

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
 ДОКЛАДЫ

LXVIII, № 3

1979

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնա-
 ծու (պատ. Բաբուղյար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
 ՆՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱ-
 ՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
 ՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
 ԲԱԼԱՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Վ. Մ. ԲՍՈՒՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ թղթակից-ան-
 դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
 Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
 (պատ. Խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹ-
 ՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
 ՆՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագիր),
 Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՆՍՍՀ ԳԱ թղթակից-
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՆՍՍՀ
 ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ,
 ՆՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
 АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
 мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
 демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),
 И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм-
 ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
 АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
 чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
 ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
 ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
 ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
 ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
 В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Վ. Հ. Մառտիրոսյան—Կոմպլեքս հարթության վրա բացթողումներով բազմանդամների հավասարաչափ մոտարկման մասին 129
- Լ. Վ. Միխայիլյան—Արգումենտների տարբերությունից կախված, մատրիցային կորիզներով հատված ինտեգրալ օպերատորների Ֆրեդհոլմի դետերմինանտների ասիմպտոտիկ վարքը 137
- Ս. Ա. Իրիգորյան—Արենս—Ջինգերի իմաստով անալիտիկ ֆունկցիաներով ծնված հանրահաշիվների մասին 145
- Վ. Կ. Օհանյան—Հատվածների պատահական դաշտերի ստոխաստիկ երկրաչափության կոմբինատոր սկզբունքներ 150

ՖԻԶԻԿԱ

- Վ. Հ. Վարդանյան—Ներվային ինպուլսի ժազման ֆիզիկական տեսության կառուցման եռաբազորության մասին 155
- Գ. Մ. Ավագյանց, Ռ. Ս. Բաբսեղյան, Մ. Ա. Ղուկասյան, Մ. Վ. Մինասյան, Ս. Ա. Սաբադյան—Սիլիցիումային բազմալմիտեր հզոր տրանզիստոր ջառասուն ամպերի կարգի հոսանքների համար 163

ԱՄՏՐՈՅԻՋԻԿԱ

- Ա. Գ. Իսկուդարյան—[ԷԷ] տիպի գալակտիկաների վիճակագրական ուսումնասիրության տվյալների բննարկումը 171
- Ա. Գ. Նիկողոսյան—Լույսի դիֆուզ անդրադարձումը կիսաանվերջ մթնոլորտից վերաբախման օրենքի դեպքում 176

ԲԻՈԹԻՄԻԱ

- Ժ. Ս. Գևորգյան, Ա. Ս. Հովհաննիսյան—Աղենոգիտների ֆոսֆորաթթվի ազդեցությունը մի քանի Լ-ամինաթթուներից ամիակի առաջացման վրա սպիտակ առնետների երիկամներում 183

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ն. Յ. Գալաշյան—Գնալուկ թզեղների նոր տեսակ Հայկական ՍՍՀ-ից (Coleoptera, Carabidae) 187

ՃԻՏՈՆԱԿԱՆՏՈՒԹՅՈՒՆ

- Ջ. Ա. Կառապետյան—Նեմատոդի նոր տեսակ Հայկական ՍՍՀ-ի փակ զբոսնոցի (Nematoda: Anag. olaimidae) 190

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год
На русском языке

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

	Стр.
<i>В. А. Мартиросян</i> — О равномерном приближении на комплексной плоскости многочленами с пропусками	129
<i>Л. В. Микаелян</i> — Асимптотическое поведение детерминантов Фредгольма усеченных интегральных операторов с матричными ядрами, зависящими от разности аргументов	137
<i>С. А. Григорян</i> — Об алгебрах, порожденных аналитическими по Аренсу—Зингеру функциями	146
<i>В. К. Оганян</i> — Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков	150

ФИЗИКА

<i>В. А. Варданян</i> — О возможности построения физической теории генерации первого импульса	155
<i>Г. М. Авакьянц, Р. С. Барсегян, М. А. Гуксян, М. В. Минасян, С. А. Саркисян</i> — Мощный многоэмиттерный кремниевый транзистор на токи порядка сорока ампер	163

АСТРОФИЗИКА

<i>С. Г. Искударян</i> — Обсуждение данных статистического исследования Igr II галактик	171
<i>А. Г. Никогосян</i> — Диффузное отражение света от полубесконечной атмосферы при законе перераспределения $g(x, x, \gamma)$	176

БИОХИМИЯ

<i>Ж. С. Геворкян, А. С. Оганесян</i> — Влияние аденозинтрифосфорной кислоты на образование аммиака из некоторых L-аминокислот в почках белых крыс	183
--	-----

ЭНТОМОЛОГИЯ

<i>М. Ю. Калашян</i> — Новый вид жужелиц из Армянской ССР (Coleoptera, Carabidae)	187
---	-----

ФИТОГЕЛЬМИНТОЛОГИЯ

<i>Дж. А. Карапетян</i> — Новый вид нематоды закрытого грунта из Армянской ССР (Nematoda: Panagrolaimidae)	190
--	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

P.

V. H. Martirosian—About uniform approximations in the complex plane by polynomials with gaps 129

L. V. Mikaellan—Asymptotic behavior of Fredholm determinants for the finite section integral operators with matrix kernels depending on the difference of arguments 137

S. A. Grigorlan—About Algebras, formed with the Analytical by Arens—Zinger Functions 146

V. K. Ohanian—The combinatorial principles in stochastic geometry of random fields of segments 150

PHYSICS

V. H. Vardanian—About the possibility of Building physical theory of generation of the nervous impulse 155

G. M. Avakants, R. S. Barsegian, M. A. Gukaslan, M. V. Minaslan, S. A. Sarkislan—A powerful multiemitterial silicon transistor for approximately forty amperes 163

ASTROPHYSICS

S. G. Iskudartan—The preliminary data of the statistical research of the Irrill type galaxies 171

A. G. Nikoghossian—Diffuse reflection from a semi-infinite atmosphere for the redistribution law $r_{11}(x', x, \gamma)$ 176

BIOCHEMISTRY

J. S. Gevorkian, A. S. Oganessian—Action of adenosinetriphosphate on the formation of ammonia from some L-amino acids in the rat kidney . . . 183

ENTOMOLOGY

M. Y. Ka'as'lan—A new species of groundbeetles from Armenia . . . 187

PHITHELMINTHOLOGY

J. A. Karapetian—A new species of the nematode from greenhouse in Armenia. (Nematoda: Panagrolaimidae) 190

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 05909 Подписано к печати 11/VI 1979 г. Тираж 535. Изд. 5042. Заказ 290
 Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 4,9. Бум. л. 2.
 Усл. печ. л. 5,6 Уч. изд. листов 4,21

Издательство АН АрмССР, Ереван, Барекамутян 24-г.
 Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. А. Мартиросян

О равномерном приближении на комплексной плоскости многочленами с пропусками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 15/XI 1978)

1. Пусть E —компакт из комплексной плоскости C , $A(E)$ —банахово пространство комплексных функций непрерывных на компакте E и голоморфных на множестве E° его внутренних точек с нормой $\|f\| = \sup |f|(E)$. Известный результат С. Н. Мергеляна (¹), дающий исчерпывающее решение проблемы комплексной полиномиальной аппроксимации, естественно приводит к следующему вопросу: при каких условиях на компакт E и на подпоследовательность натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ система функций

$$\{z^{p_n}\}_{n=0}^\infty, \quad p_0=0, \quad (1)$$

будет полной в пространстве $A(E)$, т. е. когда любую функцию из $A(E)$ можно приблизить равномерно на E многочленами вида

$$P(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^{p_n}?$$

Приведенная задача изучалась в совместной работе Н. У. Аракеляна и автора (²), причем предложенный в этой работе метод исследования был основан на использовании классической теоремы Вигерта—Поля о возможности однозначного аналитического продолжения степенного ряда за пределы его круга сходимости.

В настоящей работе приводится другой подход к изучению задачи о равномерном приближении многочленами с пропусками. Этот подход позволяет получить результаты работы (²). Кроме того, с его помощью удастся установить один новый случай возможности аппроксимации, из которого, в частности, следует уточнение известной аппроксимационной теоремы М. А. Лаврентьева.

Для формулировки основного результата работы введем обозначение

$$d_E(h) = \min_{z \in E} |z - h|.$$

Теорема. Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — подпоследовательность натуральных чисел плотности 1, $E \subset \mathbb{C}$ — компакт со связным дополнением. Тогда система функций (1) полна в $A(E)$, если имеет место одно из следующих условий:

- а) $0 \notin E$;
- б) $0 \notin \partial E$ и существует такая последовательность $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ из $\mathbb{C} \setminus E$, что $h_m \rightarrow 0$ и

$$\overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} \frac{|h_m|}{d_E(h_m)} < +\infty;$$

с) $0 \in \partial E$ и в любом круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ существует обходящая точку нуль жорданова кривая $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus E$;

д) $0 \in \partial E$ и не является предельной точкой для множества E° внутренних точек компакта E .

Отметим, что пункты а), б) и с) приведенной теоремы были иным методом установлены в (2).

2. При доказательстве теоремы нам понадобится следующая

Лемма. Пусть целая функция f представляется лакунарным степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0.$$

Если для некоторого числа $\alpha > 0$ справедливы неравенства

$$|f(z)| \leq C|z|^\alpha, \quad z \in S_m,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от m , $m = 1, 2, \dots$, а круги $S_m = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_m| \leq r_m\}$ таковы, что $z_m \rightarrow \infty$ и

$$1 < \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|z_m|}{r_m} \leq \overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} \frac{|z_m|}{r_m} < +\infty,$$

тогда f является многочленом порядка не выше α .

Отметим, что лемма доказывается путем комбинирования теоремы Вигерта ((1), стр. 18) и теоремы Адамара о композиции ((1), стр. 35).

Обратимся к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть для комплексной борелевской меры μ на компакте E , $0 \notin E^\circ$, справедливы соотношения

$$\int_E z^n d\mu_z = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Без потери общности можно предположить, что дополнением к подпоследовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно множества натуральных чисел является подпоследовательность $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$; ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q_n} = 0. \quad (3)$$

В силу теорем Хана-Банаха, Рисса и Мергеляна теорема будет доказана, если установить справедливость соотношений

$$\int_E z^{q_n} d\mu_z = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Рассмотрим функцию

$$G(t) = \int_E \frac{d\mu_z}{t-z}.$$

голоморфную по $t \in \bar{C} \setminus E$, $G(\infty) = 0$. Для любого достаточно большого t будет равномерно по $z \in E$ сходиться степенной ряд от (z/t)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{t}}.$$

Поэтому почленное интегрирование этого ряда по мере μ с учетом условий (2) показывает, что для таких значений t функция $G(t)$ будет разлагаться в степенной ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{-q_n-1} \cdot \int_E z^{q_n} d\mu_z. \quad (5)$$

Так как справедливо (3) и $0 \notin E$, то применяя к ряду (5) теорему Фабри об особых точках степенного ряда на его окружности сходимости ((¹), стр. 80), получим, что этот ряд определяет голоморфную по $t \in \bar{C} \setminus \{0\}$ функцию $G_1(t)$. Поскольку $C \setminus E$ — связно, то по теореме единственности аналитических функций будем иметь

$$G_1(t) = G(t), \quad t \in \bar{C} \setminus (E \cup \{0\}). \quad (6)$$

а) Допустим сперва, что $0 \notin E$, т. е. $0 \in \bar{C} \setminus E$ — области голоморфности функции $G(t)$. Тогда, в силу (6), $G_1(t)$ будет сужением на $\bar{C} \setminus \{0\}$ некоторой целой ограниченной функции. По теореме Лиувилля последняя функция будет константой и, в частности, будем иметь $G_1(t) \equiv \text{const}$, $t \in \bar{C} \setminus \{0\}$. Однако $G_1(\infty) = G(\infty) = 0$, поэтому получим $G_1(t) \equiv 0$, $t \in \bar{C} \setminus \{0\}$. Отсюда следует, очевидно, что все коэффициенты в тейлоровском разложении (5) функции $G_1(t)$ в окрестности точки $t = \infty$ будут нулевыми, т. е. справедливы соотношения (4).

б) Рассмотрим следующие круги из $C \setminus E$

$$D_m = \left\{ z \in C : |z - h_m| \leq \frac{1}{2} d_E(h_m) \right\},$$

где $|h_m|_{m=1}^{\infty}$ — указанная в условии теоремы последовательность точек. Так как

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{|h_m|}{d_E(h_m)} < +\infty,$$

то легко видеть, что

$$\frac{|h|}{d_E(h)} \leq C_1, \quad h \in D_m,$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от h и от m . Замечая далее, что

$$|G(t)| \leq \frac{C_2}{d_E(t)}, \quad t \in C \setminus E,$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от точки t , будем иметь

$$|G(h)h| \leq C, \quad h \in D_m,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от h и от m . Следовательно, учитывая соотношение (6), получим

$$|G_1(h)h| \leq C, \quad h \in D_m.$$

Применяя к функции $G_1(t)$ лемму, получим, что она является полиномом от $1/t$ порядка не выше 1. Отсюда непосредственно следуют соотношения (4).

с) Так как $C \setminus E$ — связно, то в этом случае можно построить такую последовательность контуров $\gamma_k \subset C \setminus E$, обходящих точку нуль, что их диаметры стремятся к нулю и $\gamma_{k+1} \subset G_k$, где G_k — ограниченная область с границей γ_k , $k = 1, 2, \dots$. Обозначим $E_k = E \setminus (E \cap G_k)$; ясно, что $E_k \cap (E \setminus E_k) = \emptyset$, $k = 1, 2, \dots$. Из определения функции $G_1(t)$ следует, что при каждом $n = 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$ будем иметь

$$\int_E z^n d\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} G_1(t) t^n dt.$$

Однако $\gamma_k \subset C \setminus E$, $k = 1, 2, \dots$, и поэтому, согласно (6),

$$\int_E z^n d\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} t^n dt \int_E \frac{d\mu_z}{t-z}.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини и интегральную формулу Коши, получим

$$\int_E z^n d\mu_z = \int_{E \setminus E_k} z^n d\mu_z$$

и, следовательно, будем иметь

$$\int_{E_k} z^n d\mu_z = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Переходя в (7) к пределу при $k \rightarrow \infty$, что возможно по теореме Лебега, приходим к соотношениям (4).

d) Как известно, интеграл

$$G(t) = \int_E \frac{d\mu_z}{t-z}$$

абсолютно сходится для почти всех $t \in \bar{C}$ в смысле плоской лебеговой меры. Согласно условию теоремы найдется такой круг $U = \{z \in C : |z| < r\}$, что множество $U \cap E$ не имеет внутренних точек.

Предположим сперва*, что $G(t) = G_1(t)$ для почти всех $t \in U \cap E$ в смысле плоской лебеговой меры. Возьмем окружность γ с центром в нуле и содержащуюся внутри круга U . Имеем, что для почти всех значений $t \in U \cap E$, лежащих во внешности γ ,

$$G_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G_1(z)}{t-z} dz = G(t) \quad (8)$$

На компакте $E \cup \gamma$ зададим меру $\nu(e)$ борелевских подмножеств e следующим образом

$$\nu(e) = \mu(e \cap E) - \frac{1}{2\pi i} \int_{e \cap \gamma} G_1(t) dt \quad (9)$$

Тогда из (8) и (9) следует, что для почти всех значений $t \in U \cap E$, лежащих во внешности γ , будем иметь

$$\int_{E \cup \gamma} \frac{d\nu_z}{t-z} = 0 \quad (10)$$

Из (10) стандартными рассуждениями выводим ((³), стр. 39), что для любого борелевского подмножества $e \subset U \cap E$, лежащего во внешности γ , должно быть $\nu(e) = 0$. Но для таких множеств $\nu(e) = \mu(e)$ и, следовательно, $\mu(e) = 0$. Так как радиус окружности γ можно брать произвольно малым, то на множестве $U \cap E$ мера μ может быть сосредоточена в единственной точке 0. Следовательно, из условий ортогональности (2) получим

$$\int_{E \setminus (E \cap U)} z^n d\mu_z = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Откуда, в силу пункта а) теоремы, будем иметь

$$\int_{E \setminus (E \cap U)} z^n d\mu_z = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

или, что то же, — соотношения (4).

Допустим теперь, что равенство $G(t) = G_1(t)$ не имеет места почти везде на $U \cap E$ в смысле плоской лебеговой меры, и покажем

* Здесь используются рассуждения из работы С. Я. Хавинсона (⁴).

невозможность подобной ситуации. В силу допущения всегда найдется такая точка $t_0 \in U \cap E$, $t_0 \neq 0$, что

$$\int_E \frac{d|\mu_z|}{|t_0 - z|} < +\infty \quad (11)$$

и

$$G(t_0) \neq G_1(t_0) \quad (12)$$

Из (11) будем иметь $\mu(\{t_0\}) = 0$. Возьмем настолько малую окружность γ с центром в нуле, чтобы t_0 лежало во внешности γ . Обозначим через Ω ту из дополнительных к компакт $EU\gamma$ областей, которая содержит точку ∞ ; ясно, что $t_0 \in \partial\Omega$. Пусть окружность Γ с центром в нуле содержит внутри себя компакт E . Тогда для произвольного многочлена $Q(z)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_E Q(z) d\mu_z &= \int_E d\mu_z \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Q(t) dt \int_E \frac{d\mu_z}{t-z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Q(t) G_1(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q(t) G_1(t) dt \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношение (13) означает, что мера ν на $EU\gamma$, введенная по формуле (9), ортогональна к любому многочлену $Q(z)$. Так как $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ тоже многочлен, то из этой ортогональности получим

$$\int_{EU\gamma} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} d\nu_t = 0,$$

или

$$\int_{EU\gamma} \frac{Q(t) d\nu_t}{t - t_0} = Q(t_0) \int_{EU\gamma} \frac{d\nu_t}{t - t_0} \quad (14)$$

причем, согласно (11), интегралы сходятся абсолютно. Пусть $P(EU\gamma)$ — алгебра всех непрерывных на компакте $EU\gamma$ функций, являющихся равномерными пределами многочленов. Для любой функции $g \in P(EU\gamma)$ будем иметь из (14)

$$\int_{EU\gamma} \frac{g(t) d\nu_t}{t - t_0} = g(t_0) \cdot \int_{EU\gamma} \frac{d\nu_t}{t - t_0} \quad (15)$$

Сужение $P(EU\gamma)$ на $\partial\Omega$ — алгебра $P(\partial\Omega)$ есть алгебра Дирихле ((³), стр. 30). Поэтому минимальная граница $P(\partial\Omega)$ совпадает с $\partial\Omega$ и так как $t_0 \in \partial\Omega$, то существует функция $g \in P(\partial\Omega)$ такая, что $g(t_0) = 1$, $|g(t)| < 1$, $t \in \partial\Omega$, $t \neq t_0$. В силу принципа максимума можно считать, что g продолжена на $EU\gamma$ и там имеет место неравенство $|g(t)| < 1$, $t \neq t_0$. Применяя (15) к функциям $|g^k|_{k=1}^{\infty}$, получим:

$$\int_{EU_1} \frac{g^k(t)}{t-t_0} d\nu_t = \int_{EU_1} \frac{d\nu_t}{t-t_0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Последовательность $\{g^k\}_{k=1}^\infty$ сходится на EU_1 к нулю всюду, кроме точки $t = t_0$, и, следовательно, она сходится к нулю почти везде по мере ν , так как $\nu(\{t_0\}) = \mu(\{t_0\}) = 0$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим:

$$\int_{EU_1} \frac{d\nu_t}{t-t_0} = 0.$$

Но, с другой стороны, согласно (12)

$$\int_{EU_1} \frac{d\nu_t}{t-t_0} = -G(t_0) + G_1(t_0) \neq 0,$$

противоречие. Теорема доказана.

Автор благодарен Н. У. Аракеляну за внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Կոմպլեքս հարթության վրա բացրոդումներով բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման մասին

Թող $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ լինի բնական թվերի որևէ ենթահաջորդականություն, իսկ E -ն C կոմպլեքս հարթության կոմպակտ ենթաբազմություն, ներկա աշխատանքում շարունակված է Ն. Հ. Առաքելյանի հետ համատեղ (*) աշխատանքում սկսած խնդրի ուսումնասիրությունը. այն է՝ երբ կամայական E կոմպակտի վրա անընդհատ և նրա E° ներքին կետերի բազմության վրա հոլոմորֆ ֆունկցիային կարելի է հավասարաչափ E -ի վրա մոտարկել

$$P(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^{p_n}, \quad p_0 = 0,$$

տեսքի բազմանդամներով:

Ստացված է ⁽²⁾ աշխատանքի արդյունքների նոր ապացույց: Բացի
 դրանից, գտնված է մոտարկման հնարավորության նոր դեպք $\left(\frac{n}{p_n} \rightarrow 1, C\right)$
 E -ն կապակցված է և O -ն E° -ի համար սահմանափակ կետ չէ), որն իր մեջ,
 մասնավոր դեպքում, պարունակում է II . 11. Լավրենտևի հայտնի թեորեմի
 ճշգրտում:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Н. Мергелян, Успехи матем. наук, т. 7, № 2, 31—122 (1952). ² Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, ДАН СССР, т. 235, № 2, 249—252 (1977). ³ Л. Биберах, Аналитическое продолжение, «Наука», М., 1967. ⁴ С. Я. Хавинсон, Матем. заметки, т. 6, № 5, 619—625 (1969). ⁵ Дж. Вермер, Банаховы алгебры и аналитические функции, в сб. «Некоторые вопросы теории приближений», «Иностр. литерат.», М., 1963.

УДК 517.4

МАТЕМАТИКА

Л. В. Микаелян

Асимптотическое поведение детерминантов Фредгольма усеченных
интегральных операторов с матричными ядрами, зависящими от
разности аргументов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/XII 1978)

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(t) + \lambda \int_0^r K(t-s)f(s)ds = g(t) \quad (0 \leq t \leq r, \quad 0 < r < \infty), \quad (1)$$

где $K(t) = \|k_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$ ($-\infty < t < \infty$) — заданная матрица-функция, $g(t) = \{g_j(t)\}_{j=1}^n$ — заданная, а $f(t) = \{f_j(t)\}_{j=1}^n$ — искомая вектор-функция. Применяя способ, предложенный Фредгольмом, легко видеть, что эта система эквивалентна следующему скалярному уравнению

$$F(t) + \lambda \int_0^{nr} K_r(t, s)F(s)ds = G(t) \quad (0 \leq t \leq nr); \quad (2)$$

здесь $F(t) = f_j(t - (j-1)r)$, $G(t) = g_j(t - (j-1)r)$ при $(j-1)r \leq t < jr$, а $K_r(t, s) = k_{ij}(t - (i-1)r - s + (j-1)r)$ при $(i-1)r \leq t < ir$, $(j-1)r \leq s < jr$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Для этого уравнения, при определенных условиях, обычным образом определяется детерминант Фредгольма

$$D(K_r, \lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{nr} \dots \int_0^{nr} K_r \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_k, \quad (3)$$

где

$$K_r \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} = \det \|K_r(s_i, s_j)\|_{i,j=1}^k$$

— символ Фредгольма.

Так как спектры системы (1) и уравнения (2) совпадают, то естественно назвать детерминантом Фредгольма системы (1) $D(K, \lambda)$, который здесь обозначается через $D_r(K, \lambda)$.

В этой заметке изучается асимптотическое поведение $D_r(K, \lambda)$ при $r \rightarrow \infty$. Тем самым рассматривается континуальный аналог задачи о поведении детерминанта блочно-теплицевой матрицы $\|C_{i-j}\|_{i,j=1}^n$ при $k \rightarrow \infty$, где C_j ($j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — некоторые матрицы фиксированного порядка n .

Последней задачей, в скалярном случае, когда c_j являются коэффициентами Фурье положительной функции $p(t)$, впервые занимался Г. Сеге ⁽¹⁾. Позже уточнению и обобщению результатов Г. Сеге было посвящено много работ: М. Г. Крейн ⁽²⁾, Хиршман ⁽³⁾, Девинатц ⁽⁴⁾, Я. Л. Геронимус ⁽⁵⁾, Б. П. Голинский и И. А. Ибрагимов ⁽⁶⁾ и др.

В случае, когда c_j — коэффициенты Фурье матрицы-функции $c(t)$, вопрос о нахождении асимптотики для $\det \|c_{i-j}\|_{i,j=1}^n$ при $k \rightarrow \infty$ был рассмотрен Боуерсом ⁽⁷⁾, Ундомом ⁽⁸⁾ и др.

В скалярном случае использованием теоретико-вероятностных методов континуальные аналоги теорем Г. Сеге впервые были обнаружены М. Кацем ⁽⁹⁾. Другие результаты в этом направлении были получены Н. И. Ахизером ⁽¹⁰⁾, Хиршманом ⁽³⁾, В. Н. Солевым ⁽¹¹⁾.

Некоторые результаты по континуальным аналогам теорем Г. Сеге для матричного случая приведены в работах И. Ю. Линника ⁽¹²⁾ и автора ⁽¹³⁾.

1° Введем необходимые обозначения и изложим некоторые известные и вспомогательные предложения.

Пусть $L_1^{(n \times n)}$ — банахово пространство матриц-функций $\Phi(t) = \|\varphi_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$ с элементами из $L_1(-\infty, \infty)$ и с нормой

$$|\Phi| = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n |\varphi_{ij}(t)| dt.$$

Нетрудно проверить, что множество всех матриц-функций, допускающих представление

$$\Phi(\lambda) = C_\Phi + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(t) e^{i\lambda t} dt, \quad (4)$$

где $C_\Phi = \|C_\Phi^j\|_{j=1}^n$ — некоторая постоянная матрица, $\Phi(t) \in L_1^{(n \times n)}$, является банаховой алгеброй относительно поточечного умножения с нормой

$$\|\Phi(\lambda)\| = |C_\Phi| + |\hat{\Phi}|;$$

здесь $|C_\Phi| = \sum_{j=1}^n |C_\Phi^j|$. Обозначим эту алгебру через $R^{(n \times n)}$. Определим

подалгебру $R_+^{(n \times n)}(R_-^{(n \times n)})$ алгебры $R^{(n \times n)}$ следующим образом:

$\Phi(\lambda) \in R_+^{(n \times n)}$ ($\Phi(\lambda) \in R_-^{(n \times n)}$), если в представлении (4) $\hat{\Phi}(t) = 0$ при $t < 0$ ($t > 0$).

Через $L_2^{(n)}$ обозначим гильбертово пространство n -мерных вектор-функций, определенных на полуоси $(0, \infty)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^\infty g^*(t) f(t) dt.$$

Если

$$K(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt \in R^{(n \times n)},$$

то в пространстве $L_2^{(n)}$ определим следующие операторы, ассоциированные с $K(\lambda)$:

$$T(K)f = f(t) + \int_0^\infty \hat{K}(t-s) f(s) ds \quad (0 \leq t < \infty), \quad (5)$$

$$H(K)f = \int_0^\infty \hat{K}(t+s) f(s) ds \quad (0 \leq t < \infty), \quad (6)$$

а также операторы

$$(P_r f)(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in [0, r] \\ 0, & \text{если } t \in (r, \infty). \end{cases}$$

$$(Q_r f)(t) = \begin{cases} f(r-t), & \text{если } t \in [0, r] \\ 0, & \text{если } t \in (r, \infty). \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$T(K_1 K_2) = T(K_1) T(K_2) = H(K_1) H(\bar{K}_2), \quad (7)$$

$$T_r(K_1 K_2) = T_r(K_1) T_r(K_2) = P_r H(K_1) H(\bar{K}_2) P_r + Q_r H(\bar{K}_1) H(K_2) Q_r, \quad (8)$$

здесь $T_r(K) = P_r T(K) P_r$, а $\bar{K}(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(-t) e^{i\lambda t} dt$.

Рассмотрим множество $K^{(n \times n)}$, состоящее из тех матриц-функций $\Phi(\lambda) \in R^{(n \times n)}$, для которых конечна величина

$$\|\Phi\|_1 = \|C\Phi\|_1 + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t| |\Phi(t)|_1^2 dt \right)^{1/2}$$

Если эту величину принять за норму, то из работы М. Г. Крейна ⁽³⁾ следует, что $K^{(n \times n)}$ является банаховой алгеброй.

Известно, что если $K(\cdot) \in K^{(n \times n)}$, то операторы $H(K)$ и $H(\bar{K})$ являются операторами Гильберта—Шмидта ⁽¹⁴⁾.

Отметим две леммы, полезные в дальнейшем.

Пусть задано векторное интегральное уравнение

$$f(t) + \lambda \int_0^r K(t, s) f(s) ds = g(t). \quad (9)$$

Для этого уравнения определим детерминант Фредгольма $D_r(K, \lambda)$ как (3), принимая в нем

$$K_r(t, s) = k_{ij}(t - (i-1)r, s - (j-1)r) \{ (i-1)r \leq t < ir, (j-1)r \leq s < jr \}, \\ (i, j = 1, 2, \dots, n), \text{ где } K(t, s) = \|k_{ij}(t, s)\|_{i,j=1}^n.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Если в уравнении (9) матрица-функция $K(t, s) = 0$ при $t > s$ или $t < s$, тогда

$$D_r(K, \lambda) = \exp \left[\lambda \int_0^r \text{sp} K(s, s) ds \right].$$

Кроме этой леммы нам понадобится еще

Лемма 2. Если матрица-функция

$$K(\cdot) = I_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt \in R^{(n \times n)}$$

допускает факторизацию

$$I_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt = \left(I_n + \int_0^{\infty} \hat{K}_+(t) e^{i\lambda t} dt \right) \left(I_n + \int_{-\infty}^0 \hat{K}_-(t) e^{i\lambda t} dt \right),$$

где матрицы-функции $\hat{K}_+(t)$ и $\hat{K}_-(t)$ непрерывны в нуле, тогда

$$\text{sp}[\hat{K}_+(0) + \hat{K}_-(0)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\lambda|}{T} \right) \ln \det K(i) d\lambda.$$

* Если $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$, то $|A|_1 = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$.

2. Пусть

$$K(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt \in R^{(n \times n)}$$

обратим в этой алгебре. Обратное к нему обозначим через

$$K^{-1}(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}^0(t) e^{i\lambda t} dt \in R^{(n \times n)}.$$

Операторы $T(K^{-1})$ и $H(K^{-1})$ определяются равенствами (5) и (6) заменой в них матрицы-функции $\hat{K}(t)$ на $\hat{K}^0(t)$.

Обозначим через $D_r(K) = D_r(\hat{K}, 1)$.

Теорема 1. Если

$$K(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt \in K^{(n \times n)}$$

допускает факторизацию

$$K(\lambda) = K_+(\lambda) K_-(\lambda) = \left(I_n + \int_0^{+\infty} \hat{K}_+(t) e^{i\lambda t} dt \right) \left(I_n + \int_{-\infty}^0 \hat{K}_-(t) e^{i\lambda t} dt \right), \quad (10)$$

причем $K_{\pm}^{-1}(\lambda) \in K^{(n \times n)}$, матрицы-функции $\hat{K}_{\pm}(t)$ непрерывны в нуле и ограничены в каждом конечном интервале, тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r(K)}{|G(K)|^r} = \det [T(K)T(K^{-1})],$$

где

$$G(K) = \exp \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{|p|}{r} \right) \ln \det K(i) d\lambda \right\}.$$

Доказательство: Из (10) следует, что

$$K(\lambda) K_-^{-1}(\lambda) = K_+(\lambda).$$

Применяя равенство (8) и учитывая, что $H(K_-^{-1}) = 0$, имеем

$$T_r(K_+) = T_r(K) T_r(K_-^{-1}) = P_r H(K) H(K_-^{-1}) P_r,$$

а значит

$$T_r(K_+) T_r(K_+^{-1}) = T_r(K) T_r(K_-^{-1}) T_r(K_+^{-1}) = P_r H(K) H(K_-^{-1}) P_r T_r(K_+^{-1}). \quad (11)$$

Из (8) нетрудно заметить, что

$$T_r(K_+)T_r(K_+^{-1})=P_r, \quad T_r(K_-)T_r(K_-^{-1})=P_r. \quad (12)$$

Поэтому (11) примет следующий вид:

$$T_r(K)T_r(K_-^{-1})T_r(K_+^{-1})=P_r-P_rH(K)H(\bar{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1}). \quad (13)$$

Как отмечалось выше, при условиях теоремы, операторы $H(K)$ и $H(\bar{K}_-^{-1})$ являются операторами Гильберта—Шмидта. Значит второй член правой части (13) является ядерным оператором. В этом случае (14) детерминант Фредгольма правой части (13) совпадает с выражением

$$\det[P_r-P_rH(K)H(\bar{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})]=\prod(1-\lambda_j(r)),$$

где $\lambda_j(r)$ —собственные числа оператора $P_rH(K)H(\bar{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})$.

Принимая во внимание, что детерминант Фредгольма от интегрального оператора, стоящего в левой части равенства (13), в точке $\lambda=1$ равняется величине $D_r(K)D_r(K_-^{-1})D_r(K_+^{-1})$, имеем

$$D_r(K)D_r(K_-^{-1})D_r(K_+^{-1})=\det[P_r-P_rH(K)H(\bar{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})]. \quad (14)$$

Учитывая, что $D_r(K_+^{-1})=[D_r(K_+)]^{-1}$, (14) можно переписать в виде

$$\frac{D_r(K)}{D_r(K_+)D_r(K_-)}=\det[P_r-P_rH(K)H(\bar{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})]. \quad (15)$$

По лемме 1

$$D_r(K_\pm)=\exp\left\{\int_0^r \operatorname{sp} \hat{K}_\pm(s-s)ds\right\}=\exp[r \operatorname{sp} \hat{K}_\pm(0)].$$

Поэтому по лемме 2 можно утверждать, что знаменатель в левой части формулы (15) равняется $[G(K)]^r$.

Значит (15) запишется в виде:

$$\frac{D_r(K)}{[G(K)]^r}=\det[P_r-P_rH(K)H(\bar{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})].$$

Очевидно, что $P_r \rightarrow I$ при $r \rightarrow \infty$ в сильном смысле, где I —тождественный оператор в $L_2^{(n)}$. Поэтому

$$P_rH(K)H(\bar{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1}) \rightarrow H(K)H(\bar{K}_-^{-1})T(K_+^{-1})$$

в ядерной метрике. Так что имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r(K)}{[G(K)]^r}=\det(I-H(K)H(\bar{K}_-^{-1})T(K_+^{-1})).$$

Нетрудно проверить, что

$$H(K_1 K_2) = H(K_1) T(\bar{K}_2) + T(K_1) H(K_2).$$

Откуда, подставляя $K_1 = \bar{K}^{-1}$, $K_2 = \bar{K}^{-1}$ и учитывая, что $H(\bar{K}^{-1}) = 0$, получим

$$H(\bar{K}^{-1}) = H(\bar{K}^{-1}) T(K_+^{-1}).$$

Следовательно

$$I - H(K) H(K_+^{-1}) T(K_+^{-1}) = I - H(K) H(\bar{K}^{-1}) = T(K) T(K^{-1}).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если

$$K(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt \in K^{(n \times n)},$$

причем $\det K(\lambda) \neq 0$ ($-\infty < \lambda < \infty$), $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \det K(\lambda) = 0$ и $\hat{K}(t)$ непрерывна в нуле и ограничена в каждом конечном интервале, тогда

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D_\epsilon(K)}{|G(K)|^\epsilon} = \det |T(K) T(K^{-1})|.$$

Доказательство: При условиях теоремы, существует матрица-функция

$$K_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}_1(t) e^{i\lambda t} dt \in K^{(n \times n)}$$

такая, что матрица-функция $K(\lambda) + \epsilon K_1(\lambda)$ при всех достаточно малых $\epsilon \neq 0$ допускает факторизацию, требуемую в теореме 1. Поэтому при таких ϵ верна формула

$$\frac{D_\epsilon(K + \epsilon K_1)}{|G(K + \epsilon K_1)|^\epsilon} = \det |T(K + \epsilon K_1) T((K + \epsilon K_1)^{-1})|.$$

Принимая во внимание, что все величины, входящие в эту формулу, аналитически зависят от ϵ , можно утверждать, что она верна и при $\epsilon = 0$.

Когда $K(\lambda)$ скалярная функция, можно вычислить $\det |T(K) T(K^{-1})|$. Точнее верна.

Теорема 3. Если

$$K(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt \in K^{(1 \times 1)},$$

причем $K(\lambda) \neq 0$ ($-\infty < \lambda < \infty$), $\operatorname{Varg} K(\lambda) = 0$ и $\hat{K}(t)$ непрерывна в нуле и ограничена в каждом конечном интервале, тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r(K)}{[G(K)]^r} = \exp \left\{ \int_0^{\infty} t l(t) l(-t) dt \right\},$$

где

$$G(K) = \exp \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\lambda|}{T} \right) \ln K(\lambda) d\lambda \right\},$$

$$\ln K(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Постановка задачи принадлежит М. Г. Крейну. Результаты обсуждались с М. Г. Крейном и В. М. Адамяном, за что автор приносит им искреннюю благодарность.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ.

Արգումենտների տարբերությունից կախված, մատրիցային կորիզներով
նատված ինտեգրալ օպերատորների ֆրեդհոլմի դետերմինանտների
ասիմպտոտիկ վարքը

Հոդվածում ուսումնասիրված է

$$f(t) + \lambda \int_0^r K(t-s) f(s) ds = g(t) \quad (0 \leq t \leq r, \quad 0 < r < \infty)$$

ինտեգրալ հավասարման ֆրեդհոլմի $D_r(K, \lambda)$ դետերմինանտի ասիմպտոտիկ
վարքը, երբ $r \rightarrow \infty$ ։ Այստեղ $f(t)$ -ն և $g(t)$ -ն n չափանի վեկտոր-ֆունկցիա-
ներ են, իսկ $K(t)$ -ն $n \times n$ չափանի մատրից-ֆունկցիա է։

Մտցված է $K^{(n \times n)}$ մատրից-ֆունկցիաների μ նախիստ հանրահաշիվը և
ապացուցված է, որ եթե

$$K(\lambda) = \ln + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt \in K^{(n \times n)}$$

մատրից-ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$\det K(\lambda) \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty) \text{ և } \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \det K(\lambda) = 0$, ապա՝

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_r(\hat{K}, 1)}{\exp \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|b|}{T} \right) \ln \det K(\lambda) d\lambda \right\}} = \det |T(K)T(K^{-1})| \quad (*)$$

Այսպես

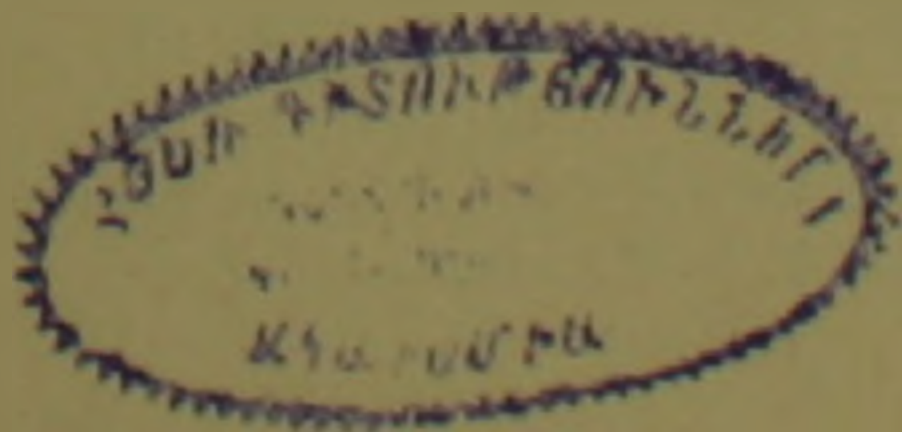
$$T(K)f = f(t) + \int_0^{\infty} \hat{K}(t-s)f(s)ds,$$

իսկ $K^{-1}(\lambda)$ -ն $K(\lambda)$ -ի հակադարձն է:

Երբ $K(\lambda)$ -ն սկալյար ֆունկցիա է, հաշվված է (*) հավասարության աջ մասը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. Szegő, Math. Ann., 76. 490—503 (1915). ² М. Г. Крейн, Мат. исследова-
ние, т. 1, № 1, 1966. ³ I. I. Hirschman Jr., J. Math. and Mech., 16 (1966), pp 167—196.
⁴ A. Devlnatz, J. of Math., 11, p.p 160—175 (1967). ⁵ Я. Л. Геронимус, Известия
АН СССР*, сер. мат., т. 31, вып. 2 (1967). ⁶ Б. Л. Годинский и И. А. Ибрагимов.,
Мат. изв., т. 5, № 2 (1971). ⁷ N. L. Bowers, Jr, Thesis, Univ. of Minnesota, 1965-
⁸ H. Widom, Adv. in Math. V. 13, p.p. 284—322 (1974) and V. 21, p.p 1—29 (1976).
в М. Кас, Duke Math. J., V. 21, №3 (1954). ¹⁰ Н. И. Ахиезер, УМЖ, XVI, №4. (1964)
¹¹ И. Б. Линик, Мат. замет., т. 6, вып. 14 (1973). ¹² В. Н. Солев, Записки науч.
семинаров, ЛОМИ, т. 39, стр. 104—109 (1974). ¹³ Л. В. Микаелян, Известия АН
Арм. ССР*, сер. мат., XI, № 3 (1976). ¹⁴ И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Введение
теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. "Наука", М., 1967.



УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

С. А. Григорян

Об алгебрах, порожденных аналитическими по Аренсу—Зингеру функциями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 6/II 1979)

Пусть Γ —подгруппа аддитивной группы вещественных чисел, снабженная дискретной топологией, $\Gamma_+ = \{x \in \Gamma; x \geq 0\}$ —подполугруппа группы Γ , а G —группа характеров к группе Γ . По теореме двойственности Понтрягина G является компактной абелевой группой, и группа характеров к G есть группа Γ .

Рассмотрим на локально компактном пространстве C_0 —полученном из декартова произведения $G \times [0, \infty)$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$ —систему $\{w^x\}_{x \in \Gamma_+}$ непрерывных функций, заданных следующим образом: $w^x(a \times r) = a(x) \cdot r^x$, $a \times r \in C_0$, $x \in \Gamma_+$. Очевидно, $w^x \cdot w^{x_1} = w^{x+x_1}$, $w^x \cdot w^{x_1} \in \{w^x\}_{x \in \Gamma_+}$.

Определение. Комплекснозначную функцию, определенную на открытом множестве $D \subset C_0$, будем называть аналитической по Аренсу—Зингеру или просто аналитической, если для каждой точки множества существует такая окрестность $U \subset D$, что функция f аппроксимируется на U линейными комбинациями над C функций из $\{w^x\}_{x \in \Gamma_+}$.

Линейные комбинации над C функций из $\{w^x\}_{x \in \Gamma_+}$ будем называть полиномами, а отношение двух полиномов—рациональной функцией.

В зависимости от выбора Γ получаем различные пространства; в частности, когда Γ изоморфна группе целых чисел, пространство C_0 изоморфно комплексной плоскости и аналитичность по Аренсу—Зингеру в этом случае совпадает с обычной аналитичностью.

В дальнейшем для компакта $K \subset C_0$ через $P(K)$ будем обозначать равномерную алгебру на K , порожденную полиномами, а через $R(K)$ —равномерную алгебру на K , порожденную такими рациональ-

* Пространство C_0 и соответствующие определения были независимо от автора введены Т. В. Тоневым.

ными функциями $f=p/q$, что множество нулей полинома q лежит вне компакта K .

В данной заметке формулируются результаты, характеризующие свойства алгебр $P(K)$ и $R(K)$ в случае, когда группа Γ есть группа рациональных чисел.

1°. Пусть $u \in C_0$, $u = \alpha \times r$. Для любого $\beta \in G$ определим произведение $\beta \cdot u = v \in C_0$, где $v = (\beta \cdot \alpha) \times r$.

Лемма 1. Пространство C_0 можно представить в виде

$$C_0 = (\bigcup_i C_i) \cup \{0\},$$

где $0 = G \times \{0\}$, а множества C_i , $i \in I$ попарно не пересекаются, связны, всюду плотны в C_0 и удовлетворяют следующим условиям:

- а) для любых $i, j \in I$ существует $\alpha \in G$ такое, что $C_i = \alpha C_j$;
- б) для любого $i \in I$ существует такой гомеоморфизм Ψ_i пространства C_i на комплексную плоскость C , что для каждого $w^{\alpha_0} \in \{w^{\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}$ выполняется равенство: для $z \in C$ $w^{\alpha_0} \Psi_i^{-1}(z) = \exp(-\alpha_0 z)$.

Пусть $W(0 \in W)$ — полиномиально выпуклый компакт в C . Для некоторого фиксированного $\alpha_0 \in \Gamma$ рассмотрим компакты: $K_0 = \{u \in C_0; w^{\alpha_0}(u) \in W\}$ и $G_0 = \{\alpha \in G, \alpha(\alpha_0) = 1\}$.

Лемма 2. Алгебра $P(K_0)$ изометрически изоморфна равномерной алгебре на декартовом произведении $W \times G_0$, порожденной функциями вида $f \cdot g$, где $f \in P(W)$, а $g \in C(G_0)$ — алгебре всех непрерывных комплекснозначных функций на G_0 .

Для компакта $K \subset C_0$ пусть

$$\hat{K} = \{u \in C_0; |p(u)| \leq \sup_K |p| \text{ для любого полинома } p\}$$

$K^0 = \{u \in C_0; |f(u)| \leq \sup_K |f| \text{ для любой рациональной функции из } R(K)\}$.

Множество $\hat{K}$ будем называть полиномиально выпуклой оболочкой множества K , а K^0 будем называть рационально выпуклой оболочкой. Отметим, что каждый компакт K в C_0 является рационально выпуклым, хотя и не всегда полиномиально выпуклым.

Следующая лемма устанавливает критерий полиномиальной выпуклости компакта K .

Лемма 3. Для того, чтобы компакт $K \subset C_0$ был полиномиально выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i \in I$ множество $K_i = K \cap C_i$ (см. лемму 1) имело бы связное в C_i дополнение.

Из определения полиномиальной выпуклости следует, что пространство максимальных идеалов алгебры $P(K)$ есть в точности $\hat{K}$.

Воспользовавшись леммами 1–3, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть K — компакт в C_0 . Граница Шилова алгебры $R(K)$ совпадает с множеством $\bigcup \hat{K}_i$, где ∂K_i — топологическая в C_1 граница множества $K_i = K \cap C_1$.

Теорема 2. Для алгебры $R(K)$ справедливы следующие условия:

- а) пространство максимальных идеалов алгебры $R(K)$ есть K ;
- б) граница Шилова алгебры $R(K)$ совпадает с $\bigcup \partial K_i$, где ∂K_i — топологическая граница множества $K_i = K \cap C_1$.

Отметим, что из теорем 1 и 2 и леммы 2 следует, что граница Шилова как для алгебры $R(K)$, так и для алгебры $P(K)$ не обязана совпасть с топологической границей множества K .

Пусть $H(K)$ — алгебра всех функций, аналитических в окрестности K .

Теорема 3. Любую функцию $f \in H(K)$ равномерно на K можно приблизить функциями из $R(K)$.

2. Пусть A — равномерная алгебра на некотором компакте X . Говорят, что A является локально-аппроксимативной алгеброй, если любая непрерывная на X функция, локально аппроксимируемая функциями из A , принадлежит алгебре $A^{(1)}$.

Лемма 4. Для любого компакта $K \subseteq C_0$ алгебра $R(K)$ является локально-аппроксимативной. Алгебра $P(K)$ локально-аппроксимативна тогда и только тогда, когда компакт K полиномиально выпукл.

Теорема 4. Пусть K — компакт в C_0 . Для того, чтобы $P(K)$ совпало бы с $C(K)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i \in I$, $\text{Int} K_i = \emptyset$ в C_1 и дополнение к $K_i = K \cap C_1$ было бы связно в C_1 .

Теорема 5. Пусть K — такой компакт в C_0 , что каждая точка из K является точкой пика для алгебры $R(K)$. Тогда $R(K) = C(K)$.

Доказательство теорем 4 и 5 проводится с помощью лемм 2 и 3 и аналогичных результатов для равномерных алгебр $P(K)$ и $R(K)$ в случае, когда K — плоский компакт.

Вычислительный центр
Госплана Армянской ССР

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Արսեն — Ձեռագրի իմաստով անալիտիկ ֆունկցիաներով ծնված
հանրահաշիվների մասին

Դիցուք Γ -ն իրական թվերի խմբի որոշ ենթախմբեր է, G -ն Γ ,
խմբի համալուծ խումբն է, իսկ $C_0 = (G \times [0, +\infty)) / (G \times \{0\})$: Կամարական
 $x \in \Gamma_+ = \{x \in \Gamma; x \geq 0\}$ էլիմենտին համապատասխանում է $w(a \times r) = a(x)r^x$

անընդհատ ֆունկցիոնալ C_0 լոկալ կոմպակտ տարածության վրա: Մ ֆունկցիաների գծալին կոմպինացիաները կոչվում են բազմանդամներ, իսկ բազմանդամների հարաբերությունները՝ ուղիղ ֆունկցիաներ: Եթե K -ն C_0 տարածության կոմպակտ հիօսորագմությունն է, ապա $P(K)$ -ով (համապատասխանաբար՝ $R(K)$ -ով) նշանակվում է բազմանդամներիով (համապատասխանաբար՝ K կոմպակտի վրա տնընդհատ ուղիղ ֆունկցիաներով) ժնված հավասարաչափ հանրահաշիվը: Ստացված են արդյունքներ, որոնք նկարագրում են $P(K)$ և $R(K)$ հանրահաշիվների մաքսիմալ իդեալների տարածությունները և Շիլովի L գրերը:

Դիտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $P(K) = C(K)$ հավասարության համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

1. Т. Г. Мзлуц. Равномерные алгебры. М., Мир, 1973.

УДК 519.212.3

МАТЕМАТИКА

В. К. Оганян

Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 20/XII 1978)

В последнее время в стохастической геометрии изучению случайных полей отрезков (сл. п. о.) уделялось значительное внимание⁽¹⁻³⁾. В настоящей статье приводятся результаты исследования сл. п. о. на плоскости на основе выдвинутых Р. В. Амбарцумяном комбинаторных принципов интегральной геометрии^(1,4).

Сл. п. о. на плоскости определяются как случайные точечные поля в некотором пространстве Δ (фазовом пространстве). Направленный отрезок σ на плоскости определяется четверкой чисел (x, y, φ, τ) , где (x, y) — декартовы координаты центра отрезка, φ — угол, который составляет отрезок с некоторым фиксированным направлением, τ — длина отрезка. Соответственно этому в качестве фазового пространства выбирается $\Delta = R^2 \times [0, 2\pi) \times R_+$ (R^2 — евклидова плоскость, $R_+ = [0, +\infty)$) с топологией произведения. Случайное точечное поле в Δ определяется обычным образом. Случайное поле отрезков $m(\omega)$ называется однородным и изотропным, если его распределение P инвариантно относительно группы евклидовых движений M .

Стандартное пуассоновское поле определяется заданием пуассоновского точечного поля в Δ , которое управляется мерой с элементом $dK \cdot dF$, где dK — элемент кинематической меры на $R^2 \times [0, 2\pi)$ ⁽⁵⁾, а dF — элемент распределения на R_+ с конечным средним.

В работе изучается одномерный маркированный точечный процесс пересечений $\{Q_i, \alpha_i\}$ однородного и изотропного сл. п. о. $m(\omega)$ с фиксированной прямой g . Точечный процесс определяется как $\{Q_i\} = m \cap g$ (таким образом, $\{Q_i\}$ есть случайное множество точек пересечений отрезков случайного поля с прямой g). Маркой в точке Q_i служит тройка $\alpha_i = (\psi_i, \tau_i, l_i)$, где ψ_i — угол, под которым происходит пересечение отрезка случайного поля с прямой g в точке Q_i , τ_i — длина этого отрезка, l_i — длина части отрезка, лежащей в одной из полуплоскостей, отделяемых прямой g .

Значительный интерес представляет выявление ограничений на

внутреннюю вероятностную структуру одномерных (маркированных) точечных процессов пересечений сл. п. о. с прямыми, которые вытекают из инвариантности распределений сл. п. о. относительно группы M . В настоящей статье указываются некоторые свойства, которыми необходимо обладает маркированный точечный процесс, порожденный M -инвариантным сл. п. о.

Рассматривается случайная величина $\eta(l)$, равная числу точек пересечений сл. п. о. $m(\omega)$ с фиксированным отрезком длины l . Ее распределение $p_k(l) = P\{\eta(l) = k\}$ ($k = 0, 1, \dots$) не зависит от расположения отрезка на плоскости.

Помимо свойства инвариантности относительно группы движений, на вероятность P накладывается условие локальной абсолютной непрерывности относительно стандартного пуассоновского поля. Представляется, что последнее условие не может быть отброшено.

Для формулировки основного результата нам потребуются некоторые понятия и обозначения. Пусть $\Delta_l \cup \Delta$ множество всех направленных отрезков δ , таких, что $\delta \cap K_l \neq \emptyset$ (K_l — круг диаметра l). Положим $\Delta_l^n = \underbrace{\Delta_l \times \dots \times \Delta_l}_{n \text{ раз}}$; через $N(m)$ обозначим число отрезков

поля m , задевающих круг K_l . Ниже всегда предполагается, что $EN^1 < \infty$ (E — знак математического ожидания относительно P).

Вследствие сделанных предположений существуют следующие распределения:

$$dF^{(m)}(\delta_1, \dots, \delta_m) = \frac{d\delta_1 \dots d\delta_m}{E[N(N-1) \dots (N-m+1)]} \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) \cdot \\ \cdot P(N(m) = n) \cdot \int_{\Delta_l^{n-m}} f_n(\delta_1, \dots, \delta_m, \delta_{m+1}, \dots, \delta_n) d\delta_{m+1} \dots d\delta_n,$$

где $d\delta = dx dy d\varphi d\tau$, а $f_n(\delta_1, \dots, \delta_n)$ совместная плотность n отрезков, задевающих K_l .

Случайную точку в Δ_l^m , имеющую распределение $F^{(m)}$, естественно будет называть „произвольной m -кой отрезков, задевающих круг K_l “.

Распределение $dF^{(m)}$ абсолютно непрерывно относительно $d\delta_1 \dots \dots d\delta_m$:

$$dF^{(m)}(\delta_1, \dots, \delta_m) = f^{(m)}(\delta_1, \dots, \delta_m) d\delta_1 \dots d\delta_m.$$

Обозначим через $\Delta_l^m(\delta_1, \dots, \delta_s)$ многообразие (размерности $4(m-s)$), лежащее в Δ_l^m и определяемое при $m \geq s$ следующим образом:

$$\Delta_l^m(\delta_1^0, \dots, \delta_s^0) = \{(\delta_1, \dots, \delta_s, \delta_{s+1}, \dots, \delta_m): \delta_1 = \delta_1^0 \dots \delta_s = \delta_s^0\}.$$

Каждая из плотностей $f_m(\delta_1, \dots, \delta_m)$ порождает вероятность $\Pi_{\delta_1^0, \dots, \delta_s^0}^{(m)}(\cdot)$ на $\Delta_l^m(\delta_1^0, \dots, \delta_s^0)$; последняя задается плотностью $c(\delta_1, \dots, \delta_s) \cdot f_m(\delta_1, \dots, \delta_m)$.

$\delta_{s+1}, \dots, \delta_m)$ ($\delta_1, \dots, \delta_s$ — фиксированы), где $c(\delta_1, \dots, \delta_s)$ определяется обычным условием нормировки:

$$c^{-1}(\delta_1, \dots, \delta_s) = f^{[s]}(\delta_1, \dots, \delta_s) \cdot E[N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-s+1)].$$

Обозначим через $\Pi_{\delta_1, \dots, \delta_s}(\cdot)$ следующее распределение:

$$\Pi_{\delta_1, \dots, \delta_s}(\cdot) = \sum_{n=s}^{\infty} n(n-1) \dots (n-s+1) \cdot P(N(m) = n) \cdot \Pi_{\delta_1, \dots, \delta_s}^{(n)}(\cdot).$$

Вероятность $\Pi_{\delta_1, \dots, \delta_s}(\cdot)$ имеет смысл условного распределения сл. п. о., задевающих круг K_l , при условии, что „произвольная s -ка отрезков“ реализуется как $\delta_1 \dots \delta_s$.

Теорема. Если P распределение однородного и изотропного, локально абсолютно непрерывного сл. п. о., для которого $EN^4 < \infty$, то имеет место следующее представление для $p_0(l) = P[\eta(l) = 0]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3l} \frac{dp_0(l)}{dl} = & \frac{2\lambda}{3l} \int_{\Delta^1} \frac{d}{dl} \left| \delta \cap l \right| \cdot \Pi_{\delta} \left(\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right) dF(\tau) dt - \frac{2\lambda}{l} \int_{\Delta^1} \Pi_{\delta} \left(\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right) dF(\tau) dt - \\ & - \frac{2\lambda}{3} \int_{\Delta^1} \frac{d}{dl} \left| \Pi_{\delta} \left(\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right) \right| dF(\tau) dt + \sum_{i=1}^{12} c_i \int_{\Delta^1} \pi_i \left(\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right) d\Phi_i, \end{aligned}$$

где λ — интенсивность точечного поля в Δ ($\lambda < +\infty$); $\left(\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right) = |\eta(l) = 0|$;

$\delta \cap l$ — длина $\delta \cap l$; c_i — постоянные; $\Delta^1 = \{\delta \in \Delta_l: \delta \text{ лежит на прямой, проходящей через отрезок } l\}$; многообразия x_i имеют вид $\cup \Delta_l^k(\delta_1, \dots, \delta_k)$

Здесь в каждом из случаев объединение берется по всевозможным реализациям отрезков $\delta_1 \dots \delta_k$, когда один или два конца каждого из отрезков $\delta_1 \dots \delta_k$ лежат на отрезке l ($k=2, 3, 4$); $d\Phi_i$ — некоторые

меры на x_i ; $\pi_i \left(\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right)$ — условная вероятность события $\left(\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right)$, при условии, что произвольные k отрезков реализуются как $\delta_1 \dots \delta_k$ ($k=2, 3, 4$).

Таким образом, основной результат устанавливает связь между распределением случайной величины $\eta(l)$ и некоторыми условными распределениями той же случайной величины.

Характер основного результата позволяет выделить класс сл. п. о., в котором результат приобретает особенно простой вид, напоминающий известные „формулы Пальма“ для точечных процессов.

Для разъяснения характера этих условий полезна следующая интерпретация: отрезок на плоскости может рассматриваться как график движения частицы, передвигающейся по оси g с постоянной скоростью, началу и концу отрезка соответствуют „возникновение“ и „исчезновение“ частицы на оси g .

Одним из условий, выделяющих упомянутый класс, является условие независимости движений *налево* и *направо* для частиц, траектории которых задевают вертикальные окна, размещенные на оси. Сокращенно соответствующее условие мы назовем условием л. п. в. о. — независимости. В терминах маркированного процесса $[Q_i, \alpha_i]$ условие л. п. в. о. — независимости может быть записано как условие некоррелированности котангенсов пар углов ψ_i .

Другим условием типа независимости является условие совпадения некоторых двух условных распределений P_1 и P_2 , которые определяются следующим образом. Пусть A_n — последовательность областей, лежащих в правой полуплоскости относительно прямой g и стягивающихся к точке $Q_1 \in g$. $D_{n,1}$ ($D_{n,2}$) — последовательность областей, лежащих в правой (левой) полуплоскости относительно g и стягивающихся к точке $Q_2 \in g$. Событие $B_{n,1}$ ($B_{n,2}$) состоит в том, что в области A_n и $D_{n,1}$ (A_n и $D_{n,2}$) попадает по одному концу отрезков случайного поля $m(\omega)$ и соответствующие два отрезка пересекают прямую g . Таким образом, $B_{n,1}$, $B_{n,2}$ принадлежат σ -алгебре A_g , на которой определена P_g . В случае, когда поле концов отрезков есть точечное поле конечной интенсивности, можно показать, что для достаточно широкого класса событий $A \in A_g$ существует предел

$$P_i(A) = \lim_{\substack{D_{n,i} \downarrow \{Q_i\} \\ A_n \downarrow \{Q_1\}}} \frac{P(A \cap B_{n,i})}{P(B_{n,i})} \quad (i = 1, 2),$$

который можно продолжить до вероятности на A_g .

Отметим, что условие

$$P_1(A) = P_2(A), \quad A \in A_g \quad (*)$$

(условие $(*)$ -независимости) заведомо выполняется, если последовательность сдвигов $\{l_i\}$ есть последовательность независимых случайных величин.

Упрощение, о котором говорилось выше, имеет место для сл. п. о., которые удовлетворяют одновременно условиям л. п. в. о. и $(*)$ -независимости.

Следствие. Пусть P удовлетворяет всем условиям теоремы. В классе л. п. в. о. и $(*)$ -независимых распределений

$$P_k(l) = p_k(l), \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (l \in \Delta^1)$$

есть необходимое и достаточное условие пуассоновости $p_k(l)$.

В заключение выражаю благодарность своему научному руководителю Р. В. Амбарцумяну.

Հատվածների պատահական դաշտերի ստոխաստիկ երկրաչափության կոմբինատոր սկզբունքներ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է միաչափ պիտակավորված կետային $\{P_i, \alpha_i\}$ պրոցեսները, որոնք առաջանում են համասեռ և իզոտրոպ պատահական հատվածների դաշտի և ֆիքսած g ուղղի հատումից: Պիտակավորված կետային պրոցեսի P բաշխումը, որը առաջանում է համասեռ և իզոտրոպ պատահական հատվածների դաշտից, չի կարող լինել կամայական: Հետաքրքրություն է ներկայացնում համապատասխան սահմանափակումների նկարագրումը: Ներկա հոդվածում բերվում են որոշ անհրաժեշտ պայմաններ, որոնք վերադրվում են P բաշխմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ц И Т И Р У Е М Ы Е

- ¹ R. V. Ambartzumian, Adv. Appl. Prob., 9, 1977. ² P. B. Амбарцумян, Теория вероятностей и ее приложения, 18, вып. 3, 1973. ³ R. Coleman, The distance from a given point to the nearest end of one member of a random process of linear segments. In Stochastic Geometry, John Wiley & Sons, 1974. ⁴ R. V. Ambartzumian, The solution to the Buffon — Sylvester problem in R^1 , Z. Wahrscheinlichkeitsthe., 27, 1973. ⁵ Л. А. Сантало, Введение в интегральную геометрию, ИЛ, М., 1956.

УДК 530.1:577.25

ФИЗИКА

В. А. Варданян

О возможности построения физической теории генерации нервного импульса

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. М. Гарибяном 9/XII 1978)

Предлагается физическая модель возникновения и формирования нервного импульса, в которой источником энергии, необходимой для генерации носителей тока в зону проводимости, является свободная энергия концентрационного градиента ионов. Методами нелинейных колебаний получены функциональные зависимости, хорошо описывающие формирование нервного импульса.

В основе существующих в настоящее время теорий возникновения и формирования нервного импульса лежит гипотеза об избирательной проницаемости биологических мембран и ионный механизм генерации потенциала действия (¹⁻³). При объяснении некоторых опытных фактов эти теории испытывают серьезные затруднения и, главное, не дают удовлетворительного ответа на следующие принципиальные вопросы: 1) Какова природа тех сил и физических механизмов, которые обеспечивают столь загадочную изменчивость избирательной проницаемости мембран? 2) Почему процесс возбуждения нервного импульса начинается и развивается только при уменьшении потенциала покоя по закону «все или ничего»? Почему величина потенциала покоя должна быть порядка 100 мВ, что соответствует напряженности электрического поля порядка 10^5 в/см. Является ли это случайным или принципиальным? Ведь по существующим теориям нервный импульс мог возникать и распространяться по нервным волокнам и при меньших значениях потенциала покоя, а природа всегда избирает оптимальный вариант. Отсюда следует, что затруднения, имеющиеся в существующих в настоящее время теориях генерации нервного импульса, носят принципиальный характер и что для их устранения нужны поиски новых теорий.

Исходным для нас служит известное из опыта положение о том, что мембраны состоят из повторяющихся правильных пространственных образований — групп белковых макромолекул и в этом смысле они напоминают кристаллы (⁴). Интенсивно взаимодействующие макромолекулы фосфолипида и структурного белка образуют «каналы»

или «коридоры» в мембранах (⁴), по которым могут пройти ионы. При прохождении ионов по каналам неизбежны поляризационные потери энергии (⁸). Потеря энергии движущейся частицы равна работе, производимой силой торможения, действующей на частицу со стороны поляризованных ею полевых частиц. Эта часть энергии, естественно, переходит к полевым частицам, т. е. к субъединицам, образующим стенки «коридора». Силы изображения в данном случае действуют как диссипативные силы «электрического трения», вследствие чего часть свободной энергии концентрационного градиента превращается в тепловую. Эта часть энергии пополняется за счет химической энергии, поставляемой метаболическими процессами в клетке.

Если брать для энергии активации наиболее характерное для протеинов значение 2,3 эв, то оценка концентрации свободных электронов в биомембранах в обычных температурах дает ничтожно малую величину. Это означает, что мембраны в обычных температурах хорошие диэлектрики. Передача молекулам энергии при прохождении ионов по коридорам под действием концентрационного градиента эквивалентна повышению температуры более чем на тысячу градусов. Действительно, можно записать

$$T_3 = T + \frac{\Delta \mu}{k} \approx 1,5 \cdot 10^3 \text{ град.},$$

где $\Delta \mu$ — перепад химического потенциала ионов, максимальное значение которого имеет порядок 0,1 эв. Теперь для концентрации свободных электронов получается величина порядка 10^{15} см^{-3} .

Таким образом, биологическая мембрана является хорошим диэлектриком в состоянии покоя и подобна примесному полупроводнику во время возбуждения. Энергия, необходимая для перехода электронов из донорных уровней в свободную зону, черпается из запасов свободной энергии ионов, поставляемой биохимическими реакциями, превращающими высокоэнергетические соединения типа АТФ в более низкоэнергетические.

Для построения вольтамперной характеристики (ВАХ) необходимо иметь зависимость дифференциальной проводимости от напряженности поля. Такая задача в условиях, в основном совпадающих с условиями нашей задачи, была рассмотрена В. Л. Бонч-Бруевичем и С. Т. Калашниковым (^{9, 10}). Построенные на основании этих данных вольтамперные характеристики изображены на рис. 1 (а — зависимость дифференциальной проводимости γ от напряженности поля E ; б — зависимость плотности тока i от напряженности поля E). Из графиков видно, что равновесие системы достигается при значениях поля больших $E_2 = 6 \cdot 10^4 \text{ в/см}$. Если же $E < E_2$, состояние системы неустойчивое и при определенных условиях может развиваться регенеративный процесс. Пусть E_* значение поля, при котором суммарный ток равен нулю. Тогда ясно, что всякое отклонение поля в сторону $E > E_*$ со временем затухает. Малые отклонения поля в сторону меньших значений E ($\Delta E < 0$) также затухают, и только отклонения поля, превышающие некоторое пороговое значение $(\Delta E)^* < 0$, могут со временем расти и как вывести систему из состояния равновесия, так и, регенеративно

развиваясь, перебросить ее в другое, отличное от первого, устойчивое состояние. Это означает, что система будет действовать как триггер с двумя устойчивыми состояниями. В дальнейшем мы покажем, что для биологических мембран второе устойчивое состояние не реализуется, так что мембраны действуют как триггерные схемы с одним устойчивым состоянием. Это и есть проявление известного закона «все или ничего».

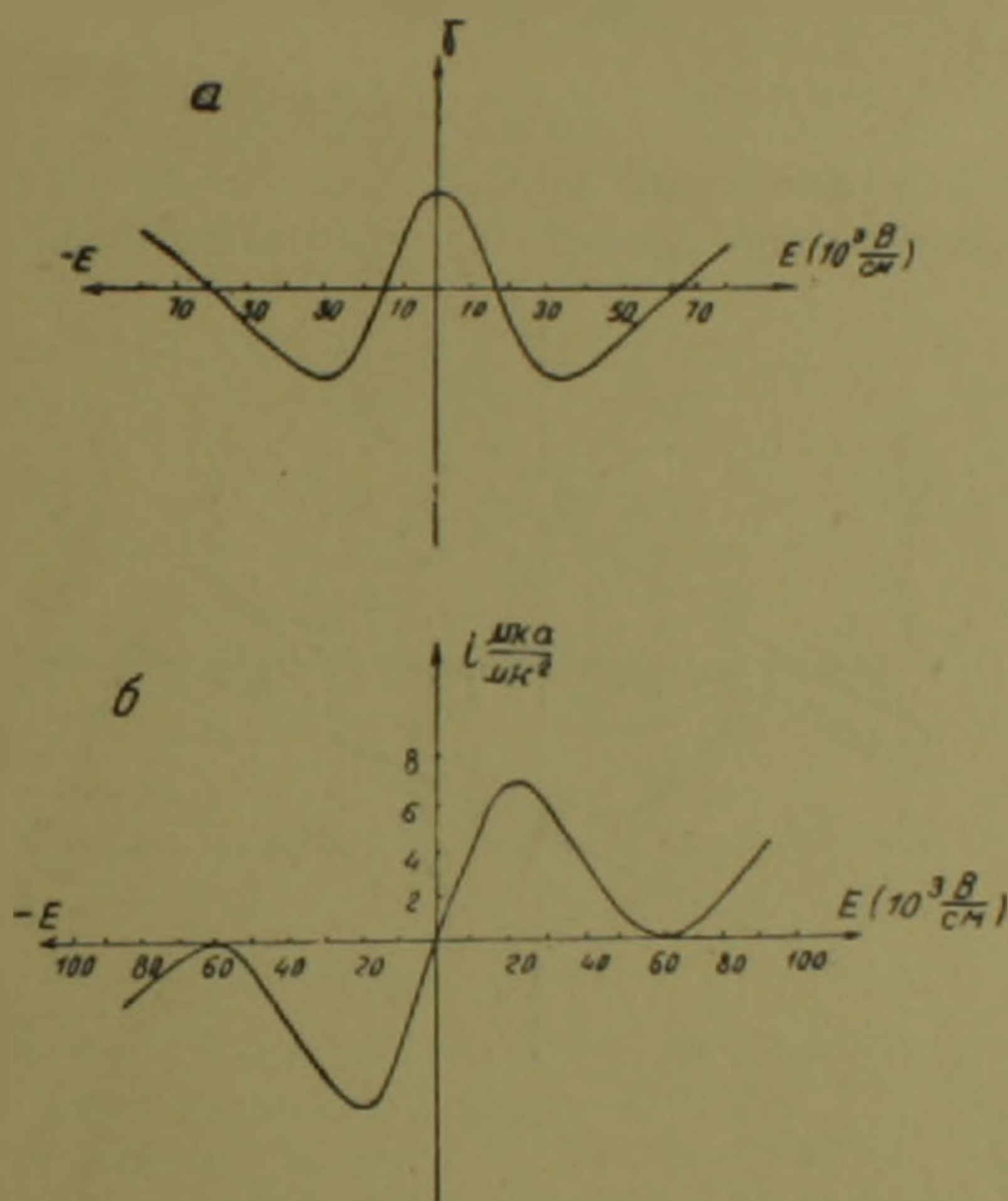


Рис. 1

Зависимость электронного тока от напряженности поля обуславливает, в конечном счете, форму зависимости ионных токов от поля. На рис. 2 показаны вольтамперные характеристики ионных токов, построенные графическим путем. На всех этих кривых есть падающий участок (ОДС) с почти одинаковым наклоном. Физической причиной появления ОДС на ВАХ ионных токов является адсорбция катионов на отрицательно заряженных группах фосфолипидов. Важное значение при этом имеет зависимость количества адсорбированных ионов от направления и величины поля. Если электронный ток выходящий, то со временем отрицательный заряд внешней поверхности будет увеличиваться (электроны попадут в ловушку) и, следовательно, будет расти и число адсорбированных на нем ионов натрия. Внутренняя же поверхность, наоборот, будет постепенно терять свой отрицательный заряд. Если менять направление поля (следовательно и направление

электронного тока), происходит обратное, т. е. на внутренней поверхности накапливается отрицательный заряд и вместе с ним и калиевые ионы, а натриевые ионы получают свободу действия. При этом накопленные ранее на внешней поверхности ионы Na^+ будут увеличивать эффективную поверхностную плотность этих катионов. Этим важным обстоятельством и обусловлена, в конечном счете, инверсия знака поля при $E \rightarrow 0$. Поэтому мы можем написать, что концентрация ионов в непосредственной близости от поверхности мембраны зависит от коэффициента захвата следующим образом ⁽¹⁰⁾

$$n_j = n_j^{(0)} + G_j f, \quad f = \exp(-x^2), \quad x = E/E_c, \quad (1)$$

где j — индекс, показывающий сорт иона, G_j — постоянная, а E_c — некоторая характерная напряженность электрического поля.

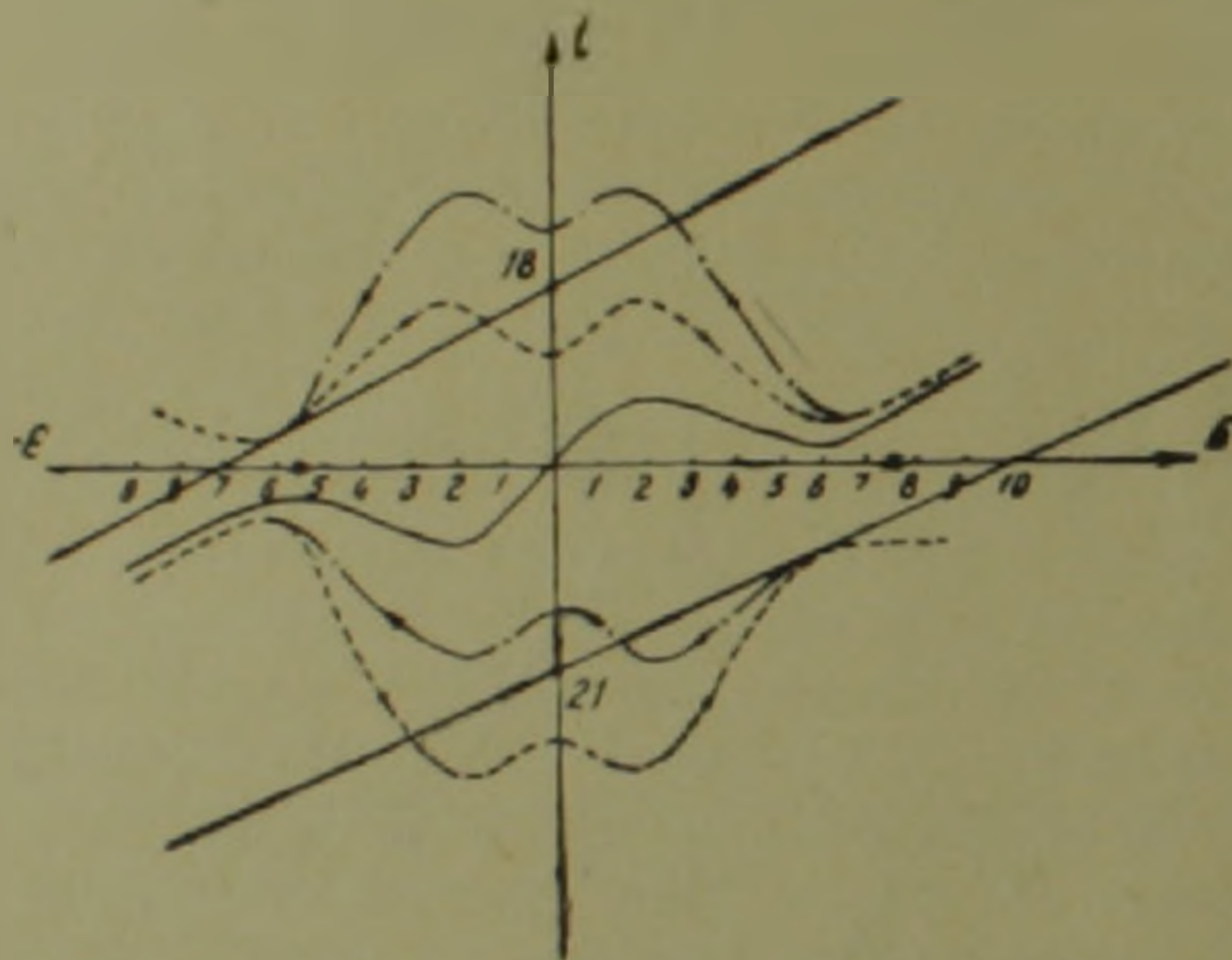


Рис. 2

Имея в виду, что на образование на ВАХ ионных токов изменение концентрации вследствие попадания носителей в «ловушки» сказывается гораздо сильнее, чем изменение подвижности, можно записать

$$\frac{\gamma_j}{en_j \mu_j} = \alpha_j - \frac{x^2 f(x)}{F_j(x)} = \frac{L S_j}{en_j \mu_j}, \quad (2)$$

где L — толщина мембраны, γ_j — дифференциальная проводимость, μ_j — подвижность, а функции $F_j(x)$ и α_j определяются как

$$F_j(x) = \frac{n_j^{(0)} + G_j f}{2 G_j}, \quad \alpha_j = 1 + E \frac{\partial \ln \mu_j}{\partial E}. \quad (3)$$

Будем пользоваться эквивалентной схемой, показанной на рис. 3. Согласно этой схеме можно написать дифференциальное уравнение

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} = [S_K(u) - S_{Na}(u) - S_M(u)] \frac{du}{dt}, \quad (4)$$

где

$$S_k(u) = \frac{\partial I_k}{\partial u}, \quad S_{Na}(u) = \frac{\partial I_{Na}}{\partial u}, \quad S_M(u) = \frac{\partial I_M}{\partial u}$$

крутизны характеристик, соответственно калиевого, натриевого и электронного токов.

Для приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения (4) и качественного анализа картины возникновения и формирования нервного импульса сделаем следующие допущения.

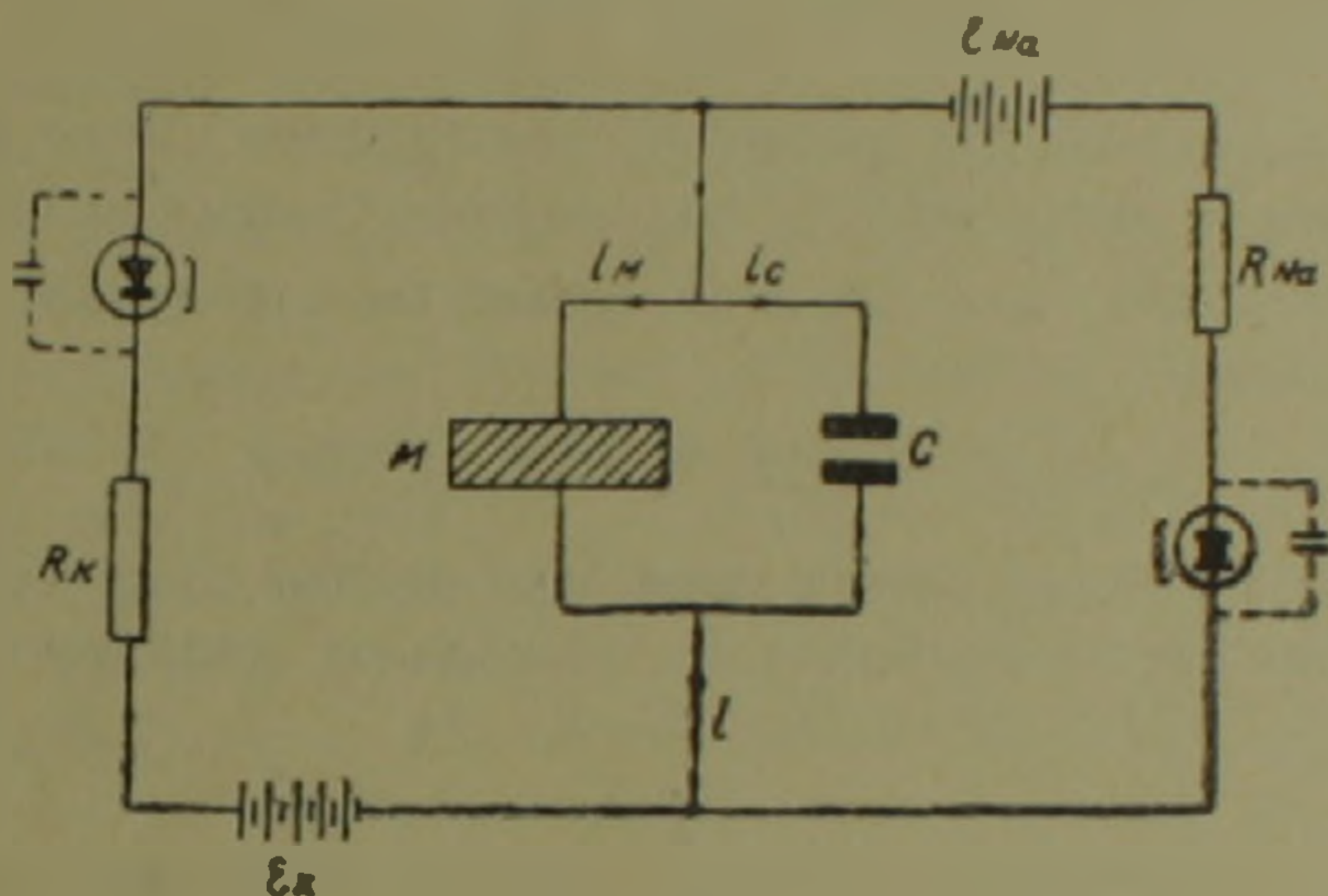


Рис. 3

1. Будем считать, что функция $F_j(x)$ одинакова для всех носителей тока, т. е.

$$S_j L / en_j \mu_j = S_0(x).$$

2. В качестве второго упрощающего приближения возьмем кусочно-линейную аппроксимацию фазового портрета (II), изображенного на рис. 4 (а — фазовый портрет; б — кусочно-линейная аппроксимация фазового портрета).

Эти предположения сильно упрощают уравнение (4) и приводят к его линеаризации. Постоянные интегрирования могут быть найдены с помощью начальных условий

$$u = u^*, \quad \frac{du^*}{dt} = 0.$$

Построенные таким образом решения дифференциального уравнения (4) могут быть представлены в следующем виде:

1. Для интервалов BA (I) и DL (III)

$$u = u_* - \Delta u_* \exp\left(\frac{\gamma S_0}{LC} \cdot t\right) \quad (5)$$

2. Для интервалов AD (II) и LB (IV)

$$u = u_* \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma S_0}{LC} \cdot t\right) \right]. \quad (6)$$

Время релаксации процесса во всех интервалах определяется по формуле

$$\tau/\tau_0 = u_0 \ln \left| \frac{u_0}{\Delta u_0} \right| \quad (7)$$

При этом величина τ_0 определяется с помощью характерных величин из выражения

$$\tau_0 = \frac{10^{-14} LC}{S_0 kT},$$

а величины u_0 и Δu_0 для различных интервалов имеют разные значения. Например, для клеток и поперечнополосатых мышечных волокон млекопитающих для времени релаксации получаем следующие значения (в мсек):

$$\tau_1 = 0,3, \tau_2 = 0,25, \tau_3 = 0,27, \tau_4 = 0,4.$$

Итак, время, за которое совершается один полный цикл изменения разности потенциалов на мембране, имеет порядок миллисекунды.

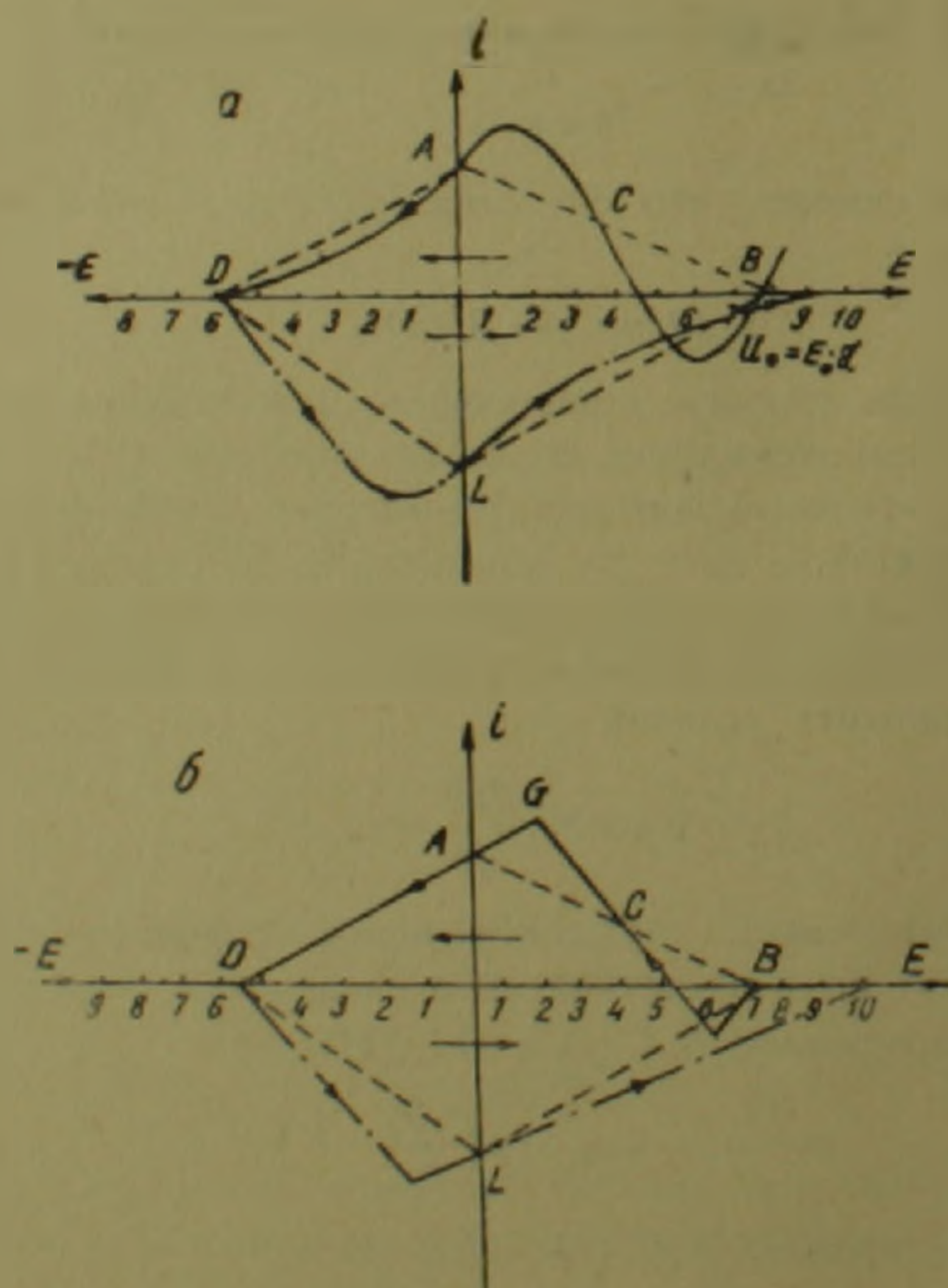


Рис. 4

С физической точки зрения процессы возникновения и формирования нервного импульса сходны с регенеративными процессами в триггерных схемах с одним устойчивым состоянием. Здесь дело усложняется тем, что не только пассивные параметры, но и активные (источник питания) распределены по всей системе. Энергия, поставляемая метаболическими процессами, происходящими в клетке, используется мембраной, во-первых, для создания необходимой разности потенциалов (ПП) и, во-вторых, для генерации носителей тока.

Весь цикл возникновения одиночного импульса можно рассматривать как последовательность четырех отдельных фаз. Первая и третья фазы представляют собой разрядку емкости мембраны и, следовательно, описываются одинаковой функциональной зависимостью между разностью потенциалов и временем (5). Во время второй и четвертой фаз происходит зарядка мембраны, а стало быть и эти процессы должны характеризоваться сходной зависимостью разности потенциалов от времени (6). Время релаксации определяется при этом по единой для всех фаз формуле (7). Численные значения, полученные по этой формуле для общей длительности одиночного ПД ($\tau \sim 1,5$ мсек), характерного времени ($\tau' \sim 0,55$ мсек) и средней крутизны нарастания восходящей фазы (~ 250 в/сек), хорошо согласуются с опытными данными.

Высокое значение потенциала покоя не случайно, а имеет принципиальный характер, ибо при низких значениях напряженности ($E < 10^4$ в/см) не могут проявляться характерные для сильного поля эффекты. Для возбудимости, однако, указанное значение поля (10^4 в/см) необходимо, но недостаточно. При таких полях могут развиваться характерные для сильного поля явления, подобные эффекту Ганна (9,10), но не возбуждение, поскольку система не будет иметь устойчивых состояний равновесия. Для того, чтобы мембрана была возбудимой, достаточно, чтобы потенциал покоя превышал некоторую величину E_0 (порядка 10^5 в/см), характерную для данного сорта клеток, различную для разных сортов.

Пороговое значение амплитуды возбуждения и закон «все или ничего» в рассматриваемой модели получают естественное и простое объяснение. Одним из преимуществ развитой здесь теории надо считать то, что в ней характеризующие процесс возникновения и формирования нервного импульса величины определяются с помощью структурных величин.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армянской ССР Г. М. Гарибяну и чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанарджяну за интерес, проявленный к работе, и А. К. Дадиваняну за полезную дискуссию.

Ներվային իմպուլսի ծագման ֆիզիկական տեսության կառուցման
հնարավորության մասին

Ներվային իմպուլսի կազմավորման ներկայումս գոյություն ունեցող տեսությունները (1-3) բոլորն էլ վիճարկելի են: Որոշ փորձնական տվյալները բացատրելիս նրանք հանդիպում են լուրջ դժվարությունների: Գրականության մեջ իբրև պրոբլեմի հնարավոր լուծում մատնացույց են արվում պինդ մարմնի ֆիզիկայի որոշ դրույթների կիրառությունները կենսաբանական սիստեմների նկատմամբ: Սակայն կենսաբջջներում էլեկտրոդներով բացատրման նպատակով պինդ մարմնի ֆիզիկայի դրույթների կիրառման ճանապարհին հիմնական խոչընդոտ է հանդիսանում կենսաբանական կազմավորումներում արգելված զոնայի բարձր արժեքները (3էվ):

Ներկա աշխատանքում առաջարկվում է ներվային իմպուլսի առաջացման ֆիզիկական այնպիսի մոդել, որում կենսաբջջների թաղանթների էլեկտրոնները հաղորդականության զոնա տեղափոխվելու համար իբրև լրացուցիչ էներգիա օգտագործում են բեվեռացման կորուստների ճանապարհով իրենց փոխանցված իոնների կոնցենտրացիոն գրադիենտով պայմանավորված ազատ էներգիայի մի մասը: Այնուհետև ոչ գծային տատանումների մեթոդով ստացված են ներվային իմպուլսի կազմավորումը բավական լավ նկարագրող ֆունկցիոնալ կապակցություններ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ր Ք Յ Ո Ւ Ն

- ¹ А. Ходжкин, Нервный импульс, «Мир», М., 1966. ² И. Такаки, Нервное возбуждение, «Мир», М., 1971. ³ Б. И. Ходоров, Общая физиология возбудимых мембран, «Наука», М., 1975. ⁴ В. С. Маркин, В. Ф. Постушенко, Ю. А. Чизмаджев, УФН, 123, 2, 289 (1977). ⁵ Ю. Н. Смолин, Биофизика, 21, 2, 248 (1976). ⁶ А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, УФН, 96, 4, 634 (1968). ⁷ С. Е. Бреслер, УФН, 98, 4, 652 (1969). ⁸ Ю. В. Готт, Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях, Атомиздат, М., 1978. ⁹ В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ, 6, 7, 2048 (1964). ¹⁰ В. Л. Бонч-Бруевич, С. Т. Калашников, ФТТ, 7, 3, 751 (1965). ¹¹ А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ФМ, М., 1959.

УДК 621.382.3

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Г. М. Авакьянц, Р. С. Барсегян,
М. А. Гукасян, М. В. Минасян, С. А. Саркисян

Мощный многоэмиттерный кремниевый транзистор на токи порядка сорока ампер

(Представлено 4/III 1979)

Характерной чертой в работе мощных транзисторов любых классов, при протекании через них высоких плотностей, инжектируемых эмиттером токов, является эффект оттеснения тока (^{1,2}), в результате которого весь ток оказывается сосредоточенным в узкой полосе у края эмиттера, обращенной к базе, и отчего эффективность использования площади транзисторной структуры резко снижается. Кроме того, в транзисторах с большой площадью структуры наблюдается тенденция к неравномерному распределению тока не только по направлению к краю эмиттера, но и вообще между различными участками структуры (например, вдоль периметра эмиттера). С целью устранения вредного влияния указанных эффектов поступают следующим образом. Во-первых, создаются структуры с сильно развитым периметром эмиттера и малой шириной отдельных элементов эмиттерной структуры (гребенчатые структуры).

Благодаря этому уменьшается вредная роль оттеснения тока к краю эмиттера, и падает доля неиспользованной площади эмиттерного перехода. Во-вторых, разделяют эмиттерную структуру на большое число отдельных областей, что дает возможность уменьшить плотность рассеиваемой мощности транзисторной структуры и снижает его тепловое сопротивление. Однако для таких многоэмиттерных структур возникает другая серьезная проблема, связанная с неравномерным распределением тока между отдельными областями, что приводит к перегреву отдельных областей транзистора. Это проявляется наиболее сильно в статических режимах работы транзистора и при повышенном напряжении на коллекторе.

Для улучшения устойчивости токораспределения существует способ, заключающийся в том, что каждая отдельная область снабжается специальным сопротивлением (так называемое балластное сопротивление), включенным последовательно с эмиттерным электродом этой области.

Балластное сопротивление в той или иной степени обеспечивает также режим генератора тока от питающего источника, что важно для слабой чувствительности параметров транзисторов к изменению температуры.

Такие сопротивления можно создавать различными способами. Нами была разработана конструкция мощного многоэмиттерного транзистора с балластными диффузионными сопротивлениями, соединяющимися последовательно с группой эмиттерных гребенок (рис. 1, а).

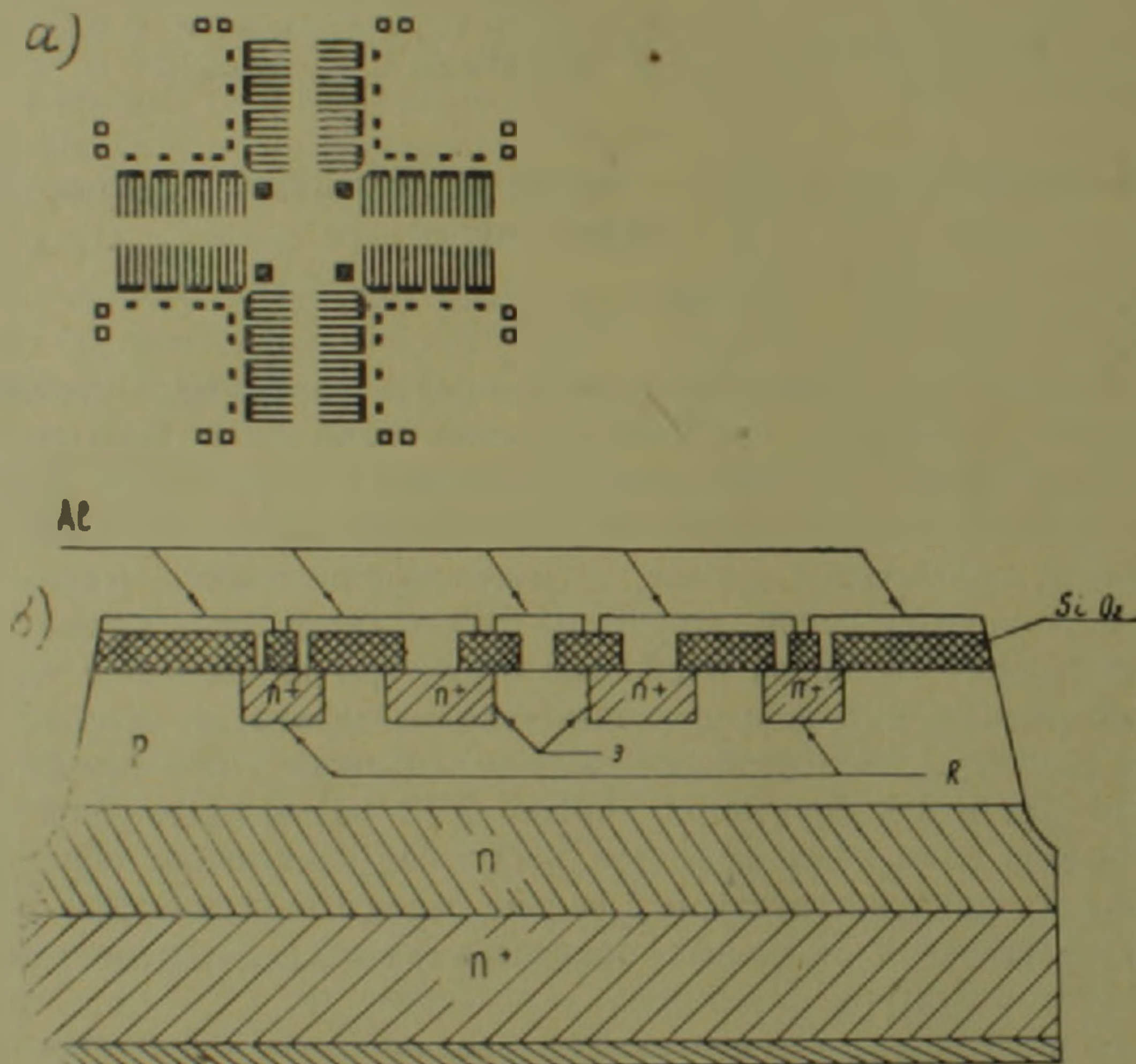


Рис. 1. Топология и разрез многоэмиттерного транзистора с балластными сопротивлениями.

а — после первой фотолитографии (открытия эмиттерных окон);

б — разрез транзисторной структуры

Предложенная конструкция отличается от существующих тем, что эмиттерные гребенки, подключенные к одному сопротивлению, соединены между собой параллельно, причем число гребенок зависит от величины тока, снимаемого с одной гребенки, и величины ограничительного сопротивления, а расстояние между эмиттерными гребенками, с целью оптимизации площади транзистора, выбрано в соответствии с формулой $d \approx \sqrt{\text{const} \Delta}$, где d — ширина эмиттерной гребенки, а Δ — расстояние между гребенками. const — лежит в пределах от 1 до 100 мкм^2 .

Токозадающие площадки (в данном случае их четыре) выполнены, чередуясь, на кристалле с эмиттерными площадками. Диффузионные сопротивления создаются в одном технологическом цикле вместе с эмиттерными гребенками. Базовая токовая область расположена в центре конструкции, содержащей блокирующие области того же типа проводимости (рис. 1а, квадраты в центре), что и эмиттерные, размеры которых выбраны в соответствии с размерами токозадающих площадок.

Конкретные размеры отдельных эмиттеров, их длина, ширина, а также расстояние между ними подбирались таким образом, чтобы возможно было при изготовлении транзистора использовать как технологию с «мелким» эмиттерным переходом ($2 \div 3$ мкм от поверхности), так и технологию для глуболежащего эмиттера ($6 \div 9$ мкм).

Приборы изготовлены по обычной планарной технологии. В качестве исходного материала выбирали пластины кремния с эпитаксиальными пленками типа $n^+ - n$ с удельными сопротивлениями $0,01$ ом см и $3 \div 7,5$ ом см и толщиной эпитаксиального слоя $22 \div 25$ мкм.

В качестве примеси, при создании базовой области, использовали бор (источник — борный ангидрид B_2O_3). Диффузию бора проводили в двух стадиях: загонки и разгонки. Загонку проводили в вакууме $5 \cdot 10^{-3}$ мм Hg, при температуре источника 1155°C , температуре диффузии $T_1 = 1035^\circ\text{C}$, время загонки $11 \div 15$ мин. После первой стадии диффузии поверхностное сопротивление составляло $19 \div 30$ ом/□. Вторую стадию диффузии (разгонка) проводили в окисляющей среде при температуре в зоне 1220°C . Толщина слоя SiO_2 составляла $\sim 0,5 \div 0,6$ мкм. Глубина залегания $p - n$ перехода, измеренная по методу сферического шлифа, составляла $5,2 \div 6,2$ мкм, поверхностное сопротивление $30 \div 60$ ом/□.

После завершения двухстадийной диффузии бора проводили первую фотолитографическую обработку, и в окисной пленке над областью p -типа вытравливали окна для эмиттеров и балластных сопротивлений (рис. 1, а). В качестве источника примеси для эмиттера использовали треххлористый фосфор (PCl_3). Диффузию фосфора, так же, проводили в две стадии. После первой стадии диффузии фосфора поверхностное сопротивление составляло $\sim 0,9 \div 1,1$ ом/□. После разгонки фосфора поверхностное сопротивление было $1,5 \div 2$ ом/□, толщина окисла $0,35 \div 0,45$ мкм, глубина залегания $n - p$ -перехода $2,4 \div 3$ мкм. Концентрация акцепторов в базе под эмиттером составляла $4 \div 5 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$.

С помощью фотолитографии в окисле вытравливали окна для контактов. Металлизацию базовых и эмиттерных контактов осуществляли напылением в вакууме пленки алюминия толщиной $3 \div 4$ мкм. Лишние участки алюминия удаляли с помощью третьей фотолитографии. Металлизацию под коллекторным контактом осуществляли путем химического никелирования с толщиной пленки $8 \div 10$ мкм, с последующим вжиганием в вакууме $3 \div 2 \cdot 10^{-3}$ мм Hg, при температуре $600 \div 610^\circ\text{C}$.

Размеры транзисторной структуры $\sim 10 \times 10$ мм.

На рис. 1, б изображен разрез транзисторной структуры. Вольт-

амперные характеристики транзистора измеряли в импульсном режиме с длительностью импульса 200—300 мксек, без применения радиатора.

На рис. 2, а, б показаны входные и выходные вольт-амперные характеристики в схеме с общим эмиттером. Величина напряжения насыщения при токе 30÷40 А лежит в пределах 1,5÷2 в.

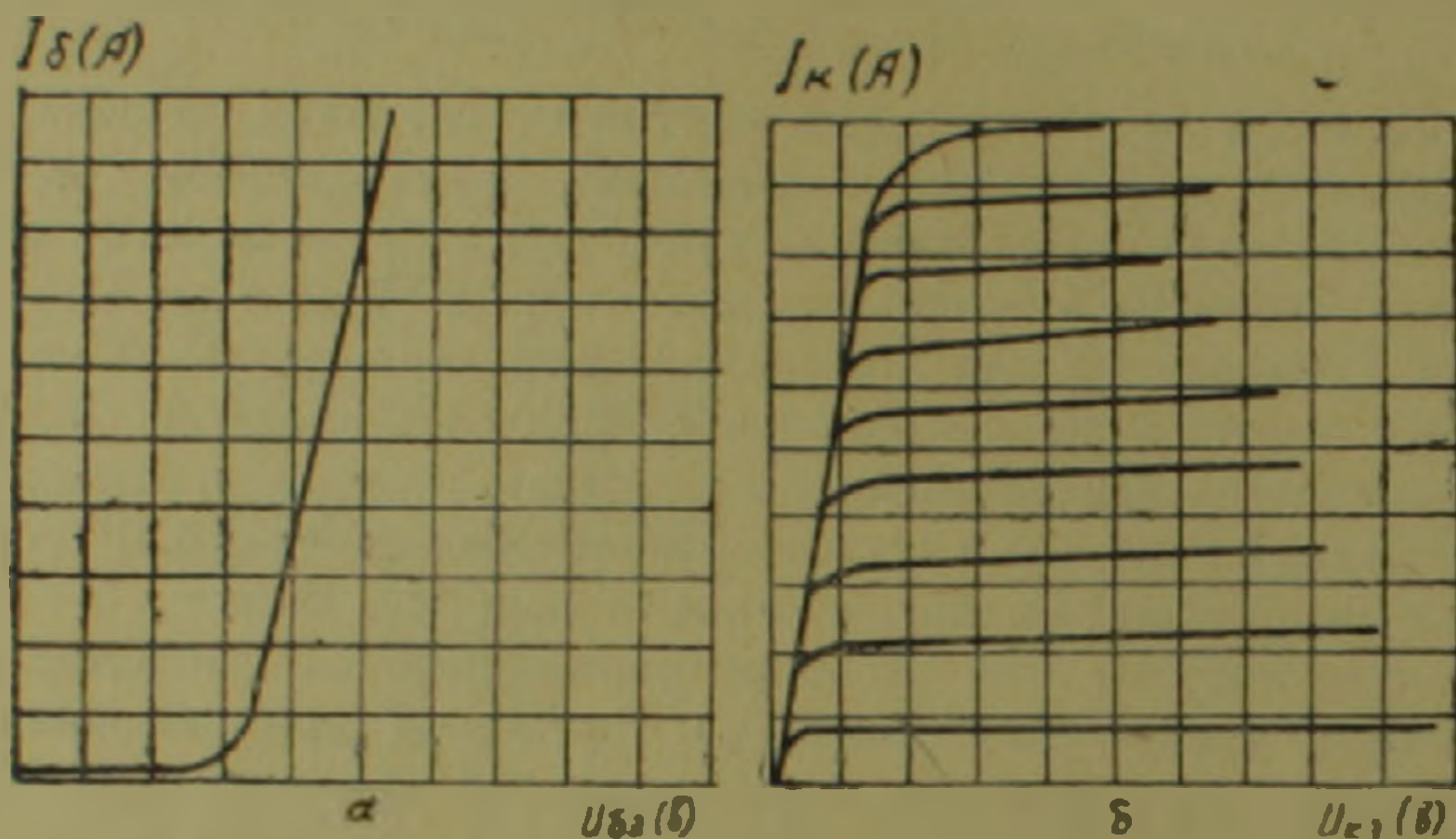


Рис. 2. а—входная характеристика транзистора (цена деления по горизонтали 0,2В, по вертикали 1 А);

б—выходные вольт-амперные характеристики транзистора в схеме с общим эмиттером (цена деления по горизонтали 0,5 В, по вертикали 1 А; ток базы: $I_B = 0,05 A \times m$, где $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, соответственно)

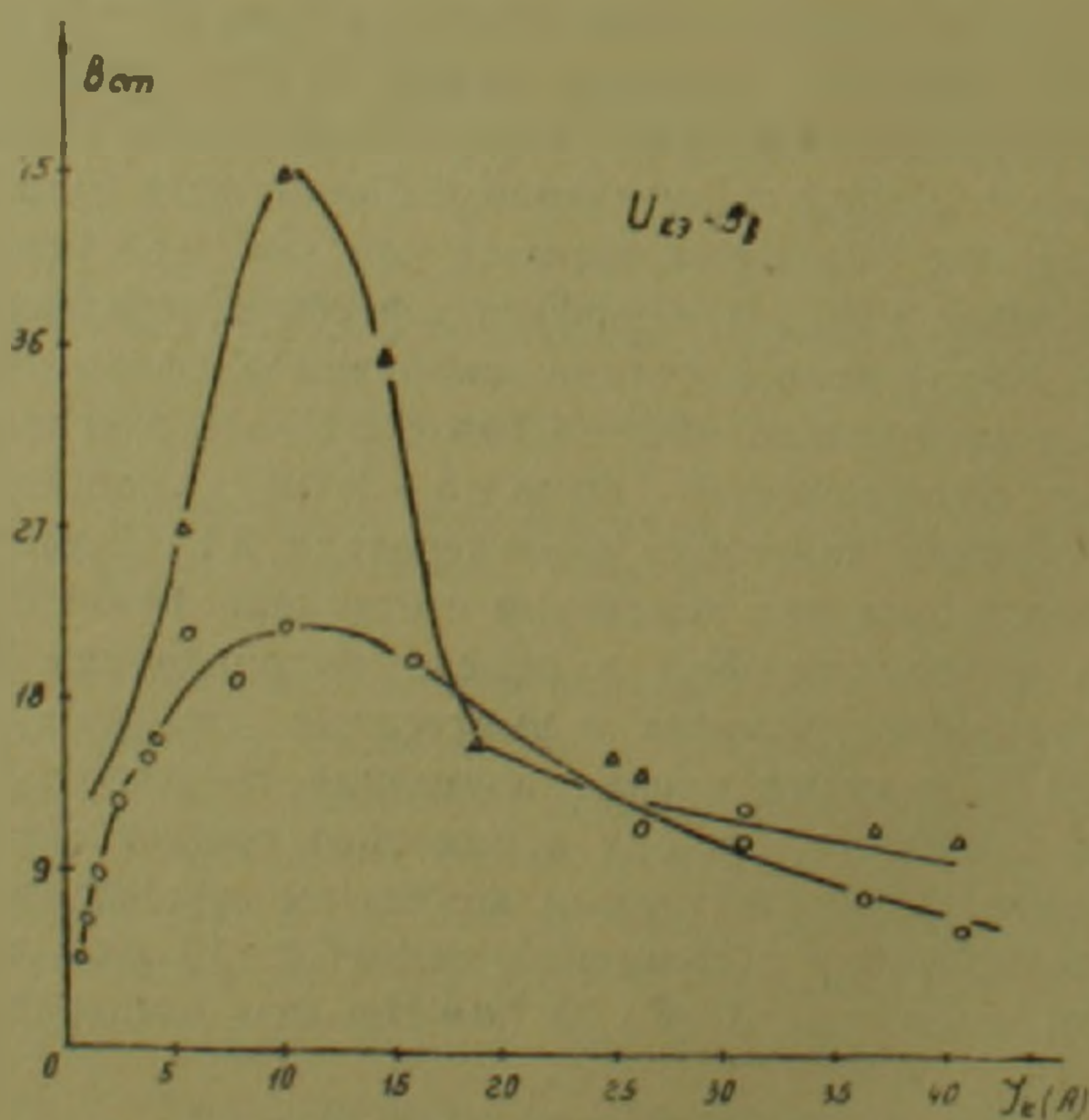


Рис. 3. Зависимость статического коэффициента усиления транзистора в схеме с общим эмиттером от величины коллекторного тока для двух разных образцов

На рис. 3 показана зависимость статического коэффициента усиления по току в схеме с общим эмиттером от тока коллектора. Максимально допустимое напряжение коллектор-эмиттер составляло ~ 160—200 в.

Как видно из приведенных рисунков, качество транзисторов можно считать вполне удовлетворительным и соответствующим расчетным данным.

Вернемся теперь к вопросу о роли балластных сопротивлений в деле равномерного отбора тока по площади транзистора. Совершенно ясно, что величина этих сопротивлений, при их создании, не может быть одинаковой по площади кристалла. Другими словами, будет иметь место определенный разброс значений этих сопротивлений. Имеет ли смысл, в таком случае, использовать эти сопротивления, ибо неодинаковая величина их будет означать неоднородный отбор тока?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо вспомнить, что по площади кристалла, даже в отсутствии балластных сопротивлений, также будет иметь место значительная неравномерность отбора тока по упомянутой площади. Эта неравномерность обуславливается следующими обстоятельствами. Во-первых, по тем или иным причинам профили примесей в эмиттерных переходах по площади кристалла будут неодинаковыми. В частности, неодинаковой может быть концентрация мелких доноров у основания потенциального барьера эмиттерного $n^+ - p$ перехода (транзистор имеет обычно $n^+ - p - n^- - n^+$ -структуру), диффузионная длина дырок в эмиттере. Также будет неодинаковой и величина тормозящего поля в базе вблизи этого же перехода, опять-таки вызванная неодинаковостью профилей диффузии по кристаллу и, наконец, величина утечек на переходе.

Во-вторых, обычно имеет место неоднородность теплового контакта между пластиной кремния и металлическим теплоотводом. Это вызовет неоднородность температуры по кристаллу, а стало быть и неодинаковость эмиссии тока в различных точках кристалла, что повлечет за собой дальнейшее усиление разброса в отборе тока. Могут быть и другие причины, ведущие к неоднородной эмиссии по кристаллу. И, таким образом, ответ на вопрос, принесут ли диффузионные балластные сопротивления пользу или вред при разбросе их значений по номиналу, зависит от того, как велик разброс этих сопротивлений и как зависит разброс тока от разброса сопротивлений. Кроме того, очень важно знать, какой разброс тока, в свою очередь, вызывают неоднородность по температуре и неоднозначность по величине концентраций мелких доноров у основания эмиттерного потенциального барьера.

Очевидно, здесь проще всего поступить следующим образом.

Зададим относительную величину изменения того или иного параметра и посмотрим, к какому относительному изменению тока это изменение ведет.

В тех условиях, когда балластное сопротивление в полной мере выполняет свои ограничительные функции, как видно, относительная ве-

личина его изменения $\Delta R/R$ ведет к следующему относительному изменению тока $\Delta I/I$:

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{\Delta R}{R}. \quad (1)$$

Чтобы выяснить, каково $\Delta I/I$ в случае изменения температуры кристалла T на величину ΔT , или в случае изменения концентрации мелких доноров у основания эмиттерного барьера N_{12} на величину ΔN_{12} , мы должны обратиться к соответствующей формуле для плотности тока эмиссии транзистора.

Мощные транзисторы обычно работают в режиме тока насыщения, в условиях значительного проявления эффекта оттеснения тока к краю эмиттера, обращенного к базовому электроду. В этом случае, как показано ранее ⁽²⁾, полный ток с края эмиттерной полоски длиной l (эмиттерует ток, в основном, край полоски, шириной $x_0 = h\sqrt{6B_{ст}}$, здесь h —ширина базы бездрейфового транзистора, $B_{ст}$ —статический коэффициент усиления по току в схеме с общим эмиттером).

$$I = \frac{l j_s e^{U_0/T}}{\sqrt{\frac{D_n n(0)}{6}}}, \quad (2)$$

где j_s —ток насыщения эмиттерного перехода, равный $\frac{2D_n}{h} n_p$, D_n —коэффициент диффузии электронов в p -базе, n_p —равновесная концентрация электронов там же.

$$D_2 = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)_0 \frac{b}{h^2 N_a}, \quad (3)$$

$b = \frac{\mu_n}{\mu_p}$, μ_n и μ_p соответственно подвижности электронов и дырок, N_a —концентрация мелких акцепторов в базе, U_0 —напряжение на эмиттерном переходе, помноженное на e/k , где k —постоянная Больцмана, e —элементарный заряд.

$$\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)_0 = \frac{D_p h N_a}{D_n L_p N_{12}}. \quad (4)$$

Здесь D_p —коэффициент диффузии дырок в эмиттере, L_p —их диффузионная длина там же, $n(0)$ —концентрация электронов в p -базе на границе эмиттерного перехода.

Далее

$$n(0) = N_{12} e^{-\frac{U_0 - U_{12}}{T}},$$

$$U_0 = T \ln \frac{N_{12} N_a}{n_i^2}, \quad (5)$$

где n_i — собственная концентрация носителей в кремнии:

$$n_i = \sqrt{N_v N_c} e^{-\frac{E_g}{2T}}, \quad (6)$$

причем N_v и N_c — плотности состояний в зоне проводимости и в валентной зоне соответственно, E_g — есть ширина запрещенной зоны, помноженная на e/k .

Используя (3) ÷ (6), можно (2) переписать так.

$$I = \frac{2\sqrt{6} l D_n \sqrt{L_p}}{\sqrt{h}} \sqrt{N_v N_c} \sqrt{\frac{N_{A2}}{N_a}} e^{-\frac{E_g - U_s}{2T}}. \quad (7)$$

Считая отношения ΔT и ΔN_{A2} небольшими, из (7) найдем, пренебрегая зависимостью от T , D_n и $\sqrt{N_v N_c}$:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{E_g - U_s}{2T} \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta(L_p N_{A2})}{2N_{A2} L_p}. \quad (8)$$

Если речь идет о диффузионных балластных сопротивлениях (а в реализованном нами транзисторе на 40 А у нас именно такие сопротивления), то надо сказать, что наверняка

$$\frac{\Delta(L_p N_{A2})}{2L_p N_{A2}} > \frac{\Delta R}{R}. \quad (9)$$

В самом деле, $\Delta R/R$ определяется изменением полной концентрации электронов в теле диффузионного сопротивления (n^+ -области), тогда

как $\frac{\Delta N_{A2}}{N_{A2}}$ означает изменение концентрации N_{A2} на линии эмиттерного

перехода со стороны n^+ -области. Ясно, что если полное количество примеси мелких доноров в n^+ -области постоянно, то ΔR либо вообще равно нулю, либо очень мало. В то же время концентрация N_{A2} в этом случае вдоль границы перехода совсем не должна быть постоянной и может сильно флуктуировать. Отсюда следует неравенство (9). Кроме того, если принять, что $\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\Delta T}{T}$, то из (8)

следует, что $\Delta I/I$ из-за $\frac{E_g - U_s}{2T} \gg 1$ снова будет превосходить правую часть (1).

Если $\Delta T/T$ таково, что экспоненту в (7) нельзя разложить по $\Delta T/T$, то тем более $\Delta I/I$ из (8) будет намного больше, чем $\Delta I/I$ из (1). Таким образом, несмотря на разброс своих значений, диффузионное балластное сопротивление всегда будет способствовать более однородной эмиссии тока по площади транзистора. И, следовательно, многоэмиттерный транзистор всегда следует предпочесть гребенчатому (без сопротивлений), ибо наличие балластных сопротивлений будет сильно уменьшать число горячих точек и флуктуаций тока в них, что будет способствовать устойчивости транзистора по отношению ко вторичному пробую.

Кроме того, более однородный съём тока по транзистору позволяет надеяться на то, что изготовленный транзистор больше будет соответствовать по своим параметрам расчётному прибору и этим самым способствовать созданию тех приборов, которые заранее были запланированы. Именно все эти соображения заставили нас, несмотря на увеличение площади кристалла, и в связи с этим нарастание разброса в параметрах, идти по пути создания мощных и сверхмощных транзисторов в многоэмиттерном исполнении.

Ереванский государственный
университет

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ բզրակից-անդամ Գ. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆՑ, Ռ. Ս. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ,
Ս. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ, Մ. Վ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ, Ս. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Սիլիցիումային բազմաէմիտեր հզոր տրանզիստոր Բառասուն ամպերի կարգի հոսանքներ համար

Տեսական վերլուծությամբ ցույց է տրված, որ բազմաէմիտեր տրանզիստորում սահմանափակող դիմադրութիւնները, շնայած իրենց թույլատրելի արժեքներից ունեցած շեղմանը, դրական դեր են խաղում նպաստելով հոսանքի ավելի հավասարաչափ բաշխմանը սարքում՝ բյուրեղի մակերևութով:

Ելնելով այս հետևությունից, պատրաստված է հզոր բազմաէմիտեր սիլիցիումային տրանզիստոր քառասուն ամպերի կարգի հոսանքների համար: Տրանզիստորի պարամետրերի չափումները հաստատեցին ենթադրյալ նախադրյալների ճշտությունը:

Բերված են տվյալներ տրանզիստորի պատրաստման տեխնոլոգիայից, որոնք օպտիմալ են հանդիսացել ըստ փորձնական արդյունքների:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ս Ի Ք Յ ՈՒ Ն

• Е. З. Мазель, Мощные транзисторы, «Энергия», М., 1969. • Г. М. Авакьянц, Физические принципы проектирования мощных транзисторов и программы их машинного расчета, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1978

УДК 523.035

АСТРОФИЗИКА

А. Г. Никогосян

**Диффузное отражение света от полубесконечной атмосферы
при законе перераспределения $\Gamma_{II}(x', x, \gamma)$**

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. А. Амбарцумяном 9/XI 1978)

Возможность представления функции перераспределения по частотам в виде билинейного разложения по некоторой системе функций, как было показано в работах (¹⁻⁴), может явиться основой для разработки методов решения задач переноса излучения в спектральной линии в общем случае некогерентного рассеяния. Один из этих методов заключается в применении принципа инвариантности, при котором вопрос сводится к решению бесконечной системы функциональных уравнений для φ -функций, являющихся аналогом функции В. А. Амбарцумяна $\varphi(\gamma)$, хорошо известной из теории монохроматического рассеяния. В последних двух из упомянутых работ были предложены облегченные методы приближенного решения указанных бесконечных систем уравнений. Знание φ -функций решает задачу о диффузном отражении от полубесконечной среды, которая, в свою очередь, позволяет вычислить интенсивность излучения, выходящего из среды, содержащей источника энергии (⁵). Заметим также, что если в более ранних работах по теории некогерентного рассеяния обычно задавались целью выявить эффекты перераспределения излучения в линии по различным частотам и потому пользовались функцией перераспределения, усредненной по направлениям, то в работе (⁶) (см. также (⁸)) были приведены билинейные разложения для соответствующих законов перераспределения по частотам и направлениям, что позволило распространить разработанные ранее методы и на этот более сложный случай.

Напомним вкратце часть результатов работы (⁶), которые понадобятся при дальнейшем изложении. Функция $\Gamma_I(x', x, \gamma)$, характеризующая чисто доплеровский закон перераспределения по частотам и направлениям, допускает разложение вида (отмечая тот или иной закон перераспределения, мы будем следовать общепринятым обозначениям)

$$r_1(x', x, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sin \gamma} \exp \left\{ -\frac{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \gamma a_k(x) a_k(x'), \quad (1)$$

где x — безразмерная частота, γ — угол, заключенный между направлениями движения фотона до и после акта рассеяния; $a_k(x) = (\pi^{1/2} 2^{k/2} \sqrt{k!})^{-1} \exp(-x^2) H_k(x)$, причем $H_k(x)$ — полином Эрмита k -й степени.

В частности, если усреднить $r_1(x', x, \gamma)$ по всем направлениям, то придем к представлению, полученному еще Хаммером в работе (1):

$$r_1(x', x) = \int_{\max(|x|, |x'|)}^{\infty} \exp(-u^2) du = \sum_{k=0}^{\infty} A_k a_{2k}(x) a_{2k}(x'), \quad (2)$$

где $A_k = 1/(2k+1)$. Не будет лишним заметить, что функции $a_k(x)$ являются собственными функциями ядра $r_1(x', x, \gamma)/a(x)$, соответствующими собственным значениям $\cos^k \gamma$, при этом $a(x)$ — профиль коэффициента поглощения, равный здесь $\exp(-x^2)$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда функция перераспределения по частотам и направлениям имеет вид

$$r_{III}(x', x, \gamma) = \frac{\sigma \operatorname{cosec} \gamma}{\pi^{3/2} U(0, \sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-u^2) U(x \operatorname{cosec} \gamma - u \operatorname{ctg} \gamma, \sigma \operatorname{cosec} \gamma)}{(x' - u)^2 + \sigma^2} du, \quad (3)$$

где $U(x, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-u^2)}{(x-u)^2 + \sigma^2} du$ — функция Фойгта, $\sigma = (\Delta\nu_R + \Delta\nu_c)/\Delta\nu_D$

— параметр затухания, $\Delta\nu_R$ и $\Delta\nu_c$ — ширины линии, обусловленные затуханием вследствие излучения и столкновений, $\Delta\nu_D$ — доплеровская ширина линии.

Указанный закон соответствует случаю, когда помимо тепловых движений учитывается уширение верхнего уровня, обусловленное излучением и столкновениями. При этом предполагается, что в системе отсчета атома имеет место полное перераспределение по частотам

С помощью соотношения (1) нетрудно получить билинейное разложение и для функции $r_{III}(x', x, \gamma)$. Действительно, принимая во внимание формулу

$$r_{III}(x', x, \gamma) = \frac{\sigma}{\pi^{3/2} U(0, \sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(x-u)^2 + \sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1(u, t, \gamma)}{(x'-t)^2 + \sigma^2} dt, \quad (4)$$

вытекающую из (3), и учитывая (1), находим:

$$r_{II}(x', x, \gamma) = \frac{1}{U(0, \sigma)} \sum_{h=0}^{\infty} \cos^h \gamma a_h(x', \sigma) a_h(x, \sigma), \quad (5)$$

где

$$a_h(x, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_h(u) du}{(x-u)^2 + \sigma^2} = (-1)^h \pi^{1/4} (2^{h/2} \sqrt{h!})^{-1} d^h U(x, \sigma) / d x^h. \quad (6)$$

Очевидно, что введенные выше функции $a_h(x)$ являются предельными значениями функций $a_h(x, \sigma)$ при $\sigma \rightarrow 0$. Вопросы, связанные с вычислением $a_h(x, \sigma)$, разбираются в работах (^{8,9}), поэтому их мы здесь не коснемся. Отметим лишь, что указанные функции удовлетворяют рекуррентным соотношениям, которые существенно облегчают их табулирование.

После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению закона перераспределения $r_{II}(x', x, \gamma)$, имеющего вид (см., например, (^{7,9}))

$$r_{II}(x', x, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi} U(0, \sigma) \sin \gamma} \exp \left\{ - \left(\frac{x-x'}{2} \right)^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\gamma}{2} \right\} \times \\ \times U \left(\frac{x+x'}{2} \sec \frac{\gamma}{2}, \sigma \operatorname{cosec} \frac{\gamma}{2} \right), \quad (7)$$

где теперь $\sigma = \Delta \nu_R / \Delta \nu_D$.

По указанному закону происходит перераспределение по частотам, когда рассеяние в системе покоя атома происходит без изменения частоты, и в то же время нельзя пренебречь конечной естественной шириной верхнего уровня. Функцией перераспределения (7) приходится пользоваться, когда роль эффектов давления невелика, например, при изучении диффузии излучения в газовых туманностях. Выражение для усредненной по направлениям функции перераспределения $r_{II}(x', x)$ можно получить непосредственно из (7)

$$r_{II}(x', x) = \frac{1}{\pi U(0, \sigma)} \int_{(\bar{x}-x)/2}^{\bar{x}} \exp(-u^2) \left(\operatorname{arctg} \frac{x+u}{\sigma} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{x}-u}{\sigma} \right) du, \quad (8)$$

где $\bar{x} = \max(x, x')$ и $\underline{x} = \min(x, x')$.

Следует отметить, что уже одно численное вычисление функции $r_{II}(x', x)$ сталкивается с определенными трудностями, связанными прежде всего с разрывом производной этой функции при $x = x'$. Поэтому вопрос о построении функции $r_{II}(x', x)$ и вычислении контуров спектральных линий при указанном законе затрагивался в целом ряде работ. Так, в работе (¹⁰) функция $r_{II}(x', x)$ представляется в виде некоторого ряда, однако медленная сходимость последнего ограничивает его применимость при численных расчетах. В другой работе (¹¹) для вычисления $r_{II}(x', x)$ привлекались кубические сплайны.

Здесь мы укажем на другую возможность построения $r_{II}(x', x, \gamma)$ и $r_{II}(x', x)$, позволяющую к тому же применить для решения задач некогерентного рассеяния с данными законами перераспределения ранее разработанные методы. Дальнейшие наши рассуждения основываются на следующем представлении $r_{II}(x', x, \gamma)$:

$$r_{II}(x', x, \gamma) = \frac{\sigma}{\pi U(0, \sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_I(x' + t, x + t, \gamma)}{t^2 + \sigma^2} dt, \quad (9)$$

которое легко получить из (7) заменой переменной интегрирования в функции Фойгта на $\left(t + \frac{x + x'}{2}\right) \sec \frac{\gamma}{2}$. Пользуясь разложением (1), вместо (9) получаем

$$r_{II}(x', x, \gamma) = \frac{1}{U(0, \sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \gamma R_k(x', x), \quad (10)$$

где

$$R_k(x', x) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_k(x' + t) a_k(x + t)}{t^2 + \sigma^2} dt. \quad (11)$$

Аналогично для функции перераспределения $r_{II}(x', x)$, задаваемой соотношением (8), будем иметь:

$$r_{II}(x', x) = \frac{1}{U(0, \sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} A_k R_{Ik}(x', x). \quad (12)$$

Нетрудно показать, что величины $R_k(x', x)$ простым образом выражаются через знакомые нам функции $a_k(x)$ и $a_k(x, \sigma)$. Действительно, учитывая (6), можем написать

$$R_k(x', x) = 2^k k! \frac{\partial^{2k} R_0(x', x)}{\partial x^k \partial x'^k}. \quad (13)$$

Но для $R_0(x', x)$ имеем

$$R_0(x', x) = a_0(\Delta) a_0(s, \bar{\sigma}), \quad (14)$$

где $s = (x + x')/\sqrt{2}$, $\Delta = (x - x')\sqrt{2}$, $\bar{\sigma} = \sigma/\sqrt{2}$.

Подставляя (14) в (13) и пользуясь еще раз соотношением (6), окончательно получаем

$$R_k(x', x) = \sum_{l=0}^k c_{lk} a_{2l}(\Delta) a_{2k-2l}(s, \bar{\sigma}), \quad (15)$$

где $c_{lk} = (-1)^l \sqrt{(2l)!(2k-2l)!} / 2^k l!(k-l)!$.

Очевидно, что при $\sigma \rightarrow 0$ формула (10) переходит в формулу (1). При $\sigma \neq 0$, как это вытекает из свойств функций $a_k(x, \sigma)$, существует интервал частот вокруг центральной частоты, где $r_{11} \approx r_1$. В указанном интервале, который тем шире, чем меньше σ , скорость сходимости рядов (10) и (12), с одной стороны, и рядов (1) и (2), с другой, по сути дела, одна и та же. Мы видим, что функции $a_k(x, \sigma)$ и их предельные значения $a_k(x)$ играют фундаментальную роль в теории некогерентного рассеяния. С помощью указанных функций несложно построить все перечисленные выше законы перераспределения. Однако, как мы убедимся ниже, (см. также (4)), роль функций $a_k(x, \sigma)$ этим не исчерпывается.

Остановимся теперь на вопросе об определении интенсивности излучения, диффузно отраженного от полубесконечной атмосферы, освещаемой извне излучением в непрерывном спектре. Для краткости ограничимся рассмотрением случая рассеяния в одномерной среде, причем в качестве закона перераспределения по частотам возьмем $r_{11}(x', x)$. Применение принципа инвариантности с учетом (11) и (12) позволяет свести задачу об определении коэффициента отражения $\rho(x', x)$ к решению следующей бесконечной системы функциональных уравнений для функций $\varphi_k(x, t)$:

$$\varphi_k(x, t) = a_{2k}(x+t) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', x) a_{2k}(x'+t) dx', \quad (k=0, 1, \dots), \quad (16)$$

где

$$\rho(x', x) = \frac{\lambda}{2} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} A_m \bar{R}_{2m}(x', x)}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)}, \quad \bar{R}_m(x', x) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x, t) \varphi_m(x', t)}{t^2 + \sigma^2} dt.$$

Система уравнений (16) несущественным образом отличается от аналогичной системы, получающейся при рассмотрении рассеяния с доплеровским законом перераспределения (3). Поэтому основные результаты названной работы, касающиеся приближенного решения системы уравнений для φ -функций, остаются в силе и в рассматриваемом случае. Так, например, если ограничиться решением укороченной системы уравнений

$$\varphi_k(x, t) = a_{2k}(x+t) + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^N A_m \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x, t')}{t'^2 + \sigma^2} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x', t') a_{2k}(x'+t')}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)} dx', \quad (17)$$

то учитывая, что при любых фиксированных x и t функции $\varphi_k(x, t)$ с увеличением индекса стремятся к соответствующим $a_{2k}(x+t)$, для определения коэффициента отражения $\rho(x', x)$ можно предложить формулу

$$\rho(x', x) = \frac{\lambda}{2} \frac{\sum_{m=0}^N A_m [\bar{R}_{2m}(x', x) - R_{2m}(x', x)] + r_{11}(x', x)}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)}, \quad (18)$$

где N характеризует порядок приближения и определяется шириной интересующего нас интервала частот. Заметим также, что замену $\varphi_k(x, t)$ соответствующими функциями $a_{2k}(x+t)$ можно произвести в самой системе уравнений (15), сведя ее, тем самым, к решению следующей системы:

$$\begin{aligned} \varphi_k^*(x, t) = & a_{2k}(x+t) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^N A_m \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{t'^2 + \sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m^*(x', t') \varphi_m^*(x, t') - a_{2m}(x'+t') a_{2m}(x+t')}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)} \times \\ & \times a_{2k}(x' + t) dt + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_{11}(x', x)}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)} a_{2k}(x' + t) dx'. \end{aligned} \quad (19)$$

После определения функции отражения $\rho(x', x)$ контур спектральной линии находится интегрированием последней по одному из аргументов. Таким образом, разделение переменных под знаком интеграла в (11) достаточно для применения развитых ранее методов решения и на случай рассеяния с законом перераспределения $r_{11}(x', x)$. Мы видим, что важность функций $a_k(x)$ при законе перераспределения $r_{11}(x', x, \gamma)$, так же, как и функций $a_k(x, \sigma)$ — при $r_{11}(x', x, \gamma)$ и $r_{111}(x', x, \gamma)$, заключается еще и в том, что при больших значениях индекса последними можно заменить соответствующие φ -функции. Заметим также, что проведенные выше рассуждения, по аналогии с (4), легко провести и в трехмерном случае при рассеянии с анизотропной функцией перераспределения по частотам.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

Լույսի դիֆուզ անդրադարձումը կիսաանվերջ մթնոլորտից վերաբաշխման օրենքի դեպքում

Առաջարկվում է $r_{11}(x', x, \gamma)$ վերաբաշխման օրենքի կառուցման մի նոր համեմատաբար պարզ եղանակ, նշված վերաբաշխման ֆունկցիան ներկայացվում է շարքի տեսքով, ուր մասնակցում են ոչ կոնեքենց ցրման տեսության մեջ հայտնի $a_k(x)$ և $a_k(x, \sigma)$ ֆունկցիաները: Մյուս կողմից $r_{11}(x', x, \gamma)$ -ի համար ստացված է մի նոր ներկայացում, որը թույլ է տալիս լուծել կիսաանվերջ մթնոլորտից լույսի դիֆուզ անդրադարձման խնդիրը՝ օդտագործելով ինվարիանտության սկզբունքի վրա հիմնված նախկինում մշակված լուծման մեթոդները:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՇՈՒՄՆԵՐ

- ¹ N. B. Yengibarian, A. G. Nikoghossian, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 13, 787, 1973. ² Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян, ДАН СССР, т. 229, 583 (1976). ³ Н. А. Haruthyunian, A. G. Nikoghossian, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 19, 135 (1978). ⁴ А. Г. Никогосян, ДАН СССР, т. 235, 786 (1977). ⁵ Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян, ДАН СССР, т. 242, 66 (1978). ⁶ C. Magnan, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 15, 979 (1975). ⁷ D. G. Hummer, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 125, 21 (1962). ⁸ A. Reichel, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 8, 1601 (1968). ⁹ D. Mihalas, Stellar Atmospheres, Freeman and Comp. San Francisco, 1970. ¹⁰ D. Rees, A. Reichel, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 8, 1795 (1968). ¹¹ T. F. Adams, D. G. Hummer, G. B. Rybicki, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 11, 1365 (1971).

УДК 591.1.05

БИОХИМИЯ

Ж. С. Геворкян, А. С. Оганесян

Влияние аденозинтрифосфорной кислоты на образование аммиака из некоторых L-аминокислот в почках белых крыс

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 24/XII 1978)

В наших прежних исследованиях было показано, что снижение энергетического уровня клеток коркового слоя почек белых крыс путем преникубации срезов в атмосфере воздуха приводит к значительному подавлению активности ферментов, осуществляющих деаминирование L-аминокислот (глутаминовая, аспарагиновая, орнитин). При предварительном добавлении АТФ к инкубируемой среде активность этих ферментов сохраняется на высоком уровне.

В дальнейшем, в ходе наших исследований у одной группы экспериментальных животных (белые крысы) мы заметили значительное снижение аминокислотдеаминирующей способности срезов почек (корковый слой), что было связано с неполноценным питанием. Экспериментальные животные в течение долгого времени получали преимущественно углеводную диету. У этих животных изучали аминокислотдеаминирующую способность срезов коркового слоя почек при добавлении АТФ. В другой серии опытов подобные исследования проводились после предварительного введения АТФ этим животным (из расчета 60 мг/кг живого веса, в течение 7 дней). Параллельно подобные опыты проводили на животных, находящихся на нормальном кормовом режиме.

Срезы коркового слоя почек (по 100 мг) инкубировали в Кребс-Рингер-бикарбонатном буфере в атмосфере кислорода (95%) и CO_2 (5%). На каждую пробу добавляли: аминокислоты — 16, АТФ — 5 мкМ. Аммиак определяли микродиффузионным методом по Конве.

Результаты исследований (табл. I) показали, что в контрольных опытах аминокислотдеаминирующая способность срезов почек животных, получивших неполноценное питание, значительно ниже, что особенно выражено в отношении L-глутаминовой и L-аспарагиновой кислот, деаминирование же L-орнитина страдает сравнительно меньше. Совместное добавление АТФ и аминокислот приводит к существенному усилению продукции аммиака из упомянутых L-аминокислот (почти в два раза). Данные, приведенные в этой же таблице, показывают,

что у другой группы животных, получивших нормальное (смешанное) питание, в контрольных опытах срезы почек из L-аминокислот продуцируют большее количество аммиака и добавление АТФ в этих опытах не оказывало стимулирующего влияния на процессы аммиакообразования, наоборот, наблюдалось даже некоторое подавление продукции аммиака из упомянутых аминокислот.

Таблица 1

Образование аммиака из некоторых L-аминокислот под действием АТФ
Средние данные из шести опытов

Условия опыта	Количество образовавшегося аммиака (в микролях /г ткани/ час)		
	глутаминовая кислота	аспарагиновая кислота	орнитин
Крысы, получившие неполноценное питание			
Контрольные опыты	$1,3 \pm 0,2$	$2,2 \pm 0,2$	$4,6 \pm 0,3$
АТФ in vitro	$2,8 \pm 0,3$	$6,0 \pm 0,7$	$9,0 \pm 1,0$
АТФ in vivo	$5,0 \pm 0,5$	$7,0 \pm 0,5$	$10,7 \pm 1,2$
Крысы, получившие нормальное питание			
Контрольные опыты	$5,7 \pm 0,5$	$9,2 \pm 0,9$	$11,3 \pm 0,6$
АТФ in vitro	$5,1 \pm 0,7$	$7,8 \pm 0,8$	$10,6 \pm 0,9$
АТФ in vivo	$6,3 \pm 0,7$	$10,3 \pm 1,3$	$12,5 \pm 1,0$

Как видно из данных этой же таблицы, предварительное введение АТФ экспериментальным животным, находящимся на неполноценном питании, приводит к более выраженному повышению способности почечных срезов продуцировать аммиак из добавленных L-аминокислот, а у животных, получивших нормальное питание, не наблюдается особых изменений.

Опыты по определению содержания АТФ в почечной ткани (табл. 2) показали, что у животных, у которых срезы почек проявляли низкую способность продукции аммиака из L-аминокислот, уровень АТФ в почечной ткани значительно ниже по сравнению с почками животных, срезы которых продуцировали большое количество аммиака.

Мы склонны думать, что добавление к срезам АТФ или предварительное введение ее животным приводит к возрастанию ее содержания в почечной ткани и к повышению ее энергетического уровня.

Вышеприведенные данные подтверждают ранее установленный нами факт о том, что энергетическое состояние почечных клеток оказывает существенное влияние на течение процессов продукции аммиака из L-аминокислот, что обусловлено активностью соответствующих ферментов, осуществляющих деаминирование этих аминокислот. Если

содержание АТФ в почечной ткани высокое, активность этих ферментов высокая и, наоборот, при низком содержании АТФ их активность понижается.

Можно полагать, что за счет АТФ происходит фосфорилирование соответствующих ферментов, что приводит к повышению их функциональной активности. По-видимому, эти ферменты (возможно и другие

Таблица 2

Содержание АТФ в корковом слое почек белых крыс, находящихся на различных режимах питания
Средние данные из четырех опытов

Условия опыта	Содержание АТФ в мкМ/г ткани
Крысы, получившие полноценное питание	0.35 ± 0.04
Крысы, получившие неполноценное питание	0.2 ± 0.03

белки) в клетках находятся в двух состояниях и в соответствии с этим проявляют неодинаковую активность. АТФ, реагируя с ними, фосфорилирует эти белки, повышает их энергетическое состояние, изменяет их молекулярно-пространственную структуру и тем самым происходит повышение каталитической активности этих ферментов. При недостаточности же АТФ белки-ферменты, по-видимому, подвергаются дефосфорилированию, в результате чего их деаминирующая способность снижается. Не исключается также возможность, что в гипоксических условиях, когда в тканях создается недостаток АТФ, имеет место усиление деятельности протеолитических ферментов, которые оказывают разрушающее действие на белки-ферменты (снижая их содержание в тканях), а при наличии высокого содержания АТФ в почечных клетках она (АТФ) выступает как антипротеолитический фактор, тем самым ограничивая действие тканевых протеаз. Результаты предварительных опытов свидетельствуют также в пользу этого предположения.

Вопрос состоит в том, чтобы выяснить механизм этого интересного явления и искать пути для практического применения полученных результатов.

Институт биохимии Академии наук
Армянской ССР

**Աղենոգինտրիֆոսֆորաբովի ազդեցությունը մի ֆանի L — ամինաթթուներից
ամիակի առաջացման վրա սպիտակ առնետների երկամենում**

Ստացված տվյալները ցույց են տվել, որ երբ էքսպերիմենտալ կենդանի-
ները գտնվում են ոչ նորմալ կերային ռեժիմի վրա (ածխաջրատային) նրանց
մոտ նկատվում է երկամային հյուսվածքում ամինաթթուները դեամինացնող
ֆերմենտների ակտիվության և աղենոգինտրիֆոսֆորաբովի (ԱՏՖ) քանա-
կության իջեցում: Այդ կենդանիների երկամյների կեղևային շերտի կտրվածք-
ների ինկուբացիայի ժամանակ, ԱՏՖ-ի ավելացման կամ նախօրոք կենդա-
նիներին ԱՏՖ սրսկման դեպքում, նշված ֆերմենտների ակտիվությունը զգա-
լիորեն բարձրանում է:

УДК 595.769.12

М. Ю. Калашян

ЭНТОМОЛОГИЯ

Новый вид жужелиц из Армянской ССР
(Coleoptera, Carabidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 10/X 1978)

Pristonychus arenicus Kalaschian sp. nov. Армянская ССР, Ехегнадзорский р-н, окрестности с. Арени, ущелье р. Гнишик, в карстовой пещере, около 50 м от входа, 9/V 1977 г. Голотип, самец, и аллотип, самка, в коллекциях Института зоологии АН Армянской ССР.

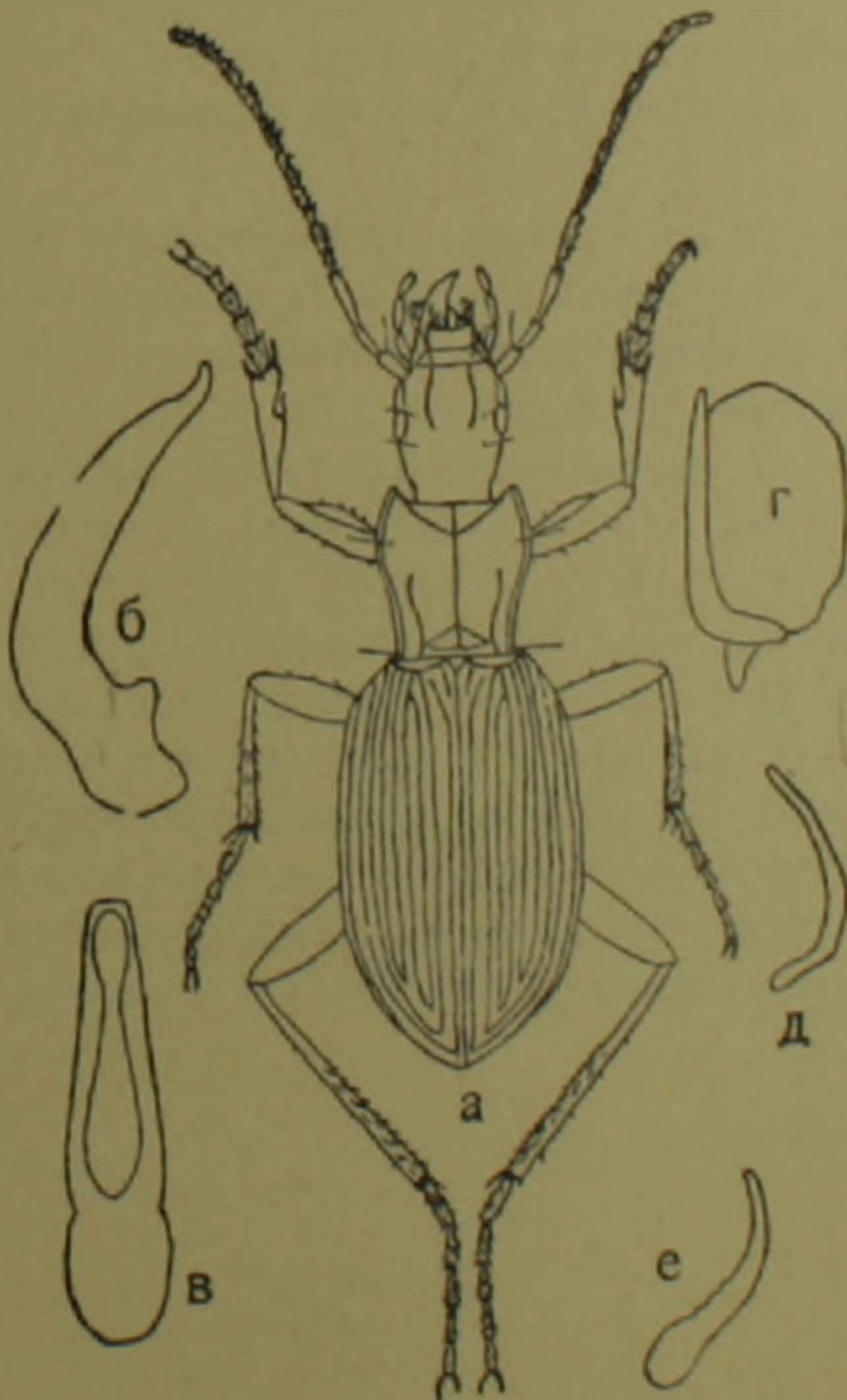


Рис. 1. а—общий вид, б, в—трубка пениса сбоку и сверху, г—правая парамера; д—левая парамера; е—коготок

Тело черно-бурое, конечности красно-бурые, длина 14,5—15,5 мм (рис. 1). Голова узкая, в 1,04 раза длиннее ширины (длина измерялась от переднего края наличника). Глаза едва выступают из контура головы, виски плоские, продолжают линию глаз, в 1,15 раза длиннее них. Лобные бороздки глубокие, доходят до уровня задней трети глаза. Предглазничная щетинка на уровне передней 1/3 глаз, надглазничная— за глазом, отстоит на 1/3 длины глаза. Переднеспинка в 1,03 раза длиннее ширины, ее боковой край спереди слабо выпуклый до передней 1/3, слабо вогнутый до задних углов, основание едва шире вершинной части и в 1,3 раза уже, чем у передней трети. Передние углы тупые. Задние заостренные, выступают в виде маленького зубчика. Контур переднеспинки окаймленный, кайма прервана у середины переднего края. Надкрылья в 1,5 раза шире переднеспинки, слабо уплощены вдоль средней части шва, ближе к основанию. Плечевой зубец отсутствует. Бороздки глубокие, четкие, промежутки слабо выпуклые. Все покровы верху тела в изодиаметральной шагреневке, более глубокой на надкрыльях. Эпистерны заднегруди в 1,5 раза длиннее ширины. Передние бедра уплощены снизу, с двумя ребрами, наружное ребро без следа зубца или бугорка, внутреннее ребро несет 5—8 щетинок. Средние и задние голени в последней трети с густой щеткой коротких волосков. Средние голени едва изогнуты у обоих полов. Задние тазики с 2 щетинконосными порами. Коготки почти гладкие, лишь у основания с 3—4 сглаженными зубчиками (рис. 1, e). Внешних половых признаков нет. Пенис: рис. 1 б—д.

Этот вид относится к подроду *Pristonychus* s. str., по окраске надкрылий близок к *P. piceus* Motsch. и *P. sericeus* Fisch., отличаясь от обоих меньшими размерами, продольной, а не поперечной переднеспинкой, узкой головой (у *P. piceus* голова шире длины в 1,1 раза, у *P. sericeus*—в 1,08 раза), более длинными висками (у *P. piceus* и *P. sericeus* виски длиннее глаз в 1,05 раза), более плоскими глазами и более светлой окраской конечностей. Кроме того, от *P. piceus* отличается более глубокими лобными бороздками, положением предглазничной щетинки (у *P. piceus* на уровне середины глаз), более глубокими бороздками надкрылий и выпуклыми промежутками, а от *P. sericeus*—выступающими задними углами переднеспинки.

Самостоятельность этого вида была подтверждена С. М. Яблоковым-Хнзоряном, которому мы рады выразить признательность за помощь, оказанную при составлении настоящего описания.

Ереванский государственный университет

Գնայուկ բզեզների նոր տեսակ Հայկական ՍՍՀ-ից
(Coleoptera, Carabidae)

Հոգվածում սրվում է գնայուկ բզեզների նոր տեսակի՝ *Pristonychus arenicus* Kalaschian sp. nov. նկարագրությունը: Այդ տեսակը գտնվել է Եղեգնաձորի շրջանի Արենի գյուղի մոտ կարստային քարանձավում:

Այս տեսակը պատկանում է *Pristonychus* s. str. ենթասեռին: Մոտ է *P. piceus* Motsch. և *P. sericeus* Fisch. տեսակներին, տարբերվելով նրանցից մի շարք կարևոր հատկանիշներով:

УДК 632.651

ФИТОГЕЛЬМИНТОЛОГИЯ

Дж. А. Карапетян

Новый вид нематоды закрытого грунта из Армянской ССР
(Nematoda: Panagrolaimidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 10/X 1978)

Panagrolaimus hermineae Karapetjan, sp. nov. (рис. 1 и 2).

Голотип (♀). Длина тела—970 мкм; $a=30,31$; $b=6,0$; $c=12,4$; $V=58,76\%$.

Паратипы (♀♀) ($n=9$)—Длина тела—810—1260 (996,6) мкм; $a=25,7—37,6(32,97)$; $b=4,76—7,61(6,61)$; $c=11,5—14,7(13,3)$; длина хвоста—3,3—5,7(4,4) анального диаметра тела, $V=56,34—59,45(57,8\%)$.



Рис. 1. а—самка, общий вид; б—головной конец; в—хвост самки

Аллотип (♂)—Длина тела—900 мкм; $a=32,14$; $b=5,62$; $c=18$; спикулы=30 мкм, рулек=10 мкм.

Паратины (♂♂) ($n=4$)—Длина тела—730—900 (817,5) мкм; $a=29,6—35(31,84)$; $b=5,62—6,28(5,78)$; $c=17,67—19,55(18,37)$; спикулы=24—30 (26,25) мкм; рулек=9—10 (10) мкм.

С а м к а. Кутикула нежно-кольчатая. Лабнотуберкулы выпукло-округлые и обособлены. Хейлостома и метастома хорошо склеротизированы, длиной 6 мкм и шириной 2 мкм. Телостома воронковидная, телорабдионы утолщенные. Корпус пищевода длиннее истмуса в 2,5 раза. Нервное кольцо на истмусе ближе к кардиальному бульбусу. Кардиальный бульбус шаровидный с дробильным аппаратом. Выделительная пора открывается напротив верхней части кардиального бульбуса, ниже головного конца на 140 мкм. Вульва с выпуклыми губами, задняя матка короткая (25 мкм). Половая трубка одна, обращенная на короткое расстояние (45 мкм), отстает от кардиального бульбуса на 140 мкм. Хвост удлиненно конический с острым терминусом, $=4,8$ анального диаметра тела.

С а м е ц. Лабнотуберкулы обособлены, выпукло-округлые, папиллы—губные. Хейлостома хорошо склеротизирована, шириной 6 мкм и длиной 5 мкм, метастома состоит из трех слегка намечающихся расши-

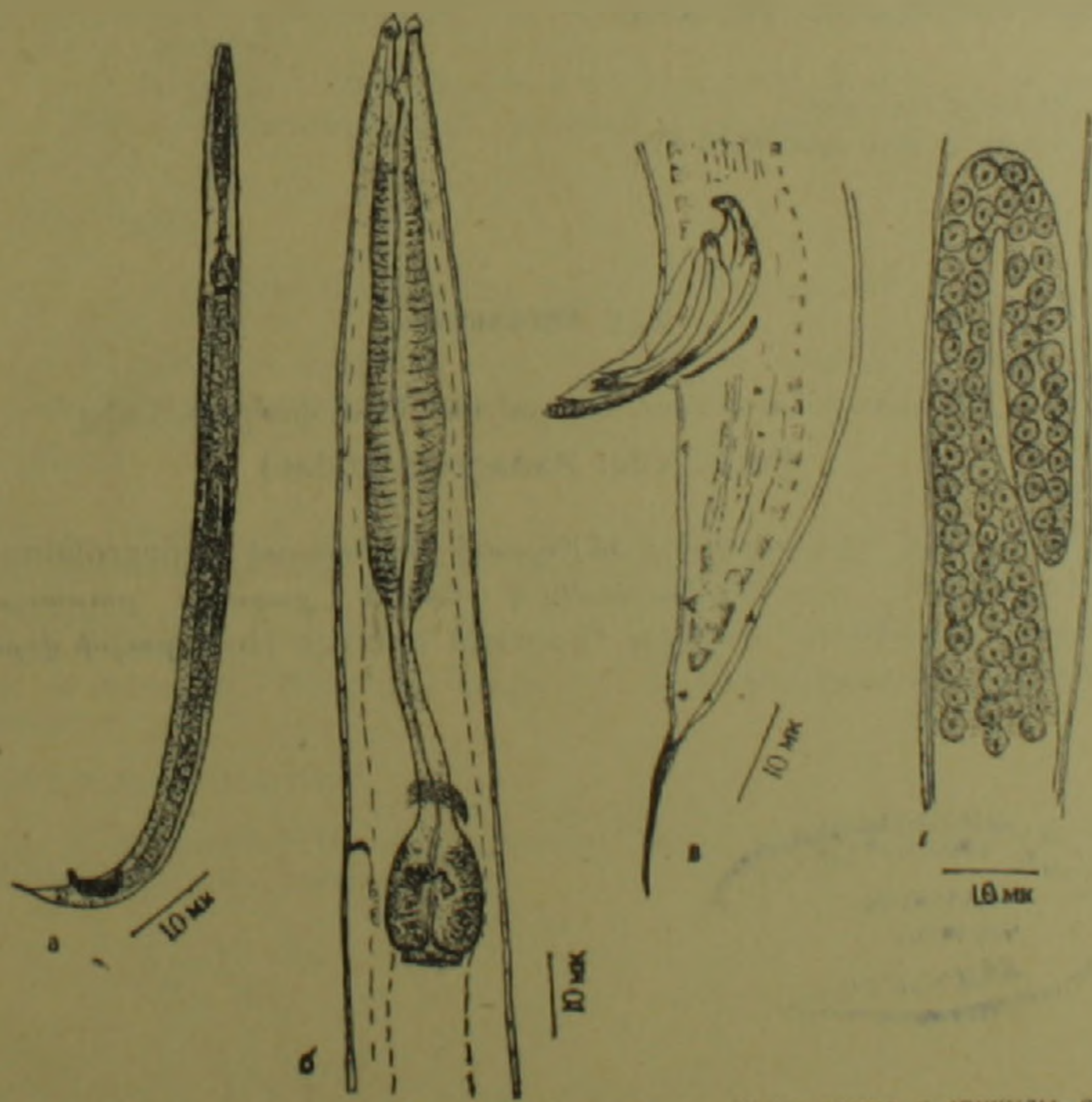


Рис. 2. а—самец, общий вид; б—головной конец; в—хвост самца и спикулы сбоку; г—половая трубка самца, обращенная часть

рений. Пищевод панагролаймонидный, корпус цилиндронидный, длиннее истмуса вдвое. Гемизонид расположен впереди от экскреторного отверстия и занимает расстояние в 3 мкм. Экскреторная пора открывается ниже головного конца на 110 мкм. Кардиальный бульбус с дробильным аппаратом. Половая трубка длинная—435 мкм, обращенная ниже основания кардиального бульбуса на 125 мкм, обращенная часть ее составляет 45 мкм. Хвост конический с заостренным нитевидным терминусом, сильно суживающимся, который вдвое меньше анального диаметра тела. Спикулы длиной 30 мкм, с широким корпусом и суженной головой, кончик с тремя зубчиками, спикулы окружены мембраной, имеется рулек. Четыре пары папилл: две пары постанальных, из которых одна пара дорсо-латеральная, две пары—терминальные.

Дифференциальный диагноз—По размерам близок к *Panagrolaimus rigidus* Thorne, 1937, от которого отличается формой спикулы и хвоста. По форме спикулы близок *P. moheni*, но отличается кончиком, имеющим три зубца, в то время как у *P. moheni*—два.

Типовое местонахождение—Обнаружен в корнях и надземных частях *Cineraria hybrida* Hort. в оранжерее Треста озеленения г. Еревана.

Вид назван в честь исследовательницы фитонематод Армении Эрмине Егиазаровны Погосян.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ջ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Նեմատոդի նոր տեսակ Հայկական ՍՍՀ-ի փակ գրունտից
(Nematoda: Panagrolaimidae)

Հոդվածում նկարագրված է նեմատոդի նոր տեսակ *Panagrolaimus hermineae* sp. nov., որը հայտնաբերվել է Երևան քաղաքի բուսապատմական տրեսի ջերմատներում աճեցվող *Cineraria hybrida* Hort. բույսի վերերկրամասերում և արմատներում:

