

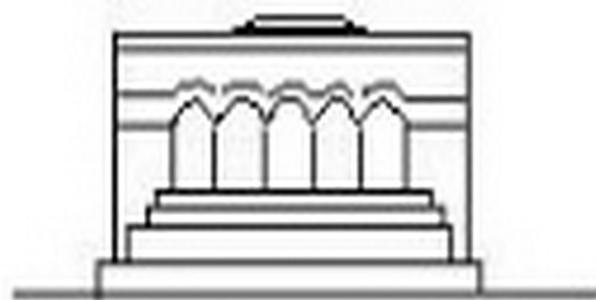
ՄԵՆԱՆԻՇՍ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1975

Г. Б. ВЕРНИШАН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛАСТИНКЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ ИЗ ВЯЗКО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Исследовано нагружение бесконечной пластинки из вязко-упругого материала с эллиптическим отверстием. Прилагаемая нагрузка представляет собой растягивающее напряжение, действующее в направлении малой оси эллипса, и меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой. Кроме того, рассматривается случай всестороннего растяжения пластинки.

Для установления связи между деформациями и напряжениями, возникающими в пластинке, необходимо знать составляющие так называемой комплексной податливости.

Известно [1], что составляющие комплексной податливости существенно зависят от частоты колебаний и температуры. При этом за счет работы диссипативных сил происходит выделение тепла. Поэтому для определения температуры получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находятся экспериментальным путем.

Задача решена при условии, что температура на контуре отверстия равна температуре окружающей среды, а на боковой поверхности происходит свободная теплоотдача в окружающую среду по направлению нормали к плоскости пластинки, то есть по направлению оси oz .

Имеет место соотношение $\sigma T_{\sigma z} = \alpha(T - T_0)$, где α — коэффициент теплопередачи. Кроме того, предполагается, что температура по толщине пластинки не меняется.

1. *Одностороннее растяжение.* Будем рассматривать деформацию пластинки с эллиптическим отверстием, которая состоит из вязко-упругого материала. На пластинку действует растягивающая нагрузка в бесконечности, которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой σ_0 .

Будем полагать, что составляющая комплексной податливости $J''(T, \omega)$ мала по сравнению с $J'(T, \omega)$.

Таким образом, для определения напряженного состояния можно воспользоваться решением упругой задачи о растяжении пластинки с эллиптическим отверстием [2].

При решении задачи воспользуемся отображением внешности эллипса на внешность единичного круга $|\xi| > 1$.

Отображение дается формулой

$$z = w_1(\zeta) = R(\zeta + \beta/\zeta) \quad (R > 0, 0 < \beta < 1) \quad (1.0)$$

Окружности $|\zeta| = 1$ соответствует эллипс с центром в начале координат с полуосями $a = R(1 + \beta)$, $b = R(1 - \beta)$.

В таком случае компоненты напряжения в полярной системе координат будут

$$\sigma_r = \sigma_r^0 \cos \omega t, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 \cos \omega t, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 \cos \omega t \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= -\frac{\sigma_y^0 (\rho^2 - 1)}{2\beta} \left| \frac{\rho^4 + \beta(\rho^2 - 1) \cos 2\theta - \beta^2}{\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} - \frac{(1 + \beta)(\rho^2 - \beta^2)(\rho^4 - \beta^2)}{(\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2)^2} \right| \\ \sigma_\theta^0 &= \frac{\sigma_y^0}{2\beta} \left| \frac{(1 + 2\beta)\rho^4 - (1 + \beta^2)\rho^2 - \beta^2(2\beta + 3) + \beta(\rho^2 + 1)^2 \cos 2\theta}{\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} - \frac{(1 + \beta)(\rho^2 - \beta^2)(\rho^2 - \beta^2)(\rho^2 - 1)}{(\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2)^2} \right| \\ \tau_{r\theta}^0 &= -\frac{\sigma_y^0}{2} \left| \frac{\rho^4 - 1}{\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} - \frac{2\beta^2(1 + \beta)(\rho^2 - \beta^2)(\rho^2 - 1)}{(\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2)^2} \right| \sin 2\theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Связь между компонентами деформации и напряжения возьмем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} + \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \varepsilon_r(\tau) d\tau = \frac{\sigma_r^0}{E} + \nu \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \varepsilon_\theta(\tau) d\tau \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E} + \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \varepsilon_\theta(\tau) d\tau = \frac{\sigma_\theta^0}{E} + \nu \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \varepsilon_r(\tau) d\tau \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{r\theta} + 2(1 + \nu) \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \tau_{r\theta}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.3)$$

где E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона.

Используя из (1.1) значения σ_r^0 , σ_θ^0 , $\tau_{r\theta}^0$ и введя переменную $\zeta = t - \tau$, получим

$$\varepsilon_r = (\sigma_r^0 - \nu \sigma_\theta^0) \left| \left\{ \frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^t K(T, \zeta) e^{-\beta\zeta} d\zeta \right\} \cos \omega t - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left| \operatorname{Im} \int_0^{\bar{a}} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right| \sin \omega t \Big\} \\
\varepsilon_x = (\sigma_0^0 - \nu\sigma_0^0) & \left\{ \left| \frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^{\bar{a}} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right| \cos \omega t - \right. \\
& \left. - \left| \operatorname{Im} \int_0^{\bar{a}} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right| \sin \omega t \right\} \\
\gamma_{xy} = 2(1 + \nu)\tau_{xy}^0 & \left\{ \left| \frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^{\bar{a}} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right| \cos \omega t - \right. \\
& \left. - \left| \operatorname{Im} \int_0^{\bar{a}} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right| \sin \omega t \right\} \quad (1.4)
\end{aligned}$$

Введем комплексную податливость

$$\begin{aligned}
f^*(T, \omega) &= \int_0^{\bar{a}} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta = f'(T, \omega) - i f''(T, \omega) = \\
&= f(T, \omega) \cos \varphi_0 - i f(T, \omega) \sin \varphi_0 \quad (1.5)
\end{aligned}$$

где φ_0 — сдвиг фаз между деформацией и напряжением.

Учитывая (1.5), из (1.4) получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= (\sigma_0^0 - \nu\sigma_0^0) \left\{ \left| \frac{1}{E} + f'(T, \omega) \right| \cos \omega t + f''(T, \omega) \sin \omega t \right\} \\
\varepsilon_y &= (\sigma_0^0 - \nu\sigma_0^0) \left\{ \left| \frac{1}{E} + f'(T, \omega) \right| \cos \omega t + f''(T, \omega) \sin \omega t \right\} \\
\gamma_{xy} &= 2(1 + \nu)\tau_{xy}^0 \left\{ \left| \frac{1}{E} + f'(T, \omega) \right| \cos \omega t + f''(T, \omega) \sin \omega t \right\} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Работа, совершаемая при вязко-упругой деформации, равна

$$W = \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} \sigma_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} dt + \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} \sigma_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} dt + \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} \tau_{xy} \frac{d\gamma_{xy}}{dt} dt \quad (1.7)$$

Если теперь использовать (1.1), (1.6) и подставить в (1.7), получим

$$W = \pi f''(T, \omega) [(\sigma_0^0)^2 - 2\nu\sigma_0^0\tau_{xy}^0 + (\sigma_0^0)^2 + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^0)^2] \quad (1.8)$$

Работа, совершаемая за один цикл при деформации вязко-упругого тела, позволяет определить интенсивность выделения тепла

$$q = \omega k W / 2\pi \quad (1.9)$$

Здесь k —величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ —коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. С целью установления максимального нагрева, будем полагать этот коэффициент постоянным и равным единице.

Для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + f(r, \theta) f(T, \omega) = \alpha (T - T_0) \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} f(r, \theta) = & \frac{\mu R^2}{2\beta^2 \rho^4 (\rho^4 - 2\beta \rho^2 \cos 2\theta + \beta^2)} \left\{ 2\beta^2 [\rho^2 - 2\beta \cos 2\theta - \beta] \rho + 2\beta \right\} + \\ & - (1 + \nu) (\rho^2 - 1) \left[(\rho^2 - \beta) - \beta (\rho^2 - 1) \cos 2\theta - \right. \\ & \left. - \frac{(1 - \beta) (\rho^2 - \beta^2) (\rho^4 - \beta^2)}{\rho^4 - 2\beta \rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} \right] \left[(1 + 2\beta) \rho^4 - (1 + \beta) \rho^2 - \beta (2\beta + 3) - \right. \\ & \left. - 3(\rho^2 + 1)^2 \cos 2\theta - \frac{(1 - \beta) (\rho^2 - 1) (\rho^2 - \beta^2) (\rho^2 - \beta^2)}{\rho^4 - 2\beta \rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} \right] + \\ & - (1 + \nu) (\rho^2 - 1)^2 \left[(\rho^2 - 1) - \frac{2\beta^2 (1 + \beta) (\rho^2 - \beta^2)}{\rho^4 - 2\beta \rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} \right] \sin^2 2\theta \quad (1.11) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1 - \beta (\sigma_0^2)^2}{2ac} \quad | \sigma_0^2(\xi) |^2 = \frac{R^2}{\lambda^2} (\rho^4 - 2\beta \rho^2 \cos 2\theta + \beta^2) \quad (1.12)$$

a —коэффициент теплопроводности, c —теплоемкость.

Граничные условия для температуры T примем следующими:

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad \rho = 1 \quad (1.13)$$

то есть температура на контуре отверстия равна температуре окружающей среды.

Кроме того предполагается, что температура на бесконечности ограничена.

Известно [3], что компоненты комплексной податливости и комплексного модуля связаны соотношением

$$\begin{aligned} J(T, \omega) &= \frac{E'(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2} \\ J''(T, \omega) &= \frac{E''(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2} \quad (1.14) \end{aligned}$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для $E'(T, \omega)$ и $E''(T, \omega)$ можно воспользоваться линейной аппроксимацией, при этом $E'(T, \omega)$ будем считать постоянной

$$E'(T, \omega) = A, \quad E''(T, \omega) = B - CT \quad (1.15)$$

Кроме того, так как обычно $E''(T, \omega) \ll E'(T, \omega)$, то величиной $E''(T, \omega)$ по сравнению с $E'(T, \omega)$ можно пренебречь.

Тогда (1.14) принимает вид

$$f'(T, \omega) = 1/A, \quad f''(T, \omega) = (B + CT)/A^2 \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в (1.10), вводя новую неизвестную функцию

$$(B - CT)/A = u(\rho, \theta) \quad (1.17)$$

получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \gamma^2 u = F(\rho, \theta) u + \Phi(\rho, \theta) \quad (1.18)$$

где

$$\gamma^2 = 2R^2$$

$$F(\rho, \theta) = \frac{C}{A^2} f(\rho, \theta) = \frac{2\gamma^2}{\rho^2} \cos 2\theta - \frac{\gamma^2}{\rho^4}$$

$$\Phi(\rho, \theta) = \frac{2\gamma^2(B - CT_0)}{A} \left(1 - \frac{2\gamma^2}{\rho^2} \cos 2\theta - \frac{\gamma^2}{\rho^4} \right) \quad (1.19)$$

функция $f(\rho, \theta)$ дается по формуле (1.11). Согласно (1.13) граничные условия для $u(\rho, \theta)$ будут

$$u = (B - CT_0)/A = u_0 \quad \text{при} \quad \rho = 1 \quad (1.20)$$

и на бесконечности $u(\rho, \theta)$ ограничена.

Решение уравнения (1.18) при граничном условии (1.20) можно свести к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u(\rho_0, \theta_0) = \Psi(\rho_0, \theta_0) + \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} K^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) u(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (1.21)$$

где

$$K^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) = F(\rho, \theta) G^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) \quad (1.22)$$

$$\Psi(\rho_0, \theta_0) = -u_0 \left[\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} G^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) \right]_{\rho=1} d\theta + \int_1^{\infty} \int_0^{2\pi} G^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) \Phi(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \right] \quad (1.23)$$

$G^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta)$ — функция Грина для уравнения (1.18) в случае внешности круга.

Эта функция имеет вид

$$G^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} [K_0(\delta\rho) - V(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta)] \\ r = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2} \quad (1.24)$$

где

$$V(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) = \frac{I_0(\delta)}{K_0(\delta)} K_0(\delta\rho_0) K_0(\delta\rho) - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\delta)}{K_n(\delta)} K_n(\delta\rho_0) K_n(\delta\rho) \cos n(\theta - \theta_0)$$

Используя теорему сложения для цилиндрических функций [4], $G^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta)$ можно представить в виде

$$G^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \left[W_0(\rho_0, \rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\rho_0, \rho) \cos n(\theta - \theta_0) \right] \quad (1.25)$$

$$W_n(\rho_0, \rho) = [I_n(\delta\rho_0) K_n(\delta) - K_n(\delta\rho_0) I_n(\delta)] \frac{K_n(\delta\rho)}{K_n(\delta)}, \quad 1 - \rho_0 < \rho \\ = [I_n(\delta\rho) K_n(\delta) - K_n(\delta\rho) I_n(\delta)] \frac{K_n(\delta\rho_0)}{K_n(\delta)}, \quad \rho_0 < \rho < 1 \quad (1.26)$$

$I_n(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, а $K_n(x)$ — функция Макдональда.

Вычисляя интегралы, входящие в формулу (1.23), получаем

$$\Psi(\rho_0, \theta_0) = u_0 + \delta^2 \beta^2 u_0 \int_0^1 W_n(\rho_0, \rho) \frac{d\rho}{\rho^3} = 2\beta u_0 \left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{K_2(\delta\rho_0)}{K_2(\delta)} \right] \cos 2\theta_0 \quad (1.27)$$

Для решения интегрального уравнения (1.21), его ядро заменим вырожденным. Разлагаем ядро в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций

$$\{\varphi_k(\rho, \theta) = c_k(\rho - 1) \cos k\theta / \rho^{k+1/2}, \quad \varphi_m(\rho, \theta) = c_m(\rho - 1) \cos m\theta / \rho^{m+1/2}\} \quad (1.28)$$

где

$$c_k = \sqrt{(2\rho + 2)(2\rho + 3)(2\rho + 4) / 12\pi} \quad (1.29)$$

Разложение будет иметь следующий вид:

$$K^*(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) = \sum_{k,m=0}^{\infty} K_{k,m}^* \varphi_k(\rho_0, \theta_0) \varphi_m(\rho, \theta) \quad (1.30)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{km}^* &= c_k c_m \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K^m(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) \cos k\theta_0 \frac{(\rho_0 - 1)}{\rho_0^{k+2}} d\rho_0 d\theta_0 \times \\
 &\quad \times \cos m\theta \frac{(\rho - 1)}{\rho^{k+2}} d\rho d\theta = \\
 &= c_k c_m \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G^m(\rho_0, \theta_0; \rho, \theta) \cos k\theta_0 \frac{(\rho_0 - 1)}{\rho_0^{k+2}} d\rho_0 d\theta_0 \times \\
 &\quad \times F(\rho, \theta) \cos m\theta \frac{(\rho - 1)}{\rho^{k+2}} d\rho d\theta = \\
 &= c_k c_m \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W_k(\rho_0, \rho) \frac{(\rho_0 - 1)}{\rho_0^{k+2}} d\rho_0 \right\} F(\rho, \theta) \cos m\theta \frac{(\rho - 1)}{\rho^{k+2}} d\rho d\theta \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

Функция $F(\rho, \theta)$ дается по формуле (1.19), $W_k(\rho_0, \rho)$ — по формуле (1.26).

Из-за громоздкости явные выражения для A_{km}^* не приводим.

После преобразования интегральное уравнение (1.21) принимает вид

$$u(\rho_0, \theta_0) - \sum_{k, m=1}^N A_{km}^* \varepsilon_k(\rho_0, \theta_0) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_m(\rho, \theta) u(\rho, \theta) d\rho d\theta = \Psi(\rho_0, \theta_0) \quad (1.32)$$

Решение интегрального уравнения (1.32) имеет следующую форму [5]:

$$u(\rho_0, \theta_0) = \Psi(\rho_0, \theta_0) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^N \frac{c_k Y_k}{\rho_0^k} \cos k\theta_0 \quad (1.33)$$

$$Y_k = \sum_{m=1}^N A_{km}^* X_m \quad (1.34)$$

где $\Psi(\rho_0, \theta_0)$ дается формулой (1.27), c_k — формулой (1.29). Постоянные X_m определяются из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m - \sum_{k=1}^N A_{km}^* X_k = \Phi_m \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (1.35)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= 16 \sqrt{21 - 2\alpha_k} \left[\frac{1}{20} - \frac{1}{K_2(\alpha)} \int_1^{\alpha} K_2(z) \frac{(\rho - 1) d\rho}{\rho^4} \right] \\
 \Phi_m &= 0, \quad m \neq 2 \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

Интеграл, входящий в формулу (1.36), вычисляется численным методом.

Учитывая (1.17), из (1.33) получаем решения задачи при одностороннем растяжении.

2. *Всестороннее растяжение.* Рассмотрим случай, когда на пластинку действует всесторонняя растягивающая нагрузка, которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой, равной σ_0^0 .

Компоненты напряжения даются формулой (1.1), где

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= \frac{\sigma_0^0 (r^4 - \beta^4)}{r^4 - 2\beta^2 r^2 \cos 2\theta + \beta^4} \left[1 - \frac{(1 - \beta^2) r^2 - 2\beta^2 \cos 2\theta}{r^4 - 2\beta^2 r^2 \cos 2\theta + \beta^4} \right] \\ \sigma_{\theta\theta}^0 &= \frac{\sigma_0^0 (r^4 - \beta^4)}{r^4 - 2\beta^2 r^2 \cos 2\theta + \beta^4} \left[1 + \frac{(1 - \beta^2) r^2 - 2\beta^2 \cos 2\theta}{r^4 - 2\beta^2 r^2 \cos 2\theta + \beta^4} \right] \\ \sigma_{r\theta}^0 &= \frac{2\sigma_0^0 r^2 (r^2 - \beta^2) \sin 2\theta}{(r^4 - 2\beta^2 r^2 \cos 2\theta + \beta^4)^2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение рассмотренного случая ищется методом, излагаемым в § 1. Для функции $u(r, \theta)$ получается краевая задача типа (1.18)–(1.20), лишь той разницей, что функция $F(r, \theta)$, входящая в формулу (1.19), имеет вид

$$\begin{aligned} F(r, \theta) &= \sigma_0^0 \left(\frac{2\beta^2}{r^2} \cos 2\theta - \frac{\beta^2}{r^4} \right) + \\ &= \frac{4R^2 \mu C}{A^2 \nu^4} \left[\frac{2(r^4 - \beta^4)^2 - (1 + \nu)(r^2 - 1)^2 (r^2 - \beta^2)^2}{r^4 - 2\beta^2 r^2 \cos 2\theta + \beta^4} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2\beta^2 (1 - \nu) (r^2 - 1) (r^2 - \beta^2) [(1 - \beta^2) (r^2 - \beta^2) - 4\beta^2 \cos^2 \theta]}{(r^4 - 2\beta^2 r^2 \cos 2\theta + \beta^4)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Окончательное решение задачи при всестороннем растяжении дается формулам (1.33) и (1.34).

Коэффициенты Фурье A_{kln}^* , входящие в решение задачи, вычисляются на основании формул (1.31) и (2.2). Проведены вычисления в случае всестороннего растяжения для пластинки с эллиптическим отверстием, относительная полуось которой равна $b/a = 1/3, 1/7, 1/9$. Материал является полиамидом.

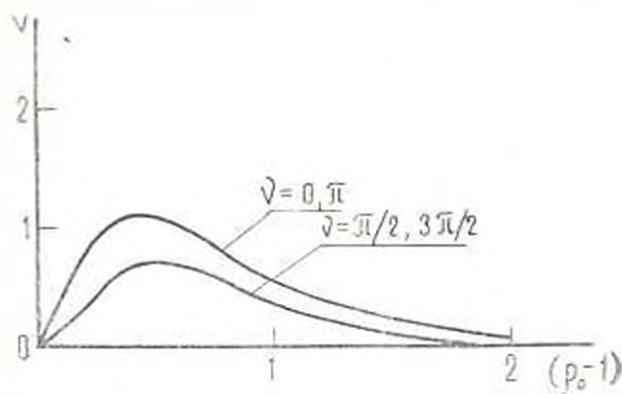
При вычислениях использованы следующие данные [5]:

$$a = 1,2; 3,4; 4,5; R = 1; A = 3,4 \cdot 10^4 \text{ кбсм}^2; B = 3,87 \cdot 10^4 \text{ кгс/см}^2$$

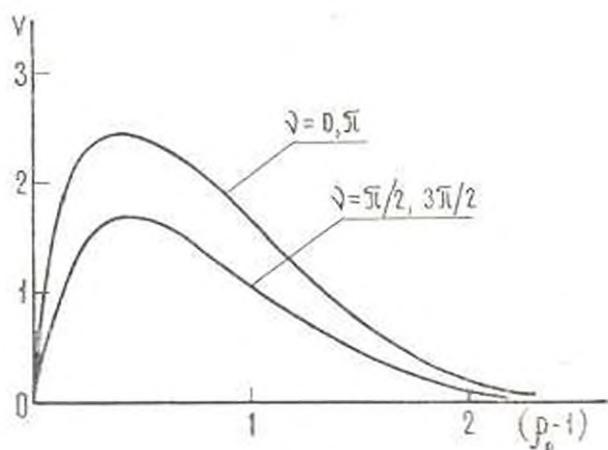
$$C = 3,87 \text{ кгс/см град}, \alpha c = 0,28 \text{ ккал/м час град}, \nu = 100 \text{ мк}$$

$$k = 0,00234 \text{ ккал/см}, T_0 = 20^\circ \text{C}, \tau = 0,71 \text{ см}^2, \sigma_0^0 = 3 \text{ кгс/см}^2$$

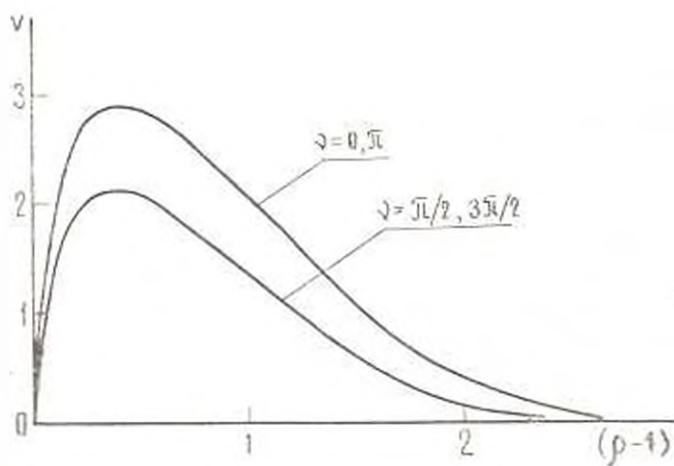
На основании полученных результатов построены графики. На фиг. 1, 2, 3 показаны графики изменения перепада температуры $\vartheta = T - T_0$ в зависимости от r_0 при различных значениях отношения полуосей эллипса.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В таблице приведены значения ψ в зависимости от ρ_0 .

Таблица 1

$$\psi = T - T_0$$

$\rho_0 - 1$	$\beta = 1/2$		$\beta = 3/4$		$\beta = 4/5$	
	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
0.01	0.00712	0.07676	0.17102	0.27263	0.21429	0.21518
0.03	0.01733	0.18470	0.41008	0.41309	0.50450	0.51272
0.05	0.03633	0.23939	0.47687	0.52147	0.60110	0.64868
0.08	0.10733	0.46747	0.89012	1.01108	1.12532	1.25434
0.1	0.19930	0.61095	1.11591	1.41831	1.43319	1.74655
0.2	0.49834	0.81768	1.41587	2.19286	1.82420	2.43363
0.3	0.61926	1.09070	1.54716	2.47440	2.21101	2.95899
0.4	0.68201	1.28311	1.61032	2.44521	2.19013	2.87151
0.5	0.70298	1.14531	1.72337	2.40281	2.11743	2.85109
0.8	0.55843	0.87454	1.60537	2.10429	1.76180	2.49004
1	0.48146	0.52840	1.08678	1.71598	1.45783	2.12231
1.5	0.15291	0.21231	0.46135	0.75371	0.22258	1.15884
4	0.00582	0.02271	0.02291	0.12925	0.02626	0.05328

После обобщения результатов можно сделать следующий вывод: сравнительно высокие температуры получаются вдоль большой оси эллипса, при этом с уменьшением отношения b/a зона максимального нагрева приближается к контуру отверстия.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Получено 11 V 1975

Գ. Բ. ՎԵՐՄԻԼՅԱՆ

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՑՔՈՎ ՄԱՆՈՒՅԻՆ ԱՌԱՋՊԱՐԱՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ԻՌՔԵՂՈՒՄ ԶԵՆԻՐԱՍՏԻՃԱՆԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ՎԵՐՄՏԻՐՆ ԲԵՌԻ ԱՋԻՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա. մ. փ. ս. փ. ո. ս. մ.

Չիտարկված է մաշտոցիկ-առանձափան նյութից, էլիպտական անցքով անվերջ թիթեղի բննավորումը: Չիտարկված բեռը իրենից ներկայացնում է էլիպտի փոքր առանցքի ուղղությամբ ձգող ուժը, որը փոփոխվում է հաստատուն ամպլիտուդայով Հարմոնիկ որևեքով:

Չիտարկված է նաև թիթեղի ձգումը բոլոր ուղղություններով:

Ենդիրը բովված է այն պաշմանով, որ անցքի եզրի վրա ջերմաստիճանը հավասար է շրջապատող միջավայրի ջերմաստիճանին, իսկ թիթեղի հարթության վրա սեղի է ունենում ազատ ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ:

Եկրված են հաշվումներ, բոլոր ուղղություններով ձգման դեպքում:

DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN A PLATE WITH AN ELLIPTIC HOLE MADE OF VISCO-ELASTIC MATERIAL UNDER THE EFFECT OF VIBRATORY LOAD

G. B. VERMISHIAN

S u m m a r y

The loading of an infinite plate with an elliptic hole made of visco-elastic material is examined. The applied load is a tensile stress acting along the minor axis of the ellipse and changing by the harmonic law with a steady amplitude. The case of omnidirectional tension of the plate is considered as well.

The problem is solved on condition that the temperature on the contour of the hole is equal to the ambient temperature, and on the lateral surface a free heat transfer into the surrounding medium takes place.

Calculation is made for the case of omnidirectional tension.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. Изв. АН СССР, Механика, № 6, 1965.
2. Мухомлишвили И. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. «Наука», М., 1966.
3. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. Изд. ИЛ, М., 1963.
4. Вейтмен Г., Эрдейи Л. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Изд. «Наука», М., 1966.
5. Вермишян Г. Б., Галин Л. А. Кручение вязко-упругого призматического стержня при действии вибрационной нагрузки. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.

В. С. САРКИСЯН, В. Г. МИНТАРЯН, А. О. ОВСЕЯНИ

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ СТЕПЕННО УПРочНЯЮЩЕЙСЯ НАКЛАДКИ К ДЕФОРМИРУЕМОМУ ОСНОВАНИЮ

Исследованию задач о передаче нагрузок от накладок малой толщины к деформируемым массивным телам в постановке линейной теории упругости посвящены многие работы. Они опираются на известные предположения, предложенные в [1, 2], и с достаточной полнотой отражены в [2, 3].

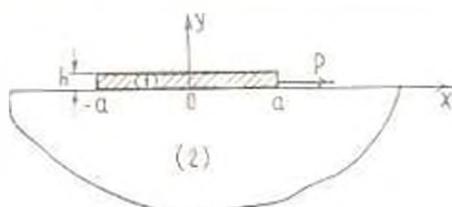
Эти же задачи в постановке какой-либо нелинейной теории механики деформируемых твердых тел, насколько нам известно, не ставились и не исследовались. В настоящей работе на основе [2, 4, 5, 6] рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от степенно упрочняющейся накладки малой толщины к деформируемому основанию в виде полуплоскости, изготовленной также из степенно упрочняющегося материала. Эта задача ставится здесь в постановке нелинейной теории установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, предложенной Н. Х. Арутюняном [4, 5]. Такую постановку задачи можно трактовать также в смысле нелинейной теории упругости.

Решение указанной задачи в общем случае сводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях. В качестве первого необходимого этапа построения адекватного решения этого уравнения далее рассматривается тот частный случай, когда имеется линейно-упругая полуплоскость. В этом случае определяющее интегро-дифференциальное уравнение преобразуется в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна. На основании результатов теории таких уравнений [9], в разбираемом случае доказываются существование и единственность решений полученных при этом бесконечной системы и соответствующей урезанной конечной системы нелинейных уравнений. Одновременно доказывается, что решение урезанной конечной системы нелинейных уравнений стремится к решению исходной бесконечной системы. Кроме того, доказываются, что существование и единственность решения указанных систем следует также из принципа неподвижной точки Банаха, который позволяет искомое решение этих систем построить методом последовательных приближений.

В заключение приводятся численные результаты и при их помощи строятся графики осевых и тангенциальных контактных напряжений.

1. Пусть деформируемая полуплоскость укреплена на конечном отрезке $[-a, a]$ своей границы упругим креплением в виде приваренной или приклеенной к ней накладки конечной длины и достаточно малой постоянной

толщины h . Пусть, далее, к одному из концов накладки приложена сосредоточенная горизонтальная сила P (фиг. 1).



Фиг. 1.

Будем считать, что материалы накладки и полуплоскости степенно упрочняются, то есть для них имеет место нелинейное соотношение вида $\sigma = A\varepsilon^\alpha$ ($\alpha > 1$), где ε — интенсивность деформаций, A — коэффициент ползучести, σ — интенсивность напряжений, α — показатель ползучести.

Это соотношение, как известно [4, 5], имеет довольно широкий диапазон приложения, где основанные на нем решения контактных задач вполне реально отражают механическую сущность процесса сжатия деформируемых твердых тел.

В такой постановке задачи требуется определить закон распределения тангенциальных контактных напряжений под накладкой.

Сначала выведем разрешающее функциональное уравнение.

Из уравнения равновесия отрезка $[-a, x]$ элемента накладки, для которой имеют место обычные предположения из [1, 2], можно записать

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{1}{h} \int_{-a}^x \tau^{(1)}(s) ds \quad (1.1)$$

Затем учитывая, что $\sigma_x^{(1)} = A_1 [\varepsilon_x^{(1)}]^\alpha$, получим

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{d u^{(1)}(x)}{dx} = A_1 \left[\frac{1}{h} \int_{-a}^x \tau^{(1)}(s) ds \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.2)$$

Здесь $u^{(1)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек накладки, A_1 — коэффициент ползучести, α — показатель ползучести для материала накладки, $\tau^{(1)}(x)$ — тангенциальные контактные напряжения, действующие на накладку вдоль отрезка $[-a, a]$ соединения ее с полуплоскостью, $\sigma_x^{(1)}$ — осевое напряжение в сечении x накладки.

С другой стороны, согласно обобщенному принципу суперпозиции [4, 5, 6], перемещения $u^{(2)}(x)$ граничных точек степенно упрочняющейся полуплоскости, когда на конечном отрезке $[-a, a]$ ее границы действуют тангенциальные напряжения интенсивности $\tau^{(2)}(x)$, определяются формулой

$$u^{(2)}(x) = g \left[\int_{-a}^x \frac{\tau^{(2)}(s) ds}{s-x} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad g = \frac{1}{\alpha} \quad (1.3)$$

где g — известная постоянная величина, α_2 — показатель ползучести для материала полуплоскости, причем здесь считается, что $1 < \alpha_2 < 2$.

На участке $|-a, a|$ контакта упругой накладки с полуплоскостью должно иметь место условие

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x)}{dx} \quad (y=0, |x| \leq a) \quad (1.4)$$

При помощи (1.2), (1.3) и (1.4) для определения контактных напряжений получим искомое функциональное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{-a}^a \frac{\varphi'(s) ds}{|s-x|^{2-\alpha_2}} \right] = \frac{A}{gh^{\alpha_2}} [\varphi(x)]^{\alpha_2} \quad (1.5)$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(-a) = 0, \quad \varphi(a) = P \quad (1.6)$$

эквивалентных условию равновесия накладки.

Здесь

$$\tau(x) = \sigma^{(1)}(x) = \tau^{(2)}(x), \quad \varphi(x) = \int_{-a}^x \tau(s) ds$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6).

2. Рассмотрим один важный частный случай общего уравнения (1.5), указывающий на путь эффективного построения его решения. Предположим, что имеется линейно-упругая полуплоскость, что соответствует случаю $\alpha_2 = 1$. Считая, что эта полуплоскость находится в условиях плоской деформации, будем иметь

$$u^{(2)}(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{E_2} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} \tau(s) ds + \text{const} \quad (2.1)$$

где E_2 — модуль упругости полуплоскости, ν — коэффициент Пуассона. Формула (2.1) в сочетании с соотношениями (1.2) и (1.4) задачу определения тангенциальных контактных напряжений в данном случае сводит к решению следующего нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_{-a}^a \frac{\tau'(s) ds}{s-x} = \lambda [\varphi(x)]^{\alpha_2} \quad (2.2)$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\psi(-1) = 0, \quad \psi(1) = 1 \quad (2.3)$$

Здесь

$$\psi(x) = \frac{\bar{\tau}(ax)}{P}, \quad \bar{\tau}(ax) = a \int_{-1}^1 \tau(as) ds, \quad \lambda = \frac{a\pi A_1 E_0 P^{2n-1}}{2(1-x^2)h^n}$$

а интеграл в (2.2) понимается в смысле главного значения по Коши.

Уравнение (2.2) в случае несжимаемости материала полуплоскости можно было бы получить также из (1.5) при помощи предельного перехода $\mu_2 \rightarrow 1$.

Таким образом, решение контактной задачи для упругой полуплоскости, усиленной на своей границе степенно упрочняющейся накладкой конечной длины, сведется к решению нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения (2.2) при граничных условиях (2.3).

Отметим, что при $\alpha_1 = 1$ имеем случай линейно-упругой накладки, и соответствующее уравнение (2.2) при условиях (2.3) исследовано во многих работах, в частности, в работах [2, 7].

Интегро-дифференциальное уравнение (2.2) при граничных условиях (2.3) преобразуем теперь к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению. С этой целью пользуемся известной формулой [8] обращения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши, которая применительно к обсуждаемому случаю даст

$$\psi'(x) = -\frac{\lambda}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} [1-s^2]^{-n} [\psi(s)]^{2n} \frac{ds}{s-x} - \frac{C_0}{1-x^2} \quad (2.4)$$

Интегрируя обе части уравнения (2.4), будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(x) = & -\frac{\lambda}{\pi^2} \int_{-1}^1 [\psi(s)]^{2n} \ln \frac{1-sx + 1 + \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1-sx - 1 + \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}} ds + \\ & - C_0 \arcsin x + C \end{aligned} \quad (2.5)$$

Постоянные C_0 и C определяются из граничных условий (2.3), которые дают $C_0 = 1/\alpha$, $C = 1/2$.

Преобразуя дальше полученное нелинейное интегральное уравнение (2.5), перейдем в нем к новым переменным $x = \cos \pi t$, $s = \cos \pi u$, $0 \leq t, u \leq 1$. После некоторых элементарных преобразований в результате будем иметь нелинейное уравнение требуемого вида:

$$\lambda(t) + \int_0^1 K(t, u) f|u, \lambda(u)| du = 0 \quad (2.6)$$

где

2 Известия АН Армянской ССР, Механика, № 5

$$f(t) = \varphi_0(t) + t - 1, \quad \varphi_0(t) = \psi(\cos \pi t)$$

$$f[t, f(t)] = \frac{k}{\pi} \sin \pi t [f(t) - t + 1]^2$$

$$K(t, u) = \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi(u+t)}{2}}{\sin \frac{\pi(u-t)}{2}} \right| \quad 0 < t, u < 1 \quad (2.7)$$

Таким образом, нелинейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (2.2) при граничных условиях (2.3) эквивалентно нелинейному интегральному уравнению (2.6).

3. Приступим к решению уравнения (2.6). Легко видеть, что нелинейное интегральное уравнение (2.6) представляет собой уравнение типа Гаммерштейна [9]. А именно, очевидно, что:

1) ядро $K(t, u)$ квадратично суммируемо на квадрате $0 \leq t, u \leq 1$, а второе итерированное ядро $K_2(t, u)$ непрерывно*;

2) ядро $K(t, u)$ положительно определенное;

3) ядро $K(t, u)$ симметрично.

При этих предположениях, как известно [7], решение уравнения (2.6), если оно существует, можно представить рядом

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m \tau_m(t) \quad (3.1)$$

Здесь $\{\tau_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ — ортонормированные собственные функции ядра $K(t, u)$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ соответственно, а $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, определяющиеся из следующей эквивалентной исходному нелинейному интегральному уравнению (2.6) нелинейной бесконечной системы уравнений:

$$X_m = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 \left[\pi \sum_{k=1}^{\infty} X_k \tau_k(u) \right] \tau_m(u) du \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

Отправляясь от (3.1), приближенное решение уравнения (2.6) представим в виде

$$f_n(t) = \sum_{m=1}^n X_{n,m} \tau_m(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

* В связи с указанным условием для второго итерированного ядра $K_2(t, u)$ следует отметить, что в дальнейшем будет использовано свойство равномерной сходимости обобщаемой в теореме Гильберта-Шмидта ряда, обеспечиваемое [9] непрерывностью только функции $K(t, u)$. Это свойство в разбираемом случае непосредственно вытекает из конкретного вида собственных функций и собственных чисел ядра $K(t, u)$.

Последняя формула, аналогично предыдущему, задачу определения неизвестных коэффициентов $X_{n,m}$ ($m = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$) сводит к решению следующей конечной нелинейной системы:

$$X_{n,m} = -\frac{1}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| u, \sum_{k=1}^n X_{n,k} \varepsilon_k(u) \right| \tau_n(u) du} \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

Докажем, что решение системы (3.4) существует и единственно. Кроме того, докажем, что приближенное решение $\chi_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к решению $\chi(t)$ исходного нелинейного уравнения (2.6). Тем самым будет доказано, что решение нелинейного интегрального уравнения (2.6) существует, единственно и его со сколь угодно большой точностью можно аппроксимировать функцией $\chi_n(t)$ из формулы (3.3), которая, следовательно, действительно представляет приближенное решение.

С этой целью сначала заметим, что соотношения, связывающие собственные функции и соответствующие собственные числа ядра $K(t, u)$ имеют вид

$$n \int_0^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi(u+t)}{2}}{\sin \frac{\pi(u-t)}{2}} \right| \sin \pi n u du = \sin \pi n t \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Следовательно, в данном случае

$$\tau_n = n, \quad \varepsilon_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \pi n t \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Далее очевидно, что функция $f(t, y)$ согласно (2.7), имеющая вид

$$f(t, y) = \frac{1}{2} \sin \pi t (y - t + 1)^{z_1} \quad (z_1 > 1)$$

непрерывна. Кроме того, для нее имеет место неравенство*

$$|f(t, y)| \leq C_1 |y| + C_2 \quad (a)$$

где $C_1 = C_2 = \lambda/\lambda$. Согласно результатам из [9], при $\lambda < \lambda$ конечная система нелинейных уравнений (3.4) имеет, по крайней мере, одно непрерывное решение.

* Справедливость этого неравенства вытекает из следующих соображений. Поскольку контактные напряжения $\tau(x)$ на отрезке $[-a, a]$ неотрицательны, то функция $\psi(\lambda)$ на отрезке $[-1, 1]$ возрастает. При этом вследствие граничных условий (2.3) будем иметь $0 < \psi(x) < 1$ при $|x| < 1$. Поэтому

$$0 < y + 1 - t < 1, \quad y = \tau(t) \quad (0 < t < 1)$$

и очевидно, что $-1 < y < 1$. Приняв во внимание этот факт, можем записать

$$|f(t, y)| = \frac{1}{2} |\sin \pi t (y - t + 1)^{z_1}| \leq \frac{1}{2} (y - t + 1)^{z_1} = \frac{1}{2} (y - t + 1) = \frac{1}{2} (|y| + 1)$$

Единственность решения этой системы непосредственно [9] следует из очевидного неравенства*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < \frac{\lambda}{\pi} \pi |y_1 - y_2| \quad (6)$$

где должно быть $\alpha_1 \pi^{-1} < 1$. Отсюда следует, что при $\lambda < \pi/\alpha_1$ эта система имеет самое большее одно решение.

Таким образом, при $\lambda = \min(\pi, \pi/\alpha_1) = \pi/\alpha_1$, решение конечной системы нелинейных уравнений (3.4) существует и единственно.

Далее, учитывая выражение функции $f(t, y)$ из (2.7), при помощи интегрирования по частям в формулах (3.2) и (3.4) легко показать, что, по крайней мере,

$$X_n = O\left(\frac{1}{m^{2+\varepsilon}}\right), \quad X_{n,m} = O\left(\frac{1}{m^{2+\varepsilon}}\right), \quad m \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

где ε — сколь угодно малое положительное фиксированное число.

Из (3.5) следует, что ряд (3.1) равномерно сходится. Отсюда одновременно следует, что этот ряд можно почленно дифференцировать. Следовательно, функция $\chi(t)$ из (3.3), а также ее производная при $n \rightarrow \infty$ равномерно стремятся соответственно к функциям $\chi(t)$ и $\chi'(t)$.

С другой стороны, очевидно, что в интеграле

$$\int_0^1 K(t, u) f[u, \chi_n(u)] du$$

на основе известной теоремы Лебега [10], можно осуществить предельный переход под знаком интеграла, поскольку подынтегральная функция при любом фиксированном t ($0 \leq t \leq 1$) имеет суммируемую по переменной u мажоранту, а именно

$$|K(t, u) f[u, \chi_n(u)]| \leq M |K(t, u)|$$

* Применяя к разности $f(t, y_1) - f(t, y_2)$ формулу Лагранжа и учитывая неравенство (4), получим неравенство (6).

** Вследствие (3.5) ряд (3.1) в интервале $0 < t < 1$ сходится равномерно. Следовательно, последовательность $\chi_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно в интервале $0 < t < 1$ стремится к функции $\chi(t)$. Поэтому и последовательность $f[u, \chi_n(u)]$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно в интервале $0 < u < 1$ стремится к функции $f[u, \chi(u)]$. Последнее означает, что

$$|f[u, \chi_n(u)] - f[u, \chi(u)]| < \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon) \quad (0 < u < 1)$$

или, в частности,

$$|f[u, \chi_n(u)]| < |f[u, \chi(u)]| + \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon) \quad (0 < u < 1)$$

Поскольку $|f[u, \chi(u)]| \leq \pi$, то

$$|f[u, \chi_n(u)]| \leq \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon) \quad (0 < u < 1)$$

Исходя из последнего неравенства, можно утверждать существование некоторой постоянной $M > 0$, для которой

$$|f[u, \chi_n(u)]| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < u < 1)$$

что эквивалентно приведенному неравенству.

Из этих рассуждений согласно [8] вытекает, что функция $\chi(t)$ — предел последовательности $\{\chi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ из (3.3) является решением интегрального уравнения (2.6) и функцией $\chi_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) действительно дается приближенное решение этого уравнения.

Таким образом, вопрос эффективного построения приближенного решения нелинейного уравнения (2.6) сводится к решению конечной системы нелинейных уравнений (3.4).

Преобразуем теперь системы нелинейных уравнений к другому виду, удобному нам в дальнейшем. С этой целью, исходя из (2.7), разложение (3.1) представим в виде

$$\chi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \tau_m(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_m(t)}{m} \quad (3.6)$$

где $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье функции $\psi_0(t)$, подлежащие определению, а

$$1 - t = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_m(t)}{m} \quad (0 < t < 1)$$

Итак, имеет место соотношение

$$X_m = Y_m - \frac{1}{\pi m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Приняв во внимание (3.5) и (3.7), системы уравнений (3.2) и (3.4) можно записать соответственно в виде

$$Y_m = -\frac{1}{i_m} \int_0^1 f \left| u, \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \tau_k(u) + u - 1 \right| \tau_m(u) du + \frac{1}{\pi m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (3.8)$$

$(m = 1, 2, \dots)$

$$Y_{n,m} = -\frac{1}{i_m} \int_0^1 f \left| u, \sum_{k=1}^n Y_{n,k} \tau_k(u) + u - 1 \right| \tau_m(u) du + \frac{1}{\pi m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (3.9)$$

$(m = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots)$

а формулу (3.3) в виде

$$\psi_{bn}(t) = \sum_{m=1}^n Y_{n,m} \tau_m(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

Здесь же отметим, что решение нелинейного уравнения (2.6) при довольно сильных ограничениях можно построить методом последовательных приближений. Однако, выбранный нами путь более общий, проще и быстрее приводит к цели.

4. Докажем теперь, что существование и единственность решения бесконечной системы нелинейных уравнений (3.8), а также соответствующей урезанной конечной системы (3.9) следует из принципа неподвижной точки Банаха. Этим одновременно будет доказано, что решения этих систем могут быть эффективно построены методом последовательных приближений.

Обратимся сначала к конечномерной системе (3.9). Введем в рассмотрение обычное N -мерное вещественное евклидово пространство $E_N = \{x\}$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, в котором метрика порождается формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. Рассмотрим в пространстве E_N оператор

$$y = Ax \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

определенной формулой

$$y_m = \frac{1}{\pi m} \int_0^1 \sin \pi u \left[\sum_{n=1}^N x_n \varphi_n(u) - u - 1 \right] \varphi_m(u) du + \frac{a_0}{m} \quad (4.1)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{2}{u} \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

Очевидно, что решение системы (3.9) совпадает с неподвижной точкой оператора A . Следовательно, вопрос решения системы (3.9) сводится к нахождению в E_N неподвижной точки оператора A .

С целью нахождения неподвижной точки оператора A заметим, что, исходя из (4.1), можем записать

$$\sum_{m=1}^N \left| y_m - \frac{a_0}{m} \right| = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} |h_m|$$

где

$$h_m = \int_0^1 \sin \pi u \left[\sum_{n=1}^N \left(x_n - \frac{a_0}{n} \right) \varphi_n(u) + \sum_{n=1}^N \frac{a_0}{n} \varphi_n(u) + u - 1 \right] \varphi_m(u) du$$

Отсюда на основании неравенства Коши-Буняковского для сумм, а затем при помощи известного неравенства Бесселя из теории рядов Фурье, последовательно будем иметь

$$\sum_{m=1}^N \left| y_m - \frac{a_0}{m} \right| \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{m=1}^N \frac{1}{m^2}} \sqrt{\sum_{m=1}^N h_m^2} <$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{m=1}^N \frac{1}{m^2}} \sqrt{\sum_{m=1}^N h_m^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} h_m^2} <$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left[\sum_{n=1}^N \left(x_n - \frac{a_0}{n} \right) \varphi_n(u) + \sum_{n=1}^N \frac{a_0}{n} \varphi_n(u) + u - 1 \right]^2 du \right\}^{1/2} <$$

$$\ll \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \sum_{n=1}^N \left| x_n - \frac{a_0}{n} \right| \varphi_n(u) + \left| \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} \varphi_n(u) \right| - u + 1 \right|^{2\alpha} du}$$

Отметим, что здесь было использовано значение ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Положив теперь $\alpha = \left\{ \frac{a_2}{m} \right\}_{m=1}^N$, из последнего неравенства находим

$$\rho(y, a) < \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \left| \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} \varphi_n(u) \right| + \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho(x, a) - u + 1 \right| \right|^{2\alpha} du}$$

из чего следует, что оператор A отображает замкнутый шар $\tilde{S} = \{x; \rho(x, a) \leq R\}$ в E_N с центром в точке a и радиусом R в тот же самый замкнутый шар тогда и только тогда, когда

$$l_1 < \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{R}{l_1} \tag{4.2}$$

где

$$l_1 = \left(\int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} R + \left| \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} \varphi_n(u) - u + 1 \right| \right|^{2\alpha} du \right)^{1/2}$$

Далее, положив

$$y_i = Ax_i \quad (i = 1, 2)$$

где

$$x_i = \{x_n^{(i)}\}_{n=1}^N, \quad y_i = \{y_n^{(i)}\}_{n=1}^N, \quad \text{притом } \rho(x_i, a) \leq R$$

будем иметь

$$\rho(y_1, y_2) = \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=2}^N \frac{1}{m} |z_n|$$

где

$$z_n = \int_0^1 \sin \pi u \left| \left| \sum_{m=1}^N x_m^{(1)} \varphi_m(u) - u - 1 \right| - \left| \sum_{m=1}^N x_m^{(2)} \varphi_m(u) - u - 1 \right| \right| \varphi_n(u) du$$

Затем, как и выше, при помощи неравенств Коши-Буняковского для сумм и Бесселя из теории рядов Фурье придем к неравенству

$$\rho(y_1, y_2) < \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \sum_{n=1}^N x_n^{(1)} \varphi_n(u) + u - 1 \right|^2 du - \left| \sum_{n=1}^N x_n^{(2)} \varphi_n(u) + u - 1 \right|^2 \right\} \varphi_n(u) du$$

Отсюда, приняв во внимание известную теорему Лагранжа из анализа, получим

$$\begin{aligned} \rho(y_1, y_2) &< \frac{\lambda x_1}{\sqrt{6}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \sum_{n=1}^N x_n^{(1)} \varphi_n(u) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \int_0^1 \sum_{n=1}^N (x_n^{(2)} - x_n^{(1)}) \varphi_n(u) + u - 1 \right|^{2q-1} \sum_{n=1}^N (x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \varphi_n(u) \right|^2 du \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{\lambda x_1}{\sqrt{6}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \sum_{n=1}^N (x_n^{(1)} - \frac{a_0}{n}) \varphi_n(u) + \sum_{n=1}^N \frac{a_0}{n} \varphi_n(u) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \int_0^1 \sum_{n=1}^N (x_n^{(2)} - \frac{a_0}{n} + \frac{a_0}{n} - x_n^{(1)}) \varphi_n(u) + u - 1 \right|^{2q-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=1}^N (x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \varphi_n(u) \right|^2 du \Big\}^{1/2} < \\ &< \frac{\lambda x_1}{\sqrt{3\pi}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left[2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(x_1, a) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(x_2, a) + 1 - u - \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left| \sum_{n=1}^N \frac{a_0}{n} \varphi_n(u) \right| \right]^{2q-2} du \right\}^{1/2} \varphi(x_1, x_2) \quad (0 < \vartheta < 1) \end{aligned}$$

Итак

$$\begin{aligned} \rho(y_1, y_2) &< \frac{\lambda a_1}{\sqrt{3\pi}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left[3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} K + 1 - u + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left| \sum_{n=1}^N \frac{a_0}{n} \varphi_n(u) \right| \right]^{2q-2} du \right\}^{1/2} \varphi(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что при

$$\lambda < \frac{\sqrt{3\pi}}{a_1 J_2} \quad (4.3)$$

где

$$I_2 = \int_0^1 \left[\sin^2 \pi u \left| 3 \right| \sqrt{\frac{2}{\pi} R - 1 - u} \right. \\ \left. + \left| \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} \tau_n(u) \right| \right]^{2\alpha_1 - 2} du$$

оператор A , действующий в замкнутом шаре $\bar{S} = \{x: \rho(x, a) \leq R\}$, является сжимающим оператором.

Приняв во внимание (4.2) и (4.3), заключаем, что при

$$l < \min(A, B) = l_1 \quad (4.4)$$

где

$$A = \frac{1}{l_1} \sqrt{\frac{6R}{l_1}}, \quad B = \frac{1}{2l_1} \sqrt{\frac{3\pi}{l_1}}$$

оператор A , определенный в E_N формулой (4.1), отображает шар $\bar{S} = \{x: \rho(x, a) \leq R\}$ произвольного наперед заданного радиуса R в тот же самый замкнутый шар и там является сжимающим оператором. Следовательно, на основании принципа неподвижной точки Банаха [11] оператор A в замкнутом шаре \bar{S} любого наперед заданного радиуса R имеет единственную неподвижную точку, которую можно найти при помощи последовательных приближений, отталкиваясь из произвольной точки замкнутого шара \bar{S} .

В случае бесконечной системы (3.8) имеют место те же самые рассуждения, но только вместо пространства E_N следует рассматривать метрические пространства l_1 вещественных числовых последовательностей, в которых метрика вводится формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} |x_m - y_m|$$

где $x = \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $y = \{y_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда получим то же самое неравенство (4.4).

5. Перейдем теперь к обсуждению числовых результатов, полученных при помощи ЭВМ «Наирн-2».

Сначала по формуле (4.4) были вычислены значения параметра l_0 в зависимости от радиуса указанного выше шара R и показателя α_1 . Результаты приведены в табл. 1.

Из этой таблицы следует, что при возрастании радиуса шара значения l_0 в линейном случае накладки, когда $\alpha_1 = 1$, возрастают. А по мере укlopenения накладки от линейного случая эти значения убывают. С другой стороны, при фиксированных радиусах значения l_0 убывают с возрастанием показателя α_1 .

Таблица 1

λ	0.5	1	1.5	2	2.5
1	0.92372	1.12672	1.21792	1.26776	1.29956
1.25	0.78541	0.85116	0.84659	0.82866	0.80851
1.50	0.66652	0.64137	0.58825	0.54152	0.50293
1.75	0.56457	0.48293	0.40858	0.35379	0.31270

Затем методом последовательных приближений была решена система уравнений (3.10), состоящая из шести уравнений. Значения λ брались из табл. 1. Кроме того, брались также значения $\lambda = 5$ и $\lambda = 8$. При решении системы (3.10) за нулевое приближение принималось $(-m)^{-1} \sqrt{2} = (m = 1, 2, \dots, 6)$, после чего были вычислены последующие приближения. Оказалось, что после третьих приближений решения фактически совпадают. Для проверки этих решений описанным способом была рассмотрена также система из четырех уравнений. В этих двух решениях совпали, по крайней мере, три первых цифровых знака.

После указанных вычислений по формуле (3.7) были получены значения коэффициентов X_m . Для иллюстрации в табл. 2 приведены значения этих коэффициентов при λ из табл. 1.

Таблица 2

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1.29956	-0.082619	-0.01400	-0.000126	-0.000017	0.000911	-0.0000246
0.80851	-0.044180	-0.009658	-0.000416	0.000090	0.000552	-0.000118
0.50293	0.023785	-0.006054	-0.000452	0.000102	0.000331	-0.000054
0.31270	0.012885	-0.003710	-0.000384	0.000081	0.000108	-0.000023

Далее при помощи (2.7) и (3.1) для осевых и тангенциальных контактных напряжений будем иметь формулы

$$\psi(x) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos x + \sum_{n=1}^6 X_n \varphi_n \left(\frac{1}{\pi} \arccos x \right)$$

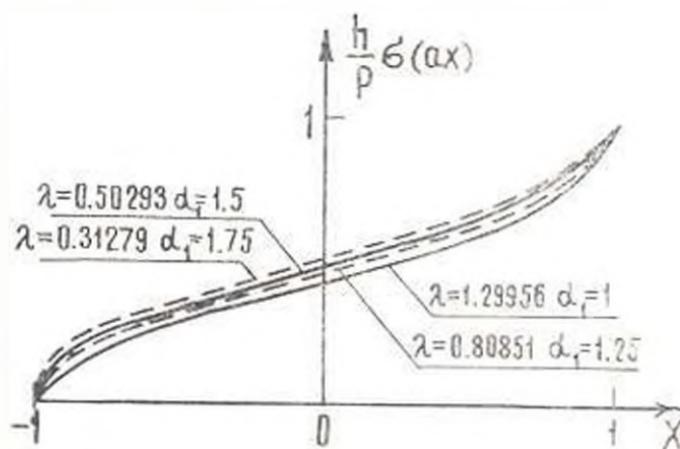
$$\frac{\sigma}{P} \tau(ax) = \psi'(x) = \frac{1 - \sum_{n=1}^6 X_n \varphi_n' \left(\frac{1}{\pi} \arccos x \right)}{\pi \sqrt{1-x^2}}$$

Исходя из последних формул, в отдельных точках можно вычислить значения функций $\psi(x)$ и $\psi'(x)$. Для иллюстрации эти значения при $\lambda = 5$ приведены в табл. 3.

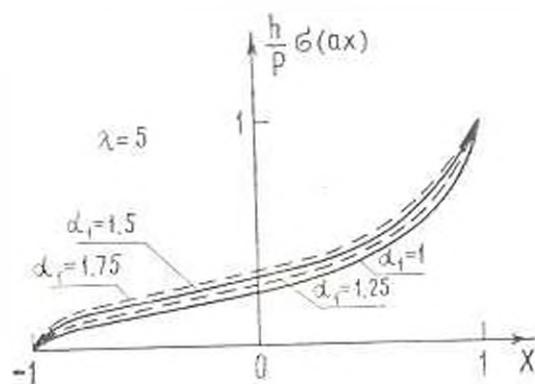
Аналогичные числовые результаты получаются также при остальных указанных выше значениях λ .

Таблиця 5

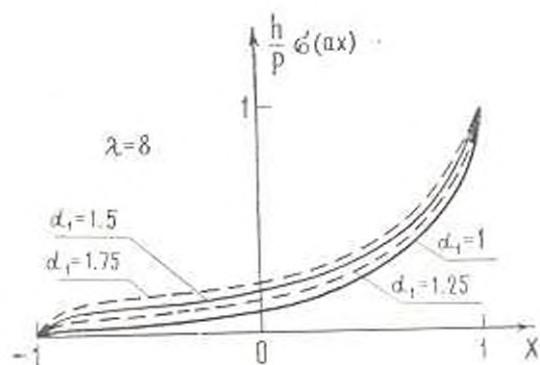
α	$\gamma_1 = 1$		$\gamma_1 = 1.25$		$\gamma_1 = 1.5$		$\gamma_1 = 1.75$	
	$\zeta(x)$	$\zeta'(x)$	$\zeta(x)$	$\zeta'(x)$	$\zeta(x)$	$\zeta'(x)$	$\zeta(x)$	$\zeta'(x)$
-1	0							
-0.9	0.071086	0.306348	0.085855	0.386512	0.096972	0.449132	0.105339	0.498224
-0.8	0.095551	0.296491	0.117028	0.263385	0.133425	0.309495	0.146104	0.316716
-0.7	0.114719	0.182671	0.141150	0.225035	0.161618	0.261455	0.177621	0.291064
-0.6	0.132750	0.179703	0.162930	0.212132	0.186066	0.239975	0.205220	0.263608
-0.5	0.150853	0.182810	0.183837	0.206740	0.209922	0.228076	0.230687	0.246812
-0.4	0.169352	0.187245	0.204365	0.204360	0.232394	0.219973	0.254731	0.234596
-0.3	0.188315	0.192136	0.224711	0.202850	0.253967	0.214010	0.277694	0.225073
-0.2	0.207824	0.198398	0.245007	0.203578	0.275192	0.210559	0.299836	0.218291
-0.1	0.228099	0.207792	0.265553	0.207974	0.296222	0.210784	0.321478	0.215300
0	0.249558	0.222140	0.286783	0.217695	0.317831	0.216466	0.343075	0.217695
0.1	0.272837	0.241575	0.309344	0.234963	0.339784	0.229620	0.355260	0.227389
0.2	0.298798	0.276455	0.334101	0.262002	0.363777	0.253434	0.38868	0.246536
0.3	0.328531	0.320427	0.362114	0.301109	0.389555	0.287317	0.411963	0.277557
0.4	0.353377	0.379250	0.394839	0.355375	0.421733	0.337150	0.444872	0.323377
0.5	0.405003	0.456838	0.433853	0.428484	0.458712	0.405923	0.480263	0.388011
0.6	0.455592	0.560085	0.481356	0.527208	0.503776	0.500322	0.523317	0.478008
0.7	0.518347	0.703812	0.540633	0.666093	0.560069	0.634123	0.577157	0.606989
0.8	0.598948	0.927986	0.617114	0.852820	0.633641	0.843735	0.647099	0.809713
0.9	0.711389	1.305138	0.724314	1.332409	0.735069	1.277100	0.745711	1.28209
1	1		1		1		1	



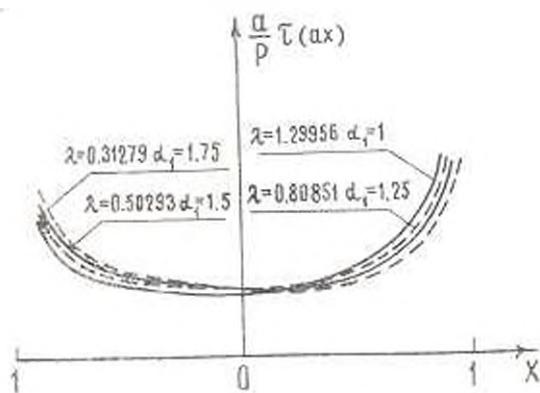
Фиг. 2.



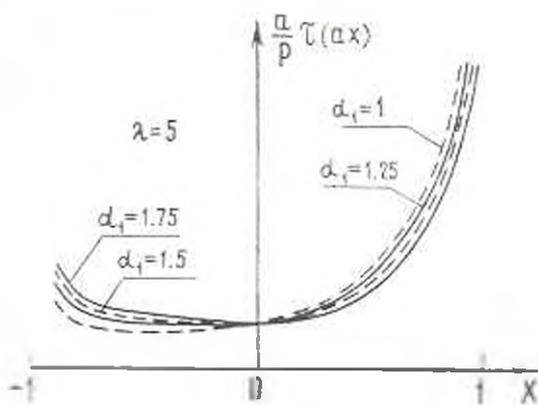
Фиг. 3.



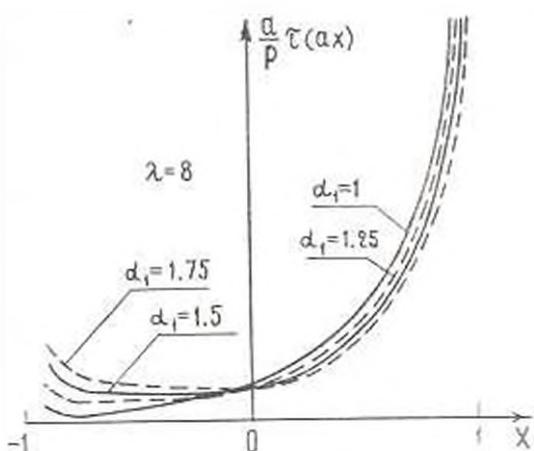
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

На основании последних результатов построены графики осевых и тангенциальных контактных напряжений, которые приведены на фиг. 2—7. На этих фигурах наглядно иллюстрируются закономерности изменения указанных напряжений.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за постоянное внимание к работе и ценное обсуждение полученных результатов.

Վ. Ս. ՏԱՐԿԻՍԻԱՆ, Վ. Գ. ՄԿԻՏԱՐԻԱՆ, Լ. Օ. ՕՎՍԵՊԻԱՆ

ԱՍՏՐՃԱՆԱՅԻՆ ԱՍՏՐՈՊԻԵՐՈՒԹՅՈՎ ՎԵՐԱԳԻՐԻՑ
ՐԵՖԻ ՓՈՍՈՆՏՏՈՒԹՅՈՒ ԳԵՃՈՐՄԱՅՎՈՂ շՐՄԵՐԻՆ

Ա մ փ ո ւ թ ո ս մ

Աշխատանքում դիտարկված է աստիճանային ամրապնդումով վերագրիչ զեֆիրմացվող կիսահարթաձևյանը բեռի փոխանցման կոնտակտային խնդիրը:

Ենդիրը բերվում է Գամերշտեյնի տիպի ոչ դժային ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Առաջված ոչ դժային հավասարումների ստվերջ համակարգի համար ցայց է արված լուծման դոյուսթյունը և միակուսթյունը: Գիտարկված է թվային արհեստը:

LOAD TRANSMISSION FROM A GRADUALLY HARDENING
STIFFENER TO A DEFORMED BASE

V. S. SARKISIAN, V. G. MKHITARIAN, L. O. OVSEPIAN

S u m m a r y

A contact problem for a semi-plane reinforced with a gradually hardening stiffener of finite length on the finite segment of its free boundary is considered.

The problem is reduced to a solution of non-linear integral equations of Hammerstein type.

The existence and uniqueness of the solution of infinite sets of non-linear equations thus obtained are proved.

A numerical analysis of the problem is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Melnik E. Ing.-Archiv, Bd. 3, № 2, 1932.
2. Բուրյույան Կ. Խ. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
3. Муды Р. и Сесрийберг Э. Прикладная механика (русский перевод трудов американского общества инженеров-механиков), сер. Е, 35, № 4, 1968.
4. Բուրյույան Կ. Խ. Плоская контактная задача теории полужесткости. ПММ, т. 29, вып. 5, 1959.
5. Բուրյույան Կ. Խ. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. АН АрмССР, серия фил.-мат. наук, т. XII, вып. 2, 1959.
6. Բուրյույան Կ. Խ., Մանույակ Մ. Մ. Контактная задача теории полужесткости с учетом сил трения. ПММ, т. 25, вып. 5, 1963.
7. Arutunyan N. Kh. and Mkhitarjan S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity, Witold Nowacki Anniversary Volume, Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.
8. Галаз Ф. Л. Красные задачи. Физматгиз, М., 1963.
9. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. ИЛ, М., 1960.
10. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, М., 1957.
11. Դոստերնիկ Ա. Ա. Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Изд. «Наука», М., 1965.

Ю. А. БОРИЦ

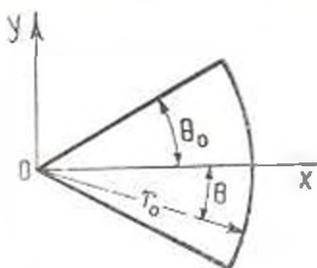
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА В НАПРЯЖЕНИЯХ

Плоская задача теории упругости для полукруга рассматривалась в работах [1—5]. В [6] рассматривается плоская задача для сектора произвольного угла раствора при однородных краевых условиях на прямолинейных участках границы.

В настоящей работе, следуя [7], дается решение плоской задачи теории упругости для кругового сектора произвольного угла раствора при произвольных граничных условиях. Задача сведена к алгебраическим соотношениям смешанного типа, включающим интегральные уравнения и бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Доказывается квазирегулярность последних, для неизвестных устанавливается закон асимптотических выражений Б. М. Кояловича [8], устанавливается характер поведения смещений и напряжений в угловых точках.

§ 1. Постановка задачи и построение общего решения уравнений Ляме

Рассматривается плоская задача теории упругости для кругового сектора радиуса r_0 и угла раствора θ_0 (фиг. 1) при задании на границе напря-



(Фиг. 1.)

жений. При рассмотрении задачи существенного упрощения выкладок добиваемся выделением симметричной и антисимметричной части поля напряжений и деформаций. Остановимся подробно на случае симметричного относительно полярной оси $\theta = 0$ поля, то есть решаем следующую граничную задачу:

$$\frac{r}{2G} \tau_{\theta r}(r, \theta) = \psi(r) \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (1.1)$$

$$\frac{r}{2G} \tau_{\theta r}(r, \theta) = \varphi(r) \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (1.2)$$

$$\frac{r}{2G} \tau_r(r, \theta) = \gamma(\theta) \quad \text{при } r = r_0, \quad 0 \leq |\theta| \leq \theta_0 \quad (1.3)$$

$$\frac{r}{2G} \tau_\theta(r, \theta) = f(\theta) \quad \text{при } r = r_0, \quad 0 \leq |\theta| \leq \theta_0 \quad (1.4)$$

причем вследствие симметрии функции $f(\theta)$ и $\gamma(\theta)$ должны удовлетворять условиям

$$f(\theta) = f(-\theta), \quad \gamma(\theta) = -\gamma(-\theta)$$

Анализ граничных условий (1.1)–(1.4) указывает, что решение уравнений Ляме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{m}{m-2} \frac{1}{r} \frac{\partial^4 v}{\partial r^4} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

должно содержать по две произвольные функции на интервалах $0 \leq r \leq r_0$ и $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$. В равенствах (1.5) m — число Пуассона,

$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ — объемное расширение. В связи с этим в соответствии с идеей Ляме [9] искомые компоненты вектора упругих смещений представим в виде

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = & B_0 e^{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [2(m-2) - m\lambda_n] C_n e^{n(\lambda_n+1)} - B_n e^{n(\lambda_n-1)} \} \cos \alpha_n \theta + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \{ \operatorname{ch} \theta \cos \theta [(3m-4)c_1(\tau) - m\tau b_2(\tau) + c_2(\tau)] + \\ & + \operatorname{sh} \theta \sin \theta [(3m-4)b_1(\tau) - m\tau c_1(\tau) + b_2(\tau)] \} \cos \tau d\tau + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \{ \operatorname{ch} \theta \cos \theta [(3m-4)b_1(\tau) + m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] + \\ & + \operatorname{sh} \theta \sin \theta [m\tau b_1(\tau) - (3m-4)c_1(\tau) - c_2(\tau)] \} \sin \tau d\tau \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} v(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{\infty} \{ [m\lambda_n - 4(m-1)] C_n e^{n(\lambda_n+1)} + B_n e^{n(\lambda_n-1)} \} \sin \alpha_n \theta + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \{ \operatorname{sh} \theta \cos \theta [(3m-4)b_1(\tau) - m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] - \\ & - \operatorname{ch} \theta \sin \theta [m\tau b_1(\tau) + (3m-4)c_1(\tau) + c_2(\tau)] \} \cos \tau d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \operatorname{sh} \alpha_n \cos \theta [c_2(\tau) - (3m-4)c_1(\tau) - m^2 b_1(\tau)] + \right. \\ \left. + \operatorname{ch} \alpha_n \sin \theta [m^2 c_1(\tau) - (3m-4)b_1(\tau) + b_2(\tau)] \sin \alpha_n \tau d\tau \right.$$

Здесь $\alpha_n = \frac{n\pi}{\theta_0}$.

При решении, следуя [7], введена новая независимая переменная t в радиальном направлении по формуле

$$t = \ln \frac{r}{r_0}$$

которая будет изменяться в интервале $-\infty \leq t \leq 0$, если $0 \leq r \leq r_0$.

В представлении решения уравнений Ляме (1.6) выделены три части. Первая часть, содержащая B_n , дает возможность выбрать несомоуравновешенные составляющие в напряжениях. Вторая часть (суммирование по n) дает возможность удовлетворить граничным условиям на дуговой части сектора. Эта часть решения содержит две произвольные функции на интервале $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, представленные рядами по $\sin \alpha_n \theta$ и $\cos \alpha_n \theta$. Третья часть (интегрирование по τ) является решением для бесконечного клина и также содержит две произвольные на интервале $-\infty \leq t \leq 0$ функции, представленные интегралами Фурье. Отсюда следует, что функционального произвола в решении (1.6) достаточно для удовлетворения граничным условиям (1.1)–(1.4) на сторонах сектора.

Выражения для компонентов тензора напряжений находим из (1.6) с помощью соотношений закона Гука

$$\frac{r}{2G} \sigma_r(t, \theta) = \frac{m}{m-2} B_n e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \{ -B_n (\alpha_n - 1) e^{t(\alpha_n - 1)} - \\ - m(\alpha_n + 1)(\alpha_n - 2) C_n e^{t(\alpha_n + 1)} \} \cos \alpha_n \theta + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \cos \tau [\operatorname{sh} \alpha_n \sin \theta (m^2 b_1(\tau) - 3m c_1(\tau) + c_2(\tau)) + \right. \\ \left. + \operatorname{ch} \alpha_n \cos \theta (3m b_1(\tau) + m^2 c_1(\tau) - b_2(\tau))] + \right. \\ \left. + \sin \tau [\operatorname{ch} \alpha_n \cos \theta (m^2 b_1(\tau) - 3m c_1(\tau) - c_2(\tau)) + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} \alpha_n \sin \theta (-3m b_1(\tau) - m^2 c_1(\tau) - b_2(\tau))] \right\} d\tau \\ \frac{r}{2G} \sigma_\theta(t, \theta) = \frac{m}{m-2} B_n e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (\alpha_n - 1) B_n e^{t(\alpha_n - 1)} + \\ + m(\alpha_n - 1)(\alpha_n - 2) C_n e^{t(\alpha_n + 1)} \} \cos \alpha_n \theta$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{ch} \theta \cos \theta [mb_1(\tau) - m^2c_1(\tau) - b_2(\tau)] + \\
& + \operatorname{sh} \theta \sin \theta [-mc_1(\tau) - m^2b_1(\tau) - c_2(\tau)] \} \cos \tau d\tau + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{ch} \theta \cos \theta [-mc_1(\tau) - m^2b_2(\tau) - c_2(\tau)] + \\
& + \operatorname{sh} \theta \sin \theta [-mb_1(\tau) - m^2c_1(\tau) - b_2(\tau)] \} \sin \tau d\tau \quad (1.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r}{2G} \tau_A(t, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (2n-1) B_n e^{n(a_n-1)\tau} - m^2 a_n (2n-1) C_n e^{2(a_n+1)\tau} \} \sin a_n \theta + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{sh} \theta \cos \theta [m^2c_1(\tau) - b_2(\tau) - mb_1(\tau)] + \\
& + \operatorname{ch} \theta \sin \theta [m^2b_1(\tau) + c_2(\tau) - mc_1(\tau)] \} \sin \tau d\tau + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{sh} \theta \cos \theta [c_2(\tau) - m^2b_1(\tau) + mc_1(\tau)] + \\
& + \operatorname{ch} \theta \sin \theta [m^2c_1(\tau) - mb_1(\tau) - b_2(\tau)] \} \cos \tau d\tau
\end{aligned}$$

§ 2. Удовлетворение граничных условий. Анализ бесконечных систем

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), (1.2), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ch} \theta_0 \cos \theta_0 [-mc_1(\tau) - m^2b_1(\tau) - c_2(\tau)] + \\
& + \operatorname{sh} \theta_0 \sin \theta_0 [-mb_1(\tau) - m^2c_1(\tau) - b_2(\tau)] = 0 \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{m-2} \frac{B_0}{1-\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \tau \left\{ \frac{(2n-1)^2 B_n}{\tau^2 - (2n-1)^2} + \frac{m(a_n+1)^2 (2n-2)}{\tau^2 - (a_n+1)^2} C_n \right\} + \\
+ \operatorname{ch} \theta_0 \cos \theta_0 [mb_1(\tau) - m^2c_1(\tau) - b_2(\tau)] + \\
+ \operatorname{sh} \theta_0 \sin \theta_0 [-mc_1(\tau) - m^2b_1(\tau) - c_2(\tau)] = \bar{\varphi}(\tau) \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sh} \theta_0 \cos \theta_0 [m^2c_1(\tau) - b_2(\tau) + mb_1(\tau)] + \\
& + \operatorname{ch} \theta_0 \sin \theta_0 [m^2b_1(\tau) + c_2(\tau) - mc_1(\tau)] = \bar{\varphi}(\tau) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sh} \theta_0 \cos \theta_0 [c_2(\tau) - m^2b_1(\tau) + mc_1(\tau)] + \\
& + \operatorname{ch} \theta_0 \sin \theta_0 [m^2c_1(\tau) - mb_1(\tau) - b_2(\tau)] = 0 \quad (2.4)
\end{aligned}$$

При получении условий (2.1)—(2.4) использована следующая формула:

$$e^{i\alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{\alpha^2 - t^2} \cos t d t$$

где $\alpha = \text{const}$. При этом функции $\bar{\varphi}(\tau)$ и $\bar{\psi}(\tau)$ равны

$$\bar{\psi}(\tau) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t) \cos t d t, \quad \bar{\varphi}(\tau) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin t d t$$

Вводим две функции $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ посредством следующих формул:

$$\tau^2 b_1(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)} [\text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 x_1(\tau) + \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 x_2(\tau)] \quad (2.5)$$

$$\tau^2 c_2(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)} [\text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 x_1(\tau) - \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 x_2(\tau)]$$

Здесь функция $\Delta(\tau, \theta)$ равняется $\Delta(\tau, \theta_0) = \text{ch}^2 \tau \theta_0 \sin^2 \theta_0 + \text{sh}^2 \tau \theta_0 \cos^2 \theta_0$.

Из условий (2.3) и (2.4) с помощью (2.5) легко найдем, что

$$\begin{aligned} \tau^2 c_1(\tau) = & \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)} \{-m(\tau \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 + \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0) x_1(\tau) + \\ & + m(\tau \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 - \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0) x_2(\tau) + \tau \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 \bar{\varphi}(\tau)\} \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^2 b_0(\tau) = & \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)} \{m(\tau \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 - \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0) x_1(\tau) + \\ & + m(\tau \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 + \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0) x_2(\tau) - \tau \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 \bar{\psi}(\tau)\} \end{aligned}$$

Из (2.1) с помощью (2.5) и (2.6) получаем, что

$$x_1(\tau) = \frac{\tau \sin \theta_0 \cos \theta_0}{T(\tau)} \bar{\varphi}(\tau) \quad (2.7)$$

Здесь

$$T(\tau) = 2m(\text{sh } \tau \theta_0 \text{ch } \tau \theta_0 + \tau \sin \theta_0 \cos \theta_0)$$

Из граничных условий (1.3) и (1.4) с помощью разложений функций $\text{sh } \tau \theta \sin \theta$, $\text{ch } \tau \theta \cos \theta$, $\text{sh } \tau \theta \cos \theta$, $\text{ch } \tau \theta \sin \theta$ в тригонометрические ряды на интервале $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ получаем следующие функциональные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{m}{m-2} B_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau^2}{1+\tau^2} \{ \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 [m b_1(\tau) - 3m c_1(\tau) - c_2(\tau)] + \\ + \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 [3m b_1(\tau) + m c_1(\tau) - b_0(\tau)] \} d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{1+\tau^2} \{ \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [3m b_1(\tau) - m \tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] - \\
& - \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [m \tau b_2(\tau) - 3m c_1(\tau) + c_2(\tau)] \} d\tau = f_0 \\
& - B_n (x_n - 1) - m (x_n + 1) (x_n - 2) C_n - \\
& + \frac{2(-1)^n}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \{ \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [m b_1(\tau) - 3m c_1(\tau) + c_2(\tau)] + \\
& + \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [3m b_1(\tau) + m \tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] \} \\
& \left| \frac{1}{\tau^2 - (x_n + 1)^2} + \frac{1}{\tau^2 - (x_n - 1)^2} \right| d\tau = \\
& + \frac{2(-1)^n}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \{ \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [m \tau b_2(\tau) - 3m c_1(\tau) + c_2(\tau)] + \\
& - \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [3m b_1(\tau) + m \tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] \} \\
& \left| \frac{x_n + 1}{\tau^2 - (x_n + 1)^2} - \frac{x_n - 1}{\tau^2 - (x_n - 1)^2} \right| d\tau = f_n \quad (2.8) \\
& + (x_n - 1) B_n + m x_n (x_n + 1) C_n + \\
& + \frac{2(-1)^n}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \{ \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [c_2(\tau) - m \tau b_1(\tau) + m c_1(\tau)] - \\
& - \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [m \tau c_2(\tau) + m b_1(\tau) + b_2(\tau)] \} \\
& \left| \frac{1}{\tau^2 - (x_n + 1)^2} - \frac{1}{\tau^2 - (x_n - 1)^2} \right| d\tau = \\
& + \frac{2(-1)^n}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \{ \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [c_2(\tau) - m \tau b_1(\tau) + m c_1(\tau)] - \\
& - \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [m \tau c_2(\tau) + m b_1(\tau) + b_2(\tau)] \} \\
& \left| \frac{x_n + 1}{\tau^2 - (x_n + 1)^2} + \frac{x_n - 1}{\tau^2 - (x_n - 1)^2} \right| d\tau = \gamma_n
\end{aligned}$$

Здесь f_0, f_n, γ_n — коэффициенты Фурье функций $f(\theta)$ и $\tau(\theta)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
p_n &= -\frac{b_0}{2} (x_n^2 - 1) (-1)^n C_n \\
q_n &= \frac{b_0}{2m} \frac{(x_n - 1)^2}{x_n} (-1)^n E_n
\end{aligned} \quad (2.9)$$

С помощью (2.5), (2.6), (2.7) и (2.9) функциональные соотношения (2.2) и (2.8) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{m-2}{m} (f_0 + \Phi_0) \\
 &= \frac{2m}{b_0} \frac{z_n}{z_n-1} q_n - \frac{2m}{b_0} \frac{z_n-2}{z_n-1} p_n \\
 &+ \frac{16ma_n^2}{\pi b_0} \int_0^{\bar{r}} \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2 + (z_n+1)^2][\tau^2 + (z_n-1)^2]} d\tau - f_n (-1)^n + \Phi_1(\tau) \\
 &= \frac{2m}{b_0} \frac{z_n q_n}{z_n-1} - \frac{2m}{b_0} \frac{z_n p_n}{z_n-1} \\
 &+ \frac{16mz_n}{\pi b_0} \int_0^{\bar{r}} \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2 + (z_n+1)^2][\tau^2 + (z_n-1)^2]} d\tau - f_n (-1)^n + \Phi_2(\tau) \quad (2.10) \\
 x_2(\tau) &= \frac{\tau \Delta(\tau, b_0)}{T(\tau)} \left\{ \bar{\varphi}(\tau) + \frac{\text{sh } \tau b_0 \text{ ch } \tau b_0}{\tau \Delta(\tau, b_0)} \bar{\varphi}(\tau) - \frac{m}{m-2} \frac{B_0}{1-\tau^2} \right. \\
 &- \frac{2m}{b_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{z_n q_n}{\tau^2 + (z_n+1)^2} - \frac{z_n p_n}{\tau^2 + (z_n-1)^2} - \frac{z_n p_n}{\tau^2 + (z_n-1)^2} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{b_0 p_n}{(z_n-1)[\tau^2 - (z_n+1)^2]} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Функции $\Phi_0(\tau)$, $\Phi_1(\tau)$ и $\Phi_2(\tau)$ зависят от внешней нагрузки.

Асимптотический анализ формул (1.7) показывает, что для того, чтобы напряжения были конечными в угловых точках сектора, необходимо, чтобы функция $x_2(\tau)$ имела такое асимптотическое поведение

$$x_2(\tau) \sim x_0 \quad (2.11)$$

С помощью асимптотического значения для интеграла

$$\int_0^{\bar{r}} \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2 - (z_n+1)^2][\tau^2 + (z_n-1)^2]} d\tau \sim \frac{\pi x_0}{4z_n^2} \quad (2.12)$$

полученного с учетом условия (2.11), из второго и третьего уравнения системы (2.10) следует, что

$$p_n \sim q_n \sim x_0 \quad (2.13)$$

при этом необходимо, чтобы функции $l(\theta)$, $\gamma(\theta)$, $\bar{\varphi}(\tau)$, задающие внешнюю нагрузку, удовлетворяли таким асимптотическим условиям

$$f_n \sim z_n \sim \frac{1}{z_n^{1+\varepsilon}}, \quad \bar{\varphi}(\tau) \sim \frac{1}{z_n^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0 \quad (2.14)$$

С учетом асимптотических значений для следующих сумм [10], полученных с учетом (2.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^2 q_n}{[z^2 - (z_n - 1)^2][z^2 - (z_n + 1)^2]} = \frac{x_0}{4} \left[\frac{q_0}{z} \operatorname{cth} z \theta_0 - \frac{q_0^2}{\operatorname{sh}^2 z \theta_0} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{z^2 - (z_n + 1)^2} \sim \frac{x_0}{2z^2} [-1 - z \theta_0 \operatorname{cth} z \theta_0] \quad (2.15)$$

из последнего уравнения системы (2.10) снова получим равенство (2.11), при этом функция $\bar{\psi}(z)$ должна удовлетворять условию

$$\bar{\psi}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z > 0 \quad (2.16)$$

Квазирегулярность системы (2.10) в смысле сходимости метода последовательных приближений [8, 11] следует из (2.12), (2.14) — (2.16).

§ 3. Анализ формул для напряжений и смещений

Теперь рассмотрим напряжения и смещения.

С учетом (2.5), (2.6) и (2.9) из формул (1.7) легко получим, например, для напряжения $\sigma_r(t, 0)$ выражение

$$\begin{aligned} \frac{r}{2G} \sigma_r(t, 0) &= \frac{m}{m-2} B_0 e^t + \frac{2m}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ -\frac{z_n}{z_n-1} q_n e^{i(z_n-1)t} + \right. \\ &+ \left. \frac{z_n-2}{z_n-1} \theta_n e^{i(z_n+1)t} \right\} \cos z_n \theta + \frac{4m}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\Delta(z, \theta_0)} \left\{ \operatorname{sh} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \sin \theta \cos \theta_0 - \right. \\ &- \left. \operatorname{ch} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \cos \theta \sin \theta_0 \right\} \frac{1}{z} (\operatorname{sh} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \sin \theta \sin \theta_0 + \\ &- \operatorname{ch} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \cos \theta \cos \theta_0) \left| \cos zt + \frac{2}{z} (\operatorname{ch} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \cos \theta \sin \theta_0 - \right. \\ &- \left. \operatorname{sh} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \sin \theta \cos \theta_0) \sin zt \right| x_0(z) dz + \\ &- \frac{4m}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{z} (\operatorname{ch} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \cos \theta \sin \theta_0 - \operatorname{sh} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \sin \theta \cos \theta_0) \cos zt + \right. \\ &- \left. (\operatorname{ch} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \cos \theta \sin \theta_0 - \operatorname{sh} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \sin \theta \cos \theta_0) \right. \\ &- \left. \frac{1}{z} (\operatorname{ch} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \cos \theta \cos \theta_0 + \operatorname{sh} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \sin \theta \sin \theta_0) \right\} \sin zt \left| \frac{x_0(z)}{\Delta(z, \theta_0)} dz + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} (\operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \tau \theta_0 \sin \tau \sin \theta_0 + \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau \theta_0 \cos \theta_0 \cos \tau) \cos \tau +$$

$$+ (\operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau \theta_0 \sin \tau \cos \theta_0 - \operatorname{ch} \tau \operatorname{ch} \tau \theta_0 \cos \tau \sin \theta_0) \sin \tau \frac{\bar{\sigma}(\tau)}{\Delta(\tau, \theta_0)} d\tau \quad (2.17)$$

Из закона асимптотических выражений (2.11), (2.13) следует, что непрерывная и дискретная части напряжения $\sigma_r(t, \theta)$ имеют каждая отдельно особенность при стремлении точки (t, θ) в угловую точку сектора. Заменяя в (2.17) функции их асимптотическими значениями, получим, например, на дуге сектора $r=0$

$$\frac{r_0}{2G} \sigma_r(0, \theta) = -\frac{4m}{t_0} x_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \tau_n \theta}{a_n} + \frac{4m}{\pi} x_0 \int_0^{\theta} \frac{e^{-\tau(\theta-\theta_0)}}{\tau} d\tau + 0 \quad (1)$$

После соответствующих вычислений [12] получим

$$\frac{r_0}{2G} \sigma_r(0, \theta) \sim \frac{4m}{\pi} x_0 \left\{ \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2\theta_0} \right) - \ln A(\theta_0 - \theta) \right\} + 0 \quad (1)$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow \theta_0$, получим, что

$$\frac{r_0}{2G} \sigma_r(0, \theta_0) \sim \frac{4m}{\pi} x_0 \ln \frac{\pi}{4\theta_0} + 0 \quad (1)$$

то есть напряжение $\sigma_r(t, \theta)$ в угловой точке имеет конечное значение. Точно также на основе (2.11), (2.13) легко исследуется поведение других напряжений, а также смещений. Они принимают конечные значения во всей области сектора. Заметим, что напряжение $\tau_{\theta}(t, \theta)$ на прямолинейных частях сектора удовлетворяется точно.

Случай антисимметричного поля рассматривается совершенно аналогично.

Урванкский научно-исследовательский институт гидротехники в Мелитополе

Получила 25 III 1971

ՅՈՒ. Ա. ՅՈՐՅԵ

ԵՐԶԱՆԱՅԻՆ ՍԵՆՏՐՈՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌՈՂՎԱԿԱՆԱՌԹՅԱՆ
ՏԵԽՆԻԹԵՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՈՒԴԻՐԸ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո մ

Խնդրեք բերել է թանկարժեք շափառումներ և դժային Ֆանրա՛առջակա-
կան շափառումների անփոքր սխտեմների պարունակող ֆառեր շափասու-
րումների լուծմանը:

Անկաշռուղիվում է ստացված հավասարումների կլիարսը սեգուլյարութիւնը և տարածվում են սնհայտների համար արհմպատական արտահայտութիւնները.

Անկաշռի անկյունային կետերի համար որոշվում է շարումների և սեգուլարութիւնների վարրի բնոյթը.

A PLANE PROBLEM IN THE ELASTICITY THEORY FOR A ROUND SECTOR UNDER STRESS

Yu. A. BORSHCH

S u m m a r y

The problem is reduced to the solution of mixed type algebraic relations involving integral equations and infinite systems of linear algebraic equations. A quasi-regularity of the latter, and a law of asymptotic expressions are proved for unknowns, the mode of displacements and stresses at the corner points of the sector is found.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Савицкий О. М. Применение метода дополнительных волнений к решению задачи об изгибе плит, плоской задаче и задачи о кручении призматических стержней. ПММ. 13 вып. 5, 1949.
2. Уфлянд Я. С. Билярные координаты в теории упругости. ГИИТЛ. М.—Л., 1950.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости. Наука, А., 1967.
4. Шерман Д. И. Решение задачи Дирихле для кругового кольца и его некоторые применения в теории потенциала и теории упругости. Приложение теории функции в механике сплошной среды. Тр. между. симпоз. в Тбилиси 17—23 сентября 1963 г. Наука, М., 1965.
5. Паладин А. П. Математические методы двумерной упругости. Наука, М., 1973.
6. Ramachandra Rau B. S., Kulkarni C. S., Shimpi K. P. The sector problem in plane elastostatics. Int. J. Eng. Sci., 11, No 5, 1973.
7. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Осесимметричная задача теории упругости (термоупругости) для усеченного конуса. Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Научова думка, Киев, вып. 10, 1970.
8. Котлович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений. Известия физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. III, 1931.
9. Lamé G. Leçons sur la Théorie Mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, 1852.
10. Поля Г., Сеге I. Задачи и теоремы из анализа, ч. I. ГИИТЛ, 1965.
11. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями. Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций, в. 8. Научова думка, Киев, 1969.
12. Гринштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, М., 1971.

В. А. БАБЕШКО, В. Е. ВЕКСЛЕР

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В работе рассматриваются задачи о крутильных колебаниях ограниченных упругих тел, имеющих сферические поверхности; последние, в частности, могут уплощаться. Возбуждение колебаний осуществляется приклеенными к поверхности жесткими штампами. В качестве тел берутся: 1) замкнутый сферический слой радиусов $r_1 \geq r_0$, жестко закрепленный по нижнему основанию и подвергнутый кручению с частотой ω круглым симметричным штампом; 2) шайба (сферический слой бесконечного радиуса) с жестко закрепленным основанием и боковой поверхностью, свободной от напряжений.

В работе предложен метод решения указанных задач, основанный на сведении последних посредством факторизации к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что бесконечные системы квазирегулярны. Изучен также вопрос о вырождении сферического слоя в бесконечный слой, который имеет определенное прикладное значение.

Отметим, что динамические задачи для шара, как в случае кручения, так и при наличии нормального воздействия штампа, рассматривались в работе [1], в которой применен метод парных рядов.

1. Получение бесконечной линейной алгебраической системы

Все описанные выше задачи приводятся к решению интегральных уравнений вида

$$\int_0^a K(\gamma, \vartheta) q(\vartheta) d\vartheta = f(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq a \quad (1.1)$$

$$K(\gamma, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\gamma) S_n(\vartheta) S_n(\gamma) \sin \vartheta \quad (1.2)$$

где в случаях задач 1)–2) имеют место соответственно следующие соотношения:

1) $\varphi_n = n$, $\gamma = \vartheta$ — широта в сферической системе координат

$$S_n(\vartheta) = \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}} P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \quad (1.3)$$

где $P_n^{(1)}(\cos \vartheta)$ — функции Лежандра первого рода на разрезе

$$a = \theta_0, \quad f(\theta) = G \alpha r_1 \sin \theta$$

$$\varphi(x) = \alpha r_1^{-\frac{1}{2}} \frac{J_{1-\frac{1}{2}}(\alpha r_1) J_{1-\frac{1}{2}}(\alpha r_0) - J_{1+\frac{1}{2}}(\alpha r_1) J_{1+\frac{1}{2}}(\alpha r_0)}{J_{-\frac{1}{2}}(\alpha r_0) \frac{d}{dr_1} [r_1^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\alpha r_1)] - J_{\frac{3}{2}}(\alpha r_0) \frac{d}{dr_1} [r_1^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\alpha r_1)]}$$
(1.4)

где G — модуль сдвига, α характеризует величину максимального поворота штампа, $J_\nu(z)$ — функции Бесселя;

2) $\varphi_1 = r$ — радиус в полярной системе координат

$$\Delta_\nu(\psi) = \frac{\sqrt{2} J_\nu(\psi, \psi)}{R J_\nu(\psi, R)}, \quad \varphi(x) = \frac{\operatorname{tg} |x^2 - x^2 h|}{|x^2 - x^2|}$$
(1.5)

ψ_0 определяется из условия $J_\nu(\psi_0, R) = 0$, $f(r) = \varepsilon Gr$.

Здесь a , R , h — радиусы штампа и шайбы, толщина шайбы соответственно.

Во всех рассмотренных задачах характерным является наличие у мероморфных функций $\varphi(x)$ нулей и полюсов, обладающих асимптотикой следующего вида:

$$x_k = \alpha k + O(1), \quad p_k = \alpha k_1 + O(1)$$
(1.6)

Вещественных нулей и полюсов может быть лишь конечное число. Ограничимся случаем однократных нулей и полюсов.

Применяя известные приемы представления мероморфных функций в виде суммы главных частей и суммируя ряды, ядра интегральных уравнений можем представить в следующем виде:

$$K(\nu, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k [g(\nu, p_k) \theta(\nu, p_k) H(\nu, \nu) + \\ + g(\nu, p_k) \theta(\nu, p_k) H(\nu, \nu)]$$
(1.7)

$$H(\nu, \rho) = 0.5 [1 - \operatorname{sign}(\nu - \rho)]$$

$$s_k = \operatorname{Res} \varphi(p_k)$$

Здесь в случае задачи 1) имеем

$$g(\nu, p_k) = \frac{1}{p_k(p_k + 1)} P_{p_k}^{(1)}(\cos \nu)$$
(1.8)

$$\theta(\nu, p_k) = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi p_k P_{p_k}^{(1)}(\cos \nu) - Q_{p_k}^{(1)}(\cos \nu)$$
(1.9)

$Q_{\mu_k}^{(1)}(\cos \nu)$ — функция Лежандра второго рода на разрезе.

В случае задачи 2)

$$g(r, p_k) = \frac{\pi}{2} J_1(p_k r)$$
(1.10)

$$\psi(\rho, \rho_1) = \frac{N_2(\rho_1 R)}{J_2(\rho_1 R)} J_1(\rho_1 \rho) - N_1(\rho_1 \rho) \quad (1.11)$$

$N_l(x)$ — функция Неймана.

Несложно установить общий вид решения интегральных уравнений. Для этого достаточно продолжить правые части на полный отрезок $[0, \pi]$, $[0, R]$ соответственно в случае задач 1)–2), затем обратить левую часть, используя формулы разложения по функциям $S_n(\eta)$, и проделать преобразования, аналогичные предыдущим.

В результате, общий вид решения дается соотношением

$$\psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi(x_k, \eta) \quad (1.12)$$

где $\tau(x_k) = 0$.

В случаях задач 1)–2)

$$1) \quad c_0 = \epsilon \mu r_1 C_1 \varphi(1), \quad x_0 = 1, \quad \psi(x_k, \eta) = P_{x_k}''(\cos \tau) \quad (1.13)$$

$$2) \quad c_0 = 2R^2 C_1 \operatorname{tg} \gamma h, \quad x_0 = 0, \quad \psi(x_k, r) = \frac{J_1(x_k r)}{J_1(x_k R)} \quad (1.14)$$

Дальнейшее исследование состоит в построении уравнений для определения неизвестных c_k ($k=1, 2, \dots$). С этой целью в уравнение (1.1) подставляется ядро в форме (1.7) и решение в форме (1.12). После интегрирования и приравнивания коэффициентов при $\psi(x_k, \eta)$ получается следующая бесконечная алгебраическая система первого рода:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_{k\tau} = -c_0 d_{10} \quad k=1, 2, \dots \quad (1.15)$$

$$d_{k\tau} = \frac{1}{\alpha_{k\tau}} [\psi(x_k, a)]^2 \frac{d}{da} \psi(x_k, a) \quad (1.16)$$

где в случае задачи 1) $x_k = (x_0 - \rho_k)(x_0 + \rho_k - 1)$

и в случае задачи 2) $x_k = \rho_k^2 - x_0^2$.

2. Исследование бесконечной системы

Бесконечные системы, представленные в форме уравнений первого рода, после замены

$$z_k = \psi(x_k, a) c_k$$

соответственно в случае задач 1) и 2), определены на элементах пространства бесконечных последовательностей S_1 .

$$z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in S_1, \text{ если } \{z_k k^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \in S_2$$

где S_0 — пространство бесконечных последовательностей, стремящихся к 0. После введения нормы $\|z\|_S = \sup_k |z_k k'|$, S превращается в банахово пространство.

Бесконечные системы приводятся с помощью факторизации к системам второго рода. С этой целью бесконечные матрицы расщепляются, причем в ряде случаев выделяется матрица A с элементами

$$a_{kk} = \frac{1}{p_k - x_k} \quad (2.1)$$

А линейная система приводится к виду

$$(A + B)z = f, \quad \text{где } f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \quad (2.2)$$

Оставшаяся матрица B , как показывают оценки, порождает в приведенном выше пространстве S вполне непрерывный оператор.

В работе [2] показано, что в S оператор A имеет обратный ограниченный A^{-1} и построен оператор A^{-1}

$$A^{-1} = (\tau_n, \kappa) = \left(\frac{1}{\{\varphi^{-1}(p_k)\} \varphi^{-1}(x_k) (p_k - x_k)} \right) \quad (2.3)$$

3. Предельный переход к случаю бесконечного слоя

Полагая $r_1 = r_0 + h$ и $r_0 \rightarrow \infty$, можно от случая уравнений сферического слоя перейти к случаю бесконечного слоя толщины h в предположении, что все полюсы комплексные. Требование наличия только комплексных полюсов обуславливается необходимостью удовлетворения в случае слоя принципу излучения Зоммерфельда.

Будем исходить из уравнения (1.1) с ядром в форме (1.7)

Укажем некоторые утверждения относительно функции $\varphi(x)$, определенной равенством (1.4), которые получаются при использовании равномерного асимптотического разложения $\varphi(x)$ с помощью формул Лангера [3]

а) при $r_0 \rightarrow \infty$ p_n и $x_n \rightarrow \dots$

б) $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{p_n}{r_0} = p_n^*$, $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{x_n}{r_0} = x_n^*$, где p_n^* и x_n^* соответственно полюсы и нули функции (1.5)

в) $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \varphi(x, r_0) = \lg \nu h$

Используя эти утверждения, можно показать, что

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{z_n}{r_0} = \nu_i(p_n^* h) \quad (3.1)$$

При предельном переходе будем требовать, чтобы

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0 \sin \theta = r, \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_1 \sin \theta_0 = a. \quad (3.2)$$

Сделав замену переменных $r_0 \sin \theta = \rho$, используя (3.1)—(3.2) и формулы [3], связывающие функции Лежандра и Бесселя, и перейдя к пределу при $r_0 \rightarrow \infty$ и $r_1 = r_0 + b_0$, получим

$$\frac{1}{\mu} \int_0^a z(\rho) \rho k(\rho, r) d\rho = z r$$

где

$$k(\rho, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{h} \left| \begin{array}{l} J_1(p_n r) N_1(p_n \rho), \quad r < \rho \\ J_1(p_n \rho) N_1(p_n r), \quad r > \rho \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Можно показать, что (3.3) есть разложение по вычетам интеграла

$$k(\rho, r) = \int_0^{\infty} u \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2 - u^2} h}{|x^2 - u^2|} J_1(ur) J_1(u\rho) du \quad (3.3')$$

Таким образом, (3.2) является уравнением для случая бесконечного слоя.

4. Нулевой член асимптотики

Найдем нулевой член решения уравнения (2.2). Для этого надо решить уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} z_n = f_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Используя (2.3), получаем

$$c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{[\varphi^{-1}(p_k)]' \varphi'(-x_n) (p_k - x_n)} \Big|_{\varphi(x_n, a)} \quad (4.2)$$

Рассмотрим f_k как функцию от p_k и на отрезке $[\delta, a]$, $\delta > 0$ аппроксимируем f_k отношением двух полиномов

$$f_k \approx \frac{N_l(p_k)}{M_m(p_k)} \quad (4.3)$$

Увеличивая l и m и уменьшая δ , можно приблизить f_k с любой точностью.

Подставляя (4.3) в (4.2) и используя разложения мероморфной функции на простейшие дроби, получаем

gularization of the latter. The zero member of the asymptotic solution is found as well as the solution peculiarity at the punch border. The maximum transition from the spherical layer to the infinite flat one is also investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х., Баблонн А. А. О двух динамических контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965.
2. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, т. 30, вып. 4, 1966.
3. Бейтмен Г., Эрдси А. Высшие трансцендентные функции. «Наука», М., т. 2, 1966.
4. Бабешко В. А., Гарагуля В. А. Асимптотическое решение задачи о действии штампа круглого и плоского на упругий слой. Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1971.

Г. Е. БАГДАСЯНИ

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

На основе гипотез магнитоупругости гонких тел, предложенных в работах [1, 2], рассматривается задача динамической устойчивости проводящих пластины в продольном магнитном поле. Получено уравнение для определения критических частот главного параметрического резонанса. Исследуется влияние проводимости материала пластинки и напряженности заданного магнитного поля на критические частоты и области динамической устойчивости.

1. Пусть упругая изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью xz .

Пластинка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводностью σ , помещена в постоянное магнитное поле с заданным вектором напряженности $H(H_0, 0, 0)$, параллельным оси Ox .

Пусть, далее, в плоскости xz пластинка подвергается действию равномерно распределенных по сторонам, параллельным оси oy , сжимающих усилий интенсивности $p_0 + p_0 \cos \theta t$.

В основу последующих рассуждений ставятся следующие предположения:

- а) гипотеза магнитоупругости гонких тел, определяющая закон изменения упругих перемещений и компонент индуцированного электромагнитного поля по толщине пластинки [1, 2];
- б) для внешней области (для всей области вне тела пластинки) считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума;
- в) магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки принимаются равными единице;
- г) влияния токов смещения на характеристики динамической устойчивости пластинки пренебрегаются.

Предполагается также, что упругие перемещения и электромагнитные возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

На основе принятых предположений основная разрешающая система дифференциальных уравнений устойчивости пластинки имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi z}{c} \left(\gamma + \frac{H_1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \frac{h_1^+ - h_1^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{4\pi z}{c} \gamma = \frac{h_2^+ - h_2^-}{2h} \quad (1.1)$$

$$D\Delta^2 w + 2zh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p_0 - \rho_1 \cos \theta t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2zh}{c} H_1 \left(\gamma + \frac{H_1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{2zh^3}{3c} H_1 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} - \frac{H_1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

Здесь $e_x = \vec{e}(x, y, t)$, $e_y = \vec{e}(x, y, t)$ — искомые тангенциальные компоненты вектора напряженности $\vec{e}(e_x, e_y, e_z)$ индуцированного в пластинке электрического поля; $h_z = f(x, y, t)$ — искомая нормальная компонента вектора напряженности $\vec{h}(h_x, h_y, h_z)$ индуцированного в пластинке магнитного поля; $w(x, y, t)$ — прогиб пластинки. Индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при $z = h$ и $z = -h$.

В уравнениях (1.1), как обычно, Δ — двумерный оператор Лапласа. $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки, c — скорость света.

2. Для решения поставленной задачи, как видно из (1.1), необходимо иметь значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля на поверхностях $z = \pm h$. Поэтому уравнения (1.1) необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для внешней среды

$$\text{rot } \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div } \vec{h}^{(e)} = 0 \quad (2.1)$$

при следующих условиях на поверхности пластинки:

$$h_z^{(e)} = f(x, y, t), \quad h_x^{(e)} = h_{x0}, \quad h_y^{(e)} = h_{y0} \quad (2.2)$$

В (2.1) и (2.2) индекс «e» обозначает принадлежность к внешней области.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением устойчивости пластинки, бесконечно простирающейся в направлении оси oy , вмонтированной в идеально проводящую диафрагму и испытывающей цилиндрический изгиб.

В этом случае $e_x = e_y = h_y = 0$ во всем пространстве. Для определения $h_z^{(e)}$ в полуплоскостях $|z| > h$ с учетом (2.1) и (2.2) получим следующие задачи Дирихле:

$$\Delta h_z^{(e)} = 0$$

$$h_z^{(e)}|_{z=\pm h} = \begin{cases} f(x, t) & x \in [-a, a] \\ 0 & x \in]-a, a[\end{cases} \quad (2.3)$$

где $2a$ — ширина пластинки.

Решение задач (2.3) имеет вид

$$h_x^{\pm} = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(z-h)f(\xi, t)}{(x-\xi)^2 + (z-h)^2} d\xi \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в уравнение $\operatorname{div} \vec{h} = 0$ и переходя к пределу, когда $z \rightarrow \pm h$, найдем

$$h_x^+ - h_x^- = \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(\xi, t)}{x-\xi} d\xi \quad (2.5)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Анализ динамической устойчивости пластинки в продольном магнитном поле после подстановки (2.5) в (1.1) и некоторых преобразований сводится к исследованию следующей системы интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{4\pi z}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi + \frac{H_1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{1}{\pi h} \int_{-a}^a \frac{\psi'(\xi, t)}{x-\xi} d\xi \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2zh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (p_0 + p_1 \cos \theta_0 t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2zh}{c} H_1 \left(\psi + \frac{H_1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

с обычными условиями закрепления краев пластинки и условиями [3]

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \quad (2.7)$$

3. Предполагая, что пластинка достаточно длинная, представим решение системы (2.6) в виде [4]

$$\psi = \psi_0(t) e^{-ikx}, \quad w = w_0(t) e^{-ikx} \quad (3.1)$$

где $\psi_0(t)$, $w_0(t)$ — искомые функции времени t , $k = \pi/l$ — волновое число, l — длина полуволны в направлении оси Ox .

Подставляя (3.1) в (2.6) и учитывая, что область интегрирования является $(-\infty, \infty)$, получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{X}}{dt} &= A(\tau) \vec{X} \\ \vec{X} &= \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{\Omega}{c} w_0 \\ \frac{\Omega}{c} \frac{dw_0}{d\tau} \end{pmatrix} \\ A(\tau) &= \begin{vmatrix} z_0^2 - \frac{z}{h} & 1 - 2\nu \cos \theta_0 \tau & z_0^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -z_0^2 & -(1 - 2\nu \cos \theta_0 \tau) & -z_0^2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{Dk^4}{2\gamma h} \left(1 - \frac{p_1}{p_2} \right), \quad p_1 = Dk^2, \quad p_2 = \frac{p_1}{2(p_2 - p_1)} \\ \tau &= \Omega t, \quad \theta_0 = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \alpha_1 = \frac{4\omega}{\Omega}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\Omega^2} \\ V_1^2 &= \frac{H_0^2}{4\pi\sigma}, \quad \beta = \frac{c^2 k^2}{2\Omega^2} \frac{1 + 4\beta}{kh} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Согласно теореме Флоке нормальное решение периодической системы (3.2) имеет вид [5, 6]

$$\vec{X}(\tau) = \vec{\Phi}(\tau) \exp\left(\frac{\alpha_1}{2} \ln r\right)$$

где $\vec{\Phi}(\tau)$ — периодическая вектор-функция с периодом $2\pi/\theta_0$, r — корень характеристического уравнения. Тогда критическому значению безразмерной частоты θ_{0c} , означающему появление параметрического резонанса, будет соответствовать переход хотя бы одного корня характеристического уравнения из области $|r| < 1$ в область $|r| > 1$ (нарушение необходимого и достаточного условия асимптотической устойчивости).

Используя метод гармонического баланса [6], для определения критических частот главного параметрического резонанса получим уравнение

$$\left| 1 - \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\alpha_1^2 z_0}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 z_0^2} \right|^2 = \alpha_1^2 z_0 \left| 1 - \frac{\alpha_1^2 z_0}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 z_0^2} \right|^2 + \beta, \quad z_0 = \frac{\omega}{4} \quad (3.4)$$

В случае идеально проводящей пластинки ($\sigma \rightarrow \infty$) из (3.4) для границ главной области неустойчивости получим

$$\omega_{\pm}^2 = 4\Omega^2 (1 \pm \alpha_2 \pm \beta) \quad (3.5)$$

Формулы (3.5) показывают, что в случае идеального проводника магнитное поле не влияет на ширину области неустойчивости, но меняет ее расположение на плоскости (θ, Ω) в сторону больших частот.

Идея в виду, что в (3.4) вследствие бесконечности пластинки входит известное волновое число k , исследование влияния напряженности магнитного поля на области неустойчивости в случае конечного проводника по уравнению (3.4) нецелесообразно. Поэтому подобное исследование отложим до следующего параграфа, где будет рассмотрена аналогичная задача в случае конечной пластинки.

Если задачу решить при условии, что в первом уравнении системы (2.6) пренебрегается член $\partial^2 \phi / \partial x^2$, то изменится только значение величины β , причем для β получается выражение $\beta = c^2 k^2 / \Omega^2 kh$. Сравнение показывает, что пренебрежение указанным членом приводит к погрешности порядка kh по сравнению с единицей, которая в теории тонких пластинок обычно пренебрежимо мала.

4. Рассмотрим задачу динамической устойчивости пластинки-полосы шириной $2a$ ($-a \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$), помещенной в магнитном поле с вектором напряженности, параллельным оси ox . Предполагается, что пластинка, длинные стороны которой жестко заделаны, теряет устойчивость по цилиндрической форме. В этом случае должны решать систему (2.6) при условии (2.7) и следующих условиях на торцах пластинки:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a$$

Пренебрегая членом $\partial^2 \psi / \partial x^2$, первое уравнение системы (2.6) с учетом второго уравнения можно привести к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_0(\xi_0, t)}{x_0 - \xi_0} d\xi_0 - \frac{2\pi a}{cH_0} \frac{\sigma}{\sigma_0} \left| \frac{D}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} - 2,7h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{p_0 + p_1 \cos bt}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} \right| \quad (4.1)$$

где введены безразмерные координаты $x = ax_0$, $\xi = a\xi_0$.

Из уравнения (4.1) путем использования формулы обращения интеграла типа Коши можно найти функцию $\psi(\xi_0, t)$.

Известно [7], что интегральное уравнение

$$\psi(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\xi_0)}{x_0 - \xi_0} d\xi_0$$

в котором функция $\psi(x_0)$ на промежутке $[-1, 1]$ удовлетворяет условию Липшица, а неизвестная функция $u(x_0)$ суммируема на промежутке $(-1, 1)$ и удовлетворяет условию Липшица с одним и тем же показателем на любом сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), имеет решение

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-x_0^2} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi_0^2}{\xi_0-x_0} \psi(\xi_0) d\xi_0 - \frac{c_0}{1-x_0^2} \quad (4.2)$$

где c_0 — произвольная постоянная.

Применяя формулу (4.2) относительно уравнения (4.1) и удовлетворяя условиям (2.7), найдем

$$\begin{aligned} \psi(x_0, t) = & \frac{2a}{c\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx_0}{1-x_0^2} \int_{-1}^1 \frac{d\xi_0}{1-\xi_0^2} \frac{\sigma}{\sigma_0} \left| \frac{D}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} - \right. \\ & \left. - 2,7h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{p_0 + p_1 \cos bt}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} \right| \frac{d\xi_0}{\xi_0 - x_0} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) во второе уравнение системы (2.6), задачу динамической устойчивости рассматриваемой пластинки в продольном магнитном поле приведем к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p_0 + p_1 \cos \theta t}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2\gamma h \mu_1}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t} + \\ & + \frac{4\gamma h a}{c^2} \int_{-1}^1 \frac{dx_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0 - x_0} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x_0^4} + \right. \\ & \left. + 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p_0 + p_1 \cos \theta t}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} \right| dx_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

при следующих граничных условиях:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_0} = 0 \quad \text{при} \quad x_0 = \pm 1 \quad (4.5)$$

Представляя искомый прогиб пластинки в виде

$$w(x_0, t) = w_0(t)(1 - x_0^2)^2$$

удовлетворим граничным условиям (4.5), а из уравнения (4.4) методом Бубнова-Гальперкина получим линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} z_0 \frac{d^4 w_0}{d\tau^4} - \beta \frac{d^2 w_0}{d\tau^2} + z_0 z_1 (1 - 2\gamma \cos \theta_0 \tau) \frac{d^2 w_0}{d\tau^2} + \\ + \beta [1 - 2\gamma (\cos \theta_0 \tau - \gamma \theta_0^2 \sin \theta_0 \tau)] w_0(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} z_0 = 2t, \quad z_1 = \frac{63D}{4\gamma h a^4} \left(1 - \frac{p_0}{p_*}\right), \quad p_* = \frac{21D}{2a^2}, \quad \mu = \frac{p_1}{2(p_* - p_0)} \\ z_0 = \frac{4\pi z}{\Omega}, \quad \theta_0 = \frac{\gamma}{\Omega}, \quad \beta = 1.22 \frac{c^2}{a^2 \Omega^2} \frac{\alpha}{h}, \quad \beta_0 = 0.737, \quad \gamma z_1 = 0.737 \end{aligned}$$

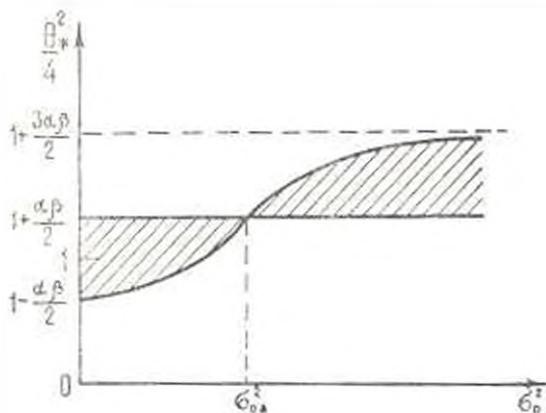
$$z_1 = z\beta + 1.123 \frac{p_0}{p_* - p_0} \left(1 - \frac{21}{32} \frac{p_0}{p_*}\right), \quad \alpha = \frac{V_A^2}{c^2}, \quad V_A^2 = \frac{H_1^2}{4\pi q}$$

Поступая аналогичным образом, как в пункте 3, из уравнения (4.6) для определения критических частот главного параметрического резонанса получим уравнение

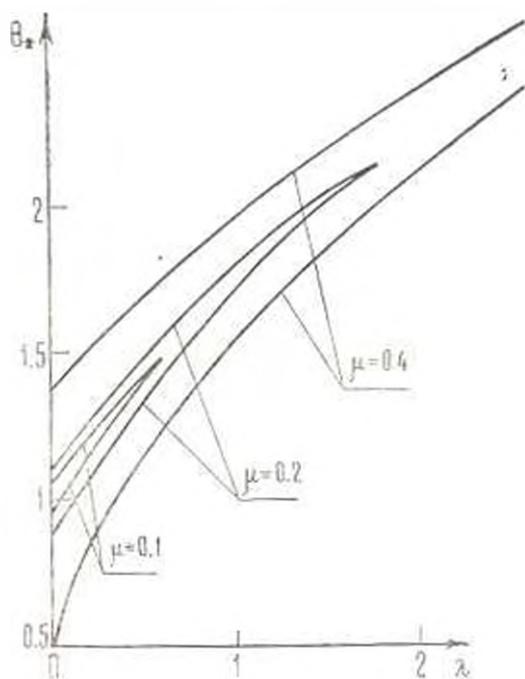
$$\alpha_0^2 z_0 [(z_0 - \alpha_1)^2 - (\beta_0^2 - \mu^2)] + \beta^2 [(z_0 - 1)^2 - \mu^2] = 0, \quad z_0 = \frac{\xi_0^2}{4} \quad (4.7)$$

На фиг. 1 представлены графики зависимостей критических частот главного параметрического резонанса от параметра α , характеризующего электропроводность материала пластинки при $\alpha\beta \ll 1$, $2\mu = \alpha\beta$. Параметр α характеризует напряженность заданного магнитного поля. Рассматривая фиг. 1, замечаем, что с увеличением проводимости материала пластинки ши-

рина области неустойчивости вначале уменьшается и принимает значение нуль при $\sigma_{0a}^2 = \frac{\alpha\beta}{2} \left(1 + \frac{\alpha\beta}{2}\right)$, после чего начинает увеличиваться, стремясь к 2α для идеально проводящего материала (формула (35)).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Кривые, приведенные на фиг. 2, представляют зависимость $\sigma_{0a}^2(\lambda = \alpha\beta)$ для медной пластинки при различных значениях коэффициента возбуждения μ . Для расчета принято $\rho_0 = 0$, $h = 0.01a$.

կանոնական և ախտաճանաչական գաղափարային լարվածությունն ազդեցությունը կրիտիկական շահախախտումների և դինամիկական կայունության տիրույթների վրա:

ON PARAMETRIC VIBRATION OF CONDUCTING PLATES IN A LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN

S u m m a r y

In terms of hypotheses on magnetoelasticity of thin bodies a problem is discussed of dynamic stability of conducting plates in a longitudinal magnetic field. An equation is obtained to determine critical frequencies of the major parametric resonance. Examined is the effect of plate material conductivity and of the strength of a specified magnetic field on critical frequencies and on the regions of dynamic stability. It is shown that there exists a minimum magnitude of the magnetic field which, when exceeded, eliminates the possibility of parametric resonance.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Է., Бельбуцкий М. В. В трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Է., Бельбуцкий М. В. К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
3. Багдасарян Г. Է., Бельбуцкий М. В. О колебаниях проводящих пластин в магнитном поле. МТГ, № 2, 1974.
4. Багдасарян Г. Է., Гяури В. Ц. Динамическая устойчивость аннотрипной замкнутой цилиндрической оболочки. Докл. АН АрмССР, т. XI, № 5, 1965.
5. Ляпунов А. И. Лекции по математической устойчивости. Наука, М., 1967.
6. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Госгехиздат, М., 1956.
7. Гилли Ф. Д. Кривые задачи. Физматгиз, М., 1963.

А. С. ВОЛЬМЕР, А. Т. ПОНОМАРЕВ

АЭРОТЕРМОУПРУГОСТЬ ПЛАСТИНОК И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ В ПОТОКЕ ГАЗА

Проблема поведения деформируемой конструкции при совместном действии нестационарной аэродинамической нагрузки и аэродинамического нагрева является одной из наиболее актуальных для современного авиастроения. Влияние теплового воздействия проявляется, прежде всего, в появлении в элементах конструкций дополнительных напряжений и в снижении показателей механических характеристик материала.

Вопросы, относящиеся к исследованию поведения упругих систем при повышенных температурах, отражены в монографиях [2], [8]. Освещены также отдельно в литературе задачи, касающиеся теории теплопроводности и массообмена [9], [7]. Численные методы нестационарной аэродинамики изложены в [3]. В исследовании же поведения деформируемых элементов тонкостенных конструкций в потенциальном поле совместно с аэродинамическим нагревом делаются лишь первые шаги.

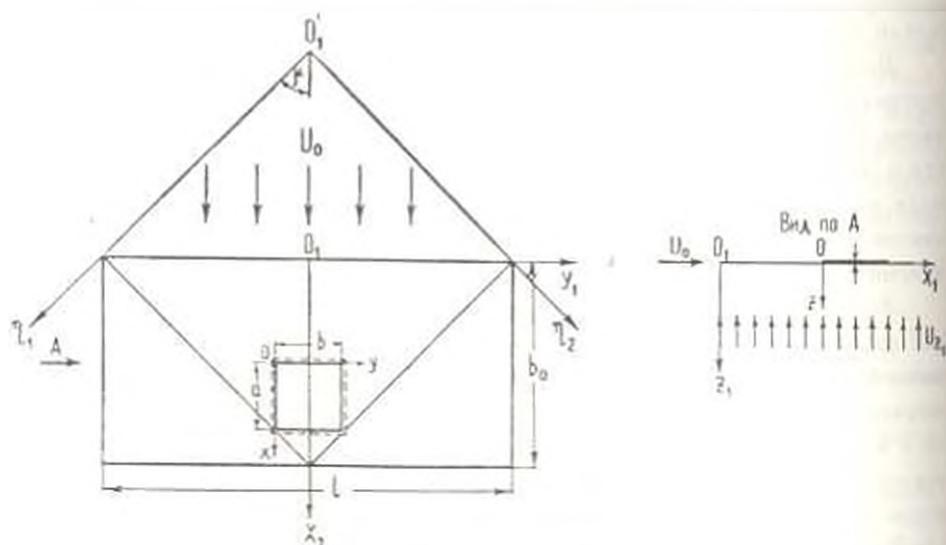
Задача об определении аэротермоупругих свойства элементов конструкций состоит из трех частей. Первая из них включает вычисление при известной скорости полета конструкции интенсивности аэродинамического нагрева. По найденному тепловому полю ищутся температурные gradients в конструкции. Затем из совместного решения уравнений газовой динамики и термоупругости находятся аэродинамическая нагрузка и деформация или напряжения в конструкции.

В настоящей работе особенности поведения конструкции типа пластины и цилиндрической панели рассматриваются с позиций нелинейной теории термоупругих полых оболочек и линеаризованной теории нестационарной аэродинамики. Распределение температуры по конструкции считается известным, либо ищется из решения уравнения теплопроводности в предположении о независимости температурного поля от поля деформации.

Рассмотрим симметричное безотрывное движение несущей поверхности—крыла прямоугольной формы в плане со скоростью U_0 при нулевом угле атаки α в идеальной сжимаемой среде. Примем, что, начиная с момента времени $t=0$, крыло подвергается действию дискретного вертикального порыва (мгновенный охват). Предполагается, что в последующие моменты времени отдельные участки верхней обшивки крыла начинают деформироваться от совместного действия аэродинамической нагрузки и аэродинамического нагрева.

Изучим динамическую реакцию упругой системы при комбинированном нагружении на примере плоского и искривленного элемента обшивки

крыла со сторонами a , b и толщиной h (фиг. 1). Примем, что выделенная панель шарнирно скреплена с жесткими подкрепляющими элементами конструкции. При этом перемещение торцов ее стеснено в направлении x ; вместе с тем считаем, что точки торцов могут свободно скользить вдоль координатной линии y . Кроме того, предположим, что панель имеет начальные неперпендикулярности формы, и условно примем, что кривизна ее расположена перпендикулярно направлению потока. Направление потока и область положительных координат для несущей поверхности O, x, y, z , и для панели O_1, x_1, y_1, z_1 показаны на фиг. 1. Отличимся случаем малых скоростей прогиба по сравнению с U_0 , и самих прогибов по отношению к хорде крыла ($w \ll b_x$). В то же время будем считать, что появляющиеся прогибы в обшивке сравнимы с ее толщиной.



Фиг. 1

Выпишем линеаризованное дифференциальное уравнение, описывающее распространение потенциала возмущенных скоростей ψ в связанной системе координат (x, y, z) , и основные динамические нелинейные соотношения теории пологих термоупругих оболочек с учетом начальных неперпендикулярностей формы и конструкционного демпфирования, дополнив их инерционным членом, соответствующим нормальному перемещению.

$$(\omega^2 - U^2) \Delta \psi - a^2 \psi_{,xx} - a^2 \psi_{,yy} - 2U \psi_{,xz} - \psi_{,zz} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{M_1}{1 - \nu} \nabla^2 (\omega_0 - w_1) = L_1 \omega_0 \omega_1 - \frac{E}{K} \omega_0 \omega_1 - \omega_1 \omega_0 + \mu(x, y, t) \quad (2)$$

$$M_1 \nabla^2 \omega_1 = \frac{1}{2} (L_1 \omega_1 \omega_0 - L_1 \omega_0 \omega_1) - \frac{1}{K} (\omega_1 \omega_0)_{,zz} \quad (3)$$

Здесь

$$M_1 = \frac{1}{D_0}, \quad M_2 = \frac{D_1 - D_0 D_2}{D_0},$$

$$D_0 = \int_{-h/2}^{h/2} E^2 dz, \quad D_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E^2 z dz, \quad D_2 = \int_{-h/2}^{h/2} E^2 z^2 dz \quad (4)$$

E^2 — модуль упругости в точке с координатой z , вычисленный для данной температуры θ , R — радиус срединной поверхности цилиндрической панели, γ — удельный вес материала, ν — коэффициент конструктивного демпфирования, $p(x, y, t)$ — интенсивность поперечного аэродинамического давления, L — известный билинейный оператор, u_0 — скорость звука в невозмущенном потоке, Φ — функция напряжений в срединной поверхности, w и w_0 — полный и начальный прогибы. Индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей переменной. Уравнения (2—3) описывают напряженное и деформированное состояние панели при допущении, что температура, оставаясь постоянной вдоль координат x и y , изменяется только по толщине $\theta = \theta(z)$. Граничные условия на панели

$$[z_{,i}]_{z=0} = \begin{cases} 0 & i < 0 \\ U_0 \left(-z + w_{,i} + \frac{1}{U_0} w_{,it} \right) & i \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

где z учитывает изменение угла атаки при воздействии порыва, $w_{,i}$ и $\frac{1}{U_0} w_{,it}$ описывают изменение местного угла атаки по координате x и времени t . Согласно (5) и модели тонкой несущей поверхности выражение для суммарного аэродинамического давления представим в виде

$$p(x, y, t) = p_1(x, y, t) + p_{w_0}(x, y, t) + p_{w_1}(x, y, t) \quad (6)$$

Здесь $p_1(x, y, t)$ — составляющая аэродинамического давления, определяемая в данном случае по соотношениям ([3] стр. 547). Возмущенное давление $p_2(x, y, t)$ вычисляем с помощью интеграла Коши-Лагранжа через потенциал возмущенных скоростей

$$p_2 = -\rho_0 (U_0 \varphi_{,i} + \varphi_{,it}) \quad (7)$$

Через ρ_0 в (7) обозначена плотность невозмущенной газовой среды. Для решения упругой части задачи воспользуемся методикой, изложенной в [6].

Функции полного и начального прогибов и функцию напряжений в срединной поверхности аппроксимируем выражениями вида

$$w = f(x, t) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad w_0 = f_0(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\Phi = \Phi_0(x, t) \sin \frac{n\pi y}{b} - \frac{N_0 y^2}{2} \quad (8)$$

где N_y^0 — эквивалентное сжимающее усилие в кгс/см, n и n_0 — соответственно число текущих и начальных полуовал вдоль оси y ; $n = n_0$.

Выражения для ω и Φ (8) удовлетворяют граничным условиям типа

$$\begin{aligned} \omega = 0, \quad \omega_{,xy} = 0, \quad N_x = N_x^0, \quad N_{,xy} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad a \\ \omega = 0, \quad \omega_{,xy} = 0, \quad N_y = 0, \quad N_{,xy} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad b \end{aligned} \quad (9)$$

где N_x , N_y и $N_{,xy}$ — соответственно нормальные и касательные погонные усилия, связанные с функцией Φ по известным соотношениям [5]. Условие для $N_{,xy}$ и (9) по ненагруженным кромкам $y = 0; b$ выполняется в „интегральном“ смысле.

Разрешающая система уравнений относительно искомых функций ω и Φ была составлена путем последовательного применения к зависимостям (2—3) процедуры Бубнова-Галеркина по переменной y и метода конечных разностей по x и времени t .

Коэффициент эквивалентного сжимающего усилия N_x^0 находим из условия отсутствия сближения между торцами панели в направлении оси x

$$\frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial \omega}{\partial x} dx = 0 \quad (10)$$

где ω — деформация панели вдоль образующей.

Окончательно усилие N_x^0 определяем по формуле

$$\begin{aligned} N_x^0(t) = N_0(t) - \frac{2z}{ab} \int_0^a \Phi_0(x, t) dx + \\ + \frac{1}{4\alpha t \rho_0} \int_0^a \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{v}{a} \frac{2}{n\pi} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (11)$$

где $N_0 = \int_{z_0}^{z_1} \rho z^2 E dz$ — температурное усилие, αz^2 — коэффициент линейно о расширения.

Решая совместно уравнения (2—3) относительно функций ω и Φ с учетом (11) описанным выше способом и определяя законы распределения возмущенного давления $p(x, y, t)$ численными методами линеаризованной нестационарной аэродинамики, можно исследовать деформацию панели вдоль образующей и во времени как при переходном процессе, так и при установившемся режиме в потоке газа для широкого диапазона чисел Маха $0 < M < 2$ ($M = U_0/a_0$).

Для примера изучим аэротермоупругие свойства панели при обтекании крыла сверхзвуковым потоком. Рассмотрим случай $M = 1.2$; будем считать температуру нагрева известной.

Аэродинамическое давление находилось по (6) с учетом (7). Потенциал возмущенных скоростей ϕ определялся интегрированием уравнения (1) численным методом запаздывающего потенциала от источника в безразмерных характеристических координатах $O_1x_1z_1$ с полууглом при вершине $\mu = \arcsin M^{-1}$ (фиг. 1)

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{x}_1 - \bar{y}_1 - \bar{x}_{10}, & z_1 &= \bar{x}_1 - \bar{y}_1 - \bar{x}_{10} \\ \bar{y}_1 &= \frac{2y_1}{e}, & \bar{x}_1 &= \frac{2x_1}{\beta l}, & \bar{x}_{10} &= \frac{2x_{10}}{\beta l}, & \beta &= \sqrt{M^2 - 1} \end{aligned} \quad (12)$$

где x_{10} — координата начала отчета, l — размах несущей поверхности.

Для реализации численного метода панель заменяется целым числом элементарных ячеек, образуемых путем пересечения прямых, параллельных характеристическим линиям O_1x_1 и O_1z_1 . Потенциал возмущенных скоростей ϕ в произвольной точке находим путем суммирования интегралов по ячейкам, вошедшим в область интегрирования.

Далее было принято, что температура вдоль толщины оболочки распределяется по линейному закону

$$t = c - \beta_0 z$$

Здесь $c = \frac{t_1 + t_2}{2}$, $\beta_0 = \frac{t_1 - t_2}{h}$, t_1 и t_2 — температура наружной и внутренней поверхности; модуль упругости является также функцией координаты z

$$E^z = H^z - \beta_1^E z$$

где

$$H^z = H - \beta_1 \beta_0, \quad \beta_1^E = \beta_1 \beta_0$$

Например, для дюралюминия Д 16Т $H = 7.2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\beta_1 = 551 \text{ кг/см}^2 \cdot \text{C}$.

Изменение коэффициента линейного расширения в зависимости от температуры описывается выражением

$$\beta_2 = s + c\beta_2$$

Далее имеем

$$\beta_2^z = s^z - \beta_2^z z, \quad \beta_2^z = \beta_0 \beta_2$$

Для дюралюминия $s = 22 \cdot 10^{-6} / \text{C}$, $\beta_2 = 0.05 \cdot 10^{-4}$.

Приведенная температурная жесткость панели, неравномерно нагретой по толщине, примет вид

$$M_2 = \frac{D_0 D_0 - D_1^2}{(1 - \nu^2) D_0} = \frac{h^3 (12 H^z - \beta_1^E h^2)}{144 H^z (1 - \nu^2)}$$

Кроме того, выражение для N_0 будет

$$N_0 = c (H - \beta_0 c) (s - c \beta_2) h \quad (13)$$

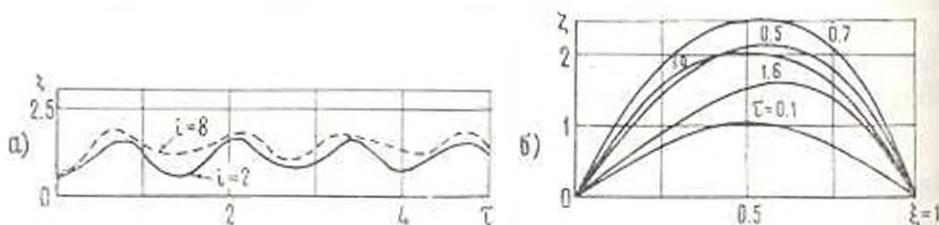
При составлении разрешающих уравнений были использованы безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{f}{a}, & \bar{z} &= \frac{f}{h}, & \bar{x} &= \frac{x}{a}, & \bar{z} &= \frac{z}{b} \\ \bar{D}_0 &= \frac{D_0}{h^2}, & \bar{N}_0 &= \frac{N_0 b^2}{D_0 h^2}, & \bar{N}_c &= \frac{N_c b^2}{D_0 h^2} \\ \bar{\alpha} &= \frac{\alpha}{a} \quad \bar{\beta} = \frac{\beta h}{D_0 c}, & \bar{U}_0 &= \frac{U_0 t}{b_0}, & \bar{p} &= \frac{2(p - p_*)}{\rho U_0^2} \\ \bar{\lambda}_1 &= \lambda_1 \frac{b}{h}, & \bar{\lambda}_2 &= \lambda_2 \frac{a}{b_0} \end{aligned} \quad (14)$$

Система разрешающих безразмерных уравнений относительно функции $\zeta(\bar{x}, \bar{z})$ и $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ интегрировалась в конечных разностях с шагом по координате $h = 0.1$ и по времени $h = 0.005$ при начальных условиях $\bar{z} = \bar{z}_0 = \bar{\zeta}_0 = 0$ совместно с уравнением для параметра возмущенного давления $\bar{p}(\bar{x}, \bar{z})$ при $h = 0.0125$ и $h = 0.025$; число полуволн вдоль оси \bar{z} и амплитуда начальной погиби составили соответственно $n = 1$, $\bar{\zeta}_0 = 1$.

Отметим здесь, что эквивалентное сжимающее усилие \bar{N}_0 в общем случае является переменным по времени τ . Поэтому оно ищется на каждом шаге интегрирования по (11) с учетом (13).

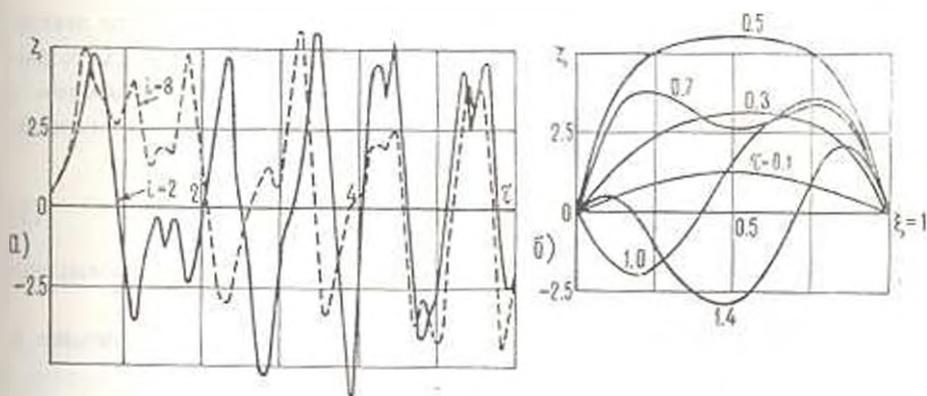
Остановимся на результатах вычислений, полученных с помощью ЭЦВМ на примере панели, выполненной из дюралюминия, с параметрами $\lambda = 1$, $\lambda_1 = 80$, $\lambda_2 = 0.25$ при $\bar{z} = 0.5$ для случая стационарного нагрева. Варьируется коэффициент кривизны панели k и температура нагрева θ . Они представлены в виде графиков на фиг. 2—4.



Фиг. 2.

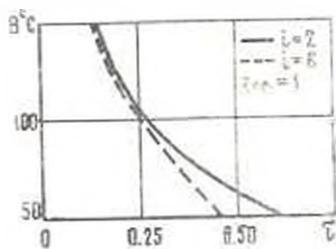
На фиг. 2а, б нанесены соответственно траектории движения $\zeta_i(\tau)$ передней $i=2$ и задней $i=8$ точек панели во времени τ , расположенных соответственно на расстоянии $1/5$ и $4/5$ длины от передней кромки со стороны набегающего потока (фиг. 2а), и закон деформирования срединной поверхности $\zeta(\bar{x}, \tau)$ вдоль координаты \bar{x} для различных моментов времени τ при $k=0$ и $\theta = 50^\circ \text{C}$ (фиг. 2б). Аналогичные графики $\zeta_i(\tau)$ и $\zeta(\bar{x}, \tau)$ изображены на фиг. 3а, б для панели с $k=0$ при $\theta = 100^\circ \text{C}$. Как видим, повыше-

ние температуры нагрева панели θ приводит к резкому изменению деформированного состояния. Вычисления показали также, что аэротермоупругое поведение панели при дальнейшем росте температуры нагрева может быть описано, исходя из условий нагрева. Вместе с тем отметим, что нагрев панели выбранной геометрии в диапазоне $0 \leq \theta \leq 60^\circ\text{C}$ приводит к заметному демпфированию аэротермоупругих амплитудно-частотных характеристик.



Фиг. 3.

Кривые $U(\xi)$ фиг. 4 иллюстрируют влияние температуры нагрева θ на критическое время достижения в отдельных точках конструкции ($i=2$ — сплошная линия; $i=8$ — пунктирная линия) предельного прогиба ($\zeta_{\text{пред.}} = 11$). Из анализа фиг. 4 следует, что это время в значительной степени зависит от температуры нагрева панели.



Фиг. 4.

Таким образом, при сравнительно высоких температурах аэротермоупругие свойства системы типа панели могут быть изучены без учета нестационарности обтекания. Сопоставление результатов вычислений при варьировании коэффициента кривизны панели k показало, что увеличение параметра k вызывает рост амплитуды колебаний системы.

Обратимся теперь к исследованию аналогичной задачи для случая быстрого нагрева поверхности обшивки. Будем считать интенсивность падающего потока на поверхность элемента конструкции известной.

Укажем на некоторые особенности данной задачи. В первую очередь это относится к параметру температурного усилия \bar{N}_0 соотношения (11). Если при статическом нагреве он принимался постоянным, то в этом случае \bar{M} будет являться функцией параметра времени τ : $\bar{N}_0 = \bar{N}_0(\tau)$. Его будем находить по формуле (13) на каждом шаге интегрирования. Для этого в дополнение к основным разрешающим уравнениям относительно функции ξ , η и ρ необходимо решить температурную задачу.

Так как панель считается тонкостенной и предполагается, что поверхность ее подвергается равномерному воздействию теплового потока, то распространением тепла в меридиональном направлении можно пренебречь и рассматривать задачу о распространении тепла в одномерной постановке. Тогда уравнение теплопроводности выпишем в виде [9]

$$\dot{\xi}_{,tt} = \gamma \xi_{,zz} \quad (15)$$

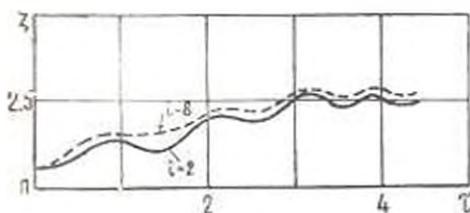
где γ — коэффициент температуропроводности; для дюралюминия $\gamma \approx 0,645 \text{ см}^2/\text{сек}$.

Уравнение (15) было проинтегрировано при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} \xi_{,z} &= 0, \quad \xi_{,z} = \text{const} & \text{при} & \quad z = \pm \frac{h}{2}; \quad t = 0 \\ \xi &= 0 & \text{для} & \quad t = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользуемся известным решением [8]

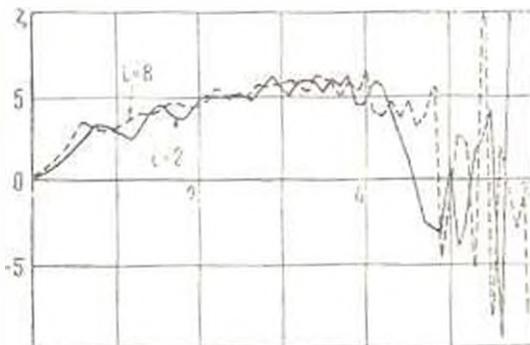
Варьируемыми параметрами в вычислениях были коэффициент кривизны панели k и интенсивность теплового потока $q(t)$.



Фиг. 5.

На фиг. 5 помещены траектории движения передней ($i=2$) и задней точек ($i=8$) панели с коэффициентом кривизны $k=0$ при $q=500 \text{ кал./см}^2/\text{сек}$. Подобные графики при $q=1500 \text{ кал./см}^2/\text{сек}$ нанесены на фиг. 6. Сопоставление данных фиг. 5 и 6 с аналогичными кривыми фиг. 2а и 3а показывает, что аэротермоупругие свойства упругой системы при быстром нагреве со сверхзвуковым обтеканием описываются в начальный период плавным темпом нарастания амплитуды движения. Вместе с тем конструкция может подвергаться действию более высоких температурных градиентов до появления в ней значительных перемещений.

Анализ вычислений показал также, что, как и в случае, описанном выше, увеличение интенсивности нагрева приводит к уменьшению критического промежутка времени до появления в конструкции предельных прогибов.



Фиг. 6

Мы рассмотрели некоторые аэротермоупругие явления, происходящие в присутствии теплового поля. Было показано, что температурные напряжения изменяют характер поведения упругой конструкции, подвергающейся действию газового потока. В одних случаях тепловые воздействия смягчают аэроупругие перемещения системы, в других же они полностью определяют напряженное и деформированное состояние конструкции. В связи с широким использованием композиционных материалов в авиационной желательнее рассмотреть эти же задачи с применением современного аппарата теории анизотропных пластин и оболочек [1].

Военно-воздушная инженерная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского

Поступила 27 II 1975

Ա. Ս. ՎԱՐՈՐԻ, Ա. Տ. ՊՈՆՈՐԱՅՅՈՎ

ՍԱՆՔԻ ԳԱՆԱՅԻՆ ՊԱՆԿՆԵՐԻ ԱՆՐՈՋԵՐԿԱՌԱՋՊԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ
ԳԱԶԻ ՀՈՍԱՆՔՈՒՄ ԱՆՅՈՎԱԿԱՆ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՐԳԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Մ

Ուսումնասիրվում են պանելների անրոջերմաառաձգական հատկությունների զազի հոսանքում անցողական պայմանակարգի և տորաժման ժամանակ դիտարկվում են կառուցվածքի էլիմենտի ստացիոնար և արագ տարացման դեպքերը: Սպտադործվում են չերմաառաձգական թաղանթների ոչ գծային սեստիլյան առնչությունները նորմալ տեղափոխությունը համապատասխանող կառուցվածքային առանումների մարիչի և իներցիոն ումերի հաշվառումով:

Աերոգինամիկական բեռը փնտրվում է գծայնացված ոչ ստացիոնար անրոջինամիկայի թվային եզանակներով բարակ կրող մակերևույթի մոդելի վրա:

5 Известия АИ Армянской ССР, Механика, № 5

Հաշվի է առնվում նրաժի միասնիկական բնութագրիչների փոփոխությունը ջերմաստիճանից կախված: Հաշվումների արդյունքները ներկայացվում են գծանկարների տեսքով, որոնք նկարագրում են ճամակարգի ամպլիտուդա-ճամակահանության բնութագրիչները ստրամձան ջերմաստիճանից և պանելի երկրաչափությունից կախված:

AEROTHERMOELASTICITY OF PLATES AND CYLINDRICAL PANELS UNDER TRANSIENT INFLUENCE OF THE GAS FLOW

VOL'MIR A. S., PONOMAREV A. T.

S u m m a r y

Aerothermoelastic behaviour of plates and circular cylindrical panels under transient movement in the gas flow and simultaneously heating is investigating.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Из-во «Наука», М., 1974.
2. Боканов В. А., Гольдшмидт И. Н., Николаенко Н. А., Симонов А. М. Расчет конструкции на тепловые воздействия. Из-во «Машиностроение», М., 1969.
3. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. Из-во «Наука», М., 1971.
4. Ван-Драйст Е. Р. Проблема аэродинамического нагрева. ВРТ, № 5, 1957.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Из-во «Наука», М., 1972.
6. Вольмир А. С., Пonomarev А. Т., Попыталов С. А. Поведение панели крыла при переходном режиме в потоке газа. ПММ, т. 37, № 2, 1973.
7. Энкерт Э. Р. Введение в теорию тепло- и массообмена. Госнефтеиздат, М., 1957.
8. Boley В., Fether J. Theory of thermal stress. N. Y., 1960.
9. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids. Oxford, 1960.

Р. М. КИРАКОСЯН

О СООТНОШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ*

Известно, что упругие свойства материалов сравнительно слабо зависят от скорости нагружения, чем пластические. Динамический и статический способы определения упругих постоянных обычно дают практически одинаковые результаты, чего нельзя ожидать по отношению к пластическим характеристикам материалов.

Несмотря на существующее множество различных моделей, учитывающих влияние скорости деформирования на соотношения пластичности, этот вопрос пока нельзя считать окончательно решенным. В настоящей статье делается еще одна попытка в этом направлении. Опираясь на понятие поверхности текучести и ассоциированный с ней закон течения, предлагаются динамические соотношения пластичности при нестационарных температурных полях. Ради простоты считается, что упругие свойства материала не зависят как от температуры, так и от скоростей деформаций. Более детально рассмотрен случай плоского напряженного состояния.

В заключение указывается возможность учета влияния других факторов (магнитного поля, облучения и т. д.) на пластические свойства материалов.

1. Пусть поверхность текучести, ограничивающая область упругости материала в пространстве напряжений σ_{ij} , определяется уравнением

$$F(\sigma_{ij}, q, \dot{v}, \dot{\epsilon}_{ij}) = 0 \quad (1.1)$$

где q — параметр упрочнения, \dot{v} — температура, $\dot{\epsilon}_{ij}$ — тензор скоростей деформаций.

Как обычно, при $F < 0$ состояние данной точки, независимо от того происходит нагружение или разгрузка, является упругим. При пластическом течении точка, изображающая напряженное состояние в пространстве напряжений, движется по поверхности текучести (1.1), следовательно,

$$F = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \dot{v} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad (1.2)$$

При разгрузке или нейтральном изменении напряженного состояния $\dot{q} = 0$, $\dot{v} \leq 0$, и из (1.2) следует

$$\dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \dot{v} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0 \quad (1.3)$$

* Работа доложена на VI Всесоюзной конференции по прочности и пластичности, Москва, 1975 г.

Следовательно, при нагружении

$$f > 0 \quad (1.4)$$

Значение f является мерой интенсивности процесса нагружения. По аналогии с классической теорией термопластичности [1] примем закон течения, нормальный к поверхности текучести в пространстве напряжений

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \gamma H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} f = \gamma H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} \sigma_{kl} - \frac{\partial F}{\partial \dot{\sigma}_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \dot{\sigma}_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \right) \quad (1.5)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ — тензор скоростей пластических деформаций, H — положительная функция упрочнения,

$$H = \begin{cases} 1, & \text{если } F < 0 \text{ и } f > 0 \\ 0, & \text{если } F < 0 \text{ или } F = 0 \text{ и } f = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Принимая в качестве параметра упрочнения работу пластических деформаций

$$q = \int \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} dt \quad (1.7)$$

с учетом (1.5) из (1.2) получим

$$H = - \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}} \quad (1.8)$$

Заметим, что совпадение выражения функции упрочнения H с ее классическим выражением является формальным, так как она теперь зависит от скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$.

Прибавляя к (1.5) термоупругие составляющие скоростей деформаций

$$\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij}^e = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \gamma \dot{\sigma}_{ij} \quad (1.9)$$

для полных соотношений получим

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^t = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \gamma \dot{\sigma}_{ij} + \gamma H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} f \quad (1.10)$$

Здесь A_{ijkl} — тензор коэффициентов упругости, δ_{ij} — символ Кронекера, γ — коэффициент линейного температурного расширения материала.

В соотношения (1.10), кроме скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$, входят еще ускорения деформаций $\ddot{\epsilon}_{ij}$. В случаях, когда ускорения деформаций $\ddot{\epsilon}_{ij}$ являются непрерывными функциями времени, их можно с помощью дифференциальных уравнений движения

$$\dot{\varepsilon}_{ij} + X_i = \rho u_i \quad (1.11)$$

и геометрических соотношений

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.12)$$

выразить через соответствующие производные объемных сил и напряжений по координатам

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2\rho} (\dot{\varepsilon}_{i,k,l} + \dot{\varepsilon}_{j,k,l} + X_{i,k,l} + X_{j,k,l}) \quad (1.13)$$

(ρ —плотность материала).

Во избежание недоразумений отметим, что по известным ускорениям деформаций для некоторого момента времени t_0 нельзя определить скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ для того же момента. Механический смысл этого утверждения заключается в том, что в зависимости от того, происходит нагружение или разгрузка, одним и тем же ускорениям деформаций $\ddot{\varepsilon}_{ij}$ будут соответствовать разные скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$.

В динамических задачах ускорения деформаций $\ddot{\varepsilon}_{ij}$ обычно являются разрывными функциями времени, в силу чего не всегда возможно исключить их из механических соотношений материала.

Механические соотношения (1.10) не окончательны, так как в их правые части входят скорости деформаций. Для окончательного представления механических соотношений динамической термопластичности следует решить систему (1.10) относительно скоростей деформаций или относительно скоростей изменения напряжений. Удобнее эту систему решить относительно скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, так как в этом случае она линейна.

Считая, что идет упругий процесс ($F=0$ и $f \leq 0$), из соотношений термоупругости (1.9) определяем скорости изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ для данных скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^{-1} (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}) \quad (1.14)$$

где A_{ijkl}^{-1} — обратный тензор модулей упругости. Далее, по найденным скоростям изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ проверяем условие упругого деформирования

$$\dot{f} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \leq 0 \quad (1.15)$$

Если условие (1.15) соблюдается, то на самом деле идет упругий процесс, и соотношения (1.14) являются решениями системы (1.10). В противном случае деформирование — упруго-пластическое ($g=1$). Систему (1.10) представим в виде

$$\left(A_{ijkl} - H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right) \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{ij} - \nu \delta_{ij} - H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kk}} \varepsilon_{kk} \right) \quad (1.16)$$

Решая (1.16), получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{D_{ij}}{D} \quad (1.17)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_{xxxx} & a_{xyyy} & a_{xxyy} & a_{xxxy} & a_{xyyz} & a_{xyzz} \\ a_{xyxx} & a_{yyyy} & a_{yyzz} & a_{yyxy} & a_{yyyz} & a_{yyzz} \\ a_{xxxy} & a_{xyyy} & a_{yyzz} & a_{yyxy} & a_{yyyz} & a_{yyzz} \\ a_{xyxx} & a_{xyyy} & a_{xyzz} & a_{xyxy} & a_{xyyz} & a_{xyzz} \\ a_{xyxx} & a_{xyyy} & a_{xyzz} & a_{xyxy} & a_{xyyz} & a_{xyzz} \\ a_{xyxx} & a_{xyyy} & a_{xyzz} & a_{xyxy} & a_{xyyz} & a_{xyzz} \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

Для получения детерминантов D_{ij} в выражении D соответствующий столбец ($hk \sim xx, yy, zz, xy, yz, zx$) заменить через

$$\varepsilon_{ij} - \nu \delta_{ij} - H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kk}} \varepsilon_{kk} \right) \quad (1.19)$$

Если материал изотропен, то

$$\begin{aligned} a_{iiii} &= \frac{1}{E} \left[1 + H \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ii}} \right)^2 \right], & a_{iiii} &= -\frac{\nu}{E} + H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ii}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{jj}} \\ a_{ijij} &= 2H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & a_{ijij} &= H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \\ a_{ijji} &= \frac{2(1-\nu)}{E} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right)^2, & (i \neq j, j > k, k \neq i) \end{aligned} \quad (1.20)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала.

2. Рассмотрим плоское напряженное состояние

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (2.1)$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} D &= \frac{2(1+\nu)(1-\nu^2)}{E^2} + \frac{2H(1+\nu)}{E} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \right] \\ D_x &= 2 \left[\frac{1+\nu}{E} + (1+\nu)H \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \right)^2 + H \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \right)^2 \right] B_x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \left[\frac{\nu(1+\nu)}{E} + \nu H \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 - (1-\nu) H \frac{\partial F}{\partial \tau_x} \frac{\partial F}{\partial \tau_y} \right] B_{xy} - \\
 & - 2H \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_x} + \nu \frac{\partial F}{\partial \tau_y} \right) B_{yx} \\
 D_y = & 2 \left[\frac{1+\nu}{E} - (1-\nu) H \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_x} \right)^2 + H \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 \right] B_y - \\
 & 2 \left[\frac{\nu(1+\nu)}{E} + \nu H \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 - (1+\nu) H \frac{\partial F}{\partial \tau_x} \frac{\partial F}{\partial \tau_y} \right] B_x - \\
 & - 2H \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_x} + \nu \frac{\partial F}{\partial \tau_y} \right) B_{xy} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{xy} = & -H \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_x} + \nu \frac{\partial F}{\partial \tau_y} \right) B_x - H \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_y} + \nu \frac{\partial F}{\partial \tau_x} \right) B_y + \\
 & + \left[\frac{1-\nu^2}{E} + H \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_x} \right)^2 + H \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_y} \right)^2 - 2\nu H \frac{\partial F}{\partial \tau_x} \frac{\partial F}{\partial \tau_y} \right] B_{xy}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_x = & \tau_x - \tau \hat{\theta} - H \frac{\partial F}{\partial \tau_x} \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\theta}} \hat{\theta} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{hk}} \varepsilon_{hk} \right) \\
 B_y = & \tau_y - \tau \hat{\theta} - H \frac{\partial F}{\partial \tau_y} \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\theta}} \hat{\theta} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{hk}} \varepsilon_{hk} \right) \quad (2.3) \\
 B_{xy} = & \tau_{xy} - H \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\theta}} \hat{\theta} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{hk}} \varepsilon_{hk} \right) \\
 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{hk}} \varepsilon_{hk} = & \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} \varepsilon_x + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_z} \varepsilon_z - 2 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{xy}} \varepsilon_{xy}
 \end{aligned}$$

Если материал несжимаемый, то

$$\nu = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_z = -\varepsilon_x - \varepsilon_y - 3\varepsilon \hat{\theta} \quad (2.4)$$

В случае слабой зависимости поверхности текучести от скоростей деформаций можно пренебречь членом

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} \quad (2.5)$$

что вносит существенное упрощение в механические соотношения, которые уже приобретут квазистатический характер.

3. В случае одноосного напряженного состояния имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\tau_x - \tau \hat{\theta} - H \frac{\partial F}{\partial \tau_x} \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\theta}} \hat{\theta} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{hk}} \varepsilon_{hk} \right)}{\frac{1}{E} + H \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_x} \right)^2} \quad (3.1)$$

Считая температуру постоянной, уравнение поверхности текучести представим в виде

$$F(z_{ij}, q, z_{ijk}) = F_0(z_{ij}, q) + F_1(z_{ij}, q) a_{ij} z_{ijk} + F_2(z_{ij}, q) a_{ijkl} z_{ijk} + \dots \quad (3.2)$$

где a_{ij} и a_{ijkl} — постоянные симметричные тензоры соответственно второго и четвертого порядков.

При несжимаемости материала с учетом симметрии тензоров a_{ij} и a_{ijkl} для одноосного нагружения имеем

$$a_{ij} z_{ij} = 0, \quad a_{ijkl} z_{ij} z_{kl} = 3z^2 \quad (3.3)$$

где

$$z = \frac{3}{2} (a_{iii} - a_{jjj}) \quad (i \neq j) \quad (3.4)$$

Ограничиваясь первыми тремя членами (3.2) и имея в виду (1.8), (3.3), из (3.1) для одноосного квазистатического нагружения ($\frac{\partial F}{\partial z_{ij}} z_{ij} > 0$) и условиях стационарности температуры получим

$$\dot{z}_x = \dot{z}_x^* + \dot{z}_x^* + \dot{z}_x^* \quad (3.5)$$

где

$$\dot{z}_x = E \dot{z}_x, \quad \dot{z}_x^* = \frac{E z_x \frac{\partial F_0}{\partial z_x}}{\frac{\partial F_0}{\partial q} z_x - E \frac{\partial F_0}{\partial z_x}} \quad (3.6)$$

$$\dot{z}_x^* = \frac{E z_x z_x^* \left(\frac{\partial F_0}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial z_x} - \frac{\partial F_0}{\partial z_x} \frac{\partial F_2}{\partial q} \right)}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial q} z_x - E \frac{\partial F_0}{\partial z_x} \right) \left(\frac{\partial F_0}{\partial q} z_x - E \frac{\partial F_0}{\partial z_x} \right)} \quad (3.7)$$

Новый член в соотношении (3.5) \dot{z}_x^* выражает влияние скоростей деформаций на пластические свойства материала.

Заметим, что при квазистатическом нагружении минимальные принципы термопластической краевой задачи для скоростей деформаций с учетом и без учета влияния скоростей деформаций на механические соотношения не будут отличаться друг от друга. В обоих случаях из всех кинематически возможных полей скоростей деформаций \dot{z}_{ij} только действительные поля \dot{z}_{ij} будут обеспечивать абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2} \int_V \dot{z}_{ij}^2 (G_{ij} - 3\delta_{ij}) - \gamma H \frac{\partial F}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{ij}} \dot{z}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial t} \right) dV - \int_V X_i \dot{u}_i dV - \int_V P_i \dot{u}_i dV \quad (4.1)$$

Это совпадение является следствием того, что в обоих случаях различные по содержанию функции упрочнения H положительны, коэффициенты g обладают одинаковыми свойствами, а любому кинематически возможному полю скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ соответствует единственное поле скоростей изменений напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^0$.

5. Пользуясь понятием поверхности текучести в рамках ассоциированного с ней закона течения, можно аналогичным образом учесть влияние других факторов (магнитного поля, облучения и т. д.) на пластические свойства материала. Например, если тело, изготовленное из магнитоактивного материала, находится в сильном магнитном поле, то можно полагать, что поверхность текучести зависит еще и от напряженности магнитного поля H_i :

$$F(\sigma_{ij}, q, \beta, \epsilon_{ij}, H_i) = 0 \tag{5.1}$$

Тогда при нагружении

$$J = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial H_i} \dot{H}_i > 0 \tag{5.2}$$

для скоростей пластических деформаций будем иметь

$$\dot{\epsilon}_{ij} = H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{hk}} \dot{\sigma}_{hk} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \dot{\beta} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{hk}} \dot{\sigma}_{hk} + \frac{\partial F}{\partial H_i} \dot{H}_i \right)$$

Не вдаваясь в подробности, заметим, что такой учет влияния магнитного поля в выражениях скоростей изменений напряжений (1.17) приводит к добавлению члена $\frac{\partial F}{\partial H_i} \dot{H}_i$.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 16 X 1974

Պ. Մ. ԿԵՐԵՍՅԱՆ

ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԶԵՐԳԱՊԱՏԻՈՒԹՅԱՆ ԱՌՆՁՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԱՐԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ենթադրելով, որ նյութի շտամպայան մակերեսային կախված է զննար-
մագրաների արագություններից, շտամպայան ստացիայում օդերի շրջա-
նակներում առաջարկվում են զերմապլաստիկության դինամիկական առնչու-

* В работе [2] этот минимальный принцип получен при постоянных объемных силах ($X_i=0$). Можно показать, что изменение объема ΔV выразится появлением члена $-\int X_i u_i^0 dv$.

Ստանդարտ. Որպես մասնավոր դեպք դիտարկվում է ստացիոնար ջերմային դաշտում կատարվող քվազիստատիկ բեռնավորումը: Մանրամասն քննարկվում են նաև շարժ և միաառանցք բեռնավորման դեպքերը:

ON CORRELATIONS IN DYNAMIC THERMOPLASTICITY

B. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

Assuming that the surfaces of fluidity of material depend on velocity of deformations, certain dynamic correlations in thermoplasticity are suggested in terms of the association law of flow. A quasi-static loading at constant temperature is considered as a particular case. Plane and uniaxial cases of loading are examined in detail.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Полуп* А. Нейстационарное пластическое деформирование. *Механика*, № 5 (57), 1959.
2. *Мроз* Z., *Рантеcki* B. Variational principles in uncoupled thermoplasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 11, № 11, 1973.

Р. Ю. АМЕНЗАДЕ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ
 ЖИДКОСТИ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ В ТОЛСТОСТЕННУЮ
 ЛИНЕЙНО-ВЯЗКО-УПРУГУЮ ТРУБУ

Рассматривается пульсирующее течение вязкой ньютоновой жидкости в толстостенной линейно-вязко-упругой трубе. При этом труба рассматривается как длинная прямая и незакрепленная. Используются линеаризованные уравнения, которые позволяют рассчитывать характеристики волнового движения. Построены дисперсионные кривые, а также зависимость меры затухания от круговой частоты. Показан значительный эффект учета вязкости стенок трубы. Данная задача моделирует движение крови в крупных кровеносных сосудах (артериях и венах).

Уравнения движения несжимаемой однородной изотропной толстостенной оболочки в цилиндрической системе координат имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu^*} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \\ \rho^* \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu^*} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} - \frac{u_x}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ^* — плотности материала стенок, μ^* — коэффициент Ламе, Ω — давление, а u_r и u_x — соответственно радиальная и осевая компоненты перемещения стенки. Третье уравнение системы (1) представляет условие несжимаемости. Так как нас интересует распространение гармонической волны, то на основании принципа соответствия [2], система (1) в образах Фурье примет вид

$$\begin{aligned} u_r &= m \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{(\omega^*)^2 \mu^*} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \\ u_x &= m \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{(\omega^*)^2 \mu^*} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{u_x}{r} - \frac{\partial u_x}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где $m = \frac{\mu^*}{(\omega^*)^2 \rho^*}$, а ω^* — круговая частота.

Здесь $\bar{v}^2 = \frac{E}{2(1-\nu)}$, $\bar{r} = r$, $\bar{z} = z$ — соответственно комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона.

На основании условия несжимаемости имеем

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \quad (3)$$

Учитывая выражения (3) в первых двух уравнениях системы (2) и исключая функцию \bar{z} , для определения функции φ получим следующее уравнение в частных производных четвертого порядка:

$$L[\bar{z} - mL(z)] = 0 \quad (4)$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (5)$$

где

$$L(\bar{z}_1) = 0, \quad L(\bar{z}_2) = mL(z) = 0 \quad (6)$$

Будем искать \bar{z}_1 и \bar{z}_2 в виде

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= A_1^*(r) \exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ \bar{z}_2 &= A_2^*(r) \exp[i(\omega t - \gamma x)] \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\gamma = \frac{\omega}{c}$ (c — комплексная скорость), действительная часть которой — волновое число, а мнимая — мера затухания возмущения по длине оболочки.

Учитывая выражения (7) в уравнениях (6), а также условия (5) и (3), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} u_x &= \{C_1 \bar{r} J_0(i\gamma r) + C_2 \bar{z} J_0(\beta r) - C_3 i\gamma Y_0(i\gamma r) + C_4 \bar{z} Y_0(\beta r)\} \\ &\quad \exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ u_r &= \frac{1}{r} \{C_1 J_1(i\gamma r) - C_2 J_1(\beta r) - C_3 Y_1(i\gamma r) - C_4 \bar{z} Y_1(\beta r)\} \\ &\quad \exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ \bar{z} &= \frac{1}{\omega^2} \{C_1 J_0(i\gamma r) - C_3 Y_0(i\gamma r)\} \exp[i(\omega t - \gamma x)] \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, J_0 и J_1 — бессе-

левы функции первого рода, Y_2 и Y_1 — бesselевы функции второго рода, а $\beta^2 = -\left(\gamma^2 + \frac{1}{m}\right)$.

Будем считать, что жидкость — ньютоновская и несжимаемая, а ее движение — ламинарное и осесимметричное. Предполагая, что возмущения достаточно малы, выпишем линеаризованные уравнения движения Навье-Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

где ρ — плотность жидкости, μ — динамическая вязкость, p — давление, v_r и v_x — соответственно радиальная и осевая компоненты скорости жидкости.

Решение уравнений (9) проводится тем же способом, что и для компонент перемещений оболочки и при условии ограниченности функций при $r=0$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} p &= A_1 J_0(i\gamma r) \exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ v_r &= \left\{ A_1 \frac{1}{r^{1/2}} J_1(i\gamma r) - i\gamma A_1 J_1(\beta r) \right\} \exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ v_x &= \left\{ A_1 \frac{1}{r^{1/2}} J_0(i\gamma r) - A_2 \beta J_0(\beta r) \right\} \exp[i(\omega t - \gamma x)] \end{aligned} \quad (10)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, J_0 и J_1 — бesselевы функции первого рода, а $\beta^2 = -\left(\gamma^2 + \frac{i\omega}{\nu}\right)$. Обозначим через a и b соответственно внутренний и внешний радиусы оболочки. Для завершения постановки задачи необходимы граничные условия, связывающие движение жидкости и оболочки.

На границе раздела жидкости и оболочки должны выполняться условия непроницаемости и прилипания, которые соответственно имеют вид

$$v_r|_{r=a} = (i\omega) w|_{r=a} \quad (11)$$

$$v_x|_{r=a} = (i\omega) u_x|_{r=a} \quad (12)$$

Там же должны выполняться условия равенства касательных и нормальных напряжений, которые запишем в образах Фурье

$$u \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = u^* \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \quad (13)$$

$$\left(-p + 2u \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = \left(-\Omega + 2u^* \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \quad (14)$$

На внешней границе должно выполняться равенство нулю касательных и нормальных напряжений, что в образах Фурье можно записать в виде

$$u^* \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} = 0 \quad (15)$$

$$\left(-\Omega + 2u^* \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} = 0 \quad (16)$$

Подставив решение уравнений движения жидкости и оболочки граничным условиям (11)—(16), получим систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{aligned} \alpha_{11} A_1 + \alpha_{12} A_2 + \alpha_{13} C_1 + \alpha_{14} C_2 + \alpha_{15} C_3 + \alpha_{16} C_4 &= 0 \\ \alpha_{21} A_1 + \alpha_{22} A_2 + \alpha_{23} C_1 + \alpha_{24} C_2 + \alpha_{25} C_3 + \alpha_{26} C_4 &= 0 \\ \alpha_{31} A_1 + \alpha_{32} A_2 + \alpha_{33} C_1 + \alpha_{34} C_2 + \alpha_{35} C_3 + \alpha_{36} C_4 &= 0 \\ \alpha_{41} A_1 + \alpha_{42} A_2 + \alpha_{43} C_1 + \alpha_{44} C_2 + \alpha_{45} C_3 + \alpha_{46} C_4 &= 0 \\ \alpha_{51} A_1 + \alpha_{52} A_2 + \alpha_{53} C_1 + \alpha_{54} C_2 + \alpha_{55} C_3 + \alpha_{56} C_4 &= 0 \\ \alpha_{61} A_1 + \alpha_{62} A_2 + \alpha_{63} C_1 + \alpha_{64} C_2 + \alpha_{65} C_3 + \alpha_{66} C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{\rho a} J_1(i\gamma a), & \alpha_{12} &= -i J_1(\beta a), & \alpha_{13} &= \gamma^2 J_1(i\gamma a) \\ \alpha_{21} &= \gamma^2 J_1(\beta a), & \alpha_{23} &= \gamma^2 Y_1(i\gamma a), & \alpha_{26} &= \gamma^2 Y_1(\beta a) \\ \alpha_{31} &= \frac{1}{\rho a^2} J_0(i\gamma a), & \alpha_{32} &= -\beta J_0(\beta a), & \alpha_{33} &= \gamma^2 J_0(i\gamma a) \\ \alpha_{41} &= -i \gamma^2 J_0(\beta a), & \alpha_{43} &= -\gamma^2 Y_0(i\gamma a), & \alpha_{46} &= -i \gamma^2 Y_0(\beta a) \\ \alpha_{51} &= -\frac{2i\gamma^2 a}{\rho} J_1(i\gamma a), & \alpha_{52} &= \beta J_1(\beta a) [\beta^2 - \gamma^2], & \alpha_{53} &= -2\rho \gamma^2 J_1(i\gamma a) \\ \alpha_{61} &= \gamma^2 J_1(\beta a) [\beta^2 - \gamma^2], & \alpha_{63} &= -2u \gamma^2 Y_1(i\gamma a), & \alpha_{66} &= -\gamma^2 Y_1(\beta a) [\beta^2 - \gamma^2] \\ \alpha_{64} &= -J_0(i\gamma a) - 2 \frac{\rho \gamma^2}{\rho} J_0(i\gamma a) - \frac{2\rho \gamma^2}{\rho a^2} J_1(i\gamma a) \\ \alpha_{65} &= 2\gamma i \gamma \left[\frac{1}{a} J_1(\beta a) - \beta J_0(\beta a) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{43} &= \omega^2 \bar{\nu}^* J_0(i\gamma a) + 2\bar{\mu}^* \left\{ \gamma^2 J_0(i\gamma a) + \frac{i\gamma}{a} J_1(i\gamma a) \right\} \\
z_{44} &= 2\bar{\mu}^* i\gamma \left\{ \frac{1}{a} J_1(\bar{\beta} a) - \bar{\beta} J_0(\bar{\beta} a) \right\} \\
z_{45} &= \omega^2 \bar{\nu}^* Y_0(i\gamma a) + 2\bar{\mu}^* \left\{ \gamma^2 Y_0(i\gamma a) - \frac{i\gamma}{a} Y_1(i\gamma a) \right\} \\
z_{46} &= 2\bar{\mu}^* i\gamma \left\{ \frac{1}{a} Y_1(\bar{\beta} a) - \bar{\beta} Y_0(\bar{\beta} a) \right\} \\
z_{51} = z_{52} &= 0, \quad z_{53} = 2\bar{\gamma}^2 J_1(i\gamma b), \quad z_{54} = J_1(\bar{\beta} b) [\bar{\gamma}^2 - \bar{\beta}^2] \\
z_{55} &= 2\bar{\gamma}^2 Y_1(\bar{\beta} b), \quad z_{56} = Y_1(\bar{\beta} b) [\bar{\gamma}^2 - \bar{\beta}^2], \quad z_{61} = z_{62} = 0 \\
z_{63} &= -J_0(i\gamma b) [\omega^2 \bar{\nu}^* + 2\bar{\mu}^* \gamma^2] - 2\bar{\mu}^* \frac{i\gamma}{b} J_1(i\gamma b) \\
z_{64} &= 2\bar{\mu}^* \left\{ i\gamma \bar{\beta} J_0(\bar{\beta} b) - \frac{i\gamma}{b} J_1(\bar{\beta} b) \right\} \\
z_{65} &= -2\bar{\mu}^* \left\{ \gamma^2 Y_0(i\gamma b) + \frac{i\gamma}{b} Y_1(i\gamma b) \right\} - \omega^2 \bar{\nu}^* Y_0(i\gamma b) \\
z_{66} &= 2\bar{\mu}^* \left\{ i\gamma \bar{\beta} Y_0(\bar{\beta} b) - \frac{i\gamma}{b} Y_1(\bar{\beta} b) \right\}
\end{aligned}$$

Для нетривиального решения системы (17) имеем

$$\det(z_{ij}) = 0 \quad (18)$$

Таким образом, нами получено дисперсионное уравнение.

Перейдем теперь к вычислению комплексных модулей $\bar{E}(\omega)$ и $\bar{\nu}(\omega)$. Следуя [2]

$$\bar{E}(\omega) = 3 \left(\frac{2}{Y_2} + \frac{1}{Y_1} \right)^{-1}, \quad \bar{\nu}(\omega) = \frac{Y_1 - Y_2}{2Y_2 + Y_1} \quad (19)$$

Предположим, что поведение материала оболочки описывается моделью Фойгта. Для подобного рода модели значение податливости сдвига имеет вид [2]

$$J_2 = \frac{E}{E^2 + \omega^2 \eta^2} - i \frac{\omega \eta}{E^2 + \omega^2 \eta^2}, \quad \text{и} \quad Y_2 = \frac{1}{J_2} \quad (20)$$

Здесь E — модуль Юнга для упругой задачи, η — вязкость материала оболочки.

Для определения Y_1 примем гипотезу Ю. Н. Работнова [3], гласящую, что при описании наследственных свойств реальных сред наиболее

существенную роль играет сдвиговое последствие, тогда как объемное последствие можно считать отсутствующим $K = \text{const}$.

В упругом случае $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, а в вязком $K = \frac{1}{3} Y_1$, откуда по предыдущей гипотезе имеем

$$Y = \frac{E}{1-2\nu} \quad (21)$$

Значение $\nu = 0.5$ (нам используется случай несжимаемости) рассматривать нельзя, ибо это приводит к необходимости деления на нуль. Поэтому в дальнейшем будет принято значение $\nu = 0.49$, что дает очень мало отличающиеся результаты для значений ν , сколь угодно близких к 0.5.

Дисперсионное уравнение (18) выражает зависимость константы пространства γ от частоты ω и параметров системы. Для решения этого уравнения были использованы разложения бесселевых функций от аргументов γa , γb , $\gamma \bar{b}$, поскольку эти величины значительно меньше единицы (так как нас интересуют наибольшие значения скорости распространения пульсовой волны), а для $J_0(\gamma a)$ и $J_1(\gamma a)$ принимались следующие аппроксимации:

$$J_0(\gamma a) \sim J_0(\xi) + \left[\frac{\gamma^2 a^2}{2\xi} \right] J_1(\xi)$$

$$J_1(\gamma a) \sim J_1(\xi) = \left[\frac{\gamma^2 a^2}{2\xi} \right] [J_1(\xi) - \xi J_0(\xi)]$$

где

$$\xi = \frac{\omega^2}{c_0^2}, \quad \zeta = \frac{\omega a^2 \rho}{\eta}$$

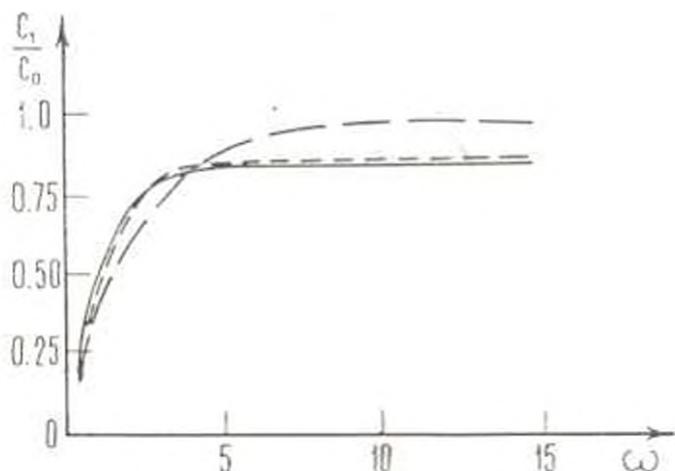
При следующих значениях параметров системы:

$$a = 1.3 \text{ см}, \quad b = 1.5 \text{ см}, \quad \mu = 0.04 \frac{\text{г}}{\text{см сек}}; \quad \rho = \rho^* = 1.05 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

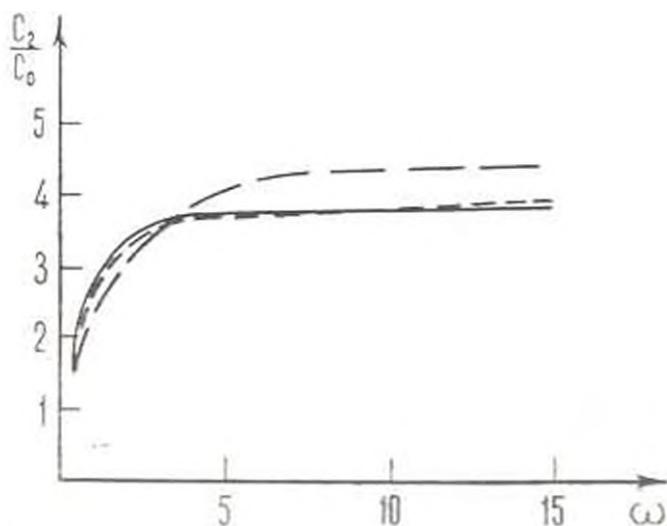
$$E = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}, \quad \nu = 0.49; \quad \gamma = 8.7 \cdot 10^4 \frac{\text{г}}{\text{см сек}}; \quad c_0 = 541 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$$

учитывая в дисперсионном уравнении (18) формулы (19), (20) и (21) и разложения бесселевых функций, итерационным методом численно получены зависимости фазовой скорости $\frac{c_1}{c_0}$ (меньший корень), соответствующей волне Юнга, распространяющейся в жидкости, фазовой скорости $\frac{c_2}{c_0}$ (большой корень), соответствующей волне Ламба, бегущей в оболочке, и

меры затухания e^{-kx} от угловой частоты ω . Здесь $c_0 = \left(\frac{Eh}{2a}\right)^{1/2}$ ($2h = b - a$) определялось по формуле Резалл, k — коэффициент затухания, λ — длина волны.

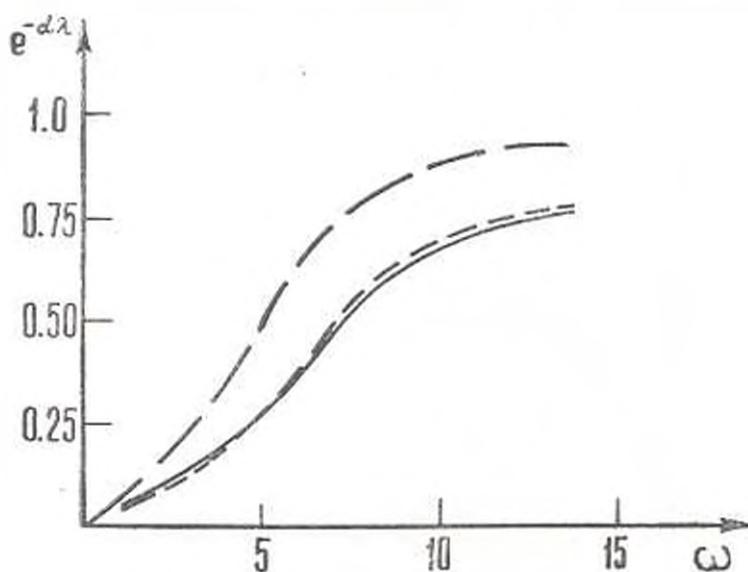


Фиг. 1. Зависимость фазовой скорости Юнга от угловой частоты.



Фиг. 2. Зависимость фазовой скорости Ламба от угловой частоты

Соответствующие кривые приведены на фиг. 1, 2, 3: сплошной линии соответствует пятая модель, мелкой пунктирной линии — случай тонкостенности оболочки, а крупной пунктирной линии — упругой изотропной модели.



Фиг. 3. Зависимость меры затухания от угловой частоты.

Выводы. 1. Численный расчет показывает достаточно значительный эффект вязкости материала стенок на дисперсионные кривые и на меру затухания. Дисперсионные кривые для случаев идеальной и вязкой жидкости практически совпадают.

2. На приведенных графиках очевидна незначительность эффекта толщины оболочки.

Инженер-механик Ордена Трудового
Красного Знамени Государственный
университет им. С. М. Кирова

Поступила 6 I 1975

Գ. ՅՈՒ. ԱՄԵՆԶԱԴԵ

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ԱԼԻՔՏԵՐԻ ՏԱՐԱՄՈՒԹՅՆ ԴԵՄՏՐՆ ՄԱՏՈՒՑՈՒ ԱՌՈՋՊԱՆԱՆ
ՀԱՍՏԱՊԱՏ ԿՈՂՈՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ՊԱՐՈՒՆԱԿԱՆ ՄԱՏՈՒՑՈՒ ԶԵՂՈՒՆՈՒԹՅԱՆ

Ս. Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Վ

Առաջարկվում է մտղել, որը նկարագրում է հարմունիկ ալիքի տարածումը
բնական մածուցիկ առածրական հաստապատ խողովակում պարունակված
ձյուտանյան հեղուկում:

ON PROPAGATION OF HARMONIC WAVES IN VISCOUSE
FLUID WITHIN A THICK-WALLED VISCO-ELASTIC TUBE

K. Ju. AMENZADE

S u m m a r y

A model is developed to describe the propagation of harmonic waves traveling through a Newtonian fluid within a cylindrical thick-walled visco-elastic tube.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. New-York, Dover Publ., 1944.
2. Бленд Л. Теория линейной вязко-упругости. «Мир», М., 1965.
3. Работнов К. И. Получасты элементов конструкций. «Наука», М., 1966.