотного множества $Q \subset \Delta$ существует ограниченная функция $F(x)$ такая, что

$$1) F(x) = f(x) \text{ на } Q,$$

$$2) \int F(x) \cdot \varphi_k(x) dx = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots, N,$$

$$3) \int |F(x)| dx \leq 3 \int |f(x)| dx.$$

II. Как известно, до сих пор остается нерешенной следующая задача: сходится ли в метрике L^p , $0 < p < 1$, или хотя бы по мере, двойной ряд Фурье любой суммируемой функции ((⁴), стр. 34).

В связи с этим естественно рассматривать вопрос о сходимости двойных рядов Фурье суммируемых функций $f(x, y)$ в зависимости от изменения их значений вне заданного совершенного нигде не плотного множества. Неизвестно, верен ли аналог теоремы А для двойных рядов сходимости почти всюду (по Прингсхейму по сферам или же по квадратам).

Тем не менее, рассматривая аналогичный вопрос при требовании сходимости в метрике L^p , $0 < p < 1$, двойного ряда, можно установить следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть $Q_1, Q_2 \subset [0, 2\pi]$, $i = 1, 2$, совершенные нигде не плотные множества.

Тогда для любой суммируемой на $T = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ функции $f(x, y)$ можно определить суммируемую на T функцию $F(x, y)$ такую, что

$$F(x, y) = f(x, y) \text{ на } Q = Q_1 \times Q_2$$

двойной ряд Фурье функции $F(x, y)$ сходится к ней по Прингсхейму в метрике $L^p[T]$, $0 < p < 1$, т. е.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_{nm}[F] - F(x, y)\|_p = 0, \quad 0 < p < 1,$$

где $S_{nm}[F]$ прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье функции $F(x, y)$.

Теорема 3. Пусть $f(x, y)$ — любая суммируемая функция и $Q \subset T = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ — любое совершенное нигде не плотное множество. Тогда можно определить суммируемую функцию $F(x, y)$ такую, что $F(x, y) = f(x, y)$ на Q и двойной ряд Фурье функции $F(x, y)$ сходится к ней по квадратам в метрике $L^p[T]$, $0 < p < 1$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| S_{nn} [F] - F(x, y) \|_p = 0, \quad 0 < p < 1,$$

где $S_{nn} [F]$ — квадратичные частные суммы двойного ряда Фурье функции $F(x, y)$.

При доказательстве теоремы 2 используется лемма 1. Основным средством для доказательства теоремы 3 является следующая

Лемма 2. Пусть даны квадрат $\Delta = [a, b] \times [c, d] \subset T$, совершенное нигде не плотное множество $Q \subset \Delta$, натуральное число N , действительное число $\gamma \neq 0$ и положительное число $\varepsilon > 0$.

Тогда существует ограниченная функция $\varphi(x, y)$ такая, что

$$1) \varphi(x, y) = \begin{cases} \gamma & \text{при } (x, y) \in Q \\ 0 & \text{при } (x, y) \in \Delta \end{cases}$$

$$2) \iint_{\Delta} |\varphi(x, y)| dx dy \leq 2 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|$$

$$3) |S_{nm}[\varphi]| \leq \varepsilon; \quad n, m \leq N; \quad (x, y) \in T$$

$$4) \iint |S_{nm}[\varphi]|^p dx dy \leq A(p) \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|, \quad 0 < p < 1, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

где $A(p)$ — константа, зависящая только от p .

Хотя неизвестно, сходится ли двойной ряд Фурье суммируемой функции в метрике L^p , $0 < p < 1$, но тем не менее оказывается, что функции пространства $L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $0 < p < 1$ представляются двойными тригонометрическими рядами.

Более того справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^q[0, 1]$, $q \geq 1$. Тогда для любой функции $f(x, y) \in L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $0 < p < 1$ существует ряд

$$\sum_{k, l=1}^{\infty} a_{kl} \varphi_k(x) \cdot \varphi_l(y),$$

который сходится к $f(x, y)$ в метрике $L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $0 < p < 1$ по Прингсхейму, т. е.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, l=1}^{nm} a_{kl} \varphi_k(x) \varphi_l(y) - f(x, y) \right|^p dx dy = 0, \quad 0 < p < 1.$$

Эта теорема является двумерным аналогом теоремы А. А. Талаляна⁽³⁾.

III. В работе⁽⁴⁾ А. А. Талаляном была установлена следующая

Теорема В (А. А. Талалян). Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G \subset [0, 1]$ и образующих нормированный базис в пространстве $L^p(G)$, $p > 1$. Тогда для любой измеримой функции $F(x)$, определенной на множестве G , существует ряд

$$\sum a_n \varphi_n(x) \quad (a_n \text{ — действительные числа}),$$

обладающий следующими свойствами:

1) если обозначить через A множество тех точек из G , где $F(x)$ конечна, то на множестве A ряд (1) асимптотически сходится к $F(x)$ в метрике L^p , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \subseteq A$ такое, что $\text{mes} A_\varepsilon > \text{mes} A - \varepsilon$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) - f(x) \right|^p dx = 0$,

а на множестве $G \setminus A$ этот ряд сходится к $F(x)$ по мере:

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Г. Гофман и Р. Зинг (7), опираясь на лемму 3 работы (6) А. А. Талаляна, доказали следующую теорему.

Теорема С. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — базис пространства $L^p[0, 1]$, для всех $p, p > 1$, $\inf \|\varphi_k\|_p > 0$.

Тогда для любой измеримой функции $F(x, y)$, определенной на $[0, 1] \times [0, 1]$, существует ряд

$$\sum_{k,l=1}^\infty a_{kl} \varphi_k(x) \varphi_l(y), \quad (2)$$

обладающий следующими свойствами:

1) если обозначить через E множество тех точек из $T = [0, 1] \times [0, 1]$, где $F(x, y)$ конечна, то на множестве E ряд (2) асимптотически сходится к $F(x, y)$ в метрике $L^1(T)$ по Прингсхейму, а на множестве $T \setminus E$ этот ряд сходится к $F(x, y)$ по мере

$$2) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} a_{nm} = 0.$$

Эта теорема не является полным двумерным аналогом теоремы В, так как в ее формулировке асимптотическая сходимость имеет место только в метрике L^1 .

Основываясь на лемму 1 работы (6) А. А. Талаляна, можно доказать следующую теорему, являющуюся усилением теоремы С.

Теорема 5. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ есть нормированный базис пространства $L^p(G)$, $p > 1$, $G \subseteq [0, 1]$, $\text{mes} G > 0$.

Тогда для любой измеримой функции $F(x, y)$, определенной на множестве $G \times G$, существует ряд

$$\sum_{k,l=1}^\infty C_{kl} \varphi_k(x) \varphi_l(y) \quad (3)$$

обладающий следующими свойствами:

1) если обозначить через E множество тех точек из $H = G \times G$, где $F(x, y)$ конечна, то на E ряд (3) по Прингсхейму асимптотически сходится к $F(x, y)$ в метрике $L^p(H)$, $p > 1$, а на $H \setminus E$ этот ряд сходится по мере

$$2) \quad \lim_{k, l \rightarrow \infty} C_{kl} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Теоремы 2 и 3 верны для n -кратных тригонометрических рядов, а также для кратных рядов по системе Уолша.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Կրկնակի շարքերի $L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $0 < p < 1$, մետրիկայով
գուգամիտության մասին

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 1. Եթե $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ -ը, $L^2[0, 1]$ -ում լրիվ, բացի զուգե վերջավոր քվով իզման կետեր ունեցող, օրթոնորմալ ֆունկցիաների համակորգ է, ապա ցանկացած ինտեգրելի ֆունկցիա տրված ամենուրեք նոսր բազմությունից դուրս կարելի է փոխել այնպես, որ նոր ստացված ֆունկցիայի մուրյեի շարքի (ըստ $\{\varphi_n(x)\}$ համակարգի) մասնակի գումարների որևէ ենթահաջորդականություն $L^1[0, 1]$ մետրիկայով գուգամիտի իրեն:

Թեորեմ 2. Եթե $Q_i \subset [0, 2\pi]$ ($i=1, 2$) և $Q \subset T = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ ամենուրեք նոսր կատարյալ բազմություններ են, ապա ցանկացած $f(x, y)$ ինտեգրելի ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել $F(x, y)$ և $q(x, y)$ ինտեգրելի ֆունկցիաներ, այնպես որ՝

1. $F(x, y) = f(x, y)$, երբ $(x, y) \in T - Q_1 \times Q_2$; $q(x, y) = f(x, y)$, երբ $(x, y) \in Q$.

2. $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_T |S_{nm}|F| - F(x, y)|^p dx dy = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T |S_n|q| - q(x, y)|^p dx dy = 0$, $0 < p < 1$.

Թեորեմ 3. Եթե $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$: $L^p[0, 1]$, $q > 1$ տարածությունում բազիս է, ապա՝

1. $\{\varphi_k(x) \cdot \varphi_l(y)\}$ ($k, l = 1, 2, \dots$) կրկնակի համակարգը հանդիսանում է $L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $0 < p < 1$ տարածության համար ներկայացման համակարգ:

2. Համարյա ամենուրեք վերջավոր ցանկացած չափելի $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\sum a_{kl} \varphi_k(x) \varphi_l(y)$ շարքը, որը $L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $p > 1$ մետրիկայով ասիմպտոտիկ գուգամիտում է իրեն:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՇԱՆՔՆԵՐ

- ¹ Н. К. Барн, Тригонометрические ряды, М., 1961 ² Д. М. Меньшов, О рядах Фурье от суммируемых функций, ТММ, I, 5—58 (1952) ³ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, 1958 ⁴ Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, Е. М. Никитин, Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, УМН, т. XXXI, вып. 6(192) (1976) ⁵ А. А. Талалян, Представление функций классов $L^p[0, 1]$, $0 < p < 1$ ортогональными рядами, Acta Mathematica Scientiarum Hungarica, Tomus 21 (1—2) 1—9, 1970 ⁶ А. А. Талалян, Представление измеримых функций рядами, УМН, т. XV, вып. 5(95), 1960 ⁷ С. Coffman, R. Zink, On the Representation of Measurable Functions by Multiple Series Associated With a Certain Class of Schauder Bases, Proc. London Math. Soc., 35, No. 3, 527—540, 1977.

УДК 517

МАТЕМАТИКА

С. Г. Симонян, Л. А. Багдасарян

О лакунах в спектре одномерного периодического оператора Дирака с потенциалом конечной гладкости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 13/III 1979)

Рассмотрим одномерную систему Дирака канонического вида:

$$J \frac{dy}{dt} + A(t)y = \lambda y, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (1)$$

где λ — спектральный параметр,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ q(t) & -p(t) \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что 1) матрица — функция $A(t)$ вещественна и периодична с периодом a ($a > 0$): $A(t) = A(t + a) \forall t \in (-\infty; +\infty)$; 2) $A^{(n-1)}(t)$ ($\forall n \geq 1$, n — фиксированное целое число) абсолютно непрерывна на отрезке $[0; a]$.

В работах (1,2) установлено, что непрерывная часть спектра одномерного периодического оператора Дирака L , порожденного дифференциальным выражением $l(y) = \left(J \frac{d}{dt} + A(t) \right) y$ в пространстве

$H = L_2(-\infty; +\infty) \oplus L_2(-\infty; +\infty)$ состоит из зон устойчивости с присоединенными к ним граничными точками зон неустойчивости. Дискретная часть спектра оператора L есть пустое множество, так что внутренние точки зон неустойчивости являются точками регулярности оператора L . Тем самым установлено, что спектр оператора L непрерывен с лакунами (пропусками). Лакуны в спектре образуют счетное число интервалов, крайние точки которых являются нулями целых функций $F(\lambda) - 1$. Напомним, что если фундаментальная матрица $Y(t, \lambda)$ решений системы (1) удовлетворяет условию $Y(0, \lambda) = E$ (E — единичная матрица), то выражение $F^2(\lambda) - 1$ есть дискриминант квадратного уравнения $\det(Y(a, \lambda) - \rho E) = 0$, при этом $F(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{sp} Y(a, \lambda)$. Обозначим через Δ_k ширину k -ой лакуны.

Цель настоящей работы получить асимптотическую формулу для $\Delta_k (k \rightarrow \infty)$ при вышеуказанных условиях 1) и 2).

Для скалярного уравнения Хилла и для системы Хилла аналогичные задачи рассмотрены в работах (1-12).

Неособенным линейным преобразованием $y = \Pi(t, \lambda) x$, где

$$\Pi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u(t, \lambda) & \bar{u}(t, \lambda) \end{pmatrix},$$

$$u(t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} u_n(t), \quad u_0(t) = i \quad (i = \sqrt{-1}),$$

$$u_1(t) = q(t) - ip(t), u_{n+1}(t) = \frac{1}{2i} \left[\frac{d}{dt} u_n(t) + 2q(t)u_n(t) - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^n u_j(t) u_{n+1-j}(t) - p(t) \sum_{j=0}^n u_j(t) u_{n-j}(t) \right],$$

система (1) приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda(t, \lambda) x + \lambda^{-n} R(t, \lambda) x, \quad (2)$$

где

$$\Lambda(t, \lambda) = \begin{pmatrix} w(t, \lambda) & 0 \\ 0 & \bar{w}(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$w(t, \lambda) = -i [\lambda + p(t)] \ln u(t, \lambda) - \\ - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\ln \ln u(t, \lambda)),$$

$$R(t, \lambda) = \begin{pmatrix} i \ln r(t, \lambda) & -\bar{r}(t, \lambda) \\ -r(t, \lambda) & -i \ln r(t, \lambda) \end{pmatrix},$$

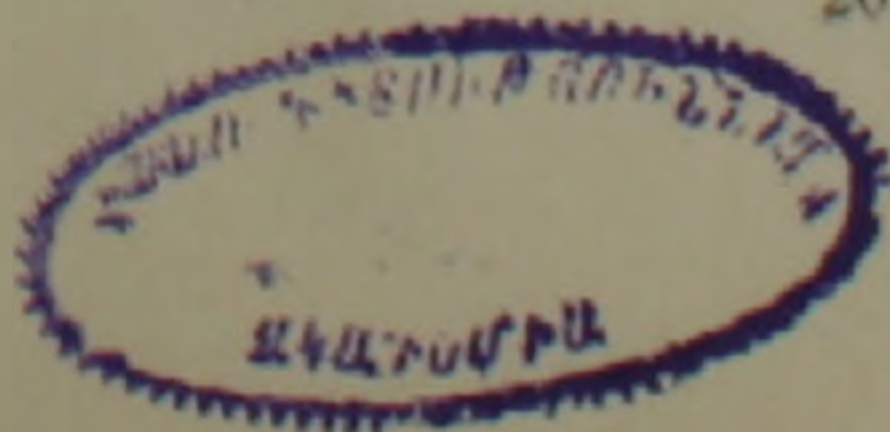
$$r(t, \lambda) = (-2i \ln u(t, \lambda))^{-1} \left[\frac{d}{dt} u_n(t) + 2q(t)u_n(t) - \right. \\ \left. - p(t) \sum_{j=0}^n u_j(t) u_{n-j}(t) - \sum_{j=1}^n u_j(t) u_{n+1-j}(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^n \lambda^{-j} p(t) \sum_{j=0}^n u_j(t) u_{n+1-j}(t) - \sum_{j=2}^n \lambda^{-j+1} \sum_{j=0}^n u_j(t) u_{n+1-j}(t) \right]. \quad (4)$$

Указанное преобразование имеет смысл при $\lambda > \lambda_0$, где λ_0 — наибольшее из положительных вещественных значений, приобретаемых в интервале $[0; a]$ корнями алгебраического уравнения $\ln u(t, \lambda) = 0$ ($\lambda_0 < \infty$). При $\lambda > \lambda_0$ $\ln u(t, \lambda) \neq 0$ в $[0; a]$. Из (4) нетрудно заметить, что функция $r(t, \lambda)$ может быть представлена в виде ряда $\sum \lambda^{-n} r_n(t)$

при $\lambda > \lambda_0$.

Причем



$$r_0(t) = (2i)^{-1} \left| \frac{d}{dt} u_n(t) + 2q(t) u_n(t) - \right. \\ \left. - p(t) \sum_{j=0}^n u_j(t) - u_{n-1}(t) - \sum_{j=1}^n u_j(t) u_{n+1-j}(t) \right|. \quad (5)$$

В силу условий 2) из (5) следует, что функция $r_0(t)$ суммируема в интервале $[0, a]$.

Далее, построим фундаментальную матрицу $X(t, \lambda)$ системы (2) с начальным условием $X(0, \lambda) = E$ и для матрицы монодромии $X(a, \lambda)$ системы (2) имеем:

$$X(a, \lambda) = \exp \left| \int_0^a \Lambda(t, \lambda) dt \right| \left\{ E + \lambda^{-n} \int_0^a K(t, \lambda) dt + \right. \\ \left. + \lambda^{-2n} \int_0^a K(t, \lambda) dt \int_0^t K(\tau, \lambda) d\tau + \dots \right\},$$

где $\Lambda(t, \lambda)$ есть матрица (3),

$$K(t, \lambda) = \exp \left| - \int_0^t \Lambda(\tau, \lambda) d\tau \right| R(t, \lambda) \exp \left| \int_0^t \Lambda(\tau, \lambda) d\tau \right|.$$

Матрицы $Y(a, \lambda)$ и $X(a, \lambda)$ подобны, следовательно $\text{sp } Y(a, \lambda) = \text{sp } X(a, \lambda)$. Поэтому $F(\lambda) = \frac{1}{2} \text{sp } X(a, \lambda)$. Лакуны определяются из соотношения $|F(\lambda)| \geq 1$. Решив уравнение $|F(\lambda)| = 1$, получаем для краев лакун две последовательности

$$\lambda_k', \lambda_k'' = \frac{\pi k}{a} + \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu k^{-\nu} + \frac{a^n}{\pi^n k^n} \left\{ \int_0^a \left| p(t) \text{Im } u_n(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Im } r_0(t) \right| dt \mp \left| \int_0^a r_0(t) \exp \left(\frac{2\pi k i}{a} t \right) dt \right| \right\} + \\ + O(k^{-n-1}), \quad (6)$$

где коэффициенты c_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n-1$) определяются непосредственно при решении уравнения $|F(\lambda)| = 1$. Ввиду того, что $\Delta_k = \lambda_k'' - \lambda_k'$, из (6) приходим к формуле

$$\Delta_k = \frac{2a^n}{\pi^n k^n} \left| \int_0^a r_0(t) \exp \left(\frac{2\pi k i}{a} t \right) dt \right| + O(k^{-n-1}). \quad (7)$$

В частности, при $n = 1$, т. е. когда матрица-функция $A(t)$ в системе (1) абсолютно непрерывна, в интервале $[0, a]$ имеем

$$\Delta_k = \frac{2a}{\pi k} \left| \int_0^a r_0(t) \exp \left(\frac{2\pi k i}{a} t \right) dt \right| + O(k^{-2}), \quad (k \rightarrow \infty)$$

где

$$r_0(t) = \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} + p(t)q(t) + \frac{i}{2} \left| \frac{dq(t)}{dt} + q^2(t) - p^2(t) \right|.$$

Итак, справедлива следующая

Теорема. Пусть для системы (1) условия 1) и 2) выполнены. Тогда для ширины k -ой лакуны Δ_k спектра оператора одномерной периодической системы Дирака L справедлива асимптотическая формула (7), а для краев лакун — формула (6).

Ленинканский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

Ս. Կ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Լ. Ա. ՌԱՂՊԱՍԱՐՅԱՆ

Ուղորկ և պարբերական պոտենցիալով 'Իրական միաչափ սպեքտրի
սպեկտրի լակունների մասին

'Իրաարկում է իրական պորձակիցներով 'Իրական պարբերական և միա-
չափ համակարգի: Լինթադրվում է, որ համակարգի պոտենցիալ $A(t)$ մատրի-
ցայի $A^{(n-1)}(t)$ ($\forall n \geq 1$, n -ը ֆիքսված ամբողջ թիվ է) ածանցյալը բացարձակ
անընդհատ է $[0; a]$ հատվածում (a -ն պոտենցիալի պարբերությունն է): Լկա-
ցուցվում է, որ քննարկվող սպեքտրի սպեկտրի k -րդ լակունի Δ_k լակուն-
թյան համար ճիշտ է հետևյալ ասիմպտոտիկ գնահատականը ($k \rightarrow \infty$)

$$\Delta_k = 2a \pi^{-n} k^{-n} \left| \int_0^a r_0(t) \exp \left(\frac{2\pi k i}{a} t \right) dt \right| + O(k^{-n-1}),$$

որտեղ $r_0(t)$ ֆունկցիան արտահայտվում է $A(t)$ մատրիցայի էլեմենտներով
և նրանց՝ մինչև n -րդ կարգի հաջորդական ածանցյալներով: Հոգվածում
ստացվել են նաև k -րդ լակունի ծայրակետերի համար ասիմպտոտիկ բաճա-
ծներ (տես սեքստում (6) — բ):

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ч Р К Ч Ц Ы П Р Р Ъ П Р Ъ

¹ Р. Маклеуд (R. Macleod), Some problems in the theory of eigenfunctions, Thesis, Oxford, 1966. ² Х. М. Мкоян, Сборник материалов X конференции ЕрПИ Ленинканского филиала, серия физ-мат наук, 92—102 1976. ³ Н. М. Рапопорт, ДАН СССР, т. 73, № 5, 889—890 (1950). ⁴ Н. Hochstadt, Proc. Amer. Math. Soc., 14, № 6 930—932 (1963). ⁵ Н. Hochstadt, Com. Appl. Math., vol XVII, 251—255, (1964). ⁶ С. Г. Симонян, Дифференц. уравнения, т. XVI, № 7, 1266—1272 (1970). ⁷ С. Г. Симонян, ДАН Арм. ССР, т. LI, №4 (1970). ⁸ С. Г. Симонян, М. Ф. Федорук, Известия АН Арм. ССР, математика, т. XI, №5 (1976). ⁹ В. Ф. Лазуткин, Т. Ф. Панкратов, ДАН СССР, т. 215, № 5 (1974). ¹⁰ Е. И. Динабург, Я. Г. Синай, Функциональный анализ, т. 9, вып. 4 (1975). ¹¹ В. А. Еровенко, Дифференц. уравнения, т. XI, № 10 (1975). ¹² Х. М. Мкоян, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 4 (1975).

УДК 51:330.115

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Бабаджаниян

Совершенное агрегирование систем линейных
балансовых уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 19/VIII 1978)

1. Система балансовых уравнений макроэкономики имеет вид:

$$x = Ax + y, \quad (1.1)$$

где x — вектор валового выпуска продукции, y — вектор конечного выпуска, матрица $A = \{a_{ij}\}_1^n$ неотрицательная, a_{ij} — имеют смысл коэффициентов прямых затрат i -ой продукции, в j -ой отрасли. Предполагается вполне продуктивность матрицы A (1) и выполнение условий

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1 \quad i=1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Агрегирование системы (1.1) состоит, как известно (2-4), в построении аналогичной системы размерности m ($m < n$)

$$\bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \bar{y} \quad (1.3)$$

при помощи агрегирующих матриц C и D порядков $m \times n$ и ранга m , задающих линейные преобразования

$$\bar{x} = Cx, \quad \bar{y} = Dy. \quad (1.4)$$

При фиксированной (пассивной) матрице C , имеющей вид

$$C = C^0 F, \quad (1.5)$$

где $C^0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, а $F = \{f_{ij}\}_1^n$,

условие совместимости системы агрегирования (1.3), (1.4) есть

$$(E_m - \bar{A})C = D(E_n - A). \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует

$$E_m - \bar{A} = D(E_n - A)C^+, \quad (1.7)$$

где C^+ — псевдообратная матрица к C .

Необходимое и достаточное условие разрешимости матричного уравнения (1.6) относительно $E_m - \bar{A}$ имеет вид ⁽³⁾:

$$D(E_n - A)(E_n - C^+C) = 0. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) задает агрегирующую (активную) матрицу D . Такое агрегирование названо биматричным ⁽³⁾.

Определение. Назовем совместное агрегирование совершенным, если одновременно с (1.6) выполняется условие вполне продуктивности матрицы $\bar{A}$. Требуется выполнение условий, аналогичных (1.2)

$$\bar{a}_{pq} \geq 0, \quad \sum_{q=1}^m \bar{a}_{pq} \leq 1, \quad p, q = 1 \dots m. \quad (1.9)$$

Следует отметить, что попытки одноматричного агрегирования ($C=D$) являются примером совершенного агрегирования, но условия Хатанака ⁽⁴⁾ выполняются для очень частного случая матрицы коэффициентов прямых затрат. Известно, что в общем случае «рассчитывать на точное (совместное) решение проблемы агрегирования (одноматричного) не приходится» ⁽⁵⁾.

Цель данной работы — показать, что в биматричном случае существует совершенное агрегирование, и получить конструкцию активной матрицы D .

2. Для упрощения выкладок заметим, что в ⁽³⁾ вводится скелетное разложение матрицы $E_n - C^+C : E_n - C^+C = \omega v$ и матрица $W = (E_n - A)\omega$. Там самым (1.8) становится эквивалентным уравнению

$$DW = 0, \quad (2.1)$$

где W имеет порядок $n \times (n-m)$ и ранг $n-m$, из которого находится матрица D ⁽³⁾. Уравнение (2.1) имеет неотрицательное частное решение, что следует из следующей леммы.

Лемма. Матричное уравнение

$$X(E_n - A)(E_n - C^+C) = 0$$

имеет неотрицательное решение.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать неразрешимость векторного неравенства $(E_n - A)(E_n - C^+C)u > 0$, где u — вектор-столбец. Пусть существует вектор u , удовлетворяющий указан-

ному неравенству, тогда $(E_n - C + C)u$ есть проекция u на ядро матрицы C ⁽³⁾, обозначаемое $N(C) = \{z : Cz = 0\}$. Из того, что матрица C агрегирующая, т. е. содержащая во всех столбцах один положительный элемент, следует, что множество неотрицательных векторов ядра $N(C)$ пусто. Одновременно, $(E_n - C + C)u \geq 0$, так как матрица $E_n - A$ монотонного вида. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть агрегирующая матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1/k & \dots & 1/k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

где $c_{11} = \dots = c_{1k} = 1/k$, $c_{i, i-k+1} = 1$ ($i = 2 \dots m$, $m = n - k + 1$), а остальные элементы матрицы C нулевые. Без ограничения общности здесь принято, что "агрегирующей" является первая строка.

При агрегировании матрицей C вида (2.2) имеет место следующая основная теорема.

Теорема. Если объединяются только несколько отраслей в одну, то при любой матрице коэффициентов прямых затрат существует неотрицательная агрегирующая матрица D^* с условиями

$$\sum_{j=1}^n d_{ij}^* = 1 \quad i = 1 \dots m,$$

обеспечивающая совершенное агрегирование.

Доказательство. Покажем, что при $D^* = SD$, выполняются необходимые и достаточные условия вполне продуктивности матрицы $\bar{A}$ ⁽¹⁾, где $D = \{d_{ij} | (i = 1 \dots m, j = 1 \dots n)$ отмеченное выше решение матричного уравнения (2.1), а S — невырожденная матрица порядка $m \times m$, имеющая вид

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_m & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$s_1 \equiv 1$$

$$s_p = \max_j \left(-\frac{d_{pj}}{d_{1j}} \right) > 0 \quad p = 2 \dots m.$$

Учитывая вид матриц C и C^+ , матрицу W можно представить следующим образом

$$W = \begin{pmatrix} E_{k-1} \\ O_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{k-1}^{k-1} \\ A_m^{k-1} \end{pmatrix} - \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \Sigma \\ -\Sigma^0 \end{pmatrix} \cdot I, \quad (2.4)$$

где A_{k-1}^{k-1} — подматрица матрицы A , лежащая на пересечении первых $k-1$ столбцов и строк, а A_m^{k-1} — первых $k-1$ столбцов и последних m строк; $\Sigma^0 = (\Sigma_{k+1}^0 \dots \Sigma_n^0)^T$, где $\Sigma_i^0 = \sum_{j=1}^k a_{ij}$ ($i=1 \dots n$); $\Sigma = (\Sigma_1' \dots \Sigma_k')^T$,

а $\Sigma_i' = 1 - \Sigma_i^0$ ($i=1 \dots k$); наконец l — вектор-строка, состоящая из единиц. Из соотношения (2.4) замечая, что первые $k-1$ строк линейно независимы, можно выписать матрицу D в следующем блочном виде:

$$D = (-W_m \cdot W_{k-1}^{-1}, E_m), \quad (2.5)$$

где W_{k-1} — матрица, составленная из первых $k-1$ строк, а W_m — из последних m строк матрицы W . Очевидно, что D^* есть неотрицательное решение уравнения (2.1), так как первая строка матрицы D неотрицательна.

Покажем неотрицательность элементов первого столбца матрицы $\bar{A}$, откуда, учитывая очевидную цепочку неравенств

$$\sum_{l=1}^k d_{pl}^* a_{lp+k-1} \leq \sum_{l=1}^k d_{pl}^* \Sigma_l' \leq d_{pp+k-1}^* \Sigma_{p+k-1}^0 < d_{pp+k-1}^* (1 - a_{p+k-1, p+k-1}),$$

$$(p=2 \dots m)$$

будет следовать, что и $\bar{a}_{pp} \geq 0$ ($p=2 \dots m$). Неотрицательность остальных недиагональных элементов матрицы $\bar{A}$ и элемента $\bar{a}_{11}$ будет вытекать из структуры матрицы D^* и уравнения (1.7).

Вводя обозначение $\Sigma' = (\Sigma_1' \dots \Sigma_{k-1}')^T$, элемент $\bar{a}_{p1}$ ($p=2 \dots m$) можно представить

$$\bar{a}_{p1} = s_p w_k W_{k-1}^{-1} \Sigma' - s_p \Sigma_k' + w_{p+k-1} W_{k-1}^{-1} \Sigma' + \Sigma_{p+k-1}^0, \quad (2.6)$$

где w_t — t -ая строка матрицы W ($t=k, p+k-1$).

Пусть

$$s_p = -\frac{d_{p10}}{d_{110}}, \quad d_{p10} < 0,$$

тогда, после подстановки этого выражения в (2.6), покажем неравенства:

$$\bar{a}_{p1} \geq 0 \quad (p=2 \dots m).$$

Обозначая j_0 -ый столбец матрицы $E_{k-1} - A_{k-1}^{k-1}$ через α , а через $\gamma = (\gamma_1 \dots \gamma_{k-1})^T = (E_{k-1} - A_{k-1}^{k-1})^{-1} (a_{1k} \dots a_{k-1,k})^T$ и применяя формулу Шермана-Моррисона, после несложных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} & d_{p10} w_k W_{k-1}^{-1} \Sigma' - d_{p10} \Sigma_k' - d_{110} w_{p+k-1} W_{k-1}^{-1} \Sigma' - d_{110} \Sigma_{p+k-1}^0 \geq \\ & \geq (a_{p+k-1,1} \dots a_{p+k-1,k-1}) \alpha [1 - a_{kk} - (a_{k1} \dots a_{kk-1}) \gamma] + \\ & + (a_{k1} \dots a_{kk-1}) \alpha [a_{p+k-1,k} + (a_{p+k-1,1} \dots a_{p+k-1,k-1}) \gamma]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Так как все элементы правой части (2.7) положительны, а $\gamma_i \leq 1$ ($i=1 \dots k-1$), то правая часть (2.7) неотрицательна. Условие $\sum_{j=1}^n d_{ij} = 1$ ($i=1 \dots m$), а значит и (1.9), следует из того, что общее решение уравнения (2.1) ранга m имеет вид χD , где χ — произвольная невырожденная матрица порядка $m \times m$.

Наконец, для строк матрицы $\bar{A}$ с суммой, равной единице, из (1.7), (2.3) и (2.5) следует, что они содержат хотя бы один, отличный от нуля, элемент левее диагонали. Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичная теорема имеет место для системы линейных балансовых уравнений двойственной системе (1), т. е. с условиями

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1 \quad j=1 \dots n,$$

но с агрегирующей (невзвешенной) матрицей C вида:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_{11} = \dots c_{1k} = 1$, $c_{i, i+k-1} = 1$, ($i=2 \dots m$, $m=n-k+1$), а остальные элементы матрицы C нулевые.

Замечание 2. Нетрудно видеть (¹), что матрица D^* составлена из m (определенных!) квазиединичных крайних векторов конуса неотрицательных решений векторного уравнения $x(E_n - A)(E_n - C^*C) = 0$.

Замечание 3. Матрица X может быть выбрана из условия $Cy = XD^*y$, $y \in R^m$.

Последовательно применяя теоремы, можно утверждать, что совершенное агрегирование систем линейных балансовых уравнений существует и для произвольного средневзвешенного и, соответственно, невзвешенного агрегирования.

Армянский научно-исследовательский институт энергетики

Ա. Ա. ԲԱՐԱՋԱՆՅԱՆ

Գծային բալանսային հավասարումների սխեմաների կատարյալ ագրեգացում

Աղշխատանքում մտցվում է գծային բալանսային հավասարումների սխեմաների կատարյալ ագրեգացման հասկացությունը, ջուլը է տրվում, որ համատեղության պայմանին բավարարող մատրիցան կարելի է գտնել ոչ բացասական մատրիցաների դասից:

Ապացուցվում է երկմատրիցանի կատարյալ ազրեզացման սիստեմի գոյությունը՝ ուղղակի ծախսերի գործակիցների խանկացած մատրիցայի դեպքում: Բերվում է ոչ բացասական ազրեզացնող ակտիվ մատրիցայի կառուցման արդյունավետ ալգորիթմը:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. Г. Охрименко, ДАН СССР, 234, № 1 (1977). ² *Ijiri Jiji*, Econometrica, 36 № 2 (1968). ³ В. П. Вен, А. И. Эрлих, «Известия» АН СССР, Техническая кибернетика, № 5 (1970). ⁴ В. Л. Вен, «Известия» АН СССР, Техническая кибернетика, № 3 (1974). ⁵ А. Азберг, Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание, «Наука», М., 1977. ⁶ В. В. Коссов, Межотраслевые модели (теория и практика использования), «Экономика», М., 1973. ⁷ С. Н. Черников, Линейные неравенства, «Наука», М., 1968.

УДК 62.507

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Ш. Е. Бозоян

Приспособление языка Лукасевича к описанию функциональных схем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/II 1979)

Язык бесскобочной записи формул Лукасевича ⁽¹⁾ можно использовать для описания функциональных схем, не имеющих точек ветвления и обратных связей, так как граф этих схем, а также граф формул, является входящим деревом ⁽²⁾, и поэтому любая такая схема может трактоваться как формула. Наличие точек ветвлений (что характерно для функциональных схем в общем случае) существенно усложняет картину, и указанный язык делается непригодным для описания функциональных схем в общем случае.

В настоящей заметке обобщается язык Лукасевича для случая функциональных схем в общем случае. Вводится понятие записи функциональной схемы (запись представляет собой конечную последовательность символов из некоторого алфавита) и доказывается аналог (обобщение) теоремы Лукасевича. Обобщенный язык может быть применен в области автоматизации проектирования вычислительных устройств. Он может быть основой для создания алгебраической теории функциональных схем.

Пусть имеется некоторое устройство, имеющее n упорядоченных входов и один выход (рис. 1, а). На каждый из входов может подаваться один из двух сигналов, которые обозначим символами 0 и 1 соответственно, и при каждом наборе сигналов на входах на выходе в тот же момент однозначно возникает один из сигналов 0 или 1. Такое устройство назовем функциональным элементом. Таким образом, функциональный элемент реализует некоторую функцию алгебры логики. Функциональный элемент, реализующий функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, обозначим символом $f^{(n)}$. Будем рассматривать также устройства, не имеющие входов и имеющие один или несколько выходов (рис. 1, б, в). Физический смысл этих устройств заключается в том, что они являются генераторами сигналов 0 и 1. В каждый момент времени на выходе (выходах) такого устройства появляется один из сигналов 0 или 1 (при нескольких выходах на всех выходах 0 или на всех выходах 1). Это устройство будем называть элементарной схемой или сложной элементарной схемой в зависимости от того, число выходов 1 или больше. Элементарную схему (сложную элементар-

ную схему), генерирующую сигнал x , обозначим символом x .

В дальнейшем для краткости функциональную схему будем называть просто схемой.

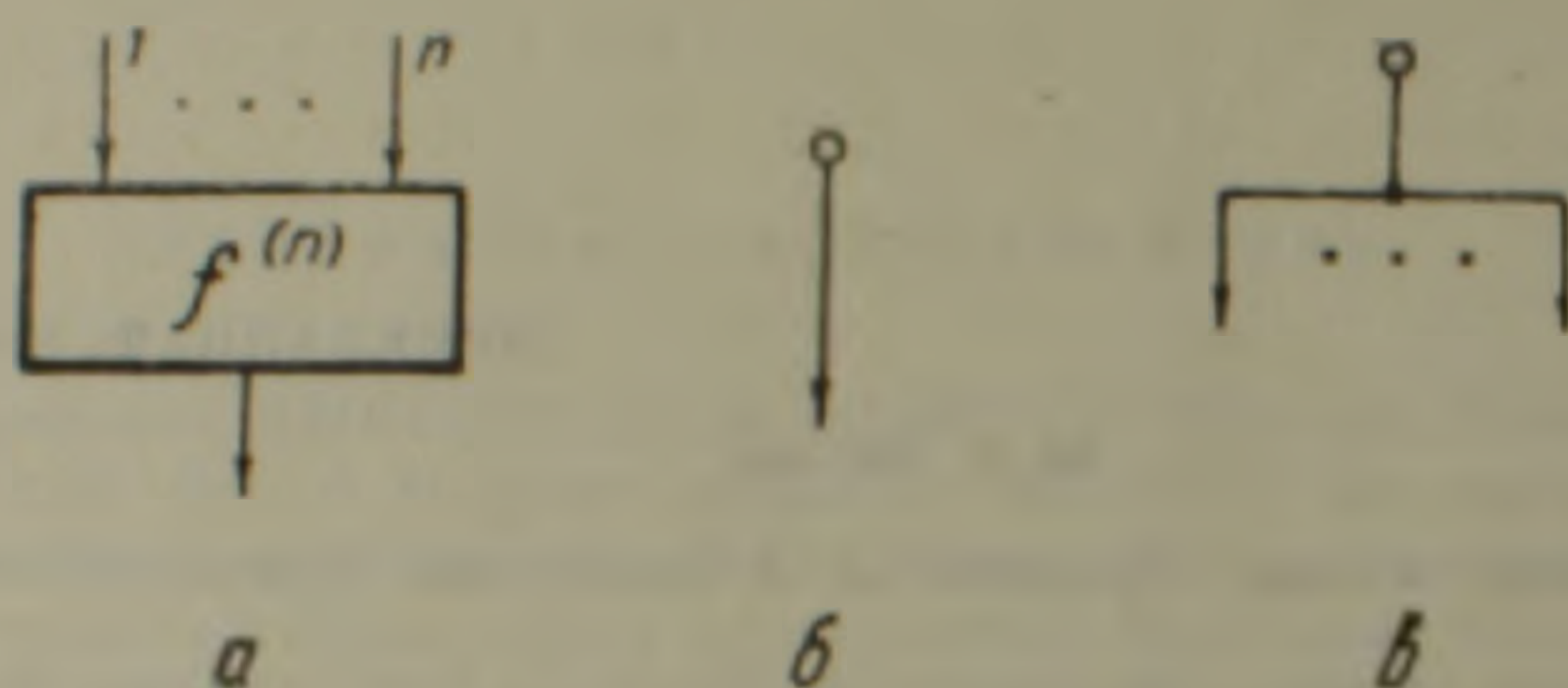


Рис. 1

Определение схемы. 1) Всякая элементарная схема является схемой (рис. 2, а). Входом этой схемы является элементарная схема, выходом — выход элементарной схемы.

2) Пусть $x_1, \dots, x_n$ — элементарные схемы, $f^{(n)}$ функциональный элемент. Если отождествить выходы $x_1, \dots, x_n$ со входами элемента $f^{(n)}$ с номерами $1, \dots, n$ соответственно, то получится некоторая конструкция S (рис. 2, б), которая является схемой. Входами этой схемы являются элементарные схемы $x_1, \dots, x_n$, выходом — выход элемента $f^{(n)}$.

3) Пусть определена схема S' , содержащая элементарные схемы $x_1, \dots, x_{l_k}$, а x — сложная элементарная схема с k выходами. При отождествлении выходов всех этих элементарных схем с выходами x соответственно получаем некоторую конструкцию S (рис. 2, в), которая является схемой. Входами этой схемы являются элементарные схемы $x_1, \dots, x_{l_1-1}, x_{l_1+1}, \dots, x_{l_k-1}, x_{l_k+1}, \dots, x_n$ и сложная элементарная схема x , выходом — выход схемы S' .

4) Пусть определены схемы S' и S'' . Если отождествить выход схемы S'' со входом x_l схемы S' , то полученная конструкция S (рис. 2, г) также является схемой. Входами схемы S являются все входы S' , кроме x_l , и все входы схемы S'' , выходом — выход схемы S' .

5) Всякая схема может быть построена из функциональных элементов и элементарных схем (сложных элементарных схем) за конечное число шагов при помощи конструкций, описанных в 1)–4).

Определим понятие записи схемы. Запись схемы S обозначим через $z(S)$.

Определение. 1) Если S есть элементарная схема x , то $z(S) = x$.

2) Если схема S получена из элементарных $x_1, \dots, x_n$ и из функционального элемента $f^{(n)}$ согласно п. 2 определения схемы, то

$$z(S) = f^{(n)}x_1 \dots x_n.$$

3) Если схема S получена из схемы S' путем „объединения“ входов $x_1, \dots, x_k$ в x согласно п. 3 определения схемы, то $z(S)$ получается из $z(S')$ следующим образом: пусть x_i , ($1 \leq i \leq k$) среди символов $x_1, \dots, x_k$ в $z(S')$ является первым (слева). Заменяем в $z(S')$ x_i на $M_p^0 x$, а любой из символов $x_1, \dots, x_{i-1}$ или $x_{i+1}, \dots, x_k$ на M_p . Полученная последовательность символов является $z(S)$.

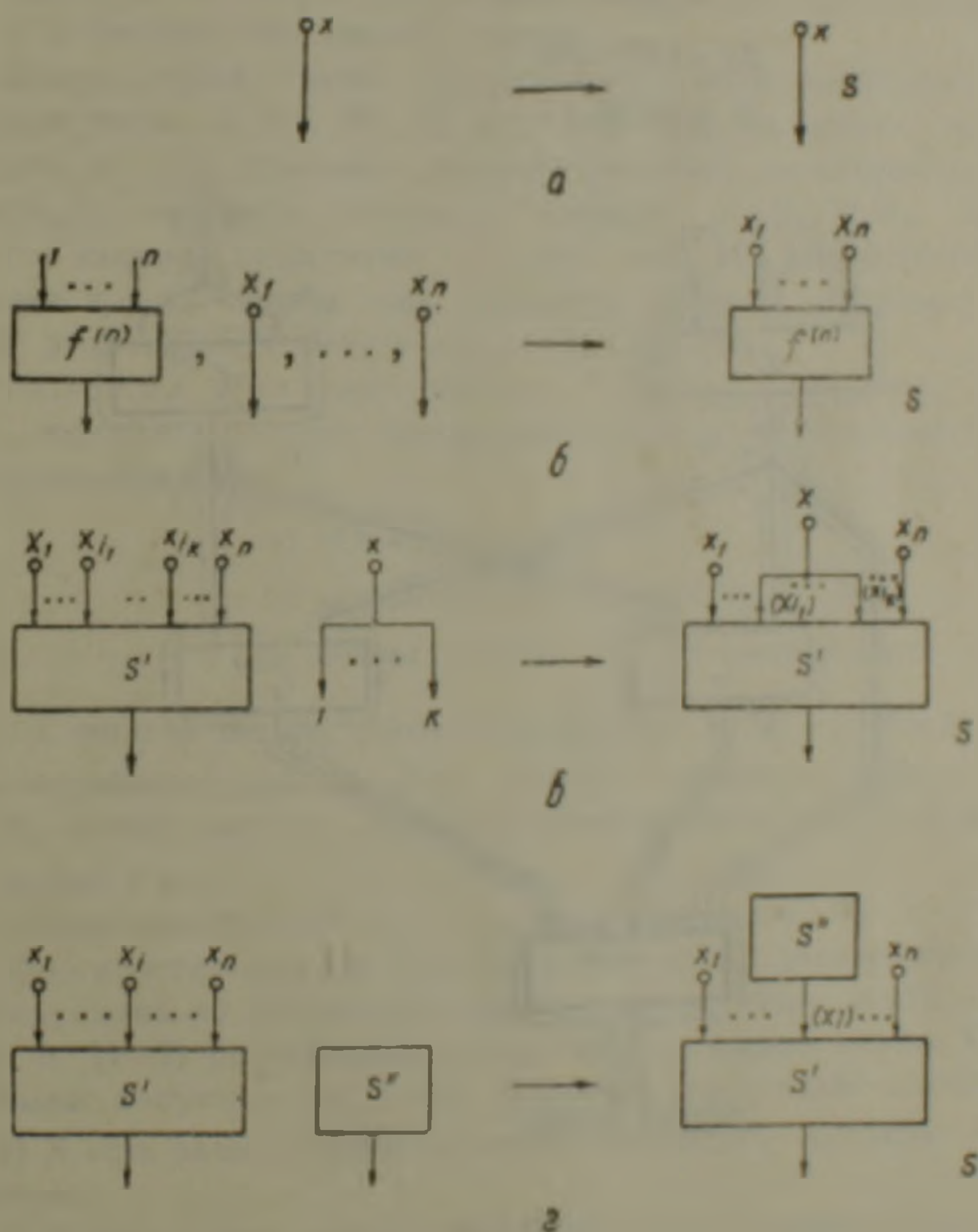


Рис. 2

Здесь символы M_p^0 и M_p называются метками, и индекс p отличается от всех индексов q меток M_q^0 , содержащихся в $z(S')$.

4) Если схема S получена из схем S' и S'' согласно п. 4 определения схемы, то $z(S)$ получается из $z(S')$ путем замены в ней x_i на $z(S'')$. (Здесь предполагается, что $z(S')$ и $z(S'')$ содержат метки с разными индексами).

На рис. 3 изображена функциональная схема, записью которой является последовательность

$$f_1^{(3)} M_1^0 f_5^{(3)} x_1 x_2 x_3 f_2^{(2)} M_1 M_2^0 f_4^{(2)} M_3^0 x_4 M_3 f_3^{(2)} M_1 M_2.$$

Ход записи показан тонкой линией со стрелками.

Символам типов x , $f^{(n)}$, M^0 , M , из которых состоит запись схемы, сопоставим веса следующим образом:

- 1) $\omega(x) = \omega(M) = -1$,
- 2) $\omega(M^0) = 0$,
- 3) $\omega(f^{(n)}) = n - 1$.

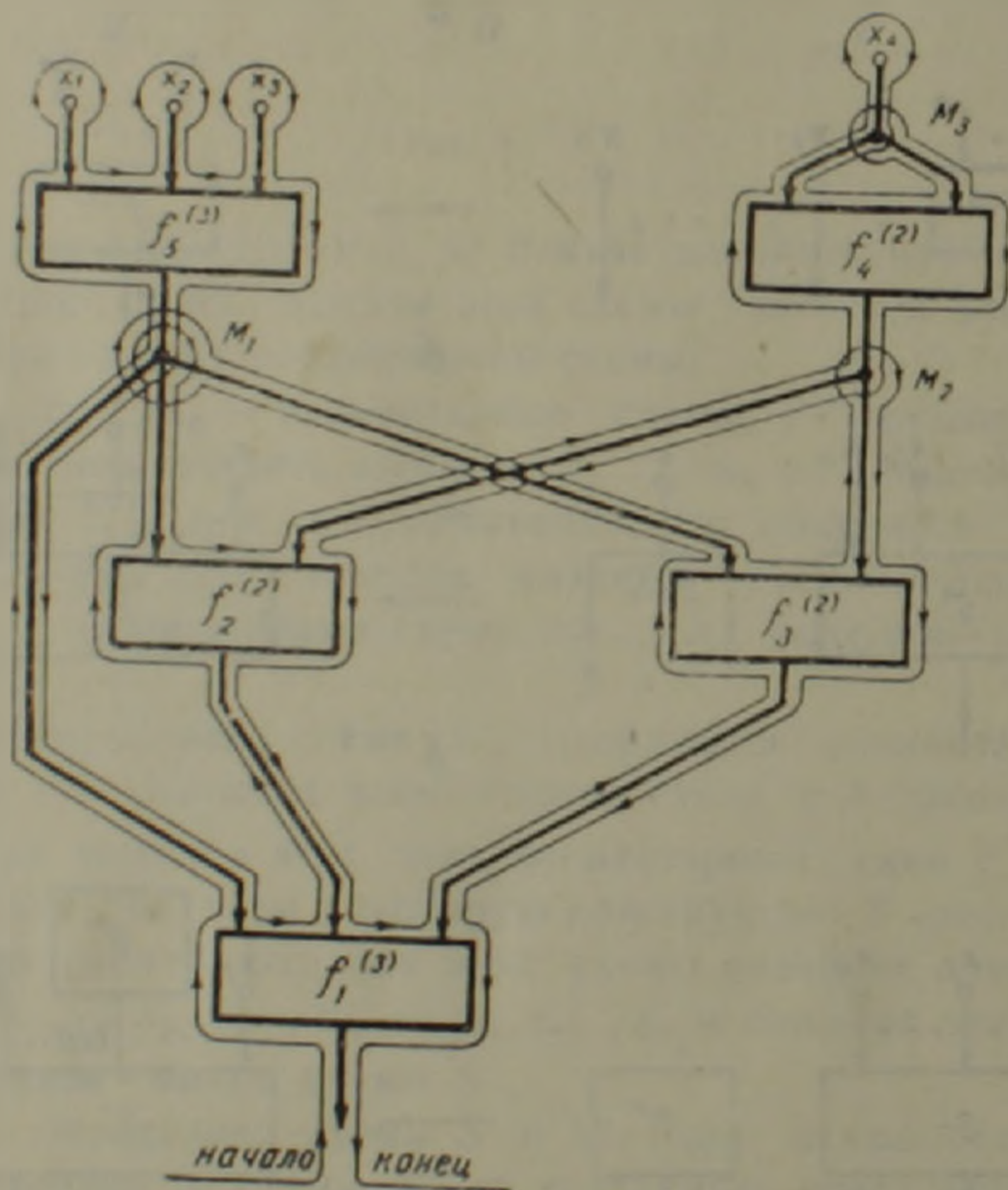


Рис. 3

Весом последовательности из указанных символов $s_1 \dots s_N$ называется число

$$\omega(s_1 \dots s_N) = \sum_{i=1}^N \omega(s_i).$$

Описанием метки M_i (обозначим его $\text{Оп}(M_i)$) в последовательности $s_1 \dots s_N$ называется минимальный отрезок этой последовательности с весом -1 , непосредственно следующий за меткой M_i^0 .

Определим понятие зависимости M_i от M_j в данной последовательности символов.

Определение. В последовательности символов $s_1 \dots s_N$

- 1) если M_j содержится в $\text{Op}(M_i)$, то M_i зависит от M_j ;
- 2) если M_i зависит от M_k , а M_k зависит от M_j , то M_i зависит от M_j ;
- 3) M_i зависит от M_j только согласно п. п. 1) и 2).

Запись $s' \rightarrow s''$ будет означать, что символ s' предшествует символу s'' в данной последовательности.

Запись любой схемы представляет собой последовательность символов типов $x, f^{(n)}, M^0, M$, но, очевидно, не всякая последовательность из этих символов является записью некоторой схемы. Не существует, например, схемы с записью $M_1 M_2 f^{(3)} M_1$. Возникает вопрос: какими свойствами должна обладать последовательность символов $s_1 \dots s_N$, чтобы она являлась записью некоторой схемы S ? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы последовательность символов $s_1 \dots s_N$ являлась записью некоторой схемы S , необходимо и достаточно, чтобы:

- а) $\omega(s_1 \dots s_N) = -1$,
- б) $\omega(s_1 \dots s_k) \geq 0$, для всякого $k \leq N$,
- в) метка M_i ($i=1, 2, \dots$) содержалась в $s_1 \dots s_N$

тогда и только тогда, когда содержалась и M^0 , причем последняя не более одного раза, и для любого вхождения M_i в $s_1 \dots s_N$ $M^0 \rightarrow M_i$; кроме того $s_1 \dots s_N$ не содержала пары $M_i^0 M_j$ и ни $M_i^0 M_j^0$ при любых i и j .

г) для любого i M_i в $s_1 \dots s_N$ не зависела от M_i .

Доказательство. Необходимость. Доказательство ведем индукцией по построению схемы, т. е. по числу $m(S)$ применений п. п. 1)–2) определения схемы при построении схемы S .

Базис индукции ($m(S)=1$). Возможны следующие случаи:

а) S есть элементарная схема x . Очевидно, условия теоремы выполнены.

б) S есть схема, построенная согласно п. 2) определения схемы, т. е. ее запись имеет вид

$$f^{(n)} x_1 \dots x_n$$

Очевидно, и в этом случае условия теоремы выполнены.

Индуктивный переход. Пусть необходимость доказана для всех схем, у которых $m(S) < m_0$. Пусть S произвольная схема, для которой $m(S) = m_0$. Так как $m_0 > 1$ (случай $m_0 = 1$ рассматривался в базисе), то при построении S последним пунктом применения может быть п. 3 или п. 4. Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) S получается из S' и из сложной элементарной схемы x применением п. 3 определения схемы. Поскольку

$$\omega(M_p^0 x) = \omega(x) \text{ и}$$

$$\omega(M_p) = \omega(x_{i_1}) = \dots = \omega(x_{i_k}),$$

то для $z(S)$ условия теоремы а) и б) выполняются, так как этим условиям удовлетворяет $z(S')$ (согласно индуктивному предположению). Выполнение условий в) и г) также следует из индуктивного предположения и из п. 3 определения записи.

б) S получается из S' и S'' согласно п. 4 определения схемы. Выполнение условий теоремы следует из того, что $z(S')$ и $z(S'')$ удовлетворяют этим условиям (по индуктивному предположению) и множества меток в $z(S')$ и $z(S'')$ не пересекаются. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность

$$s_1 \dots s_N \tag{1}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Докажем, что существует схема с записью (1). Доказательство введем индукцией по числу меток в (1). Обозначим это число через m .

Базис индукции ($m=0$). Базис индукции доказывается индукцией по длине N последовательности (1).

Б₁) Если $N=1$, то последовательность (1) состоит из единственного члена, который может быть только символом x_i . Но x_i является записью элементарной схемы x_i .

Б₂) Пусть достаточность верна для всех последовательностей (1), у которых $m=0$ и $N < N_0$, и докажем ее справедливость, если $m=0$ и $N=N_0$. Пусть для $s_1 \dots s_{N_0}$, $m=0$. Из $N_0 > 1$ следует, что $s_1 \dots s_{N_0}$ содержит символов типа $f^{(n)}$. Пусть $f_i^{(n)}$ в $s_1 \dots s_{N_0}$ находится правее среди всех символов типа $f^{(n)}$. Из условий а) и б) теоремы следует, что после $f_i^{(n)}$ стоят по крайней мере n символов типа x , т. е. $s_1 \dots s_{N_0}$ имеет вид

$$s_1 \dots s_{k-1} f_i^{(n)} x_{k+n} \dots x_{k+n-1} x_{k+n+1} \dots x_{N_0}. \tag{2}$$

Последовательности $s_1 \dots s_{k-1} x x_{k+n-1} \dots x_{N_0}$ (x не входит в $s_1 \dots s_{N_0}$) и $f_i^{(n)} x_{k+1} \dots x_{k+n}$ удовлетворяют условиям теоремы и их длины меньше N_0 . Следовательно они являются записями некоторых схем S' и S'' соответственно, из которых согласно п. 4 определения схемы получается некоторая схема с записью (2).

Индуктивный переход. Пусть достаточность доказана для всех последовательностей (1), у которых $m < m_0$. Докажем ее для последовательностей, у которых $m=m_0$. Пусть последовательность (1) удовлетворяет условиям теоремы и для нее $m=m_0$. Заметим, что среди всех меток в (1) существует метка, описание которой не содержит других меток. Действительно, если $\text{Op}(M_{i_1})$ содержит некоторую метку M_{i_2} , $\text{Op}(M_{i_2})$ — метку M_{i_3} и т. д., то ввиду конечности числа

меток в (1), в последовательности

$$M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}, \dots$$

метки повторяются. Пусть $M_{i_{k+1}} = M_{i_k}$. Тогда получится, что M_{i_k} зависит от M_{i_k} , что противоречит условию теоремы. Итак, существует метка M_i , описание которой не содержит других меток. Представим последовательность (1) в виде

$$s_1 \dots s_k M_i^0 \text{Op}(M_i) s_{k+r} \dots s_{k+i_1-1} M_i s_{k+i_1+1} \dots s_{k+i_p-1} M_i s_{k+i_p+1} \dots s_N \quad (1')$$

где $\text{Op}(M_i)$ не содержит меток. Последовательности

$$\text{Op}(M_i) \quad (3)$$

и

$$s_1 \dots s_k x s_{k+r} \dots s_{k+i_1-1} x s_{k+i_1+1} \dots s_{k+i_p-1} x s_{k+i_p+1} \dots s_N, \quad (4)$$

удовлетворяют условиям теоремы и для них $m < m_0$, следовательно существуют схемы S' и S_1 с записями (3) и (4) соответственно. Но из S_1 и из сложной элементарной схемы x с $p+1$ выходами согласно п. 3 определения схемы можно построить некоторую схему S'' с записью

$$s_1 \dots s_k M_i^0 x s_{k+r} \dots s_{k+i_1-1} M_i s_{k+i_1+1} \dots s_{k+i_p-1} M_i s_{k+i_p+1} \dots s_N.$$

Из S' и S'' согласно п. 4 определения схемы можно построить схему S с записью (1'). Теорема доказана.

Приведенный язык и доказанная теорема позволяют эффективно моделировать функционирование схемы в вычислительных машинах. Алгоритм вычисления значения выходного сигнала по значениям входных сигналов можно описать следующим образом. Пусть схема S имеет n входов (обозначим их $x_1, \dots, x_n$) и один выход. Рассмотрим конкретные значения входных сигналов: $x_1 = z_1, \dots, x_n = z_n$ и в $z(S)$ заменим символы x_i на z_i ($z_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$) соответственно. Теперь на $z(S)$ многократно применим следующие процедуры, пока их возможно применить:

1. Заменить подпоследовательность вида $f^{(k)}\beta_1 \dots \beta_k$ ($\beta_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, k}$) на $f^{(k)}(\beta_1, \dots, \beta_k) \in \{0, 1\}$.

2. Пару символов $M_i^0 \beta$ ($\beta \in \{0, 1\}$), а также все вхождения символа M_i заменить на β .

В результате, очевидно, получается 0 или 1, что является значением выходного сигнала.

Наконец, всем известным правилам тождественного преобразования схем можно сопоставить соответствующие правила преобразования на этом языке, что позволяет создать алгебру преобразований записей схем.

Լուկասեվիչի լեզվի հարմարեցումը ֆունկցիոնալ սխեմաների նկարագրությանը

Բանաձևների՝ առանց փակագծերի գրության Լուկասեվիչի լեզուն ընդհանրացվում և հարմարեցվում է ֆունկցիոնալ սխեմաների նկարագրությանը: Մտցվում է ֆունկցիոնալ սխեմայի գրության հասկացողությունը, որը իրենից ներկայացնում է սիմվոլների վերջավոր հաջորդականությունը: Ապացուցվում է Լուկասեվիչի թեորեմի ընդհանրացումը:

Ընդհանրացված լեզուն կարող է ֆունկցիոնալ սխեմաների հանրահալվական տեսության կառուցման հիմք հանդիսանալ, ինչպես նաև կիրառվել հաշվիչ սարքերի նախադժման ավտոմատացման բնագավառում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ *Lukas ewicz*. Sur la formalisation des theorie mathematiques. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche scientifique, 36, Paris, 1950, стр. 11—19 (1953). ² *Փ. Խարսի*. Теория графов, стр. 235, „Мир“, М., 1973.

УДК 666.972.017:539.4

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

К. С. Карапетян, Р. А. Кетикян, К. А. Карапетян

Влияние водонасыщения на прочность и деформативность бетона на литонидной пемзе при сжатии и растяжении

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. З. Симоновым 8/II 1979)

Вопрос о влиянии водонасыщения на физико-механические свойства бетона пока совершенно мало изучен, а существующие опытные данные противоречивы (¹⁻⁵). По опытам некоторых исследователей водонасыщение приводит к росту прочности бетона, а по данным других исследователей — к обратному явлению. Определенную ясность в вопрос, чем вызваны эти противоречия, внесли исследования К. С. Карапетяна, который показал, что влияние водонасыщения на физико-механические свойства бетона зависит от большого числа факторов, среди которых весьма важными являются влажность среды до погружения бетона в воду и продолжительность хранения его в воде (⁶).

На основании исследований, проведенных со шлакобетоном и тяжелым бетоном, К. С. Карапетян пришел к выводу, что причины, вызывающие изменения физико-механических свойств бетона при водонасыщении, следующие (⁶): 1) раздвигающие действия адсорбционных пленок воды, проникающих в макрощели твердого тела (^{7,8}); 2) возобновление процесса твердения бетона — вторичное твердение; 3) заполнение образовавшихся под частицами заполнителя пустот (дефектов) водой.

Первые две причины, которые приводят к изменению физико-механических свойств бетона, общеизвестны, однако еще недостаточно изучены. Что касается положительного эффекта водных прослоек, которые восстанавливаются в связи с заполнением пустот (дефектов) водой, то эту гипотезу предложил К. С. Карапетян (⁹).

Согласно К. С. Карапетяну причиной неодинаковости свойств бетона в различных направлениях, т. е. анизотропии, являются водные прослойки, которые неизбежно образуются под частицами заполнителя в результате внутреннего расслаивания бетона при его укладке и уплотнении. При испарении всех этих прослоек на их местах остаются пустоты (дефекты), которые ослабляют сечение бетонного элемента и снижают его прочность, увеличивают деформации (⁹⁻¹¹).

В настоящей работе приводятся результаты серии опытов, которые были поставлены для комплексного изучения влияния водонасыщения на прочность и деформативность бетона на литондной пемзе при сжатии и растяжении с учетом анизотропии.

Для проведения намеченных программой исследований из бетона на литондной пемзе (состав в массе 1:1, 66:2,99, В/Ц=1, Ц=260 кг на 1 м³ бетона) было изготовлено 36 призм размерами 10×10×40 см и 30 восьмерок сечением 10×10, высотой 60 см. При изготовлении образцов половину их бетонировали в вертикальных формах, а другую половину — в горизонтальных, так что при испытании в первом случае нагрузка действовала перпендикулярно, а во втором — параллельно слоям бетонирования. Распалубку образцов производили через трое суток, после чего до месячного возраста их хранили во влажных условиях, а затем до обводнения в возрасте 11 месяцев — в обычных лабораторных условиях. Кубиковая прочность исследованного бетона по данным испытаний сухих кубиков с ребром 10 см в месячном возрасте составляла 267 кгс/см².

Для исследования влияния водонасыщения на прочность и деформативность бетона при сжатии и растяжении были испытаны 36 призм и 30 восьмерок. При этом кроме контрольных сухих образцов испытывали образцы после хранения в воде 1; 3; 7; 28 сут., а на сжатие еще и 3 мес.

Прочностные показатели бетона при сжатии приведены в табл. 1.

Таблица 1

Влияние водонасыщения на призмную прочность бетона

Условия хранения образцов	Направление сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	Призмная прочность бетона, кгс/см ²	Отношение прочности образцов, хранившихся в воде, к прочности сухих образцов	Отношение прочности образцов, испытанных перпендикулярно слоям, к прочности образцов, испытанных параллельно слоям
Образцы сухие	Перпендикулярно	205	1.00	1.13
	Параллельно	231	1.00	
24 часа в воде	Перпендикулярно	214	1.04	0.97
	Параллельно	207	0.90	
3 суток в воде	Перпендикулярно	209	1.02	1.05
	Параллельно	219	0.95	
7 суток в воде	Перпендикулярно	218	1.06	0.93
	Параллельно	203	0.88	
28 суток в воде	Перпендикулярно	194	0.95	1.19
	Параллельно	231	1.00	
3 месяца в воде	Перпендикулярно	201	0.98	1.27
	Параллельно	255	1.10	

По данным таблицы, водонасыщение по-разному влияет на прочность призм, испытанных с направлением снимающей нагрузки перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования. Прочность призм, испытанных параллельно слоям, через 24 часа и 7 сут. водного хранения снизилась соответственно на 10 и 12%, в то время как прочность призм, испытанных перпендикулярно слоям, практически не изменилась даже и при более длительном хранении в воде. По этим данным нельзя утверждать, что адсорбционное понижение прочности призм, испытанных параллельно слоям, в данном случае составляло всего 12%, а в случае призм, испытанных перпендикулярно слоям, вообще отсутствовало. Адсорбционное понижение прочности имело место в обоих случаях, однако в первом случае полностью, а во втором — частично было покрыто положительными эффектами вторичного твердения и восстановления водных прослоек.

При исследовании влияния водонасыщения трудно судить, что является наиболее важным в изменении физико-механических свойств бетона — адсорбционное понижение прочности или упрочнение, вызванное, с одной стороны, вторичным твердением, а с другой стороны, восстановлением водных прослоек, так как все это зависит от большого числа факторов, в том числе и от направления нагрузки по отношению к слоям бетонирования. Однако в рассмотренных опытах (табл. 1) как будто упрочнение бетона за счет вторичного твердения при испытании призм параллельно слоям было больше, чем при испытании призм перпендикулярно слоям. При этом мы имеем в виду тот факт, что в итоге прочность водонасыщенных призм, испытанных параллельно слоям, оказалась на 10% больше прочности контрольных сухих образцов. Вместе с этим возможно также, что адсорбционное понижение прочности для призм, испытанных перпендикулярно слоям, было гораздо больше, чем для призм, испытанных параллельно слоям.

Как видно из табл. 1, прочность контрольных сухих образцов, испытанных параллельно слоям ($R_{пр}$), на 13 % больше, чем прочность призм, испытанных перпендикулярно слоям ($R_{пр}$), т. е. в данном случае коэффициент анизотропии по призмной прочности $K = R_{пр}/R_{пр}$ составляет 1,13. Однако после суточного хранения в воде бетон уже в отношении призмной прочности практически стал изотропным. Более длительное пребывание бетона в воде вновь увеличивает степень анизотропии, и после трехмесячного хранения коэффициент анизотропии уже получается больше, чем для сухих образцов.

Рассмотрим теперь, как влияет водонасыщение на прочность бетона при растяжении (табл. 2). В этом случае водонасыщение в первые сутки приводит к более чувствительному спаду прочности бетона на растяжение, причем этот спад после 3-суточного хранения в воде, независимо от направления растягивающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования, достигает 30%. Более длительное хранение бетона в воде приводит к постепенному росту его прочности, который в случае образцов, испытанных перпендикулярно слоям, проявляется сильнее, т. е. обратно тому, что наблюдалось при испытании прочности

бетона на сжатие. После 28 сут. водного хранения прочность восьмерок, испытанных перпендикулярно слоям, оказалась всего на 5% ниже прочности контрольных сухих образцов, а для восьмерок, испытанных параллельно слоям, этот разрыв составляет 19%.

Таблица 2

Влияние водонасыщения на прочность бетона при растяжении

Условия хранения образцов	Направление растягивающей нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	Прочность бетона, кгс/см ²	Отношение прочности образцов, хранившихся в воде, к прочности сухих образцов	Отношение прочности образцов, испытанных перпендикулярно слоям, к прочности образцов, испытанных параллельно слоям
Образцы сухие	Перпендикулярно	15.4	1.00	1.27
	Параллельно	19.6	1.00	
24 часа в воде	Перпендикулярно	12.0	0.78	1.17
	Параллельно	14.1	0.72	
3 суток в воде	Перпендикулярно	10.8	0.70	1.27
	Параллельно	13.7	0.70	
7 суток в воде	Перпендикулярно	11.9	0.77	1.22
	Параллельно	14.5	0.74	
28 суток в воде	Перпендикулярно	14.7	0.95	1.07
	Параллельно	15.8	0.81	

При водонасыщении положительный эффект водных прослоек в увеличении прочности бетона на растяжение исключается и изменение прочности в основном определяется адсорбционным понижением прочности и эффектом вторичного твердения. О том, что действительно эффект водных прослоек исключается, свидетельствует наблюдаемое большее понижение прочности бетона на растяжение, чем на сжатие, а также независимость понижения прочности от направления растягивающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования.

Коэффициент анизотропии по прочности бетона при растяжении $K_1 = R_p'/R_p$ (где R_p' и R_p соответственно прочности восьмерок, испытанных параллельно и перпендикулярно слоям) гораздо больше, чем по призмной прочности. Для контрольных сухих образцов $K_1 = 1.27$. Данные табл. 2 позволяют отметить, что с увеличением продолжительности водного хранения до 3 суток K_1 изменяется незначительно, а дальнейшее увеличение продолжительности водного хранения уже приводит к его существенному уменьшению.

На рис. 1 показаны два графика кратковременных деформаций бетона при сжатии, из коих первый соответствует призмам, испытанным перпендикулярно слоям, а второй—призмам, испытанным параллельно слоям. На каждом из этих графиков изображены кривые как контрольных сухих образцов, так и образцов, хранившихся в воде. Из сравнения обоих графиков нетрудно заметить, что водная среда

по-разному влияет и на кратковременные деформации призм, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования. В данном случае расхожимость кривых деформаций сухих и водонасыщенных образцов, испытанных параллельно слоям, гораздо больше, чем образцов, испытанных перпендикулярно слоям.

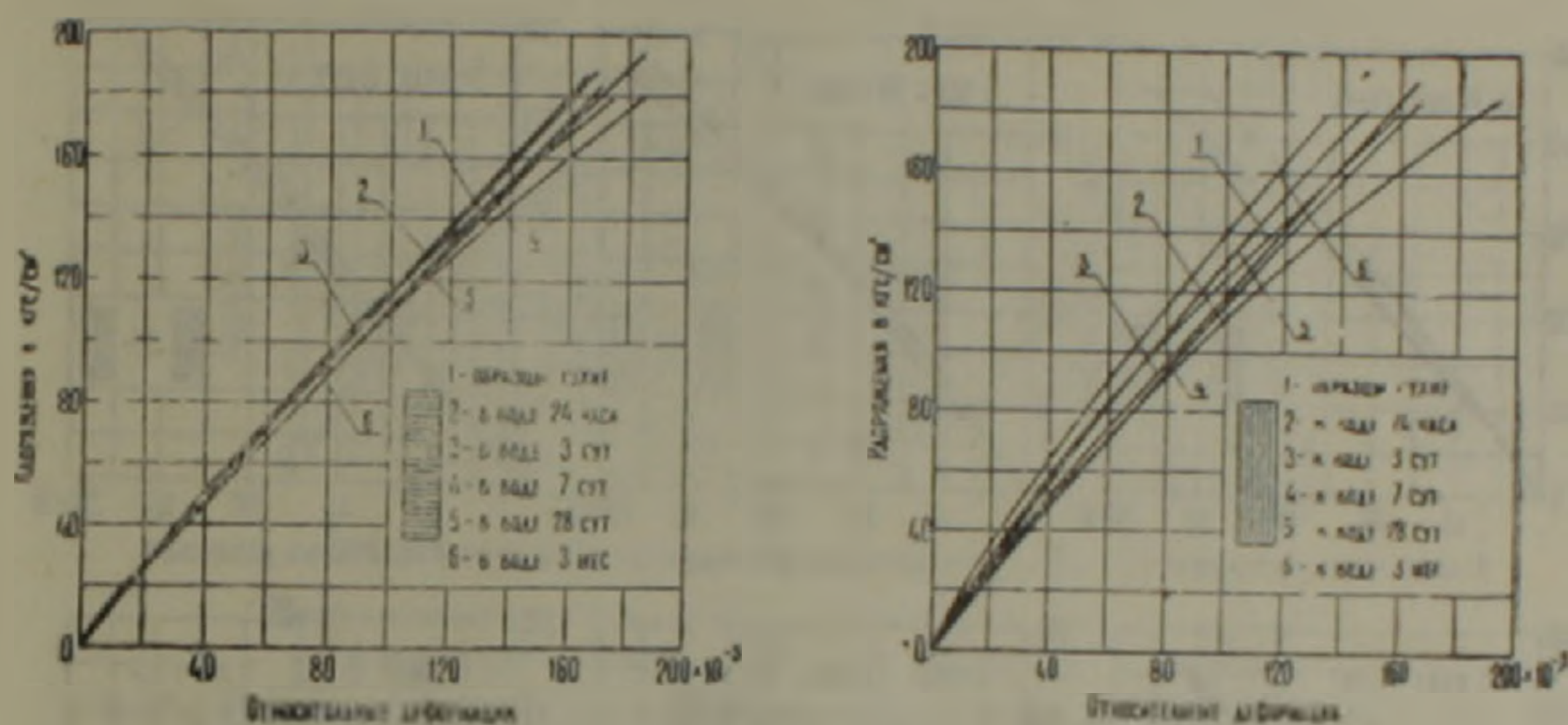


Рис. 1. Влияние водонасыщения на деформации бетона при сжатии

Наиболее четко влияние водонасыщения на кратковременные деформации бетона видно из второго графика рис. 1, где кривая 2, которая соответствует образцам, хранившимся в воде 24 часа, расположена намного ниже кривой деформаций контрольных сухих образцов (кривая 1), т. е. водонасыщение привело к чувствительному увеличению деформаций бетона в результате адсорбционных явлений. С увеличением длительности хранения бетона в воде его деформации уменьшаются, и в итоге кривая 6, которая соответствует образцам, находившимся в воде 3 месяца, оказалась намного выше кривой деформаций контрольных сухих образцов.

Таким образом, качественно влияние водонасыщения на призмную прочность и кратковременные деформации бетона при испытании образцов параллельно слоям бетонирования одно и то же. При испытании же образцов перпендикулярно слоям бетонирования в большинстве случаев кривые водонасыщенных образцов оказались выше кривой деформации контрольных сухих образцов.

Для анализа влияния водонасыщения на анизотропию кратковременных деформаций бетона рассмотрим рис. 2, где на отдельных графиках изображены кривые деформаций сухих и водонасыщенных образцов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования. Как видим, при сухих образцах расхожимость кривых деформаций весьма чувствительна, причем деформации призм, испытанных перпендикулярно слоям, больше, чем деформации призм, испытанных параллельно слоям. Водное хранение до определенного момента приводит к постепенному сближению кривых деформаций образцов,

испытанных перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования, и при 7 сут. хранения в воде кривые деформаций 1 и 2 сливаются, указывая тем самым, что бетон уже в отношении кратковременных деформаций квазиизотропен. С более длительным хранением бетона в воде (28 суток и 3 месяца) расхожимость кривых 1 и 2 вновь начинает

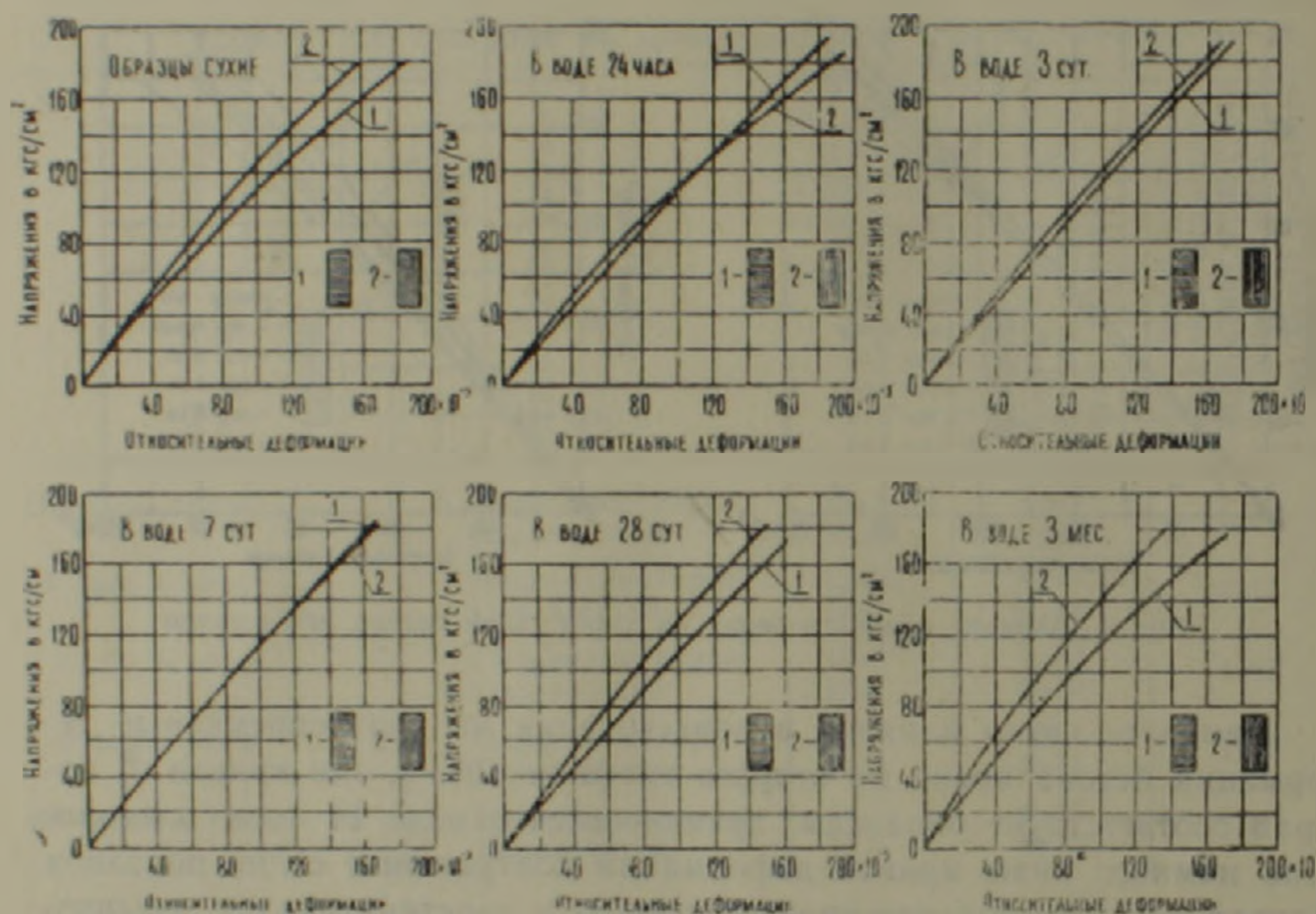


Рис 2. Влияние водонасыщения на изменения степени анизотропии по деформациям бетона при сжатии

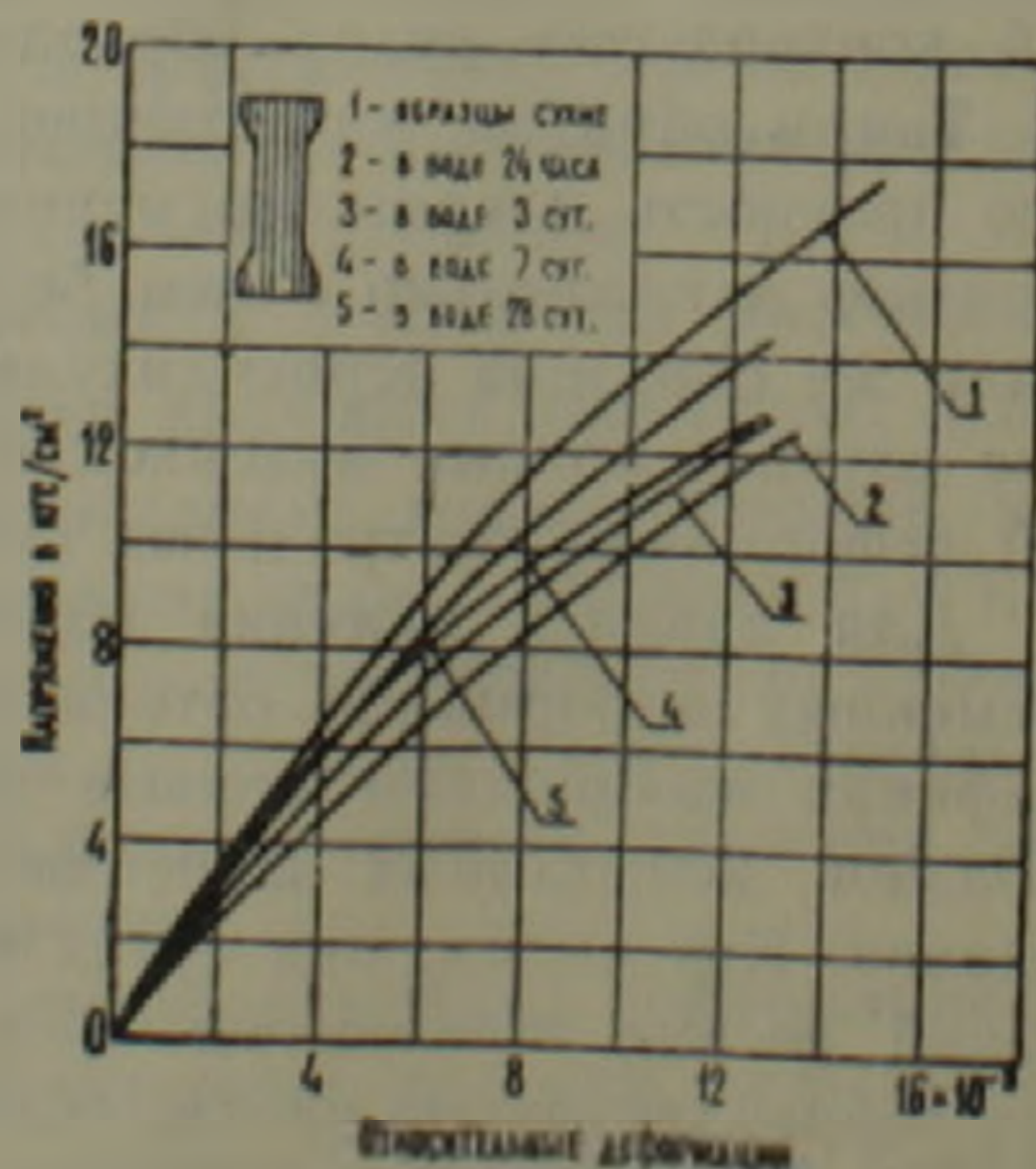
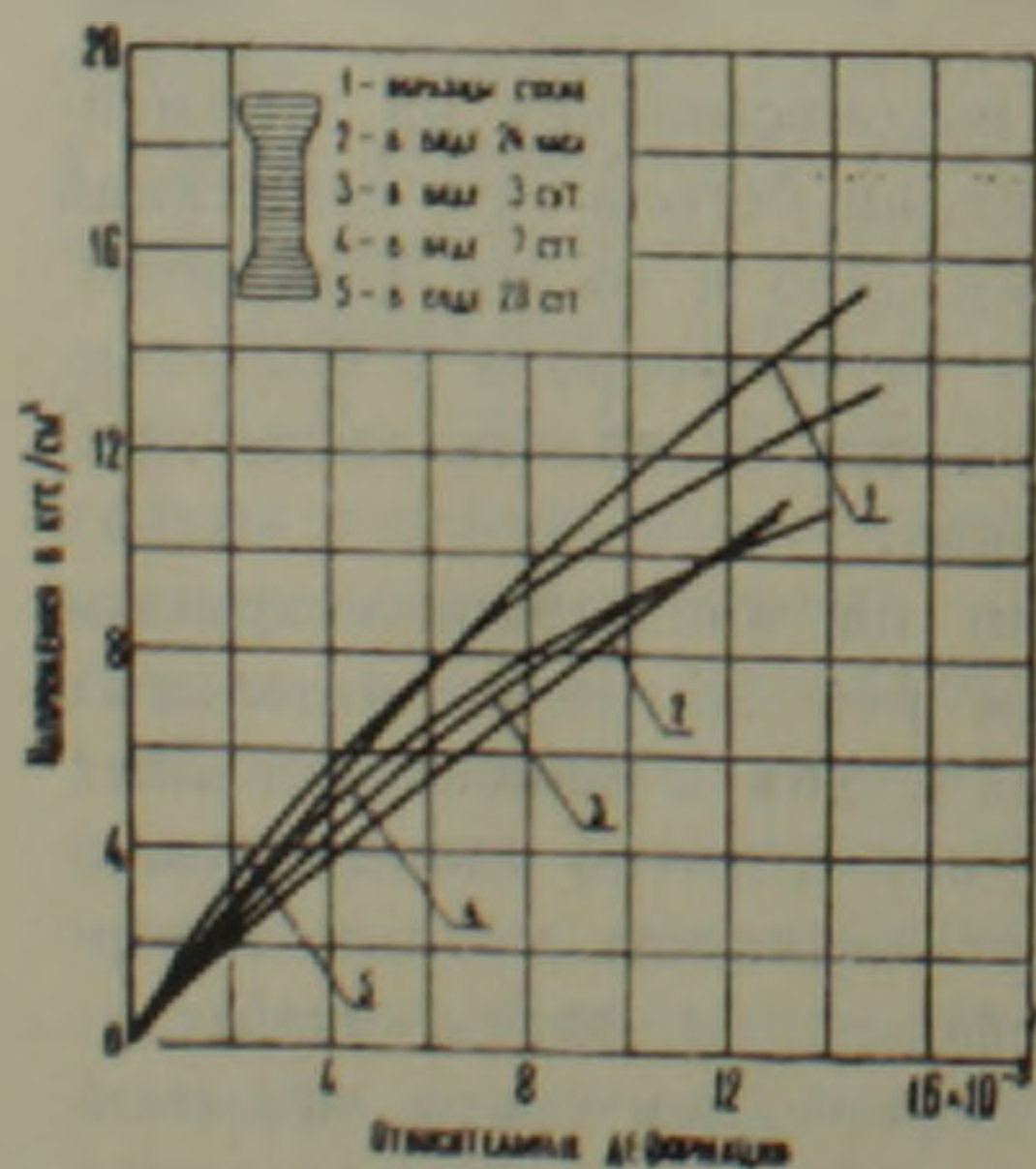


Рис 3. Влияние водонасыщения на деформации бетона при растяжении

увеличиваться, т. е. увеличивается степень анизотропии по этим деформациям. При этом деформации образцов, испытанных перпендикулярно слоям, и в этих случаях больше, чем деформации образцов, испытанных параллельно слоям.

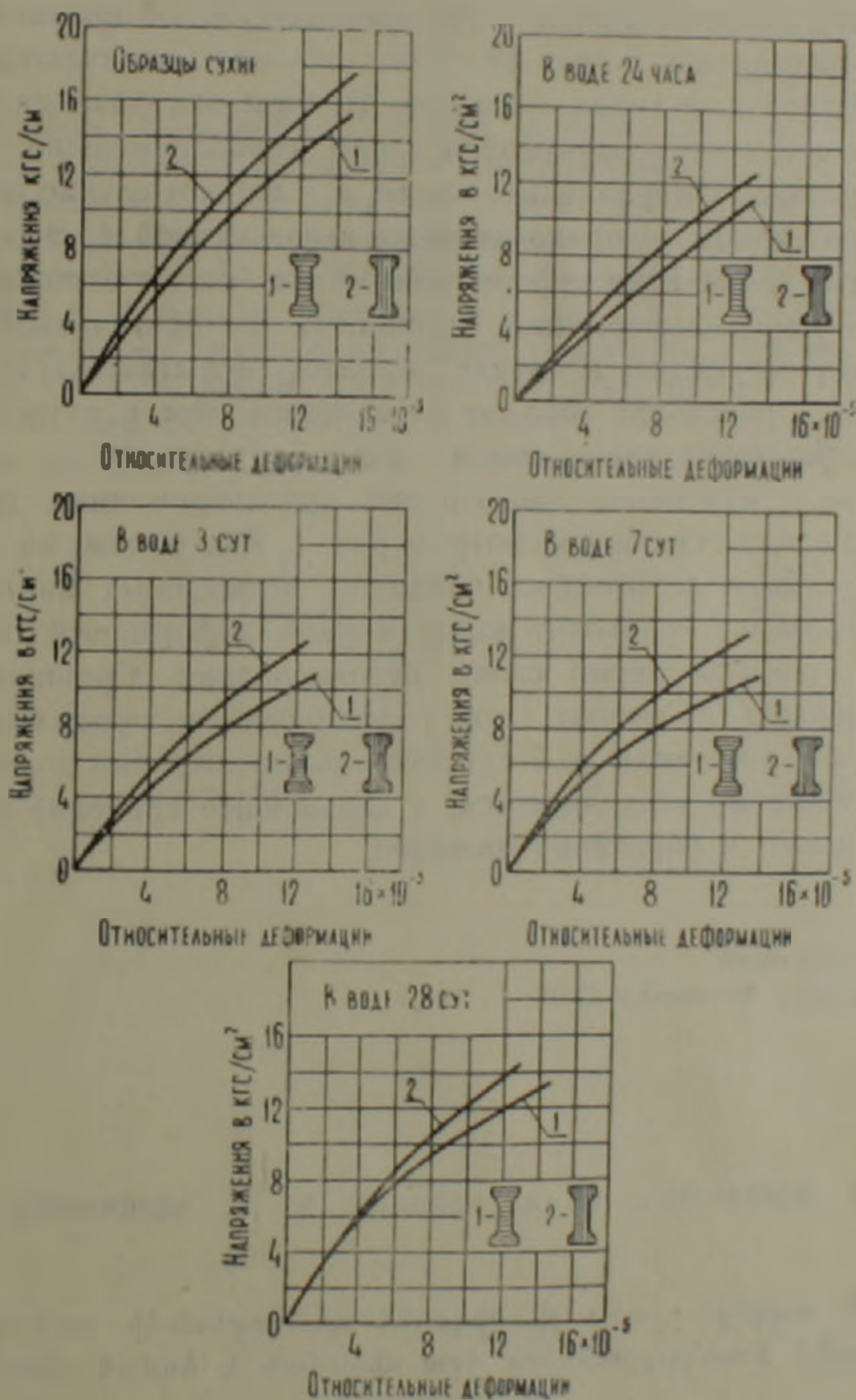


Рис. 4. Влияние водонасыщения на изменения степени анизотропии по деформациям бетона при растяжении

Рассмотрим теперь, как влияет подонасыщение на кратковременные деформации бетона при растяжении (рис. 3). В этом случае более четко вырисовывается закономерность влияния водонасыщения на кратковременные деформации бетона. Независимо от направления растягивающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования, водное хранение в течение 24 часов привело к существенному увеличению де-

формаций бетона при растяжении. Как видно, на обоих графиках рис. 3 ниже всех расположены кривые 2, которые соответствуют водному хранению в течение 24 часов, а выше всех — кривые контрольных сухих образцов. Увеличение продолжительности водного хранения до 3, 7 и 28 суток приводит к постепенному уменьшению расхожимости кривых деформаций водонасыщенных и сухих образцов, и деформации образцов, которые находились в воде 28 суток, уже мало отличаются от деформаций контрольных сухих образцов. Причем эта разница для образцов, испытанных перпендикулярно слоям, гораздо меньше, чем для образцов, испытанных параллельно слоям, и в первом случае до напряжения 8 кгс/см^2 кривая 5 проходит даже выше кривой 1. Это говорит о том, что после увеличения деформаций бетона за счет адсорбционных явлений уменьшение деформаций, вызванных положительным эффектом вторичного твердения, в случае образцов, испытанных перпендикулярно слоям, происходит гораздо интенсивнее, чем в случае образцов, испытанных параллельно слоям.

Для анализа изменения анизотропии кратковременных деформаций бетона при растяжении рассмотрим рис. 4. Как видим, на всех пяти графиках кривая деформаций образцов, испытанных параллельно слоям бетонирования, проходит выше кривой деформаций образцов, испытанных перпендикулярно слоям бетонирования. Сравнение этих графиков приводит к выводу, что с увеличением продолжительности хранения бетона в воде до 7 сут. степень анизотропии по деформациям при растяжении увеличивается, а дальнейшее хранение бетона в воде уже приводит к обратному явлению.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ, Կ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ջրահագեցման ազդեցությունը լիտոփայլին պեմգաբետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա սեղմման և ձգման դեպքում

Աշխատանքում բերվում են բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների, ինչպես նաև նրանց անիզոտրոպիայի վրա ջրահագեցման ազդեցության փորձնական հետազոտության արդյունքները սեղմման և ձգման դեպքում:

Փորձերը ցույց են տվել, որ ջրահագեցումը սկզբում բերում է բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների մոզուլի փոքրացմանը և ապա, մասնական մեծացման հետ՝ վերջիններիս մեծացմանը: Ջրահագեցման ազդեցությունը էապես կախված է բետոնափորման շերտերի նկատմամբ արտաքին ուժի ազդման ուղղությունից: Այդ է պատճառով, որ ջրային միջավայրում բետոնի

ամբուսյան և դեֆորմացիաների մոդուլի անիզատրոպիայի աստիճանը ժամանակից կախված փոփոխվում է:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ч Р Ц Ч Ц Ы П Р Ի Յ ՈՒ Ն

¹ А. З. Бассович, «Изв. ВНИИГ», т. 41, 1949. ² К. А. Мальцов, «Гидротехническое строительство», № 8, 1954. ³ Н. А. Мощанский, «Гидротехническое строительство», № 10, 1956. ⁴ М. З. Симонов, Труды совещания по теории технологии бетонов, Изд. АН Арм. ССР, 1956. ⁵ Г. Д. Цискрели, Сопротивление растяжению неармированных и армированных бетонов, Госстройиздат, М., 1954. ⁶ К. С. Карапетян, ДАН Арм. ССР, т. 57, № 3 (1973). ⁷ Б. В. Дерягин, «Природа», № 2, 1943. ⁸ П. А. Ребиндер, Физико-механические исследования процессов деформаций твердых тел, Юбилейный сборник АН СССР, 1947. ⁹ К. С. Карапетян, ДАН Арм. ССР, т. 24, № 4 (1957). ¹⁰ К. С. Карапетян, «Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук», т. 10, № 6 (1957). ¹¹ К. С. Карапетян, «Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук», т. 18, № 2 (1965).

УДК 666.1 543.5

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

С. Б. Гукасян, член-корреспондент АН Армянской ССР К. А. Костанян

О координации иона алюминия в стеклах систем



(Представлено 18/VIII 1978)

Вопрос о координации иона алюминия в щелочно-силикатных стеклах рассмотрен во многих работах, в которых показана способность алюминия изменять свою координацию от 6 до 4. Установлено, что при соотношении $\text{Na}_2\text{O} / \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$ весь алюминий переходит в четверную координацию (¹⁻⁶). Обнаружить изменение координации иона алюминия в щелочно-германатных стеклах на основе исследований их физико-химических свойств значительно сложнее, так как ион германия сам склонен изменять свою координацию от 4 до 6. В силу этого большой интерес представляет исследование влияния окиси алюминия на физико-химические свойства щелочно-германатных стекол в широкой области составов в сравнении с аналогичными силикатными и боратными системами. Детальное исследование электрических свойств стекол систем $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$ и $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{GeO}_2$ выявляет полную аналогию изотерм проводимости в этих стеклах (⁶), что не дает основания делать вывод об изменении координации иона германия в последнем случае или говорить о влиянии иона алюминия на эти изменения. Литературные данные по физико-химическим свойствам системы $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{B}_2\text{O}_3$ скудные (^{3,6}). В вышедшей недавно работе (⁷) на основании ЯМР-исследований было показано, что в этой системе основным элементом, изменяющим свою координацию, является ион алюминия, при одновременном изменении координации иона бора от 3 к 4.

В настоящей работе на основании исследований плотности и показателя преломления стекол систем $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$, $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{GeO}_2$, $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{B}_2\text{O}_3$, проведенных для всей области стеклообразования, показано поведение иона алюминия в указанных системах и особенности его влияния на изменение координации ионов германия и бора.

Методика синтеза стекол описана в работе (⁸). Плотность стекол

определяли методом гидростатического взвешивания в толуоле. Для измерения использовали образцы стекол весом не менее 10 г. Воспроизводимость от варки к варке составляла $\pm 0,005 \text{ г/см}^3$. Сравнение плотностей наших измерений с литературными ⁽⁸⁾, для стекол системы $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$, показало, что максимальное расхождение не превышает $0,02 \text{ г/см}^3$. Показатель преломления определялся иммерсионным методом. Воспроизводимость от варки к варке была в пределах $\pm 0,005$. Сравнение показателей преломления наших измерений с литературными ⁽⁸⁾, для стекол системы $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{GeO}_2$, показало, что максимальное расхождение не превышает 0,005.

На рис. 1, а—в показаны линии равных значений d стекол систем $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$, $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{GeO}_2$ и $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{B}_2\text{O}_3$ соответственно, а на рис. 2—линии равных значений n_D стекол системы $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{GeO}_2$, при температуре 25°C . Из рисунков видно, что во всех трех случаях ходы изотерм плотностей и показателей преломления существенно отличаются друг от друга. Для стекол системы $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{B}_2\text{O}_3$ характерно плавное изменение плотности в зависимости от состава, при этом с повышением концентрации окиси натрия кривые равных плотностей идут почти параллельно содер-

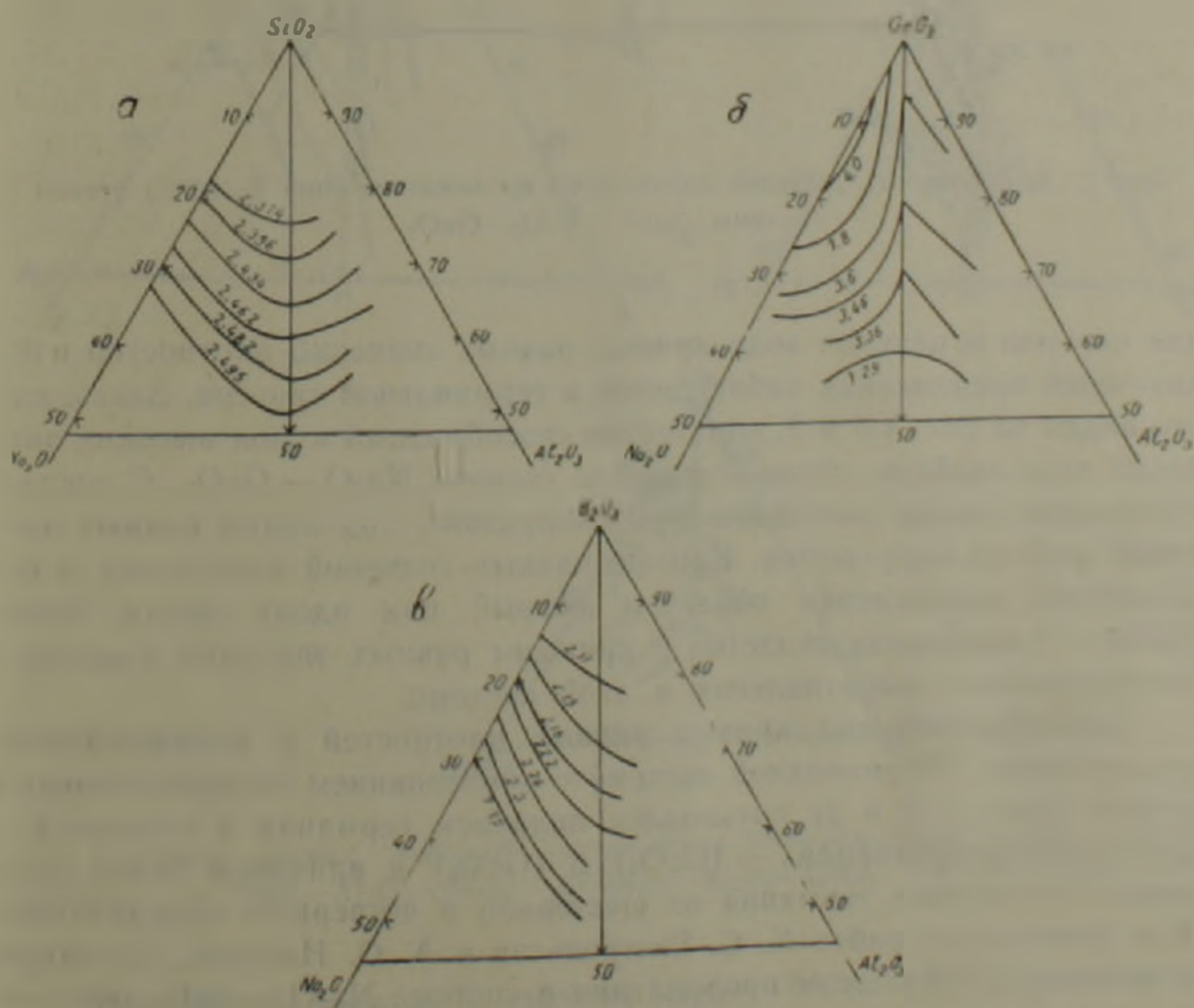


Рис. 1. Линии равных значений плотностей стекол (при $T=25^\circ\text{C}$) в системах:
а) $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$; б) $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{GeO}_2$; в) $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{B}_2\text{O}_3$

жанию Na_2O (рис. 1, а). Для натриево-алюмосиликатной системы характерен глубокий минимум линий равных плотностей, причем минимум совпадает с линией, на которой соотношение $\text{Na}_2\text{O} / \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$ (рис. 1, а). Для этой системы аналогичный ход наблюдается и для кривых равных значений показателей преломления (наши данные не приводятся, так как они совпадают с литературными ⁽⁸⁾). Наиболее слож-

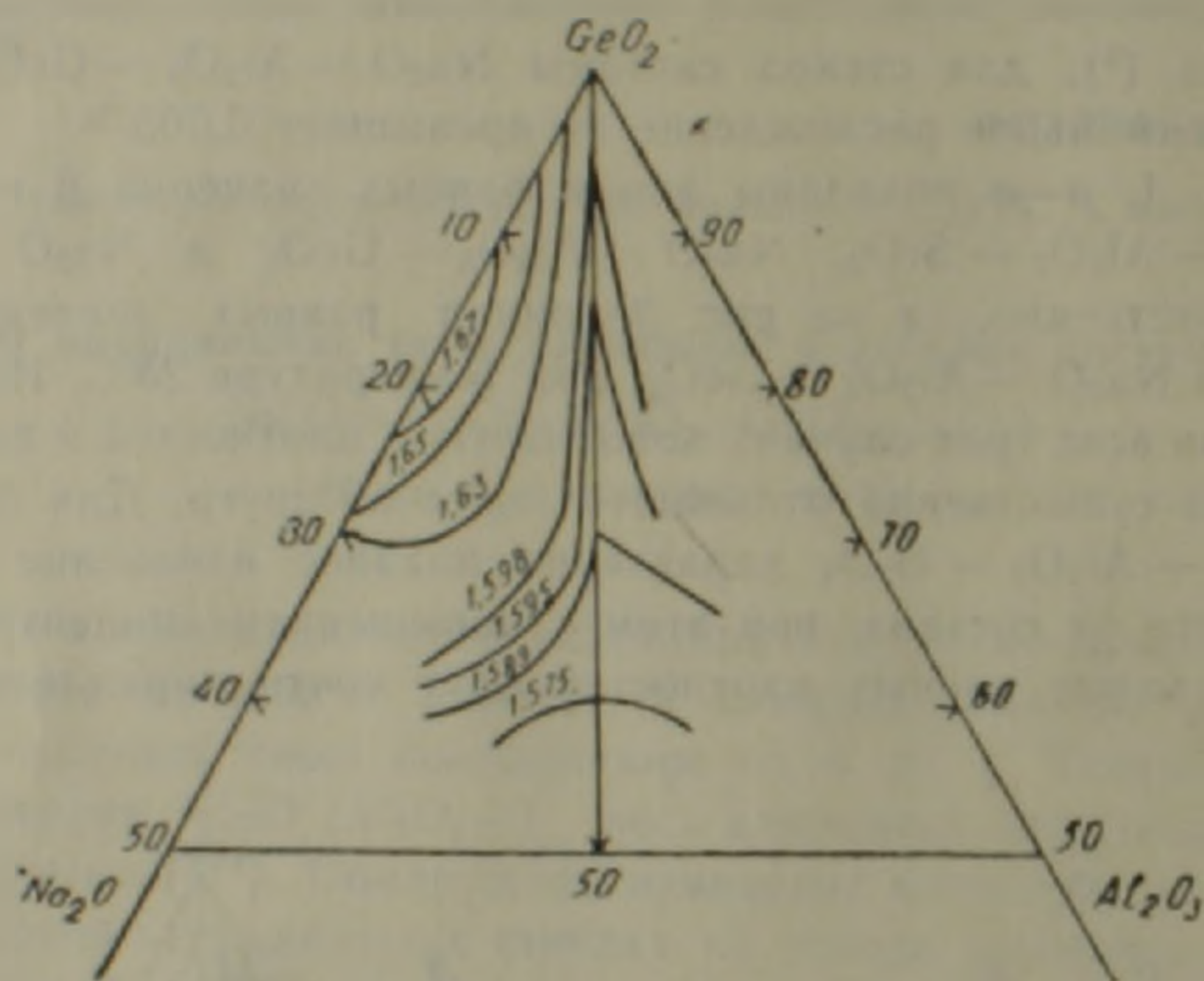


Рис. 2 Линии равных значений показателей преломления (при $T = 25^\circ\text{C}$) стекол системы $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{GeO}_2$

ная картина изменения хода кривых равных значений плотностей и показателей преломления наблюдается в германатной системе. Здесь, как это видно на рис. 1, б и 2, образуется своеобразный купол высоких значений этих свойств, примыкающий к стороне $\text{Na}_2\text{O} - \text{GeO}_2$. С ростом содержания окиси алюминия куполообразный ход линий равных значений свойств нарушается. Кривые равных значений плотностей и показателей преломления образуют острый пик вдоль линии $\text{Na}_2\text{O} / \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$, показывая сходство с кривыми равных значений удельного электрического сопротивления в этой системе.

Своеобразный ход кривых равных плотностей и коэффициентов преломления в германатной системе с образованием вышесогмеченного купола (рис. 1, б и 2) обусловлен наличием германия в четверной и шестерной координациях — (GeO_4) и (GeO_6) и влиянием окиси алюминия на перевод германия из шестерной в четверную координацию. Как известно из работ К. С. Евстропьева и Л. О. Иванова, максимум плотности и показателя преломления в системе $\text{Na}_2\text{O} - \text{GeO}_2$ обусловлен изменением координационного состояния иона германия ⁽¹⁰⁾. Прибавление окиси алюминия в эту систему, как видно из полученных

данных (рис. 1,б и 2), приводит к резкому изменению существующего соотношения между шести- и четырехкоординированным германием. Это изменение обусловлено двумя факторами: снижением общей концентрации самой двуокиси германия и изоморфно-изоструктурным замещением германия четырехкоординированным алюминием. В результате этого процесса концентрация шестикоординированного германия резко снижается, на линии $\text{Na}_2\text{O} / \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$ он уже отсутствует и дальнейшее прибавление окиси алюминия должно приводить к образованию шестикоординированного алюминия. Таким образом, в натриево-алюмогерманатных стеклах алюминий претерпевает те же координационные изменения, что и в соответствующих силикатных стеклах, с той лишь разницей, что в германатной системе алюминий способствует переводу германия в четверную координацию, что соответствующим образом отражается на свойствах этой системы.

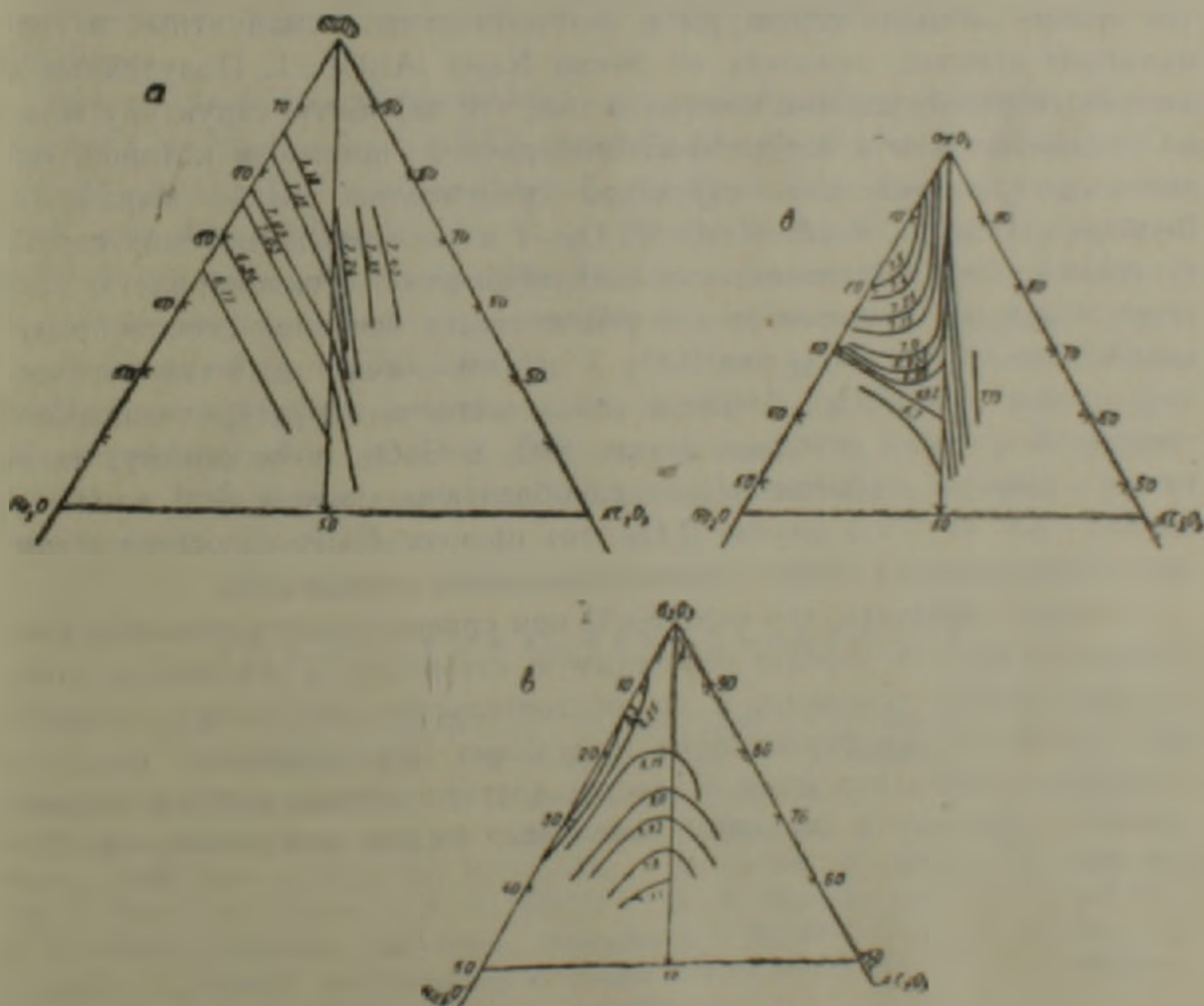


Рис. 3. Линии равных значений концентрации кислорода (при $T = 25^\circ\text{C}$) в стеклах систем: а) $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{SiO}_2$, б) $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{GeO}_2$, в) $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{B}_2\text{O}_3$.

Полученные данные по системе $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{B}_2\text{O}_3$ (рис. 1,в) не указывают на какие-либо структурные изменения, связанные с переменной координации бора или алюминия. Если исходить из равных концентраций кислорода в исследованной натриево-алюмоборатной систе-

ме (рис 3,а—в), то напрашивается вывод о наличии координационного изменения в этой системе, сходной с таковым в соответствующей германатной системе. В боратной системе при введении глинозема необходимо предположить переход четырехкоординированного бора в трехкоординированное состояние за счет образования четырехкоординированного алюминия. Как видно из рис. 3,в, в натриево-алюмоборатной системе тоже существует особая структура на линии $\text{Na}_2\text{O} / \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$, за которой необходимо предполагать уже существование шестикординированного алюминия. Отметим, что по данным ⁽⁷⁾ для системы $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{B}_2\text{O}_3$ существование шестикординированного алюминия вообще отрицается и структура натриево-алюмоборатного стекла предполагается состоящей из трикластеров, образование которых компенсирует нехватку кислорода.

В работе ⁽⁶⁾ на основании исследования электропроводности стекол систем $\text{Na}_2\text{O} - \text{Al}_2\text{O}_3 - (\text{SiO}_2, \text{GeO}_2, \text{B}_2\text{O}_3)$ делается вывод о наличии «разрыхленной» структуры в соответствующих силикатных и германатных стеклах, лежащих на линии $\text{Na}_2\text{O} / \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$. Полученные в настоящей работе данные говорят о том, что подобную структуру можно предполагать и в натриево-алюмоборатной системе, в которой, однако, эта «разрыхленная» структура сравнительно слабо выражена. Вообще, стекла на линии $\text{Na}_2\text{O} / \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$ в указанных системах структурно можно рассматривать как псевдобинарную стеклообразную систему, одним из компонентов которой является основной стеклообразующий окисел SiO_2 , GeO_2 или B_2O_3 , а другим — некоторый гипотетический окисел $(\text{NaAl})\text{O}_2$. Действие последнего в структуре основного стеклообразующего окисла в случае SiO_2 и GeO_2 , по-видимому, идентично и связано с замещением стеклообразующих ионов Si^{+4} или Ge^{+4} на пару $\text{Na}^+ \text{Al}^{+3}$, а в случае B_2O_3 этот процесс более сложный и связан с образованием общих боро-алюминатных комплексов.

Следует полагать, что пара NaAl при сравнительно небольшой концентрации создает хорошо совместимую структуру с основными стеклообразующими окислами, и это обстоятельство затрудняет дальнейшие процессы дифференциации отдельных составляющих по типу структур. Однако при этом создается достаточно искаженный каркас, который приводит к сильному изменению физико-химических свойств стекла.

Ալյումինումի իոնի կոորդինացիայի մասին $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-(\text{SiO}_2, \text{GeO}_2, \text{B}_2\text{O}_3)$
սխտեմների ապակիներում

Աշխատանքում բերված է $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-(\text{SiO}_2, \text{GeO}_2, \text{B}_2\text{O}_3)$ սխտեմներում ապակե վիճակների խտությունների և բեկման ցուցիչների արդյունքները: Ցույց է տրված այդ սխտեմների ապակիների խտությունների և բեկման ցուցիչների իզոթերմների նմանություններն ու տարբերությունները:

Ցույց է տարված, որ $\text{Na}_2\text{O}-\text{GeO}_2$ սխտեմին կավառոզի ավելացումը բերում է 6 և 4 կոորդինացիայով հանդես եկող զերմանիումի իոնների հարաբերության խիստ փոփոխման: Ենթադրվում է, որ $\text{Na}_2\text{O}/\text{Al}_2\text{O}_3=1$ հարաբերությունում վեց կոորդինացիայով հանդես եկող զերմանիումի իոնի առկայությունը բացառվում է: Ի տարբերություն նշվածի, սիլիկատային ապակիներում ալյումինումը կրում է նույն կոորդինացիոն ձևափոխությունները:

Ելնելով հավասար թթվածինների բաղադրությունների կորերից, ենթադրվում է, որ $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{B}_2\text{O}_3$ սխտեմում ևս ինչպես $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{SiO}_2$ և $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{GeO}_2$ սխտեմներում զոյություն ունի հատուկ բաղադրություն, որն ընկած է $\text{Na}_2\text{O}/\text{Al}_2\text{O}_3=1$ դժի վրա, և որ $\text{Na}_2\text{O}/\text{Al}_2\text{O}_3<1$ բաղադրությունների տիրույթում ալյումինումի կառուցվածքային վիճակը նույնն է, ինչպես համապատասխան սիլիկատային և զերմանատային ապակիներում:

Ենթադրվում է, որ $\text{Na}_2\text{O}/\text{Al}_2\text{O}_3=1$ դժի վրա սիլիկատային, զերմանատային և բորատային ապակիները պետք է դիտել որպես կեղծ երկբաղադրիչ ապակեզոյացնող սխտեմ: Որպես բաղադրիչներ հանդես են գալիս հիմնական ապակեզոյացուցիչները՝ SiO_2 , GeO_2 կամ B_2O_3 և ինչ-որ հիպոթետիկ օքսիդ՝ $(\text{NaAl})\text{O}_2$:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ I. O. Isard, J. Soc. Glass Technol., 43, 113 (1959) ² P. Л. Мюллер, А. А. Пронкин, ЖПХ, 36, 6, 1192 (1963) ³ В. А. Цехомский, О. В. Мазурин, К. К. Евстропьев, ФТТ, т. 5, в. 2 (1963). ⁴ А. А. Аннен, Химия стекла, 1970. ⁵ К. А. Костанян, С. Ш. Киракосян, Арм. хим. ж., XXVII, № 7 (1974). ⁶ С. Б. Гукасян, К. А. Костанян, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 2 (1978). ⁷ R. Gresch, W. Muller-Warmuth, H. Dutz, J. Mon-Cryst. Solids 2, 21, N1, (1976). ⁸ О. В. Мазурин и др. Свойства стекол и стеклообразующих расплавов, справочник, т. III, 1977. ⁹ M. K. Murthy, B. Scroggie, J. Physics and chemistry of glasses, V. 6, №5, 1965. ¹⁰ А. О. Иванов, К. С. Евстропьев, ДАН СССР, т. 145, №4 (1962)

УДК 595.792

ЭНТОМОЛОГИЯ

Е. К. Эртевцян

Новые виды родов *Mayridia* и *Litomastix* (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) из Армении

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 29/VII 1978)

В материале по энциртидам, собранном в Армении, оказалось 2 новых для науки вида из рода *Litomastix* и 1 новый вид рода *Mayridia*.

Голотипы и паратипы новых видов хранятся в коллекции Зоологического института АН СССР (Ленинград), часть паратипов — в коллекции Института зоологии АН Армянской ССР (Ереван).

Mayridia Mercet, 1921.

Паразиты мучнистых червецов (*Pseudococcidae*) и аклердид (*Aclerdidae*). В СССР известно 10 видов рода *Mayridia*. В Армении до настоящего времени было зарегистрировано 5 видов — *M. formosula* Mercet, *M. hyalipennis* Trjap., *M. merceti* Trjap., *M. myrlea* (Walk.), *M. pulchra* Mercet (¹⁻²). К этим пяти видам прибавляются еще два — *M. viridiscutellum* (Hoffer), впервые приводимый для фауны Армении, и новый для науки вид *M. terteriani*, sp. n., описание которого приводится ниже.

Mayridia terteriani Herthvitzian, sp. n. (рис. 1, а, б)

Самка. Голова шире груди. Темя и лоб менее чем в 1,5 раза длиннее своей ширины (17:13). Наименьшая ширина темени составляет менее 1/2 наибольшей ширины головы (13:31). Вершинный угол треугольника глазков 90°. Расстояние между задними глазками несколько более чем в 1,5 раза больше расстояния от заднего до переднего глазка и вдвое больше такового до края затылка (8:5:4). Расстояние от заднего глазка до внутреннего края глаза равно диаметру глазка. Край затылка закругленный. Щека более чем вдвое короче глаза (8:18). Усики причленяются непосредственно над уровнем нижнего края глаз. Расстояние между усиковыми ямками чуть больше расстояния от усиковой ямки до края глаза и края рта (5,5:5:5). Основной членик усиков более чем в 3,5 раза длиннее своей наибольшей ширины (11:3); поворотный членик вдвое длиннее первого членика жгутика; первый членик жгутика усиков немного длиннее остальных члеников.

второй и третий членики жгута квадратные, остальные членики слегка поперечные и постепенно расширяются к вершине жгута. Булава шире жгута и несколько длиннее трех последних члеников жгута, вместе взятых (9:8). Щит среднеспинки плоский, более чем в 1,5 раза шире своей длины и по длине равен щитику (26:16:16). Вершинные аксиллы соприкасаются. Длина переднего крыла менее чем в 2,5 раза превышает его максимальную ширину (74:30); маргинальная жилка равна радиальной или немного длиннее нее; постмаргинальная жилка развита. Шпора средней голени по длине равна первому членику средней лапки. Промежуточный сегмент короткий. Брюшко равно груди (40:38). Яйцеклад короткий, его выступающая часть составляет более 1/11 длины брюшка (3,5:40). Расстояние от основания брюшка до пигостилей менее 1/2 длины брюшка (17:40).



Рис. 1. а—б—*Mayridia testertani* Herthelzian, sp. n.;
а—усик; б—взрослое насекомое; в—усик *Litomastix minuta* Herthelzian,
sp. n.; г—усик *L. vicina* Herthelzian, sp. n.

Общий цвет тела темный, местами сине-фиолетово-зеленый с золотистым блеском. Голова зеленая с золотистым блеском, с боков с фиолетовым оттенком. Усики желтые, кроме затемненного поворотного членика и грязно-желтого шестого членика. Булава светлее жгута. Щит изумрудно-зеленый; аксиллы и щитик темно-фиолетовые или черные с бронзовым блеском. Бока среднегруди с фиолетовым оттенком. Передние крылья затемненные, с двумя светлыми поперечными полосами у основания и с изогнутой суженной посередине светлой полосой перед радиальной жилкой. Ноги темные со слабым фиолетовым отливом; основания и вершины голеней, особенно средних ног, а также членики всех лапок (кроме последнего) грязно-желтые или желто-белые. Промежуточный сегмент и брюшко темные, с фиолетовым и зеленым блеском. Скульптура тела сетчатая в редких точках, щитик почти гладкий, блестящий. Тело в светлых волосках.

Самец. Темя и лоб больше в ширину, чем в длину (15:13). Наименьшая ширина темени составляет несколько более $1/2$ наибольшей ширины головы (15:29). Вершинный угол треугольника глазков немного больше прямого. Усики причленяются заметно выше уровня нижнего края глаз. Расстояние между усиковыми ямками более чем в 1,5 раза больше расстояния от усиковой ямки до края глаза и вдвое меньше такового до края рта (5:3:11). Основной членик усиков в 2,5 раза длиннее своей наибольшей ширины (10:4); поворотный членик почти вдвое короче первого членика жгутика (4:7,5). Членики жгутика усиков длинные; первый членик длиннее остальных члеников. Булава шире жгутика и по длине равна двум последним членикам жгутика, вместе взятым (10:9). Вершина щита среднеспинки и щитик выпуклые. Шпора средней голени короче первого членика средней лапки. Брюшко короче груди (30:35).

Общий цвет тела темно-синий до черного с зеленым и фиолетовым оттенком. Голова и щит с зелено-бронзовым и пурпурно-фиолетовым блеском. Усики темные или темно-бурые. Крылья дымчатые, слегка затемнены под маргинальной жилкой. Щитик, аксиллы, промежуточный сегмент и брюшко с сине-фиолетовым блеском. Ноги почти затемненные; тазики и бедра всех ног (кроме их вершины), а также частично средние голени и последний членик всех лапок затемненные, остальные же части ног желтоватые или грязно-желтые. Длина тела около 0,9—1,27 мм.

Вид назван именем энтомолога А. Е. Тертеряна.

Голотип (♀): Джарат, Эчмиадзинского района, из *Pseudocossidae* gen. sp. на корнях прибрежницы, 10, 25/VI 1973 (Е. К. Эртенцян). Паратипы: там же, из того же хозяина, собр. 18/VII 1972, выл. 8/VIII 1972, 1 ♀, 1 ♂, собр. 28/V 1973, выл. 10, 25/VI 1973, 3 ♀♀, 2 ♂♂, собр. 3/VIII 1973, выл. 8/VIII 1973, 1 ♀ (Е. К. Эртенцян).

По строению усиков самки новый вид сходен с *Mayridia pulchra* Mercet, 1921, отличаясь от него отсутствием интенсивной зеленой окраски тела и фиолетовой окраской щитика.

Litomastix Thomson, 1876.

Полиэмбрионические паразиты гусениц чешуекрылых (*Lepidoptera*), откладывают яйца в яйца хозяина.

До настоящего времени в СССР отмечено было всего 4 вида этого рода, в Армении же ни одного. 2 вида — *Litomastix chalconota* (Dalmán) и *L. agrotis* (Fonsc.) указываются для Армении впервые, а 2 вида — *L. minuta* sp. n. и *L. vicina* sp. n. — как новые для науки виды.

Litomastix minuta Herthevtzian, sp. n. (рис. 1, в).

Самка. Темя и лоб шире своей длины (13:10). Наименьшая ширина темени чуть больше $1/2$ наибольшей ширины головы (13:24). Глазки в прямоугольном треугольнике. Расстояние между задними глазками в 1,5 раза больше расстояния от заднего до переднего глазка (6:4). Задние глазки почти прикасаются к краю затылка; затылок острый. Щека короче глаз (8:15). Усики причленяются почти у края рта. Рас-

стояние между усиковыми ямками менее чем в 1,5 раза больше расстояния от усиковой ямки до края глаза (5:3,5). Булава усиков короче жгутика, не усеченная, 3-члениковая, равна по длине 5 предыдущим членикам вместе взятым (12,5:13). Членики жгутика усиков длиннее своей ширины или почти квадратные; поворотный членик в 2 раза длиннее первого членика жгутика (4:2). Щит шире своей длины (22:13) и по длине равен щитику (13:13). Передние крылья более чем в 2 раза длиннее своей наибольшей ширины (64:29); постмаргинальная жилка развита, но значительно короче радиальной жилки. Брюшко почти равно груди (27:29).

Тело темное, с фиолетовым блеском. Щит с зелено-бронзовым блеском. Усики грязновато-желто-коричневые, более темные корешок и основная 1/2 основного членика усиков. Ноги желтые, кроме темных тазиков, бедер всех ног (кроме их вершины и основания), середины средних голеней и последних члеников всех лапок.

Темя и лоб, а также щит среднеспинки и щитик с очень мелко ячеистой скульптурой с разбросанными неглубокими точками. Длина тела 0,8—1 мм.

Самец неизвестен.

Голотип (♀): окр. Еревана, Джрвеж, 11/VIII 1969 (Е. К. Эртевцяи). Паратипы: там же, 9/VII 1968, 2 ♀ ♀, 29/V 1969, 2 ♀ ♀; Ереван, Канакерский совхоз, 19/VI 1968, 1 ♀; Ереван, Зоопарк, полынная полупустыня, 11/VII 1969, 1 ♀ (Е. К. Эртевцяи).

Новый вид не близок ни к одному из описанных палеарктических видов рода *Litomastix*.

Litomastix vicina Herthvitzian, sp. n. (рис. 1, 2).

Самка. Темя и лоб менее чем в 1,5 раза шире своей длины (19:14). Наименьшая ширина темени составляет 1/2 наибольшей ширины головы (19:38). Глазки в тупоугольном треугольнике. Вершинный угол треугольника глазков около 110°. Расстояние между задними глазками в два раза больше расстояния от заднего до переднего глазка (9,5:4,5). Расстояние от заднего глазка до края затылка меньше диаметра глазка. Щеки короче глаз (13:20). Край затылка острый. Усики прилегают непосредственно под уровнем нижних краев глаз. Расстояние между усиковыми ямками немного уступает расстоянию от усиковой ямки до края глаза и равно расстоянию от усиковой ямки до края рта (5:6,5). Булава усиков короче жгутика, косо усеченная, немного выше своего ка. Щеки короче глаз (13:20). Край затылка острый. Усики прилегающих (20:17). Все членики жгутика усиков длиннее своей ширины; первый членик жгутика усиков более чем в 3 раза длиннее своей ширины (7:2) и по длине равен поворотному членику (7:7). Средний выступ лица выражен. Щит среднеспинки почти одинаковой длины и ширины (27:30) и немного длиннее щитика (27:23). Передние крылья более чем в 2 раза длиннее своей наибольшей ширины (113:48); постмаргинальная жилка развита и лишь немного короче радиальной. Шпора средней голени короче первого членика средней лапки (9:10,5). Брюшко короче груди (42:53).

Тело темное, с фиолетовым блеском. Темя и лоб синие фиолетовые, с зеленым блеском. Щит среднеспинки с сильным зелено-бронзовым блеском. Ноги в основном темные, кроме грязно-желтых средних ног.

Темя и лоб, а также щит среднеспинки и щитик с мелко ячеистой скульптурой, с разбросанными неглубокими точками. Тело в редких светлых волосках. Длина тела 1,26—1,54 мм.

Самец неизвестен.

Голотип (♀) и паратипы: Цахкадзор, Разданского р-на, 1, 3—4, 7—9/IV 1969, 14♀♀ (Е. К. Эртевян).

Новый вид близок к *Litomastix serricornis* (Dalman) из Северной и Средней Европы, отличаясь от него более длинными члениками жгутика усиков самки и более короткой постмаргинальной жилкой передних крыльев.

Институт зоологии

Академии наук Армянской ССР

Ե. Կ. ԶԵՐԵՎԻԱՆ

**Mayridia b Litomastix սեպրի նոր տեսակներ
(Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) Հայաստանից**

Հոգնաժողով արվում է Հայաստանում հայտնաբերված դիտմիթրան համար 3 նոր տեսակների՝ *Mayridia terteriani* Herthvitzian, sp. n., ստացված որդան խոտի արմատների վրա ապրող ալրախոր որդանից՝ *Pseudococcidae* gen. sp., *Litomastix minuta* Herthvitzian, sp. n. և *Litomastix vicina* Herthvitzian, sp. n. նկարագրությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Կ Կ Ե Ն Ի Ր Յ ՈՒ Ն

- ¹ В. А. Тряпичин, Тр. ВЭО, т. 52. Насекомые Кавказа: 43—125, 1968. ² В. А. Тряпичин, В сб. Вредная и полезная фауна беспозвоночных Молдавии, Кишинев, 1—5: 128—130, 1969. ³ В. А. Тряпичин, Тр. ВЭО, т. 51. Паразитические насекомые энтомофаги: 68—150, 1971. ⁴ Е. К. Эртевян, «Биологический журнал Армении», т. XXIV, № 5 (1971). ⁵ Е. К. Эртевян, «Биологический журнал Армении», т. XXVI, № 1, (1973). ⁶ Е. К. Эртевян, В. А. Тряпичин, ДАН Арм ССР, т. LVIII, № 4 (1974). ⁷ А. С. Аветян, В. А. Тряпичин, Е. К. Эртевян, «Зоол сб. АН Арм ССР», т. XVII (1976).

УДК 595.792

ЭНТОМОЛОГИЯ

К. А. Джанокмен

Птеромалиды рода *Diglochis* Förster (Hymenoptera, Chalcidoidea, Pteromalidae) — паразиты слепней в Армении и других районах СССР

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 5/IV 1979)

Название *Diglochis* нельзя считать окончательно установленным для этого рода. Разные авторы трактуют его по-разному. Окончательно этот вопрос должен быть решен Международной комиссией зоологической номенклатуры. В настоящей статье мы принимаем род *Diglochis* в понимании Грэхема^(1,2).

До сих пор в роде был известен 1 вид. Нахождение в СССР двух новых видов позволяет несколько расширить характеристику рода. Кроме описания новых видов в статье приведено описание *Diglochis sylvicola* (Walker) по материалам из СССР.

Автор признателен А. Е. Тертеряну за предоставленный материал.

Голотипы и часть паратипов новых видов хранятся в Зоологическом институте АН СССР в Ленинграде, часть паратипов — в Институте зоологии АН КазССР в Алма-Ате и в Институте зоологии АН АрмССР в Ереване.

Род *Diglochis* Förster

Самка. Затылок на границе с теменем с тонким килем. Усики булавовидные, 14-члениковые, с 2 или 3 колечками, с 6 члениками жгутика и 3- или 4-члениковой булавой. Они причленяются на уровне нижнего края глаз. Наличник с усеченным или слабо выемчатым передним краем. Мандибулы 4-зубые. Глаза и все тело опушенные. Парасидальные борозды неполные. Передние крылья с зеркальцем или без него. Брюшко обычно сильно укороченное, усеченное, круглое или широкоовальное. 1-й видимый тергит занимает от 1/4 до 2/3 всей длины брюшка. Задние голени с одной шпорой.

Самец. Щеки сильно вздутые, опущены ниже уровня переднего края наличника. Мандибулы 4-зубые. Усики с 2 колечками, 6 члениками жгутика и 3-члениковой булавой, обычно полностью желтые.

Окраска тела ярче, чем у самки, зеленая, с большим присутствием металлического блеска.

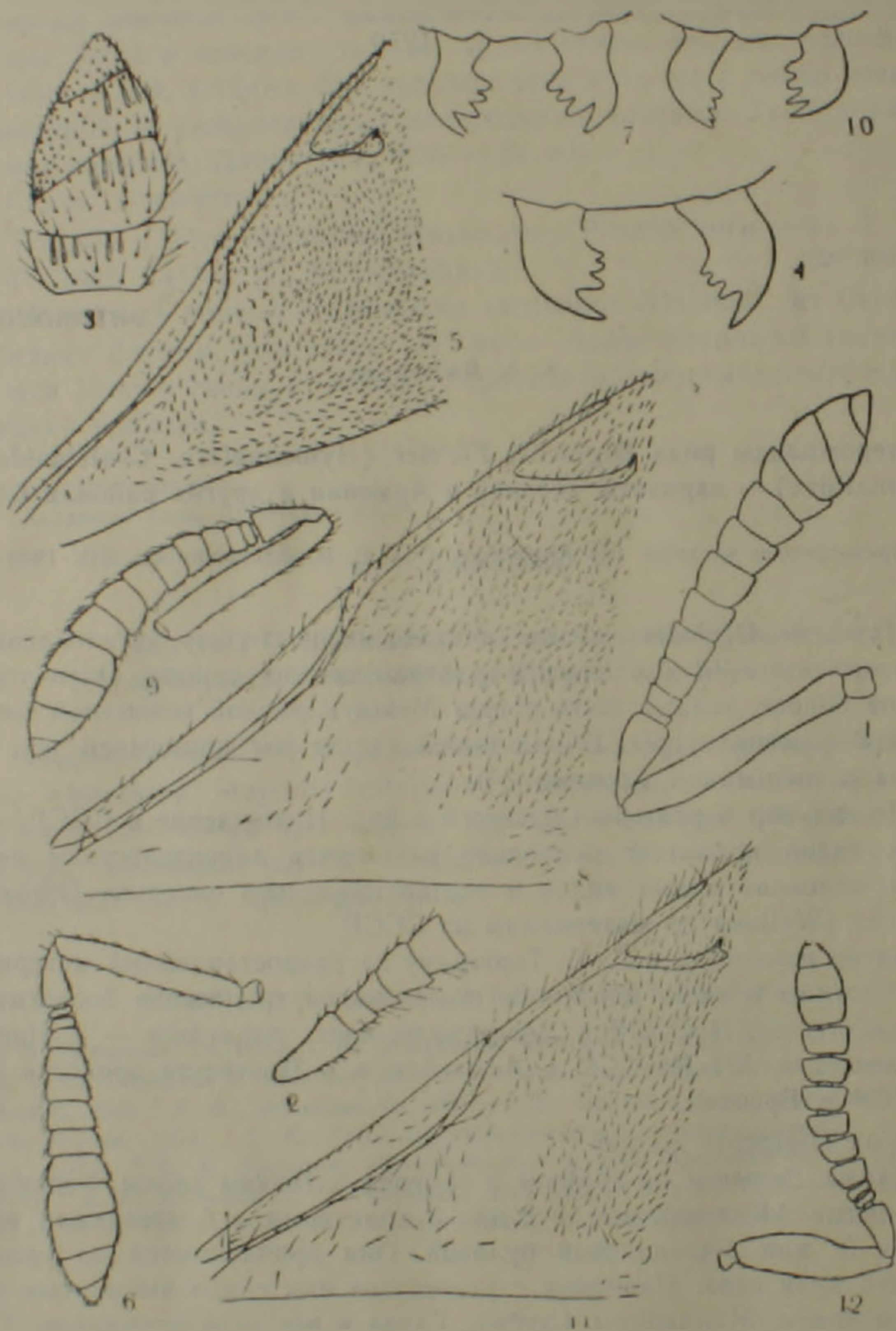


Рис. 1 1—5—*Diglochis tertiant* Dzhanokmen, sp. n., ♀: 1—усик, 2—часть усика; 3—бульва и 1-й членик жутика; 4—передний край налчннка и мандибулы; 5—часть переднего крыла. 6—8—*Diglochis hybomitra*, sp. n., ♀: 6—усик; 7—передний край налчннка и мандибулы; 8—часть переднего крыла. 9—12—*Diglochis sylvicola* (Walker): 9—усик ♀; 10—передний край налчннка и мандибулы ♀; 11—часть переднего крыла ♀; 12—усик

Diglochis terteriani Dzhanokmen, sp. n. (рис. 1, 1—5).

Самка. Голова на уровне усиковых ямок заметно выпуклая. Расстояние между задними глазками в 1,4 раза больше расстояния между задним глазком и краем глаза. Усики с 3 колечками, иногда один из усиков с 2 колечками (рис. 1, 1—2). Булава 3-члениковая, ее швы (вид сбоку) косые. Палочковидные сенсиллы расположены только на 1-м и 2-м члениках булав. Поверхность ее вершинного членика покрыта микроскопическими волосками (рис. 1, 3). Усиковые ямки ближе к переднему краю наличника, чем к переднему глазку. Промежуток между передним глазком и усиковыми ямками почти в 2 раза больше промежутка между последними и передним краем наличника. Наличник с усеченным передним краем (рис. 1, 4). Глаза маленькие, их продольный диаметр в 1,5 раза длиннее щеки.

Переднеспинка спереди неокаймленная. Среднеспинка и щитик довольно плоские. Промежуточный сегмент около $3/4$ длины щитика, с шейкой, базальными ямками и срединным килем в своей передней четверти. Передние крылья без зеркальца, с густо опушенным диском и базальной ячейкой, с длинной крыловой бахромкой. Постмаргинальная жилка немного длиннее радиальной (рис. 1, 5).

Брюшко короче груди, округлое, часто усеченное на вершине. Его 1-й видимый тергит большой, не менее $1/2$ всей длины брюшка, иногда полностью перекрывает все остальные тергиты.

Тело черное с очень слабым металлическим блеском, жгутик усика бурый, основной членик желтоватый, тазики цвета тела, бедра, голени и лапки желтовато-коричневые. Скульптура промежуточного сегмента грубо сетчато-пунктированная, треугольная зона боков груди ниже основания задних крыльев с тонкосетчатой скульптурой. Голова, грудь и ноги в густом опушении.

Длина тела 1,7—1,8 мм.

Самец неизвестен.

Материал. Армения: Севанский район, родниковый ручей, впадающий в р. Балык, около 2000 м над ур. м., из куколок *Tabanus bromius bromius* Linné (Diptera, Tabanidae), 30. VI—2. VII 1960, 24 ♀ (голотип и паратипы) (А. Е. Тертерян).

Diglochis hybomliri Dzhanokmen, sp. n. (рис. 1, 6—8).

Самка. Голова (вид спереди) ясно шире своей высоты. Усики с 2 колечками, 6 члениками жгутика и 4-члениковой булавой (рис. 6). Швы булав косые. Промежуток между передним глазком и усиковыми ямками в 1,8 раза больше промежутка между последними и передним краем наличника, который имеет слабую выемку (рис. 1, 7). Глаза большие, их продольный диаметр в 2,2 раза длиннее щеки.

Переднеспинка слабо окаймленная. Промежуточный сегмент со срединным и поперечными киями. Передние крылья с большим открытым зеркальцем. Базальная ячейка опушена в дистальной половине или только на вершине. Постмаргинальная жилка слегка короче радиальной (рис. 1, 8).

Брюшко часто укороченное, круглое или широкоовальное. Его 1-й

видимый тергит составляет от 1/4 длины брюшка до половины и больше.

Тело со слабым металлическим блеском, черное с бронзовыми отблесками. Жгутик усика темно-бурый, основной членик и ноги (кроме тапиков) светло-коричневые.

Длина тела 2,4 мм.

Самец неизвестен.

Материал. Тюменская обл.: Зубарево, из куколок слепней *Hybomitra* sp., 16. VI 1970, 6 ♀ (голотип и паратипы) (Павлова). Северный Казахстан: 40 км южнее Щучинска, редкостойный березовый лес, 11. IX 1974, 1 ♀ (паратип) (Джанокмен).

Diglochis sylvicola (Walker) (рис. 1, 9—12).

Самка. Голова (вид спереди) немного шире своей высоты. Усики с 2 колечками, 6 члениками жгутика и 4-члениковой булавой (рис. 1, 9). Швы булавы косые. Промежуток между передним глазком и усиковыми ямками почти в 2 раза больше промежутка между последними и передним краем слабовеячатого наличника (рис. 1, 10). Глаза большие, их продольный диаметр в 2 раза длиннее щеки.

Переднеспинка слабо окаймленная. Промежуточный сегмент с продольным килем и часто со слабыми поперечными киями. Передние крылья с зеркальцем, которое обычно небольшое, иногда совсем маленькое, открытое или закрытое. Базальная ячейка умеренно или очень густо опушенная. Постмаргинальная жилка слегка длиннее радиальной (рис. 1, 11).

Брюшко часто укороченное, его 1-й видимый тергит составляет от 1/3 длины брюшка до половины и больше.

Тело со слабым металлическим блеском, черно-зеленое. Жгутик усика бурый, основной членик усика, бедра, голени и лапки светлые, желтовато-коричневые. Скульптура промежуточного сегмента грубая, сетчато-пунктированная. Треугольная зона боков груди блестящая, гладкая, со следами сильно стертой сетчатой скульптуры.

Длина тела 1,7—2 мм.

Самец. Голова спереди почти квадратная из-за сильного развития щек. Глаза относительно меньше, чем у самки. Наличник с выемчатым передним краем. Щеки вздутые и опущены ниже уровня переднего края наличника. Усики (рис. 1, 12) слабо булавовидные, почти цилиндрические, полностью желтые или с легким затемнением булавы. Тело ярко-зеленое, с сильным металлическим блеском. Промежуточный сегмент с более слабой скульптурой, чем у самки.

Материал. Украина: окр. Чернигова, пойма р. Стрижень, из куколок слепней *Tabanus bovinus* L., 31. V 1977, 41 ♀, 2 ♂, 13. VI 1977, 45 ♀, 2 ♂ (Полевик), там же, из куколок слепней *Haematopota subcylindrica* Pand., 4. VI 1977, 16 ♀, 2 ♂ (Полевик). Тюменская обл.: Зубарево, из куколок слепней *Haematopota* sp., 21. VII 1970, 8 ♀, 2 ♂ (Павлова). Западный Казахстан: окр. пос. Дарьинск, берег Урала, на цветущем *Lythrum salicaria* L., 8, 10. VIII 1977, 2 ♀ (Джанокмен). Юго-Восточный Казахстан: Зайлиский Алатау, 25 км южнее пос.

Тургень, 22.VII 1971, 1♀, 24.VII 1971, 1♂, 27.VII 1971, 3♀, 1♂ (Джанокмен).

Изменчивость. Имеющиеся у нас экземпляры *Diglochis sylvicola* из Черниговской, Тюменской обл. и Казахстана позволили заметить значительную изменчивость некоторых признаков у представителей разных популяций. Учет изменчивости этих признаков необходим, поскольку наибольшее таксономическое и диагностическое значение имеют слабоизменчивые морфологические структуры. Оценка изменчивости возможна только при наличии большого фактического материала. В связи с этим нам еще не всегда ясен характер изменчивости *D. sylvicola*, иными словами, имеем ли мы дело с индивидуальной или географической изменчивостью или расами по хозяину. Пока мы ограничимся лишь констатацией изменчивости некоторых структур как у особей одной и той же популяции, так и у представителей разных популяций.

У *Diglochis sylvicola* изменчивости подвержены размер зеркальца на передних крыльях, интенсивность опушения базальной ячейки, форма брюшка, длина его 1-го видимого тергита и форма усиков. У экземпляров черниговской популяции и популяции из Заилыйского Алатау зеркальце умеренное, обычно открытое, редко закрытое, либо связи с кубитальной жилкой нарушена присутствием 1—3 щетинок. У экземпляров тюменской и западно-казахстанской популяций зеркальце маленькое и всегда закрытое.

Базальная ячейка передних крыльев у экземпляров черниговской популяции и популяции из Заилыйского Алатау умеренно опушенная, а у экземпляров тюменской и западно-казахстанской популяций густо опушенная.

Изменчива и форма усиков. Более тонкие и наименее булавовидные усики у экземпляров из Заилыйского Алатау.

Значительная индивидуальная изменчивость обнаруживается в форме брюшка и размерах его 1-го видимого тергита. Брюшко варьирует от сильно укороченного, почти усеченного на вершине, до круглого, а длина его 1-го тергита колеблется от 1/3 до половины всей длины брюшка и даже больше.

Определительная таблица видов рода

Diglochis Förster по самкам

- 1(2). Передние крылья без зеркальца, базальная ячейка густо опушенная; усики с 3 колечками, иногда один из усиков с 2 колечками; глаза маленькие. 1.7. — Армения. — Паразит куколок слепня *Gabanius bromius bromius* Linné *D. terterdani*, sp. n.
- 2(1). Передние крылья с зеркальцем, базальная ячейка умеренно опушенная; усики с 2 колечками, глаза большие.
- 3(4). Голова (вид спереди) ясно шире высоты; базальная ячейка опушена в дистальной половине или только на вершине; постмаргинальная жилка слегка короче радиальной. 2.4. — Тюменская обл., Северный Казахстан. — Паразит куколок слепня *Hybomitra* sp. *D. hybomitri*, sp. n.

4(3). Голова (вид спереди) слегка шире высоты; базальная ячейка умеренно или очень густо опушенная; постмаргинальная жилка слегка длиннее радиальной. 1.7—2. — Украина, Тюменская обл., Западный и Юго-Восточный Казахстан. — Паразит куколок слепня *Haematopota subcylindrica* Pand. . . *D. sylvicola* (Walker)

Институт зоологии
Академии наук Казахской ССР

Կ. Ա. ԶԱՆՈԿՄԵՆ

Diglochis Förster (Hymenoptera, Chalcidoidea, Pteromalidae)

սեռի պտերոմալիդներ-մոզերի պարագիտներ Հայաստանում և
ՍՍՀՄ այլ շրջաններում

Հոգիածումը բերված է մոզերի պարագիտ *Diglochis* Förster «նոգիտաթյան համար երկու նոր տեսակների նկարագրությունը: *D. terteriani* Dzhanokimen sp. n. տեսակը ստացվել է *Tabanus bromius bromius* L. մոզի հարսնյակներից Հայաստանում, իսկ *D. hybomitri* Dzhanokimen sp. n. տեսակը՝ *Hybomitra* sp. մոզի հարսնյակներից Տյումենի մարզում և Հյուսիսային Դաղախաստանում: Բացի այդ երկու նոր տեսակներից հոգիածումը բերված է *Haematopota subcylindrica* Pand. մոզի հարսնյակներից ստացված *D. sylvicola* (Walker) պարագիտի սվեդի մանրակրկիտ նկարագրությունը: Քննարկվում է *D. sylvicola* տեսակի անհասական և աշխարհագրական փոփոխականությունը: Տրված է որոշիչ նշված երեք տեսակների դիֆերենցման համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ M. W. R. de V. Graham, Entomologist's Mon. Mag., 92, 260, 1956. ² M. W. R. de V. Graham, Bull. British Museum (Natural History), Entomology, Supplement, 16, 1—908, 1969.

УДК 595.792

ЭНТОМОЛОГИЯ

В. А. Тряпичин, Е. К. Эртсаян

Tetralophisca — новый род энциртид (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) из аридной зоны Палеарктики

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанаржаном 5/IV 1979)

В качестве типового вида нового рода мы обозначаем *Tetralophidea dimorpha* Mercet. Это своеобразное паразитическое перепончатокрылое было описано из Центральной Испании (¹) и впоследствии обнаружено в Армении (Веди) и Нахичеванской АССР (Джульфа) (²). В коллекции Зоологического института АН СССР в Ленинграде имеются также экземпляры *T. dimorpha* из Казахстана и Средней Азии. Таким образом, этот вид, вероятно, довольно широко распространен в аридной зоне Палеарктики. В Средней Европе, в многолетних сборах Гоффера из Чехословакии и Биро из Венгрии, он не найден.

Систематическое положение *Tetralophidea dimorpha* было выяснено только после того, как в 1977 г. В. А. Тряпичин и американский энтомолог Гордон Горд предприняли совместное изучение материалов по энциртидам, хранящихся в Национальном музее США в Вашингтоне. Исследование типового вида рода *Tetralophidea* Ashmead — *T. bakeri* Ashmead, описанного из США, показало, что этот род является синонимом широко распространенного рода *Tetraneurus* Westwood (³) и что вид *Tetralophidea dimorpha* не может быть отнесен ни к одному из известных родов энциртид.

Описываемый ниже род *Tetralophisca* gen. n. должен быть включен, согласно классификации В. А. Тряпичина, в подтрибу *Rhinoencyrtina* Hoffer трибы *Rhinoencyrtini* Hoffer (⁴).

Tetralophisca Trjapitzin et Hertzevitzian, gen. n.

Самка. Тело компактное. Голова большая, гипогнатическая, чечевидообразная. Край затылка вогнутый, острый. Темя и лоб довольно широкие, с выпуклой поверхностью. Глазки в тупоугольном треугольнике. Верхний край и боковые края лицевой впадины закругленные. Щеки короче глаз. Усики прилегают недалеко от края рта. Основной членик усиков нерасширенный, длинный; поворотный членик неширокий, короткий; жгутик 6-члениковый, почти не расширенный или относительно слабо расширенный, все его членики (кроме 1-го или 1-го

и 2-го) шире своей длины; булава 3-члениковая, шире жгутика, с сильно выраженным косым усечением. Мандибулы 2-зубые, с несколько укороченным передним зубцом. Челюстные щупики 4-члениковые, нижнегубные — 3-члениковые. Грудь выпуклая. Переднеспинка очень короткая. Щит среднеспинки шире своей длины. Вершины аксепл соприкасаются. Передние крылья, будучи сложенными на спине, далеко заходят за вершину брюшка, но иногда с тенденцией к укороченности. Субмаргинальная жилка передних крыльев без треугольного расширения в вершинной трети; маргинальная и постмаргинальная жилки длинные; радиальная жилка короткая, не перпендикулярна по отношению к маргинальной и постмаргинальной жилкам. Диск передних крыльев с широкой поперечной темной полосой; край крыла с короткой бахромкой. 1-й членик средних лапок не укороченный; шпора средней голени несколько короче 1-го членика средней лапки. Промежуточный сегмент короткий, его бока с длинным густым серебристым опушением. Брюшко не длиннее груди, пигостили расположены обычно приблизительно на уровне 1/2 его длины; VII стернит достигает вершины брюшка. Тело темное, с металлическим блеском.

Самец. Темя и лоб очень широкие. Глаза сравнительно маленькие. Щеки длиннее глаз. Усики причленяются почти на уровне нижнего края глаз. 1-й членик жгутика усиков очень короткий, кольцевидный; 2—5-й членики с длинными ветвями, причем, собственно 2—4-й членики (не принимая во внимание их ветвей) короткие, а 5-й членик очень длинный, равен по длине 2—4-му членикам, вместе взятым; 6-й членик жгутика длиннее 5-го; булава пчеленистая, заметно шире последнего членика жгутика и короче его. Передние крылья без затемнения.

Типовой вид — *Tetralophidea dimorpha* Mercet, 1921.

Новый род близок к роду *Monodiscodes* Hölfer, отличаясь от него отсутствием у самки крупных ямок на поверхности головы, сильно развитым усечением булав усиков, выпуклым щитком и длинным густым серебристым опушением боков промежуточного сегмента.

Tetralophidea dimorpha (Mercet), comb. n.

Подробное описание вида было опубликовано Мерсетом (¹), давшим также тотальные рисунки самца и самки. Рисунок усика самки *T. dimorpha* приведен В. А. Тряпичным в определительной таблице родов энциртид Палеарктики (⁵).

В коллекции ЗИН АН СССР имеются следующие материалы по *T. dimorpha*:

Ведн, Армянская ССР, 8/V 1957 (В. А. Тряпичн), 1 ♂; Джульфа, Нахичеванская АССР, полынная полупустыня, 23/V 1957 (В. А. Тряпичн), 1 ♀; озеро Индер, Гурьевская обл., Казахстан, 1—2/VI 1932. (Ф. К. Лукьянович), 1 ♂; 30 км сев.-зап. Ташкента, злаково-разнотравная степь, 25/V 1978 (Н. Ю. Клюге), 1 ♀; Тамды-Булак—Уч-Кудук, пустыня Кызыл-Кум. Бухарская обл., Узбекистан, 12/V 1965 (Н. М. Кержнер), 2 ♀ ♀.

Зоологический институт

Академии наук СССР

Институт зоологии

Академии наук Армянской ССР

Նոր սեռ *Tetralophisca* էնցիբրտիդների (*Hymenoptera*, *Chalcidoidea*,
Encyrtidae) Պալեարկտիկայի արիդային գոնայից

Tetralophidea Ashmead տիպային սեռի տեսակ—*T. bakeri* Ashmead
ուսումնասիրությունը, որը նկարագրված էր Ս.Ֆերիկայի Միացյալ Նահանգ-
ներից, ցույց տվեց, որ *Tetralophidea* սեռը հանդիսանում է լայն տարածված
սեռի՝ *Tetracnemus* Westwood հոմանիշը և, որ *T. dimorpha* տեսակը չի
կարելի վերագրել այդ սեռերից և ոչ մեկին, ավելի նրան պետք է դասել *Tetra-*
lophisca gen. n. նոր սեռի մեջ, որի նկարագրությունը արվում է հոգվածում:

ЛИТЕРАТУРА—ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ R. C. Mercet, Fauna Iberica, Hymenopteros (am Encirtidos, Madrid, I—XI, 1—732, 1921. ² В. А. Тряпичин, Труды Всесоюзного энтомологического общества, 52, 1964. ³ В. А. Тряпичин, Г. Горд, Энтомологическое обозрение, LVII (2) (1978). ⁴ В. А. Тряпичин, Энтомологическое обозрение, LII (1) (1973). ⁵ В. А. Тряпичин, Труды Всесоюзного энтомологического общества, 54 (1971).

