

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXVIII, № 2

1979

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնածու (պատ. Բարձրագույն), ի. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹՍԻԱՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱՔՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ս. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՆԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ГАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛ'ЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԳՈՒԹՅՈՒՆ

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

էջ

Դ. Թ. Բաղդասարյան—Բազմակապ տիրույթում մերոմորֆ ֆունկցիաների դասեր և երանց պարամետրական ներկայացումը	65
Է. Վ. Եղիազարյան—Մասնակի բուլյան ֆունկցիաներով հավասարումների սխտեմների թանկական բնութագրիչներ	74
Ս. Լ. Բերբերյան—Սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների բացառիկ բազմությունների մասին	79
Ա. Յու. Շանվերդյան—Հիպերբոլական ունակությունը և շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների նվազման արագությունը	88

ՖԻԶԻԿԱ

Մ. Լ. Անդրիասյան, Ռ. Ռ. Կոստանյան—Ուժեղացված ինքնաբերական ճառագայթման ազդեցությունը $YAG:Nd^{3+}$ ՕՔԳ-ի որոշ բնութագրերի վրա	95
Գ. Մ. Ավագյանց, Մ. Վ. Մինասյան, Ս. Լ. Սարգսյան—Լարման պարամետրիկ կայունացուցիչ հզոր բարձրավոլտ բիպոլյար տրանզիստորի հիման վրա	100

ԱԳՐՈՓԻՄԻԱ

Ա. Ն. Բազրամյան, Ս. Ա. Արահամյան, Ա. Շ. Գալստյան—Հողում ֆերմենտների իմորիլիզացիայի մասին	109
--	-----

ԲՈՒՑՍԵՐԻ ԳՆՆԵՏԻԿԱ

Գ. Ա. Սահակյան—Ցորենի կոմբինացիոն ունակության մասին	113
---	-----

ՄՐՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ե. Կ. Հերբեցյան—Շնցիրտիդների՝ <i>Psyllaephagus</i> և <i>Discodes</i> սեռերի նոր տեսակներ Հայաստանից (<i>Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae</i>)	118
--	-----

ՆՈՏՈՆԵՄԱՏՈԼՈԳԻԱ

Ջ. Ա. Կարապետյան—Զորս նոր տեսակ նեմատոդ (<i>Nematoda: Tylenchorhynchidae</i>) Հայկական ՍՍՀ-ի փակ գրունտից	121
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

	Стр.
Д. Т. Багдасарян—Классы мероморфных функций в многосвязной области и их параметрическое представление	65
Э. В. Егиазарян—Количественные характеристики систем уравнений с частичными булевыми функциями	74
С. Л. Берберян—Об исключительных множествах субгармонических функций	79
А. Ю. Шахвердян—Гиперболическая емкость и скорость убывания мероморфных в круге функций	88

ФИЗИКА

М. А. Андриасян, Р. Б. Костанян—Влияние усиленного спонтанного излучения на некоторые характеристики ОКГ на ИАГ: Nd ³⁺	95
Г. М. Авакьянц, М. В. Минасян, С. А. Саркисян—Периметрический стабилизатор напряжения на основе мощного высоковольтного биполярного транзистора	100

АГРОХИМИЯ

А. Н. Баграмян, С. А. Абрамян, А. Ш. Галстян—Об иммобилизации ферментов почвой	109
--	-----

ГЕНЕТИКА РАСТЕНИЙ

Г. А. Саакян—О комбинационной способности пшеницы	113
---	-----

ЭНТОМОЛОГИЯ

Е. К. Эртевян—Новые виды энциртид из родов <i>Psyllaephagus</i> и <i>Discodes</i> из Армении (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae)	119
--	-----

ФИТОНЕМАТОЛОГИЯ

Дж. А. Карапетян—Четыре новых вида нематод (Nematoda: Tylenchorhynchidae) закрытого грунта из Армянской ССР	124
---	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>D. T. Baghdasarian</i> —The classes of meromorphic functions in multiply connected domains and their parametric representations	65
<i>E. V. Eghiazarian</i> —Qualitative characteristics of the systems of equations with partial boolean functions	74
<i>S. I. Berberian</i> —On exclusive sets of subharmonic functions	79
<i>A. Yu. Shahverdian</i> —Hyperbolic capacity and rate of decreasing meromorphic functions in a disk	88

PHYSICS

<i>M. A. Andreastin, R. B. Kostanian</i> —Amplified spontaneous emission influence on some characteristics of YAG:Nd ³⁺ laser	95
<i>G. M. Avakiants, M. V. Minasian, S. A. Sarkisian</i> —Parametric voltage stabilizer based on the high-voltage power bipolar transistor	100

AGROCHEMISTRY

<i>A. N. Bagramian, S. A. Abramian, S. Sh. Galst'yan</i> —Immobilization of enzymes by the soil	109
---	-----

PLANT GENETICS

<i>G. A. Sahakyan</i> —Combining ability of wheat	113
---	-----

ENTOMOLOGY

<i>E. K. Herthevtzian</i> —New encyrtid species (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae) from genus <i>Psyllaephagus</i> and <i>Discodes</i> in Armenia	119
--	-----

PHITOHMITOLOGY

<i>J. A. Karapettian</i> —Four new species of nematodes (Nematoda: Tylenchorhynchidae) from Green houses in Armenia	124
---	-----

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04516 Подписано к печати 24.4.1979 г. Тираж 535. Изд. 5007. Заказ 141
 Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2.
 Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,29.

Издательство АН АрмССР, Ереван, Барекамутян 24-г
 Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Д. Т. Багдасарян

Классы мероморфных функций в многосвязной области и их параметрическое представление

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 16/X 1978)

Следуя работе М. М. Джрбашьяна ⁽¹⁾, условимся говорить, что неотрицательная и непрерывная на $[0, 1)$ функция $\omega(x) \in \Omega$, если

$$1) \quad \omega(0) = 1 \quad \int_0^1 \omega(x) dx < +\infty; \quad (1)$$

$$2) \quad \int_r^1 \omega(x) dx > 0 \quad 0 \leq r < 1.$$

Далее, условимся обозначать через Ω^* подмножество функций $\omega(x)$ из Ω , удовлетворяющих в точке $x = 0$ условию Липшица, т. е.

$$|\omega(x) - 1| \leq C_\omega(\delta)x \quad (0 \leq x < \delta < 1) \quad (2)$$

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$, $r \in (0, 1)$ оператор $L^{(\omega)}[\varphi(r)]$ определяется таким образом:

$$L^{(\omega)}[\varphi(r)] \equiv - \frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^1 \varphi(\tau r) dp(\tau) \right\}, \quad r \in (0, 1) \quad (3)$$

где непрерывная на $[0, 1]$ функция $p(\tau)$ имеет вид

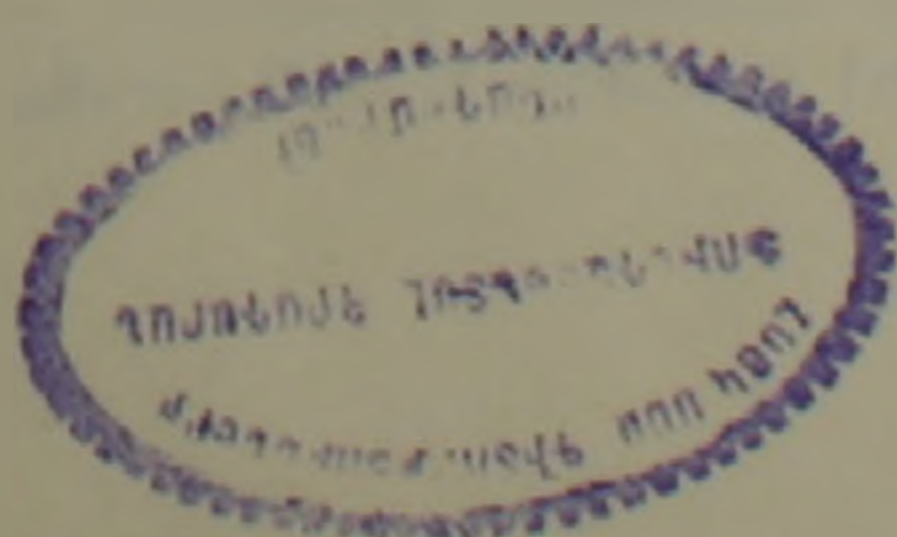
$$p(0) = 1 \quad p(\tau) = \tau \int_0^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx \quad \tau \in (0, 1] \quad (4)$$

с оператором $L^{(\omega)}$ ассоциируются функции

$$W_\omega(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta}z, \omega) L^{(\omega)} \left\{ \log \left| 1 - \frac{e^{i\theta}}{\zeta} \right| \right\} d\theta \quad (5)$$

$$B_\omega(z, z_k) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp[-W_\omega(z, z_k)] \quad (0 < |z| < 1, 0 < |z_k| \leq 1), \quad (6)$$

где



$$S(z, \omega) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k \left\{ K \int_0^1 x^{k-1} \omega(x) dx \right\}^{-1}. \quad (7)$$

Пусть $F(z)$ мероморфна в круге $|z| < 1$, $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно последовательности ее нулей и полюсов, пронумерованных по возрастанию их модулей.

Следующие результаты доказаны в работе М. М. Джрбашяна (1 стр. 559–561).

Теорема (А). Пусть $\omega(x)$ — произвольная функция из класса Ω^* . Тогда 1) функция

$$L^{(\omega)}(|\log|F(\rho e^{i\varphi})||) \quad (0 < \rho < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (8)$$

определена в круге $|z| < 1$ кроме, быть может, множества точек

$$E(a_n, b_n) = \left\{ \bigcup_{0 < |a_n| < 1} e^{i\varphi} |z|/|a_n| \leq |z| < 1, \arg z = \arg a_n \right\} \cup \left\{ \bigcup_{0 < |b_n| < 1} e^{i\varphi} |z|/|b_n| < |z| < 1, \arg z = -\arg b_n \right\}. \quad (9)$$

2. Для любого ρ ($0 < \rho < 1$)

$$L^{(\omega)}(|\log|F(\rho e^{i\varphi})||) \in L(0, 2\pi).$$

3. Для любой функции $\omega(x) \in \Omega^*$ и для любого ρ ($0 < \rho < 1$) справедлива следующая формула (с точностью до слагаемого вида $2\pi i t$, где t — целое):

$$\begin{aligned} \log F(z) = i \arg c_0 + \lambda K \omega + \lambda \log \frac{z}{\rho} + \sum_{0 < |a_n| < \rho} \log A_{\omega} \left(\frac{z}{\rho}, \frac{a_n}{\rho} \right) - \sum_{0 < |b_n| < \rho} \log A_{\omega} \left(\frac{z}{\rho}, \frac{b_n}{\rho} \right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S \left(e^{-i\theta} \frac{z}{\rho}, \omega \right) L^{(\omega)} \left\{ |\log|F(\rho e^{i\theta})|| \right\} d\theta \quad (|z| < \rho) \end{aligned}$$

4. При тех же предположениях справедлива также формула

$$\begin{aligned} \log |(F(re^{i\varphi}))| = \sum_{0 < |a_n^*| < r} \log \left| A_{\omega} \left(\frac{r}{\rho} e^{i\theta}, \frac{a_n^*}{\rho} \right) \right| - \sum_{0 < |b_n^*| < r} \log \left| A_{\omega} \left(\frac{r}{\rho} e^{i\theta}, \frac{b_n^*}{\rho} \right) \right| + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P \left(\varphi - \theta, \frac{r}{\rho}, \omega \right) L^{(\omega)} \left\{ |\log|F(\rho e^{i\theta})|| \right\} d\theta. \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$P(\varphi, r, \omega) = \operatorname{Re} S(re^{i\varphi}, \omega),$$

a $\{a_n^*\}$ и $\{b_n^*\}$ — это вновь пронумерованные в том же порядке нули и полюсы функции $F(z)$ с включением нуля либо полюса в точке $z=0$, c_0 — первый не равный нулю коэффициент в ряде Лорана ф-ии $F(z)$ в окрестности точки $z=0$

Далее с каждой функцией $\omega(x) \in \Omega$ или $\omega(x) \in \Omega^*$ ассоциируется класс $N\{\omega\}$ или $N^*\{\omega\}$, для которых

$$\sup_{0 < r < \infty} \{T_-(r, F)\} < +\infty, \quad (11)$$

где

$$T_-(\rho, F) \equiv m_-(\rho, F) + N_-(\rho, F);$$

$$N_-(\rho, F) \equiv N_-(\rho, \infty) = \int_0^\rho \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} \left(\frac{t}{\rho}\right) dt + n(0, \infty) |\log \rho - K_-|; \quad (12)$$

$$m_-(\rho, F) \equiv m_-(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L^{(+)} |\log |z(\rho e^{i\theta})|| d\theta,$$

а $n(t, \infty)$ — количество полюсов функции $F(z)$ в круге $|z| \leq t$, $L_+^{(+)} = \max \{L^{(+)}, 0\}$

$$K_- = \int_0^1 \frac{1 - \omega(x)}{x} dx. \quad (12')$$

Следующая теорема (Б) доказана в работе (стр. 583—585).

Теорема (Б). Класс $N^*[\omega]$ совпадает с множеством функций, которые в круге $|z| < 1$ допускают представление вида

$$F(z) = e^{(\gamma + \lambda K_-)z} \frac{B_-(z, a_-)}{B_-(z, b_-)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z, \omega) d\psi(\theta) \right\}, \quad (13)$$

где $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[0, 2\pi]$ с конечным полным изменением, $\lambda \leq 0$ — любое целое число, γ — вещественное число, а накопец K_- определяется формулой (12').

В настоящей работе получен аналог теоремы (А) М. М. Дарба-шяна для функций, мероморфных в m -связной области $G((z_0, R_0), (z_1, R_1), \dots, (z_m, R_m))$, граница которой состоит из $(m+1)$ -окружностей. Далее по аналогии (1) для тех же функций определены $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$ — характеристическая функция $T_{\omega_0, \dots, \omega_m}(\rho_0, \dots, \rho_m, F)$ и класс функций $N(\omega_0, \dots, \omega_m, G)$ и получено параметрическое представление этого класса.

Пусть $G = G((z_0, R_0), (z_1, R_1), \dots, (z_m, R_m))$ — $(m+1)$ -связная область, граница которой состоит из $(m+1)$ окружностей:

$$\Gamma(z_0, R_0): |z/z - z_0| = R_0, \quad \Gamma(z_k, R_k): |z/z - z_k| = R_k, \quad |z_0 - z_k| < R_0, \quad k=1, \dots, m, \quad (1.1)$$

где числа $R_k, k=1, \dots, m$ выбраны так, что

$$\Gamma(z_0, R_0) \cap \Gamma(z_i, R_i) = \emptyset, \quad \Gamma(z_i, R_i) \cap \Gamma(z_j, R_j) = \emptyset; \quad (1.2)$$

обозначим

$$G(z_0, R_0): |z/z - z_0| < R_0, \quad G(z_k, R_k): \{z/z - z_k| > R_k\}. \quad (1.3)$$

Тогда

$$G((z_0, R_0), (z_1, R_1), \dots, (z_m, R_m)) = G(z_0, R_0) \bigcap_{k=1}^m G(z_k, R_k); \quad (1.4)$$

постоянные числа $r_k > R_k$ ($k=1, \dots, m$) выберем так, чтобы выполнялись условия (1.1) и (1.2) при $R_k \equiv r_k$ и чтобы функция $F(z)$ не имела на множестве $\bigcup_{k=1}^m \Gamma(z_k, r_k)$ нуля и полюса.

Нули и полюса функции $F(z)$, которые лежат в полуоткрытом кольце $R_k \leq |z - z_k| < r_k$, обозначим через $a_\mu^{(k)}$, $b_\nu^{(k)}$, нумерация которых сделана следующим образом

$$|a_1^{(k)} - z_k| \geq |a_2^{(k)} - z_k| \geq \dots; |b_1^{(k)} - z_k| \geq |b_2^{(k)} - z_k| \geq \dots, \lim_{\mu \rightarrow +\infty} |a_\mu^{(k)} - z_k| = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} |b_\nu^{(k)} - z_k| = R_k. \quad (1.5)$$

А остальные нули и полюса обозначим соответственно $a_\mu^{(0)}$, $b_\nu^{(0)}$, нумерация которых сделана по порядку возрастания расстояния до точки z_0 , причем

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} |a_\mu^{(0)} - z_0| = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} |b_\nu^{(0)} - z_0| = R_0, \quad (1.5')$$

тогда (см. (2 стр. 388—393) и (3 стр. 13—23)) существуют функции $F_0(z)$, $F_1(z)$, ..., $F_m(z)$ такие, что

1) $F_0(z)$ мероморфна в $G(z_0, R_0)$, $F_k(z)$ $k=1, \dots, m$ мероморфны в области $G(z_k, R_k)$;

2) нули и полюса $F_k(z)$ $k=0, \dots, m$ совпадают с $a_\mu^{(k)}$, $b_\nu^{(k)}$;

3) $F_k(\infty) = 1$ $k=1, 2, \dots, m$ (1.6)

и имеет место следующее разложение:

$$F(z) = F_0(z) \cdot F_1(z) \dots F_m(z). \quad (1.7)$$

Обозначим

$$F_0^*(w) = F_0(z_0 + R_0 w) = F_0(z), \quad F_k^*(w) = F_k\left(z_k + \frac{R_k}{w}\right) = F_k(z), \quad (1.8)$$

далее обозначим

$$e_k(z) = e_k \left\{ \begin{array}{l} |z/R_k| < |z - z_k| < |z - z_k| \\ \arg(z - z_k) = \arg(\bar{z} - z_k) \end{array} \right\} e_k \{a_\mu^{(k)}, b_\nu^{(k)}\} = \\ = \left\{ \bigcup_{R_k < |a_\mu^{(k)} - z_k|} e_k(a_\mu^{(k)}) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{R_k < |b_\nu^{(k)} - z_k|} e_k(b_\nu^{(k)}) \right\}; \quad (1.9)$$

$$e_0(z) = e_0 \left\{ \begin{array}{l} |z/R_0| < |z - z_0| < |z - z_0| < R_0, \\ \arg(z - z_0) = \arg(\bar{z} - z_0) \end{array} \right\}, \quad e_0(a_\mu^{(0)}, b_\nu^{(0)}) = \\ = \left\{ \bigcup_{0 < |a_\mu^{(0)} - z_0| < R_0} e_0(a_\mu^{(0)}) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{0 < |b_\nu^{(0)} - z_0| < R_0} e_0(b_\nu^{(0)}) \right\}. \quad (1.10)$$

далее из (1.7) с точностью до слагаемого $2\pi im$ будем иметь

$$\log F(z) = \log F_0(z) + \log F_1(z) + \dots + \log F_m(z) \\ z \in G((z_0, R_0), (z_1, R_1), \dots, (z_m, R_m)). \quad (1.11)$$

Напишем теорему (А) для функций $F_0^*(w)$ и $F_k^*(w)$ $k=1, \dots, m$ (см. (1,8) и (1,6)) и переходим к переменному z , затем, подставляя значение $\log F_k(z)$ в (1.11), получим:

Теорема 1.1. Пусть $\omega_0(x) \in \Omega^*$, $\omega_k(x) \in \Omega$ $k=1, 2, \dots, m$, тогда 1° функции

$$L_1^{(\omega_0)}\{F_0(z)\} \equiv L_1^{(\omega_0)}\{\log|F_0(z_0 + R_0 \rho_0 e^{i\theta})|\}, \quad L_1^{(\omega_k)}\{F_k(z)\} \equiv \\ = L_1^{(\omega_k)}\left\{\log\left|F_k\left(z_k + \frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}}\right)\right|\right\}$$

определены соответственно в $G(z_0, R_0)$ и $G(z_k, R_k)$, кроме, может быть, множества точек $e_0\{a_0^{(0)}, b_0^{(0)}\}$ и $e_k\{a_k^{(k)}, b_k^{(k)}\}$.

2°.

$$L_1^{(\omega_0)}\{\log|F_0(z_0 + R_0 \rho_0 e^{i\theta})|\}, \quad L_1^{(\omega_k)}\left\{\log\left|F_k\left(z_k + \frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}}\right)\right|\right\} \in L(0, 2\pi).$$

3°. Для произвольных $\rho_k (0 < \rho_k < 1)$ $k=0, 1, \dots, m$, $z \in G((z_0, R_0) \times$

$$\times \left(z_1, \frac{R_1}{\rho_1}\right), \dots, \left(z_m, \frac{R_m}{\rho_m}\right)),$$

$$\log F(z) = i \arg \lambda + i k_\infty + i \log \frac{z - z_0}{R_0 \rho_0} + \sum_{0 < |a_\mu^{(0)} - z_0| < R_0 \rho_0} \log A_\omega \left(\frac{z - z_0}{R_0 \rho_0}, \frac{a_\mu^{(0)} - z_0}{R_0 \rho_0} \right) - \\ - \sum_{0 < |b_\nu^{(0)} - z_0| < R_0 \rho_0} \log A_\omega \left(\frac{z - z_0}{R_0 \rho_0}, \frac{b_\nu^{(0)} - z_0}{R_0 \rho_0} \right) + 1/2\pi \int_0^{2\pi} S \left(e^{i\theta} \frac{z - z_0}{R_0 \rho_0}, \omega_0 \right) L_1^{(\omega_0)} \times \\ \times \left\{ \log|F_0(z_0 + R_0 \rho_0 e^{i\theta})| \right\} d\theta + \sum_{k=1}^m \sum_{\rho_k/\rho_k < |a_k^{(k)} - z_k| < +\infty} \log \left(\frac{R_k}{\rho_k(z - z_k)}, \frac{R_k}{\rho_k(a_k^{(k)} - z_k)} \right) - \\ - \sum_{k=1}^m \sum_{R_k/\rho_k < |b_k^{(k)} - z_k| < +\infty} \log A_\omega \left(\frac{R_k}{\rho_k(z - z_k)}, \frac{R_k}{\rho_k(b_k^{(k)} - z_k)} \right) + \\ + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S \left(e^{-i\theta} \frac{R_k}{\rho_k(z - z_k)}, \omega_k \right) L_1^{(\omega_k)} \left\{ \log \left| F_k \left(z_k + \frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}} \right) \right| \right\} d\theta. \quad (1.12)$$

Если в (1.12) отделим действительные части, то получим:

$$\log|F(z)| = \sum_{0 < |a_\mu^{(0)} - z_0| < R_0 \rho_0} \log \left| A_\omega \left(\frac{z - z_0}{R_0 \rho_0}, \frac{a_\mu^{(0)} - z_0}{R_0 \rho_0} \right) \right| - \\ - \sum_{0 < |b_\nu^{(0)} - z_0| < R_0 \rho_0} \log \left| A_\omega \left(\frac{z - z_0}{R_0 \rho_0}, \frac{b_\nu^{(0)} - z_0}{R_0 \rho_0} \right) \right| + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P \left[-\theta - \arg(z - z_0), \frac{|z - z_0|}{R_0 \rho_0}, \omega_0 \right] L_1^{(\omega_0)} \left\{ \log|F_0(z_0 + R_0 \rho_0 e^{i\theta})| \right\} d\theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^m \sum_{R_k/\rho_k \leq |a_k^{(k)} - z_k| < +\infty} \log \left| A_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k(z_k - a_k)}, \frac{R_k}{\rho_k(a_k^{(k)} - z_k)} \right) \right| - \\
& - \sum_{k=1}^m \sum_{R_k/\rho_k \leq |b_k^{(k)} - z_k| < +\infty} \log \left| A_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k(z - z_k)}, \frac{R_k}{\rho_k(b_k^{(k)} - z_k)} \right) \right| + \\
& + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \left| -\theta - \arg(z - z_k), \frac{R_k}{\rho_k|z - z_k|}, \omega_k \right| L^{(\omega_k)} \left\{ \log \left| F_k \left(z_k + \frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}} \right) \right| \right\} d\theta,
\end{aligned}$$

где $\{a_k^{(0)}\}$ и $\{b_k^{(0)}\}$ — это вновь пронумерованные в том же порядке нули и полюсы функции $F_0(z)$ с включением $z = z_0$, если она ноль, либо полюс, а $c_k(z - z_0)^{\lambda}$ — первый член в ряде Лорана функции $F_0(z)$ в окрестности точки $z = z_0$.

Пусть $F_k(z)$ мероморфна в области $G(a_k, R_k)$. Обозначим через $n(t, G_k, \infty)$ число полюсов функции $F_k(z)$ в области $|z - a_k| \geq t$.

Обозначим

$$\begin{aligned}
N_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, \infty \right) & \equiv N_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k \right) = \\
& = \int_{R_k/\rho_k}^{\infty} \frac{n(t, G_k, \infty) - n(\infty, G_k, \infty)}{t} \omega \left(\frac{R_k}{\rho_k t} \right) dt - n(\infty, G_k, \infty) \left\{ \log \frac{R_k}{\rho_k} + K_{\omega} \right\}, \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$m_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, \infty \right) \equiv m_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{+}^{(\omega)} \left\{ \log \left| F_k \left(z_k + \frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}} \right) \right| \right\} d\theta \quad (2.2)$$

следующую функцию:

$$T_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k \right) \equiv m_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k \right) + N_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k \right). \quad (2.3)$$

Будем называть ω характеристической функцией М. М. Джрбашяна мероморфной функции $F_k(z)$ в области $G(z_k, R_k)$.

Обозначим через $N\{\omega, G_k\}$ или $N^*\{\omega, G_k\}$ класс мероморфных функций в области $G(a_k, R_k)$, которые для функций $\omega(x) \in \Omega$ или $\omega(x) \in \Omega^*$ удовлетворяют условию

$$T_{\omega}(G_k, F_k) \equiv \sup_{0 < \rho_k < 1} \left| T_{\omega} \left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k \right) \right| < +\infty. \quad (2.4)$$

Аналогичным образом, если функция $F_0(z)$ мероморфна в области $G(z_0, R_0)$, то обозначим через $n(t, G_0, \infty)$ число полюсов функции $F_0(z)$ в круге $|z - z_0| \leq t$

$$N_{\omega}(R_0 \rho_0, G_0, \infty) \equiv N_{\omega}(R_0 \rho_0, G_0, F_0) = \int_0^{R_0 \rho_0} \frac{n(t, G_0, \infty) - n(0, G_0, \infty)}{t} \times$$

$$\times \omega\left(\frac{t}{R_0 \rho_0}\right) dt + n(0, G_0, \infty) \{\log R_0 \rho_0 - K_0\}; \quad (2.1')$$

$$m_\omega(R_0 \rho_0, G_0, \infty) \equiv m_\omega(R_0 \rho_0, G_0, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_\omega^{(u)} \{\log |F_0(z_0 + R_0 \rho_0 e^{i\theta})|\} d\theta \quad (2.2')$$

$$T_\omega(R_0 \rho_0, G_0, F_0) = m_\omega(R_0 \rho_0, G_0, F_0) + N_\omega(R_0 \rho_0, G_0, F_0) \quad (0 < \rho_0 < 1). \quad (2.3')$$

Класс функций $N\{\omega, G_0\}$ или $N^*(\omega, G_0)$ М. М. Джрбашяна для мероморфных в $G(z_0, R_0)$ функций совпадает с классом функций, для которых

$$T_\omega(F_0, G_0) \equiv \sup_{0 < \rho_0 < 1} \{T_\omega(R_0 \rho_0, G_0, F_0)\} < +\infty. \quad (2.4')$$

Лемма 2.1. Пусть функции $F_k(z)$ и $F_0(z)$ мероморфны соответственно в областях $G(z_k, R_k)$ и $G(z_0, R_0)$, а $\omega_k(x) \in \Omega^*$ ($k=0, 1, \dots, m$). Тогда

$$T_{\omega_i}\left(\frac{R_i}{\rho_i}, G_i, F_i\right) = T_{\omega_i}(\rho_i, F_i^*) - n(0, \infty) \log R_i \quad i=0 \quad (2.5)$$

$$T_{\omega_0}(R_0, \rho_0, G_0, F_0) = T_{\omega_0}(\rho_0, F_0^*) + n(0, 0) \log R_0, \quad (2.5')$$

где

$$F_i^*(w) = F_i\left(z_i + \frac{R_i}{w}\right) \quad i \neq 0, \quad F_0^*(w) = F_0(z_0 + R_0 w),$$

а $T_{\omega_i}(\rho_i, F_i^*)$ ($i=0, \dots, m$) — характеристические функции М. М. Джрбашяна для функции $F_i^*(w)$ в единичном круге $|w| < 1$.

Доказательство следует из соответствующих определений.

Пусть функция $F(z)$ мероморфна в $(m+1)$ -связной области $G((z_0, R_0)(z_1, R_1), \dots, (z_m, R_m))$, а функции $F_0(z), F_1(z), \dots, F_m(z)$ его О-разложение (см. (2) и соотношения (1.6), (1.7)); пусть далее $\omega_0(x) \in \Omega^*$, $\omega_k(x) \in \Omega$ ($k=1, 2, \dots, m$), следующую функцию

$$T_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m}(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m, F) \equiv T_{\omega_0}(R_0, \rho_0, G_0, F_0) + \\ + T_{\omega_1}\left(\frac{R_1}{\rho_1}, G_1, F_1\right) + \dots + T_{\omega_m}\left(\frac{R_m}{\rho_m}, G_m, F_m\right), \quad (2.6)$$

где $T_{\omega_k}(R_k/\rho_k, G_k, F_k)$ $k \neq 0$ и $T_{\omega_0}(R_0, \rho_0, G_0, F_0)$ определяются формулами (2.4) и (2.4'), назовем $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$ — характеристической функцией функции $F(z)$, мероморфной в $G((z_0, R_0)(z_1, R_1), \dots, (z_m, R_m))$.

Теорема 2.1. Пусть $\omega_0(x) \in \Omega^*$, $\omega_k(x) \in \Omega$ ($k=1, \dots, m$). Если функция $\omega_i(x)$ не возрастает в $[0, 1)$, то функция $T_{\omega_0, \dots, \omega_m}(\rho_0, \dots, \rho_m, F)$ при фиксированном ρ_k , $k \neq i$ $k=0, 1, \dots, m$ — неубывающая функция по ρ_i в промежутке $0 < \rho_i < 1$.

Доказательство следует из леммы 1.2 и из соответствующих свойств $T_{\omega_i}(\rho_i, F_i^*)$.

Теорема 2.2. Для любой мероморфной в G функции $F(z)$ и для любых функций $\omega_0(x) \in \Omega^*$, $\omega_k(x) \in \Omega$ ($k=1, \dots, m$) справедливо тождество

$$T_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m}(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m, F) = \log |c_\lambda| + T_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m} \left(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m, \frac{1}{F} \right) \\ \left(\begin{matrix} 0 < \rho_k < 1 \\ k=0, \dots, m \end{matrix} \right) \quad (2.7)$$

Доказательство теоремы следует из леммы (2.1) из теоремы (3.2) М. М. Джрбашяна (¹ стр. 567) и того, что $F_k(\infty) = 1$ $k=1, 2, \dots, m$.

Определение: обозначим через $N^*\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\}$ или $N\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\}$ класс мероморфных в G функций, которые для $\omega_0(x) \in \Omega^*$, $\omega_k(x) \in \Omega$ $k=1, 2, \dots, m$, или для $\omega_k(x) \in \Omega$ $k=0, 1, \dots, m$ удовлетворяют следующему условию:

$$T_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m}(G, F) = \sup_{\substack{0 < \rho < 1 \\ k=0, 1, \dots, m}} \{ T_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m}(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m, F) \} < +\infty. \quad (2.8)$$

Из (2.6), поскольку слагаемые, написанные в правой части, неотрицательные, кроме, может быть, члена $n(0, G_0, \infty) \{ \log R_0 \rho_0 - K_0 \}$, который стремится к $-n(0, G_0, \infty) \{ K_0 - \log R_0 \}$, когда ρ_0 стремится к единице, то есть для ρ_0 , достаточно близких к единице, ограничен, имеет место следующая теорема:

Теорема 2.3. $T_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m}(G, F) < +\infty \Leftrightarrow \forall n (n=0, 1, \dots, m) \quad T_{\omega_n}(G_n, F_n) < +\infty$.

Следствие 1. $F(z) \in N^*\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\}$ или $F(z) \in N\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\} \Leftrightarrow \forall n (n=1, \dots, m), F_0(z) \in N^*\{\omega_0, G_0\}, F_n(z) \in N\{\omega_n, G_n\}$ или $\forall n (n=0, 1, \dots, m) F_n(z) \in N\{\omega_n, G_n\}$.

Следствие 2. Если $F(z) \in N^*\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\}, \Phi(z) \in N^*\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\}$, то

$$F(z) \Phi(z) \in N^*\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\}, \frac{F(z)}{\Phi(z)} \in N^*\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\}.$$

Действительно, если $F(z) = F_0(z) \dots F_m(z), \Phi(z) = \Phi_0(z) \dots \Phi_m(z)$, то $F(z)\Phi(z) = \{F_0(z)\Phi_0(z)\} \dots \{F_m(z)\Phi_m(z)\}, \frac{F(z)}{\Phi(z)} = \left\{ \frac{F_0(z)}{\Phi_0(z)} \right\} \dots \left\{ \frac{F_m(z)}{\Phi_m(z)} \right\}$

и доказательство следствия следует из соответствующих свойств классов $N^*\{\omega_n, G_n\}$.

Теорема (основная). $F(z) \in N^*\{\omega_0, \dots, \omega_m, G\} \Leftrightarrow$ в области G

$$F(z) = e^{(1+i)K_0} \left(\frac{z-z_0}{R_0} \right)^{\lambda} \frac{B_{\omega_0} \left(\frac{z-z_0}{R_0}, \frac{a_{\mu}^{(0)}-z_0}{R_0} \right) \prod_{h=1}^m B_{\omega_h} \left(\frac{R_h}{z-a_h}, \frac{R_h}{a_{\mu}^{(h)}-a_h} \right)}{B_{\omega_0} \left(\frac{z-z_0}{R_0}, \frac{b_{\nu}^{(0)}-z_0}{R_0} \right) \prod_{h=1}^m B_{\omega_h} \left(\frac{R_h}{z-a_h}, \frac{R_h}{b_{\nu}^{(h)}-a_h} \right)} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S \left(e^{-i\theta} \frac{z-z_0}{R_0}, \omega_0 \right) d\psi_0(\theta) + \sum_{h=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S \left(e^{-i\theta} \frac{R_h}{z-a_h}, \omega_h \right) d\psi_h(\theta) \right\},$$

где $l \geq 0$ натуральное число, $\psi_k(0)$ $k=0, \dots, m$ вещественные функции на $[0, 2\pi]$ с конечным полным изменением, τ — вещественные число, K_ω определяется формулой (12').

Доказательство. Из (1.7), если положим $F_0^*(u\tau) = F_0(z_0 + R_0 w)$, $F_k^*(w) = F_k\left(a_k + \frac{R_k}{w}\right)$ из (2, 5), (2, 5') получим:

$$F_0(z) \in N^*\{\omega_0 G_0\}, \quad F_k(z) \in N\{\omega_k, G_k\} \Leftrightarrow F_0^*(w) \in N^*\{\omega\}, \quad F_k^*(w) \in N\{\omega_k\} \quad (2.19)$$

Написав отдельно для каждого $F_k^*(w)$ $k=0, 1, \dots, m$ теоремы (C) и переходя к переменному z , получим доказательство теоремы.

В заключение автор благодарит В. С. Захаряна за руководство.

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна.

Կ. Ք. ԲԱՂԴԱՍԻԱՐՅԱՆ

Բազմակապ տիրույթում մերոմորֆ ֆունկցիաների դասեր և նրանց պարամետրական ներկայացումը

Հոդվածում ստացված է շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների համար Մ. Մ. Ջրբաշյանի հայտնի արդյունքների անալոգները բազմակապ տիրույթների դեպքում:

Ստացված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ընդհանրացված նեանլինի բանաձևի անալոգը բազմակապ տիրույթում մերոմորֆ ֆունկցիաների համար:

Սահմանված է բազմակապ տիրույթում մերոմորֆ ֆունկցիաների խարակտերիստիկ ֆունկցիաների զաղափարը: Այդ ֆունկցիաները օժտված են նույնատիպ հատկություններով, ինչ որ միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների համար Մ. Մ. Ջրբաշյանի խարակտերիստիկ ֆունկցիաները:

Սահմանված է սահմանափակ խարակտերիստիկներով ֆունկցիաների դասեր և ստացված է նրանց պարամետրական ներկայացումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян, Математический сборник, т. 79, № 4, 517—615 (1969) ² Г. У. Матевосян, «Известия АН АрмССР», Математика, т. IX, № 5, 1974 ³ Г. У. Матевосян, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Ереван, 1975. ⁴ Р. Неванlinna, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М—Л, 1941.

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

Э. В. Егнязрян

Количественные характеристики систем уравнений с частичными булевыми функциями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 23/X 1978)

Известно, что многие вопросы дискретных управляющих систем сводятся к решению систем уравнений из не всюду определенных (частичных) функций алгебры логики либо к нахождению числа их решений. Тривиальное решение задачи — перебор вершин n -мерного куба E^n , где n — число переменных в системе уравнений — неприемлемо при больших n . Иногда удается после предварительного анализа выяснить, совместна ли система, и оценить число ее решений. Естественно предполагать, что множество решений системы будет сужаться с ростом числа уравнений и при достаточно большом количестве последних будет пустым. В настоящей работе обосновывается это предположение для типичного случая: оценивается число решений почти всех систем из l неэквивалентных уравнений с n переменными.

Для описания множества M_S всех решений системы S , если оно не пусто, достаточно реализовать булеву функцию f_S , равную единице на множестве M_S и нулю на $E^n \setminus M_S$, некоторой д. н. ф. (дизъюнктивной нормальной формой). Тогда каждая элементарная конъюнкция в д. н. ф. будет задавать семейство решений, а объединение всех семейств даст множество M_S . Сложность такого описания множества решений системы S характеризуется числом конъюнкций в д. н. ф., реализующей функцию f_S . В работе исследуется этот вопрос для почти всех систем из l неэквивалентных уравнений с n переменными. Для них же исследуется сложность сокращенной д. н. ф., реализующей частичную булеву функцию, равную единице на множестве решений системы. В качестве следствия получена асимптотика длины сокращенной д. н. ф. для почти всех частичных булевых функций.

1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ задана на множестве $M' \subseteq E^n$, где E^n — множество вершин n -мерного единичного куба и принимает значения 0 и 1. Множество M' разбивается на два подмножества M'_0 и M'_1 ($M' = M'_0 \cup M'_1$, $M'_0 \cap M'_1 = \emptyset$) такие, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} 1 \text{ на } M'_1, \\ 0 \text{ на } M'_0, \\ \text{не определена на } E^n \setminus M'. \end{cases}$$

Таким образом, не всюду определенная (частичная) функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определяется заданием пары непересекающихся подмножеств M'' и M'_1 . Обозначим через Q_n множество всех частичных функций алгебры логики от n переменных. Очевидно, что $|Q_n| = 3^n$.

Пусть $S_{n,l}$ — множество всех различных систем из l уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = 1 \\ \vdots \\ f_l(x_1, \dots, x_n) = 1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

где $f_i \in Q_n$, $f_i \neq f_j$ при $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq l$). Очевидно, что $|S_{n,l}| = \binom{3^{2^n}}{l}$.

Бинарный набор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется решением системы (1), если $f_i(x) = 1$ ($1 \leq i \leq l$).

Сопоставим каждой системе уравнений $S \in S_{n,1}$ целочисленный параметр $l(S)$, равный числу ее решений. Рассмотрим его среднее значение

$$t(n, l) = \frac{1}{|S_{n, l}|} \sum_{S \in S_{n, l}} t(S).$$

Всюду в статье под $\log$ понимается логарифм по основанию 2. Все не определяемые здесь понятия можно найти в (1,2).

Теорема 1.

$$1. \quad t(n, l) = \frac{1}{\binom{3^{2n}}{l}} \sum_{n - \lfloor \log_3 l \rfloor}^{2^n} \binom{2^n}{p} (2^n - p) \sum_{i=0}^{p - \lfloor \log_3 l \rfloor} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{3^{n-i}}{l}$$

$$2. \quad t(n, l) \sim \frac{2^n}{3^l} n p u \quad l=0 \quad (3^{n-1}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

3. Если $n - l \log 3 \rightarrow \infty$, то для почти всех систем S множества $S_{n, l}(S) \sim \frac{2^n}{3^l}$.

4. Если $n - 1/\log 3 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то почти все системы множеств $S_{n,1}$ не имеют решений.

5. Если $n - l \log 3$ ограничено при $n \rightarrow \infty$, то для почти всех систем S множества $S_{n+l}(S)$ ограничены.

2. Сопоставим каждой системе S из $S_{n,l}$ булеву функцию $f_S(x_1, \dots, x_n)$, равную единице на множестве решений M_S системы S и нулю на $E^n \setminus M_S$. Множество M_S , если оно не пусто, можно описать с помощью д. н. ф., реализующей f_S , поэтому важно знать сложность такой реализации. Будем говорить, что функция f_S „генерируется“ системой S . Одна и та же функция может генерироваться разными системами. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция и $p = 2^n \setminus |N_f|$, где $N_f = \{\bar{x} | \bar{x} \in E^n, f(\bar{x}) = 1\}$.

Обозначим через $\Phi(l, n, p)$ число систем S из $S_{n,l}$, генерирующих функцию f .

Лемма.

$$1. \Phi(l, n, p) = \sum_{i=0}^{p - \lceil \log_3 l \rceil} (-1)^i \binom{p}{i} \binom{3^{n-i}}{l}.$$

$$2. \text{ При } l = O\left(\frac{p}{3^l}\right) \Phi(l, n, p) \sim \frac{(3^l - 1)^p}{l!} \quad (p \rightarrow \infty).$$

$$3. \text{ При } \frac{2}{3}l - \ln p \rightarrow \infty \Phi(l, n, p) \sim \binom{3^p}{l}.$$

Из леммы следует, что при $l > 1$ существуют булевы функции, которые не генерируются никакими системами из $S_{n,l}$.

Пусть $P_{n,l}$ — множество булевых функций от n переменных, такое, что каждая функция f встречается в ней $\Phi(l, n, p)$ раз ($p = 2^n \setminus |N_f|$). Относительно функций множества $P_{n,l}$ справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для почти всех функций из множества $P_{n,l}$ число k -мерных интервалов $i_k(f)$, содержащихся в множестве N_f , удовлетворяет неравенствам

$$\binom{n}{k} \left(\frac{2^{n-k}}{3^{l2^k}} - \frac{1}{\varepsilon(n)} \sqrt{\frac{2^{n-k}}{3^{l2^k}}} \right) \leq i_k(f) \leq \binom{n}{k} \left(\frac{2^{n-k}}{3^{l2^k}} + \frac{1}{\varepsilon(n)} \sqrt{\frac{2^{n-k}}{3^{l2^k}}} \right).$$

Следствие. Для почти всех функций из множества $P_{n,l}$ размерность максимальных интервалов не превышает $\max \left\{ 0, \left\lceil \log \frac{n}{l} \right\rceil \right\}$.

Из теоремы 2 при $k=0$ и соответствующем выборе $\varepsilon(n)$ в качестве другого следствия легко вытекают третье и пятое утверждения теоремы 1.

Обозначим через $S(f)$ длину сокращенной д. н. ф., реализующей булеву функцию f .

Теорема 3.

1. Если $\log \frac{\log_3 n}{l} n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то для почти всех функций из множества $P_{n,l}$

$$s(f) \sim \sum_{k=\mu}^{\mu+1} \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k}}{3^{l2^k}} \left(1 - \frac{1}{3^{l2^k}}\right), \text{ где}$$

$$\mu = \left\lfloor \log \frac{\log_3 n}{l} \right\rfloor.$$

2. Если $\log \frac{\log_3 n}{l}$ ограничено при $n \rightarrow \infty$ и $l < \log_3 \frac{n \cdot \log_3 e}{\log_3 n}$, то для почти всех функций множества $P_{n,l}$

$$s(f) \sim \sum_{k=\mu}^{\mu+2} \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k}}{3^{l2^k}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{l2^k}}\right).$$

3. Сопоставим теперь каждой системе S из $S_{n,l}$ не всюду определенную функцию $f_S(x_1, \dots, x_n)$ алгебры логики следующим образом:

$$f_S(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_i(\bar{x}) = 1 \ (1 \leq i \leq l), \\ 0, & \text{если для некоторого } i_0 \ (1 \leq i_0 \leq l) \ f_{i_0}(\bar{x}) = 0, \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что функция f_S равна единице на множестве решений M_S системы S . Снова будем говорить, что функция f_S генерируется системой уравнений S . Одна и та же частичная функция может генерироваться разными системами.

Пусть $Q_{n,l}$ — множество частичных булевых функций, такое, что каждая функция встречается в ней столько раз, сколько системами из $S_{n,l}$ она генерируется. Обозначим через $i_k(f)$ и $l_k(f)$ соответственно число k -мерных и максимальных k -мерных интервалов частичной функции f из $Q_{n,l}$. Рассмотрим их средние значения:

$$\bar{i}_k(n, l) = \frac{1}{|Q_{n,l}|} \sum_{f \in Q_{n,l}} i_k(f);$$

$$\bar{l}_k(n, l) = \frac{1}{|Q_{n,l}|} \sum_{f \in Q_{n,l}} l_k(f).$$

Теорема 4.

$$\bar{i}_k(n, l) = \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k+l2^k}}{3^{l2^k}} (1 - (1 - 2^{-l})^{2^k});$$

$$\bar{l}_k(n, l) = \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k+l2^k}}{3^{l2^k}} (1 - (1 - 2^{-l})^{2^k} (1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{l2^k})^{n-k}).$$

Следствие. Для почти всех функций множества $Q_{n,l}$ размерность максимальных интервалов не превышает $\max\{0, \left\lfloor \log \frac{n}{l} \right\rfloor + 1\}$.

Обозначим через $s(f)$ длину сокращенной д. н. ф., реализующей функцию f из $Q_{n,l}$.

Теорема 5.

1. Если $\log \frac{\log_2 n}{l} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то для почти всех функций из множества $Q_{n,l}$

$$s(f) \sim \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \frac{2^{n-k} + l2^k}{3^{l2^k}} (1 - (1 - 2^{-l})^{2^k}) \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{l2^k}\right)^{n-k},$$

где $p = \left\lfloor \log \frac{\log_2 n}{l} \right\rfloor$

2. Если $\log \frac{\log_2 n}{l}$ ограничено при $n \rightarrow \infty$ и $l \leq \log_{3/2} \frac{n \log_2 n e}{\log_2 n}$, то для почти всех функций множества $Q_{n,l}$

$$s(f) \sim \sum_{k=0}^{p+2} \binom{n}{k} \frac{2^{n-k} + l2^k}{3^{l2^k}} (1 - (1 - 2^{-l})^{2^k}) \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{l2^k}\right)^{n-k}.$$

Полагая $l = 1$, получаем из последних двух теорем соответствующие утверждения для почти всех частичных функций множества Q_n , ибо $Q_{n,1} = Q_n$.

Ереванский государственный университет

Է. Վ. ԵՂՆԱԶԱՐՅԱՆ

Մասնակի բուլյան ֆունկցիաներով հավասարումների սխեմաների Լանգվան և Բուրազիչներ

Աշխատանքում դիտարկվում է n -փոփոխականից կախված մասնակի բուլյան ֆունկցիաներով և հավասարումներից կազմված սխեմաների բազմությունը և պարամետրի փոփոխման լրիվ սպեկտրում կամ զնաճատվում է լուծումների քանակը, կամ արտաձևում է նրանց ասիմպտոտիկան համարյա բոլոր սխեմաների համար: Սխեմանի լուծումների բազմությունը նկարագրելու համար սահմանվում է մի զեպքում բուլյան, մյուս զեպքում մասնակի բուլյան ֆունկցիա, որոնք սխեմանի լուծումների բազմության վրա բնորոշում են մեկ արժեքը, և համարյա բոլոր սխեմաների համար զնաճատվում է այդ ֆունկցիան իրացնող դ. ն. ձ.-ի բարդությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТИРОВАННОЕ

- 1 Ю. И. Журавлев, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 51, стр. 143 (1958) 2 В. В. Глазголев, Некоторые оценки дизъюнктивных нормальных форм, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 19, стр. 75 (1967).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. Л. Бербериан

Об исключительных множествах субгармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 23/XI 1978)

1. В этой статье мы изучаем граничное поведение субгармонической функции $u(z)$, определенной в единичном круге $D: |z| < 1$ на комплексной z -плоскости и удовлетворяющей условию

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = O(1), \text{ при } r \rightarrow 1. \quad (1)$$

Согласно классическому результату Дж. Литтлвуда ⁽¹⁾ такая функция $u(z)$ представима в виде разности

$$u(z) = v(z) - w(z) \quad (2)$$

гармонической функции $v(z)$, удовлетворяющей условию (1), и потенциала Грина $w(z)$,

$$w(z) = \int_{|a| < 1} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1 - \bar{a}z}{z - a} \right| d\mu(a), \quad (3)$$

в котором распределение масс $d\mu(a)$ подчинено условию

$$\int_{|a| < 1} (1 - |a|) d\mu(a) < +\infty. \quad (4)$$

Хорошо известно ⁽¹⁾, что гармоническая функция $v(z)$ в разложении (2) имеет почти всюду на $\Gamma: |z| = 1$ конечные угловые граничные значения. Поэтому граничное поведение субгармонической функции $u(z)$ вдоль некасательных путей в D целиком зависит от граничных свойств потенциала Грина $w(z)$. Функция $w(z)$, в которой распределение масс $d\mu(a)$ удовлетворяет условию (4), имеет почти всюду на Γ радиальные граничные пределы, равные нулю (Дж. Литтлвуд; см., например, ⁽¹⁾). Утверждать существование угловых пределов функции $u(z)$ в этом случае нельзя; соответствующие примеры приведены в статье Цудзи ⁽²⁾. Более того, угловые пределы могут не существовать, даже если распределение $d\mu(a)$ удовлетворяет более жесткому условию:

$$\Omega(r) = \int \int_{|a| < r} d\mu(a) = O\left(\frac{1}{(1-r^\lambda)}\right) r^{-1} \quad (5)$$

при любых $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$ ⁽¹⁾. Однако в этом случае можно утверждать, что в почти каждой точке $z = e^{i\theta}$ на Γ ($z \in \Gamma \setminus E, \text{mes } E = 0$) существует $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \omega(z) = 0$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$ вдоль почти всех хорд круга D , оканчивающихся в точке z ⁽¹⁾, теорема 3).

Мы уточняем здесь результаты Цудзи; уточнение касается размеров исключительного множества E в терминах непрерывной шкалы выпуклых емкостей. Доказываемые результаты используются в изучении граничных свойств субгармонических функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, и граничных свойств нормальных субгармонических функций.

2. Для произвольной точки $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ и произвольного числа $\psi, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, обозначим через $l_0(\psi)$ луч, проходящий через $e^{i\theta}$ и составляющий угол ψ с радиусом вектором точки $e^{i\theta}$. По определению ⁽²⁾, непрерывная в интервале $(0, \infty)$ функция $H(t) \geq 0$ принадлежит классу C_H , если $H(t)$ не возрастает на $(0, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow +0} H(t) = +\infty$, $tH(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow 0$ и

$$\int_0^x \frac{dt}{tH(t)} < +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(t)dt = c, \text{ где } c \neq 0, \infty. \quad (6)$$

Непрерывную функцию $h(t) \geq 0$, определенную в интервале $[0, +\infty)$, называют функцией меры, если она обладает следующими свойствами: $h(t)$ возрастает на $[0, +\infty)$, $h(0) = 0$, $t^{-2}h(t)$ — неубывающая функция при $t \rightarrow 0$. Непосредственно видно, что каждая функция $H \in C_H$ порождает функцию меры $h_H(t) = tH(t)$. Пусть $E \subset \Gamma$ произвольное борелевское множество. Обозначим через $\Lambda_h(F)$ его хаусдорфову h -меру, т. е. $\Lambda_h(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Lambda^{(h)}_\rho(E)$, где $\Lambda^{(h)}_\rho(E) = \inf \sum h(z_i)$, и infimum берется по всем покрытиям $U.S.$ множества E счетными наборами кругов S_i радиуса $r_i < \rho$. Для произвольной функции $H \in C_H$ положим

$$j_n^{(H)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)} \quad n=1,2,\dots$$

и обозначим через $\text{сар}_H E$ выпуклую емкость множества E относительно последовательности $\{j_n^{(H)}\}$ ⁽⁴⁾. В случае $H(t) = t^{\alpha-1}$ $0 < \alpha < 1$ получаем обычную α -емкость $\text{сар}_\alpha E$ и при $H(t) = \frac{1}{t}$ логарифмическую емкость $\text{сар}_0 E$.

3. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $H \in C_H$ и число γ , $0 < \gamma < 1$ — фиксированы, а функция $w(z)$ вида (3) удовлетворяет условию

$$\Omega(r) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\gamma}H(1-r)}\right) \text{ при } r \rightarrow 1 \quad (7)$$

Тогда в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E \subset \Gamma$, $\text{cap}_H E = 0$, существуют $\lim w(z) = 0$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$ и $z \in e^{i\psi}(\psi)$ для почти всех $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(t) = \int_0^t H(u) du$ и покажем, что из условия (7) следует условие

$$\int_{|a| < 1} \int h(1-|a|) d\mu(a) < \infty. \quad (8)$$

Действительно,

$$\int_{|a| < r} \int h(1-|a|) d\mu(a) = \int_0^r h(1-t) d\Omega(t) = h(1-r) \Omega(r) + \int_0^r \Omega(t) H(1-t) dt. \quad (9)$$

Подставляя в правую часть (9) выражение для $h(1-r)$ и учитывая оценки (6) и (7), получим

$$\int_{|a| < r} \int h(1-|a|) d\mu(a) = O(1) \text{ при } r \rightarrow 1,$$

что эквивалентно (8). Применяя теперь известную теорему ((²), теорема (9)), получим, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} w(re^{i\theta}) = 0$$

в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$, $\text{cap}_H E_1 = 0$.

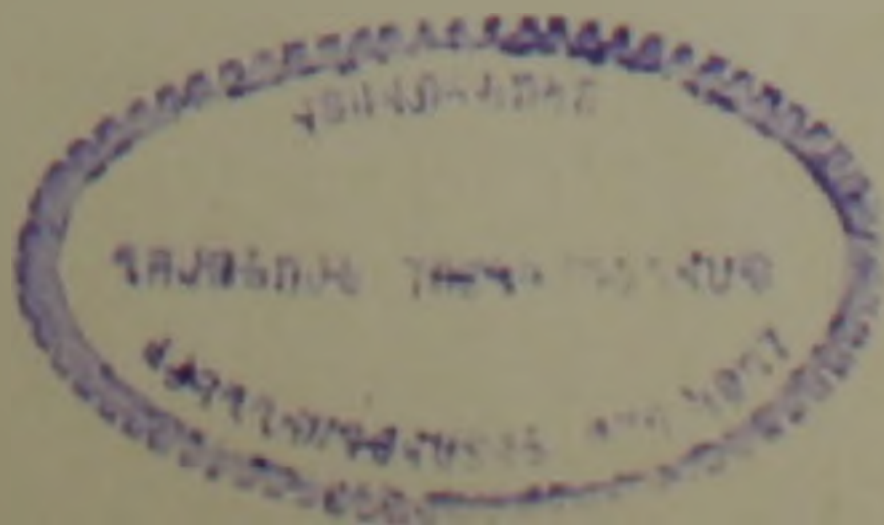
Обозначим $d\sigma(a) = (1-|a|)d\mu(a)$, тогда

$$\int_{|a| < 1} \int d\sigma(a) = \int_0^1 (1-t) d\Omega(t) = - (1-r) \Omega(r) + \int_0^1 \Omega(t) dt.$$

Учитывая оценки

$$(1-r) \Omega(r) \leq \text{const} \cdot \frac{(1-r)^\gamma}{H(1-r)}$$

$$\int_0^1 \Omega(t) dt \leq \int_0^1 \frac{\text{const} \cdot dt}{(1-t)^{1-\gamma} H(1-t)} \leq \frac{1}{H(1-r)} \int_0^1 \frac{\text{const} \cdot dt}{(1-t)^{1-\gamma}} \leq \frac{\text{const} \cdot (1-r)^\gamma}{H(1-r)}.$$



получим, что

$$\iint_{r < |z| < 1} d\sigma(a) = 0 \left(\frac{(1-r)^{\gamma}}{H(1-r)} \right) \text{ при } r \rightarrow 1.$$

Если $r_v = 1 - \frac{1}{2^v}$ ($v=1, 2, \dots$), то

$$\iint_{r_v < |z| < 1} d\sigma(a) \leq \frac{\text{const}}{2^{\gamma v} \cdot H\left(\frac{1}{2^v}\right)}. \quad (10)$$

Разделим круговое кольцо $r_v < |z| < 1$ на 2^v равных областей d_v^j :

$$r_v < |z| < 1; \frac{2\pi}{2^v} J \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{2^v} (J+1) \quad (J=0, 1, 2, \dots, 2^v - 1)$$

и перепишем неравенство (10) в виде

$$\sum_{j=0}^{2^v-1} \sigma(d_v^j) \leq \frac{\text{const}}{2^{\gamma v} \cdot H\left(\frac{1}{2^v}\right)}.$$

Обозначим через N число областей d_v^j , в которых $\sigma(d_v^j) \geq \frac{1}{2^{\gamma(1+b)}}$ при некотором $\delta, 0 < \delta < 1$. Тогда $N \leq \text{const} \frac{2^{\gamma(1+b)}}{2^{\gamma} H(1/2^v)}$. Присоединим к каждой области d_v^j две смежные области d_v^{j-1}, d_v^{j+1} и положим $d_v^{*j} = d_v^{j-1} \cup d_v^j \cup d_v^{j+1}$. Обозначим через $\gamma_{j,v}$ дуги на Γ , соответствующие областям d_v^{*j} , а через F_v^* — множество всех дуг на Γ , которое принадлежит границе ∂d_v^{*j} при фиксированном v . Положим $F^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{v=k}^{\infty} F_v^*$. Имеем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N |\gamma_{j,v}| H(|\gamma_{j,v}|) &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N 3 \cdot \left\{ \frac{2\pi}{2^v} (J+1) - \frac{2\pi}{2^v} J \right\} \cdot H\left(3 \cdot \left\{ \frac{2\pi}{2^v} (J+1) - \frac{2\pi}{2^v} J \right\}\right) \\ &\leq \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2\pi}{2^v} \cdot 3 \cdot \text{const} \cdot \frac{2^{\gamma(1+b)}}{2^{\gamma} \cdot H\left(\frac{1}{2^v}\right)} \cdot H\left(\frac{2\pi}{2^v} \cdot 3\right) \leq \sum_{v=1}^{\infty} \text{const} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2^{\gamma(1+b)}} < +\infty, \end{aligned}$$

согласно которой $\Lambda_{H,H(r)}(F^*) = 0$. Согласно лемме 1 из [5] $\text{cap}_H F^* = 0$. Обозначим дополнение к F^* относительно Γ через F . Если $e^{i\theta} \in F$, то $e^{i\theta} \in C(F_v^*)$ ($v \geq v_0$), и значит область $d_v(\theta)$,

$$d_v(\theta): r_v < |z| < 1, \theta - \frac{2\pi}{2^v} \leq \arg z \leq \theta + \frac{2\pi}{2^v}$$

содержится в объединении $d^j \cup d^{j+1}$, в которых

$$\sigma(d^j) \leq \frac{1}{2^{v(1+\delta)}} \quad \sigma(d^{j+1}) \leq \frac{1}{2^{v(1+\delta)}}.$$

Поэтому

$$\sigma(d, (b)) \leq \frac{2}{2^{v(1+\delta)}} \quad (0 < \delta < 1, v \geq v_0). \quad (11)$$

Без нарушения общности, допустим, что точка $z=1$ принадлежит F и пусть $l_0(\psi)$ луч, проходящий через точку $z=1$ и составляющий угол ψ с радиусом вектором точки $z=1$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Положим $\Delta_v =$

$$= \left\{ |z| < 1 \cap \left| |z-1| < \frac{1}{2^v} \right\} \quad (v=1, 2, \dots).$$

Согласно (11)

$$\sigma(\Delta_v) \leq \frac{2}{2^{v(1+\delta)}} \quad (0 < \delta < 1, v \geq v_0). \quad (12)$$

Фиксируем $\psi_0, 0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$. Тогда значения функции $\lambda_v(\psi)$ при каждом $\psi \in (-\psi_0, \psi_0)$ выражают σ -массу, сосредоточенную в секторе, ограниченном окружностью $|z-1| = \frac{1}{2^v}$ и хордами $l_0(-\psi_0), l_0(\psi)$. Таким образом, $\lambda_v(\psi)$ есть возрастающая функция от ψ , $\lambda'_v(\psi)$ существует почти всюду на $(-\psi_0, \psi_0)$ и

$$\int_{-\psi_0}^{\psi_0} \lambda'_v(\psi) d\psi \leq \lambda_v(\psi_0) \leq \sigma(\Delta_v) \leq \frac{2}{2^{v(1+\delta)}}. \quad (13)$$

Пусть e^* обозначает множество всех таких ψ , для которых либо $\lambda'_v(\psi)$ не существует, либо существует и $\lambda'_v(\psi) \geq \frac{1}{2^v}$.

Согласно (13) имеем

$$me^* \leq \frac{2}{2^v} \quad (0 < \delta < 1),$$

и значит множество $e^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{v=k}^{\infty} e^*_v$ имеет $me^* = 0$. Теперь воспользуемся следующей оценкой, доказанной Цудзи ((¹) стр. 16).

Лемма (Цудзи (¹)). Пусть распределение масс $d\alpha(a)$ удовлетворяет в области $\Delta_v, v \geq v_0$ условию (12) при произвольном фиксированном $\delta, 0 < \delta < 1$, и пусть ψ_1 — произвольное число, принадлежащее дополнению к множеству e^* относительно интервала $(-\psi_0, \psi_0)$. Тогда в произвольной точке $z \in l_0(\psi_1)$, принадлежащей кольцу

$\frac{1}{2^{v+1}} \leq |z-1| \leq \frac{1}{2^v}$, $v \geq v_0$, выполняется оценка

$$\omega(z) \leq 1 + \frac{\text{const} \cdot v}{2^{v+1}} + \frac{\text{const}}{2^v}, \quad (14)$$

в которой $\lim_{v \rightarrow \infty} 1 = 0$ и $\delta, 0 < \delta < 1$ — произвольное число.

В нашем случае условие (12) выполняется при любом δ , $0 < \delta < \gamma < 1$. Поэтому из (14) следует, что $\lim_{z \rightarrow 1, z \in \gamma(\psi)} \omega(z) = 0$.

Рассматривая в качестве E объединение $E_1 \cup F^*$, получим утверждение теоремы 1.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 взять $H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, где $\alpha = \lambda + \gamma$, $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$ — фиксированное число и $0 < \gamma < 1$, то получим уточнение результата Цудзи (см. п. 1). В этом случае

$$\Omega(r) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right) \quad 0 < r < 1, \quad r \rightarrow 1$$

и в каждой точке $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E \subset \Gamma$, $\text{cap}_\alpha E = 0$, где $\alpha > \lambda$, существует $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \omega(z) = 0$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$, оставаясь на хордах $e_\psi(\psi)$ для почти всех $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

4. Укажем некоторые приложения теоремы 1.

Заметим прежде всего (см., напр., (1), стр. 9), что интеграл

$$L(u, r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta \quad (15)$$

представляет собой неубывающую функцию, выпуклую относительно $\log r$ и обладающую свойством

$$r \cdot \frac{d}{dr} L(u, r) = \Omega(r) \quad (16)$$

для любого $r, 0 < r < 1$, за возможным исключением не более, чем счетного множества значений $r \in (0, 1)$. Таким образом, ограничения на рост субгармонической функции $u(z)$ влекут за собой ограничения на рост потенциала Грина $\omega(z)$.

Теорема 2. Пусть субгармоническая в D функция $u(z)$ удовлетворяет условию (1) и соотношению

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\gamma} H(1-r)}\right) \quad (17)$$

а для ее гармонической части $v(z)$ имеет место

$$\int \int_{|z| < 1} (1-r) H(1-r) |\operatorname{grad} v(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta < +\infty. \quad (18)$$

Тогда в каждой точке $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E \subset \Gamma$, $\operatorname{cap}_H E = 0$, существуют конечные и равные между собой пределы.

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}, z \in I_0(\psi)} u(z) = u(e^{i\theta})$$

для почти всех ψ , принадлежащих $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим в круге D голоморфную функцию $f(z)$, действительная часть которой равна $v(z)$. Тогда $|f'(z)|^2 = |\operatorname{grad} v(z)|^2$ и удовлетворяет условию (18). Согласно известной теореме ⁽³⁾ $f(z)$, а следовательно $v(z)$ должны иметь конечные угловые граничные значения всюду на Γ , кроме, быть может, множества E_1 , $\operatorname{cap}_H E_1 = 0$. С другой стороны потенциал Грина $\omega(z) = u(z) - v(z)$ согласно (5) и (16) удовлетворяет условию (7). В силу теоремы 1, $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \omega(z) = 0$ в каждой точке $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E_2 \subset \Gamma$, $\operatorname{cap}_H E_2 = 0$, когда $z = e^{i\theta}$ и $z \in I_0(\psi)$ для почти всех $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

Поскольку $E = E_1 \cup E_2$ имеет $\operatorname{cap}_H E = 0$, теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно проверить, что из условия (17) вытекает оценка $\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = O(1)$, которая в случае знакопостоянной в

D функции $u(z)$ эквивалентна условию (1).

5. Следующее ниже утверждение является немедленным следствием теоремы 2 и формулы Дугласа ⁽⁶⁾.

С л е д с т в и е 1. Пусть субгармоническая в D функция $u(z)$ удовлетворяет условиям (1) и (17) при $H(t) = t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$ и условию

$$\int \int_0^{2\pi} \frac{|u(e^{i\theta}) - u(e^{i\varphi})|}{\sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2}} d\theta d\varphi < \infty.$$

Тогда утверждение теоремы 2 имеет место всюду на Γ , кроме множества E , $\operatorname{cap}_H E = 0$, $\alpha > 1$. Действительно, согласно формуле Дугласа ⁽⁶⁾, для гармонической в D функции $v(z)$ имеет место равенство

$$\int \int_{|z|<1} |\operatorname{grad} v(z)|^2 dx dy = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|v(\theta) - v(\varphi)|}{\sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2}} d\theta d\varphi$$

и следовательно $v(z)$ имеет угловые граничные значения на Γ всюду, кроме некоторого множества M , логарифмическая емкость которого нуль, $\operatorname{cap}_0 M = 0$. С другой стороны в силу условия (17) при $H(t) = t^{1-\alpha}$ в каждой точке $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ за возможным исключением некоторого множества $E_1 \subset \Gamma$, $\operatorname{cap}_0 E_1 = 0$, существуют $\lim w(z) = 0$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$ и $z(t) = e^{i\psi}$ для почти всех $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

Беря в качестве E объединение M и E_1 , получим утверждение следствия.

6. Действительную или комплексную функцию $f(z)$, определенную в D , называют нормальной в D , если семейство $F = \{f(S(z)) : S \in L\}$, где L — множество всевозможных взаимно-однозначных конформных отображений D на самого себя обладает следующим свойством: из любой последовательности семейства F можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом компактном подмножестве D (см., например, (7) стр. 314). В статье (7) показано, что нормальная субгармоническая функция $u(z)$, удовлетворяющая условию (1), имеет почти всюду на Γ конечные угловые граничные значения. В основе этого утверждения лежит замечание, что в каждой точке $e^{i\theta} \in \Gamma$, в которой гармоническая часть функции $u(z)$ имеет конечное угловое граничное значение, а потенциал Грина нулевой радиальный предел, существует конечное угловое граничное значение функции $u(z)$. Используя это замечание и теорему 2, имеем следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть субгармоническая и нормальная в D функция $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда $u(z)$ имеет конечные угловые граничные значения всюду на Γ , кроме множества E , $\operatorname{cap}_H E = 0$.

Приношу искреннюю благодарность В. И. Гаврилову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский государственный университет

II. ՀԱՐՈՐԴՈՒԹՅԱՆ

Առթերհամանիկ ֆունկցիաների բացառիկ բազմությունների մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են միավոր շրջանում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների ենթադասերը $H(1)$ ֆունկցիայի միջոցով սահմանված որոշակի հարդակականության նկատմամբ ուռուցիկ ունակության տերմիններով հնարավոր է լինում սալ նշված ենթադասերի ֆունկցիաների բացառիկ բազմությունների բնութագրերը:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТИРОВАЊИ

- ¹ *M. Tsuji*, Comment. math. Univ. St. Pauli, №1,3—16, 1956. ² *В. С. Захарян*, „Известия АН СССР“, сер. матем., 27, №4, 801—818(1963). ³ *В. И. Гаврилов*, *В. С. Захарян*, „Известия АН Арм. ССР“, сер. матем., 11, № 2, 113—123 (1976). ⁴ *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. ⁵ *С. Л. Берберян*, ДАН Арм. ССР, т. LXVI, №4, 216—221(1978). ⁶ *L. Carleson*, Math. Zeit. 73, №2, 190—196 (1960). ⁷ *J. Meek*, Amer. Math. Soc, 30, № 2, 313—317 (1971).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Ю. Шахвердян

Гиперболическая емкость и скорость убывания мероморфных в круге функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 4/XII 1978)

В настоящей работе продолжается изучение поставленных и исследованных в 1959 году академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном вопросов, связанных с предельной скоростью убывания вдоль наперед заданного множества E единичного круга D , сгущающегося к границе ∂D , мероморфных в D функций f с заданным ростом неванлинновской характеристики $T_f(r)$. После известных работ А. Л. Шагиняна (¹⁻³) эта задача исследовалась в различных направлениях многими советскими и зарубежными математиками. Здесь же мы имеем целью показать, что названная предельная скорость убывания тесно связана с емкостными характеристиками множества E . В качестве приложения приводятся теорема 5, следствие 3 и оценка снизу модуля мероморфной функции, справедливая вне некоторого исключительного множества, определяемого посредством гиперболического диаметра и гиперболической емкости.

Введем необходимые определения. Для заданной на $(0, 1)$ положительной монотонно растущей функции T через Φ_T обозначим класс всех мероморфных в D функций f с $T_f(r) = O(T(r))$, $r \rightarrow 1-0$; Ω_T обозначает класс положительных монотонных ω , $\omega(1-0) = 0$ таких, что

$$a) \omega(r) = O(1 - r/T(r)), \quad r \rightarrow 1-0 \quad б) \sum_{z \in Z_f} \omega(|z|) < \infty,$$

где б) выполняется для каждой нетождественной $f \in \Phi_T$ с непустой последовательностью нулей Z_f . Нетрудно показать, что для произвольных фиксированных $\epsilon > 0$, $0 < \theta < 1$

$$(1-r)(T(r+\theta(1-r)))^{-(1+\theta)} \in \Omega_T, \quad (1)$$

так что класс Ω_T всегда непустой. Если $T(r) = O(1)$, $r \rightarrow 1-0$, то Φ_T совпадает с классом N Р. Неванлинны функций ограниченного вида. Через $\rho(z, \bar{z})$ ($z, \bar{z} \in D$) обозначается гиперболическая (неевклидова) метрика в D ; если $e \subset D$, то $dh(e) (= \sup_{z, \bar{z} \in e} \rho(z, \bar{z}))$ и $\text{cap}h(e)$ обозначают соответственно гиперболический диаметр и гиперболическую (или что то же — гриновую) емкость множества e . Относительно этого типа

емкости подробнее см. (43). Для $0 \leq \rho < 1$ и $e \subset D$ $e(\rho) = \{|z| + \rho(1 - |z|) : z \in e\}$, $e^* (= e(0))$ означает круговую проекцию e на $[0, 1]$; $C(z, \rho)$ есть неевклидов диск с центром $z \in D$ радиуса $\rho \geq 0$. Предполагается, что множество E содержится в D , лежит вне некоторой окрестности $z=0$ и имеет точки, сколь угодно близкие к ∂D . Счетная система неевклидовых дисков постоянного радиуса $\{C_n\}_1^\infty$ образует S -покрытие E , если она в совокупности покрывает E , имеет конечную кратность и центры C_n лежат на E . Для заданного множества нетрудно указать простой алгоритм построения для него S -покрытий. Если $D \setminus E$ есть область, то для $\gamma \subset \partial E$ $m_E(\gamma)$ есть значение в нуле гармонической меры γ относительно $D \setminus E$.

Приведем следующую простую, но во многих отношениях замечательную теорему (подробное доказательство см. также (4)):

Теорема 1 (А. Л. Шагинян, (4)). Если для некоторой $f \in N$ выполнено

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 1 \\ z \in E}} (1 - |z|) \log |f(z)| = -\infty, \quad (2)$$

где E есть некоторая жорданова кривая, неограниченно приближающаяся к ∂D , то $f \equiv 0$. Если кривая E лежит внутри некоторого угла Штольца, то для любого $c > 0$ существуют $f \in N$, для которой предел слева в (2) есть $-c$.

Н. В. Ушакова (4) и С. Я. Ханнисон (5) продолжили изучение этой теоремы в направлении нахождения условий на допустимую "малость" произвольного множества E , при которых скорость убывания (2) вдоль E остается экстремальной для класса N . В этих работах, а также в другой, более общей теореме Н. В. Ушаковой (6), устанавливаемые для E критерии имеют метрический характер. В приводимой ниже теореме 1 мы даем (в отдельных случаях значительно более точное) описание "малости" E в терминах гиперболической емкости.

Теорема 1. Пусть множество E такое, что существуют нетождественная $f \in \Phi_T$ и $\omega \in \Omega_T$ так, что для некоторого θ , $0 < \theta < 1$ выполняется

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 1 \\ z \in E}} \omega(|z| + \theta(1 - |z|)) \log |f(z)| = -\infty. \quad (3)$$

Тогда E может быть покрыто системой компактных множеств $\{L_n\}_1^\infty$ таких, что

$$dh(L_n) = o(1), \quad \sum_{n=1}^\infty |\log \text{cap}(L_n)|^{-1} < \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4)$$

Компакт L_n состоит из конечного числа связанных компонент, каждая из которых содержит хотя бы один нуль из Z_f . То есть, если $L_{n,k}$ ($1 \leq k \leq k_n$) есть компоненты L_n , то существуют точки $z_{n,k} \in L_{n,k}$ так, что

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} \omega(|z_{n,k}|) < \infty. \quad (5)$$

Легко видеть, что для $T(r) = O(1)$ Ω_T содержит функции, кратные $(1-r)$, так что (3) есть аналог (2). Далее каждое множество, могущее быть покрытым системой компактов $\{L_n\}_1^\infty$, удовлетворяющих (4), называем L -множеством. В связи с некоторыми частными случаями теоремы 1 такие множества встречались в (10).

Следствие 1. В условиях теоремы 1 $E \subset (0, 1)$ может быть покрыто системой неевклидовых дисков $\{C_n\}_1^\infty$, имеющих конечную сумму радиусов и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(|r_n|) < \infty,$$

где r_n есть центр C_n .

Нетрудно проверить, что функция μ_T , по существу введенная Н. В. Ушаковой (9),

$$\mu_T(r) = \int_r^1 \left(\int_t^1 \omega(z) dz \right) dt, \quad \text{где} \quad \int_0^1 T(r) \mu_T(r) dr < \infty$$

также принадлежит Ω_T . Откуда легко заметить, что следствие 1 для $E \subset (0, 1)$ содержит теорему единственности Н. В. Ушаковой (9). Метод доказательства приведенных выше предложений не пересекается с оригинальным методом У. Хеймана (11), развитого и уточненного в (8). Можно показать, что множество

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(1 - 2^{-n}, 2^{-n}) \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{const}; \beta, \gamma > 1, 0 < \alpha < 1$$

удовлетворяет заключению следствия 1, но не есть L -множество. Особый интерес в этом отношении представляют примеры счетных множеств. Пусть l_n есть правый конец отрезка $C_n^* = C^*(1 - 2^{-n}, 2^{-n})$, а $s_n = 1 - l_n$ — последовательность такая, что для $t_n = l_n + s_n(1 - l_n)$ $(\omega(t_n))^{-1}$ есть целые числа. Распределим на C_n^* равномерно в неевклидовом смысле $(\omega(t_n))^{-1}$ точек и через H обозначим их объединение по всей $n \geq 1$. Тогда счетное H удовлетворяет заключению следствия 1 и не удовлетворяет заключению теоремы 1, а это показывает, что теорема 1 действительно более точно, чем следствие 1, оценивает „малость“ $E \subset (0, 1)$. Из теоремы 1 (в случае $T(r) = O(1)$) легко вытекает теорема единственности С. Я. Хавинсона (8), и пример множества H опять показывает, что теорема 1 действительно сильнее теоремы С. Я. Хавинсона.

Следствие 2. Если E удовлетворяет условиям теоремы 1, то $\text{carh}(E) < 1$. Используя одну оценку Ч. Поммеренке (12) гиперболической емкости континуумов, из следствия 2 легко получить, что если (3) выполняется вдоль континуума E , имеющего предельные точки на ∂D , то $f \equiv 1$. В частности, имеем короткое прямое доказательство теоремы 1.

Для функции T множество E называем T -множеством (N -множеством, если $T(r) = O(1)$) в случае, если существует нетождественная $f \in \Phi_T$, удовлетворяющая (3) с некоторыми $\omega \in \Omega_T$, $0 < \theta < 1$. Теорема

1 устанавливает необходимые признаки для T -множеств. Интересен также противоположный вопрос: найти достаточные условия на E , при которых оно является T -множеством. Мы имеем некоторый ответ для случая N -множеств: если E может быть покрыто системой конечной кратности выпуклых множеств L^α , удовлетворяющих (4), (5), то E есть N -множество. Легко видеть, что эти условия довольно близко стоят к необходимым (4), (5).

Используя следствие 2, легко строить примеры не T -множеств — таким будет каждое E с $\text{carh}(E)=1$. Например, этим свойством обладает каждое множество, содержащее последовательность континуумов K_n с $dh(K_n) \rightarrow \infty$ по мере $n \rightarrow \infty$. На примерах важных частных случаев можно

убедиться, что если некоторое E не является T -множеством и расположено некасательно к ∂D , то скорость убывания (3) вдоль E близка к экстремальной для класса Φ_T . Несмотря на то, что мы не имеем полной характеристики T -множеств (то есть одновременно необходимых и достаточных метрических, емкостных или геометрических условий), можно привести теоремы, в той или иной мере описывающие интересующую нас сторону асимптотического поведения функции из Φ_T вдоль T -множеств. Единственным утверждением, приложимым в этом случае к классам Φ_T , был следующий, один из основных в теории А. Л. Шагиняна, результат (приводим с несущественным изменением):

Теорема II (А. Л. Шагинян, (2.3)). Пусть L есть жорданова спрямляемая дуга, идущая к ∂D , $E \subset L$ — произвольная совокупность, измеримая вдоль L , каждая порция которой имеет положительную лебегову меру. Если $\lambda(r) \geq 0$ — произвольная ограниченная функция такая, что

$$\int_E \frac{\lambda(|z|)}{1-|z|} d(|z|) < \infty,$$

то для каждой нетождественной мероморфной f и произвольного $0 < \theta < 1$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (T_f(r + \theta(1-r)))^{-1} \left(\int_{E(r)} \lambda(|z|) \log^{-1} |f(z)|^{-1} d(|z|) \right) < \infty,$$

где для $0 < r < 1$ $E(r)$ есть $E \cap \{|z| \leq r\}$. Нами же доказаны следующие 2 предложения (ниже $\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|$):

Теорема 2. Пусть относительно компактное E есть T -множество, каждая порция которого имеет положительную гармоническую меру. Тогда для каждой нетождественной $f \in \Phi_T$ и произвольных $\omega \in \Omega_T$, $0 < b < 1$

$$\int_E \frac{\omega(|z| + b(1-|z|))}{1-|z|} \log^{-1} |f(z)|^{-1} d\omega(z) < \infty \quad (6)$$

и если для каких-либо $f \in \Phi_T$, $\omega \in \Omega_T$, $0 < \theta < 1$ этот интеграл расходится, то $f \equiv 0$.

Теорема 3. Пусть E есть N -множество, каждая порция которого имеет положительную емкость и $\{C_n\}$ есть S -покрытие E . Тогда для каждой нетождественной $f \in N$ и произвольных фиксированных $\xi_n \in E \cap C_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^+ \|f\|_{E \cap C_n}^{-1}}{|\log \text{saph}(E \cap C_n)|} (1 - |\xi_n|) < \infty \quad (7)$$

и если для некоторой $f \in N$ этот ряд расходится, то $f \equiv 0$.

Если в качестве $\omega \in \Omega_T$ выбрать функцию из (1), то (6) запишется в виде

$$\int_{\partial E} (T(|z| - \theta(1 - |z|)))^{-(1+\theta)} \log^+ |f(z)|^{-1} dm_E(z) < \infty,$$

что, поскольку

$$\int_{\partial E} \frac{dm_E(z)}{1 - |z|} < \infty,$$

по форме записи напоминает теорему II. Последний интеграл сходится для каждого L -множества E . Хорошо известны ^(4,12) примеры множеств положительной гармонической меры (емкости) но линейной меры нуль и, по этой причине, теоремы 2, 3 применимы в тех случаях, когда теорема II не действует. Если же E удовлетворяет условиям теоремы II, то ни одно из этих трех предложений не вытекает из другого, хотя и они, по-видимому, близки друг к другу. Кроме того, теорема 3 имеет то важное преимущество, что при довольно общих предположениях относительно E она дает точный результат:

Теорема 4. Пусть E есть N -множество и является счетным объединением попарно не пересекающихся выпуклых множеств E_n таких, что для некоторых $\xi_n \in E_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\xi_n|) < \infty.$$

Тогда для произвольных чисел $\alpha_n > 0$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^+ \alpha_n^{-1}}{|\log \text{saph}(E_n)|} (1 - |\xi_n|) < \infty$$

существует $f \in N$ так, что для $n \geq 1$ $0 < \|f\|_{E_n} \leq \alpha_n$.

В теореме 4 $\text{saph}(E_n)$ можно заменить на более простую величину $\text{dh}(E_n)$. Утверждение теоремы 3 остается в силе и в случае, когда относительно компактное N -множество E имеет емкость нуль, а знаменатели членов ряда (7) заменены через $M(\|f\|_{E \cap C_n}, E \cap C_n)$ $n \geq 1$, где для $\epsilon > 0$, $e \in D$

$$M(z, \varepsilon) = \max\{u(z, e) : \rho(z, e) \geq \varepsilon\}$$

и $u(z, e)$ есть некоторый гиперболический потенциал Эванса — Сельберга e

$$u(z, e) = \int_D \log \left| \frac{1 - z\bar{\xi}}{z - \xi} \right| d\mu(\xi).$$

Здесь $d\mu$ задает в e распределение положительной конечной массы, соответствующее некоторому логарифмическому потенциалу Эванса — Сельберга (⁴).

В связи с одной работой В. И. Гаврилова (¹⁴), касающейся теоремы А. Л. Шагиняна, Ф. Шнитцер и В. Зейдель доказали (¹⁵), что для произвольной непрерывной монотонно убывающей на $(0, 1)$ функции $\lambda(r) > 0$ существует голоморфная в D функция $f \neq 0$ такая, что $|f(r)| \leq \lambda(r)$ в окрестности точки 1. Следующая теорема, в частности, дает возможность с достаточной степенью точности оценить снизу рост характеристики такой функции f .

Теорема 5. Пусть $E \subset D$ есть произвольное множество, сгущающееся к единичной окружности и нетождественная мероморфная функция f такова, что для некоторой $\lambda(r) \geq 0$ $|f(z)| \leq \lambda(|z|)$, $z \in E$. Тогда для произвольных фиксированных $0 < \varepsilon < 1$, $0 < c < \infty$ имеет место неравенство

$$T_1(r) \geq \text{const}((1-r) \log 1/\lambda(r - c(1-r)))^{1-\varepsilon}, \text{const} > 0$$

справедливое для всех $r \in E(c/c+1)$ за исключением, может быть, точек r некоторого L -множества (зависящего вообще говоря от c и ε).

Последняя теорема вытекает из следующей оценки, доказываемой одновременно с теоремой 1: если нетождественная $f \in \Phi_T$ и $\omega \in \Omega_T$ есть произвольные функции, то для каждого θ , $0 < \theta < 1$ существует постоянная $C_{\theta, \omega}$ и L -множество E так, что

$$|f(z)| \geq \exp\{-C_{\theta, \omega}(\omega(|z|) + \theta(1 - |z|))\}$$

для всех z вне E . Постоянная $C_{\theta, \omega}$ может быть явно выписана. Из теоремы 5 сразу вытекает следующее предложение, представляющее собой аналог известного (^{13, 16}) для голоморфных функций неравенства.

Следствие 3. Для каждой мероморфной в D функции f и произвольных фиксированных $\varepsilon > 0$, $0 < \theta < 1$ соотношение

$$\log M_1(r) = O_{\theta, \omega}((T_1(r + \theta(1-r)))^{1-\varepsilon}/(1-r)) \quad (M_1(r) = \max_{0 < |z| < r} |f(re^{i\varphi})|)$$

справедливо для всех $r \in (0, 1)$ за исключением, может быть, точек r некоторого L -множества (зависящего вообще говоря от θ и ε).

Հիպերբոլական ունակությունը և շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների նվազման սուրագությունը

Աշխատանքում շարունակվում է ահադեմիկոս Ա. Հ. Շահինյանի կողմից 1959 թ. դրված մերոմորֆ ֆունկցիաների նվազման էքստրեմալ տրագությունների հետ կապված հայտնի խնդիրների ուսումնասիրությունը: Ցույց է տրվում, որ այդ հարցերում էական դեր է խաղում հիպերբոլական ունակության գաղափարը: Որպես հիմնական արդյունքների կիրառություն բերվում են թեորեմ 5-ը, հետևանք 3-ը և մի գնահատական ներքևից մերոմորֆ ֆունկցիաների մոդուլի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ե Ն Ո Ւ Ր Յ Ո Ւ Ն

- ¹ А. Л. Шагинян, ДАН Арм. ССР, т. 27, № 5, 257—262 (1958). ² А. Л. Шагинян, ДАН СССР, т. 129, № 2, 284—287 (1959). ³ А. Л. Шагинян, ИАН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., т. 12, № 1, 3-25 (1959). ⁴ М. I sujī, Potential theory modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959. ⁵ Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, М., „Наука“, 1966. ⁶ I. S. Hwang, F. Schnitzer, W. Seidel, Math. Z., 122, 4 (1971). ⁷ И. В. Ушакова, ДАН СССР, т. 130, 1, 29—32 (1960). ⁸ С. Я. Хавинсон, УМН, т. 18, 2, 25—98 (1963). ⁹ И. В. Ушакова, ДАН СССР, т. 137, 6, 1319—1322 (1961). ¹⁰ А. Ю. Шахвердян, ДАН Арм. СССР, т. 66, № 2, 76-79 (1978). ¹¹ W. K. Hayman, Journ. Math. pures et appl., 35, 2, 115—126 (1956). ¹² Ch. Pommerenke, The Michigan Math. J., 10, 1, 53—63 (1963). ¹³ Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941. ¹⁴ В. И. Гаврилов, Вестник МГУ, Мат., мех., 2, 3—10 (1956). ¹⁵ F. Schnitzer, W. Seidel, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 57, 4, 876-877 (1967). ¹⁶ У. Хейман, Мероморфные функции, М. „Мир“, 1966.

УДК 621.375.826

ФИЗИКА

М. А. Андриасян, Р. Б. Костанян

Влияние усиленного спонтанного излучения на некоторые характеристики ОКГ на ИАГ: Nd^{3+}

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 10/VI 1978)

Усиленное спонтанное излучение (УСИ), распространяющееся под разными углами к направлению генерации, приводит к сбросу инверсии в активной среде, уменьшению эффективности и мощности генерации. Особенно сильно этот эффект сказывается в средах с большими коэффициентами усиления. Явление УСИ было исследовано в работах (1-6). Сокращение времени жизни метастабильного уровня в рубине наблюдалось ранее (6-11).

Целью данной статьи является изучение явления УСИ в ИАГ: Nd^{3+} на время жизни метастабильного состояния ${}^4F_{3/2}$ и связанное с ним изменение эффективности генерации.

1. Наличие УСИ в активном элементе ОКГ приводит к установлению некоторого эффективного времени жизни ($\tau_{эфф}$) для уровня ${}^4F_{3/2}$, которое вводится обычным способом:

$$\frac{1}{\tau_{эфф}} = \frac{1}{\tau_{32}} + W_1, \quad (1)$$

где W_1 — вероятность ненаправленного индуцированного излучения, τ_{32} — время жизни уровня ${}^4F_{3/2}$. Для четырехуровневой схемы, по которой работает ОКГ на ИАГ: Nd^{3+} , вероятность ненаправленного индуцированного излучения можно определить по формуле: (выпол аналогичен приведенному в (12) для трехуровневой схемы)

$$W_1 = \left(\frac{n_0}{\Delta_n} - 1 \right) \frac{\omega(t_2)}{\int_0^{t_2} \omega(t) dt} \ln \left(1 - \frac{\Delta_n}{n_0} \right) - \frac{1}{\tau_{32}}, \quad (2)$$

где n_0 — плотность атомов Nd в ИАГ, Δ_n — пороговая плотность инверсной населенности, $\omega(t)$ — форма импульса накачки, нормированная к ее максимальному значению, t_n и t_2 соответственно моменты времени

возникновения и окончания генерации. Формула (2) справедлива при больших уровнях превышения энергии накачки над ее пороговым значением ($\theta \gg 1$). Учитывая, что $\Delta n/n_0$ в ОКГ на гранате с примесью неодима обычно много меньше единицы, из формул (1) и (2) можно найти:

$$\frac{\tau_{32}}{\tau_{эфф}} = \left(1 - \frac{\Delta n}{n_0}\right) \frac{\omega(t_2)\tau_{32}}{\int_0^{t_n} \omega(t)dt}. \quad (3)$$

В настоящей работе экспериментально определялось отношение $\tau_{32}/\tau_{эфф}$ подставлением измеренных величин $\omega(t_2)$ и $\int_0^{t_n} \omega(t)dt$ в формулу (3).

Исследования проводили на ОКГ с кристаллами ИАГ: Nd^{3+} длиной 80 и диаметром 6 мм, который работал в режиме свободной генерации. Накачку осуществляли импульсной лампой ИФП—800, с длительностью импульса $\sim 300 \mu\text{сек}$. Резонатор состоял из плоскопараллельных зеркал с коэффициентом отражения для выходного зеркала $\sim 93,8\%$.

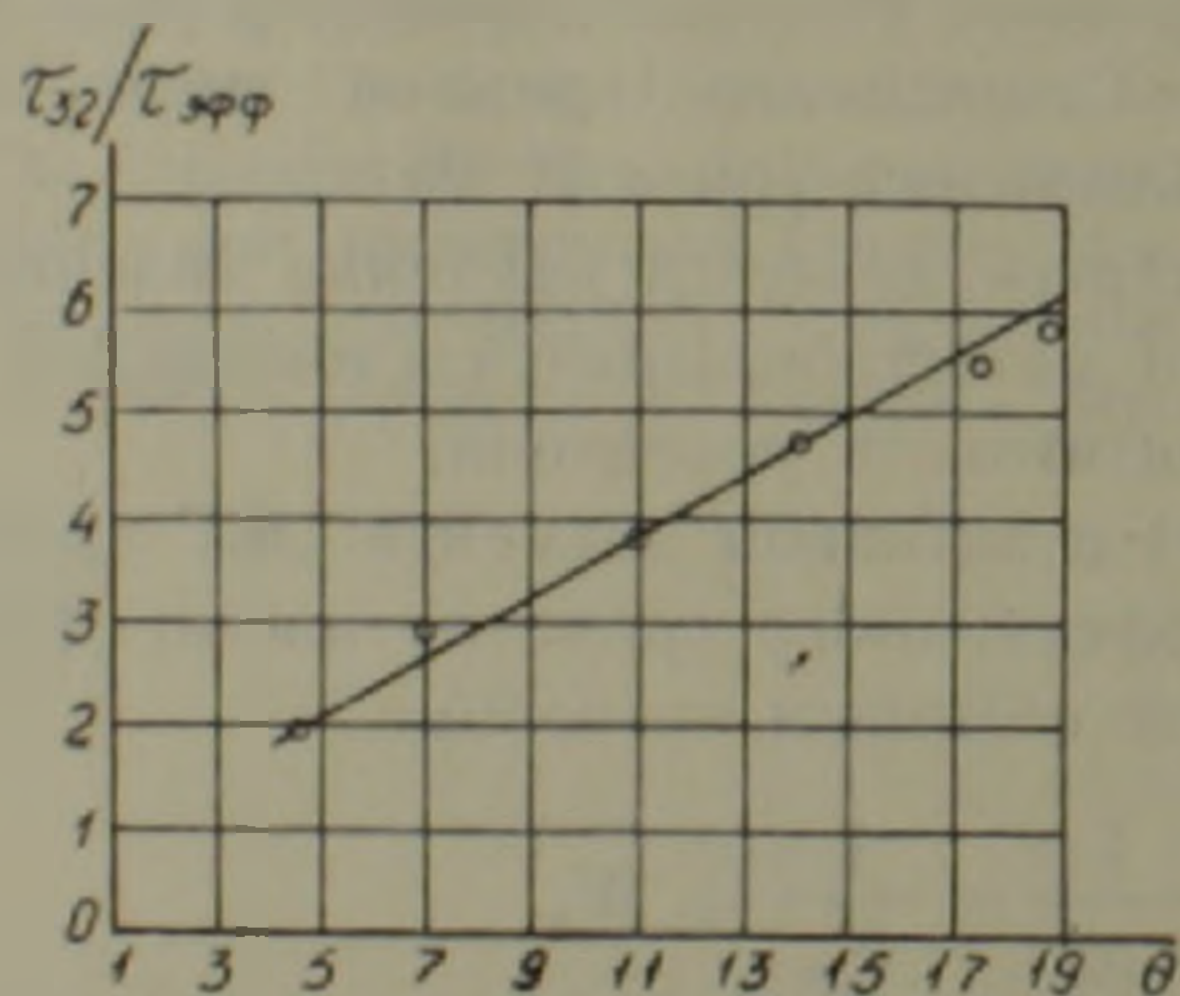


Рис. 1. Зависимость эффективного времени жизни верхнего рабочего уровня ${}^4F_{3/2}$ от уровня накачки

Величины $\omega(t_2)$ и $\int_0^{t_n} \omega(t)dt$ вычисляли по осциллограммам формы импульса накачки, на которые накладывались генерационные пички. Эксперименты проводили при различных уровнях накачки θ . Значение $\Delta n/n_0$ принималось равным 0,3 (¹³). На рис. 1 изображен график зависимости $\tau_{32}/\tau_{эфф}$ от θ при больших уровнях накачки. Видно, что время жизни метастабильного уровня за счет УСИ уменьшается до $\sim 6,5$ раз, что соответствует значению $W_1 = 1,8 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$.

Экстраполяция экспериментальной кривой в область малых θ показывает, что при значении $\theta = 1/\tau_{\text{эфф}}$ становится равным τ_{32} , что согласуется с начальными условиями, принятыми при выводе формулы (2).

2. Перейдем к рассмотрению влияния УСИ на к.п.д. (η) генератора, который определяется как отношение выходной энергии U_z к энергии накачки U_n . В предположении прямоугольной формы импульса накачки, выражение, определяющее выходную энергию, записывается в виде

$$U_z = P(\tau_n - t_n), \quad (4)$$

где τ_n — длительность импульса накачки, P — мощность выходного излучения, которая с учетом УСИ имеет вид

$$P = \frac{h\nu_{32}n_0V}{\tau_{32}(\beta + \beta_z)/\beta_z} \left[k - \left(k + \frac{\tau_{32}}{\tau_{\text{эфф}}} \right) \frac{\Delta_n}{n_0} \right], \quad (5)$$

где ν_{32} — частота индуцированного излучения, V — объем активного элемента, β — коэффициент нерезонансных потерь, β_z — потери на излучение, $k = W_{12}\tau_{32}$, W_{12} — вероятность вынужденного перехода в единицу времени из основного состояния на верхнее под действием энергии импульса накачки. Величины U_n и k можно записать в виде:

$$U_n = U_n\theta, \quad k = k_n\theta, \quad (6)$$

где U_n , k_n характеризуют соответственно пороговую энергию и пороговую мощность накачки. k_n определяется из выражения (5) при $P=0$. Время возникновения генерации

$$t_n = \frac{\tau_{32}}{k+1} \ln \frac{k}{k - (k+1)(\Delta_n/n_0)}$$

при $\Delta_n/n_0 < 1$ запишется в виде

$$t_n = \frac{\tau_{32}}{\theta} \left(1 - \frac{\Delta_n}{n_0} \right). \quad (7)$$

Принимая во внимание формулы (4)–(7), выражение для η можно записать следующим образом:

$$\eta = \eta_0 \frac{\theta - \tau_{32}/\tau_{\text{эфф}}}{\theta} \left(\frac{\tau_n}{\tau_{32}} - \frac{1 - \Delta_n/n_0}{\theta} \right), \quad (8)$$

где

$$\eta_0 = \frac{h\nu_{32}n_0V}{U_n(\beta + \beta_z)/\beta_z} \frac{\Delta_n}{n_0},$$

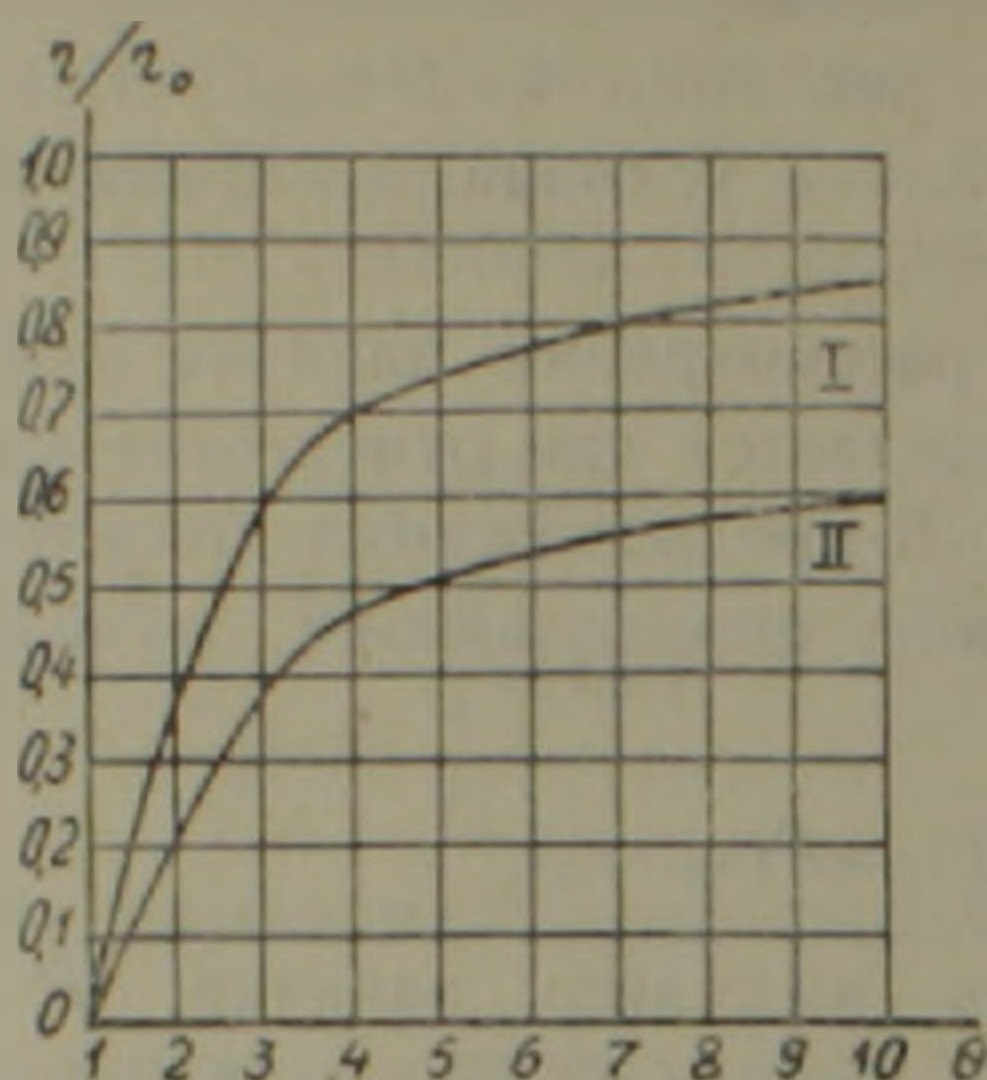


Рис. 2. Зависимость к. п. д. ОКГ на ИАГ: Nd от уровня накачки: I—расчетная кривая, без учета УСИ, II—экспериментальная

На рис. 2 приведены зависимости η от θ . Кривая I (расчетная) соответствует $\eta(\theta)$ без учета $W_1(\tau_{\phi\phi} = \tau_{32})$, а II—экспериментальная. Она строилась с использованием рис. 1. Видно, что при больших превышениях энергии накачки над ее пороговым значением УСИ приводит к уменьшению максимального к.п.д. генератора в 1,4 раза.

Авторы выражают благодарность профессору чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляну и Ю. Г. Туркову за полезные обсуждения

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԱՆԴՐԻԱՍՅԱՆ, Ռ. Բ. ԿՈՍՏԱՆՅԱՆ

Ուժեղացված ինՖրադեղական ճառագայթման ազդեցությունը $YAG:Nd^{3+}$ ՕԲԴ-ի ուղղ ընդարձակման վրա

Աշխատանքում փորձնականորեն ուսումնասիրված է ալյումինա-իտրումային նոնաթարում նեոդիումի իոնների ${}^4F_{3/2}$ մեթասթաբիլ մակարդակի կյանքի տևողության և օպտիկական զենեքատորի էֆեկտիվության վրա ուժեղացված ինքնաբերական ճառագայթման ազդեցությունը:

Բերված է նշված մակարդակի կյանքի տևողության և զենեքացիայի էֆեկտիվության կախվածությունը զրգոման էներգիայի մեծությունից: Ցույն է տրված, որ ուժեղացված ինքնաբերական ճառագայթման առկայության հետևանքով ${}^4F_{3/2}$ մակարդակի կյանքի տևողությունը կարող է կարճանալ մոտ 6,5 անգամ, իսկ զենեքացիայի էֆեկտիվությունը՝ փոքրանալ 1,4 անգամ:

ЛИТЕРАТУРА — ЧРЦЦЦПРДЗОРУ,

¹ Ю. А. Ананьев, А. А. Мак, Б. М. Седов, ЖЭТФ, 7, 48 (1965) ² Ю. А. Ананьев, И. И. Балашов, А. А. Мак, ДАН СССР, 166, 825 (1966) ³ Б. А. Ермаков, А. В. Лукин, А. А. Мак, «Оптика и спектроскопия», 18, 353, 1965 ⁴ J. A. Fleck, J. Appl. Phys., 36, 1301 (1965). ⁵ П. В. Елютин, ЖЭТФ, 43, 2407 (1973) ⁶ В. И. Мэрзов, «Оптика и спектроскопия», 21, 230 (1966) ⁷ И. И. Розанов, «Оптика и спектроскопия», 39, 724 (1975) ⁸ В. И. Марин, В. И. Никитин, М. С. Соскин, А. И. Хижняк, «Квантовая электроника», 2, 1340 (1975) ⁹ F. J. McClung, R. W. Hellwarth, Proc. IEEE, 51, № 1, 46 (1963) ¹⁰ В. К. Конюхов, Л. А. Кулевский, В. М. Прохоров, ДАН СССР, 154, 1072 (1964) ¹¹ М. Д. Галанин, З. А. Чижикова, «Оптика и спектроскопия», 17, 402 (1964) ¹² А. Л. Микаэлян, М. Л. Тер-Микаэлян, Ю. Г. Турлов, Оптические квантовые генераторы на твердом теле, Изд. «Советское радио», М., 1967 ¹³ А. Л. Микаэлян, В. М. Гардашьян, В. В. Дьяченко, А. Н. Филатов, П. И. Царев, «Квантовая электроника», № 4 (16), 13 (1973).

УДК 621.382.3

ФИЗИКА

Чл.-корреспондент АН Армянской ССР Г. М. Авакьянц,
 М. В. Минасян, С. А. Саркисян

Параметрический стабилизатор напряжения на основе мощного высоковольтного биполярного транзистора

(Представлено 11/X 1978)

Потребности техники привели в настоящее время к расширению производства мощных полупроводниковых приборов и к разработке новых их типов. Большой интерес представляют, в частности, мощные высоковольтные транзисторы и высоковольтные стабилитроны на большие токи. Однако ввиду специфики своей вольтамперной характеристики и преимущественного применения в цепях постоянного тока высоковольтные стабилитроны на большие токи подвержены значительному перегреву рассеиваемой мощностью $W_{\text{расс}} = U_{\text{ст}} I_{\text{ст}}$, что сдерживает их разработку. На рис. 1 изображена качественная кривая

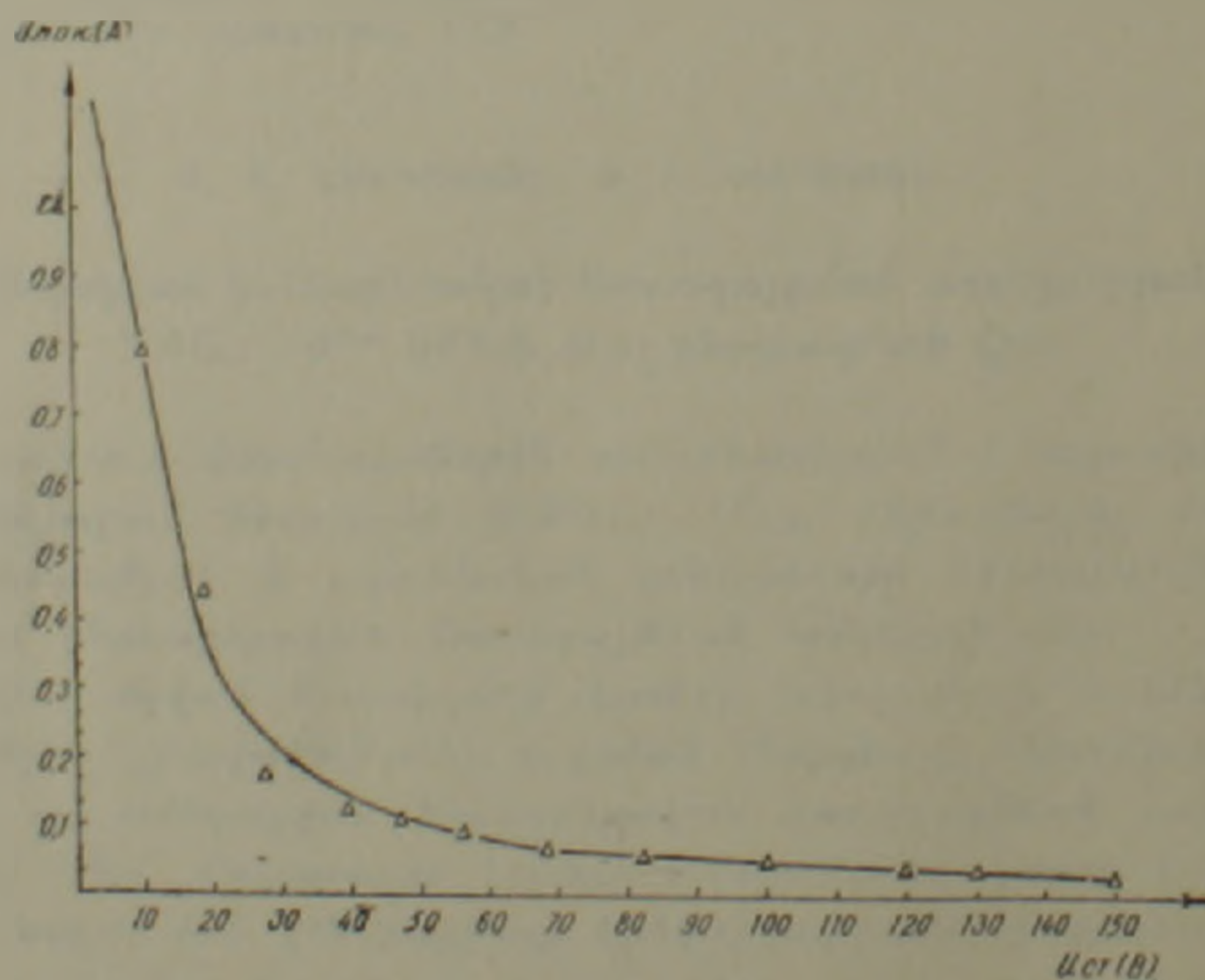


Рис. 1. Зависимость максимального тока стабилитронов от напряжения стабилизации

зависимости максимального тока стабилизации существующих мощных стабилитронов отечественного производства от напряжения стабилизации, которая отражает существенный спад этого тока с повышением напряжения.

В настоящей статье рассматривается работа мощного транзистора в простой схеме (рис. 2), позволяющая получить хорошую стабилизацию напряжения постоянного тока, при токах нагрузки, на порядок превышающих максимальный ток применяемого стабилитрона. При этом обеспечивается высокая надежность устройства при существенном понижении его выходного динамического сопротивления. Схему можно использовать для осуществления стабилизаторов на дискретных элементах или в интегральном исполнении.

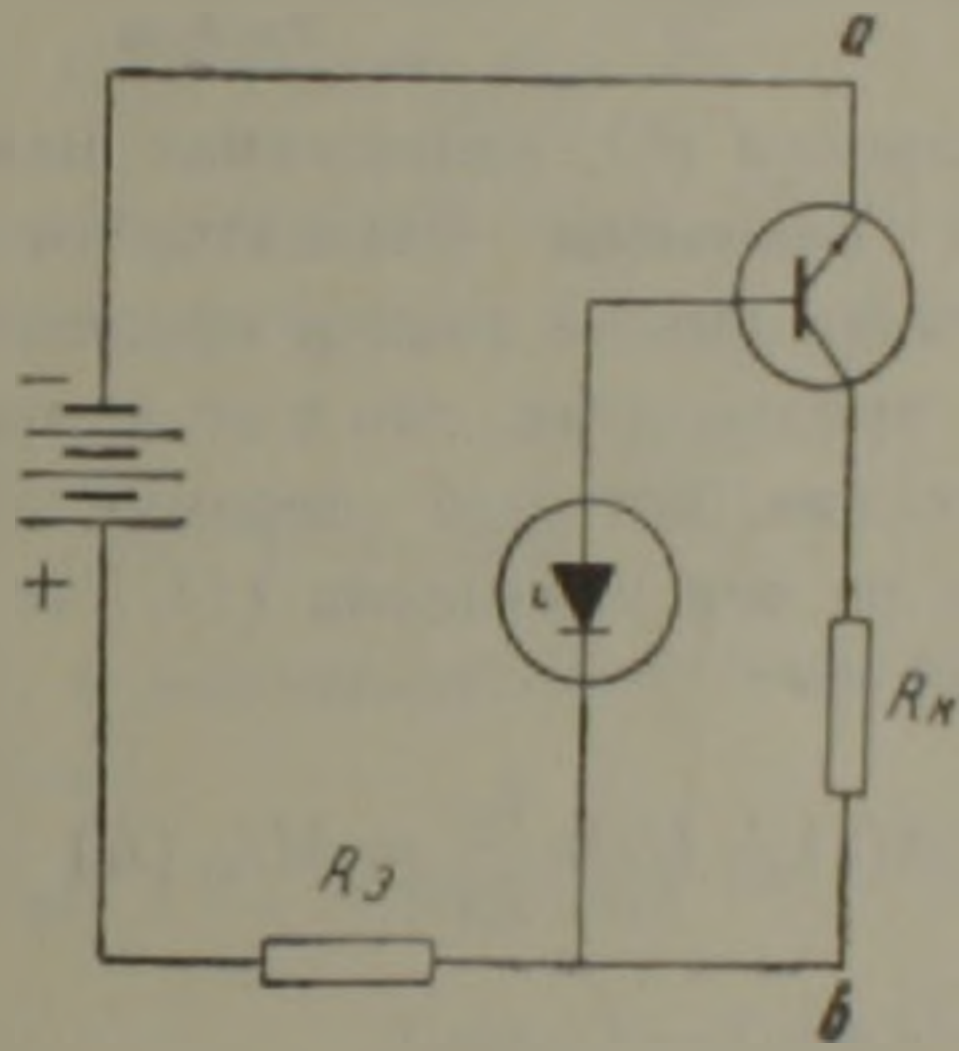


Рис. 2. Схема подключения элементов стабилизатора

Стабилизация осуществляется при входном напряжении $|E| > U_{ст}$, где $U_{ст}$ — напряжение стабилизации стабилитрона, прикладываемое в запирающей полярности к базе транзистора. Разность $E - U_{ст}$ приводит к прямому смещению перехода эмиттер — база, и по коллектору течет ток

$$I_k = \alpha_{\Lambda 0} I_{S10} (e^{U_{\Lambda 0}/U_T} - 1) + I_{k0}. \tag{1}$$

Здесь I_{S10} и $U_{\Lambda 0}$, соответственно, ток насыщения и напряжение на переходе эмиттер — база, $U_T = kT/q$ — термический потенциал, $\alpha_{\Lambda 0} I_{S10}$, без учета эффектов больших инжекций дается формулой ⁽¹⁾

$$\alpha_{\Lambda 0} I_{S10} = \frac{qn_i^2 D_{p0} S_b}{\int_0^{w_0} N(x) dx} = \frac{(qn_i)^2 D_{p0} S_b}{Q_0}, \tag{2}$$

Q_0 — полный заряд единицы площади диффундировавших примесей в области активной базы.

Преобразуя уравнение (1) и решая относительно $U_{\Lambda 0}$, получаем

$$U_{\Lambda 0} = U_T \ln \left(1 + \frac{I_k - I_{k0}}{\alpha_{\Lambda 0} I_{S10}} \right). \tag{3}$$

Как видно из рис. 2, напряжение между точками a и b выражается

$$U_{ab} = U_{ct}(I_0) + U_{\phi}, \quad (4)$$

где $U_{ct}(I_0)$ — стабилизированное напряжение, поданное на базу, которое, вообще говоря, есть функция от тока базы I_0 .

Подставив значение U_{ϕ} из (3) в (4), получаем

$$U_{ab} = U_{ct}(I_0) + U_T \ln \left(1 + \frac{I_k - I_{k0}}{\alpha_{N0} I_{S10}} \right). \quad (5)$$

В случае $U_{\phi} \gg U_T$, учитывая также, что $I_k \gg I_{k0}$, вместо (5) будем иметь:

$$U_{ab} = U_{ct}(I_0) + U_T \ln \frac{I_k}{\alpha_{N0} I_{S10}}. \quad (6)$$

Как видно из уравнения (6), напряжение между точками a и b очень слабо зависит от величины коллекторного тока I_k . Так, если допустить 200-кратное перекрытие тока в пределах от $I_{k1} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ А}$ до $I_{k2} = 1,6 \text{ А}$ (заранее предполагая, что в этих пределах отсутствуют эффекты большой инжекции, которые несомненно влияли бы на величину $\alpha_{N0} I_{S10}$, а также на вид уравнения (1), то разброс U_{ab} будет равен

$$\Delta U_{ab} = \Delta U_{ct}(I_0) + U_T \ln \frac{I_{k2}}{I_{k1}} = \Delta U_{ct}(I_0) + 0,1413, \quad \text{где}$$

$$\Delta U_{ct}(I_0) = U_{ct}(I_{0_2}) - U_{ct}(I_{0_1}).$$

Здесь мы предполагали также, что изменение температуры невелико*.

Выходное динамическое сопротивление схемы определяется дифференцированием уравнения (6) по току

$$R_a = \frac{dU_{ab}}{dI_k} = \alpha_{N0} \left(\frac{dU_{ct}(I_0)}{dI_k} + \frac{U_T}{I_k} \right) = \alpha_{N0} \left(\frac{R_{act}}{\beta_N} + \frac{U_T}{I_k} \right). \quad (7)$$

Здесь $\beta_N = \frac{dI_k}{dI_0}$ — малосигнальный коэффициент усиления транзистора, который связан со статическим коэффициентом усиления известным соотношением (2) $\beta_N = \frac{B_{ct}}{1 - \frac{I_k - I_{k0}}{B_{ct}} \frac{dB_{ct}}{dI_k}}$, R_{act} — диффе-

ренциальное сопротивление стабилитрона в области рабочих значений тока базы. При выводе (7) мы предполагали также, что U_T не зависит от I_k .

* Как будет показано ниже (см. рис. 4), с увеличением значений тока и мощности $I_{ct} I_{ct} = W$ все большая часть последней «пересбрасывается» транзистором на базальное сопротивление в коллекторной цепи, ввиду чего сам транзистор работает в облегченном тепловом режиме.

Как видно из (7), если для дифференциального сопротивления стабилитрона допустить значение $R_{act} \approx 10$ ом, как у обычных кремниевых стабилитронов (малой мощности) (3), а для усиления транзистора $\beta_N = 50$, то выходное динамическое сопротивление схемы уже при токах $I_k = 0,1$ А оказывается меньше половины ома.

При больших значениях тока стабилизации второй член в уравнении (7) становится пренебрежимым по сравнению с первым и величина R_d обуславливается значениями R_{act} и β_N .

Напряжение U_{ab} слабо зависит и от температуры. С увеличением температуры увеличивается ток α_{NO}/S_{10} и термический потенциал U_T . Как видно из (2), главной причиной изменения α_{NO}/S_{10} является изменение n_i от температуры. Подставляя значение n_i , выразим тепловой ток в следующем виде:

$$I_{S10}(T) = I_{S10}^*(0) e^{-\frac{U_s}{U_T}},$$

где U_s — потенциал запрещенной зоны, $I_{S10}^*(0)$ содержит величины, мало зависящие от температуры. В общем случае (4)

$$I_{S10}(T) = I_{S10}(0) e^{-\frac{\theta_T U_s}{U_T}}, \quad (8)$$

где коэффициент θ_T в зависимости от температурного диапазона лежит в пределах 0,5 ÷ 1.

Подставляя $I_{S10}(T)$ из выражения (8) в (6) и логарифмируя, получаем

$$U_{ab} = U_{ct}(I_0) + U_T \ln \frac{I_k}{\alpha_{NO} I_{S10}(0)} + \theta_T U_s. \quad (9)$$

Здесь $U_T \sim T$, а ток $I_{S10}(0)$ и потенциал U_s практически не зависят от температуры. Таким образом, температурный коэффициент выходного напряжения схемы (ТКН)

$$\varepsilon = \frac{\Delta U_{ab}}{\Delta T} = \frac{\Delta U_{ct}(I_0)}{\Delta T} + \varepsilon_{ab} = \varepsilon_{ct} + \varepsilon_{ab}, \quad (10)$$

где ε_{ct} и ε_{ab} — температурные коэффициенты напряжения применяемого стабилитрона и падения напряжения на переходе эмиттер—база, соответственно. Полагая $\theta_T = 1$, $U_s = \text{const}$, $\ln \frac{I_k}{\alpha_{NO} I_{S10}(0)} = \text{const}$ и дифференцируя U по T , легко получить ТКН перехода эмиттер—база в виде

$$\varepsilon_{ab} = \frac{U_{ab} - U_s}{T} < 0, \text{ так как } U_{ab} < U_s.$$

ТКН кремниевых стабилитронов с лавинным пробоем, т. е. сравнительно высоковольтных стабилитронов, положительно (4). Следовательно, при указанном подключении элементов ТКН схемы по абсолютной величине оказывается меньше, как это следует из (10).

Важное преимущество схемы связано с уменьшением $U_{кз}$ от тока коллектора, отраженным на рис. 4. С увеличением тока эмиттера выходное напряжение $U_{аб}$ перераспределяется между выводами эмиттер—коллектор транзистора и сопротивлением R_k в цепи его коллектора, согласно соотношению

$$U_{кз} = U_{аб} - I_k R_k, \quad \text{где } I_k(U_{кз})$$

определяется по выходным коллекторным характеристикам транзистора. Экспериментальные точки на рис. 4 получены изменением входного напряжения E от значений $|E| \ll |U_{ст}|$ до $|E| > |U_{ст}|$. Параметрами служили значения $U_{ст}$ и R_k . Участок с отрицательным наклоном соответствует активной области на выходных характеристиках транзистора.

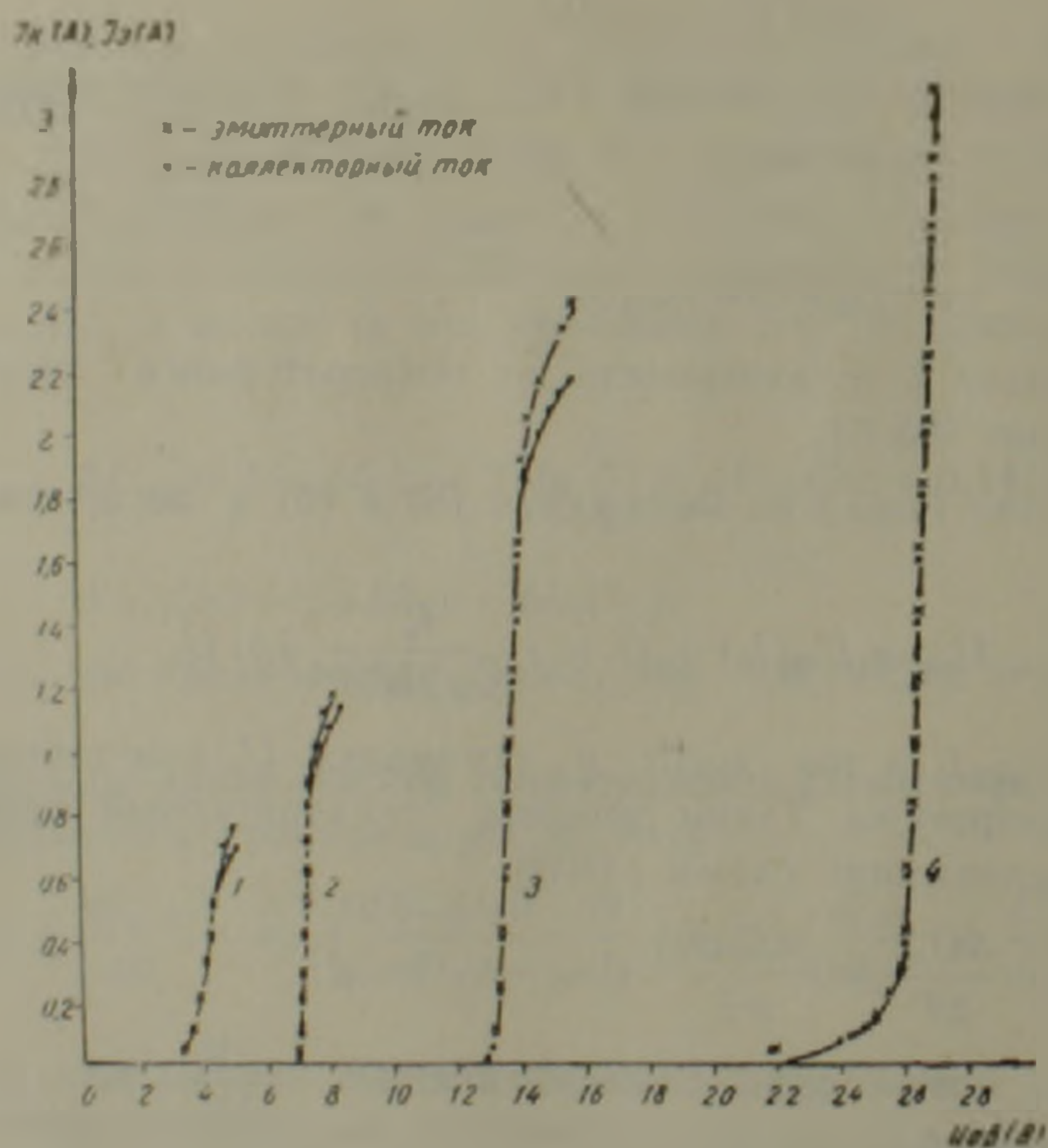


Рис. 3. Зависимость напряжения $U_{аб}$ от эмиттерного и коллекторного токов при различных значениях напряжения стабилизации $U_{ст}$ ($R_b = 2 \text{ о.м.}$, $R_k = 7 \text{ о.м.}$)

Такие условия работы, очевидно, предохраняют транзистор от перегрева при больших значениях тока, и подавляющая часть мощности постоянного тока, соответствующая выбранному значению напряжения стабилизации, рассеивается не стабилитроном и транзистором, а балластным пассивным элементом.

Нужно отметить, что проведенный анализ соответствует малым смещениям на переходе эмиттер—база, при больших токах имеет место эффект оттеснения эмиттерного тока, из-за чего выражение (1) принимает вид

$$I_k = a_{k0} / s_{10} e^{U'_{\text{эб}} / U_T}, \quad \text{где } U'_{\text{эб}} = U_{\text{эб}} - U_6.$$

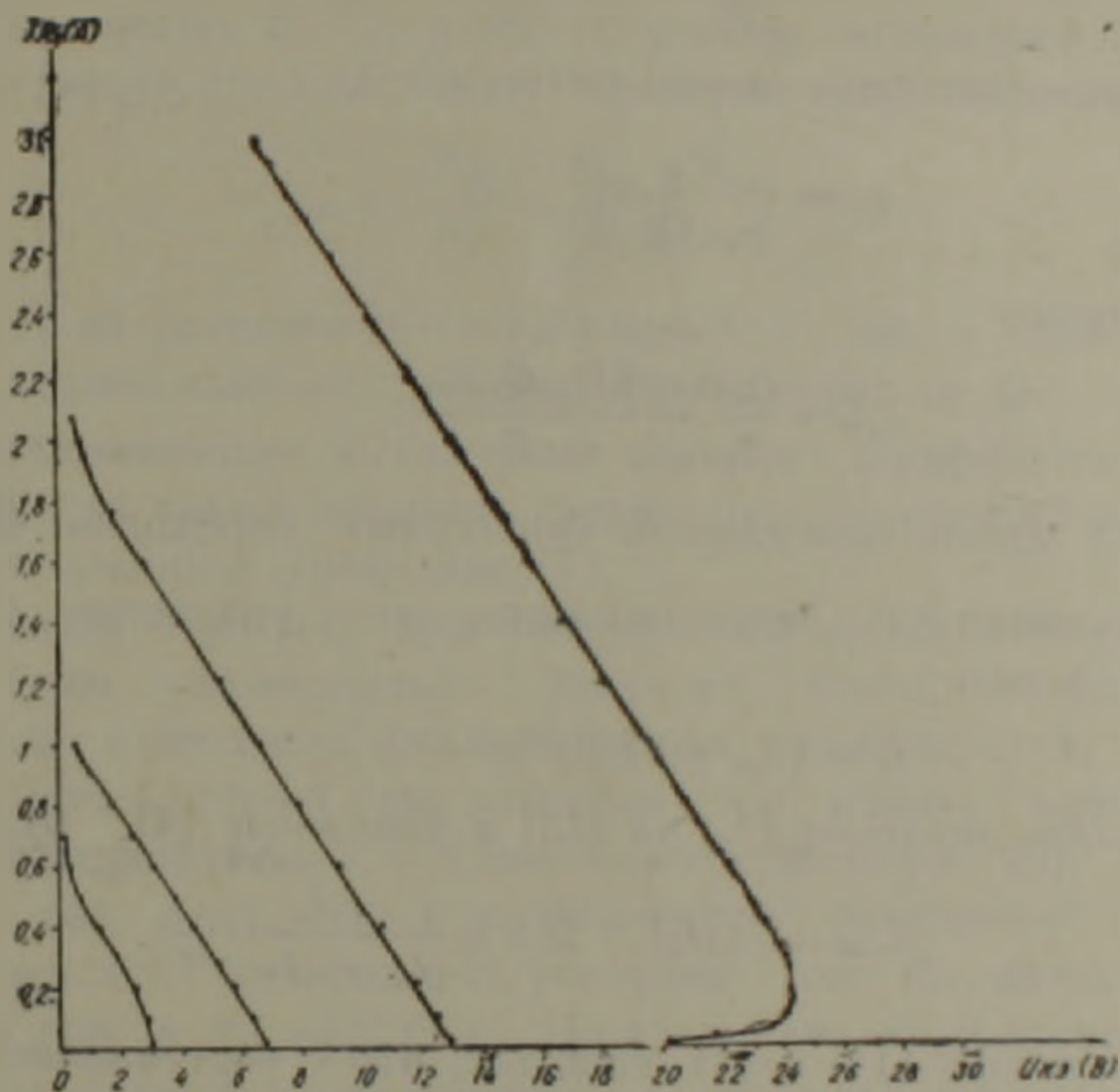


Рис. 4. Зависимость $U_{кэ}$ от коллекторного тока ($R_k = 7 \text{ о.м.}$)

Падение напряжения в базовой области U_6 связано с током соотношениями (1.5)

$$U_6 = U_T \ln \frac{v}{\sin v},$$

$$v \operatorname{tg} \frac{v}{2} = a = \frac{R I_6}{U_T},$$

$$R = \rho_6 \frac{l}{4nh W'_6}.$$

Здесь ρ_6 удельное сопротивление активной базовой области, n — число эмиттеров, l и h ширина и длина одного эмиттера, соответственно

$$I_6 = \frac{I_k}{B_{\text{сб}}}.$$

Можно показать, что когда $a \gg 1$, ток коллектора выражается через напряжение $U_{\text{эб}}$ соотношением

$$I_k = \left[\frac{2U_T}{R} B_{CT} \alpha_{NO} I_{S10} \right]^{1/2} e^{U_{ab}/2U_T}. \quad (11)$$

Из уравнения (1) в случае $U_{ab} \gg U_T$ и (11) мы можем найти те значения коллекторных токов, при которых проявляется оттеснение тока эмиттера:

$$I_{out} = \frac{2U_T}{R} B_{CT}. \quad (12)$$

Учитывая тот факт, что p_0 связаны с Q_0

$$p_0 = \frac{W_0}{l_{пб} Q_0},$$

можно получить

$$I_{out} = \frac{I_{out}}{S_s} = \frac{8D_{пб} Q_0 B_{CT}}{l^2},$$

где $S_s = n l h$ полная поверхность эмиттерных переходов, Q_0 связан с $\alpha_{NO} I_{S10}$ уравнением (2). Легко показать, что уравнение (11) можно переписать в виде

$$I_k = (I_{out} \alpha_{NO} I_{S10})^{1/2} e^{U_{ab}/2U_T}. \quad (13)$$

Подставив значение U_{ab} из (13) в уравнение (4), будем иметь

$$U_{ab} = U_{CT}(I_0) + 2U_T \ln \frac{I_k}{(I_{out} \alpha_{NO} I_{S10})^{1/2}}. \quad (14)$$

Из уравнений (14) и (7) очевидно, что с наступлением оттеснения эмиттерного тока выходное динамическое сопротивление в отдельных случаях может вдвое превышать ранее полученное значение.

Проверка работоспособности схемы (рис. 2) и экспериментальное исследование ее стабилизирующих свойств проведены на серийном планарном $n-p-n$ транзисторе типа КТ-902А при различных значениях сопротивлений R_k , R_s и при различных базовых напряжениях U_{CT} , задаваемых кремниевыми стабилитронами серийного производства*.

На рис. 3 показаны экспериментально полученные зависимости U_{ab} от эмиттерного и коллекторного токов при различных значениях базового напряжения $U_{CT}(I_0)$. Как видно, при различных значениях базового напряжения поведение U_{ab} аналогично до некоторого максимального значения тока I_{kmax} напряжение U_{ab} весьма слабо меняется, затем появляется резкая зависимость от I_k . При данных значениях R_k и R_s мы можем посчитать ток I_{kmax} , ограничивающий сверху рабочий участок параметрической стабилизации схемы. Со стороны входа имеем

* Первоначально напряжение на базу подавалось от стабилизированных мало-мощных источников регулируемого напряжения постоянного тока.

$$E = I_k R_s + I_k R_k + U_{ст} \quad (15)$$

Учитывая, что при токе $I_{к\max}$ падение напряжения на транзисторе $U_k \approx 0$ или $U_k \ll I_k R_k$, из (15) получаем:

$$I_{к\max} = \frac{E}{R_s/2\Delta 0 + R_k} \quad \text{или} \quad I_{к\max} = \frac{E}{R_s + 2\Delta 0 R_k}.$$

Ток $I_{к\max}$, очевидно, соответствует наступлению насыщения в транзисторе при данных E , $U_{ст}$ и R_k . С ростом задаваемых значений $U_{ст}$ токи $I_{к\max}$ растут приблизительно пропорционально $U_{ст}$:

$$I_{к\max} \approx \frac{U_{до}}{R_k} \approx \frac{U_{ст}}{R_k},$$

что следует из равенств (6) и (15) при $U_k \ll I_k R_k$ и хорошо проявляется в экспериментальных данных, приведенных на рис. 3.

Экспериментально выявленные значения дифференциального сопротивления R_d также хорошо совпадают с теоретическими, вычисленными с помощью уравнения (7).

Как следует из (14), при наступлении эффекта оттеснения R_d должно было увеличиваться. Значение токов, после которых проявлялось оттеснение в используемых транзисторах, в активном режиме было $I_k \gtrsim 1,4 \text{ А}$ (эти значения мы можем оценить двумя путями: непосредственно — с помощью уравнения (12), и косвенно, учитывая тот факт, что с наступлением оттеснения эмиттерного тока статический коэффициент усиления тока $B_{ст}$ начинает уменьшаться по закону $B_{ст} \sim I_k^{-2}$ (6)). Но как видно из графиков (рис. 3), при токах $I_k \gtrsim 1,4 \text{ А}$ увеличения R_d не наблюдается. $R_d \approx 0,3 \text{ ом}$ (кривая 4) при токе $I_k = 1,5 \text{ А}$. Причиной этому, по-видимому, большие значения дифференциальных сопротивлений примененных стабилитронов.

Действительно, для кривой 4 (рис. 3) при токе $I_k = 1,5 \text{ А}$ сопротивление стабилитронов было $\approx 100 \text{ ом}$; если учесть также, что β_k при этом равен 35, то получаем:

$$R_d(I_k = 1,5 \text{ А}) \approx 0,28 + 0,03 = 0,31 \text{ ом}.$$

т. е. первый член в уравнении (7) намного больше второго, и мы в опыте не должны были наблюдать увеличения R_d , обусловленного эффектом оттеснения тока.

В конце нужно отметить, что более сложную зависимость $I_k = f(U_{до})$ можно получить при учете расширения базовой области при больших приложенных напряжениях коллектор—база, но эти вопросы выходят за рамки настоящей статьи.

Լարման պարամետրիկ կայունացուցիչ հզոր բարձրավորտ բիպոլյար
տրանզիստորի հիման վրա

Աշխատանքում դիտարկված է հզոր բարձրավորտ տրանզիստորի և կի-
սահադորդչային ստաբիլիտրոնի համակցման մի տարբերակ, որը ապա-
հովում է հաստատուն հոսանքի լարման կայունացում բավականին լայն
սահմաններում (ընդհուպ մինչև տրանզիստորի մաքսիմալ *U_{срmax}* լար-
ման արժեքը)։ Ընդամին ստաբիլիտրոնի հոսանքի աշխատանքային տիրույ-
թի մաքսիմումը գերազանցվում է տրանզիստորի ստատիկ ուժեղացման
գործակցի (*B_{ст}*) կարգով։ Փոքրազդանշանային ուժեղացման գործակցի
(3) կարգով նվազում է ելքային դիֆերենցիալ դիմադրությունը։ Ելքային
լարման ջերմաստիճանային գործակիցը նույնպես նվազում է։

Սխեմայի առանձնահատկությունն է լարման ավտոմատիկ վերաբաշ-
խումը տրանզիստորի ու նրա օմական բևեռի միջև, որի շնորհիվ ղգալի
W — *U_{ср}* հզորության ցրումը տեղի է ունենում առանց ստաբիլիտրո-
նի և տրանզիստորի ջերմային ծանրաբեռնման։

Ստացված են դիտարկվող պարամետրիկ կայունացուցչի աշխատանքի
բնութագրող բանական առնչությունները։ Վերլուծված է տրանզիստորում
էմիտերային հոսանքի բուլավորման երևույթի ազդեցությունը կայունա-
ցուցչի ելքային պարամետրերի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. Rey, J. P. Bailbe, Solid st. Electronics, v. 17, 10, 1974. ² Э. Столярский, Измерения параметров транзисторов, «Сов. радио», М., 1976. ³ Источники электропитания на полупроводниковых приборах. Проектирование и расчет. Под редакцией С. Л. Додика и Е. И. Галыперина, «Сов. радио», М., 1969. ⁴ И. П. Степаненко, Основы теории транзисторов и транзисторных схем, «Энергия», М., 1973. ⁵ G. Rey, Solid st. Electronics, 12, 645, 1969. ⁶ В. Г. Колесников, В. И. Никитин, В. Ф. Сы-
норов, Б. К. Петров и др. Кремниевые планарные транзисторы, «Сов. радио»,
М., 1973. ⁷ J. Olmstead, W. Einthoven, S. Ponczak and P. J. Kannan, R. C. A.
Rev. 32, 221 (1971).

УДК 631.465

АГРОХИМИЯ

А. Н. Баграмян, С. А. Абрамян, А. Ш. Галстян

Об иммобилизации ферментов почвой

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 23/IX 1978)

Изучен процесс иммобилизации ферментов почвой в естественных условиях. Исследование проводилось на мелиорированных солонцах-солончаках. Активность ферментов почвы определялась по А. Ш. Галстяну (¹). Активность инвертазы выражалась в миллиграммах глюкозы, уреазы—мг NH_3 на 1 г почвы за сутки, фосфатазы—мг Р на 100 г почвы за 30 мин, дегидрогеназ—мг трифенилформаза (ТФФ) на 10 г почвы за сутки, АТФазы—мг Р на 100 г почвы за час, каталазы—см³ O_2 на 1 г почвы за 1 мин.

Установлено, что иммобилизованные ферменты почв сравнительно устойчивы и длительное время сохраняют свою активность. Это позволяет рассматривать ее как биодиагностический показатель различных генетических типов почв (^{2,3}).

Изучение естественного процесса иммобилизации ферментов почвой связано с определенными методическими затруднениями (⁴). Подходящим объектом для этого являются мелиорированные солонцы-солончаки. Здесь за сравнительно короткий период времени возможно проследить за естественным ходом иммобилизации ферментов почвой при ее эволюции от гидроморфного солонцово-солончакового типа почвообразования к зональному лугово-бурому (⁵).

Мелиорированные почвы в начальный период эволюции до их сельскохозяйственного освоения по активности ферментов почти не отличаются от исходных солонцов-солончаков. Активность карбогидраз и фосфатазы в них не обнаруживается, а уреазы, дегидрогеназ, каталазы и АТФазы сильно подавлена (табл.). Отсутствие активности некоторых гидролаз и низкая—оксидоредуктаз в содовых солонцах-солончаках обусловлена условиями почвообразования. Эти почвы формировались на аллювиально-пролювиальных отложениях Араратской равнины при непосредственном воздействии близко залегающих минерализованных грунтовых вод и характеризуются малым содержанием органического вещества, суглинистым, глинистым механическим составом и весьма скудным растительным покровом, представленным галофитами (^{6,7}).

В содовых солонцах-солончаках повышенная щелочная реакция среды, содержание солей и насыщенность поглощающего комплекса натрием (до 80%) препятствуют процессу иммобилизации карбогидраз и фосфатаз, оптимум pH которых находится в кислом интервале. Остальные ферменты с оптимумом pH в щелочном интервале иммобилизуются очень слабо (²). После химической мелиорации, при которой активная реакция среды снижается до pH 8,0, содержание солей—0,2%, поглощенный натрий—2 мэкв и почти не меняется минералогическая и органическая часть этих почв (⁷), создаются оптимальные условия для иммобилизации ферментов.

Таблица

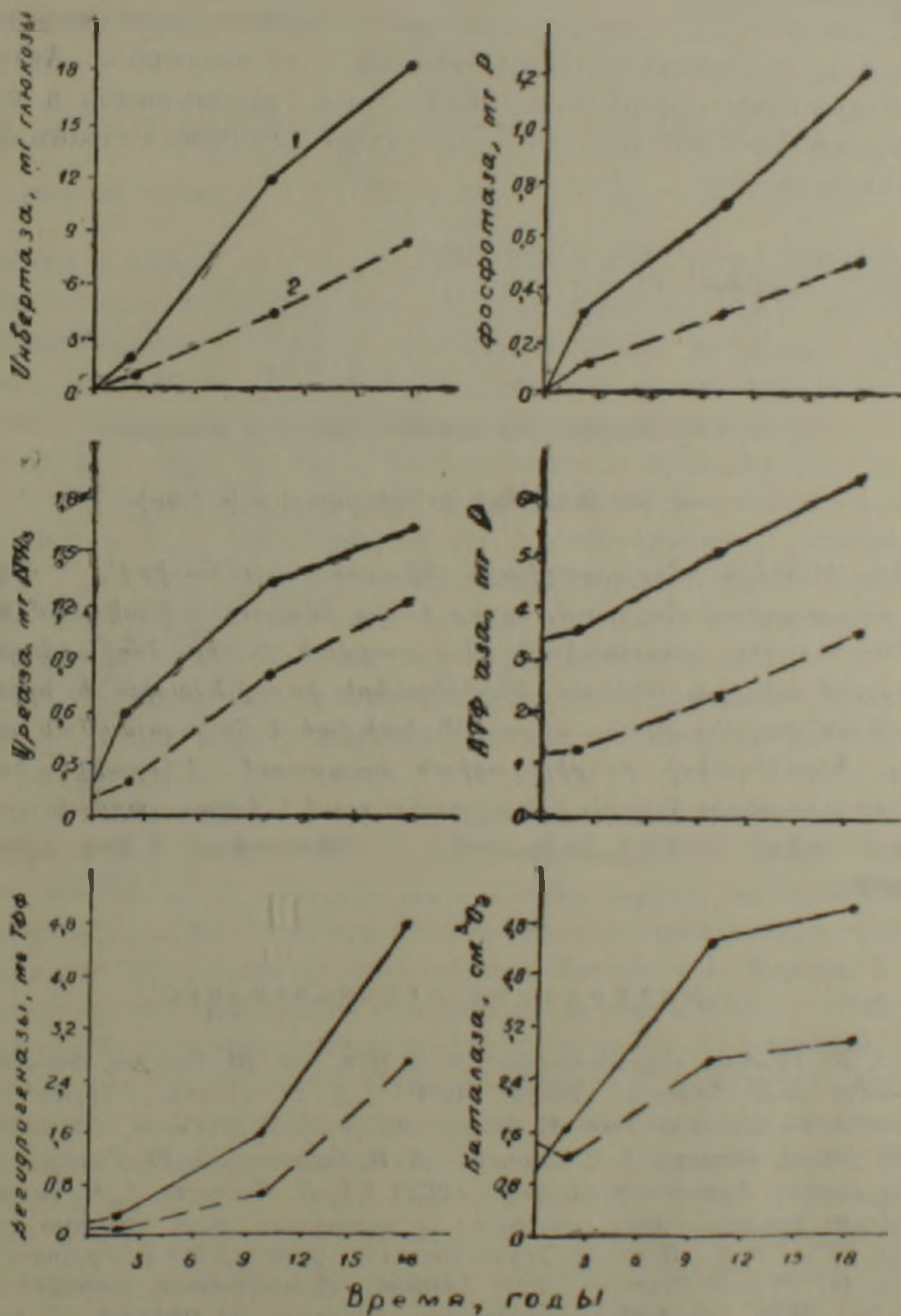
Активность ферментов содовых солонцов-солончаков до и после химической мелиорации (средние данные, n=6)

Почва	Глубина, см	pH. H ₂ O	Сумма солей, %	Гумус, %	Инвертаза, мг глюкозы	Фосфатаза, мг Р	Уреаза, мг NH ₃	Дегидрогеназы, мг Т.Ф.Ф	Каталаза, см ³ O ₂	АТФаза, мг Р
Немелиорированная	0—25	10.2	2.44	0.5	0.0	0.0	0.2	0.2	1.0	3.4
	25—50	10.0	1.67	0.4	0.0	0.0	0.2	0.3	2.0	0.5
	50—75	9.4	1.63	0.3	0.0	0.0	0.0	0.1	1.4	0.5
	75—100	9.1	1.21	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	1.6	0.5
Непосредственно после мелиорации	0—25	8.0	0.12	0.6	0.0	0.0	0.2	0.0	1.5	3.2
	25—50	7.9	0.16	0.4	0.0	0.0	0.1	0.0	1.6	0.5
	50—75	8.2	0.29	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	1.6	0.5
	75—100	8.5	0.32	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	1.5	0.3
Мелиорированная (10 лет освоения)	0—25	7.9	0.11	1.1	11.8	0.7	1.3	1.6	4.5	5.0
	25—50	8.0	0.14	0.7	4.0	0.3	0.9	0.6	2.6	2.1
	50—75	8.3	0.18	0.6	1.2	0.1	0.7	0.3	2.3	1.2
	75—100	8.6	0.18	0.4	0.7	0.1	0.4	0.2	1.4	1.1

Основным источником продуцирования ферментов в мелиорированных почвах являются возделываемые культуры: озимая пшеница, люцерна, персидский клевер, овощные, бахчевые, плодовые и т. д., а также микрофлора, интенсивно развивающаяся при освоении этих почв (⁸). Данные по иммобилизации ферментов в пахотном слое и профиле почвы в течение 18 лет освоения представлены на рисунке. В первые годы освоения мелиорированной почвы иммобилизация происходит лишь в пахотном слое, где в основном развиваются корни растений, микрофлора и накапливается органическое вещество. В дальнейшем она происходит по всему профилю почвы. В среднем за год освоения в пахотном слое активность иммобилизованной инвертазы составила около 1 мг глюкозы на 1 г почвы.

В иммобилизации внеклеточных ферментов почвой основными носителями являются глинистые минералы и гумусовые вещества. Они не растворимы в воде, отличаются высокой химической и биологиче-

ской стойкостью, обладают структурной прочностью, имеют значительную гидрофильность. Все это создает определенные условия, способствующие проницаемости и молекулярной иммобилизации ферментов почвой. Иммобилизация ферментов происходит за счет функциональных групп белковых молекул, не входящих в состав активного центра (¹). Носители ферментов почвы—глинистые минералы и гумусовые вещества—связывают их своими функциональными группами, активными кислотными и основными центрами образованием ковалентной свя-



Ход иммобилизации ферментов мелiorированной почвой 1—в слое 0—25 см.
2—0—100 см

зи между белковой молекулой и носителем. Иммобилизация ферментов за счет адсорбционной связи и механического удержания происходит весьма ограниченно. Опыты показали, что десорбция иммобилизованных ферментов с помощью различных вытеснителей практически невозможна и доказывает прочность ковалентной связи между ферментом и носителем. Последнее, по-видимому, обусловлено еще тем, что ферменты в почве иммобилизуются на высокоорганизованных структурных образованиях—минеральных, органических и органо-минеральных коллоидах.

Таким образом, в почве происходит иммобилизация внеклеточных ферментов, активность которых меняется в ее эволюции. Активность иммобилизованных ферментов может быть использована в качестве диагностического и индикационного показателя биологического фактора почвообразования.

Институт почвоведения и агрохимии
МСХ Армянской ССР

Ա. Ե. ԲԱՂՎԱԴՅԱՆ, Ս. Ա. ԱՐՐԻԶԱՄՅԱՆ, Ա. Շ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Հողում ֆերմենտների իմոբիլիզացիայի մասին

Ֆերմենտների իմոբիլիզացիայի ընթացքը ուսումնասիրվել է մեխորացված աղուտ-ալկալի հողերում, որոնք իրենց էվոլյուցիայի սկզբում մի շարք ֆերմենտներ չեն պարունակում: Ապացուցված է, որ հողի էվոլյուցիայի ընթացքում տեղի է ունենում ֆերմենտների իմոբիլիզացիա և նրանց ակտիվության փոփոխությունը սերտորեն կախված է հողագոյացման պայմաններից: Ֆերմենտների իմոբիլիզացիան նպաստում է նրանց կայունության բարձրացմանը հողում: Այն արտահայտում է հողագոյացման պրոցեսում կենսաբանական գործոնի մակարդակը և հանդիսանում է նրա ախտորոշող ցուցանիշը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Ш. Галстян, «Почвоведение», № 2, 1978. ² А. Ш. Галстян, Ферментативная активность почв Армении, Ереван, 1974. ³ А. Ш. Галстян, Труды Института почвоведения и агрохимии, вып. 12, Ереван, 1977. ⁴ J. D. McLaren, *Chemica Scripta*, 8, 1975. ⁵ С. А. Абрамян, А. С. Оганесян, А. Н. Баграмян, А. Ш. Галстян, «Биологический журнал Армении» т. 31, № 10 (1978). ⁶ Г. П. Петросян, А. И. Читчян, в сб. Материалы международного симпозиума по мелиорации почв содового засоления, Ереван, 1971. ⁷ Г. П. Петросян, Труды Института почвоведения и агрохимии, вып. 11, Ереван, 1977. ⁸ Г. П. Петросян, Л. А. Хачикян, «Биологический журнал Армении», т. 23, № 1 (1970). ⁹ О. Л. Поляновский, в кн. «Ферменты», М., 1964.

УДК 633.11.575.12

ГЕНЕТИКА РАСТЕНИЙ

Г. А. Саакян

О комбинационной способности пшеницы

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Бабаджаняном 13/II 1978)

Оценка и подбор пар для скрещивания занимают ведущее место в современной селекции. Компоненты скрещивания, наряду с комплексом селекционно-ценных признаков, должны обладать высокими комбинационными свойствами. В последнее время для оценки сортов по признаку комбинационной способности широко используют полные и неполные диалельные скрещивания. Результаты работ, проведенные с использованием таких анализов, позволяют оценить общую комбинационную способность (ОКС) и специфическую комбинационную способность (СКС) исходного материала, выявить характер наследования и наследуемости отдельных селекционно-ценных признаков и определить действия и взаимодействия генов в гибридном потомстве (¹⁻³).

В данном сообщении приводятся результаты изучения ОКС и СКС сортов озимой пшеницы различной генетической природы по основным хозяйственно-ценным признакам.

Исходным материалом для изучения комбинационной способности служили 60 межсортовых гибридов F_1 , полученных по схеме топкроссного скрещивания. В качестве материнских сортов использовали 15 сортов озимой мягкой пшеницы различного происхождения, а в качестве опылителя следующие сорта—тестеры: Безостая 1, Карлик 1, Кавказ, San-prospere. Гибриды F_1 и родительские сорта изучали в обычных полевых условиях в трехкратной повторности по 10—15 растений с площадью питания 10×20 кв. см. Оценку гибридов F_1 и родительских сортов проводили по следующим основным количественным показателям: высота растений, продуктивная кустистость, вес зерна с одного растения, число и вес зерна с одного колоса и вес 1000 зерен. Достоверность различий между гибридами определяли с помощью однофакторного дисперсионного анализа (¹⁰), анализ комбинационной способности—методом Гриффинга (модель IV), измененным Савченко (¹²).

Результаты дисперсионного анализа показали высокую достоверность генотипических различий ($P < 0.01\%$) между гибридами по всем изученным признакам, что послужило основанием для дальнейшей об-

работки данных по определению варiances комбинационной способности сортов (табл. 1).

Анализ варiances эффектов комбинационной способности, проведенный по всем изученным признакам, показал высокую существенность по ОКС ($P < 0.01\%$). По СКС существенность различий установлена только по следующим трем признакам: число и вес зерна с колоса и вес 1000 зерен (табл. 2).

Установлено также, что на долю ОКС приходилась наибольшая часть общей изменчивости по изученным признакам. Так, по признаку высоты растений ОКС (сортов и тестеров) составляла 1300,85, а СКС—лишь 1,18 или 99,52 и 0,48%, соответственно. По продуктивной кустистости ОКС—8,0, а СКС—0,45 или 90,39 и 9,61%, соответственно, по весу зерна с одного растения 19,42 и 1,10 и т. п.

Таблица 1

Дисперсионный анализ

Источник варьирования	Число степеней свободы	Средний квадрат					
		Высота растений	Продуктивная кустистость	Вес зерна		Число зерен с одного колоса	Вес 1000 зерен
				с одного растения	с одного колоса		
Общая	179	—	—	—	—	—	—
Вариантов	59	42,2**	3,40**	8,29**	0,10**	56,90**	0,40**
Случайное отклонение	118	15,1	1,20	2,74	0,04	15,10	0,02

** Существенно на 1%-ном уровне значимости

Таблица 2

Анализ варiances комбинационной способности

Источник варьирования	Число степеней свободы	Средний квадрат					
		Высота растений	Продуктивная кустистость	Вес зерна		Число зерен с одного колоса	Вес 1000 зерен
				с одного растения	с одного колоса		
ОКС сортов	14	432,75*	4,0**	8,42**	0,110**	47,80**	1,179**
ОКС тестеров	3	868,10**	4,00**	11,0**	1,160**	108,3**	1,280**
СКС	42	1,18	0,45	1,10	0,009*	10,3**	0,023**
Случайное отклонение	118	5,03	0,40	0,91	0,010	5,03	0,007**

* Существенно на 5%-ном уровне значимости

** Существенно на 1%-ном уровне значимости

Изучены сорта по отдельным хозяйственно-ценным признакам обладали различными эффектами ОКС. Так, например, по признаку высоты растений наиболее высокой ОКС обладали сорта Велютинум, Пименка, ППГ-186 и Velprize, то есть наиболее высокорослые из 15 изученных сортов. Однако по этому признаку наиболее ценными необходимо считать сорта, обладающие низкими показателями ОКС, так как низкорослость у пшениц является ценным селекционным показателем. К таким сортам можно отнести Gaines, NS 447, NS 64, Zibilula, Карлик 1, Фуноне. По этому признаку установлена полная положительная корреляция между ОКС и выраженностью признака изученных сортов.

По признаку продуктивной кустистости наиболее высокими эффектами ОКС отличались Gaines, Tascoza, Фуноне, NS 64, Карлик 1, по весу зерна с одного растения—NS 64, Gaines, Карлик 1, Фуноне, NS 447, по числу зерен с одного колоса—Baska, NS 64, NS 447, Карлик 1, Эритроспермум 636 и другие, по продуктивности колоса—Baska, NS 64, Фуно. NS 447. Необходимо отметить, что по комплексу хозяйственно-ценных признаков наиболее высокими ОКС отличались низкостебельные сорта. Такие сорта с успехом можно использовать в селекции как ценный исходный материал.

Во избежание больших затрат труда и времени по оценке комбинационной способности компонентов скрещивания многие исследователи старались найти корреляционную связь между выраженностью селекционно-ценных признаков, сортов и их комбинационной способностью. По этому вопросу мнения исследователей расходятся. Некоторые исследователи указывают на наличие положительной корреляции между урожайностью инбредных линий кукурузы и их комбинационной способностью, а по данным ряда других исследователей обнаружена слабая корреляция (11–12). Имеются примеры достаточно высокой положительной корреляции между урожайностью сортов пшеницы и их ОКС по урожайности (7–11).

В наших экспериментах степень выраженности определенных количественных признаков скрещиваемых компонентов весьма существенно отразилась на их гибридах F_1 . Коэффициенты корреляции (r) между выраженностью признаков сортов и их ОКС приведены в табл. 3, из которой видно, что существует высокая положительная корреляция между эффектами ОКС сортов и выраженностью следующих признаков: высота растений, продуктивная кустистость и вес 1000 зерен (0,90; 0,95 и 0,75 соответственно). По остальным изученным признакам: вес зерна с одного растения, вес и число зерен с одного колоса, достоверной корреляционной связи не установлено.

Несоответствие или отсутствие корреляционной связи между эффектом ОКС и выраженностью некоторых признаков можно объяснить тем, что сорта с одинаково выраженными признаками могут обладать различными потенциальными возможностями для проявления данного

Коэффициенты корреляции между выраженностью количественных признаков сортов и их ОКС

Признаки	$r \pm Sr$
Высота растений	$0,90 \pm 0,04^{***}$
Продуктивная кустистость	$0,95 \pm 0,02^{***}$
Вес зерна с одного растения	$0,20 \pm 0,22$
Вес зерна с одного колоса	$0,43 \pm 0,19$
Вес 1000 зерен	$0,75 \pm 0,10^{***}$

*** Существенно на 0,1 %-ном уровне значимости

признака. Чем выше генетическая потенциальная возможность проявления признака сортов, тем будет выше их комбинационная способность, так как в гибридном потомстве лимитирующие факторы, препятствующие полному проявлению признака, будут частично или полностью устранены генотипом компонентов скрещивания. Следовательно можно полагать, что в генотипе сортов с высокими ОКС имеются определенные редкие гены или блоки генов, не способные нормально синтезировать определенные метаболиты, необходимые для реализации потенциальных возможностей таких сортов. Последние легко дополняются генотипом скрещиваемых компонентов.

В результате изучения комбинационной способности многочисленных сортов озимой мягкой пшеницы установлено отсутствие корреляционной связи между ОКС сортов и эффектом гетерозиса у гибридов, полученных с их участием. Так, например, среди изученных нами сортов высокими эффектами ОКС обладали более высокорослые сорта, однако ни у одного гибридного сочетания с участием таких сортов не обнаружен эффект гетерозиса. По данным оценки комбинационной способности компонентов скрещивания невозможно прогнозировать получение гетерозисных гибридов, так как комбинационная способность — это критерий определения потенциальной возможности сорта и измеряется абсолютными показателями гибридов, полученных с его участием, а эффект гетерозиса гибридного потомства, как правило, измеряется по сравнению с лучшим исходным сортом. Часто гетерозисные гибриды по абсолютным показателям уступают негетерозисным гибридам. Аналогичные данные получены многими исследователями (24). Следовательно, можно утверждать, что задачей оценки исходного материала по признаку комбинационной способности является критерий не для прогнозирования получения гетерозисных гибридов, а для получения наиболее продуктивных гибридов.

По данным вариаис комбинационной способности, позволяющим разложить фенотипическую изменчивость на дисперсию генотипическую и паратипическую, вычислили коэффициенты наследуемости в широком (h) и узком смысле (h_1). Установлены довольно высокие коэффициенты наследуемости, как в широком, так и в узком смысле. Так как основная доля в общей фенотипической изменчивости обусловлена наследственной изменчивостью растений, следовательно отбор по всем изу-

ценным признакам в дальнейших расщепляющихся поколениях должен быть более эффективным.

Обобщение полученных экспериментальных данных по изучению комбинационной способности озимых мягких пшениц позволяет сделать некоторые предварительные выводы. Высокая доля вариантов ОКС в общей дисперсии по сравнению с СКС свидетельствует о том, что развитие селекционно-ценных признаков межсортовых гибридов F_1 в основном зависит не от сверхдоминирования аллельных генов, эффект которых невозможно закреплять в дальнейших поколениях, а от действия аддитивных генов, позволяющих аккумулировать их в одном гомозиготном генотипе. В селекции пшениц, с целью выведения новых, более продуктивных сортов, критерием для подбора пар должны быть высокая ОКС скрещиваемых компонентов. Успех отбора продуктивных гомозиготных генотипов с наибольшим числом благоприятно действующих аддитивных генов в потомстве таких гибридов будет намного выше, чем в потомстве непродуктивных. Оценка ОКС исходных сортов и гибридов F_1 по основным хозяйственно-ценным признакам является надежным критерием для рационального планирования подбора пар и ориентировочного прогнозирования эффективности селекции.

Институт земледелия МСХ Армянской ССР

Գ. Ա. ՍԱՀԱԳՅԱՆ

Ցորենի կոմբինացիոն ունակության մասին

Ծնողական ձևերի գիտականորեն հիմնավորված ընտրությունը եղել է և մնում է ժամանակակից սելեկցիայի առաջնահերթ խնդիրներից մեկը: Խաչաձևվող սորտերը սելեկցիոն արժեքավոր հատկանիշների հետ միասին պետք է օժտված լինեն նաև բարձր կոմբինացիոն ունակությամբ: Հողվածում բերված է փափուկ ցորենի աշնանացան մի շարք սորտերի քանակական հատկանիշների (բույսի բարձրություն, արդյունավետ թփակալման, բույսի հատիկների ելքի և կշռի և 1000 հատիկի կշռի) կոմբինացիոն ունակության արդյունքները ոչ լրիվ դիալել խաչաձևումների սխտեմում (Տոպկրոս):

Պարզվել է, որ ուսումնասիրված քանակական հատկանիշների զարգացման աստիճանը, միջսորտային հիբրիդային զուգակցություններում, հիմնականում պայմանավորված է ադդիտիվ (գումարվող) գենների գործունեությամբ: Գենների այդպիսի համագործակցության դեպքում, հետագա ճեղքավորվող հիբրիդային սերունդներում, կբարձրանա բարենպաստ գործող ադդիտիվ գեններով օժտված հոմոդիգոտ անհատների ընտրության հնարավորությունը: Լիյսպիսով, ծնողական ձևերի ընդհանուր կոմբինացիոն ունակության և հիբրիդների առաջին սերնդի ցուցանիշները հուսալի չափանիշներ են ցորենի սելեկցիայի էֆեկտիվության, կանխորոշման համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Р И Ц Ы П Р О З Р Ы

- ¹ В. К. Савченко, «Генетика», № 1, 1966. ² В. К. Савченко, Методики генетико-селекционного и генетического экспериментов. Изд. «Наука и техника», Минск, 1973.
- ³ Н. В. Турбин, В. К. Савченко, В. Е. Бормотов, Вопросы математической генетики. Изд. «Наука и техника», Минск, 1969. ⁴ Н. В. Турбин, Л. В. Хотылева и др., Вопросы математической генетики. Изд. «Наука и техника», Минск, 1969. ⁵ Н. В. Турбин, Л. А. Тарутина, Л. В. Хотылева, «Генетика», № 6, 1966. ⁶ Л. В. Хотылева, Л. А. Тарутина, Сб. «Генетика гетерозиса», Изд. «Наука и техника», Минск, 1964. ⁷ Н. А. Капашник, В. И. Молин, «Генетика», т. II, № 1, 1973. ⁸ М. А. Федин, Д. Я. Силис, Доклады ВАСХНИЛ, № 1, 1973. ⁹ М. А. Федин, О гетерозисе пшеницы, Изд. «Колос», М., 1970. ¹⁰ Б. А. Доспехов, Методика полевого опыта, Изд. «Колос», М., 1973.
- ¹¹ У. Уильямс, Генетические основы и селекция растений, Изд. «Колос», М., 1968.
- ¹² Ф. Бриггс, П. Ноулз, Научные основы селекции растений, Изд. «Колос», М., 1972.
- ¹³ А. И. Кыш, И. М. Норик, Селекция и семеноводство, вып. 12, Киев, 1974. ¹⁴ Э. Д. Неттевич, Н. С. Щеглова, Вестник сельскохозяйственной науки, № 9, 1970.

УДК 595.792

ЭНТОМОЛОГИЯ

Е. К. Эртсцяни

Новые виды энциргид из родов *Psyllaephagus* и *Discodes* из Армении (Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 29/VII 1978)

При обработке материала по энциртидам, собранным в Армении за последние годы, были обнаружены новые для науки виды из родов *Psyllaephagus* и *Discodes*, описание которых приводится ниже.

Голотипы и паратипы новых видов хранятся в коллекции Зоологического института АН СССР, часть паратипов — в коллекции Института зоологии АН Армянской ССР (Ереван).

Psyllaephagus Ashmead, 1900

Паразиты личинок листоблошек (*Psyllolidea*). В СССР отмечено 17 видов рода *Psyllaephagus*. В Армении было известно 2 вида — *P. elaeagni* Trjap. и *P. smaragdinus* (Hoffer) (1-4). К ним нужно прибавить

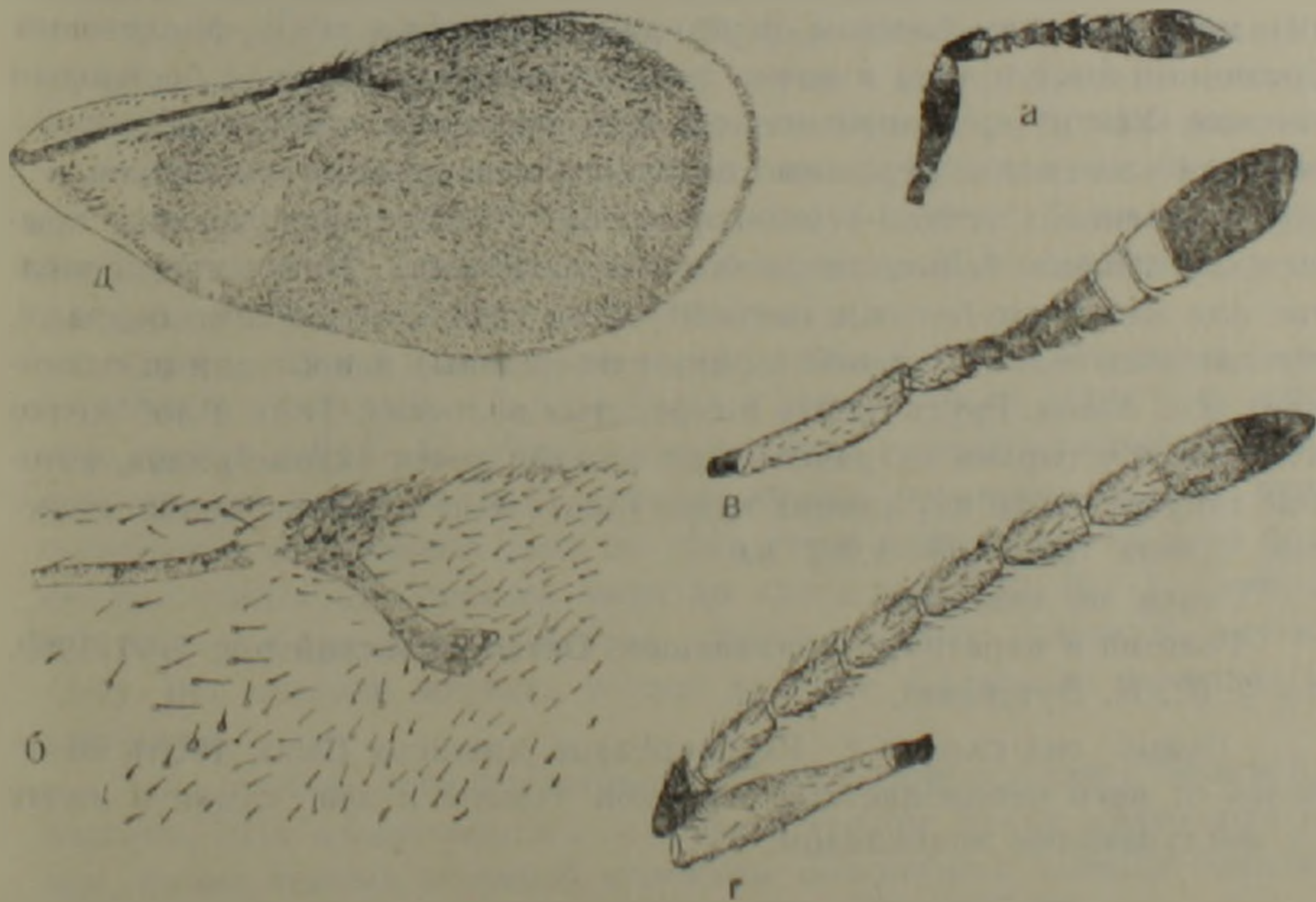


Рис. 1. а—б—*Psyllaephagus pulcher* Herthvitzian, sp. n. а—усик. б—жн. кова-
ние переднего крыла; в—г—*Discodes trjapitzini* Herthvitzian, sp. n. в—усик ♀;
г—усик ♂; д—переднее крыло ♀

еще 3 вида, обнаруженных в Армении—*P. procerus* (Merc.) и *P. tamaricicola* Myartseva, sp. n. (описание этого вида еще не опубликовано). Третий вид, *P. pulcher* sp. n., является новым для науки.

Psyllaephagus pulcher Herthvitzian, sp. n.

Самка. Темя и лоб длиннее своей ширины (17:13). Наименьшая ширина темени составляет больше 1/3 наибольшей ширины головы (13:36). Край затылка закругленный. Вершинный угол треугольника глазков 90°. Расстояние между задними глазками в 1,5 раза больше расстояния от заднего до переднего глазка (8:5—5). Задние глазки ближе к внутренним краям глаз, чем к краю затылка. Щека вдвое короче глаз (10:20). Основной членик усиков вчетверо длиннее своей наибольшей ширины (12:3). Поворотный членик немного более чем в 2 раза длиннее первого членика жгутика, первые два членика больше в длину, чем в ширину, 3—4 членики квадратные, а 5—6 слегка поперечные. Булава в 2 раза длиннее своей ширины и равна по длине 5 предшествующим членикам вместе взятым (10:10). Расстояние между усиковыми ямками немного больше расстояния от усиковой ямки до края глаза и более чем в 1,5 раза больше такового до края рта (7:6:4). Щит среднеспинки в 1,5 раза шире своей длины (29:19). Щитик чуть шире своей длины и короче щита (17:15:19). Передние крылья в два с лишним раза длиннее своей наибольшей ширины (75:33). Маргинальная жилка точковидная, постмаргинальная развита. Шпора средней голени короче первого членика средней лапки (5,5:9). Брюшко короче груди (28:38). Яйцеклад слегка выступающий.

Общий цвет тела сине-зеленый. Темя с несильным синеваго-зеленым металлическим блеском, переходящим от лба в темно-фиолетовый. Срединный выступ лица и щеки сине-зеленые, блестящие, с бронзовым блеском. Усики черно-коричневые с почти черными основными и поворотными члениками. Вершины основного и поворотного члеников и 4 первых члеников усика—темно-коричневые. Основания крыловых крышечек желтовато-белые, вершины затемненные. Ноги светло-желтые или желтовато-белые, с почти черными тазиками, задними бедрами, основаниями задних голеней (кроме их вершины) и последними члениками всех лапок. Грудь сверху в сероватых волосках. Темя и лоб мелко ячеистые с четырьмя неправильными рядами точек (кроме рядов, которые тянутся вдоль внутренних краев глаз). Щит и щитик мелко ячеистые. Длина тела 1,05—1,092 мм.

Самец не известен.

Голотип и паратипы: Варданашен, Октемберянский р-н, 5/VI 1969, 4♀♀ (Е. К. Эртевцян).

Новый вид сходен с *Psyllaephagus japonicus* (Ishii, 1928), отличаясь от него неоднотонной окраской темени и лба самки и почти не выступающим яйцекладом.

Discodes Förster, 1856

Паразиты кокцид семейств Coccidae и Asterolecaniidae. В СССР отмечено 8 видов рода *Discodes*. В Армении был известен 1 вид—*D. acanthopulvinariae* Trjap. (¹⁻⁴). Сравнительно недавно выяснилось наличие в Армении еще двух видов—*D. anthores* (Walk.) и *D. coccophagus* (Ratz.) (⁵). Кроме того выявлен один новый для науки вид этого рода, описание которого приводится ниже.

Discodes trjapitzini Herthevtzián, sp. n.

Самка. Темя и лоб менее чем в 1,5 раза длиннее своей ширины (33:24). Наименьшая ширина темени составляет менее 1/2 наибольшей ширины головы (24:57). Глазки в тупоугольном треугольнике. Расстояние между задними глазками более чем в 1,5 раза больше расстояния от заднего до переднего глазка (15:9—9,5). Задние глазки расположены на одинаковом расстоянии от краев глаз и края затылка. Усики причленяются почти у края рта. Расстояние между усиковыми ямками чуть больше расстояния от усиковой ямки до краев глаз (13:12—12); поворотный членик усиков в 2 раза длиннее первого членика жгутика; 1—3 членики жгутика длиннее своей ширины, 4 членик квадратный, а 5—6 членики шире своей длины. Щека более чем в 2 раза короче глаза (17:38). Щит среднеспинки менее чем в 3 раза шире своей длины и по длине короче щитика (56:20:28). Щитик шире своей длины (36:28). Наибольшая ширина светлой каймы вдоль вершинного края передних крыльев составляет 1/18—1/23. Маргинальная жилка передних крыльев равна радиальной жилке и менее чем в 1,5 раза длиннее постмаргинальной жилки (8:8:5,5). Брюшко и грудь одинаковой длины. Яйцеклад слегка выступающий.

Тело темное, сине-фиолетовое. Голова сине-фиолетово-зеленая. Усики желто-коричневые; 5—6 членики жгутика иногда светлее остальных члеников жгутика. Булава и корешок усиков темные. Крылья затемненные. Брюшко сине-фиолетовое, блестящее. Ноги темные; лапки всех ног (кроме последнего членика) коричневато-желтые. Голова в не очень крупных глубоких ямках; дно ямок блестящее. Щит и щитик в точках и темных волосках. Длина тела 1,33—1,84 мм.

Самец. Темя и лоб шире своей длины (20:17). Расстояние между задними глазками в 2 раза больше расстояния от заднего до переднего глазка (10:5—5). Усики причленяются непосредственно под уровнем нижних краев глаз. Расстояние между усиковыми ямками равно расстоянию от усиковой ямки до края рта и менее чем в 1,5 раза больше расстояния от усиковой ямки до краев глаз (10:10:7). Поворотный членик более чем в 1,5 раза короче первого членика жгутика (6:9). Все членики жгутика усиков длинные. Булава на вершине заостренная.

Тело темное, сине-фиолетовое. Голова сине-зеленая с бронзовым блеском. Щит среднеспинки с зеленым оттенком. Усики желто-коричневые, кроме темных основной половины поворотного членика, корешка и последнего членика булав. Длина тела 1,14—1,61 мм.

Вид назван именем известного энтомолога В. А. Тряпицына.

Голотип (♀): окр. Еревана, Джрвеж, 10/VIII 1970 (Е. К. Эртев-
 цян). Паратипы: Ереван, 1/VIII 1934, 1♀ (А. Любимцев); там же, 8/VII
 1935, 1♀ (М. Е. Тер-Минасян и А. А. Рихтер); окр. Еревана, Джрвеж,
 на карагаче *Ulmus* sp., 29/VIII 1956, 2♀♀ (В. А. Тряпицын), там
 же, 9/VII 1968, 1♀, 1♂, 11/VIII 1969, 1♀, 10,23/VII 1970, 15♀♀,
 12♂♂, 12/VIII 1971, 1♀; Ереван, Зоопарк, полынная полунустыня,
 11/VII 1969, 2♀♀, 28/VIII 1969, 1♀, 23/VI 1970, 2♂♂, 3/VIII 1970,
 9♀♀, 1♂; Ереван, Ботанический сад, 29/VII 1970, 5♀♀, 1♂, 1/VII
 1971, 7♂♂, 20/VIII 1971, 10♀♀, 2♂♂, 8/VIII 1972, 13♀♀; Ереван,
 сад биофака, 1/VI 1971, 1♂; Разданский р-н, Цахкадзор, 16,17/VII 1970,
 2♀♀, 1♂; Аштаракский р-н, Амберд, 12/VIII 1969, 1♀; Абовянский
 р-н, Гарни, 17/VI 1971, 5♂♂; Араратский р-н, Хосровский лес,
 16,17/VII 1969, 4♀♀, 7♂♂, 1—3/VII 1970, 15♀♀, 18♂♂ (Е. К. Эр-
 теvцян).

В коллекции ЗИН АН СССР оказался материал по этому виду
 из следующих местностей СССР:

Молдавия, Кишинев, 26/VIII 1957, 1♀, Дубосары, склоны, 19/VII
 1960, 2♀♀, Котовское, склоны, 13/VII 1967, 2♀♀, Чумай, склоны,
 17/VIII 1967, 1♀, Карманово, 5/VII 1967, 1♀ (В. Н. Талицкий); Крым,
 Керчь, 1907, 1♀ (А. Н. Кириченко), Ялтинск. уезд, Таушан-Базар,
 10/VII 1907, 1♀ (В. Плигинский), Феодосия, сухие холмы, 26/VI 1962,
 1♀, 1♂ (Е. С. Сугоняев); Кавказ, Леснич. Парабоч., Кизляр, окр.
 Терска, 15/VII 1927, 2♀♀, Старогладковская, Кизляр, окр. Терска,
 9/VII 1927, 1♀ (А. Н. Кириченко), Дагестан, Манаскент, сухие холмы
 с кустарниками у моря, 13/VII 1960, 1♀ (Е. С. Сугоняев).

Основные различия между *D. coccophagus* (Ratz.) и
D. Irjapitzini sp. n. следующие

<i>D. coccophagus</i> (Ratz.)	<i>D. Irjapitzini</i> Herthelzian, sp. n.
Голова ♀ в крупных глубоких ямках с блестящим дном. Светлая кайма вдоль вершин- ного края передних крыльев ♀ ши- рокая. Последний членик булавы жгу- тика усиков ♂ усеченный. Усики ♀ более темные, крылья более прозрачные.	Голова ♀ в не очень крупных глубоких ямках с блестящим дном. Светлая кайма вдоль вершин- ного края передних крыльев ♀ уз- кая. Последний членик булав жгу- тика усиков у ♂ острый. Усики ♀ более светлые, крылья менее прозрачные.

Институт зоологии Академии наук
 Армянской ССР

Լինգիբադների՝ *Psyllaephagus* և *Discodes* սեռերի նոր տեսակներ
Հայաստանից (*Hymenoptera, Chalcidoidea, Encyrtidae*)

Հոդվածում տրվում է Հայաստանում հայտնաբերված դիտոթլան համար
2 նոր տեսակների՝ *Psyllaephagus pulcher* Herthevtzian, sp. n. և *Discodes*
trjapitzini Herthevtzian, sp. n. նկարագրությունը

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒՄՆԵՐ

- ¹ В. А. Тряницын, Тр. ВЭО, т. 52. Насекомые Кавказа, 43—125, 1968. ² В. А. Тря-
ницын, Тр. ВЭО, т. 54. Паразитические насекомые-энтомофаги, 68—150, 1971. ³ Е. К.
Эртевцян, «Биол. журн. Армении», т. XXIV, № 5, 24—31 (1971). ⁴ А. С. Аветян,
В. А. Тряницын, Е. К. Эртевцян, Зоол. сборник АН Арм. ССР, т. XVII, 33—86, 1976.
⁵ Е. С. Сугоняев, Зоол. журн., Л. 2, 291—195, 1971.

УДК 632.651

ФИТОНЕМАТОЛОГИЯ

Д-р А. Карапетян

Четыре новых вида нематод (Nematoda: Tylenchorhynchidae)
закрытого грунта из Армянской ССР

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 10/X 1978)

Tylenchorhynchus erevanicus Karapetjan, sp. nov. (рис. 1).

Голотип (♀)—Длина тела—683 мкм, $a=26,9$; $b=5,4$; $c=16,6$;
 $V=53,87\%$; $T/ABW=2,2$; конус = 18 мкм.

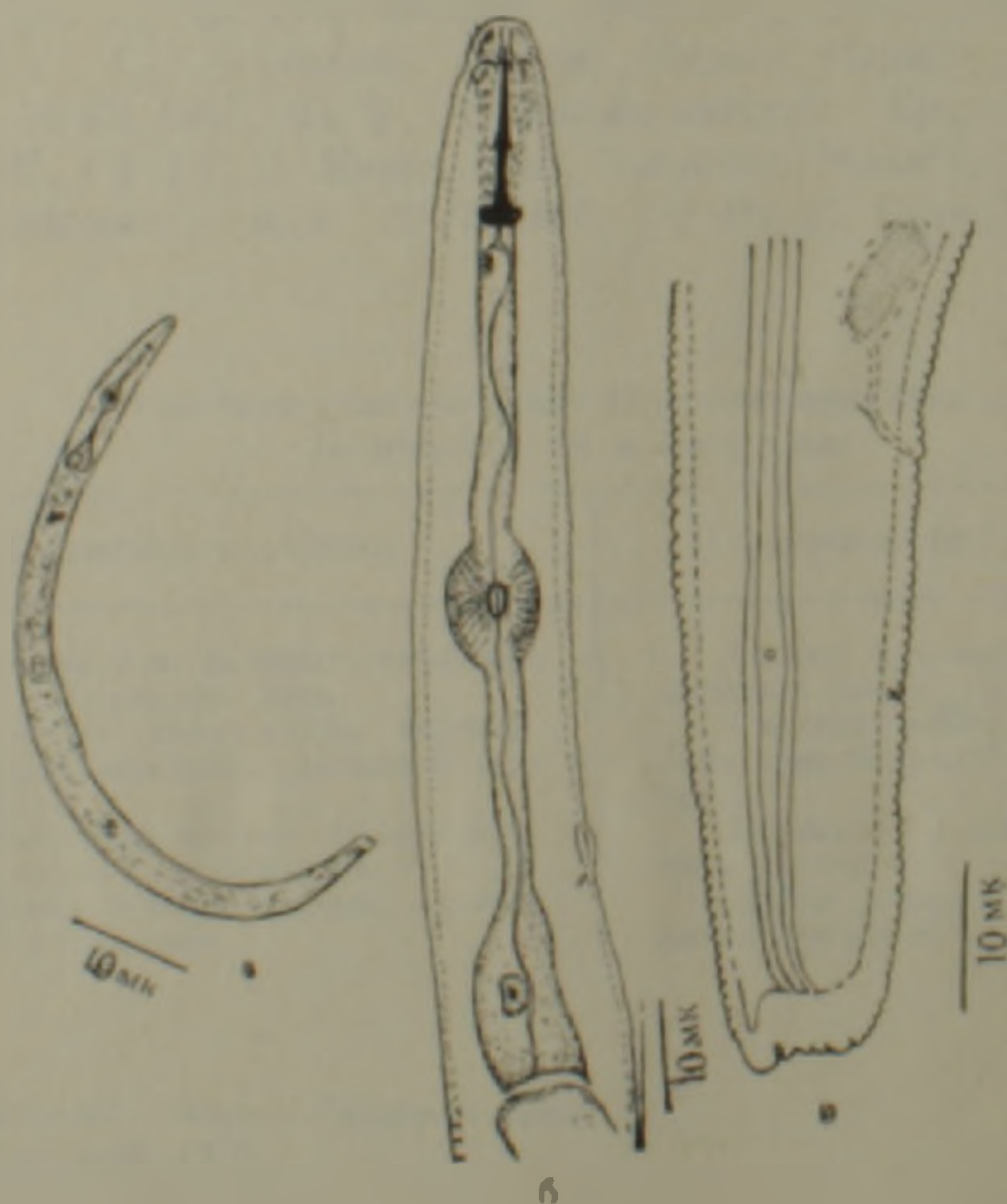


Рис. 1. а—самка, общий вид, б—головной конец тела; в—хвост самки

Тело цилиндрической формы, при нагревании принимает форму «С». Кутикула тонкокольчатая, ширина колец от 0,8 до 1 мкм. Голова состоит из 5 кутикулярных колец, слегка обособлена от контура тела, хитинизация головы слабая, базальные головки копья широкие, ширина и длина их равны $3 \times 1,3$ мкм, направлены в латеральные стороны. Отверстие дорсальной железы открывается ниже основания копья на 2 мкм. Выделительная пора открывается на уровне верхней части кардинального бульбуса на 75 мкм ниже головного конца, гемизонид расположен впереди от экскреторного отверстия и занимает 4 кутикулярных кольца. Яичники парные, сперматеки круглые со сперматозоидами. Боковые поля с 4 инцизурами. Фазмиды расположены в середине хвоста между центральными инцизурами боковых полей. Хвост цилиндрический, кончик тупо-пересеченный с крупными кольцами, с дорсальной стороны имеет придаток. Количество кутикулярных колец на хвосте—42.

Самец не обнаружен, но присутствие сперматозоидов в сперматекс говорит о том, что самцы имеются.

Дифференциальный диагноз—Описанный вид близок к *Tylenchorhynchus huesingi* Paetzold, 1958, отличается формой головы, головок копья, числом кутикулярных колец на хвосте, а также резко отличается формой кончика хвоста.

Типовое местонахождение — Вид найден в оранжереях Треста озеленения г. Еревана, в прикорневой почве *Ficus elastica* Roxb. et Hornem.

Tylenchorhynchus minutus Karapetjan, sp. nov. (рис. 2).

Голотип (♀) — Длина тела — 485 мкм; $a=24,5$; $b=5,38$; $c=13,5$; $V=54,12\%$; $T/ABW=2,9$.



Рис. 2. а—самка, общий вид; б—головной конец тела; в—хвост самки

Кутикула тонкокольчатая, ширина колец от 0,9 мкм до 1,1 мкм. Голова маленькая, состоит из 4 колец кутикулы, слегка обособлена от контура тела, с умеренной склеротизацией. Копье 14 мкм с хорошо выраженными головками, ширина которых 2 мкм, а длина 4 мкм, направленными в латеральные стороны. Отверстие дорсальной железы открывается ниже основания копья на 2 мкм. Средний бульбус шаровидный, выделительная пора открывается напротив верхней части заднего бульбуса на 67 мкм ниже головного конца. Яичники парные, сперматека имеется, овальной формы, без сперматозондов. Боковые поля с 4 инцизурами. Хвост почти конический, кутикула на кончике хвоста гладкая, число колец на хвосте 36. Фазмиды расположены на середине хвоста.

Дифференциальный диагноз — По размерам схож с *Tylenchorhynchus ventrosignatus* T.—Jiménez, 1969, но отличается формой головы, головки копья и кутикулярных колец в области вульвы.

Типовое местонахождение — Обнаружен в прикорневой почве *Hibiscus rosa* L. в оранжереях Треста озеленения г. Еревана.

Tylenchorhynchus kirjanovae Karapetjan, sp. nov. (рис. 3).

Голотип (♀) — Длина тела — 660 мкм, $a=24,4$; $b=5,5$; $c=20,6$; $V=55\%$; копье = 16 мкм, боковые поля с 4 инцизурами, количество колец на голове 6, на хвосте — 30; $T/ABW=1,6$.

Тело цилиндрическое, после тепловой обработки приобретает полусферическую форму, кутикула тонкокольчатая, ширина колец 0,8 —

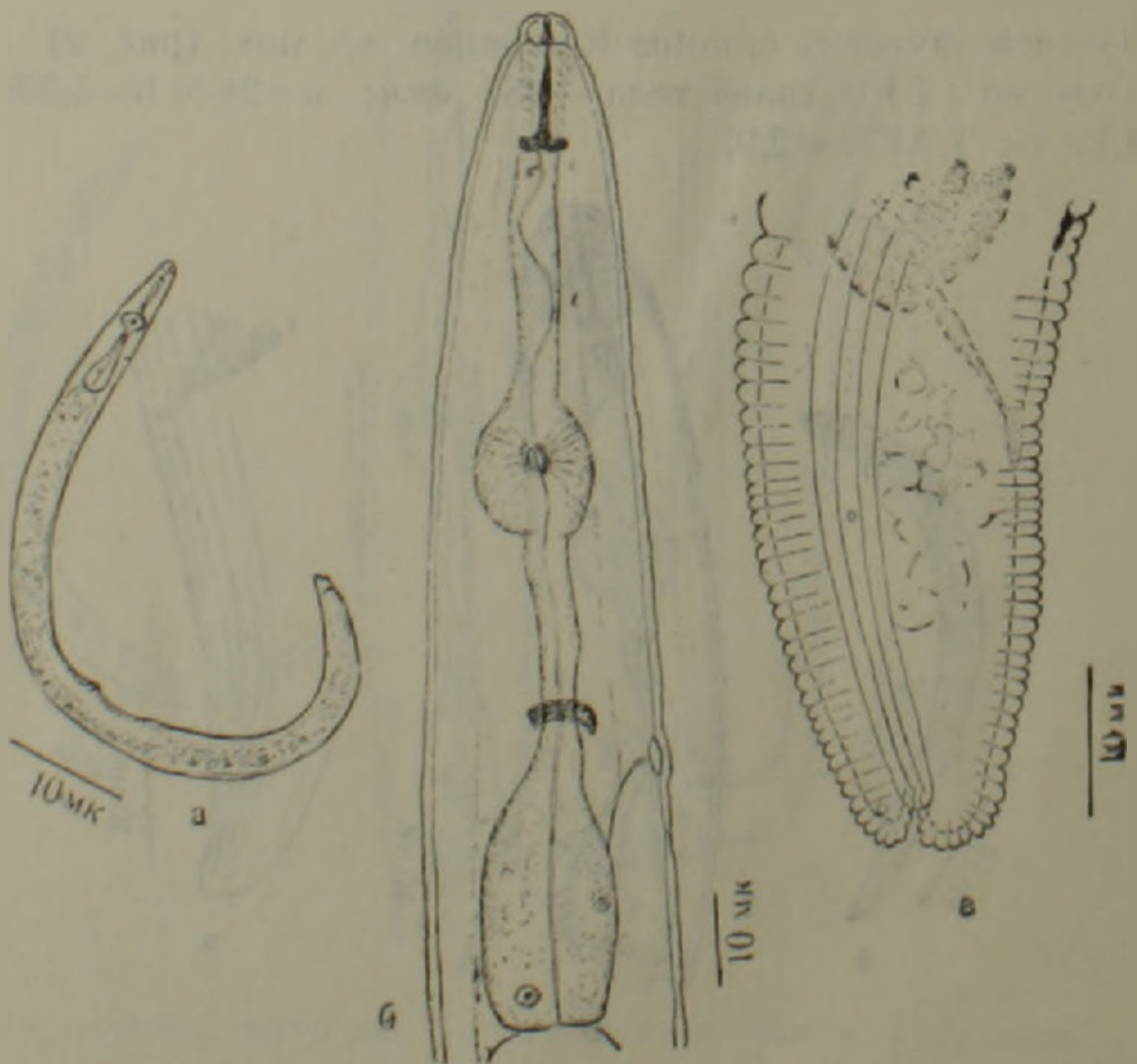


Рис. 3 а—самка, общий вид; б—головной конец тела; в—хвост самки

0,9 мкм. Голова хорошо обособлена от контура тела, хитиноидный скелет слабо развит. Головки основания копы удлиненной формы, ширина и длина которого равна $5 \times 1,5$ мкм. Отверстие дорсальной железы пищевода ниже основания копы на 2 мкм. Выделительная пора открывается у основания истмуса на 87 мкм от головного конца, в середине гемизонита. Гемизонит занимает 7 кутикулярных колец. Сперматека отсутствует, хвост цилиндрический, кончик кольчатый с выемкой. Фазмиды расположены на 6 колец ниже ануса, между центральными инцизурами.

Дифференциальный диагноз—По размерам вид близок к *Tylenchorhynchus hueslingi* Paetzold, 1958, от которого отличается формой головы, хвоста, основания копы и отсутствием сперматеки.

Типовое местонахождение—Обнаружен в оранжевое Трестя озеленения г. Ленинакана в прикорневой почве *Ficus elastica* Koxb. et Hornem.

Quinlsulcius lineatus Karapetjan, sp. nov. (рис. 4).

Голотип (♀)—Длина тела—812,5 мкм; $a=40,6$; $b=5,8$; $c=18,4$; $V=56,92\%$; копы=16 мкм; $T/ABW=3,1$.

Тело почти цилиндрической формы, несколько суживающееся к концам. При нагревании принимает форму «С». Кутикула с 16—18 продольными линиями, ширина колец 1,2—1,4 мкм. Голова состоит из 5 кутикулярных колец, не обособлена от контура тела. Хитинизация ее

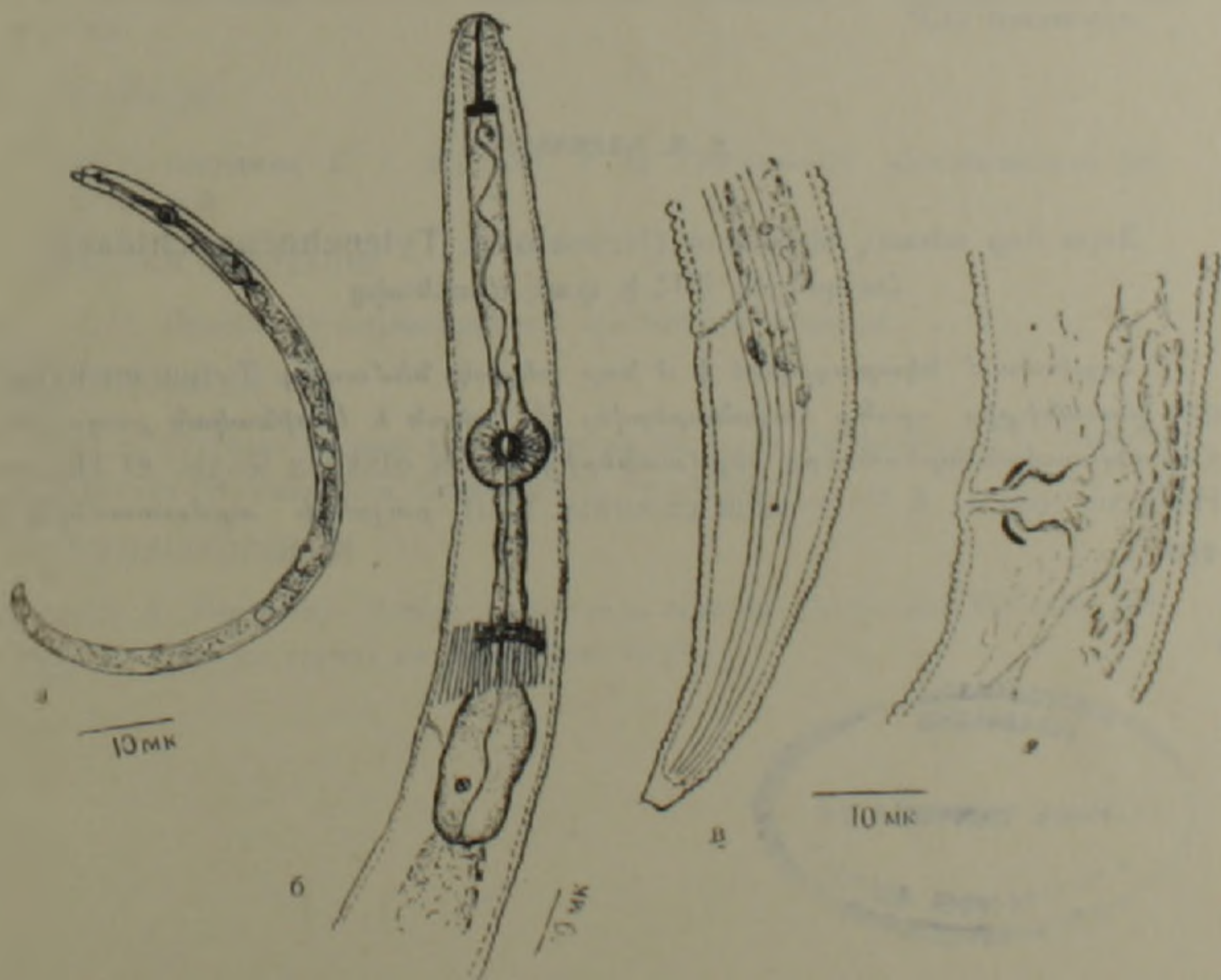


Рис. 4. а—самка, общий вид; б—головной конец тела; в—хвост самки; г—часть тела и области вульвы

слабая, базальные головки копыя круглые и направлены в латеральные стороны, их ширина и длина равны 4×2 мкм. Отверстие дорсальной железы открывается ниже основания копыя на 2,5 мкм. Выделительная пора открывается на уровне средней части кардиального бульбуса, ниже головного конца на 110 мкм. Имеется маленькая кардия. Яичники парные, сперматеки круглые без сперматозондов, щель вульвы хитинизирована, с продолговатыми выростами на влагалнице. Фазмиды расположены примерно в средней части хвоста. Боковые поля с 5 инцизурами, которые в передней части тела, выше среднего бульбуса и на хвосте за фазмидами, сокращаются до 4. Хвост конической формы с 42 кольцами кутикулы, его кончик квадратной формы, как бы срубленный, с гладкой кутикулой.

Дифференциальный диагноз—Новый вид близок к *Quinlsulcius acti* (Hooper, 1959), отличается от него формой головы и числом головных колец (у вышеописанного вида голова не обособлена и состоит из 5 колец), формой кончика хвоста и вульвы, а также наличием продольных полос на кутикуле. Последним признаком новый вид отличается от всех известных видов *Quinlsulcius*.

Типовое местонахождение—Новый вид найден в оранжереях Треста озеленения г. Ленинакана, в прикорневой почве *Peperomia caperata* Hort.

Институт зоологии Академии наук
Армянской ССР

Ջ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Չորս նոր տեսակ նեմատոդ (Nematoda: Tylenchorhynchidae)
Հայկական ՍՍՀ-ի փակ զրուհաից

Հոդվածում նկարագրված է 4 նոր տեսակ նեմատոդ Tylenchorhynchidae ընտանիքից. որոնք հայտնաբերվել են Երևան և Լենինական քաղաքների բուսապատման տրեստներից *Ficus elastica* Roxb. et Hornem, *Hibiscus rosa* L. և *Peperomia caperata* Hort. բույսերի արմատամերձ հողից:

