ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1975

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, №6, 1975 Механика

С. Г. СААКЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Задачи о распространении волн давления в полубесконечной среде или в слое идеальной сжимаемой жидкости, возбужденных приложенным распространяющимся внешним давлением на свободной поверхности жидкости, были предметом многих исследований. Точное решение задачи распространения двумерных волн давления в слое идеальной сжимаемой жидкости, находящейся на недеформируемом полупространстве, дано в работе [1]. При этом предполагается, что на свободной поверхности жидкости вдоль прямой внезапно приложено произвольно зависящее от времени давление, которое затем симметрично распространяется с постоянной скоростью в обе стороны вдоль этой прямой. Точное решение задачи в виде замкнутых эффективных формул получено при помощи интегральных преобразований и метода Каньярда [2]. Публикации, имеющие отношение к рассматриваемым вопросам, приведены в этой работе. Другой подход, связанный с приведением интегральных трансформант к форме аналитической функции, дан в [3].

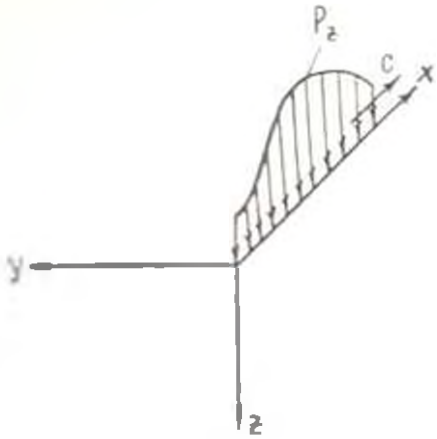
В настоящей работе исследуется распространение трехмерных нестационарных волн давления в полупространстве идеальной жидкости, когда в некоторой точке ее поверхности приложено произвольно изменяющееся во времени давление, которое непосредственно с постоянной скоростью распространяется в определенном направлении. Для получения точного решения в виде эффективных формул используются методы интегральных преобразований. Обратные преобразования выполнены модифицированным Де Гупом [4] методом Каньярда.

В качестве конкретного примера рассматривается случай, когда приложенное давление постоянно во времени. Отсюда, в частности, путем предельного перехода, получено решение задачи о распространении стационарных волн давления, возникающих при распространении вдоль прямой на поверхности полупространства жидкости постоянного давления. Кроме этого, как предельный случай, получается также решение задачи о распространении волн от постоянного давления, внезапно приложенного вдоль полупрямой на поверхности жидкости.

§ 1. *Постановка задачи и ее решение*

На поверхности полупространства идеальной сжимаемой жидкости в начале координат в момент времени $t=0$ приложено произвольно изменяющееся во времени давление, которое затем распространяется вдоль положи-

тельной оси x с постоянной скоростью c (фиг. 1). Требуется определить в линейной постановке трехмерное нестационарное поле давления в жидкости.



Фиг. 1.

Уравнение распространения волн давления в жидкости, начальные и граничное условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$p\,|_{t=0} = \frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{1.2}$$

$$p\,|_{z=0} = P_0 H(x)\, H(ct - x)\, f(ct - x)\, \delta(y) \tag{1.3}$$

где c_0 — скорость волн в жидкости, H — функция Хевисайда, а δ — дельта-функция Дирака.

Применим к уравнению (1.1) и к условию (1.3) преобразование Лапласа по t и преобразование Фурье по x и y:

$$\bar{p}(x, y, z, s) = \int_0^\infty p(x, y, z, t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\overset{*}{p}(\alpha, \beta, z, s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(x, y, z, s)\, e^{-i(\alpha x + \beta y)}\, dx\, dy \tag{1.4}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overset{*}{p}(\alpha, \beta, z, s)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta$$

После проведения обычных выкладок изображение давления по Лапласу принимает вид

$$\bar{p} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}\left(\frac{s}{c}\right)}{s + ic\alpha} \exp[-(zn_0 - i\alpha x - i\beta y)]\, d\alpha\, d\beta \tag{1.5}$$

где

$$n_0 = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{s^2}{c_0^2}\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

Переходя к цилиндрическим координатам (r, θ, z), после замены переменных в интеграле (1.5) по [4]

$$\alpha = \frac{s}{c_0}(\omega\cos\theta - q\sin\theta), \quad \beta = \frac{s}{c_0}(\omega\sin\theta + q\cos\theta) \tag{1.7}$$

получаем

$$\bar{p}(r, \theta, z, s) = \frac{1}{2\pi^2 c_0}\frac{s}{c}\bar{f}\left(\frac{s}{c}\right)\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, q, \theta)\exp\left[-\frac{s}{c_0}(zm_0 - i\omega r)\right] d\omega\, dq \tag{1.8}$$

где

$$K(\omega, q, \theta) = (\gamma - i\omega\cos\theta)/[(\gamma + i\omega\cos\theta)^2 + q^2\sin^2\theta] \tag{1.9}$$

$$m_0 = (\omega^2 + q^2 + 1)^{1/2}, \quad \gamma = c_0/c \tag{1.10}$$

В плоскости комплексной переменной ω подынтегральное выражение имеет простые полюсы

$$\Omega_0^{\pm} = (-q\sin\theta \pm i\gamma)/\cos\theta \tag{1.11}$$

и точки ветвления

$$\Omega_0 = \pm i\sqrt{q^2 + 1} \tag{1.12}$$

Чтобы обеспечить однозначность подынтегральной функции, в плоскости ω проведены разрезы, как показано на фиг. 2; при этом $\mathrm{Re}\, m_0 > 0$.

Рассмотрим в плоскости ω линию Γ, на которой функция

$$t = \frac{1}{c_0}(zm_0 - i\omega r) \tag{1.13}$$

принимает только действительные и положительные значения. Эта линия представляет собой гиперболу

$$\omega^{\pm}(q) = \frac{c_0}{\rho^2}(irz \pm \sqrt{t^2 - t_0^2}) \quad \text{при} \quad t > t_0 \tag{1.14}$$

где

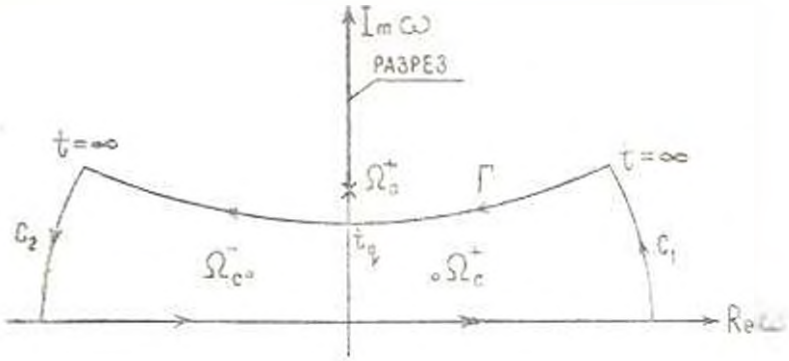
$$t_0 = t_0\sqrt{q^2 + 1}, \quad t_0 = \rho/c_0, \quad \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \tag{1.15}$$

с вершиной в точке $t = t_0$ $(\omega = ir\sqrt{q^2 + 1}/\rho)$. Вершина этой гиперболы всегда лежит ниже точки ветвления, так как $r/\rho < 1$.

Рассмотрим в плоскости ω замкнутый контур C, образованный действительной осью ω, ветвью гиперболы и дугами окружности с бесконечно большим радиусом (фиг. 2). Полюсы $\Omega_c^{\pm}$ лежат внутри C, если

$$1)\quad \cos\theta > 0 \quad (x > 0) \qquad 2)\ \frac{c_0 t r}{\gamma^2} > \frac{1}{\cos\theta}\left(t > T,\ \text{где}\ T = \frac{\gamma^2}{c x}\right)$$

$$3)\quad \frac{c_0 x}{\gamma^2}\left|\sqrt{t^2 - t_0^2}\right| < a\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad (1.16)$$

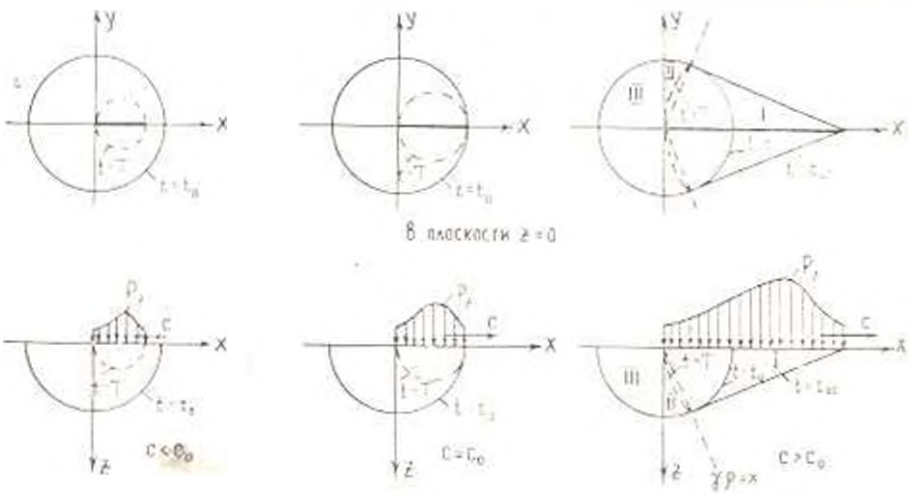


Фиг. 2.

Условия (2) и (3) эквивалентны условию $\varphi^2 < \varphi_{\lim}^2$, где

$$\varphi_{\lim}^2 = (\gamma^2 t^2 - x^2)\, z^2 r^2 l^2, \qquad l = \sqrt{y^2 - z^2} \qquad (1.17)$$

По условиям (1.16) полупространство делим на три области, как показано на фиг. 3.



Фиг. 3.

Область I: $x > 0$, $x/\gamma > \gamma$. Полюсы лежат внутри C для $q \in [0, \infty)$.

Область II: $x > 0$, $x/\gamma < \gamma$. Полюсы лежат внутри C для $q \in [q_{0}, \infty)$ и лежат вне C для $q \in [0, q_{0})$.

Область III: $x < 0$. Полюсы лежат вне C для $q \in [0, \infty)$.

Заметим, что область I при дозвуковом распространении приложенного давления ($\gamma > 1$) отпадает, так как x/γ всегда меньше γ.

Пользуясь теорией вычетов Коши и леммой Жордана, преобразуя интеграл (1.8) по действительной оси ω к интегралу по ветви гиперболы (1.14), получим

$$\bar{p} = \frac{\frac{s}{c}\bar{f}\left(\frac{s}{c}\right)}{\pi^2 c_0} \left\{ \text{v. p.} \int_0^{\infty}\int_{\gamma_q}^{\infty} \operatorname{Re}\left[K(\omega(q), q, \theta) \frac{d\omega(q)}{dq} \right] e^{-qt}\, dt\, dq - \right.$$

$$+ \frac{\pi H(x)}{\cos\theta} [H(\gamma - x) H(x - \gamma\beta) + H(\gamma\beta - x)]$$

$$\left. \times \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \exp\left[-\frac{s}{c_0} (z \sqrt{\Omega_z^2 + q^2 + 1} - i\Omega_z r) \right] dq \right\} \qquad (1.18)$$

где

$$\omega(q) = \omega_{\gamma}(q), \quad \Omega_z = \Omega_{\gamma}, \quad Q = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x - \gamma\beta < 0 \\ q_{0x} & \text{при} \quad x - \gamma\beta > 0 \end{cases} \qquad (1.19)$$

Двойной интеграл в формуле (1.18) является несобственным и интегрируется в смысле главного значения по Коши. Особенность подынтегральной функции обусловлена тем, что при $t = T$ и при $q \to q_{0}$ полюсы Ω_z лежат на контуре интегрирования.

Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле (1.18), получаем преобразование Лапласа известной функции

$$\int_0^{\infty} \left[H(t - t_0) \text{v. p.} \int_0^{q_0} \operatorname{Re}\left[K(\omega(q), q, \theta) \frac{d\omega(q)}{dq} \right] dq \right] e^{-\tau t}\, dt \qquad (1.20)$$

где

$$q_0 = \sqrt{\tau^2 - 1}, \quad \tau = c/c_0 \qquad (1.21)$$

Чтобы привести второй интеграл формулы (1.18) к преобразованию Лапласа известной функции, рассмотрим в плоскости комплексной переменной q частный контур, на котором функция

$$\tau = \frac{1}{c_0} (z \sqrt{\Omega_z^2 + q^2 + 1} - i\Omega_z r) \qquad (1.22)$$

принимает действительные и положительные значения. Выражение (1.22) определяет параметрическое уравнение одной ветви гиперболы

$$q^{-}(t) = -i\gamma \sin\vartheta + \frac{\gamma\cos\vartheta}{F}(t\xi y \pm z\sigma) \quad \text{при} \quad t > t_{0c} \tag{1.23}$$

где

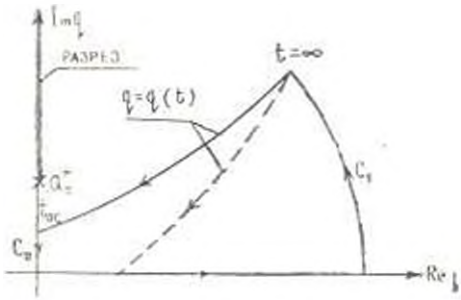
$$t_{0c} = \frac{1}{c}\left| x + \left(\frac{c^2}{c_0^2} - 1\right)^{1/2} l \right|, \quad \sigma = \sqrt{\gamma^2 - \left(\frac{c^2}{c_0^2} - 1\right)F}, \quad \xi = ct - x \tag{1.24}$$

Гипербола (1.23) с вершиной в точке $q = -i\gamma\sin\vartheta - i(y/l) \times \times \sqrt{1-\gamma^2}\cos\vartheta$ пересекает мнимую ось q ниже точки ветвления подынтегральной функции $Q_0 = -i\gamma\sin\vartheta + i\sqrt{1-\gamma^2}\cos\vartheta$ и выше действительной оси q, если $\gamma t - x < 0$ (область I). В случае, если $\gamma t - x > 0$ (область II), гипербола пересекает действительную ось q в соответствии с нижним пределом интеграла.

Рассмотрим подынтегральное выражение одинарного интеграла (1.18) по замкнутому контуру, образованному дополнительными линиями C_0, C_1, частью гиперболы $q(t) - q^{-}(t)$ и действительной положительной осью q (фиг. 4). Пользуясь леммой Жордана и тем, что действительная часть интеграла по C_0 равна нулю, получим

$$\frac{\pi H(x)}{\cos\vartheta}\int_0^{\infty}\{[H(1-\gamma)H(x-\gamma t)H(t-t_{0c}) +$$

$$+ H(\gamma t - x)H(t - T)]\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial q(t)}{\partial t}e^{-qt}dt \tag{1.25}$$



Фиг. 4.

Обращая преобразования Лапласа (1.20), (1.25) и пользуясь интегралом Дюамеля, получим

$$p(r, \vartheta, z, t) = \frac{f(0)}{\pi c_0}\{H(t - t_0)\,\text{v. p.}\int_{\xi}^{q_0}\mathrm{Re}\left|K(\omega(q), q, \vartheta)\frac{\partial\omega(q)}{\partial t}\right|dq +$$

$$+ \frac{\pi H(x)}{\cos\vartheta}[H(1-\gamma)H(x-\gamma t)H(t-t_{0c}) + H(\gamma t - x)H(t-T)]\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial q(t)}{\partial t}\} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2 c_0}\left\{H(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\text{v.p.}\int_0^{\infty}\text{Re}\left|K(-(q),q,\xi)\frac{\partial\omega(q)}{\partial t}\right|_{t=\tau}dq\frac{d}{d\tau}f(c(t-\tau))d\tau+\right.$$

$$+\frac{\pi H(x)}{\cos\vartheta}\left|H(1-\gamma)H(x-\gamma\gamma)H(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\text{Re}\frac{\partial q(t)}{\partial t}\Big|_{t=\tau}\frac{d}{d\tau}f(c(t-\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.\left.+H(\gamma\gamma-x)H(t-T)\int_{T}^{t}\text{Re}\frac{\partial q(t)}{\partial t}\Big|_{t=\tau}\frac{d}{d\tau}f(c(t-\tau))d\tau\right|\right\}_{\xi} \qquad (1.26)$$

На основе анализа полученного решения на фиг. 3 показана картина распространения волн в полупространстве сжимаемой жидкости для трех скоростей распространения приложенного давления: дозвуковой ($c<c_0$), звуковой ($c=c_0$) и сверхзвуковой ($c>c_0$).

Для дозвуковой скорости распространения давления $H(1-\gamma)=0$, и в жидкое полупространство распространяется только полусферическая волна с фронтом $t=t_0$. Для сверхзвуковой скорости картина распространения волн в жидкую среду существенно меняется: кроме полусферической волны распространяется связанная с фронтом приложенного давления коническая волна, фронтом которой является поверхность конуса $t=t_0$ при $x>\gamma\gamma$ и $x>0$. Позади коническая волна ограничена поверхностью $t=T$, которая представляет собой полусферическую поверхность с центром $x=ct/2$, $t=0$ и радиусом $ct/2$. Поверхность $t=T$ не является характеристической поверхностью или же огибающей характеристических поверхностей волн давления, поэтому она не представляет собой фронта волны. Давление не имеет разрыва на этой линии. В отличие от метода Смирнова—Соболева метод Каньярда дает решение задачи в областях позади фронта каждой волны с подвижными границами. Не правы авторы работы [1], считающие, что ими были впервые обнаружены подвижные границы областей, так называемые «фронты» волн, которые связаны с распространяющимися давлениями, на которых исследуемые величины не терпят разрывов. Существование этих «фронтов» волн в задачах динамической теории упругости общеизвестно [5, 6 и др.].

§ 2. *Решение для постоянного давления*

Рассмотрим решение задачи, когда приложенное давление постоянное, то есть

$$f(ct-x)=P_0=\text{const} \qquad (2.1)$$

Из формулы (1.26) имеем

$$p=\frac{P_0H(t-t_0)}{2\pi^2c_0\cos\vartheta}\text{v.p.}\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\arg(\gamma-i\omega(q)\cos\vartheta-iq\sin\vartheta)-\right.$$

$$\left.+\arg(\gamma+i\omega(q)\cos\vartheta-iq\sin\vartheta)\right]dq-$$

$$+\frac{P_0H(x)}{\pi c_0\cos\theta}[H(1-\gamma)H(x-\gamma\rho)H(t-t_{0\alpha})+$$

$$+H(\gamma\rho-x)H(t-T)]\operatorname{Re}\frac{\partial q(t)}{\partial t} \qquad (2.2)$$

где значения функции $\arg$ лежат в промежутке $(-\pi, \pi]$.

Вычисляя значения подынтегральной функции, после некоторых упрощений с помощью замены переменной интегрирования $\alpha=q_0\sin\varphi$, получим

$$p=\frac{P_0H(t-t_0)x}{2\pi^2l\rho\cos\theta}\left\{\text{v. p.}\int_0^{\pi/2}\frac{\alpha^2l\cos\theta x+q_0^2\cos\varphi\cos(\varphi-\lambda)}{\alpha^2-q_0^2\cos^2(\varphi-\lambda)}d\varphi-\right.$$

$$\left.-\text{v. p.}\int_0^{\pi/2}\frac{\alpha^2l\cos\theta x-q_0^2\cos\varphi\cos(\varphi+\lambda)}{\alpha^2-q_0^2\cos^2(\varphi+\lambda)}d\varphi\right\}+$$

$$+\frac{P_0H(x)x}{\pi\alpha l^2}[H(1-\gamma)H(x-\gamma\rho)H(t-t_{0\alpha})+H(\gamma\rho-x)H(t-T)] \qquad (2.3)$$

где

$$x\cos\theta=l\cos\lambda,\quad \rho\sin\theta=l\sin\lambda,\quad \alpha=(\gamma\rho-x)/l \qquad (2.4)$$

Заменяя $\operatorname{tg}(\varphi-\lambda)$ и $\operatorname{ctg}(\varphi+\lambda)$ через ξ в первом и во втором интегралах соответственно, имеем

$$p=\frac{P_0H(t-t_0)xz}{2\pi^2l^2\rho}\left\{\pi+\frac{\rho\xi}{\alpha x}\left[\operatorname{arctg}\frac{xz(l^2-\xi x)}{\alpha^2y}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{arctg}\frac{y(l^2-\xi x)}{\alpha zx}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha^2y}{xz(l^2-\xi x)}+\operatorname{arctg}\frac{\alpha zx}{y(l^2-\xi x)}\right]\right\}+$$

$$+\frac{P_0H(x)x}{\pi l^2\alpha}[H(1-\gamma)H(x-\gamma\rho)H(t-t_{0\alpha})+H(\gamma\rho-x)H(t-T)] \qquad (2.5)$$

Давление, как видно из (2.5), непрерывно на поверхности $t=T$, $\gamma\rho-x>0$, что и следовало ожидать из физических соображений. Однако, давление вблизи фронтов волн имеет разрыв непрерывности, причем конечный—на полусферическом фронте и бесконечный разрыв порядка $-\frac{1}{2}$ на коническом фронте ($t=t_{0\alpha}$, $\gamma\rho-x<0$). На линии смыкания сферических и конических фронтов волн, то есть на линии пересечения поверхностей $t=t_0$ и $t=t_{0\alpha}$, решение теряет смысл. Оно имеет бесконечный разрыв непрерывности на этих линиях.

Рассмотрим некоторые частные задачи, решение которых получается из (2.5) с помощью предельных переходов.

а) В случае несжимаемой жидкости $c_0\to\infty$ ($\gamma\to\infty$) и решение имеет вид

$$p = \frac{P_0 H(t)\, xz}{2\pi^2 l^2} \left\{ \pi - \frac{\gamma \alpha_0}{x} \left[\operatorname{arctg} \frac{xz(l^2 - \xi x)}{\alpha_0 \gamma^2 y} + \operatorname{arctg} \frac{y(l^2 - \xi x)}{\alpha_0 z x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0 \gamma^2 y}{xz(l^2 - \xi x)} + \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0 z x}{y(l^2 - \xi x)} \right] \right\} + \frac{P_0 H(x) H(t - T)\, z\xi}{\pi l^2 \alpha_0} \qquad (2.6)$$

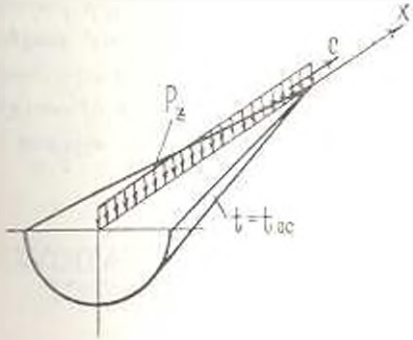
где

$$\alpha_0 = \sqrt{\xi^2 + l^2} \qquad (2.7)$$

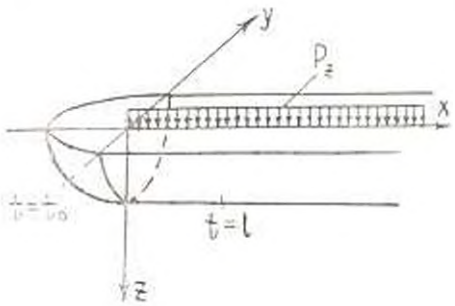
б) Рассмотрим решение (2.5) после длительного времени, когда переходные процессы затухают и $c > c_0$. При этом $H(t-T) = 1$, $H(t-t_0) = 0$ и оставшиеся члены (2.5) дают решение задачи о распространении стационарных волн давлений в полупространстве идеальной сжимаемой жидкости, обусловленные движущимся вдоль прямой постоянным давлением (фиг. 5). Таким образом, получим

$$p = \frac{P_0 H(t - t_0)\, z\xi}{\pi \alpha l^2} \qquad (2.8)$$

Заметим, что для случая $c < c_0$ формула (2.8) не является стационарным решением. В этом случае, при $t \to \infty$, необходимо учесть наличие полусферических волн. Эти вычисления мы не приводим.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

в) Наконец, решение задачи о распространении волн давления в жидком полупространстве, поверхность которого возбуждается внезапно приложенным вдоль некоторой полупрямой постоянным давлением (фиг. 6), получим путем перехода к пределу при $c \to \infty$ ($\gamma \to 0$).

$$p = \frac{P_0 H(t - t_0)\, xz}{2\pi^2 l^2} \left\{ \pi - \frac{\gamma \alpha_*}{x} \left[\operatorname{arctg} \frac{\alpha_* x^2 z}{y \gamma^2} + \operatorname{arctg} \frac{\alpha_* y}{z} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{arctg} \frac{y \gamma^2}{\alpha_* x^2 z} + \operatorname{arctg} \frac{z}{\alpha_* y} \right] \right\} + \frac{P_0 H(x) H(t - T)\, \alpha_* z}{\pi l^2} \qquad (2.9)$$

где

$$\alpha_* = \frac{c_0 t}{\sqrt{c_0^2 t^2 - l^2}} \qquad (2.10)$$

Решения последних задач получаются также указанным здесь методом и совпадают с полученными результатами.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 9 VI 1975

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՃՆՇՄԱՆ ԵՌԱՉԱՓ ՉԿԱՏԱՐՎՈՂ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ԻԴԵԱԼԱԿԱՆ ՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է հեղուկ կիսատարածությունում ճնշման ալիքների տարածման մասին խնդրի լուծումը, երբ կիսատարածության մակերևույթի որևէ կետում կիրառված է ժամանակակից կամայական կախված ճնշում, որն անմիջապես հաստատուն արագությամբ տարածվում է մակերևույթի վրա որոշակի ուղղությամբ։ Խնդրի ճշգրիտ լուծումը ստացվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների և Կանյարդի մեթոդի օգնությամբ։

Այնուհետև քննարկվում է մասնավոր դեպք, երբ կիրառված ճնշումը բան ժամանակի հաստատուն է, որից սահմանային անցման միջոցով, ստացվում է կայունացված ճնշման ալիքների տարածման մասին խնդրի լուծումը։ Այդպիսի ալիքներ առաջանում են հեղուկ կիսատարածությունում մակերևույթի վրա ուղիղ գծով տարածվող հաստատուն ճնշումից։ Բացի այդ, որպես սահմանային դեպք ստացվում է նաև հեղուկի մակերևույթի վրա կիսաուղիղի երկայնությամբ հանկարծակի ազդող հաստատուն ճնշումից առաջացած ալիքների տարածման մասին խնդրի լուծումը։

PROPAGATION OF THREE-DEMENSIONAL NON-STATIONARY PRESSURE WAVES IN A HALF-SPACE OF PERFECT COMPRESSIBLE LIQUID

S. G. SAHAKIAN

Summary

A solution is presented to the propagation problem of pressure waves in a half-space of liquid where at a certain point of its surface the pressure is applied varying arbitrarily with time and propagating immediately in a definite direction over the surface at a constant velocity. The accurate solution to the problem is obtained by the method of integral transformations and that of Cagniard.

Some particular cases are discussed where the applied pressure is constant in time.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chwalczyk F., Raja J.* and *Włodarczyk E.* Propagation of Two-dimensional Non-Stationary Pressure Waves in a Layer of Perfect Compressible Liquid. Proc. Vibr. Probl., v. 14, № 3, 1973.
2. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. McGraw-Hill, N. Y., 1962.
3. *Багдоев А. Г.* и *Мартиросян Л. Н.* Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Изв. АН Арм. ССР. Механика, т. 27, № 5, 1974.
4. *De Hoop A. T.* A Modification of Cagniard's Method for Solving Seismic Pulse Problems. Applied Scientific Research, v. 8, 1959.
5. *Gakenheimer D. C.* Response of an Elastic Half Space to Expanding Surface Loads. Transactions of the ASME, E 37, № 1, 1970.
6. *Саакян С. Г.* Волны в упругом полупространстве, вызванные бегущей осесимметричной нормальной нагрузкой. Изв. АН Арм. ССР. Механика, т. 27, № 1, 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, №6, 1975 Механика

Г. А. БАБАДЖАНЯН, А. Е. ДАНИЕЛЯН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ДЛИННОМ ГАЗОПРОВОДЕ С УЧЕТОМ УГЛА НАКЛОНА ТРУБОПРОВОДА

§ 1. *Уравнения движения и краевые условия*

Рассматривается одномерное нестационарное неизотермическое движение реального (вязкого) газа в длинном газопроводе с учетом влияния угла наклона газопровода. Влияние наклона газопровода на параметры движущегося газа становится существенным в гористой местности или когда газ подается по длинному газопроводу большого диаметра с изменяющимся уклоном (даже незначительным) по отношению к горизонту. На газодинамические величины влияет также и изменение температуры газа вдоль газопровода. Это изменение обусловлено как самим движением газа, так и изменением температуры почвы, по которой проходит газопровод. Изменение температуры почвы вдоль газопровода наблюдается, когда газ подается из южных теплых краев в северные холодные края, в гористых местностях, или когда газ выходит из глубоких скважин на поверхность земли и т. д.

Нестационарность движения газа обусловлена многими факторами. Так, например, неравномерное потребление газа в течение суток, месяца, квартала и года, пусковые и отключающие режимы, различные аварийные случаи и т. п.

Решением аналогичных задач занимались многие исследователи. Так, например, в работах [1—9] рассмотрены задачи при различных геометрических, газодинамических и физико-химических условиях и найдены закономерности движения газа с той или иной точностью.

В настоящей статье принимается, что закон изменения температуры газа вдоль газопровода есть известная функция от координаты. Сделана попытка исследовать движение газа при наличии фактора нестационарности, уклона трубопровода и неизотермичности в указанном смысле.

Движение реального газа при вышеуказанных условиях описывается следующей системой уравнений [1]:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho u^2}{2d} + \rho g \sin \alpha \\
-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \\
p = z \rho R T
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где z — коэффициент сжимаемости газа, p — среднее по сечению трубы давление, ρ — плотность, u — скорость, λ — коэффициент сопротивления, d — диаметр трубы, g — ускорение силы тяжести, x — координата, R — газовая постоянная, t — время, α — угол наклона трубопровода к горизонту, T — абсолютная температура газа (заданная функция от x).

Исключая из системы (1.1) переменные $u(x, t)$, $\rho(x, t)$, получим следующее уравнение относительно квадрата давления:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{T}\frac{dT}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2g\sin\alpha}{zRT}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{4g\sin\alpha}{zRT^2}\frac{dT}{dx}P =$$

$$= \sqrt{-\frac{\lambda}{dzRTP}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2g\sin\alpha}{z^2R^2T^2d}\frac{\partial P}{\partial t}} \tag{1.2}$$

где

$$P(x, t) = p^2(x, t)$$

Исходя из практических целей при решении поставленной задачи зададимся следующими краевыми условиями:

при $x = 0$ $\qquad P = P_н = \text{const}$

при $x = L$ $\qquad \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{\lambda RT_к}{ds^2}G^2(t) - \dfrac{2g\sin\alpha}{RT_к}P_к \qquad (1.3)$

при $t = 0$ $\qquad P(x, 0) = P_0(x)$

где $P_н$ и $P_к$ — значения квадрата давления в начале и в конце трубопровода, $G(t)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения расхода в конце трубопровода, $T_к$ — значение абсолютной температуры газа в конце трубы, L — длина трубопровода, $P_0(x)$ — значение квадрата давления при стационарном режиме работы.

Очевидно, что точное функциональное решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (1.2) при заданных краевых условиях (1.3) не представляется возможным. Для того, чтобы иметь возможность учитывать влияние всех вышеуказанных факторов на параметры движения газа, то есть интегрировать уравнение (1.2) без каких-либо упрощающих допущений или дополнительных предположений, прибегаем к численному интегрированию уравнения (1.2).

§ 2. *Решение уравнения (1.2)*

Предположим, что температура газа изменяется по линейному закону, то есть

$$T(x) = T_н\left(1 + \frac{T_к - T_н}{T_нL}x\right) = T_н(1 + Kx) \tag{2.1}$$

где $K = \dfrac{T_к - T_н}{T_нL}$, а $T_н$ — значение абсолютной температуры газа в начале трубопровода.

Значение функции $P_0(x)$ или решение уравнения (1.2) без правой части будет [8]

$$P_0(x, \alpha) = \frac{P_н (1 + KL)^{\frac{2g\sin\alpha}{RT_нK}} - P_к}{(1 + KL)^{\frac{2g\sin\alpha}{RT_нK}} - (1 - KL)^2} (1 + Kx)^2 -$$

$$- \frac{[P_н (1 + KL)^2 - P_к](1 + Kx)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_нK}}}{(1 + KL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_нK}} - (1 + KL)^2} \tag{2.2}$$

Из второго уравнения системы (1.3) видно, что нестационарность движения обусловлена поведением функции $G(t)$, вид которой выбирается в зависимости от закона изменения расхода газа в конце трубопровода (от характера потребителя).

Предположим, что расход газа в конце трубопровода изменяется по следующему закону

$$G(t, \alpha) = G_0(\alpha)\left(1 - \frac{1}{2}\sin\omega t\right) \tag{2.3}$$

Здесь $G_0(\alpha)$ — расход газа при стационарном режиме работы, $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, где τ—полный период колебания расхода газа в течение суток ($\tau = 24$ *часа*). $G_0(\alpha)$ вычисляется по следующей формуле [8]:

$$G_0(\alpha) = s\left[-\frac{2d}{\lambda RT_н}\left(K + \frac{g\sin\alpha}{RT_н}\right)\frac{P_н(1 + KL)^{\frac{2g\sin\alpha}{RT_нK}} - P_к}{(1 + KL)^{\frac{2g\sin\alpha}{RT_нK}} - (1 + KL)^2}\right]^{1/2} \tag{2.4}$$

Переходя к безразмерным величинам в уравнении (1.2) и в краевых условиях (1.3) с помощью выражений

$$P = P_н\overline{P}, \quad T = T_н\overline{T}, \quad x = L\overline{x}, \quad t = t_0\overline{t}, \quad G = G_0\overline{G} \tag{2.5}$$

получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left[-\frac{1}{zPT}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2Lg\sin\alpha}{z^2RT_нT^2}\frac{\partial P}{\partial t} + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{T}\frac{dT}{dx} - \frac{2Lg\sin\alpha}{zT_нRT}\right)\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4Lg\sin\alpha}{zRT_нT^2}\frac{\partial T}{\partial x}P \tag{2.6}$$

при $x = 0$ $\qquad P = 1$

при $x = 1$ $\qquad \frac{\partial P}{\partial x} = AG^2(t) - \frac{2LP_н\sin\alpha}{P_нRT_н}$ $\qquad$ (2.7)

при $t = 0$ $\qquad P = P_0(x)$

где $A = -\frac{zRT_xLG_0^2}{2dgP_xs^2}$.

$P_н$, $T_н$, L, t_0, G_0 — соответственно характерные давление, температура, длина, время и расход.

Характерное время определяется из уравнения (1.2)

$$t_0 = \sqrt{\frac{L^2}{RT_нd}}$$

Для удобства записи черточки сверху опущены.

Напишем уравнение (2.6) в следующем виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{M}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{C_1 - C_2\sin\alpha}{MT}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2C_1C_2\sin\alpha}{MT^2}P \qquad (2.8)$$

где

$$M = \frac{1}{T}\sqrt{-\frac{T}{zP}\frac{\partial P}{\partial x} - C_2\sin\alpha}$$

$$C_1 = -\frac{dT}{dx}, \qquad C_2 = \frac{2L_g}{zRT_н}$$

Если обозначить

$$N = -\frac{C_1 - C_2\sin\alpha}{MT}, \qquad H = -\frac{2C_1C_2\sin\alpha}{MT^2}$$

уравнение (2.8) примет следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{M}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - N\frac{\partial P}{\partial x} - HP \qquad (2.9)$$

Сравнивая уравнение (2.9) с модельным уравнением (3.1) работы [6], замечаем, что схему и метод численного решения уравнения (3.1) можно применить к решению данной задачи. Конкретно задача решается методом прогонки [10]. Для этой цели на ЭВМ «Раздан-3» составлена программа, реализующая метод прогонки.

Определяя давление из уравнения (2.9), можно вычислить значения плотности, скорости и расхода с помощью следующих формул:

$$\rho = \frac{1}{zRT(x)}p(x, t) \qquad (2.10)$$

$$u(x, t) = \sqrt{-\frac{2dR}{\lambda}\frac{T(x)}{p(x, t)}\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} - \frac{2d\sin\alpha}{\lambda}} \qquad (2.11)$$

$$G(x, t) = \frac{\lambda}{zRT(x)}p(x, t)u(x, t) \qquad (2.12)$$

§ 3. Численный пример

Зададим следующие числовые данные:

$$L = 10^4 \ м \qquad p_н = 25 \ атм$$

$$T_н = 310^0 \qquad p_к = 10 \ атм$$

$$T_к = 280^0 \qquad \varepsilon = 0.012$$

$$K = 50 \ \frac{кГ\,м}{кг\,град} \qquad d = 0.7 \ м$$

$$\alpha = 0^\circ, \ -5^\circ, \ -10^\circ \qquad z = 0.93$$

Для этих данных, вычисляя значения расхода газа по формуле (2.4) и значения квадратов давления по формуле (2.2), получим

$$G_0(0) = 55.4 \ кг/сек, \qquad G_0(-5^\circ) = 31 \ кг/сек$$

$$G_0(-5^\circ) = 73 \ кг/сек$$

$$P_0(x, 0) = 4.56(1 - 0.09677\,x)^2 - 3.56$$

$$P_0(x, -5^\circ) = -0.305(1 - 0.09677\,x)^2 + 1.305(1 - 0.09677\,x)^{11.9363}$$

$$P_0(x, -5^\circ) = 1.276(1 - 0.09677\,x)^2 - 0.276(1 - 0.09677\,x)^{-11.9363}$$

$$G(t) = G_0(x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 0.13t\right)$$

Для решения задачи интервал $[0; 1]$, соответствующий длине газопровода, разбивается на 20 участков, то есть

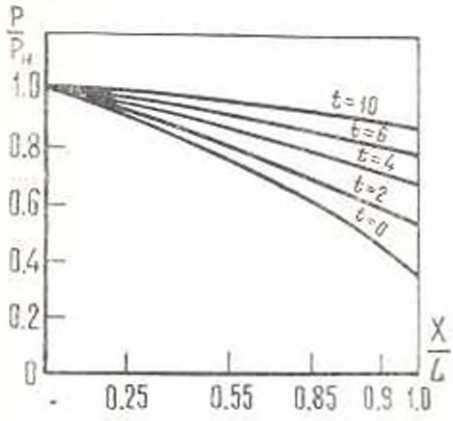
$$h = 0.05; \quad k = 0.01$$

где h—шаг по переменной x, а k—шаг по переменной t.

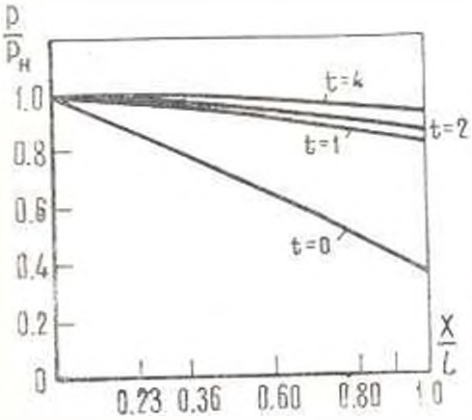
Употребляется четырехточечная неявная схема и обеспечивается практическая сходимость метода [11].

Распределения давлений и скоростей по длине газопровода в отдельные моменты времени приведены на фигурах 1, 2, 3, 4, 5, 6. На фиг. 1, 2 и 3 изображены графики распределения давлений соответственно для случаев $\alpha = 0$, -5° и -5°, а на фигурах 4, 5 и 6 — графики распределения скоростей для этих же значений угла наклона. Из фиг. 2 и 3 видно, что при увеличении угла наклона α давление увеличивается, а при уменьшении, наоборот — уменьшается. Например, давление при $\alpha = -5^\circ$ в момент $t = 2$ в конце трубопровода по сравнению со значением давления при $\alpha = 0$ увеличивается в 1.6 раза. Это расхождение с течением времени уменьшается.

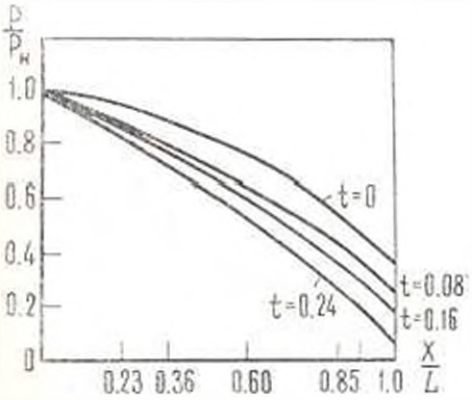
Из фигуры 5 видно, что в отличие от изотермического движения, графики скоростей при $\alpha = -5^\circ$, начиная с некоторого момента времени, меняют направление вогнутости относительно оси OX.



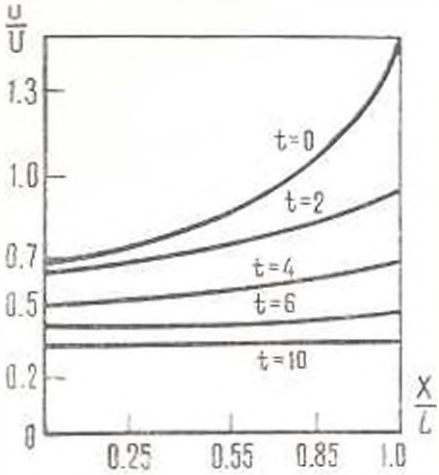
Фиг. 1.



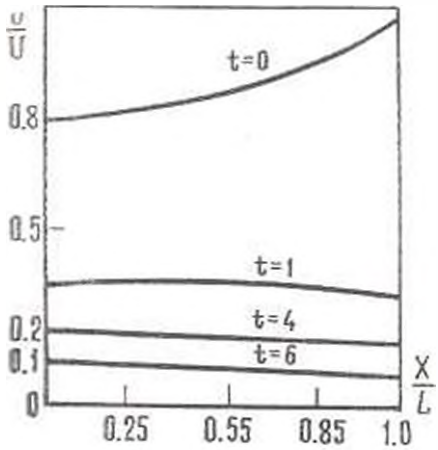
Фиг. 2.



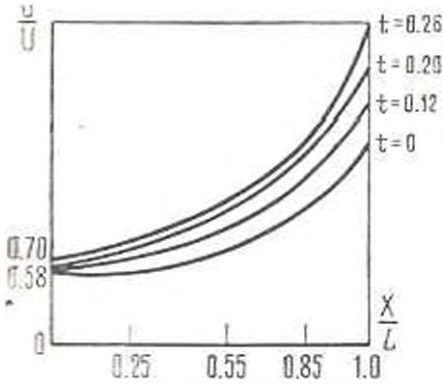
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Таблица 1

Изменение расхода газа при $\alpha = 0$

t \ x	0	0.25	0.40	0.55	0.65	0.80	0.90	0.95	1
0	3.073	3.069	3.066	3.061	3.057	3.046	3.031	3.011	2.990
1	3.012	3.006	2.996	2.981	2.967	2.938	2.914	2.873	2.840
2	2.831	2.825	2.815	2.798	2.783	2.753	2.728	2.686	2.670
3	2.623	2.618	2.608	2.594	2.582	2.557	2.536	2.512	2.490
4	2.421	2.417	2.410	2.398	2.388	2.368	2.352	2.333	2.320
5	2.235	2.232	2.226	2.217	2.209	2.193	2.180	2.165	2.150
6	2.068	2.066	2.061	2.053	2.047	2.035	2.025	2.013	2.001
7	1.922	1.920	1.916	1.910	1.905	1.896	1.888	1.879	1.870
8	1.798	1.797	1.794	1.789	1.785	1.778	1.772	1.766	1.760
9	1.699	1.697	1.695	1.692	1.689	1.684	1.680	1.675	1.670
10	1.625	1.624	1.623	1.620	1.619	1.615	1.612	1.609	1.600

Таблица 2

Изменение расхода газа при $\alpha = 5$

t \ x	0	0.25	0.40	0.55	0.65	0.80	0.90	0.95	1
0	6.571	5.978	5.559	5.162	4.908	4.543	4.309	4.082	3.97
1	2.779	2.764	2.733	2.686	2.647	2.576	2.522	2.464	2.43
2	2.188	2.185	2.179	2.172	2.165	2.152	2.141	2.129	2.12
3	1.884	1.882	1.877	1.870	1.865	1.854	1.845	1.835	1.82
4	1.572	1.570	1.566	1.561	1.556	1.546	1.539	1.531	1.52
5	1.243	1.241	1.238	1.233	1.229	1.221	1.215	1.208	1.20
6	0.875	0.874	0.872	0.868	0.865	0.859	0.854	0.848	0.84
7	0.355	0.354	0.353	0.351	0.348	0.344	0.340	0.336	0.331

Таблица 3

Изменение расхода газа при $\alpha = 5°$

t \ x	0	0.25	0.40	0.55	0.65	0.80	0.90	0.95	1
0	2.026	2.145	2.252	2.378	2.472	2.627	2.737	2.834	2.842
0.04	2.172	2.210	2.284	2.391	2.477	2.621	2.731	2.832	2.845
0.08	2.241	2.268	2.326	2.415	2.491	2.625	2.724	2.808	2.794
0.12	2.294	2.316	2.364	2.441	2.507	2.628	2.716	2.781	2.720
0.16	2.338	2.356	2.398	2.465	2.525	2.632	2.710	2.752	2.621
0.20	2.385	2.391	2.428	2.488	2.544	2.636	2.703	2.719	2.473
0.24	2.409	2.422	2.455	2.508	2.555	2.640	2.696	2.681	2.142
0.26	2.424	2.436	2.467	2.517	2.560	2.641	2.692	2.660	2.630

Сравнивая результаты при $\alpha = +5^\circ$ и $\alpha = -5^\circ$, замечаем, что изменение угла наклона газопровода приводит к существенным количественным изменениям параметров газа.

Изменения расхода газа при $\alpha = 0, \pm 5^\circ$ приведены в таблицах 1, 2 и 3. Из таблиц видно, что при одинаковых остальных условиях расход в случае $\alpha > 0$ меньше, чем при $\alpha < 0$. Сравнивая результаты, полученные в этой работе, с результатами работы [7], можно утверждать, что неизотермичность движения также влияет на характерные величины газа.

Ереванский государственный
университет

Поступила 17 VI 1975

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ, Լ. Ե. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԳԱԶԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՈՉ ԻԶՈԹԵՐՄ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ ԳԱԶԱՄՈՒՂԻ ԹԵՔՈՒԹՅԱՆ ԱՆԿՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է իրական գազի ոչ ստացիոնար շարժումը երկար գազամուղում: Հետազոտվում է գազամուղի թեքության անկյան և գազի ջերմաստիճանի փոփոխության ազդեցությունը գազադինամիկական պարամետրերի վրա.

Խնդիրը բերվում է մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի ոչ գծային դիֆերենցյալ հավասարման լուծման որոշակի եզրային պայմանների առկայությամբ: Ստացված հավասարումը լուծվում է թվային մեթոդով «Հրազդան—3» ԷՀՄ-ի վրա:

Որոշվում են հոսման, արագության և ելքի փոփոխման օրենքները վերը նշված պայմանների առկայության դեպքում:

NON-STATIONARY, NON-ISOTHERMAL MOTION OF REAL GAS IN A LONG GAS PIPE WITH REGARD FOR THE EFFECT OF THE LATTER'S SLOPE

G. A. BABADJANIAN, L. E. DANIELIAN

S u m m a r y

Non-stationary motion of real gas in a long gas pipe is considered with regard for the effect of the latter's angle of slope and of motion non-isothermality on gasodynamic chacteristics. The problem is reduced to the solution of a non-linear differential equation of the second order in partial derivatives with fixed boundary conditions. The differential equation obtained is solved by the difference method. The laws of variation in pressure, velocity and discharge are found with regard for the above factors.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гос. изд. тех.-теор. литературы, М.—Л., 1951.
2. *Галиулин З. Т., Черникин В. И.* Некоторые вопросы неустановившегося движения в трубопроводах. Изв. ВУЗ-ов, «Нефть и Газ», № 12, 1960.
3. *Бабаджанян Г. А.* Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. ВУЗ-ов, «Нефть и Газ», № 1, 1961.
4. *Шалимов Б. В.* Неизотермическое течение реального газа в газопроводе. ИФЖ, т. VI, № 2, 1963.
5. *Кривошеин Б. Л., Минскер Е. М., Радченко В. П., Ходонович И. Е., Хубларян М. Г.* ИФЖ, т. I, № 4, 1967.
6. *Бабаджанян Г. А., Даниелян Л. Е.* Неустановившееся движение реального газа в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 6, 1971.
7. *Бабаджанян Г. А.* Нестационарное движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVII, № 3, 1974.
8. *Бабаджанян Г. А.* Стационарное неизотермическое движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVIII, № 3, 1975.
9. *Горохов Н. Г.* К вопросу о неустановившемся режиме расчеты «горячих» трубопроводов. Изв. ВУЗ-ов, «Нефть и Газ», № 5, 1973.
10. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений, т. II. Гос. изд. физ.-мат. литературы, М., 1960.
11. *Рихтмайер Р. Д.* Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 6, 1975 Механика

А. П. СЕНРАНЯН

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛОК ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО ПРОГИБАМ

Рассматриваются задачи проектирования упругих балок минимального веса при ограничениях по прогибам, наложенным по всему пролету балки. Варьируемой функцией служит толщина балки, на минимальное значение которой также наложено ограничение в виде неравенства. Сходная по постановке задача без ограничения по толщине и с односторонним ограничением по прогибам рассмотрена автором [1], статически определимые конструкции с различными ограничениями рассмотрены в [2].

1. *Постановка задачи.* Уравнение изгиба упругой балки, записанное для безразмерных переменных, имеет следующий вид (сечение балки предполагается прямоугольным)

$$(h^3(x)\,w''(x))'' - q(x) = 0, \qquad x \in (0,\ 1) \tag{1.1}$$

где $h(x) = H(x)/L$, $w(x) = W(x)/L$, $q(x) = 3Q(x)/2EB$. В этих уравнениях E, B, L — модуль упругости, ширина и длина балки; $2H(x)$, $W(x)$, $Q(x)$ — соответственно функции толщины, прогибов и распределенной нагрузки, приложенной к балке; $h(x)$, $w(x)$, $q(x)$ — соответствующие названным величинам безразмерные функции. Относительно граничных условий предполагается, что каждый из концов либо жестко заделан, либо свободно оперт

$$\begin{aligned} &w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 \quad \text{либо} \quad h^3 w''|_{x=0} = 0 \\ &w(1) = 0, \quad w'(1) = 0 \quad \text{либо} \quad h^3 w''|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Функция нагрузки $q(x)$ предполагается непрерывной функцией, не обращающейся тождественно в нуль на любом конечном интервале $X \subset [0,\ 1]$.

На функцию прогибов $w(x)$ наложим ограничение

$$|w(x)| \leqslant w_0 \tag{1.3}$$

а на функцию толщины $h(x)$ — ограничение вида

$$h(x) \geqslant \varepsilon \tag{1.4}$$

В этих неравенствах w_0 и ε — заданные безразмерные положительные константы.

Безразмерный объем балки равен

$$v = \int_0^1 h(x)\,dx \tag{1.5}$$

Для получения соответствующей размерной величины V интеграл (1.5) следует умножить на $2BL^2$.

В этих предположениях сформулируем оптимальную задачу: требуется найти непрерывную функцию $h^0(x)$ и непрерывно дифференцируемую функцию $w^0(x)$, удовлетворяющие соотношениям (1.1)—(1.4) так, что $h^0(x)$ сообщает функционалу (1.5) минимальное значение.

2. *Необходимые условия оптимальности.* Для получения необходимых условий оптимальности поставленную задачу перепишем в терминах теории оптимального управления. С этой целью сделаем замену переменных $w(x) = y_1(x)$, $w'(x) = y_2(x)$, $h^3w'' = y_3(x)$, $(h^3w'')' = y_4(x)$, с помощью которой краевую задачу (1.1), (1.2) сведем к системе уравнений

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{y}_1 = y_2 & y_1(0) = 0, & y_1(1) = 0 \\ \dot{y}_2 = y_3/h^3 & y_2(0) = 0 \quad \text{либо} & y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_3 = y_4 & y_3(1) = 0 \quad \text{либо} & y_3(1) = 0 \\ \dot{y}_4 = q & & \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Точка над символом означает операцию дифференцирования. Ограничение (1.3) для удобства запишем в виде

$$G(y) = \max(y_1 - w_{0s} - y_1 - w_0) \leq 0 \qquad (2.2)$$

Отметим, что функция $w(x)$ (или $y_1(x)$) может выходить на ограничение лишь в отдельных внутренних точках отрезка $[0, 1]$. Действительно, предположив, что $w(x) \equiv w_0$, $x \in Y \subseteq [0, 1]$, из уравнения (1.1) получим $q(x) \equiv 0$, $x \in Y$, что противоречит предположению о неравенстве нулю функции $q(x)$ на конечном интервале. Равенство в соотношении (1.3) (или (2.2)) не может достигаться в граничных точках отрезка $[0, 1]$ ввиду условий (1.2). В теории оптимального управления ограничение вида (2.2) называется ограничением на фазовые координаты.

На управление, которым в данной задаче служит функция $h(x)$, как и прежде, налагается ограничение (1.4).

Если непрерывное управление $h_0(x)$ и непрерывная вектор-функция $y^0(x) = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0)$ таковы, что $h^0(x)$ минимизирует функционал (1.5) при уравнении состояния и граничных условиях (2.1), а также ограничениях (1.4), (2.2), то согласно результатам теории оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты [3] найдется вектор-функция $p(x)$, $p(x) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, число $\nu^0 \geq 0$, вектор $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и мера $d\nu(x)$, сосредоточенная на множестве $R = \{x \in [0, 1]: G(y^0(x)) = 0\}$ и неотрицательная на нем, так, что $p(x)$ и ν^0 не равны нулю одновременно и

$$
\left.
\begin{aligned}
&p_1 = a_1 - \int_x^1 G_g(y^0)\,d\psi(x), && p_1(0) = 0 \text{ либо } p_1(0) = 0\\
&p_2 = a_2 - \int_x^1 p_1\,dx, && p_2(1) = 0 \text{ либо } p_2(1) = 0\\
&p_3 = a_3 - \int_x^1 p_2/h^3\,dx, && p_4(0) = 0 \qquad p_4(1) = 0\\
&p_4 = a_4 - \int_x^1 p_3\,dx,
\end{aligned}
\right\} \tag{2.3}
$$

а также справедливо неравенство

$$
(\lambda^0 + p_2 y_3^0/h^{0\,3})(h - h^0) \geq 0 \tag{2.4}
$$

для всех $h \geq \varepsilon$ и всех $x \in [0, 1]$.

В первом уравнении (2.3) производная понимается в смысле Фреше, ее значение равно $G_g' = \operatorname{sgn}(y_1)$.

Из уравнения (2.4) имеем

$$
h^0(x) = \begin{cases} |1 - p_2 y_3^0/\lambda^0|^{1/4}, & -p_2 y_3^0/\lambda^0 > \varepsilon^4 \\ \varepsilon, & -p_2 y_3^0/\lambda^0 \leq \varepsilon^4 \end{cases} \tag{2.5}
$$

Вследствие того, что ограничение (2.2) выходит на равенство лишь в отдельных внутренних точках отрезка $[0, 1]$, то первое уравнение (2.3) можно записать в виде

$$
p_1 = \sum_i w_1^i \delta(x - x_1^i) - \sum_i w_2^i \delta(x - x_2^i) \tag{2.6}
$$

где w_1^i, w_2^i — положительные константы, значком δ обозначена дельта-функция, $x_1^i \in R_1$, $R_1 = \{x_1^i : y_3(x_1^i) = w_0\}$; $x_2^i \in R_2$, $R_2 = \{x_2^i : y_1(x_2^i) = -w_0\}$.

С использованием (2.6) из (2.3) последовательным дифференцированием и подстановкой одного уравнения в другое получим одно уравнение для функции $p_1(x)$

$$
(h^3 p_1'(x))'' = -\sum_i w_1^i \delta(x - x_1^i) + \sum_i w_2^i \delta(x - x_2^i) \tag{2.7}
$$

с граничными условиями $p_1(0) = p_1(1) = 0$; $p_1'(0) = 0$ либо $h^3 p_1'|_{x=0} = 0$; $p_1'(1) = 0$ либо $h^3 p_1'(x)|_{x=1} = 0$. Сравнивая полученную краевую задачу с (1.1), нетрудно заметить, что она описывает изгиб той же балки с толщиной $h(x)$ и функцией прогибов $p_1(x)$ с идентичными условиями закрепления по краям, но с нагрузкой типа сосредоточенных сил, величиной $-w_1^i$ и w_2^i, приложенных в точках $x_1^i \in R_1$, $x_2^i \in R_2$, то

есть там, где функция прогибов $w(x)$ под действием заданной нагрузки $q(x)$ выходит на ограничения w_0 и $-w_0$ соответственно. Величина $-p_1 q_2^0$ из (2.5) есть не что иное, как произведение изгибающих моментов от описанных выше сосредоточенных сил и нагрузки $q(x)$, приложенной к балке.

3. Пример 1: шарнирно опертая балка. Рассмотрим шарнирно опертую балку, нагруженную симметрично расположенными относительно центра сосредоточенными силами величиной Q, приложенными в точках $x=0.1$ и $x=0.9$, и противоположно направленной им сосредоточенной силой той же величины Q, приложенной в центре пролета $x=0.5$. Направление силы, приложенной в центре, будем считать положительным и прогиб отсчитывать в этом направлении. Для рассматриваемого случая уравнение (1.1) можно проинтегрировать дважды и вследствие симметрии задачи рассматривать на отрезке $[0, 0.5]$ с граничными условиями $w(0)=0$, $w'(0.5)=0$. Полученное уравнение примет вид

$$h^3 w' = m(x), \text{ где } m(x) = \begin{cases} \dfrac{qx}{2}, & 0 \leq x \leq 0.1 \\ q\dfrac{(x-0.2)}{2}, & 0.1 \leq x \leq 0.5 \end{cases} \tag{3.1}$$

$q = 3Q/2EBL$.

Хотя требование, наложенное в п. 1 на функцию распределенной нагрузки $q(x)$, нарушается в рассматриваемом примере, тем не менее, поставив оптимальную задачу непосредственно для уравнения (3.1) с ограничениями (1.3), (1.4) и учитывая, что непрерывная функция $m(x)$ обращается в нуль лишь в точке $x=0.2$, можно показать справедливость необходимых условий оптимальности, полученных в предыдущем параграфе и в этом случае. Из симметрии задачи следует, что $w(x)$ имеет максимум в центре, поэтому функция $p_1(x) = -\mu_1 \cdot x/2$, $x \leq 0.5$, и с учетом $q_2^0(x) = m(x)$ условие (2.5) можно записать следующим образом:

$$h^3(x) = \begin{cases} \alpha\sqrt{x(x-0.2)}, & 0.2 < x^* \leq x \leq 0.5 \\ \alpha, & 0 \leq x \leq x^* \end{cases} \tag{3.2}$$

где α — константа, подлежащая определению, $\alpha = (q\mu_1/4\mu^0)^{1/4}$, а

$$x^* = 0.1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{0.01 + (\alpha/q)^2} \tag{3.3}$$

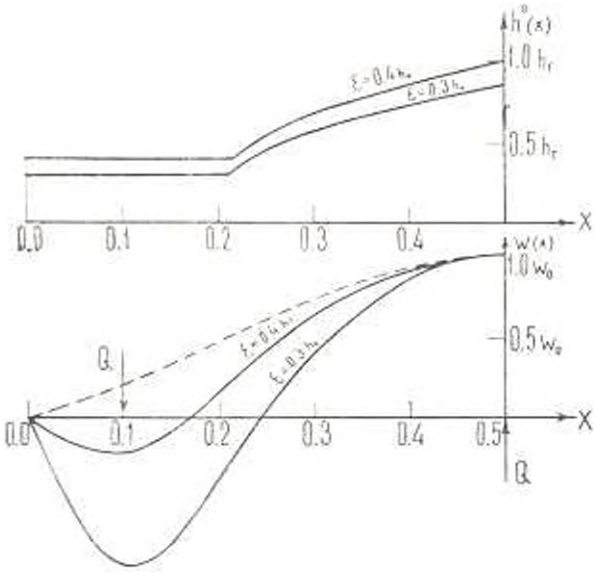
Функция прогибов $w(x)$, получаемая интегрированием уравнения (3.1) с использованием граничных условий $w(0)=0$, $w'(0.5)=0$, выражается соотношением

$$w(x) = x\int_x^{0.5} m(x)\, h^{-3}(x)\, dx - \int_0^x x m(x)\, h^{-3}(x)\, dx \tag{3.4}$$

Из условия $w(0.5) = w_0$ с учетом (3.2) получим

$$\int_{\delta}^{x^*} \frac{xm(x)}{z^3}\,dx - \int_{x^*}^{0.5} \frac{xm(x)\,dx}{z^3[x(x-0.2)]^{3/2}} = w_0 \tag{3.5}$$

Из уравнений (3.3), (3.5) по заданным w_0, z можно определить x^* и δ. Эти уравнения решались методом последовательных приближений на ЭВМ, в качестве начального приближения бралось $x^* = 0.2$, затем из (3.5) определялось δ, по нему из (3.3) находилось x^* и т. д., численное интегрирование производилось методом трапеций. Вычислив значения x^*, δ, из (3.2), (3.4) найдем $h^0(x)$, $w(x)$.



Фиг. 1.

Для балки постоянной толщины h_c, удовлетворяющей условию $w(0.5) = w_0$, из (3.4) имеем $h_c = 0.1\,(8.5\,q_c w_0)^{1/3}$. Для удобства вычислений z бралось в виде $z = \varkappa h_c$, $0 < \varkappa < 1$. На фиг. 1 приведены графики функций $h^0(x)$, $w(x)$ для значений $z = 0.4\,h_c$ и $z = 0.3h_c$; пунктирной линией отмечена функция прогибов $w(x)$ для балки постоянной толщины. Выигрыш в весе по сравнению с балкой постоянной толщины значителен: для значения $z = 0.4h_c$ он составляет 39.9%, для $z = 0.3h_c$ — 50.7%. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что для значений $z < 0.294h_c$ функция $w(x)$ выходит и на нижнее ограничение, однако расчет оптимальных толщин для этих значений z затруднителен ввиду сложностей вычислительного характера.

4. Балка, защемленная с обоих концов. Рассмотрим случай жесткой заделки на обоих концах балки и погонной нагрузки $q(x)$, распределенной по линейному закону $q(x) = q_c x$, где q_c — безразмерная константа,

$q_0 = 3Q_0/2EB$. Проинтегрируем уравнение равновесия (1.1) с учетом граничных условий $w(0)=0$, $w(1)=0$, $w'(0)=0$, $w'(1)=0$. В результате имеем

$$w'(x) = q_0 \int_0^x (s^3/6 - b_1 s + b_2)/h^3(s)\, ds \tag{4.1}$$

$$w(x) = q_0 \int_0^x (x - s)(s^3/6 - b_1 s + b_2)/h^3(s)\, ds \tag{4.2}$$

где b_1, b_2 — константы интегрирования, определяемые условиями $w(1)=0$, $w(1)=0$, то есть из системы линейных уравнений вида

$$\begin{gathered} \int_0^1 (s^3/6 + b_1 s + b_2)/h^3(s)\, ds = 0 \\ \int_0^1 s(s^3/6 + b_1 s + b_2)/h^3(s)\, ds = 0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

Очевидно, что кубическая парабола $s^3/6 + b_1 s + b_2$ не может на отрезке [0, 1] не менять знака или менять его один раз, ибо в противном случае для любой непрерывной положительной функции $h(x)$ уравнения (4.3) не удовлетворялись бы. Следовательно, возможен лишь случай, когда парабола пересекает ось x дважды, что возможно лишь при $b_2 > 0$, $b_1 < 0$. Отсюда из вида (4.1), (4.2) и граничных условий следует, что для любой непрерывной функции $h(x)$ непрерывно-дифференцируемая функция $w(x)$ имеет один максимум внутри отрезка [0,1]. Эти рассуждения, столь очевидные механику, приведены здесь для строгости построения оптимального решения. Допустим, что функция $w(x)$ имеет максимум в точке x_1, $w(x_1) = w_0$. Тогда уравнение (2.7) примет вид $(h^3 p_4')' = -\mu_1 \delta(x - x_1)$. Проинтегрировав его с учетом граничных условий $p_1(0) = p_4(1) = 0$, $p_2(0) = p_4(1) = 0$, имеем

$$p_4(x) = \mu_1 \int_0^x (x - s)(f(s, x_1) + c_1 s + c_2)/h^3(s)\, ds \tag{4.4}$$

где $f(s, x_1) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant x_1 \\ x_1 - s, & x_1 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$, c_1 и c_2 — константы интегрирования, определяемые из системы линейных уравнений (4.3), в которой вместо функции $s^3/6$ следует положить $f(s, x_1)$, а вместо b_1, b_2 — c_1 и c_2 соответственно. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, заключим, что функция $f(s, x_1) + c_1 s + c_2$ дважды меняет знак на отрезке [0, 1], что возможно при $c_1 < 0$, $c_2 > 0$. Поскольку в рассматриваемом случае функции $p_2(x)$ и y_2 определяются выражениями

$p_2(x) = \mu_2(f(x, x_1) + c_1 x + c_2)$, $y_1'(x) = q_0(x^3/6 + b_1 x + b_2)$, то уравнение (2.5) можно записать в виде

$$h^0(x) = \begin{cases} \varkappa[-(f(x, x_1) + c_1 x + c_2)(x^3/6 + b_1 x + b_2)]^{1/3}, & \varkappa^4 p_2 y_1' > \varkappa^4 \\ 0, & -\varkappa^4 p_2 y_1' \leq \varkappa^4 \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\varkappa = (\mu_1 q_0/\mu_2)^{1/4}$. Из условия максимума функции $w(x)$ в точке x_1 имеем $w'(x_1) = 0$, $w(x_1) = w_0$. Или, используя (4.1), (4.2), получим

$$\int_0^{x_1} (s^3/6 + b_1 s + b_2)\, h^3(s)\, ds = 0 \quad (4.6)$$

$$q_0 \int_0^{x_1} (x_1 - s)(s^3/6 + b_1 s + b_2)\, h^3(s)\, ds = w_0 \quad (4.7)$$

Таким образом, для неизвестных констант b_1, b_2, c_1, c_2, x_1, $\varkappa$ имеем 6 уравнений: две системы уравнений (4.3), записанных для b_1, b_2, а затем для c_1, c_2, а также уравнения (4.6), (4.7), в которых $h(x)$ определяется выражением (4.5). Величины $\varkappa$, w_0, q_0 — параметры задачи. Решение этих нелинейных уравнений создает немалые трудности для вычислителя, поэтому предложим иную схему вычислений, основанную на градиентном методе в пространстве управляющих функций.

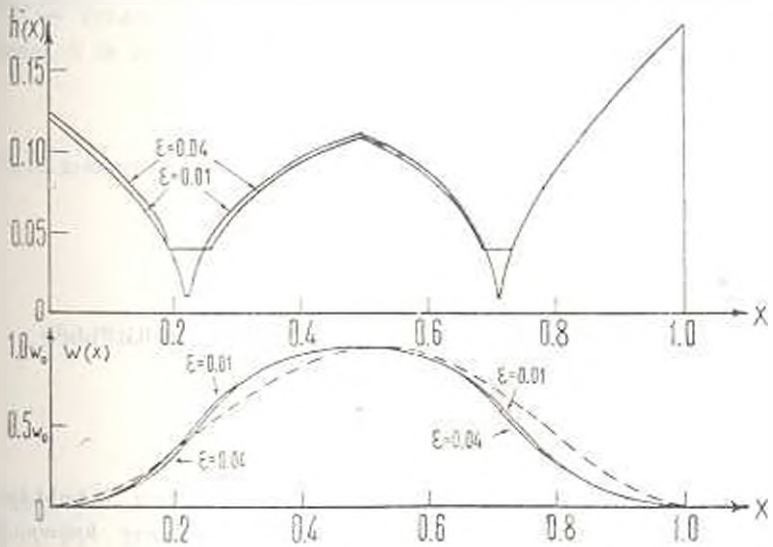
Соотношение (2.4) есть не что иное, как условие максимума функции Гамильтона $H = -\mu_0 h + p_1 y_2 + p_2 y_2/h^3 + p_3 y_1 - p_1 q$ в точке h^0, то есть условие $\left.\dfrac{\partial H}{\partial h}\right|_{h=h^0} (h - h^0) \leq 0$ для любых $h \geq \varkappa$. С учетом этого обстоятельства запишем итерационную формулу градиентной процедуры в следующем виде:

$$h^{(n+1)}(x) = \begin{cases} h^{(n)}(x)\left[\left(\dfrac{\varphi^{(n)}(x)}{\bar{\varphi}^{(n)}} - 1\right)\Big/ 2^m + 1\right], & x \in \Omega^{(n)} \\ \varkappa(y_{1\max}^{(n)} q_0/w_0)^{1/3}, & x \in [0, 1] \setminus \Omega^{(n)} \end{cases} \quad (4.8)$$

где n — номер итерации; $\varphi^{(n)}(x) = -p_2^{(n)}(x)\, y_3'^{(n)}(x)\, h'^{(n)}(x)$; $\bar{\varphi}^{(n)} = \int_{\Omega^{(n)}} \varphi^{(n)}(x)\, dx$ — среднее значение функции $\varphi^{(n)}(x)$; m — число 2—3; $\Omega^{(n)}$ — область, определяемая соотношением $\Omega^{(n)} = \{x : h^{(n)}(x) \geq \varkappa(y_{1\max}^{(n)} \times q_0/w_0)^{1/3},\ \varphi^{(n)}(x) > 0\}$, $\Omega^{(n)} \subset [0, 1]$; $y_{1\max}^{(n)}$ — максимальное значение функции $y_1(x)$, то есть $w(x)$ на n-ой итерации.

Пусть итерационный процесс (4.8), начинаемый с произвольной функции $h^{(0)}(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, сходится к некоторой функции $h(x)$. Тогда из (4.8) следует, что функция $h^0(x) = h(x)(w_0/y_{1\max} q_0)^{1/3}$ будет

решением поставленной задачи. Действительно, из (4.8) следует, что на области Ω выполняется $\varphi(x) = \varphi = \text{const}$, а на области $[0, 1] \setminus \Omega$ $h^0(x) = \varepsilon$, то есть условие (4.5), причем $\varphi = \varphi^{-1/4}$. Далее, поскольку функция $y_1(x)$ (то есть $w(x)$) при каждом значении своего аргумента является однородным функционалом от функции $h(x)$ со степенью однородности -3, то $y_1^0(x) = y_1(x)\, w_0 / y_{1\max}$ и $\max\limits_{x \in [0, 1]} y_1^0(x) = w_0$ в соответствии с уравнением (4.7). Таким образом, выполнены все необходимые условия оптимальности функции $h^0(x)$, что и требовалось показать.



Фиг. 2.

Вычисления производились в следующем порядке: отрезок $[0, 1]$ делился на N частей, задавалось начальное приближение $h^{(0)}(x) = 0$, из системы (4.3) находились константы $b_1^{(0)}$ и $b_2^{(0)}$ и вычислялись функции $y_1^{(0)}(x) = q_0(x^3/6 - b_1^{(0)}x + b_2^{(0)})$ и $y_1^{(0)}(x) = w^{(0)}(x)$ по формуле (4.2), затем последовательным перебором с применением квадратичной интерполяции находили точку $x_1^{(0)}$ максимума функции $y_1^{(0)}(x)$, максимальное значение $y_1^{(0)}(x_1^{(0)}) = y_{1\max}^{(0)}$ и функцию $f(x, x_1^{(0)})$, потом решением системы уравнений (4.3), записанной для констант $c_1^{(0)}$ и $c_2^{(0)}$, определяли их и вычисляли функцию $p_2(x) = f(x, x_1^{(0)}) - c_1^{(0)}x - c_2^{(0)}$, затем функцию $\varphi^{(0)}(x)$ и ее среднее значение $\bar{\varphi}^{(0)}$, наконец, по формуле (4.8) производили первую итерацию и т. д. Если последовательность $\max\limits_{x \in \Omega^{(k)}}(\varphi^{(k)}(x)/\bar{\varphi}^{(k)} - 1)$ не убывала, то значение m в формуле (4.8) увеличивалось на единицу. Итерационный процесс останавливался при

выполнении условия $\max\limits_{x \in [0,1]} (\bar{\varphi}^{(N)}(x)/\bar{\varphi}^{(N-1)} - 1) < \varepsilon_1$, где ε_1 — точность вычислений. При проводимых вычислениях число N бралось равным 100, а ε_1 равнялось 10^{-4}. На фиг. 2 приведены графики функций $h^0(x)$ и $w(x)$, исчисляемые в единицах $(q_0/w_0)^{1/3}$ и w_0 соответственно, для значений $\varepsilon = 0.01\,(q_0/w_0)^{2/3}$ и $\varepsilon = 0.04\,(q_0/w_0)^{2/3}$. Оптимальные толщины имеют в точках выхода на ограничения угловые точки. Функции $w(x)$ выходят на ограничение w_0 в точках $x_1 = 0.4944$ для $\varepsilon = 0.01\,(q_0/w_0)^{2/3}$ и $x_1 = 0.4926$ для $\varepsilon = 0.04\,(q_0/w_0)^{2/3}$. Толщина балки постоянного сечения, удовлетворяющей условию $w_{\max} = w_0$, равна $h = 0.1094\,(q_0/w_0)^{1/3}$, функция прогибов этой балки отмечена на фиг. 2 пунктирной линией. Выигрыш в весе для рассмотренных значений ε составляет $\sim 18\%$.

Автор благодарит Ф. А. Черноуська и Н. В. Баничука за полезные советы и обсуждение результатов.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 26 IX 1973

Ա. Պ. ՍԵՅՐԱՆՅԱՆ

ՀԵՂՈՒՆՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ ԸՍՏ ՃԿՎԱԾՔՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում էին մինիմալ կշիռ ունեցող առաձգական հեծանների նախագծման խնդիրներ, որոնց մեջ ճկվածքը հեծանի ամբողջ երկարությամբ սահմանափակված է։

Բերն վարիացիոն ֆունկցիա ընդունված է հեծանի հաստությունը, որի ամենափոքր արժեքը նույնպես սահմանափակված է։ Օգտագործելով սահմանափակված կոորդինատով օպտիմալ կառավարման տեսության արդյունքները, ստացված են օպտիմումի անհրաժեշտ պայմանները։

Առաջարկված է խնդրի լուծման թվային ալգորիթմ։ Դիտարկված երկու օրինակների համար բերված են թվային արդյունքները։

OPTIMUM DESIGN OF BEAMS WITH DEFLECTION CONSTRAINTS

A. P. SEYRANIAN

Summary

Some problems are examined on designing elastic beams of minimum weight with deflection constraints throughout the beam span. The

variable function is the beam thickness whose minimum value is also constrained. Using the results of the optimum control theory with constrained phase coordinates, the necessary conditions of optimality are obtained. Two examples illustrated with numerical analysis are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haaxy N. G.* Optimal design of elastic beams for minimum-maximum deflection. J. of Appl. Mech., vol. 37, No. 1, 1971.
2. *Haug E. J., Kirmser P. G.* Minimum weight design of beams with inequality constraints on stress and deflection. J. of Appl. Mech., vol. 34, 1967, pp. 999—1003.
3. *Гирсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. Изд-во МГУ М., 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, №6, 1975 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАКОН УПРУГОСТИ ДЛЯ АРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

В связи с тем значением, которое приобрели композиционные материалы в технике, все более возрастает необходимость иметь конкретную расчетную схему для каждого материала. Однако, порой их физические свойства так разнообразны и так резко отличаются от свойств «традиционных» материалов, что имеющиеся расчетные схемы иногда не дают удовлетворительных результатов.

В работе [1] приводятся основные соотношения теории упругости анизотропного тела, разносопротивляющегося напряжениям растяжения и сжатия. Соотношения между напряжениями и деформациями несжимаемого упругого тела, армированного однонаправленной системой упругих нитей, когда материал по направлению нитей разно сопротивляется деформациям растяжения и сжатия, приводятся в [2]. В работе [3] дается метод нахождения связи между напряжениями и деформациями в зависимости от механических характеристик упругой среды и армирующего материала.

В настоящей работе в рамках геометрически линейной теории упругости исследуется физический закон связи между напряжениями и деформациями упругого однородного и изотропного материала, армированного следующими способами: а) строго однонаправленной системой нитей, б) двумя однонаправленными системами нитей так, что в каждой точке композиционного материала эти системы встречаются под прямым углом, в) тремя однонаправленными системами нитей так, что в пространстве армированного материала эти системы образуют трехмерную ортогональную сетку.

Во всех рассмотренных случаях принимается, что упругие нити равномерно заполняют упругую среду так, что полученной композиционной среде можно придать свойство однородности в том смысле, что ее упругие свойства одинаковы в каждой точке при условии, что направления криволинейной ортогональной системы координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, к которой эти свойства отнесены, совпадают с направлениями нитей.

Предполагаем также, что модуль упругости нитей значительно больше, чем окружающей их среды и при сжатии нитей у них возникает некоторая форма неустойчивости, вследствие чего композиционный материал разно сопротивляется деформациям растяжения и сжатия [4]. Вместо этого предположения можно сделать другое—принимать, что связующая среда плохо сопротивляется деформациям растяжения и в ней образуются трещины. Тогда композиционный материал также будет разно сопротивляться деформациям растяжения и сжатия.

Рассматриваемые композиционные материалы анизотропны. В произвольной системе координат упругий потенциал Π и компоненты контрва-

риантного тензора напряжений τ^{ij} в деформированном анизотропном теле выражаются через ковариантные и контрвариантные компоненты деформаций γ_{ij} и γ^{ij} следующим образом [5]:

$$W = \frac{1}{2} c^{ijrs} \gamma_{ij} \gamma_{rs}$$
$$\tau^{ij} = c^{ijrs} \gamma_{rs} = c^{ij}_{mn} \gamma^{mn} \tag{1}$$

где тензор c удовлетворяет условиям симметрии

$$c^{ijrs} = c^{jirs} = c^{ijsr} = c^{jisr}$$
$$c^{ij}_{mn} = c^{ji}_{mn} = c^{ij}_{nm} = c^{ji}_{nm} \tag{2}$$

и при переходе от одной системы координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ к другой $(\theta_1', \theta_2', \theta_3')$

$$c'^{ij}_{mn} = \frac{\partial \theta_i'}{\partial \theta_k} \frac{\partial \theta_j'}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_r}{\partial \theta_m'} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta_n'} c^{kl}_{rs} \tag{3}$$

где c^{kl}_{rs} и c'^{ij}_{mn} — компоненты тензора c относительно систем $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ и $(\theta_1', \theta_2', \theta_3')$ соответственно.

1. Пусть упругая сжимаемая среда армирована однонаправленной системой упругих нитей. При деформации такой композиционный материал будет вести себя как локально трансверсально изотропный материал с направлением анизотропии, совпадающим с направлением нитей.

На основании вышепринятых предположений относительно композиционного материала соотношения между напряжениями и деформациями имеют различные выражения при растяжении и сжатии* нитей. Если при деформации все нити растягиваются, то матрица коэффициентов c^{ij}_{rs} в системе координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, когда направление θ_3 совпадает с направлением нитей, определяется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} c^{11}_{11} & c^{11}_{22} & c^{11}_{33} & c^{11}_{23} & c^{11}_{13} & c^{11}_{12} \\ c^{22}_{11} & c^{22}_{22} & c^{22}_{33} & c^{22}_{23} & c^{22}_{13} & c^{22}_{12} \\ c^{33}_{11} & c^{33}_{22} & c^{33}_{33} & c^{33}_{23} & c^{33}_{13} & c^{33}_{12} \\ c^{23}_{11} & c^{23}_{22} & c^{23}_{33} & c^{23}_{23} & c^{23}_{13} & c^{23}_{12} \\ c^{13}_{11} & c^{13}_{22} & c^{13}_{33} & c^{13}_{23} & c^{13}_{13} & c^{13}_{12} \\ c^{12}_{11} & c^{12}_{22} & c^{12}_{33} & c^{12}_{23} & c^{12}_{13} & c^{12}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Здесь индекс (+) указывает, что имеет место случай растянутых нитей. В случае сжатия всех нитей матрица коэффициентов имеет вид (1.1),

* Здесь и в дальнейшем термины растяжение и сжатие будем понимать в смысле деформаций, то есть удлинение и укорачивание.

только вместо коэффициентов с индексом (+) фигурируют соответствующие коэффициенты с индексом (—).

Теперь предположим, что по направлению нитей деформации удлинения равны нулю. Тогда из условия непрерывности напряжений следует

$$\tau^{11} = c_{11}^{+}\gamma^{11} + c_{12}^{+}\gamma^{22} = c_{11}^{-}\gamma^{11} + c_{12}^{-}\gamma^{22}$$

$$\tau^{22} = c_{12}^{+}\gamma^{11} + c_{11}^{+}\gamma^{22} = c_{12}^{-}\gamma^{11} + c_{11}^{-}\gamma^{22}$$

$$\tau^{23} = c_{44}^{+}\gamma^{23} = c_{44}^{-}\gamma^{23}$$

откуда получаем

$$c_{11}^{+} = c_{11}^{-} = c_{11}, \quad c_{12}^{+} = c_{12}^{-} = c_{12}$$
$$c_{13}^{+} = c_{12}^{+} = c_{13}, \quad c_{44}^{+} = c_{44}^{-} = c_{44} \tag{1.2}$$

Соотношения между деформациями и напряжениями при растяжении нитей принимают следующий вид:

$$\tau^{11} = c_{11}\gamma^{11} + c_{12}\gamma^{22} + c_{13}\gamma^{33}, \quad \tau^{23} = c_{44}\gamma^{23}$$
$$\tau^{22} = c_{12}\gamma^{11} + c_{11}\gamma^{22} + c_{23}\gamma^{33}, \quad \tau^{31} = c_{44}\gamma^{31} \tag{1.3}$$
$$\tau^{33} = c_{13}\gamma^{11} + c_{13}\gamma^{22} + c_{33}\gamma^{33}, \quad \tau^{12} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\gamma^{12}$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\gamma^{11} = \frac{1}{E_1^{-}}\tau^{11} - \frac{\nu_{12}^{-}}{E_2^{-}}\tau^{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3^{+}}\tau^{33}, \quad \gamma^{23} = \frac{1}{G_{23}}\tau^{23}$$
$$\gamma^{22} = -\frac{\nu_{12}^{+}}{E_1^{+}}\tau^{11} + \frac{1}{E_2^{-}}\tau^{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3^{-}}\tau^{33}, \quad \gamma^{31} = \frac{1}{G_{31}}\tau^{31} \tag{1.4}$$
$$\gamma^{33} = -\frac{\nu_{31}^{+}}{E_1^{+}}\tau^{11} - \frac{\nu_{32}^{-}}{E_1^{+}}\tau^{22} + \frac{1}{E_3^{-}}\tau^{33}, \quad \gamma^{12} = \frac{1}{G_{12}}\tau^{12}$$

где

$$E_1^{+} = \frac{\Delta^{+}}{a_1^{+}}, \quad E_2^{-} = \frac{\Delta^{+}}{a_2^{-}}, \quad G_{23} = c_{44}, \quad G_{12} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

$$\nu_{12}^{+} = \frac{a_3^{+}}{a_1^{+}}, \quad \nu_{23} = \frac{a_4}{a_2^{-}}, \quad \nu_{13} = \frac{a_4}{a_2^{-}}$$

$$\Delta^{+} = c_{33}^{+}(c_{11}^{2} - c_{12}^{2}) + 2c_{13}^{2}(c_{12} - c_{11}) \tag{1.5}$$

$$a_1^{+} = c_{33}c_{22}^{2} - c_{13}^{2}, \quad a_2^{-} = c_{13}^{2} - c_{12}^{2}$$

$$a_3^{+} = c_{13}c_{23} - c_{12}^{2}, \quad a_4 = c_{13}c_{12} - c_{12}c_{13}$$

$$\frac{\nu_{12}^{+}}{E_1^{+}} = \frac{\nu_{12}^{-}}{E_2^{-}}$$

В случае, когда в деформированном материале все нити сжимаются, в соотношениях (1.3), (1.4) и (1.5) все величины с индексом (+) нужно заменить соответствующими величинами с индексом (—).

По аналогии с классической теории упругости анизотропного тела величины E, ν и G будем называть техническими постоянными.

Постоянные c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{11}^{+} и c_{11}^{-} можно определить из опытов на одноосное растяжение и сжатие образцов, вырезанных в виде стержней по направлению нитей и в перпендикулярном к ним направлении. Стержни должны иметь такие размеры, чтобы можно было принять их прямолинейными; из таких опытов можно определить постоянные E_1^{+}, ν_{12}^{+}, E_1^{-}, ν_{12}^{-} и ν_{31}, а из (1.5) — c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{11}^{+}, c_{33} и все остальные. c_{44} определяется из опытов на чистый сдвиг.

2. Пусть упругая среда армирована системой упругих нитей таким образом, что в ортогональной системе координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ часть нитей имеет направление θ_1, а остальная часть — θ_2.

При деформации композиционного материала матрица коэффициентов c_{ij}^{+} относительно выбранной системы координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ как у ортотропного материала будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Однако, из вышесказанного следует, что значения коэффициентов матрицы (2.1) зависят от вида деформированного состояния.

Если в какой-то области деформированного материала все нити растягиваются или сжимаются, условимся для различия коэффициентам матрицы (2.1) приписывать индекс (+) или (—) соответственно.

В случае, когда в какой-то области деформированного материала нити по направлению θ_1 растягиваются (сжимаются), а по θ_2 — сжимаются (растягиваются), то коэффициентам матрицы (2.1) прибавляем индекс «+—» (индекс «—+»). Здесь мы предполагали, что направления θ_1 и θ_2 неравноправные, то есть плотности нитей по направлениям θ_1 и θ_2 различны.

Если материал деформируется так, что в какой-то области нити не деформируются ($\gamma^{11}=\gamma^{22}=0$), то из условия непрерывности напряжений получаем

$$\sigma^{11} = c_{12(+-)}^{11} = c_{13(+-)}^{11} = c_{12(-+)}^{11} = c_{13(-+)}^{11}$$

$$\sigma^{22} = c_{23(+-)}^{22} = c_{23(-+)}^{22} = c_{23(+-)}^{22} = c_{23(-+)}^{22}$$

$$\sigma^{33} = c_{33(+-)}^{33} = c_{33(-+)}^{33} = c_{33(+-)}^{33} = c_{33(-+)}^{33}$$

$$\tau^{23} = c_{44}^{+}\gamma^{23} = c_{44}^{-}\gamma^{23} = c_{44}^{+}\gamma^{23} = c_{44}^{-}\gamma^{23}$$

$$\tau^{31} = c_{55}^{+}\gamma^{31} = c_{55}^{-}\gamma^{31} = c_{55}^{+}\gamma^{31} = c_{55}^{-}\gamma^{31}$$

$$\tau^{12} = c_{66}^{+}\gamma^{12} = c_{66}^{-}\gamma^{12} = c_{66}^{+}\gamma^{12} = c_{66}^{-}\gamma^{12}$$

Когда имеется область, где нити по направлению θ_1 растягиваются а по θ_2 и θ_3 деформация удлинения равны нулю ($\gamma^{11} > 0$, $\gamma^{22} = \gamma^{33} = 0$) то имеем

$$\tau^{11} = c_{11}^{+}\gamma^{11} = c_{11}^{-}\gamma^{11}, \quad \tau^{22} = c_{12}^{+}\gamma^{11} = c_{12}^{-}\gamma^{11}$$

Если $\gamma^{22} > 0$, $\gamma^{11} = \gamma^{33} = 0$, то имеем

$$\tau^{11} = c_{12}^{+}\gamma^{22} = c_{12}^{-}\gamma^{22}, \quad \tau^{22} = c_{22}^{+}\gamma^{22} = c_{22}^{-}\gamma^{22}$$

Если $\gamma^{11} < 0$, $\gamma^{22} = \gamma^{33} = 0$, то имеем

$$\tau^{11} = c_{11}^{+}\gamma^{11} = c_{11}^{-}\gamma^{11}, \quad \tau^{22} = c_{12}^{+}\gamma^{11} = c_{12}^{-}\gamma^{11}$$

Если $\gamma^{22} < 0$, $\gamma^{11} = \gamma^{33} = 0$, то имеем

$$\tau^{22} = c_{22}^{+}\gamma^{22} = c_{22}^{-}\gamma^{22}$$

Из этих равенств получаем

$$\begin{gathered}
c_{11}^{+} = c_{11}^{-} = c_{11}^{+} = c_{11}^{-} = c_{11} \\
c_{22}^{+} = c_{22}^{-} = c_{22}^{+} = c_{22}^{-} = c_{22} \\
c_{33}^{+} = c_{33}^{-} = c_{33}^{+} = c_{33}^{-} = c_{33} \\
c_{12}^{+} = c_{12}^{-} = c_{12}^{+} = c_{12}^{-} = c_{12} \\
c_{44}^{+} = c_{44}^{-} = c_{44}^{+} = c_{44}^{-} = c_{44} \\
c_{55}^{+} = c_{55}^{-} = c_{55}^{+} = c_{55}^{-} = c_{55} \\
c_{66}^{+} = c_{66}^{-} = c_{66}^{+} = c_{66}^{-} = c_{66} \\
c_{11}^{+} = c_{11}^{+}, \quad c_{22}^{+} = c_{22}^{+} \\
c_{11}^{-} = c_{11}^{-}, \quad c_{22}^{-} = c_{22}^{-}.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Таким образом, в случае, когда все нити растягиваются, соотношения между напряжениями и деформациями относительно системы $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ принимают вид

$$\begin{gathered}
\tau^{11} = c_{11}\gamma^{11} + c_{12}\gamma^{22} + c_{13}\gamma^{33}, \quad \tau^{23} = c_{44}\gamma^{23} \\
\tau^{22} = c_{12}\gamma^{11} + c_{22}\gamma^{22} + c_{23}\gamma^{33}, \quad \tau^{31} = c_{55}\gamma^{31} \\
\tau^{33} = c_{13}\gamma^{11} + c_{23}\gamma^{22} + c_{33}\gamma^{33}, \quad \tau^{12} = c_{66}\gamma^{12}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Если нити сжимаются, то в (2.3) вместо c_{11}^{+} и c_{22}^{+} нужно подставить c_{11}^{-} и c_{22}^{-} соответственно.

В случае, когда нити по направлению θ_1 растягиваются (сжимаются), а по θ_2 сжимаются (растягиваются), то в (2.3) вместо c_{22}^{+} (c_{11}^{+}) нужно подставить c_{22}^{-} (c_{11}^{-}).

Обратные соотношения, полученные из (2.3), имеют следующий вид

$$\gamma^{11} = \frac{1}{E_1^{-}}\sigma^{11} - \frac{\nu_{12}^{+}}{E_2^{+}}\sigma^{22} - \frac{\nu_{13}^{+}}{E_3^{+}}\sigma^{33}, \qquad \gamma^{23} = \frac{1}{G_{23}}\sigma^{23}$$

$$\gamma^{22} = -\frac{\nu_{21}^{+}}{E_1^{+}}\sigma^{11} + \frac{1}{E_2^{-}}\sigma^{22} - \frac{\nu_{23}^{-}}{E_3^{+}}\sigma^{33}, \qquad \gamma^{31} = \frac{1}{G_{31}}\sigma^{31} \tag{2.4}$$

$$\gamma^{33} = -\frac{\nu_{31}^{+}}{E_1^{+}}\sigma^{11} - \frac{\nu_{32}^{+}}{E_2^{+}}\sigma^{22} + \frac{1}{E_3^{-}}\sigma^{33}, \qquad \gamma^{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma^{12}$$

где

$$E_1^{+} = \frac{\Delta^{+}}{a_1^{+}}, \qquad E_2^{-} = \frac{\Delta^{+}}{a_2^{-}}, \qquad E_3^{-} = \frac{\Delta^{+}}{a_3^{-}}$$

$$G_{23} = c_{44}, \quad G_{31} = c_{55}, \quad G_{12} = c_{66}$$

$$\nu_{21}^{+} = \frac{a_4}{a_1^{+}}, \qquad \nu_{12}^{+} = \frac{a_4}{a_2^{-}}, \qquad \nu_{31}^{+} = \frac{a_5^{+}}{a_1^{+}}$$

$$\nu_{13}^{+} = \frac{a_5^{+}}{a_3}, \qquad \nu_{32}^{+} = \frac{a_6^{+}}{a_2^{+}}, \qquad \nu_{23}^{+} = \frac{a_6^{+}}{a_3^{-}} \tag{2.5}$$

$$\Delta^{+} = c_{11}c_{22}^{+}c_{33} + 2c_{12}c_{23}c_{13} - c_{13}^{2}c_{22}^{+} - c_{12}^{2}c_{33} - c_{23}^{2}c_{11}$$

$$a_1^{-} = c_{22}c_{33} - c_{23}^{2}, \qquad a_2^{-} = c_{11}c_{33} - c_{13}^{2}$$

$$a_3^{-} = c_{11}c_{22}^{+} - c_{12}^{2}, \qquad a_4 = c_{33}c_{12} - c_{23}c_{13}$$

$$a_5^{+} = c_{22}^{+}c_{13} - c_{23}c_{12}, \qquad a_6^{+} = c_{11}c_{23} - c_{13}c_{12}$$

причем

$$\frac{\nu_{21}^{+}}{E_1^{+}} = \frac{\nu_{12}^{+}}{E_2^{-}}, \qquad \frac{\nu_{31}^{+}}{E_1^{+}} = \frac{\nu_{13}^{+}}{E_3^{-}}, \qquad \frac{\nu_{32}^{+}}{E_2^{+}} = \frac{\nu_{23}^{+}}{E_3^{+}} \tag{2.6}$$

Если известно, что в деформированном материале все нити сжимаются, то в соотношениях (2.4), (2.5) и (2.6) нужно все величины с индексом (+) заменить соответствующими величинами с индексом (—).

В остальных случаях, когда часть нитей растягивается, а остальная часть сжимается, обратные соотношения между напряжениями и деформациями получаются аналогичным образом.

Постоянные c_{11}^{+}, c_{22}^{-}, c_{11}^{-}, c_{22}^{+}, c_{33}, c_{12}, c_{13} и c_{23} можно определить опытным путем. Для рассматриваемого материала вырезаются стержни по направлениям нитей и в перпендикулярном к ним направлении. Потом из опыта на простое растяжение и сжатие этих образцов опре-

деляются технические постоянные, с помощью которых можно определить указанные постоянные. Постоянные c_{44}, c_{55}, c_{66} определяются из опыта на простой сдвиг.

3. Рассмотрим случай, когда упругая среда армирована тремя однонаправленными системами нитей таким образом, что в ортогональной системе координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ направления этих систем совпадают с направлениями θ_1, θ_2 и θ_3.

Матрица коэффициентов $c_{ij}^{(2)}$ деформированного композиционного материала относительно системы $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, как в предыдущем пункте, имеет вид (2.1). Если при деформации материала все нити растягиваются или сжимаются, то для различия всем коэффициентам указанной матрицы прибавляем индекс $(+)$ или $(-)$.

В том случае, когда нити по направлению θ_1 растягиваются (сжимаются), а по θ_2 и θ_3 сжимаются (растягиваются), то всем коэффициентам прибавляем индекс «$+--$» («$-++$»). Если растягиваются (сжимаются) только нити по направлению θ_2 или θ_3, то коэффициентам прибавляем индекс «$-+-$» («$+-+$») или «$--+$» («$++-$») соответственно. Здесь тоже, для большей общности, предполагается, что плотность нитей по различным направлениям различна.

Пусть материал деформируется так, что компоненты деформации $\gamma^{22} = \gamma^{33} = 0$, а $\gamma^{11} > 0$ и $\gamma^{11} < 0$. Тогда из условия непрерывности напряжений получаем

$$\sigma^{11} = c_{11}^{+}\gamma^{11} = c_{11}^{+--}\gamma^{11} = c_{11}^{-}\gamma^{11} = c_{11}^{-++}\gamma^{11}$$

$$\sigma^{22} = c_{12}^{+}\gamma^{11} = c_{12}^{+--}\gamma^{11} = c_{12}^{-}\gamma^{11} = c_{12}^{-++}\gamma^{11}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{12} = c_{66}^{+}\gamma^{12} = c_{66}^{+--}\gamma^{12} = c_{66}^{-}\gamma^{12} = c_{66}^{-++}\gamma^{12}$$

$$\sigma^{11} = c_{11}^{-}\gamma^{11} = c_{11}^{-++}\gamma^{11} = c_{11}^{+}\gamma^{11} = c_{11}^{+--}\gamma^{11}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{12} = c_{66}^{-}\gamma^{12} = c_{66}^{-++}\gamma^{12} = c_{66}^{+}\gamma^{12} = c_{66}^{+--}\gamma^{12}$$

Аналогичным образом, исследуя и другие виды деформированных состояний, когда два из компонентов деформации удлинения по направлениям координатных линий равны нулю, найдем

$$\begin{aligned}
&c_{11}^{+--} = c_{11}^{+}, \quad c_{22}^{+--} = c_{22}^{+}, \quad c_{33}^{+--} = c_{33}^{+}\\
&c_{11}^{-++} = c_{11}^{-}, \quad c_{22}^{-++} = c_{22}^{-}, \quad c_{33}^{-++} = c_{33}^{-}\\
&c_{11}^{-+-} = c_{11}^{+}, \quad c_{22}^{-+-} = c_{22}^{+}, \quad c_{33}^{-+-} = c_{33}^{+}\\
&c_{11}^{+-+} = c_{11}^{-}, \quad c_{22}^{+-+} = c_{22}^{-}, \quad c_{33}^{+-+} = c_{33}^{-}\\
&c_{11}^{--+} = c_{11}^{+}, \quad c_{22}^{--+} = c_{22}^{+}, \quad c_{33}^{--+} = c_{33}^{+}\\
&c_{11}^{++-} = c_{11}^{-}, \quad c_{22}^{++-} = c_{22}^{-}, \quad c_{33}^{++-} = c_{33}^{-}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Остальные коэффициенты: c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44} и c_{66} во всех случаях деформированного состояния относительно системы $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ одни и те же, поэтому их запишем без верхних индексов.

Напишем, например, соотношения между напряжениями и деформациями для случаев, когда в деформированном материале все нити растягиваются и когда растягиваются только нити, проходящие по направлению θ_1

$$\sigma^{11} = c_{11}\gamma^{11} + c_{12}\gamma^{22} + c_{13}\gamma^{33}, \quad \sigma^{23} = c_{44}\gamma^{23}$$

$$\sigma^{22} = c_{12}\gamma^{11} + c_{22}\gamma^{22} + c_{23}\gamma^{33}, \quad \sigma^{31} = c_{55}\gamma^{31} \tag{3.2}$$

$$\sigma^{33} = c_{13}\gamma^{11} + c_{23}\gamma^{22} + c_{33}\gamma^{33}, \quad \sigma^{12} = c_{66}\gamma^{12}$$

$$\sigma^{11} = c_{11}\gamma^{11} + c_{12}\gamma^{22} + c_{13}\gamma^{33}, \quad \sigma^{23} = c_{44}\gamma^{23}$$

$$\sigma^{22} = c_{12}\gamma^{11} + c_{22}\gamma^{22} + c_{23}\gamma^{33}, \quad \sigma^{31} = c_{55}\gamma^{31} \tag{3.3}$$

$$\sigma^{33} = c_{13}\gamma^{11} + c_{23}\gamma^{22} + c_{33}\gamma^{33}, \quad \sigma^{12} = c_{66}\gamma^{12}$$

Из (3.1), (3.2) и (3.3) видно, что верхние индексы коэффициентов c_{11}, c_{22}, c_{33} совпадают со знаками γ^{11}, γ^{22} и γ^{33} соответственно. Принимая это во внимание, легко составить соотношения между деформациями и напряжениями и для остальных случаев деформированных состояний.

Из (3.2), (3.3) легко можно найти обратные соотношения.

Здесь тоже указанные постоянные (кроме c_{44}, c_{55}, c_{66}) можно найти из опытов на одноосное растяжение и сжатие образцов, вырезанных в виде стержней из рассматриваемого материала по направлениям нитей и имеющих такие размеры, что можно принять их прямолинейными. Постоянные c_{44}, c_{55} и c_{66} находятся из опытов на чистый сдвиг.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях полученные коэффициенты сохраняют силу только относительно системы координат, выбранной вышеуказанным образом. Относительно другой системы координат $(\theta_1', \theta_2', \theta_3')$ новые коэффициенты c_{ij}^{kl} получаются из выражений (3) путем подстановки туда соответствующих значений c_{ij}^{kl} из (1.1) или (2.1).

При решении конкретных задач к полученным соотношениям могут быть присоединены уравнения равновесия и неразрывности деформации, условия на поверхности, зависимости между компонентами деформаций и перемещений.

Вычислительный центр АН
Армянской ССР

Поступила 2 IV 1975

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՁԳՄԱՆԸ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆԸ ՏԱՐԲԵՐ ԴԻՄԱԴՐՈՂ, ԱՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՕՐԵՆՔԸ

Ամփոփում

Երկրաչափորեն գծային առաձգականության տեսության սահմաններում ուսումնասիրվում է առաձգական, համասեռ և իզոտրոպ նյութի լարումների և դեֆորմացիաների միջև ֆիզիկական կապի օրենքը, երբ այդ նյութը արմավորված է՝

1. Բարակ, առաձգական թելերի խիստ միաուղղված համակարգով։

2. Թելերի երկու միաուղղված համակարգերով այնպես, որ բաղադրյալ նյութի յուրաքանչյուր կետում այդ համակարգերը իրար հանդիպում են ուղիղ անկյունով։

3. Թելերի երեք միաուղղված համակարգերով այնպես, որ արմավորված նյութի տարածության մեջ այդ համակարգերը առաջացնում են եռաչափ օրթոգոնալ ցանց։

Ընդունվում է, որ թելերի առաձգականության մոդուլը զգալիորեն մեծ է թելերը շրջապատող միջավայրի մոդուլից, կամ այդ շրջապատող միջավայրը վատ է դիմադրում ձգման դեֆորմացիաներին, որի հետևանքով բաղադրյալ նյութը ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներին տարբեր է դիմադրում։

THE LAW OF ELASTICITY FOR REINFORCED MATERIALS HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION

R. E. MKRTCHIAN

Summary

The physical law of relation between strains and stresses of elastic, uniform and isotropic materials is examined in terms of the geometrically linear theory of elasticity when the material is reinforced by means of:
1) strictly one-directional system of thin elastic fibres, 2) two one-directional systems of fibres with the fibres converging at a right angle at every point of the composite material, 3) three one-directional systems of fibres, with the systems forming a three-dimensional orthogonal net in the space of the reinforced material.

It is assumed that the fibres have a much higher modulus of elasticity than that of the surrounding medium, or the surrounding medium poorly resists to tension deformations (cracks are formed in it) with the result that the composite material offers heteroresistance to tension and compression deformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1969.
2. *Мкртчян Р. Е.* Большие деформации несжимаемого упругого тела, армированного однонаправленной системой упругих нитей. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 6, 1970.
3. *Согомян А. С.* О связи между деформациями и напряжениями для разносопротивляющегося на растяжение и сжатие композиционного материала строго однонаправленной структуры. Изв. АН Арм. ССР, серия техн. наук, т. XIX, № 6, 1966.
4. *Мкртчян Р. Е.* Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
5. *Седдон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. Физматгиз, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, №6, 1975 Механика

Г. З. МИКАЕЛЯН, Г. А. МОВСИСЯН

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ИЗОТРОПНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ С УЧЕТОМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ КАСАТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Влияние граничных условий для касательных перемещений и усилий на величину критического значения внешнего давления изотропной цилиндрической оболочки исследовано в работе [1]. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для ортотропной оболочки с упругим заполнителем. Исследуется также влияние угла намотки оболочки, изготовленной из армированного стеклопластика, на значение критической нагрузки.

1. Пусть ортотропная круговая цилиндрическая оболочка с упругим заполнителем подвергается равномерно распределенному внешнему давлению интенсивности q.

Предполагается, что между оболочкой и заполнителем существует только радиальное взаимодействие, то есть касательные напряжения на контактирующей поверхности пренебрегаются. Известно [2, 3], что учет касательных напряжений на контактирующей поверхности приводит лишь к незначительному повышению критической нагрузки.

На основании полубезмоментной теории для рассматриваемой оболочки получим следующее дифференциальное уравнение устойчивости:

$$\frac{1}{R}\left(C_{11}-\frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}-D_{22}R\frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8}- \tag{1.1}$$

$$-R\left(T_1\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^4}+T_2\frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8}+2S\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha\partial\beta^3}\right)=Z$$

где Φ — потенциальная функция, T_1, T_2, S — усилия в срединной поверхности оболочки до потери устойчивости, R — радиус оболочки, α, β — координаты соответственно в осевом и окружном направлениях, Z — радиальное воздействие со стороны заполнителя на оболочку, C_{11}, C_{22}, C_{12}, D_{22} — коэффициенты жесткости оболочки, которые имеют вид

$$C_{11}=\frac{E_1h}{1-\nu_1\nu_2},\qquad C_{12}=\frac{\nu_2E_1h}{1-\nu_1\nu_2}$$
$$C_{22}=\frac{E_2h}{1-\nu_1\nu_2},\qquad D_{22}=\frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \tag{1.2}$$

Здесь E_1, E_2, ν_1, ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона материала оболочки, h — толщина оболочки.

Радиальную нагрузку Z будем представлять в виде

$$Z = -k_0 w - k_0 R \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \tag{1.3}$$

где w — нормальное перемещение точки срединной поверхности оболочки, k_0 — коэффициент жесткости заполнителя. Значение k_0 определяется из решения задачи Ляме для полого изотропного цилиндра, находящегося под действием равномерно распределенной по наружной цилиндрической поверхности нормальной нагрузки [4]

$$k_0 = \frac{2(1+\nu_0)\left[1-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]}{1-\nu_0+(1+\nu_0)\left(\frac{R_0}{R}\right)^2}\,\frac{G_0}{R} \tag{1.4}$$

здесь G_0, ν_0 — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала заполнителя, R_0 — радиус внутренней поверхности заполнителя.

Принимая модуль упругости заполнителя малым по сравнению с модулями упругости оболочки, будем считать, что до потери устойчивости внешняя нагрузка полностью воспринимается оболочкой. Тогда для внутренних сил в срединной поверхности оболочки будем иметь

$$T_1 = S = 0, \quad T_2 = -Rq \tag{1.5}$$

Уравнение устойчивости (1.1) с учетом (1.3) и (1.5) принимает вид

$$\frac{1}{R}\left(C_{11}-\frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} + D_{22}R\frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8} + qR^2\frac{\partial^6\Phi}{\partial\beta^6} + k_0R\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4} = 0 \tag{1.6}$$

2. Решение уравнения (1.6) ищем в виде

$$\Phi = X(\alpha)\cos\frac{n\beta}{R} \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.6), получим

$$X^{IV} - \lambda^4 X = 0 \tag{2.2}$$

где

$$\lambda^4 = \frac{C_{22}R^2}{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}\left[qR\left(\frac{n}{R}\right)^6 - D_{22}\left(\frac{n}{R}\right)^8 - k_0\left(\frac{n}{R}\right)^4\right] \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$X = C_1\sin\lambda\alpha + C_2\cos\lambda\alpha + C_3\,\mathrm{sh}\,\lambda\alpha + C_4\,\mathrm{ch}\,\lambda\alpha \tag{2.4}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

3. Из (2.3) для критического значения внешнего давления получим

$$q_{cr} = \lambda_0^4 \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{22}n^4} R^4 + \frac{D_{22}}{R^3} n^4 + k_0 \frac{R^2}{n^2} \tag{3.1}$$

где λ_0 — минимальный корень соответствующего (2.2) характеристического уравнения.

Минимизируя q_{cr} по n, будем иметь

$$n_{cr}^2 = \frac{\sqrt{k_0R^4 + \sqrt{k_0^2R^8 + 12\,D_{22}\lambda_0^4 c R^8}}}{\sqrt{2D_{22}}} \tag{3.2}$$

где

$$c = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{22}} \tag{3.3}$$

Перейдем к определению коэффициента λ_0 при различных граничных условиях.

а) Пусть края оболочки свободны в осевом направлении и на обоих краях запрещено смещение в окружном направлении, то есть

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= -\left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2\partial\varphi^2} = 0 \\ v &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \end{aligned}\right. \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = l \tag{3.4}$$

Из (2.1) очевидно, что условия (3.4) эквивалентны условиям

$$X'' = X = 0 \tag{3.5}$$

Тогда, для λ_0 будем иметь [5]

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{l} \tag{3.6}$$

б) На обоих краях оболочки запрещены смещения как в осевом, так и в окружном направлениях

$$u = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\varphi^2} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l \tag{3.7}$$

то есть

$$X'' = X = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l \tag{3.8}$$

Из (2.2), в силу (3.8), получим [5]

$$\lambda_0 = \frac{4.73}{l} \tag{3.9}$$

в) На одном краю оболочки запрещены смещения в осевом и окружном направлениях, а другой край свободен:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{3.10}$$

$$T_1 = 0, \quad S = \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial \theta} = 0 \quad \text{при} \quad x = l$$

то есть

$$\begin{aligned} X'' = X = 0 \quad &\text{при} \quad x = 0 \\ X'' = X''' = 0 \quad &\text{при} \quad x = l \end{aligned} \tag{3.11}$$

В этом случае для λ_0 имеем [5]

$$\lambda_0 = \frac{1.875}{l} \tag{3.12}$$

4. Рассмотрим численный пример. Пусть для стеклопластиковой оболочки, изготовленной косой перекрестной намоткой, имеем

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{50}, \quad \frac{R}{l} = \frac{1}{2}, \quad \nu_1 = 0.10, \quad \nu_2 = 0.14$$

$$E_1 = 1.8 \cdot 10^5 \ \frac{кг}{см^2}, \quad E_2 = 2.5 \cdot 10^5 \ \frac{кг}{см^2}, \quad G = 0.35 \cdot 10^5 \ \frac{кг}{см^2}$$

а для заполнителя

$$\frac{R_0}{R} = \frac{1}{2}, \quad G_0 = 25 \ \frac{кг}{см^2}, \quad \nu_0 = \frac{1}{2}$$

Определим критическое значение внешнего давления при перечисленных выше граничных условиях (3.4), (3.7), (3.10) в зависимости от угла намотки φ.

Коэффициенты жесткости оболочки определяются следующим образом [6]:

$$\frac{C_{11}}{h} = B_{11} \cos^4 \varphi + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22} \sin^4 \varphi \tag{4.1}$$

$$\frac{C_{22}}{h} = B_{11} \sin^4 \varphi + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22} \cos^4 \varphi$$

$$\frac{C_{12}}{h} = B_{12} + [B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$D_{22} = C_{22} h^3/12$$

где

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{66} = G$$

$$B_{12} = \nu_2 B_{11} = \nu_1 B_{22}$$

В табл. 1 приведены значения $\psi_{кр}$ для оболочки в зависимости от угла намотки φ при граничных условиях а), б), в).

Таблица 1

	Без заполнителя						С заполнителем					
φ	0	20	40	45°	60	90	0	20	40	45°	60°	90°
а	5.628	4.864	3.594	3.461	3.791	4.990	8.200	7.436	6.025	5.833	5.900	6.819
б	8.499	7.341	5.413	5.222	5.807	7.293	10.284	9.127	7.198	7.008	7.189	8.605
в	3.383	2.926	2.168	2.083	2.238	2.890	6.075	6.389	5.426	5.293	5.299	5.861

Сравнение полученных результатов показывает, что как заполнитель, так и граничные условия существенно влияют на величину критического давления. Наибольшее значение критического давления, во всех случаях, как и следовало ожидать, получается при $\varphi = 0$.

Как видно из таблицы, запрещение на обоих концах оболочки перемещении в окружном направлении (а) и перемещений в осевом и окружном направлениях (б) значительно повышают критическое значение нагрузки. Этот результат для изотропной оболочки без заполнителя получен в работе [1].

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 4 IV 1975

Հ. Զ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԵԶԱՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹՈՎ ԼՑՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՇՈՇԱՓՎԱԾ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐԻ ՎՐԱ ԳՐՎԱԾ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին հնշման տակ գտնվող առաձգական գլանային թաղանթի կայունությունը։

Ենթադրվում են թաղանթի ներսում գտնվող առաձգական նյութի և տարբեր եզրային պայմանների ազդեցությունը բեռնվածության կրիտիկական արժեքի վրա։

Բերվում է թվային օրինակ ատակելյատոր պատրաստված թաղանթի համար։

STABILITY OF AN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH ISOTROPIC CORE. TAKING ACCOUNT OF BOUNDARY CONDITIONS FOR TANGENTIAL COMPONENTS OF DISPLACEMENT

G. Z. MIKAELIAN, G. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The stability of an orthotropic cylindrical shell with elastic core under the action of external pressure, distributed uniformly, is considered. The critical value of loading dependent on boundary conditions for tangential displacements is defined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Алфутов Н. А.* Теория оболочек и пластин. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964.
2. *Seide P.* The Stability under Axial Compression and Lateral Pressure of Circular-cylindrical Shells with a Soft Elastic Core. J. Aerospace Sci., v. 29, No. 7, 1962, 851–862.
3. *Yao J. C.* Bucking of Axially Compressed Long Cylindrical Shells with Elastic Core. Trans. ASME, E 29, No. 2, 1962, 329–334.
4. *Кан А. М.* Теория упругости. Гостехтеориздат, М., 1956.
5. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 6, 1975 Механика

А. А. ДАЯН

ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА НАД ВОДОЕМОМ ПРИ НАЛИЧИИ МОНОСЛОЯ, СОКРАЩАЮЩЕГО ИСПАРЕНИЕ

Под трансформацией воздушного потока подразумевают изменение его характеристик (температура, влажность, скорость движения и т. д.) под влиянием подстилающей поверхности, например, при переходе воздушного потока с суши на водоем. Причиной трансформации является изменение гидродинамических (шероховатость) и теплофизических (температура) характеристик подстилающей поверхности.

Метеохарактеристики над сушей можно рассматривать как некоторые начальные «характеристики» процесса, а характеристики над водоемом можно рассматривать как трансформированные метеохарактеристики суши. Поэтому, между указанными характеристиками можно установить определенные соотношения, которые имеют теоретическое и прикладное значение.

Если поверхность водоема покрыта монослоем, трансформация количественно отличается от случая, когда поверхность свободна (1).

Это объясняется тем, что при наличии монослоя изменяются шероховатость и температура поверхности воды.

Для количественного описания процесса трансформации необходимо учесть процессы тепло- и влагообмена и обмена количеством движения, так как эти процессы определяют изменения температуры, влажности и скорости движения воздушного потока.

Для исследования изменения влажности используется уравнение переноса влаги в атмосфере, для температуры — уравнение притока тепла, а для изменения скорости ветра — уравнение движения. К ним присоединяется и уравнение неразрывности. Получается следующая система из четырех уравнений для определения четырех неизвестных функций:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) + \nu\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + w\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial q}{\partial z}\right) + \nu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

Здесь ось ox направлена по воздушному потоку, oz — вертикально вверх. Начало координат находится на береговой линии. Предположено,

что нет изменений по оси oy, поэтому в уравнениях отсутствуют производные по y.

u, w, θ, q — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, температура и влажность воздушного потока,— неизвестные функции, подлежащие определению;

k, ν — коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена, причем считается, что коэффициенты турбулентности для разных субстанций (количества движения, тепла и водяного пара) одинаковы, что неоднократно доказывалось многими авторами [2, 3 и др.].

Рассмотрим прямоугольную область

$$-L \leqslant x \leqslant L \qquad -L \leqslant x \leqslant 0 \qquad \text{суша}$$

$$0 \leqslant z \leqslant H \qquad 0 \leqslant x \leqslant L \qquad \text{вода}$$

Тогда граничные условия задачи будут:

1. при $x = -L$ $u = u_0(z)$, $\theta = \theta_0$, $q = q_0$

2. при $x = L$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0$

3. при $z = 0$ $u = w = 0$, $\theta = \theta(x)$, $\alpha - \alpha \dfrac{\partial q}{\partial z} = q_0$ (2)

4. при $z = H$ $u = u(H)$ $\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0$

Здесь q_0 — значение влажности над сушей, на водной поверхности для влажности ставится условие, учитывающее наличие монослоя [5]. В этом условии $\alpha = \dfrac{k\gamma}{A}$, $A = \dfrac{\gamma_0 \mu P_a}{0.622\sqrt{2\pi MRT}}$, где μ — молекулярный вес водяного пара; P_a — атмосферное давление; M — масса моля; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура; γ_0 — коэффициент аккомодации, который характеризует физико-химические свойства испаряющейся поверхности.

Для чистой водной поверхности $\alpha = 0$ и это условие превращается в общепринятое

$$q = q_n$$

где q_n — влажность насыщения водяного пара, определяемая по температуре поверхности воды.

Для распределения температуры на поверхности воспользуемся выражением, предложенным А. М. Мхитаряном [4]

$$\theta(x) = (2.8 - 2.2 \operatorname{th} \varepsilon x) \sin \omega t \quad \text{при} \quad x > 0$$

$$\theta(x) = (3.5 - 1.5 \operatorname{th} \varepsilon x) \sin \omega t \quad \text{при} \quad x < 0$$

Зададим $k(x, z)$ в виде степенной функции

$$k = k_1(x)\left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-p}$$

где $k_1(x)$ — коэффициент турбулентного обмена на высоте z_1. Параметр p зависит от шероховатости поверхности $p(z_0)$ и принимает следующие значения:

суша		вода		
z_0	p_1	z_0	p	
10^{-2} м	0.15	10^{-4} м	0.08	$x = 0$
10^{-3} м	0.11	10^{-5} м	0.05	$x = 0$

Система (1) решается методом дробных шагов [6]. После расщепления вместо одной системы (1) получаем две подсистемы, в каждой из которых содержатся производные только по одной пространственной переменной (x или z):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial t} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial t} + w\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial q}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

Эти две подсистемы запишем в общем виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right) \tag{5}$$

где

$$\varphi = \begin{cases} u \\ \theta \\ q \end{cases} \qquad \zeta = \begin{cases} z \text{ для } (3) \\ x \text{ для } (4) \end{cases} \qquad a = \begin{cases} w \text{ для } (3) \\ u \text{ для } (4) \end{cases}$$

После замены производных конечными разностями получается уравнение:

$$\varphi_{i+1} - B_i\varphi_i + C_i\varphi_{i-1} = -F_i \tag{6}$$

Полученная система алгебраических уравнений решается методом прогонки. Решение имеет следующий вид:

$$\varphi_i = \frac{\beta_{i+1}\varphi_{i+2} + Z_{i+1}}{C_{i+1}} \tag{7}$$

$$Z_{i+1} = \beta_{i+1}(Z_i + F_i) \tag{8}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{C_{i+1}}{B_i - \beta_i} \tag{9}$$

Важное значение имеет выбор шагов.

В процессе трансформации самые существенные изменения происходят вблизи береговой линии ($x=0$) и у поверхности ($z=0$).

Поэтому вблизи них надо брать мелкие шаги.

При удалении от берега и от поверхности на некоторое расстояние процесс устанавливается. Поэтому шаги по вертикали и по горизонтали взяты переменные. Вблизи $x=0$ и $z=0$ взяты наименьшие шаги. При удалении от берега и от поверхности до некоторого расстояния шаги увеличиваются, после чего полагаются постоянными.

$$\Delta z_n = 2^{n-1}\Delta z_1 \qquad \Delta z_1 = 0.0625 \quad \text{до} \quad n = 8$$

$$\text{при} \quad n > 8 \qquad \Delta z = 8 \quad \text{до} \quad n = 24$$

$$\Delta x_m = r^{m-1}\Delta x_1$$

$$\Delta x_1 = 50 \qquad r = 1,2 \quad \text{до} \quad m = 17$$

$$\text{при} \quad m > 17 \qquad \Delta x = 250 \quad \text{до} \quad m = 32$$

Результаты численного решения

Коэффициент α, как уже говорилось, учитывает физико-химические характеристики монослоя. При $\alpha=0$ поверхность водоема свободна от монослоя. Сделаны расчеты для следующих значений $\alpha=0.05$; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 1.0. При этом $v=5$ *м/сек*. На фиг. 1 приведены графики, показывающие распределение влажности по высоте для трансформированного потока при различных монослоях.

Как и следовало ожидать, влажность (следовательно, и испарение) наибольшая в случае $\alpha=0$, в случае $\alpha=1$ влажность (испарение)—наименьшая.

Введем величину — меру трансформации — ε_q

$$\varepsilon_q = \frac{q(x) - q_0}{q_n - q_0}$$

Значения q_0 и q_n берутся из граничных условий, $q_n = 13$ *мб*, $q_n(x)$ — по формуле Магнуса.

В табл. 1 приведены значения ε_q на разных высотах при различных значениях α. Как видно, трансформация наибольшая, когда поверхность

Таблица 1

Изменение меры трансформации ξ_q при различных значениях α на разных высотах и расстояниях от берегового среза

z, км	x, км											
	0.125	0.25	0.50	1.0	2.0	4.0	0.125	0.25	0.50	1.0	2.0	4.0
	$\alpha=0$						$\alpha=0.1$					
1	0.20	0.13	0.08	0.05	0.04	0.02	0.17	0.09	0.06	0.03	0.03	0.01
2	0.31	0.20	0.13	0.09	0.05	0.01	0.23	0.14	0.09	0.05	0.04	0.03
3	0.37	0.21	0.15	0.11	0.08	0.06	0.28	0.18	0.12	0.07	0.06	0.04
4	0.40	0.27	0.17	0.13	0.09	0.06	0.30	0.19	0.13	0.08	0.07	0.05
5	0.40	0.28	0.19	0.14	0.10	0.07	0.31	0.20	0.14	0.10	0.08	0.06
6	0.41	0.28	0.21	0.14	0.11	0.08	0.32	0.21	0.15	0.11	0.09	0.06
7	0.41	0.29	0.22	0.15	0.12	0.08	0.32	0.22	0.16	0.11	0.09	0.07
10	0.42	0.30	0.22	0.17	0.13	0.11	0.33	0.23	0.17	0.12	0.09	0.08
	$\alpha=0.3$						$\alpha=0.5$					
1	0.11	0.06	0.04	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.15	0.10	0.06	0.04	0.02	0.00	0.11	0.06	0.04	0.02	0.00	0.00
3	0.17	0.12	0.08	0.05	0.03	0.00	0.13	0.08	0.06	0.03	0.01	0.00
4	0.19	0.13	0.09	0.06	0.03	0.00	0.14	0.08	0.06	0.03	0.01	0.00
5	0.20	0.14	0.10	0.07	0.04	0.00	0.14	0.09	0.07	0.04	0.02	0.00
6	0.20	0.14	0.10	0.07	0.05	0.00	0.15	0.11	0.07	0.04	0.03	0.00
7	0.21	0.14	0.10	0.08	0.05	0.00	0.16	0.11	0.07	0.05	0.04	0.00
10	0.22	0.16	0.11	0.09	0.06	0.00	0.17	0.12	0.09	0.06	0.05	0.00

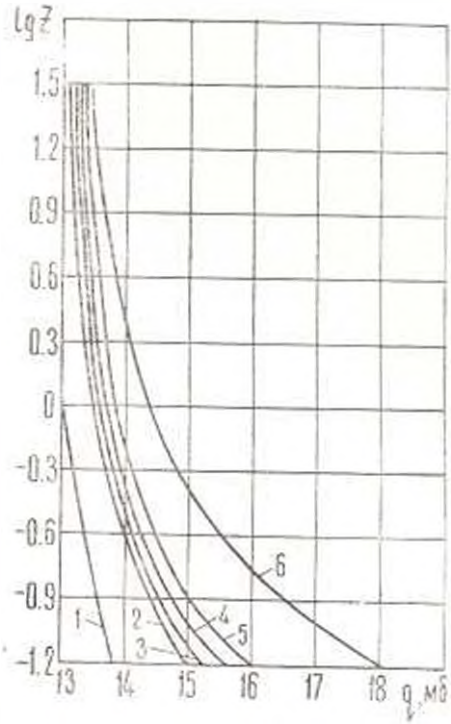
воды не покрыта монослоем. При наличии же монослоя чем больше сокращение испарения, тем меньше мера трансформации влажности. Трансформация влажности кончается на расстоянии 2—3 км от берега, когда $\alpha=0$. При наличии монослоя процесс трансформации завершается ближе к берегу. Полученные результаты подтверждаются данными наблюдений [1]. Изменение значения влажности непосредственно над водной поверхностью в зависимости от значений α показано на графике (фиг. 2), где

$$\xi_q = \frac{q(z) - q_0}{q_n - q_0}$$

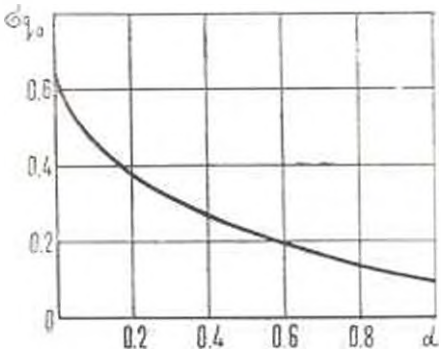
При расчетах трансформации температуры получились следующие результаты. Графики на фиг. 3 показывают распределение температуры на разных высотах соответственно для случаев $\alpha=0$; 0.3; 0.5:

На графиках видно повышение температуры над водной поверхностью причем чем больше α, тем больше повышение температуры.

Графики на фиг. 4 показывают распределение температуры по высоте на разных расстояниях от берега



Фиг. 1. Распределение влажности трансформированного потока [illegible] высо[illegible] при различных значениях
1—α 1, 2—α 0.5, 3—α 0.3, 4—α 0.2, 5—α 0.1, 6—α [illegible]



Фиг. 2. Изменение величины η_{α_2} в зависимости от значений α

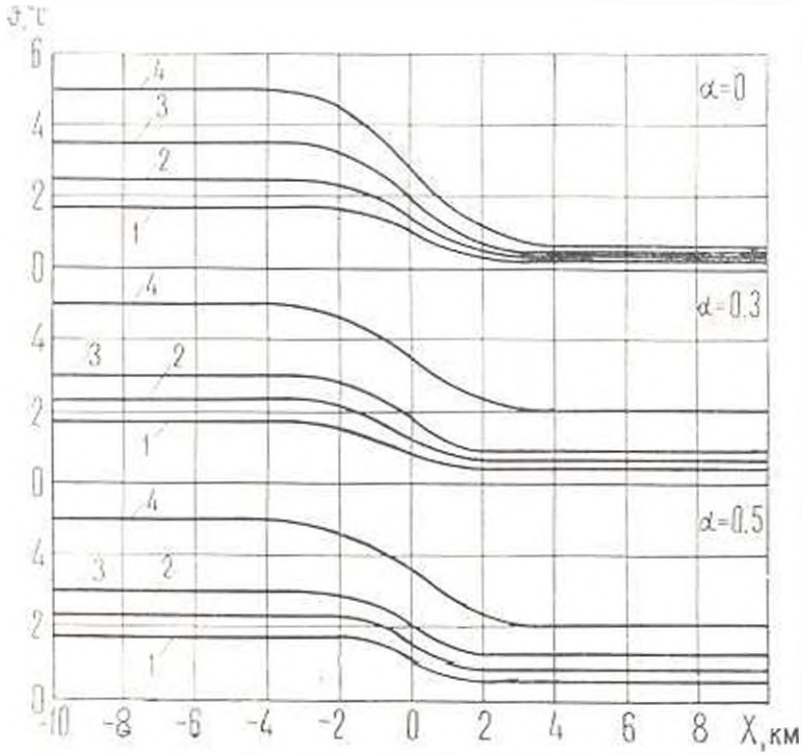
Расчеты показывают, что трансформация горизонтальной скорости завершается ближе к берегу, когда монослой существует, а когда поверхность воды свободна от нее, процесс трансформации завершается дальше от берега.

В табл. 2 приведены значения $\tau_u = |u(x) - u_0|/|u_\infty - u_0|$, где значение горизонтальной скорости на берегу, на высоте 1 м, u_∞ — значение скорости трансформированного потока на той же высоте.

Таблица 2

Изменение значения τ_u на высоте 1 м на разных расстояниях от берега для двух значений α

x, км	$\alpha = 0$			$\alpha = 0.5$		
	$u(x)$	$\lvert u(x) - u_0 \rvert$	τ_u	$u(x)$	$\lvert u(x) - u_0 \rvert$	τ_u
0.0	2.00	0.00	0.00	2.00	0.00	0.00
0.5	2.70	0.70	0.50	2.96	0.96	0.60
1.0	3.00	1.00	0.71	3.28	1.28	0.80
3.0	3.30	1.30	0.93	3.44	1.44	0.90
6.0	3.40	1.40	1.10	3.60	1.60	1.00

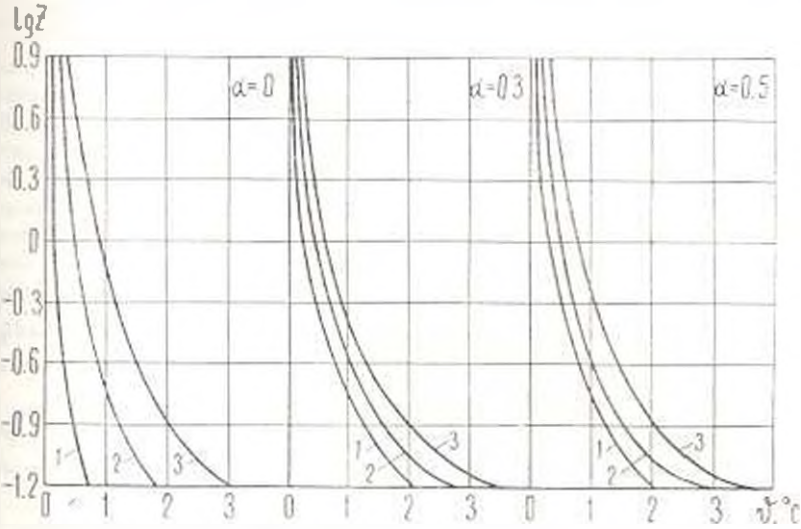


Фиг. 5. Распределение температуры по горизонтали на разных высотах при различных значениях α.

1 — z = 0,5 м, 2 — z = 0,25 м, 3 — z = 0,125 м, 4 — z = 0 м.

Теперь попытаемся путем изучения особенностей процесса трансформации воздуха под влиянием водной поверхности при наличии монослоя и без нее приближенно оценить экономию испарения.

С этой целью обратимся к фиг. 1, где приведены профили $q(z, \alpha)$.



Фиг. 4. Распределение температуры по высоте на разных расстояниях от берега при различных значениях α
1 — x = 1 км, 2 — x = 0.5 км, 3 — x = 0 км

Если испарение чистой воды равно площади, заключенной между кривыми $q(z, 0)$ и $q_0(z)$, то эффект сокращения испарения при наличии монослоя можно оценить площадью, заключенной между кривыми $q(z, 0)$ и $q(z, \alpha)$. Следовательно, экономия испарения в зависимости от α в процентах будет:

$$Э(\alpha) = \frac{\int_0^{\delta} |q(z, 0) - q(z, \alpha)|\, dz}{\int_0^{\delta} |q(z, 0) - q_0(z)|\, dz} \cdot 100\,\%$$

Ограничиваясь восьмиметровым слоем (δ = 8 м) воздушного потока над водной поверхностью и используя данные, приведенные на фиг. 1, приближенно рассчитана экономия испарения в зависимости от α в %.

α	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	1.0
$Э(\alpha)$	16	27	41	50	57	61	84

Отсюда видно, что чем больше значение α, тем больше получается и экономия испарения.

Ереванский отдел Закавказского
научно-исследовательского гидро-
метеорологического института

Поступило 1 IV 1973

Լ. Ա. ԴԱՅԱՆ

ԴԻԱՅԻՆ ՀՈՍԱՆՔԻ ՏՐԱՆՍՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ՋՐԱՄԲԱՐԻ ՎՐԱ ԳԱԼՈՐՇԻԱՑՈՒՄԸ ԿՐՃԱՏՈՂ ԹԱՂԱՆԹԱՇԵՐՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է օդային հոսանքի տրանսֆորմացիան, երբ այն անցնում է ցամաքից ջրամբարի վրայով: Եթե ջրամբարը ծածկված է միամոլեկուլյար թաղանթով, տրանսֆորմացիան բանակտիս տարբերվում է այն դեպքից, երբ ջրի մակերևույթը ազատ է որևէ ծածկույթից:

Հիդրոդինամիկայի հավասարումների (1) փոխեմք լուծվում է թվային մեթոդով: Թաղանթի առկայությունը հաշվի է առնվում եզրային պայմաններում:

Հաշվումները իրականացվել են ԷԼՍՍ—6 էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի վրա:

Հաշվումները ցույց են տալիս, որ երբ ջրի մակերևույթը ծածկված չէ թաղանթով տրանսֆորմացիայի երևույթը ավարտվում է ավելի մեծ հեռավորության վրա, քան այն դեպքում, երբ մակերևույթը ծածկված է թաղանթով:

Երբ ջրի մակերևույթը ծածկված է թաղանթով, բարձրանում է օդի շերտատիպ ջրամերձ շերտում: Որքան մեծ է գոլորշիացման կրճատումը, այնքան մեծ է շերտատիպի բարձրացումը:

Գնահատվում է գոլորշիացման տնտեսումը, տարբեր թաղանթների դեպքում:

TRANSFORMATION OF AIR FLOW OVER BASIN IN THE PRESENCE OF MONOLAYER REDUCING EVAPORATION

L. A. DAYAN

S u m m a r y

Transformation of humidity, temperature and velocity of motion of air flow is examined on its transition from land into basin in the presence of a monomolecular film. By studing the peculiarities of the process of air transformation, the economy of evaporation is approximately evaluated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мкртчян А. М., Дегтярева М. Г., Дорин З. А., Петросян Н. А. О возможности снижения эффективности монослоев, снижающих испарение с водной поверхности путем изучения трансформации влажности воздушного потока. Докл. АН Арм. ССР, т. XV, № 2, 1967.

2. *Будыко М. И.* Испарение в естественных условиях. Гидрометеоиздат, Л., 1948.
3. *Мхитарян А. М.* Некоторые вопросы гидродинамики пограничного слоя атмосферы. Водный и тепловой баланс водоемов. Изд. «Анастас», Ереван, 1970.
4. *Мхитарян А. М.* О бризах в бассейнах оз. Севан и некоторые результаты их расчета по фактическому распределению температуры подстилающей поверхности (сообщение I и II). Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, т. XV, № 5, 6, 1962.
5. *Тимофеев М. П.* Метеорологический режим водоемов. Гидрометеоиздат, Л., 1963.
6. *Катков В. Л.* О решении задач мезометеорологии численными методами. Метеорология и гидрология, № 7, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, №6, 1975 Механика

Л. А. СПЕКТОР

О ЗОНАХ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ НА УЧАСТКЕ КОНТАКТА КАТЯЩЕГОСЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА И ОСНОВАНИЯ ИЗ ТОГО ЖЕ МАТЕРИАЛА

В работе рассматривается плоская задача о качении упругого цилиндра по основанию из того же материала. При качении на участке контакта имеются зоны, где тела проскальзывают друг относительно друга, и зоны, в точках которых относительная скорость цилиндра и основания равна нулю (зоны сцепления).

Впервые частное решение этой задачи было получено Ф. Картером в работе [1]. В ней предполагалось, что участок контакта делится на две зоны: переднюю по направлению качения, где тела имеют нулевую относительную скорость, и заднюю, где происходит проскальзывание и выполнен закон трения Кулона. Были получены распределения напряжений и координата точки раздела участка контакта на зоны. Аналогичное решение было получено и Г. Фроммом [2]. Вопрос обоснования предположения Ф. Картера и единственности полученного им решения рассматривался Г. Поритским [3]. Им была изучены возможные случаи, когда зона сцепления одна, а зон проскальзывания одна или две. Для каждого положения зоны сцепления было получено свое распределение напряжений на участке контакта. В работах [4, 5] было показано, что при некотором уточнении граничных условий из всех решений, полученных в [3], им будет удовлетворять лишь то, которое совпадает с решением Ф. Картера. Этот вывод не мог считаться окончательным, так как случай разных знаков касательных напряжений в двух зонах проскальзывания не был рассмотрен. В работе [6] было доказано, что этот случай реализоваться не может.

В настоящей работе делается попытка рассмотреть наиболее общую возможную ситуацию, когда на участке контакта имеется произвольное число зон сцепления и проскальзывания. Доказывается, что решение Ф. Картера и в этом случае остается единственным.

Введем прямоугольную систему координат Oxy, связанную с участком контакта. Начало системы координат O поместим в его центре, ось Ox направим вдоль участка в сторону качения цилиндра. Предполагая, как обычно, что ширина участка контакта много меньше радиуса цилиндра R, будем считать контактирующие тела полуплоскостями $y \geq 0$ и $y \leq 0$. Пусть центр цилиндра движется с постоянной скоростью v, а угловая скорость вращения цилиндра вокруг центра — ω. Положим, что скорость качения много меньше скорости распространения звука в среде, и будем в дальнейшем пренебрегать инерционными членами. Обозначим через $S(x)$ разность скоростей точек основания и цилиндра, совпадающих с точкой x участка контакта. Тогда имеет место соотношение [7]

$$s(x) = \frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} - \zeta \tag{1}$$

где $s(x) = S(x)/w$; u^+, u^- — упругие касательные смещения точек цилиндра и основания,

$$\zeta = \frac{\omega R - w}{w}$$

Следовательно, в точках нулевой относительной скорости контактирующих тел будем иметь условие

$$\frac{\partial u^-}{\partial x} - \frac{\partial u^+}{\partial x} = \zeta$$

В остальных точках участка контакта касательные напряжения τ_{xy} пропорциональны нормальным σ_y и по направлению противоположны скорости проскальзывания

$$\tau_{xy} = -\mu\sigma_y \operatorname{sign} s(x) \tag{2}$$

здесь μ — коэффициент трения скольжения. Границы тел вне участка контакта свободны от напряжений.

Используя известные [8] выражения для смещений точек границы упругой полуплоскости под действием касательных и нормальных напряжений на участке контакта, получаем для случая контактирующих тел из одинаковых материалов следующее равенство:

$$\frac{\partial u^-}{\partial x} - \frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{\chi - 1}{4\pi\mu} \int_{-l}^{l} \frac{\tau_{xy}\,dt}{t - x} \tag{3}$$

здесь $\chi = \dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, λ и μ — постоянные Ляме.

Полуширина участка контакта l и нормальные напряжения на границе σ_y будут теми же, что и в задаче о статическом контакте цилиндра и основания:

$$l = \sqrt{\frac{\chi + 1}{\mu\pi} RP}$$

$$\sigma_y = -\frac{2\mu}{(\chi + 1)R} \sqrt{l^2 - x^2}$$

здесь P — нормальная нагрузка на цилиндр.

Введем голоморфную вне участка контакта функцию:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^{l} \frac{2\tau_{xy}}{t - z}\,dt - \frac{2\mu}{\chi - 1}\,\zeta$$

Напряжения τ_{xy} будем искать в классе функций, удовлетворяющих усло-

нию Гельдера на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$. В силу гладкости контуров тел, будем считать τ_{xy} непрерывной функцией на всей границе тел, и так как напряжения вне участка контакта отсутствуют, то выполняются равенства: $\tau_{xy}(-l) = \tau_{xy}(l) = 0$. Тогда существуют граничные значения $W^+(x)$ и $W^-(x)$ функции $W(x)$, удовлетворяющие условиям Гельдера во всех точках участка контакта. При больших $|z|$ функция $W(z)$ представляется в виде

$$W(z) = -\frac{2\sigma}{\chi+1} i + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

По формулам Сохоцкого-Племеля и с учетом равенств (1), (3) получаем

$$W^+ - W^- = 2i\tau_{xy}(x)$$

$$W^+ + W^- = -\frac{4\sigma}{\chi+1} s(x) \text{ при } -l < x < l \tag{4}$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Функция $s(x)$ не меняет знака на участке контакта (относительная скорость контактирующих тел в точках участка контакта не меняет направления).

Доказательство. Функцию $W(z)$ будем рассматривать как отображение плоскости z на некоторую конечную часть плоскости W. Достаточно рассмотреть лишь отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, так как $W(\bar{z}) = \overline{W}(z)$, $W^+(x) = \overline{W}^-(x)$. Обозначим множество точек $\operatorname{Im} z > 0$ через L, а множество $\operatorname{Im} z > 0$ через $\bar{L}$. Предположим теперь, что существуют хотя бы две точки $x = P$ и $x = Q$, в которых функция $s(x)$ имеет разные знаки.

Тогда найдутся точки $z \in L$, которые отображение $W(z)$ переводят внутрь I-го и III-его квадрантов плоскости W. Действительно, из (4) вытекает, что

$$W^+ = -\frac{2\sigma}{\chi+1} s(x) + i\tau_{xy}(x) \tag{5}$$

Следовательно, если $s(P) > 0$, а $s(Q) < 0$, то из условия (2) и знакопостоянства σ получаем

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} W^+(P) < 0, \quad \operatorname{Re} W^+(P) < 0 \\ &\operatorname{Im} W^+(Q) > 0, \quad \operatorname{Re} W^+(Q) > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Итак, граничные точки P и Q множества L переводятся отображением W внутрь III-его и I-ого квадрантов. В силу непрерывности функции W, найдется и пара внутренних точек p и q множества L, достаточно близких к P и Q, которые переходят внутрь этих квадрантов.

Покажем, что ни одна точка множества $\bar{L}$ не переходит внутрь II-ого и IV-ого квадрантов плоскости W. Действительно, в силу соотношений $\operatorname{Im} W^-(x) = 0$ при $-\infty < x < -l$, $l < x < \infty$; $\operatorname{Im} W^+(x) \cdot \operatorname{Re} W^+(x) > 0$

при $-l \leqslant x \leqslant l$ ни одна точка границы множества L не переходит внутрь этих квадрантов. Предположим, что хотя бы одна внутренняя точка m множества L переходит внутрь II-ого или IV-ого квадрантов. Через точку 0—начало координат в плоскости W и точку m проведем луч и рассмотрим множество точек M этого луча, обладающих прообразами в $\bar{L}$. Пусть

$$\gamma = \sup_{M} |W| \tag{7}$$

Ясно, что $0 < \gamma < \infty$. Исходя из непрерывности функции $W(z)$, легко показать, что точка W_0 луча $0m$, для которой $|W_0| = \gamma$, обладает прообразом в $\bar{L}$ и, следовательно, принадлежит множеству M. По ранее доказанному, этим прообразом не может быть граничная точка L. Функция $W(z)$, голоморфная в L, переводит внутренние точки во внутренние [9]. Если же точка W_0 внутренняя для образа множества $\bar{L}$, то равенство (7) не может быть выполнено. Итак, предположение о наличии точек, переводимых внутрь II-ого или IV-ого квадрантов, привело нас к противоречию.

Рассмотрим вновь точки p и q. Их прообразы, очевидно, могут быть соединены непрерывной кривой, проходящей через внутренние точки множества $\bar{L}$. Так как отображение W голоморфно в L, то образ этой кривой будет непрерывной и проходящей через внутренние точки образа $\bar{L}$ кривой, которая соединит p и q. Эти точки лежат в I-ом и III-ем квадрантах, а во II-ом и IV-ом квадрантах отсутствуют образы точек $\bar{L}$, следовательно, любой непрерывный путь pq должен проходить через точку 0. Но точка 0 не может быть образом никакой внутренней точки множества $\bar{L}$, так как иначе она была бы внутренней точкой образа $\bar{L}$ и тогда нашлись бы точки, переходящие внутрь II-ого и IV-ого квадрантов. Поэтому искомого пути pq не существует, и наше предположение о перемене знака функцией $s(x)$ несправедливо. Легко показать, что знак этой функции совпадает со знаком δ. Лемма доказана.

Пусть теперь множество точек x участка контакта, для которых $s(x) = 0$, есть совокупность n отрезков, положение и размеры которых должны быть определены в ходе решения задачи.

Положим для определенности $\delta > 0$. Тогда по лемме функция

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l} \frac{2\pi(\tau_{xy} - i\sigma_y)}{t - z} dt - \frac{2\pi}{z - 1} \delta \tag{8}$$

голоморфна вне зон сцепления и ограничена в концах всех этих зон. В точках зон сцепления выполняется условие

$$W_1^+ - W_1^- = -\frac{4\pi}{(z-1)R} \delta$$

Строя такую функцию по известным формулам [10], получим

$$W_1(z) = \begin{cases} -\dfrac{2\varphi}{(\varkappa+1)R} z + P(z)X(z) & \text{при} \quad n > 1 \\ \dfrac{2\varphi}{(\varkappa+1)R} (iz + 1 \ (a+z)(b-z)^{\ }) + P(z)X(z) & \text{при} \quad n = 1 \end{cases}$$

здесь $X(z)$ — решение соответствующей однородной задачи сопряжения, $P(z)$ — произвольный полином,—a и b—концы зоны сцепления.

Из равенства (8) следует, что при больших $|z|$ функция $W_1(z)$ остается ограниченной. Из равенства же (9) вытекает, что при $n > 1$ ограниченных решений задачи не существует. При $n = 1$ искомая функция существует, если положить $P(z) = 0$. Определяя теперь функцию $W(z)$ и затем по формулам (4) функции $t_{xy}(x)$ и $s(x)$, можно показать, что если перед зоной сцепления лежит зона проскальзывания, то условие (2) нарушается. Поэтому зона сцепления примыкает к передней по направлению качения границе участка контакта.

Касательные напряжения и длина участка сцепления, найденные после определения функции $W(z)$ совпадают с таковыми в решении [1, 2]. Таким образом, единственность решения Ф. Картера доказана.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический институт подшипниковой промышленности

Поступила 14 V 1975

Ա. Ա. ՍՊԵԿՏՈՐ

ԳԼՈՐՎՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԼԱՆԻ ԵՎ ՆՈՒՅՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՀԻՄՔԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ԿՑՄԱՆ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆ ՏԵՂԱՄԱՍԻՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է առաձգական գլանի կայունացված գլորումը նույն նյութից հիմքի վրայով։

Ենթադրվում է, որ սեղի ունի Ամոնտոն-Կուլոնի չոր շփման օրենքը։ Կցման և սահման տեղամասերի թիվը և դիրքը հիմնավորվում է տասնց արեկ լրացուցիչ ենթադրությունների օգտագործման։

ON REGIONS OF SLIP AND ADHESION WITHIN CONTACT AREA OF A ROLLING ELASTIC CYLINDER AND A FOUNDATION OF THE SAME ELASTIC PROPERTIES

A. A. SPECTOR

Summary

A steady rolling of an alastic cylinder over a foundation of the same elastic properties is considered. Amonton-Coulon's law of dry

friction is assumed to hold. The number and disposition of regions of slip and adhesion are established without any supplementary assumptions.

ЛИТЕРАТУРА

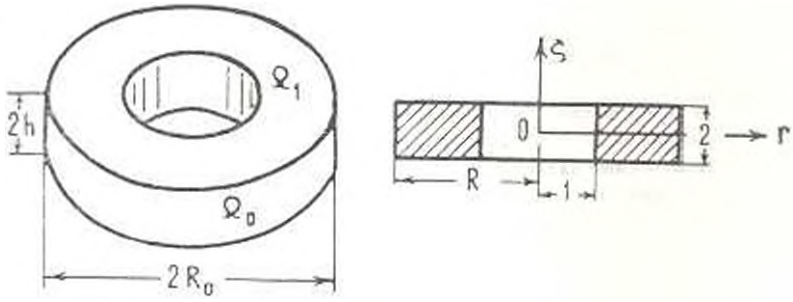
1. *Carter F. W.* On the action of a locomotive driving wheel. Proc. Roy. Soc. (A), v. 12, 1926.
2. *Fromm H.* Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbaren Sheiben. ZAMM, B. 7, 1927.
3. *Poritsky H.* Stresses and deflections of a cylindrical bodies in contact. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
4. *Cain B. S.* Discussion on Poritsky. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
5. *Poritsky H.* Auther's reply. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
6. *Горячева И. Г.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. М., 1974.
7. *Глаголев Н. И.* Работа сил трения и износ перекатываемых тел. Труды III-ей Всесоюзн. конференции по трению и износу в машинах.
8. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., 1953.
9. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., 1969.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 6, 1975 Механика

Е. В. АЛТУХОВ, А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, В. А. ШАЛДЫРВАН

ИЗГИБ ТОЛСТОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛИТЫ

Рассмотрим изгиб толстой кольцевой плиты нормальными усилиями, приложенными к боковым поверхностям Ω_j $(j=1,2)$. Эти усилия изменяются по толщине по степенному закону.



Фиг. 1.

Введем безразмерную цилиндрическую систему координат (фиг. 1) и обозначим перемещения точек плиты в направлении оси ζ через w, а в направлении оси r — через $u=u_r$ (перемещения в окружном направлении в осесимметричном случае отсутствуют, то есть $u_\theta=0$). Однородные решения [1] в рассматриваемом случае можно записать в следующем виде [2, 3]:

$$u(r,\zeta)=\frac{d}{dr}\left[(\nu_1+1)\zeta F-\varepsilon^2\nu_2\zeta^3\Delta F\right]+2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}n_p(\zeta)\frac{dC_p}{dr}$$

$$w(r,\zeta)=-\frac{\nu_1-1}{\nu_2}F-\left(\frac{\nu_1-1}{2}\zeta^2-2\nu_2\right)\varepsilon\Delta F-2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}q_p(\zeta)C_p \tag{1}$$

Здесь $\nu_1=(1-2\nu)^{-1}$, $\Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$, ν — коэффициент Пуассона, $\varepsilon=\frac{h}{R_1}$ — относительная толщина, $2h$ и R_1 — размерные толщина и внутренний радиус плиты; $n_p(\zeta)$ и $q_p(\zeta)$ — известные функции ζ, $2\zeta_p$ — корни функции $\sin 2\zeta-2\zeta$, приведенные в статье [4]. Суммирование в (1) ведется по корням ζ_p из первого квадранта.

Решение в форме (1) удовлетворяет уравнениям равновесия и однородным условиям на плоских гранях плиты. Оставшийся функциональный

произвол (F — бигармоническая, C_p — метагармоническая функции) позволяет удовлетворить граничным условиям на боковых поверхностях плиты Ω_j. Если загружена внешняя боковая поверхность плиты, то граничные условия имеют вид

$$\sigma_r|_{\Omega_q} = P_{qn} e^{i\theta n-1}, \quad \tau_{r\zeta}|_{\Omega_q} = \sigma_\zeta|_{\Omega_q} = \tau_{r\zeta}|_{\Omega_q} = 0 \quad (q = 1, 2) \tag{2}$$

Если же загружена внутренняя поверхность, то

$$\sigma_r|_{\Omega_1} = P_{qn} e^{i\theta n-1}, \quad \tau_{r\zeta}|_{\Omega_1} = \sigma_\zeta|_{\Omega_1} = \tau_{r\zeta}|_{\Omega_1} = 0 \tag{3}$$

Бигармоническая функция в осесимметричном случае представляется так

$$F(r) = \alpha_1 r^2 + \alpha_2 \ln r + \alpha_3 r^2 \ln r + \alpha_4$$

Из условия однозначности перемещений получаем $\alpha_3 = 0$, а постоянная α_4 не влияет на распределение напряжений в плите, ее определением заниматься не будем. Поэтому

$$F(r) = \alpha_1 r^2 + \alpha_2 \ln r \tag{4}$$

Общее решение модифицированного уравнения Бесселя, которому удовлетворяют метагармонические функции в осесимметричном случае, запишем так

$$C_p(r) = a_p K_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} r\right) \Big/ K_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right) + A_p I_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} r\right) \Big/ I_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right) =$$

$$= a_p K_*^{(p)}(r) + A_p I_*^{(p)}(r) \tag{5}$$

где K_0, I_0 — модифицированные функции Бесселя, $R = R_0/R_1$ — безразмерный, а R_0 — размерный внешний радиус плиты.

Перепишем граничные условия (2) с учетом выражений (4) и (5) и уравнений закона Гука

$$\zeta\left[2(3\nu_1 - 1)\alpha_1 - \frac{1}{R^2}(\nu_1 - 1)\alpha_2\right] + 2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left[l_p(\zeta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R} n_p(\zeta) P_0'\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right)\right] A_p + \left[l_p(\zeta) - \frac{1}{R} n_p(\zeta) \times\right.$$

$$\left. \times P_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right)\right]\left[a_p K_*^{(p)}(R)\right] - N^{(1)}(\zeta) = 0$$

$$\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta)\left[a_p P_0'\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right) K_*^{(p)}(R) + A_p P_0'\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right)\right] = 0 \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta)\left[a_p P_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right) + A_p P_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right) I_*^{(p)}(1)\right] = 0$$

$$\zeta[2(3\nu_1-1)\alpha_1-(\nu_1+1)\alpha_2]+2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[l_p(\zeta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-n_p(\zeta)P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)\right]a_p+\left[l_p(\zeta)-n_p(\zeta)P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)\right]A_pI_*^{(p)}(1)\right\}-N^{(1)}(\zeta)=0$$

Здесь

$$P_0^-(\alpha r)=-\alpha K_1(\alpha r)/K_0(\alpha r),\qquad N^{(0)}(\zeta)=P_{2m}^{-2\nu+1}$$

$$P_0^+(\alpha r)=\alpha I_1(\alpha r)/I_0(\alpha r),\qquad N^{(1)}(\zeta)=0$$

Если в граничных условиях (6) положить $N^{(0)}(\zeta)=0$, а $N^{(1)}(\zeta)=-P_{0m}^{-2\nu+1}$, то они будут соответствовать условиям (3).

Для удовлетворения граничных условий (6) используем метод ортогонализации, взяв в качестве базиса полную на $[-1,1]$ систему функций $\{\sin\delta_m\zeta,\ \cos\delta_m\zeta\}$ $\left(\delta_m=\frac{\pi}{2}(2m+1),\ m=0,1,\ldots\right)$. Это позволяет свести краевую задачу к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно $2p+2$ произвольных постоянных α_1, α_2, a_p, A_p. Указанная система получается такой

$$\frac{3\nu_1-1}{\nu_1+1}\alpha_1-\frac{1}{2R}\alpha_2+\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[l_{mp}-\frac{1}{R}n_{mp}P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}R\right)\right]A_p+\right.$$

$$\left.+\left[l_{mp}-\frac{1}{R}n_{mp}P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}R\right)\right]a_pK_*^{(p)}(R)\right\}-\frac{1}{2}N_m^{(0)}=0$$

$$\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}l_{mp}\left[a_pP_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}R\right)K_*^{(p)}(R)+A_pP_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}R\right)\right]=0$$

$$\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}l_{mp}\left[a_pP_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)+A_pP_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)I_*^{(p)}(1)\right]=0 \qquad (7)$$

$$\frac{3\nu_1-1}{\nu_1+1}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[l_{mp}-n_{mp}P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)\right]a_p+\right.$$

$$\left.+\left[l_{mp}-n_{mp}P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)\right]A_pI_*^p(1)\right\}-\frac{1}{2}N_m^{(1)}=0$$

Здесь введены обозначения

$$n_{mp}=\frac{(-1)^m\delta_m^2}{2(\nu_1+1)}\int_{-1}^{1}n_p(\zeta)\sin\delta_m\zeta d\zeta,\qquad l_{mp}=\frac{\delta_m}{\lambda}r_{mp}$$

$$r_{mp}=\frac{(-1)^m\delta_m^2}{2(\nu_1+1)}\int_{-1}^{1}r_p(\zeta)\cos\delta_m\zeta d\zeta,\qquad N_m^{(j)}=\frac{(-1)^m\delta_m^2}{2(\nu_1+1)}\int_{-1}^{1}N^{(j)}\sin\delta_m\zeta d\zeta \qquad (8)$$

После определения коэффициентов напряжения в плите находятся по следующим формулам:

$$\tau_\theta = \zeta\left[2(3\nu_1 - 1)a_1 + \frac{\nu_1+1}{r^2}a_2\right] + 2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[s_p(\zeta) + \frac{1}{r}n_p(\zeta)P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)\right]a_pK_1^{(p)}(r) + \left[s_p(\zeta) + \frac{1}{r}n_p \times P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)\right]A_pI_1^{(p)}(r)\right\} \tag{9}$$

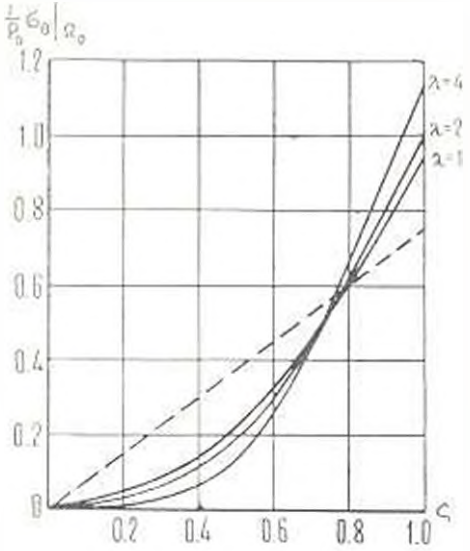
$$\sigma_\zeta = 2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty} t_p(\zeta)\left[a_pK_1^{(p)}(r) + A_pI_1^{(p)}(r)\right]$$

$$\tau_{r\zeta} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta)\left[a_pP_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)K_1^{(p)}(r) + A_pP_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)I_1^{(p)}(r)\right]$$

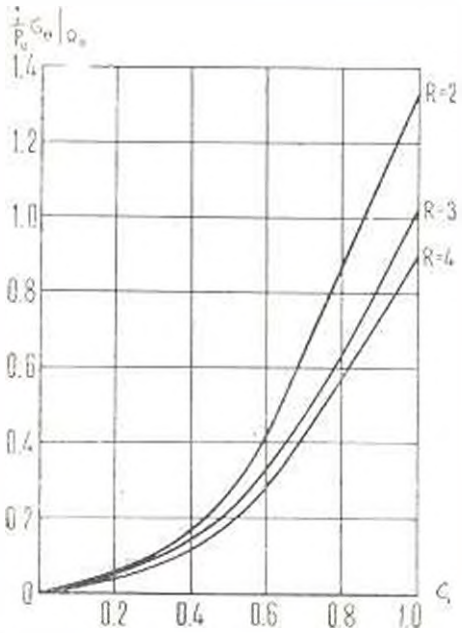
$$\sigma_r = \zeta\left[2(3\nu_1 - 1)a_1 - \frac{\nu_1+1}{r^2}a_2\right] - 2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[l_p(\zeta) - \frac{1}{r}n_p(\zeta)P_1\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)\right]a_pK_1^{(p)}(r) + \left[l_p(\zeta) - \frac{1}{r}n_p(\zeta)P_1^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)\right]A_pI_1^{(p)}(r)\right\}$$

Численные расчеты проводились с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$. На фиг. 2 приведены графики изменения напряжений $\frac{1}{P_0}\tau_\theta|_{\zeta_1}$ по толщине плиты, когда внешний радиус $R = 3$, для различных относительных толщин λ. Пунктирная линия относится к загружению плиты по линейному закону, а кривые — к загружению внешней поверхности по закону $P_0\zeta^2$. На фиг. 3 даны эпюры тех же напряжений, но при $\lambda = 2$ и различных R. Характер изменения напряжений τ_θ на плоских гранях плиты по перемычке между боковыми поверхностями можно проследить на фиг. 4. Представляет интерес поведение потенциальной части решения σ_ζ^* при отходе от боковых поверхностей в различных сечениях плиты. Графики изменения указанной величины при различных λ приведены на фиг. 5.

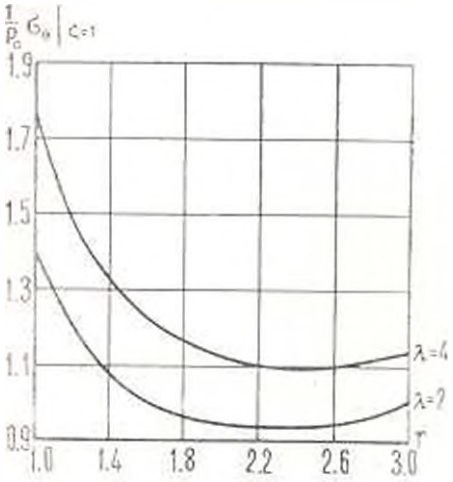
Точность решения контролировалась проверкой удовлетворения граничных условий на боковых поверхностях плиты. При этом система (7) решалась методом редукции, и максимальный порядок брался равным 62, что позволило удовлетворить граничные условия на боковых поверхностях с точностью до 2—3% от величины P_0 в широких диапазонах изменения λ и R.


$\frac{1}{p_0}\sigma_\theta|_{\Omega_0}$
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ξ
λ=4
λ=2
λ=1

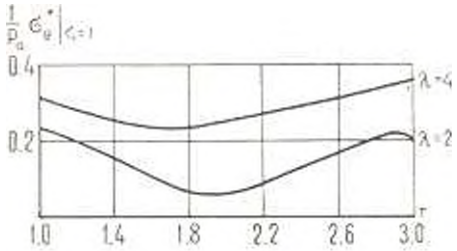
Фиг. 2.


$\frac{1}{p_0}\sigma_\theta|_{\Omega_0}$
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ξ
R=2
R=3
R=4

Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Донецкий государственный
университет

Поступила 20 V 1975

Ն. Ա. ԱՍՏՈՒԾԱՏՐՅԱՆ, Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆԻԱՆՅԱՆ, Վ. Ա. ՇԱՐԵՓԿԻՆ

ՀԱՍՏ ԳԼԱՆԱՁԵՎ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ստացվել է օղակաձև սալի ծռման առանցքասիմետրիկ խնդրի լուծումը սալի գլանային մակերևույթներից մեկի վրա տրված նորմալ ուժերի փոփոխման ատիճանային օրենքի դեպքում։

Թվային եղանակով ուսումնասիրվել է լարումների բաշխումը կոմնային մակերևույթների մոտակայքում, ինչպես նաև նրանց միջին մասերում։

THE BENDING OF A THICK CIRCULAR PLATE

E. V. ALTUKHOV, A. S. KOSMODAMIANSKY, V. A. SHALDYRVAN

S u m m a r y

The solution is obtained to the axisymmetric problem on the bending of a circular plate under the power law of change in normal forces given on one of the cylindrical surfaces bounding the plate. The distribution of stresses near the side edges as well as at the bridges between them is analysed numerically.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, т. VI, вып. 2—3, 1942.
2. *Космодамианский А. С., Шалдырван Г. Г.* Изгиб толстой плиты, ослабленной полостью. Прикл. механ., т. X, вып. 5, 1974.
3. *Космодамианский О. С., Шалдырван Г. Г.* Изгиб толстых плит с цилиндрическими включениями. Докл. АН УССР, сер. А, вып. 2, 1973.
4. *Аксенян О. К.* О концентрации напряжений в толстых плитах. ПММ, т. 30, вып. 5, 1966.