ՄԵԽԱՆԻԿԱ МЕХАНИКА MECHANICS 1975

20340406002 ЭНСОНРЗИРЬЬНИ ЦАЦЭВИНОВИ ССР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա

XXVIII. Nº4, 1975

Мехацика

А. О. ВАТУЛЬЯН, Т. В. КОРЕНЕВА, М. Г. СЕЛЕЗНЕВ

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН КОЛЕБЛЮЦИМСЯ ШТАМПОМ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

В условнях плоской деформации рассматривается вибрация траневерсально-изотропного слоя толщиной 2h под действием вибрирующих штампов. В слое плоскость у=0 является изотропной.

Штампы ширины 2a приложены к слою симметрично относительно срединной поверхности. Предполагается, что в области контакта трение отсутствует, а штампы совершают либо встречные колебания (сжатие), либо односторонние (изгиб). В работе на основании решений интегральных уравнений, к которым сводятся краспые задачи, построены приближенные формулы, описывающие контактные напряжения под штампами и поведение поверхности слоя вне штампов.

§ 1. Свеление красвых залач к интегральным уравнениям. Свойства ядер интегральных уравнений

Уравнениями краевых задач являются известные уравнения движения Коши с определяющими уравнениями вида (1.1) [1].

$$z_{x} = c_{11}z_{x} + c_{12}z_{y}$$

$$z_{y} = c_{11}z_{x} + c_{22}z_{y}$$

$$z_{xy} = c_{33}\gamma_{xy}$$
(1.1)

где с_{ії} — упругие постоянные.

Граничные условия смешанных задач представимы п случаях сжатия и изгиба соответственно в форме

$$a_{y}|_{y=-h} = \begin{cases} T(x) e^{-ix} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$
(1.2)

$$1 = \begin{cases} \pm T(x) e^{-i \cdot t} & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$(1.3)$$

гас ю — частота колебаний штампа.

Так ках изучается установившийся режим, го есть во всех точках деформация протекает одинаково во времени, перемещения представимы в виде

$$u = e^{-i\omega t} u_0(x, y), \qquad v = e^{-i\omega t} v_0(x, y)$$

Применением обобщенного интегрального преобразования Фурыс к уравнениям движения сплошной средь каждая красвая задача приводится к интегральному уразнению с разностным ядром относительно контактных давлении вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(x-i) q(i) di = 2\pi f(x) \qquad |x| \le a$$
(1.4)

Функция /(x) характеризуст форму штампа. Ядро интегрального урависния представимо в форме

$$k(x) = \int \mathcal{K}(u) e^{iux} du \qquad (1.5)$$

Элесь в случае нагиба

$$K(u) = \frac{(l_1^2 - l_2)(a_3u^2 - k)(a_3 + a_2)}{T_1 - T_2}$$
(1.6)

причем

$$T_1 = l_1 ext{th} l_1 [l_1^2 a_1 - k - a_1^2 (a_2^2 - a_1 a_2 - a_3)] (l_2^2 a_1 - k - a_3 a_1^4)$$

а Таполучается из Т- заменой ст на la

$$l_i = r_i h, \quad k = \frac{l_{10}^{10} h^2}{c_{22}}, \quad a_1 = \frac{c_{33}}{c_{22}}, \quad a_2 = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad a_3 = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad z = kc_{22} \cdot 10^{-6}$$

положительные кории уравнения

$$\begin{vmatrix} i^{2}s_{1} + s_{2} & -i \\ -i & i^{2}s_{3} + s_{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$(1.7)$$

$$s_{1} = \frac{c_{33}}{iu(c_{12} - c_{33})} \quad s_{2} = \frac{p^{(0)^{2}} - c_{11}u^{2}}{iu(c_{12} - c_{33})}, \quad s_{2} = \frac{c_{22}}{iu(c_{12} + c_{33})}$$

$$s_{1} = \frac{c_{22}}{iu(c_{12} + c_{33})}$$

В случае сжатия K(u) получается из (1.6) заменой thu на cthu.

$$k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i t_k x} + O(e^{-ix})$$
(1.8)

где >0 (k=1,...,p,z>0) полюса K(u), а в нуле имеет логарифмическую особенность. Осцилляция ядра затрудияет применение изнестных методов, которые обычно используются для решения сингулярных инте-

4

гральных уравнений. Исследование настоящего интегрального уравнения невозможно без детального изучения кривых нулей и полюсов функции K(u), зависящей от k, c_1 , c_{12} , c_{22} , c_{23} . В настоящей работе они изучаются но следующей схеме: фиксируются c_{ij} и изменяется 4. Построение нулен и полюсов (нейтральных кривых) как функций 8 было осуществлено с ис мощью ЭВМ «Одра-1204» методом половинного деления. Для следующих значений нараметров в случае сжатия $c_{11} = 2.69 \cdot 10^{6}$; $c_{23} = 0.4 \cdot 10^{6}$; $c_{12} = 0.92 \cdot 10^{7}$ и и случае изсиба $c_{11} = 2.96 \cdot 10^{6}$; $c_{12} = 0.92 \cdot 10^{7}$ они приводятся на фиг. 1. 2 соответственно, где сплошной линией обозначены линии полюсов, а прерывистой – нулей



Фиг. 1.





Несложным анализ функции K(u) позволяет установить. что она ямеет счетное множество нулей и полюсон, стущающихся лишь на бесконечности. С увеличением частоты число нулен и полюсов, лежащих на вещественной осн, как правило, растет. Изпестно, что нейтральные кривые пересекакот ось k под прямым углом, но ведут себя по-разному в окрестности точек пересечения. В зонах I и III кривые подходят к оси k с положительной произподной и имеет место чередование пулен и полюсов. В зоне II кривая полюсов имеет отрицательную производную и нарушается чередование нулей полюсов: более тото, с постом k в этой з не число полюсов уменьшается на 1.

Представленные на графиках нейтральные кривые позволяют правильн распорядиться контуром Ф. расположение которого обеспечивает выполнение условий изучения. Именио, контур Ф должен огибать в зонах 1. ПП польжительные полюсы снизу, а отрицательные—сверху. В зоне П расположение гаково: наимены шй по мо, улю полюс огибается противоположным бразом. Вишеперечисленные условия позволяют сделать выпод об однореачной разрешемости интегрального уравнения [2, 3].

2. Построение приближенного решения интегрального уравнения с помощью приближенной факторизации

Нитег., альног уравнение вида (1.4) с помощью интегрального преобрав нания Фурье приводится к системе двух интегральных урависний Фредг льма 2-го рода относительно функций X (эдесь и далее сохранены с бозначения работы [4])

$$X^{+} = G^{-} X^{-} 4 \tag{2.1}$$

где операторы С в А имеют вид

$$G = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{K_{+}(\zeta) (\zeta - u)}{K_{+}(\zeta) (\zeta - u)} f^{d}$$
(2.2)

$$A = \left[\left| \frac{e^{-i\pi z}}{K_{+}(\zeta)(\zeta + u)} - \frac{e^{-i\pi z}}{K_{-}(\zeta)(\zeta - u)} \right| + (\zeta) d \right]$$
(2.3)

$$f(\zeta) = \int_{-u}^{d} e^{iu\zeta} f(u) \, du \tag{2.4}$$

Контур – делит комплексную плоскость на 2 части: верхнюю E и нижнюю E. K, (u) и K. (u) функция, регулярные и не имеющие корней в E и E соответственно

$$K(u) = K_{-}(u) K_{-}(u); \quad K_{-}(-u) = K_{-}(u)$$

Деформируя контур интегрирования 6 в 1', лежащий строго в нижней полуалоскости, сводим решение системы (2.1) к решению консчной линейной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных $X^{\pm}(-z_{4})$ $(k=1, ..., n; z_{4})$ — положительные нули K(n)), разрешив которую, при-

6

ходим в системе вида (2.1), но с пругим выражением для .4 . Последияя система может быть решена методом последовательных приближений.

Приведенные в [4] формулы предполагают умение факторизовать K(5) относительно б. Однако, достаточно [5] провести приближенную факторизацию для каждого фиксированного k.

Строится функция, которая в отличие — K(u) регулярна и не имеет нулей на пещественной оси

$$f(u) = K(u) + u^{2} + B^{2} \prod_{i=1}^{n} (u^{2} - s_{i}^{2}) \prod_{k=1}^{n} (u^{2} - s_{i}^{2}) \prod_{k=1}^{n} (u^{2} - s_{i}^{2}) = \prod_{k=1}^{n} (u^{2} + s_{k}^{2}) \quad p > n$$
(2.5)

где и z_k – соответственно положительные полюсы и нули h(x) f(u) – непрерывная на $[0, \infty)$ функция, не имеющая нулен на пещественн оси пограниченная на бесконечности. Она с любой степенью точности м жет быть приближена полиномами Бернштейна [6], отображенными на вси вещественную полуось заменой х = $u^-(u^- + c^-)^{-1}$. После акон аппроксимации функция K(u) уже легко факторизуется и можно строить приближенное решение.

В качестве примера была рассмотрена простейшая аппрокенмация К(и) функциямя

$$K^*(u) = A \left(u^* - z_1^2 \right) \left(u^2 - \zeta_1^2 \right)^{-1} \left(u^* - B^2 \right)^{-1/2}$$
(2.6)

$$K^*(u) = A \left(u^2 - z_1^2 \right) \left(u^2 + z_2^2 \right) \left(u^2 - z_1^2 \right)^{-1} \left(u^2 - z_1^2 \right)^{-1} \left(u^2 + B^2 \right)^{-1/2} (2.7)$$

в случае сжати: и изгиба соответственно.

Параметры A, B, z, находились из условий совпадения $K^*(a)$ и K(a) в нуле и на ∞ .

Для плоского штампа и аппрокенмации вида (2.6), (2.7) были получены приближенные формулы для функций φ (x), описывающих поледения поверхности слоя вне области контакта

$$\frac{(x)}{4} = \frac{1}{2} \left[X^{-}(z_1) + X^{-}(z_2) \right] \frac{\sqrt{A} \left(z_1 - z_1 \right)}{\sqrt{B + \tilde{E}_1}} e^{-z_1 - z_1}$$
(сжатис) (2.8)

$$\frac{\Psi_{-}(x)}{4} = \frac{i |\overline{A}|}{2 (\zeta_{2} - \zeta_{1})} \left[|X^{+}(\zeta_{1}) + X^{-}(\zeta_{1})| \frac{(-1)}{|\overline{B} - i_{1}|} + [X^{+}(\zeta_{2}) + X^{-}(\zeta_{2})] \frac{(-1)}{|\overline{B} - i_{2}|} e^{-i\zeta_{2}(u-v)} \right]$$
(ABPA6) (2.9)

и для напряжении в области контакта

$$\frac{q(x)}{c_{22}^{6}} = K^{-1}(0) - \left[\frac{z_{1}^{2} - z_{1}^{2}}{Az_{1}^{2}}\right] B^{2} + z_{1}^{2} + \frac{X^{+}(-z_{1}) - X^{-}(-z_{1})}{1 A}(z_{1} - z_{1}) B + iz_{1} - \cos z_{1}x \quad (\text{сжатие}) \quad (2.10)$$

$$\frac{q(x)}{c_{2}i^{2}} = K^{z-1}(0) - \left| \frac{(z_{1}^{z} - z_{1}^{2})(z_{1}^{z} - z_{2}^{2})}{Az_{1}(z_{1}^{z} + z_{2}^{2})} + \overline{B}^{z} \right| + \frac{1}{Az_{1}(z_{1}^{z} + z_{2}^{2})} + \frac{B^{z}}{B} + \frac{1}{(z_{1}^{z} - z_{1})(z_{1}^{z} - z_{1})} + \frac{1}{(z_{1}^{z} - z_{2})(z_{1}^{z} - z_{2})} + \frac{1}{B} + \frac{1}{Az_{2}^{z}(z_{1}^{z} - z_{2})} + \overline{B}^{z}} + \frac{1}{Az_{2}^{z}(z_{1}^{z} - z_{2})} + \overline{B}^{z}} + \frac{1}{Az_{2}^{z}(z_{1}^{z} - z_{2})} + \overline{B}^{z}} + \frac{1}{(z_{2}^{z} - z_{2})} +$$

причем при х - a q(х) выражается следующим образом:

$$\frac{q(x)}{e_{a}r_{a}} = -\frac{r_{a}}{r_{a}} \frac{z}{z_{a}} (-z_{a}) \frac{1}{1-8\pi A} \left(\frac{1}{1-a-x} + \frac{1}{1-a-x}\right)$$
(2.12)

здесь 3 - слубина внедрения штампа.

§ 3. Численный пример

Были проведены численные расчеты в случае ажатия и изгиба с аппроксимацией указанного вида при k=2 для a=1, 2. 10

A 2.032, B 0.535, $z_1 = 0.9035$, 2.019 (cwarue) A - 1.877, B = 10, $z_1 = 1.403$, $z_2 = 1.311$, $z_2 = 0.684$, $z_2 = 2.47$ (waru6)

$$\frac{c(x)}{c_{22}\delta} = d_1 + d_2 \cos z_1 x - d_1 \operatorname{ch} x \qquad (3.1)$$

$$\frac{\sigma_{1}(x)}{2} = b_{1}e^{-\frac{1}{2}b_{0}$$

Результаты расчетов приведены в таблицах и на графиках (строки 1, 2, 5 г фиг. 3 — жа не, 3, 4, 6 и фиг. 4 — изгиб). На фиг. 3—4 обозначено сплошной линией Re $\frac{a(x)}{c_m^2}$ (a = 10), пунктирной $\lim_{c \to 2} \frac{q(x)}{c_m^2}$ (a = 10), штрихпунктирной — Re $\frac{q(x)}{c_m^2}$ (a = 2).

Получаем, что от штамна удаляются в разные стороны упругие волны с неубывающей амплитудой, причем число воли ранно числу полюсов K(u) (в случае сжатия — 1 волна, в случае изгиба — 2 волны). Скорость, амплитуда и сдвиг фалы каждон волны могут быть легко определены из приведенных формул.









Таблаци

N	a	d_1	d3	dy.	b_1	b_2
1	1	-1.316	1.313 - 1.2597	0	-1.176+0.1424	ð
2	2	-1.316	1.256 3.0041	0	1,672 0,981	U
3	1	-1.493	-2.937 - 0.26i	-2.536-0.7027	-2.614 0.0351	2.813-0.55%
4	2	4.493	4.178-3.846	2.793-1.6157	-3.0 0.701	-2,00 -1,02
5	IO	1.316	8.855-10.04%	0		
6	10	-4.493	-5 8961.4481	(10.115-0.0668)× 10 ⁺⁺⁺		

Замечание 1. Приведенные формулы справедливы для достаточно больших а (в случае малых а можно применить метод «больших л» [7]).

Замечание 2. В пастоящей работе изучены липь динамические составляющие механической задачи о вибрации штампа. Полное решение механической задачи представляет сумму статической и динамической задач. Решение статической задачи можно получить известными методами, изложенными в различных обзорах (напр., [8]).

Авторы пыражают глубокую благодарность В. А. Бабешко за руководство работой

НИИ механики и прикладной математики Ростовского государственного университета

- 38 -

Поступнаа 11 XI 1074

Ա. Օ. ՎԱՏՈՒԼՅԱՆ, Տ. Վ. ԿՈΡԽՆԵՎԱ, Մ. Գ. ՍԵԼԵԶՆՅՈՎ

SUSURDER PERFORM UPPASERS THE REPORT OF A PARTIE AND THE PART OF A PARTICULAR PARTIES OF A PART

Udyngmid

Ուսումնասիրվում է տրանսվերսալ իզոտրոպ շերաի եզրի վրա որոշմի քրքոման Հարք խնդիրը։ Քննարկվել են սիմետրիկ և շեղ սիմնարիկ դնաբերը։

Ուսումնասիրվել է այն ինտեգրալ հավասարումը, որին Հանդեցվում հն դիտարկված նգրային խնգիրները։ Գիտարկված դեպրերի համար կառուցվել ինտեգրալ հավասարման մոտավոր լուծումները։ Բերվում է ստացված ար յունըների նվային վերլուծունյունը։

WAVES EXCITATION BY A VIBRATING PUNCH IN AN ANISOTROPIC LAYER

A. O. VATULIAN, T. V. KORENEVA, M. T. SELEZNEV

Semmary

A plane problem of vibration of rigid punches on the surface of a transversal isotropic layer is studied; a symmetric and an asymmetric cases are examined.

An integral equation to which boundary value problems are reduce is considered; the approximate solutions are obtained and a numerical analysis of the results obtained is given.

ΛΗΤΕΡΑΤΥΡΑ

1. С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. П.Г.Г.А. М., 1950.

 В. А. О единственности решении интегральных уравновия сках контактимх. Дока: АН СССР, т. 210. № 6, 1973.

- 3. Бабешко В. А. Оп условиях получения для упругого глоя. Дока. АН СССР. 1. 213. № 3, 1973.
- 4 Бабешко В. А. К теории динамичествая конститных задач Дока. АН СССР. т. 201. № 1, 1971.
- 5. Бобешко В. А. Новый аффективные мето. решения динамических контактных зален-Докл. АН СССР. т. 217, № 4, 1974.
- 6. Берсвин И. С., Жидков И. И. Методы выянслений. 1. 1. Паука М., 1966.
- 7. Александров В. М. Асныятотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, т. 32. вып. 4, 1968.
- 8. Абрамян Б. Л. Обзор результатов, полученных по контактным задачам в АН Арч ССР. Контактиме задачи и их инженерные приложения. НИНМАШ, М., 1973 (доклады конференции).

Մեխանիկա

XXVIII, Nº 4, 1975

Механика

П. А. МКРТЧЯН

ФЛАТТЕР ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПОТОКЕ СЛАБОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА ПРИ ДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В настоящей работе рассматривается задача устойчивости проводящей пластинки, обтекаемой сверхзпуковым потоком слабопроводящего сжимаемого певязкого нонизированного газа в случае действия как продольного, так и поперечного магнитного поля.

Н. основе уравнений магнитоупругости [1, 2] и уравнений магнитогазодинамики [2] определяются аналитические выражения для критических скоростей флаттера.

Неследуется влияние интенсивности заданного магнитного поля, а также проводимости газа и материала пластинки на критическую скороста флаттера.

1. Пусть бесконечная язотропная пластинка постоянной голщины 2h, с товленная из материала с конечной электропроводностью, отнесена к ортогональным координатам (х. q, z). Пластинка соприкасается с одной т ны с вакуумом, в с другой тороны обтекается сверхзвуковым потоком лаб оводящего сжимаем и невязкого нонизированного газа с невозмущенной скоростью U, направлениюн вдоль осн ох. На иластинку действус нешее магинтное поле с заданным вектором магнитной напряженности O, H_{0x}),

Принимается, что магнитные и диалектрические проницаемости газа в материала пластинки равны единице.

Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются: молулем упругос и Е. коэффициентом Пуассона V. плотностью р. лектропроводпостью σ.

В отношении пластинки принимается гипотеза магнитоупругости тоиких тел. [1, 2], которая для данной системы координат аналитически занишется в следующем виде:

$$u_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w (x, y, t)$$

$$e_x = \varphi(x, y, t), \quad e_z = \varphi(x, y, t), \quad h_z = f_z x_z y, t)$$
(1.1)

Здесь и u(x, y, t), v = v(x, y, t), w w(x, y, t) искомые тангенциальные и нормальное перемещения точек средниной поверхности пластинки, (u_x, u_y, u_z) перемещения произвольной точки пластинки, v, ψ искомые тангенциальные компоненты индуцированного электргческого поля, f — искомая нормальная компонента индуцированного магнитного поля во внутревной области (в пластинке).

Принимается также, что упругие, газодинамические и электромагнитные возмущения настолько малы. что можно пользоваться липейными уравнениями.

Для рассматриваемой задачи линеаризованные дифференциальные уравнения, описывающие движение попизированного газа в случае изотермического состояния, записываются в виде [3]

grad div
$$v = \frac{1}{a_0^2} \left[\frac{d}{dt} v - \frac{1}{\psi_0 c^2} (v \times H_0) - \tilde{H}_0 \right]$$

$$\frac{dP}{dt} + a^2 \gamma \quad (1.2)$$
rot $\tilde{h}^{(1)} = \frac{4\pi_0}{c^2} (\tilde{v} \times H_0), \quad \operatorname{div} \tilde{h}^{(1)} = 0 \quad (z - h)$

где — + Ugrad, h^{1} и H_{0} векторы напряженности магнитного поля в возмущенном и невозмущенном состояниях соответственно, и нектор скорости, плотность, z_{0} проводимость, p избыточное данление газа. a_{0} — скорость звука для невозмущенного потока, с электродияамическая постоянная.

Дифференциальные уравнения маглитоупругих колебаний пластинкя, полученные на основе гипотез маглитоупругости тонких тел, имеют вид [1, 2]

$$D\Delta u_{m} + \frac{2zh^{3}H_{0x}}{3c}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{2zh^{3}}{3c^{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(H^{2}\Delta w - -H_{0}\frac{\partial}{\partial y^{2}}\right) + \frac{2zhH_{0x}}{c}\left(1 + \frac{H_{0x}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - 2zh\frac{\partial}{\partial t^{2}} = Z + \frac{2zhH_{0x}}{c}\left(1 + \frac{H_{0x}}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) - 2zh\frac{\partial}{\partial t^{2}} = Z + \frac{2zhH_{0x}}{c}\left(1 - \frac{v^{2}}{2}\right) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{1}{r} + \frac{H_{0x}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{h^+ - h^-}{2h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{1}{r} + \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{h_y^+ - h^-}{2h}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Здесь h_{x} , h_{z} и h_{z} , h_{z} — значения компонент напряженностей тангенциального индуцированного магнитлого поля на поверхностях пластинки z = h и z = -h.

Выражение для нормальной состанляющей внешней поверхностной нагрузки Z в рассматриваемой задаче имеет пид [4—5]

$$Z = -2\rho h\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - p \tag{1.4}$$

гле : - коэффициент линейного затухания.

Системы (1.2) и (1.3) должны рассматриваться совместно с уравнениями электродинамики во пнешней области для вакуума [2]

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(2)} = \frac{1}{c} \frac{de^{(2)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{e}^{(2)} = 0$$

$$\operatorname{ot} \vec{e}^{(2)} = -\frac{1}{c} \frac{de^{(2)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(2)} = 0 \quad (z - -h)$$

$$(1.5)$$

где $h^{(2)}$ и $e^{(2)}$ соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей в области z < -h.

Решения приведенных уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) должны удовлетворять общим граничным условиям на колеблющихся поверхностях пластинки. Условие непроницаемости имеет вид

$$v_{z} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = h \tag{1.6}$$

Отметим, что в системе (1.2) первое уравнение является независимым

и если известно его решение 0, то можно построить решение остальных уравнении. Иначе говоря, гидродинамическая и электромагнитная задачи застично распались. В случае, когда заданное магнитное поле перпендикулярно срединной поверхности пластинки, из (1.3) следует, что индуцироынное электромагнитное поле не входит в уравнение движения пластинки (первое уравнение системы (1.3)). Следовательно, при действия поперечного магнитного поля задача устойчивости иластинки приводится к решению первого уравнения (1.3) совместно с первым и вторым уравнениями истемы (1.2) с граничным условием (1.6), гак как остальные уравнения. Граничные условия для компонент электромагнитного поля в случае действия продольного магнитного поля принимаются в следующем виде.

$$h_{z}^{(1)} = f(x, y, t) \quad \text{при} \quad z = h$$
 (1.7)

 $k_{t}^{(n)} = f(x, y, t), \quad e_{t}^{(n)} = c(x, y, t), \quad e_{y}^{(n)} = b(x, y, t) \quad \text{mpr} \quad z = -h$

Таким образом, искомая задача устойчивости пластинки свелась к совместному интегрированию систем уравнений (1.2), (1.3), (1.5), решения которых должны удовлетворять граничным услониям (1.6), (1.7) и начальным условиям

$$w = \omega_0 \Phi(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w_1 \Psi(x, y) \quad \text{ири} \quad t = 0$$
(1.8)

2. Решения уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) предстаним в виде

$$F(x, y, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n}(z, t) \exp[i((zx + \gamma_{n}y))]$$

$$R(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{n}(t) \exp[i((z_{k}x + \gamma_{n}y))]$$
(2.1)

Здесь — на таки паравлениям осей ох и оу.

Подставляя (2.1) в (1.2), (1.3), (1.5) и применяя преобразовани: Лапласа по переменной 4 [6], с учетом (1.4), (1.8) для определения преобразованного электромагнитного, магнитогазодинамического поля и преобразованного прогиба пластинки получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

в случае действия поперечного магнитного поля

$$\begin{bmatrix} Q_{kn}^{2} + s^{2} + (\varepsilon + 2\beta_{0}Q_{kn}) s \end{bmatrix} w_{kn}^{*} = a_{kn} (\varepsilon + s + 2\beta_{0}Q_{kn}) + \\ + b_{kn} - \frac{1}{2sh} p_{kn}^{*}(h) \\ i\xi_{k} \frac{dv_{knz}}{dz} - i + v_{kn} - \left[\xi_{k}^{2} + \frac{g_{k}^{2}(s)}{a_{0}^{2}} + mb_{k}(s) \right] v_{knx}^{*} = 0 \\ i\eta_{n}^{*} \frac{dv_{kn}^{*}}{dz} - \xi_{k}\eta_{n}v_{knz}^{*} - \left[\gamma^{2} - \frac{g_{k}^{2}(s)}{a_{0}^{2}} + mb_{k}(s) \right] v_{knz}^{*} = 0 \\ \frac{dv_{kn}}{dz^{2}} - \xi_{k}\eta_{n}v_{knz}^{*} - \left[\gamma^{2} - \frac{g_{k}^{2}(s)}{a_{0}^{2}} + mb_{k}(s) \right] v_{knz}^{*} = 0 \\ \frac{dv_{kn}}{dz^{2}} + i + \frac{dv_{kn}}{dz} - \frac{dv_{knz}}{dz} - \frac{f_{k}^{*}(s)}{a_{0}^{2}} v_{knz}^{*} = 0 \\ \theta_{k}(s) p_{kn}^{*}(z) + a_{k0}^{*} \left(\frac{dv_{knz}}{dz} + i + v_{knz}^{*} + i + v_{knz}^{*} + i + v_{knz}^{*} \right) = 0 \end{aligned}$$

 $\left| \frac{\mathcal{L}_{sa}}{\mathcal{L}_{sa}} - s^* - s \right| = \left| \frac{\mathcal{H}_{0r}}{ca^2} \left(1 + \frac{m}{3} \right) \right| = \frac{s\mathcal{H}_{0r}}{ca^2}$ $=\frac{-h v_{in} H_{0n}}{2} \left(\xi_k \varphi_{kn}^* - \tau_{in} \psi_{kn}^*\right) = b_{kn} - \frac{1}{2nh} p_{kn}^* (h) +$ $+ a_{ks} \left[z + s + \frac{z H_{hs}^2}{a \sigma^2} \left(1 + \frac{h^k \eta_k^2}{3} \right) \right]$ $k_{kn} = -\frac{is}{i}f_{kn} = 0$ $\frac{sH_{0,1}}{c}w = \frac{h_{kn}-h_{kn}}{2h} - \frac{4-a_{kn}-b_{n}}{c^2}$ $h_{kny} = \frac{4\pi}{k_{kny}} = \frac{h_{kny} - h_{kny}}{2t}$ $i = i^{(1)} - \frac{dh_{knz}^{(1)}}{dz} = 0, \quad i \epsilon_k h_{knz}^{(1)} + i \gamma_{\mu} h_{knz}^{(1)} + \frac{dh_{knz}^{(1)}}{dz} = 0$ (2.3) $\vec{n}_{c}h_{kay}^{(1)*} = \vec{n}_{c}h_{kay}^{(1)*} = -\frac{4\pi z_{0}H_{0}}{v^{2}}, \quad \frac{dh_{kax}^{(1)*}}{d*} = -\frac{4\pi z_{0}H_{0x}}{v^{2}}v_{kaz}$ $A_{1} \frac{dv_{k+1}}{dv_{k}} - I_{k} \frac{dv_{k}}{dv_{k}} - \left[I_{k} - \frac{\theta_{k}^{2}(s)}{dv_{k}} \right] v_{k+1} = 0$ $i\gamma_{in}\frac{dv_{kn}}{dr}$ - $i\gamma_{in}\frac{b_k^2(s)}{a^2} - m\theta_k(s)$ = 0 $\frac{d^2 v_{knx}^2}{ds_{nn}^2} = \frac{d v_{knx}^2}{ds_{nn}^2} - i \eta_{p_1} \frac{d v_{kny}^2}{ds_{nn}^2} = \left[m \theta_k(s) - \frac{\theta_k^2(s)}{\alpha} \right] v_{kns}^2 = 0$ $\theta_{k}(s) p_{kn}(z) - a_{kn}^{2} \left[\frac{dv_{kn}}{dz} + i\xi_{kn} v_{kn} + iz_{knn} v_{knn} \right] = 0$ $\frac{d^2 h_{kn_1}^{(2)}}{ds^2} = \eta_{1kn}(s) h_{kn_2}^* = 0, \quad \frac{ds^2}{ds^3} = \eta_{1kn}(s) e_{kn_1}^{(2)*} = 0$ $\frac{d^2 e_{kny}^{(2)}}{dz} = q_{kny}(s) e_{kny} = 0, \qquad -\frac{d}{dz} = -\frac{d^2}{dz}$ $\frac{dh_{kn,i}^{(2)^*}}{\frac{dk^2}{dk^2}} = \frac{s}{2} \frac{e^{(2)^*}}{e^{kn_i}} + \nu_{in} h_{kn,i}^{(2)^*} = \frac{s}{2} e^{(2)^*}_{kn,i}$

В (2.2), (2.3) $\Omega_{kn} = (z_k - z_n)$ і D.25h – частота собственных колебаний пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля

в случае деиствия продольного магнитного поля

$$a_{kn} = \frac{4\pi}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x, y) \exp\left[-i\left(\hat{z}_{k}x + \hat{z}_{n}y\right)\right] dxdy$$

$$b_{kn} = \frac{4\pi}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x, y) \exp\left[-i\left(\hat{z}_{k}x + \hat{z}_{n}y\right)\right] dxdy$$

$$F_{kn}(z, s) = \int F_{kn}(z, t) \exp\left(-st\right) dt$$

$$R_{kn}(s) = \int R_{kn}(t) \exp\left(-st\right) dt$$

$$= \frac{4\pi}{3c^{2} |2D_{t}h|} \cdot \quad b_{k}(s) = s - i\hat{z}_{k}U, \quad m = \frac{z_{0}H_{0}^{2}}{z_{0}ac^{2}}$$

$$v_{1kn}^{2}(s) = \xi - v_{n}^{2} - \frac{s^{2}}{c^{2}}$$

Соответствующие граничные условия (1.6) и (1.7), с учетом (2.1), после преобразования принимают вид

$$\begin{aligned}
\nu_{knz} &= (s + i s_k U) \, w_{kn} + u_{kn}, &= f_{kn} \quad \text{npn} \quad z = h \\
h_{knz}^{(2)^*} &= f_{kn}^*, \quad e_{knz}^{(2)^*} - \varphi_{kn}^*, \quad e_{kny}^{(2)^*} = 1 \quad \text{npn} \quad z = -h
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Найдя общее решение системы (2.2), (2.3), удовлетворяя граничным условиям (2.4) и условиям затухания возмущений на бесконечности, определим постоянные интегрирования и, следовательно, преобразованное электромагнитное, маснитогазодинамическое поле и преобразованный прогиб пластинки:

при действан поперечного магнитного поля

$$w = \frac{\Delta_{kn}^{0}(s)}{(s)}, \qquad v_{knz} = w_{kn} \exp\left[-i\gamma_{inkn}(s)(z-h)\right]$$

$$v_{knr} = \frac{z_{k} z_{0kn}(s) w_{kn}}{\frac{n}{kn}(s)} \exp\left[-i\gamma_{inkn}(s)(z-h)\right]$$

$$\frac{-i\gamma_{inknn}(s)}{kn}(s) \exp\left[-i\gamma_{inknn}(s)(z-h)\right] \qquad (2.5)$$

$$p_{kn}^{*} = \frac{a_{n}^{*} - a_{n}^{*}}{(z-h)} \exp\left[-i\gamma_{inknn}(s)(z-h)\right]$$

2 Известия АН Армянской ССР. Мехацика, № 4

при действии продольного магнитного поля

$$w_{kn}^{*} = \frac{\Delta_{kn}^{*}(s)}{\Delta_{1kn}(s)}, \qquad f_{kn}^{*} = \frac{ic}{s} \left(\gamma_{n}\gamma_{kn}^{*} - \gamma_{n}\gamma_{kn}^{*}\right)$$

$$\varphi_{kn}^{*} = -\frac{ic}{D_{kn}(s)} \left\{A_{kn}(s) z_{1kn}(s) D_{kn}(s) + i_{11kn}(s) B_{kn}(s) + i_{11kn}(s) B_{kn}(s) + i_{11kn}(s) B_{kn}(s) + i_{11kn}(s) B_{kn}(s) + i_{11kn}(s) D_{kn}(s) D_{kn}(s) D_{kn}(s) + i_{2kn}(s) D_{kn}(s) D_{kn}(s) \left[\gamma_{kn}^{*} A_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right] - i_{2kn}^{*} \left[\gamma_{1kn}(s) B_{kn}(s) + i_{2kn}^{*}\left[\gamma_{1kn}(s) D_{kn}(s) \left[\gamma_{kn}^{*} A_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right] + i_{2kn}^{*}\left[\gamma_{1kn}(s) B_{kn}(s) + i_{2kn}^{*}\left[\gamma_{1kn}(s) - i\gamma_{kn}(s)\right] \left[\gamma_{0kn}^{*} A_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right] + i_{2kn}^{*} \left[\gamma_{1kn}(s) - i\gamma_{kn}(s)\right] \left[\gamma_{0kn}^{*} A_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right] + i_{2kn}^{*} \left[\gamma_{kn}^{*} - iz_{k}G_{kn}(s)\right] \exp\left[-i\gamma_{kn}(s) - i_{2k}(s)\right] + i_{2kn}^{*} \left[\gamma_{kn}^{*} - iz_{k}G_{kn}(s)\right] \exp\left[-i\gamma_{kn}(s)(s - h)\right] + i_{2kn}^{*} \left[\gamma_{kn}^{*} - iz_{kn}^{*} \left(s\right)\left(z - h\right)\right] + i_{2kn}^{*} \left[\gamma_{kn}^{*} - iz_{kn}^{*} \left(s\right)\left(z - h\right)\right] + i_{2kn}^{*} \left[\gamma_{kn}^{*} \left(s\right)\left(z - h\right)\right] + i_{2kn}$$

где

$$\begin{split} \Delta_{0kn}(s) &= \Omega_{kn}^{2} + s^{2} - s\left(z + 2\beta_{0}\Omega_{kn}\right) + \frac{ia_{0}^{2}a_{0}^{2}b_{0}^{2}}{2zh^{2}a_{1}a_{0}a_{0}}(s)\right) \\ &= \left(z\right) = b_{kn} + a_{kn}\left[1 + 2\beta_{0}\Omega_{kn} + \frac{a_{0}c_{0}b_{0}^{2}}{2zh^{2}a_{1}a_{0}^{2}a_{0}a_{0}}(s)\right] \\ &= \Delta_{1kn}(s) = \Omega_{kn}^{2} + s^{2} - s\bar{a}_{0}a_{0}(s) + \frac{a_{0}b_{0}b_{0}}{2zh^{2}a_{1}a_{0}^{2}a_{0}a_{0}}(s) \\ &= \frac{1}{k_{n}}(s) = b_{kn} + a_{kn}\left[z_{0}a_{0}(s) + z_{0}a_{0}(s)\right] \\ &= \frac{1}{k_{n}}(s) = b_{kn} + a_{kn}\left[z_{0}a_{0}(s) + z_{0}a_{0}(s)\right] \\ &= \frac{1}{k_{n}}(s) = s + \frac{2H_{n}^{2}}{\mu c^{2}}\left(1 - \frac{h^{2}c_{0}^{2}}{3}\right) - \frac{4}{B_{kn}}\left[\frac{1}{2}a_{kn}^{2}A_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right] \\ &= \frac{1}{2}a_{0}b_{0}b_{0}}\left(s\right)\left(1 - \frac{h^{2}c_{0}}{3}\right) + \frac{2A_{k}}{B_{kn}}\left(s\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}a_{0}b_{0}b_{0}}\left(s\right)\left(\frac{1}{1-\frac{h^{2}}{k_{0}}}\right) + \frac{2A_{k}}{3}\left[1 + \frac{iz_{0}}{2bz_{1}}\right] \\ &+ \frac{iz_{0}A_{0}}{B_{kn}(s)\left[\frac{1}{2}a_{kn}A_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right]} - \frac{iz_{k}^{2}B_{kn}(s)}{iz_{kn}(s) + iz_{kn}(s)}\right] \\ &= \frac{1}{2}a_{0}b_{0}b_{0}}\left(s\right)\left[\frac{1}{4}a_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right] - \frac{iz_{k}^{2}B_{kn}(s)}{iz_{kn}(s) + iz_{kn}(s)}\right] \\ &+ \frac{iz_{0}A_{0}}{B_{kn}(s)\left[\frac{1}{4}a_{kn}A_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right]} - \frac{iz_{k}^{2}B_{kn}(s) + iz_{kn}(s) - iz_{kn}(s)}{iz_{kn}(s) + iz_{kn}(s)}\right] \\ &+ \frac{iz_{0}A_{0}}{a_{kn}(s)\left[\frac{1}{4}a_{kn}A_{kn}(s) + B_{kn}(s)\right]} + \frac{iz_{0}A_{kn}(s) + iz_{kn}(s)}{iz_{kn}(s)}\right] \\ &= \frac{4\pi z_{0}s_{kn}A_{kn}(s)}{a_{kn}(s)} + \frac{iz_{kn}(s)}{iz_{kn}A_{kn}(s)} + \frac{iz_{kn}(s)}{iz_{kn}(s)} + \frac{iz_{kn}(s)}{iz_{kn}(s)} + \frac{iz_{kn}(s)}{iz_{kn}(s)}\right] \\ &= \frac{iz_{kn}(s)}{a^{2}} + \frac{4\pi z_{0}s_{k}H_{kn}(s)}{iz_{kn}A_{kn}(s)} + \frac{iz_{kn}(s)}{iz_{kn}}}\right], \qquad iz_{kn}(s) = \frac{2w_{kn}^{2}}{iz_{kn}^{2}} + \frac{iz_{kn}^{2}}{iz_{kn}^{2}}} \\ &= \frac{iz_{kn}(s)}{a^{2}} + \frac{iz_{kn}(s)}{iz_{kn}^{2}} + \frac{iz_{kn}(s)}{iz_{kn}^{2}}} + \frac{iz_{k$$

П Мкртчян

$$R_m = \frac{4\pi z_0 i_{\pi} a_0}{c^2}, \qquad v_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi y_0}$$

Здесь *М* — число Маха, *R* — магнитное число Рейнольдса, v_1 — скорость распространения электромагнитных воли Альфвена.

Применяя обратное преобразование Лапласа по переменной S и используя основную георему пычетов, из (2.5) и (2.6) найдем выражения, определяющие прогиб пластинки. В результате получим:

в случае действия поперечного магнитного поля

$$w = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{p_{p}} \frac{\Delta_{kn}^{t}(s)}{\Delta_{kn}(s_{p})} \exp\left[s_{p}t + i\left(t_{1}x + \tau_{n}y\right)\right]$$
(2.8)

в случае действия продольного магнитного поля.

$$w = \sum_{k=-+}^{\infty} \sum_{n=-+}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta_{kn}^{1}(s_{i})}{(s_{i})} \exp[s_{i}t - i(\varepsilon_{s}x + \tau_{in}y)]$$
(2.9)

где s. и s. соответственно корни следующих алгебраических уравцений:

$$\Delta_{\bar{v}kn}(s) = 0 \tag{2.10}$$

$$\Delta_{1kn}(s) = 0 \tag{2.11}$$

ра и г — числа корней уравнений (2.10), (2.11), штрих означает производную по переменной 8.

Для любых заданных значений нараметров, входящих в уравнения (2.10) и (2.11), можно определить 5. Если се действительная часть отрицательна, го невозмущенное движение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие же корней с положительной действительной частью означает неустойчивость.

 Исследование уравнении (2.10) и (2.11) приводится в частном случае, когда форма колебания пластинки—цилиидрическая поверхность (2, = 0).

Принимается также, что

$$\left|\frac{s}{c^{\frac{1}{2}}}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{1}{M\left(1-\frac{is/\xi_k}{U}\right)}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\widetilde{m}}{\delta_0}\right| \ll 1 \tag{3.1}$$

После этих предположения уравнения (2.10) и (2.11) существенным обравом упрошаются и принимают следующий вид:

при действии поперечного магнитного поля

$$s_{0}^{4} + 2U_{0} = -(1 - U_{0}^{2}) s_{0}^{2} - U_{0}^{2} + \frac{ma}{2} \frac{ma}{V^{2}} - \frac{1}{2} \frac{ma}{V^{2}} - \frac{1}{2} \frac{ma}{V^{2}} - \frac{1}{2} \frac{(z_{0} - \gamma_{0} + 2\beta_{0}) s_{0}^{3} + U_{0} (2z_{0} - 4\beta + \beta_{10}) s_{0}^{2}}{- U_{0} (z_{0} - 2\beta_{0} + \beta_{10}) s_{0} + \gamma_{0} U_{0}^{2}} = 0$$

$$(3.2)$$

20

при действии продольного магнитного поля

$$(1 + is_0) s_0^2 - \cdots = - \frac{1}{2} + i \{i_0 s_0^3 - s_0\} = i_0 \{i_0 + i_0^3 (1 - i_0) + i_0 m_0\} - i_0 U_0\} = 0$$
(3.3)

146

$$V = \frac{4\pi z \Omega_{kh}}{2}, \qquad M = \frac{2\pi z_{0}}{11 + z_{kh}}, \qquad S = \frac{z_{k} (1 - 1)}{4\pi z_{kh} \Omega_{k}^{2}}$$

$$V = \frac{1}{2}, \qquad M = \frac{1}{2z_{0}}, \qquad V = \frac{1}{2z_{0}}, \qquad M = \frac{1}$$

Здесь безразмерные нараметры λь, λ и β характеризуют электропровод ность газа, материал пластинки, напряженность внешиего поперечного ил продольного магнитного поля, соответственно, V — фазовая скорость распространения упругон волны к иластинке.

Уравнения (3.2) и (3.3) представляют собон алгебраические уравнения относительно с комплексиымы коэффициентами. Условия отсутствия у этих уравнений корней с отрицательными мнимыми частями могут быть представлены в форме, аналогичной общензвестным критериям Рауса-Гурвина [5]. Из этих условий получим следующие оценки для критической скорости флаттера:

в случае дейс вия поперечного магнитного поля

$$\frac{U_{sp}}{U_{sp}^{0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{g_0 \lambda_{\beta}}{\varepsilon_0} \right) \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0 \beta_{\gamma}}{(g + g_0 \lambda_{\beta})^2}}}$$
(3.5)

в случае действия продольного магнитного поля

$$\frac{U_{sp}}{U_{sp}^{0}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} i_0 \beta\right) \left[1 + \frac{2 z_0 \beta \left(1 - i_0\right)}{\pi z_0^2}\right]}$$
(3.6)

Эдесь приняты обозначения

$$\begin{split} \mathbf{z}_{2} &= (1 + \lambda z_{0})^{2} [2z_{0} + \lambda z_{0}^{2} + \lambda \beta (1 - \lambda_{0})] = \lambda^{2} z_{0} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{0} \beta\right) (2 + \lambda z_{0}) \\ \alpha &= \sqrt{\left[\alpha_{1} + \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{0} \beta\right) \lambda^{3} z_{0}^{2}\right]^{2} + 4\lambda^{4} z_{2} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{0} \beta\right)} \\ &+ \lambda^{4} z_{0}^{2} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{0} \beta\right) - \alpha_{1} \\ \alpha_{1} &= \beta \lambda^{2} \left(1 - \lambda_{0}\right) \left[(1 + \lambda z_{0})^{2} - \lambda^{2} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{0} \beta\right) \right] - \end{split}$$

$$\begin{aligned} -\left|1+i\varepsilon_{0}+i^{2}\left(1+\frac{1}{2}i_{0}^{3}\right)\right|^{2}\\ \alpha_{2} &= \left\{\left(1+i\varepsilon_{0}\right)\left[\varepsilon_{0}+i\beta\left(1-i_{0}\right)\right]+i^{2}\varepsilon_{0}\left(1+\frac{1}{2}i_{0}^{3}\right)\right\}^{2}\\ \overline{\gamma} &= \frac{\alpha_{0}\varphi h\overline{\varepsilon}_{k}^{2}\gamma_{0}^{3}}{\Omega\rho_{0}}, \quad U_{xp}^{0} &= V\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right), \quad g = \frac{\varepsilon}{\Omega_{k}}, \quad g_{0} = \frac{\varepsilon_{k}^{2}h^{2}}{3}\end{aligned}$$

гле U^0_{sp} - критическая скорость одаттера при отсутствии магнитного подя.

Отметим, что в (3.5) последнее кодкоренное выражение, в силу предположений (3.1), всегда неотрицательно.

На основании проведенного анализа формулы (3.5) сделаны следующие выводы.

Влияние проводимости газа придодит к уменьшению кригической скости флаттера.

С возрастанием напряженности поперечного магнитного поля критическоя скорость флаттера упеличивается.

С увеличением проводимости материала пластники уселичивается крипческая скорость флаттера.

1 рафики изменения критической скорости в зависимости от параметров рад. локазаны на фиг. 1 и 2. Для вычисления были взяты значения:

 $E[1] = = 0.732 \cdot 10^6 \ \kappa \Gamma_{l} c.m^2, = 2.822 \cdot 10^{-6} \ \kappa \Gamma_{c} c.m^4,$

 $\mu_0 = 1.324 \cdot 10^{-1} \kappa^2$ c. $a_0 = 3.10^{-1} m^2 c. g = 0.05, h \mu_1 = 0.01.$



В отличие от случая действия поперечного магинтного поля, при дейтвил продольного магинтного поля из (3.6) вытекает, что влияние провозимости газа приводит к увеличению критической скорости флаттера, когда чатерива пластинки представляет собой диэлектрик, и к уменьшению критической скорости, когда пластинка является проводником. На основании (3.6) проведен численный яналия зависимости критической скорости от напряженности продольного магиптиого поля и проводимости материала пластинки. При расчетах влияние демифирования не учитывается (г=0) и принято у₀=0.025.

На фиг. З приведены графики зависимости критической скорости флагчера от проводимости материала пластинки при искоторых фиксированных значениях напряженности внешнего магнитного поля и проволимости газа Все кривые, каждая из которых соответствуе фиксированным значениям параметров Ас, р. имеют олинаковый характер, в именно: с увеличением 7. притическая скорость флаттера вначале увеличивается, достигая максиму ма для определенного а затем убывает.



Таким образом, обнаруживается экстремальный характер влияния проводимости материала иластички.

На фиг. 4 приведены графики, показывающие зависимость критической скорости от напряженности магнитного поля для различных фиксированных значении параметров л и ло.

Из фиг. 4 видно, что во всех случаях критическая скорость флаттера увеличивается с возрастанием напряженности внешнего магнитного поля.

Отметим, что в случае действия поперечного маснитного поля из (3.5) видно, что кризическая скорость флаттера — монотонная функция относительно зд. По этой причине исследование проподилось при k = 1, что соответствует минимальной критической скорости флаттера. В случае деиствия продольного магнитного поля, исследование формулы (3.6) показывает, что определение минимума критической скорости во t_{\star} в общем случае весьма затруднительно. Минимум критической скорости эпределен в случае, когда материал пластинки является диэлектриком (λ =0). При атом получим окончательную формулу

$$U_{sp} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) \sqrt{2\varkappa_0 \sigma_1 \frac{\upsilon_A}{c}}$$

rge $x_0^2 = D/2\rho h$, $z_1^2 = \pi z_0 a_0 z_0' \rho h$.



Физ. 4.

Автор благодарят участников семянара «Электродинамика деформируемых плониных сред» Институга механики АН Армянской ССР за обуждение работы.

Пиститут механики АН Армянской ССР

Посту над 20 XII 1974

9 2 UNPS93111

աններությունը հետուն հետում է հետուն հետություն։ Ամանաններին հետությունները հետուներում

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է աղորդի սալի կայունության խնդիրը, երբ ույն շրջչոսվում է թույլ չաղորդիչ ոչ մածուցիկ սեղմելի իոնիղացված դեր Հայնային ոսանքով ինչպես ուղղա Հայադ, այնպես էլ երկայնական մաղնի սական դաշտի աղդեղության

Սաղերառառածգականություն և մազնիսադադադինամիկայի ռավառա բումների <mark>չիման</mark> վրա ստացվել են անալիտիկ առտաքնություններ ֆրատե րի կրիտիկական արագությունների քամ

Հետազոտվում է մադհիսական դաչտի ինտենսիվության, ինչպես նաև զաղի և սայի Տաղորդականության ազդեցությունը Գլատերի կրիտիկական արագության վրա։

Կատարվել է իվային անայից և կառուցվել են ֆլատերի կրիաիկական արագության Համար արտաբին մադնիսական դաշտի լարվածությունից և սալի կյութի Հաղորդականությունից նրա կախվածությունն արտաՀայառց գծագրերը։

FLUTTER OF A CONDUCTING PLATE IN A FLOW OF POORLY-CONDUCTING GAS UNDER THE EFFECT OF A MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

Summary

The problem of stability of a conducting plate flown-past by a supersonic flow of poorly-conducting compressible ionised non-viscous gas under the effect of both transversal and longitudinal magnetic fields is considered.

In terms of magnetoelastic and magnetoaerodynamic equations the analytical expessions for critical velocities of flutter are derived.

The effect of the strength of a given magnetic field as well as of the gas and plate material conductivity on the critical velocity of flutter are analysed.

A numerical analysis is presented and graphs of dependence on external magnetic field and plate material conductivity are plotted for critical velocity of flutter.

ЛИТЕРАТУРА

- Балдоня С. А. Балассарин Г. Е., Белубскин М. В. К трехмерной зедане матинтоупругих коледаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
- Амбариумин С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекки М. В. К. магнитоупругасти товких оболочек. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
- Сслевов И. Т., Селезова Л. В. Обтекание колеблющейся траницъ нонизированным газом при дейстями магнитиого поля. Магнитиан гидродинамика, № 1, 1967.
- 4 Волимир А. С. Селезова Л. В. Повеление упругой цилинарической нанели в потоже проводящего газа при действии матинтного поля. ПМ, т. 7, имп. 5, 1971.
- Болотин В. В. Неконсерьствиные задачи теории упругой устойчивости. Физматека, М., 1961.
- дени Г. Руководство к проктическому применению преобразования Аллласа. Изд. - Наукав, М., 1965.

-34

24344446 002 9597693756575 4449505435 559544957 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա

XXVIII, Nº 4, 1975

Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН

ОБ УСТОИЧИВОСТИ УПРУГИХ ПЛАСТИН В ПОТОКЕ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Одной из основных трудностей решения задачи устойчивости упругих тел в потоке проводящего газа при действии магнитного поля является определение действующих на тело сил, вызванных обтекающим потоком и магнитным полем. Задача определения этих сил (аэродинамическое давление в возмущенном потоке и напряжения Максвелла в газе и в вакууме) сравнительно просто разрешается для тонких тел бесконечных размеров, обтекаемых идеально проводящим газом. Что же касается задач флаттера, то решение их и в этом случае весьма затруднительно из-за сложного харажтера зависимости аэродинамических и магнитных сил от возмущений обтекаемой поверхности.

В общем случае, когда пластинка имеет конечные размеры, определение указанных сил связано с почти непреодолимыми математическими трудностями. Однако, в области больших сверхзвуковых скоростей возможны существенные упрощения, основанные на асимптотических свойствах сверхзвукового потока.

Точное решение задачи флаттера бесконечно длинной цилиндрической оболочки в потоке идеально проводящего газа при наличии продольного магнитного поля получено в работе [1]. Исходя из этого решения, в работе [2] путем предельного перехода получены приближенные формулы для расчета избыточного давления, компоненты индуцированного электромагнитного поля и напряжения Максвелла в газе и указаны границы применения полученных результатов (например, в отношении числа Maxa). Формула для давления является некоторым обобщением известной формулы, полученной на основе поршневой теории классической газодинамики на случай магнитотазодинамического обтекания тонких тел.

В настоящей статье на основе результатов работы [2] дается способ определения компоненты Максвеллова тензора напряжений в вакууме. Тем самым получена формула для полного определения величины поверхностных сил, действующих на пластинку в зависимости от упругих перемещений пластинки и от напряженности заданного магнитного поля. Ее можно применять к анализу устойчивости конечных пластин, движущихся в сверхзвуковом потоке проводящего газа. Полученная формула используется для решения конкретных задач устойчивости непроводящих пластин в потоке идеально проводящего газа в присутствии продольного магнитного поля.

1. Рассматривается тонкая упругая пластинка постоянной толщины h, отнесенная к декартовым координатам x, y, Z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью xy. Пусть пластинка с одной стороны (z > h/2) обтекается сверхзвуковым потоком идеально проводящего газа с невозмущенной скоростью U, направленной вдоль осн ох. Другая сторона (z < -h/2) пластинки соприкасается с вакуумом. Пластинка находится в магнитном поле, вектор напряженности которого направлен параллельно вектору скорости обтекающего потока. Принимается, что магнитные и диэлектрические проницаемости газа и матернала пластинки равны единице. Влияния токов смещения на характеристики устончивости пластикки пренебрегаются. Предполагается также, что упругие перемещения, электромагнитные и аэродинамические возмущения настолько малы, что задачу можно рассматривать в линейной постаповке.

Пусть *и*, *v*, *w* — тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной плоскости пластинки. Вследствие этих возмущений в газе и в вакууме индуцируется электромагнитное поле, компоненты которого определяются из уравнения магнитогазодинамики и уравнения Максвелла для вакуума. При этом должны удовлетворяться условия непроницаемости стенок, условия для электромагнитного поля на поверхности раздела двух сред и условия затухания электромагнитных и аэродинамических возмущений на бесконечности. Поставленная таким образом задача допускает точное решение лишь для бесконечных пластин и цилиндрических оболочек [1, 3]. Исходя из этих решении, в работе [2] путем предельного перехода (в случае сверхзвуковых скоростей) при $z = \frac{h}{2} + 0$ получены следующие приближекные выражения для избыточного давления Δp , нормального компонента индуцированного магнитного поля $h_z^{(i)}$ и напряжения Максвелла $T_{zz}^{(i)}$ в газе:

$$\Delta p = \frac{x p_0}{a_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$T_{zz}^{(1)} = -\frac{x p_0}{a_0} \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$h_z^{(i)} \Rightarrow H_0 \frac{\partial w}{\partial x}$$
(1.1)

где

$$a_0^2 = \frac{xp_0}{p_0}, \qquad h = \frac{V_A}{a_0}, \qquad V_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi p_0}$$
 (1.3)

В формулах (1.1)—(1.3) p_0 — давление, p_0 — плотность невозмущенного газа. \varkappa — показатель политропии, H_0 — напряженность заданного продольного магнитного поля. V_A — скорость распространения электромагнитных воли Альфвена, a_0 — скорость звука в газе.

Выражение для нормальной составляющей внешней поверхностной нагрузки Z в указанной выше задаче имеет вид [1, 3]

28

$$Z = -\Delta p + T_{zz}^{(i)} - T_{zz}^{(e)}, \qquad T_{zz}^{(e)} = -\frac{H_0}{4\pi} h_x^{(e)}$$
(1.4)

Здесь $T_{zz}^{(e)}$ — компонента тензора напряжений Максвелла в вакууме, $h_x^{(e)}$ — компонента индуцированного в вакууме магнитного поля по направлению оси 0x.

2. Для окончательного определения поверхностной нагрузки Z, как видно из (1.4), необходимо иметь значение $h_x^{(e)}$ на поверхности z = -h/2 пластинки. Для нахождения $h_x^{(e)}$ необходимо в полупространстве z < -h решить уравнение Максвелла для вакуума

rot
$$\vec{h}^{(e)} = 0$$
, div $\vec{h}^{(c)} = 0$ (2.1)

при следующем условии на поверхности z = -h:

$$h_z^{(e)} = H_0 \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.2}$$

Обозначим через Ω область плоскости z=0, ограниченную контуром пластинки. Предположим, что пластинка по всему контуру контактирует с идеально проводящей диафрагмой, движение которой задано. Тогда компонента $h_{z}^{(\epsilon)}$ индуцированного магнитного поля в области $(x, y) \in \Omega$, z=-h будет иметь значение

$$h_z^{(e)} = [\operatorname{rot}(u_0 \times \vec{H}_0)]_z = H_0 \frac{\partial u_{0z}}{\partial x} \quad (x, y) \in \Omega, \quad z = --h$$

где $u_0(u_{0x}, u_{0y}, u_{0z})$ — заданный вектор перемещения точек диафрагмы. Отсюда для неподвижной диафрагмы ($u_0 = 0$) получим $h_{*}^{(e)} = 0$ в плоской области (x, y) $\in \mathfrak{Q}, z = -h$.

Введением потенциальной функции с посредством

$$h^{(e)} = \operatorname{grad} \varphi$$
 (2.3)

задача (2.1)—(2.2) приводится к следующей внешней задаче Неимана для функции ф

$$\Delta v = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=-b} = \Psi(x, y, t) = \begin{cases} H_0 \frac{\partial w}{\partial x} & (x, y) \in \Omega\\ H_0 \frac{\partial u_{0z}}{\partial x} & (x, y) \in \Omega \end{cases}$$
(2.4)

Из теории потенциала известно, что решение задачи (2.4) может быть представлено в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\Psi(\xi, \eta, t) \, d\xi d\eta}{\left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - h)^2 \right]^{1/2}}$$
(2.5)

В частном случае, когда форма колебаний пластинки—цилиндрическая поверхность (плоская задача), решение задачи Неймана представляется посредством логарифмического потенциала простого слоя

$$\varphi(x, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (z+h)^2} d\xi \qquad (2.6)$$
$$\Psi(x, t) = \begin{cases} H_0 \frac{\partial w}{\partial x}, & |x| \le a \\ H_0 \frac{\partial u_{0z}}{\partial x}, & |x| > a \end{cases}$$

Здесь 2а — ширина пластинки.

Из (2.5) в силу (2.3) найдем

$$h_{\pi}^{(\epsilon)}|_{z=-\hbar} = \frac{H_{0}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi) \Psi(\xi, \eta, t)}{\left[(x-\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}\right]^{3/2}} d\xi d\eta$$
(2.7)

Отметим, что в (2.7) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Подставляя (2.7) в (1.4) и учитывая (1.1) и (1.2), для поперечной нагрузки получим следующую окончательную формулу:

$$Z = -\frac{xp_0}{a_0}\sqrt{1+\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)\Psi(\xi, \eta, t)}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]^{3/2}} d\xi d\eta \qquad (2.8)$$

В случае плоской задачи

$$Z = -\frac{\kappa p_0}{a_0} \sqrt{1+\lambda^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda^2 \frac{\varphi_0 a_0^2}{\pi} \int \frac{\Psi(\xi, t)}{x - \xi} d\xi \quad (2.9)$$

Таким образом, найдено выражение для поперечной нагрузки в зависимости от упругих возмущений и напряженности заданного магнитного поля. Остается подставить (2.8) в уравнения движения пластинки. Тогда задача устойчивости пластинки в потоке проводящего газа при действии продольного магнитного поля приводится к исследованию системы интегродифференциальных уравнений с ядром Коши при обычных условиях закрепления краев пластинки. 3. Рассмотрим задачу устойчивости пластинки-полосы шириной 2g($-a \leqslant x \leqslant a$, $-\infty \lt y \lt \infty$), обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком идеально проводящего невязкого газа с невозмущенной скоростью U, направленной вдоль оси ох. Пластинка, другая сторона которой соприкасается с вакуумом, находится в магнитном поле с вектором напряженности, параллельным вектору скорости обтекающего потока. Предполагается, что пластинка по краям $x = \pm a$ жестко заделана и настолько длинная, что реализуется цилиндрическая форма потери устойчивости.

В силу сказанного рассматриваемая задача, согласно (2.9), приводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x_0^4} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial p_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial p_0}{\partial t} \sqrt{1 + \lambda^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) - \lambda^2 \frac{\rho_0 a_0^2}{a \pi} \int_{-1}^{1} \frac{\partial w}{\partial \xi_0} \frac{(\xi_0, t)}{\partial \xi_0} \frac{d\xi_0}{\xi_0 - x_0} = 0 \quad (3.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_0} = 0 \quad при \quad x_0 = \pm 1 \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2) $D = Eh^3/12(1-v^2)$ — цилиндрическая жесткость. E — модуль упругости, v — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки, ε — коэффициент линейного затухания, $x = ax_0$, $\xi = a\xi_0$ — безразмерные координаты, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Представляя искомый прогиб пластинки в виде

$$w(x_0, t) = f_1(t)(1 - x_0^2)^2 + f_2(t)x_0(1 - x_0^2)^2$$

удовлетворим граничным условиям (3.2), а из уравнения (3.1) методом Бубнова-Галёркина для неизвестных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ получим систему уравнений

$$\frac{d^{2}f_{1}}{d\tau^{2}} + (\tilde{\lambda} + \mu \sqrt{1 + \lambda^{2}}) \frac{df_{1}}{d\tau} + (1 + \alpha_{1}\lambda^{2}) f_{1} + \beta_{1}M\sqrt{1 + \lambda^{2}}f_{2} = 0$$

$$\frac{d^{2}f_{2}}{d\tau^{2}} + (\tilde{\lambda} + \mu\sqrt{1 + \lambda^{2}}) \frac{df_{2}}{d\tau} + (\gamma^{2} + \alpha_{2}\lambda^{2})f_{2} - \beta_{2}M\sqrt{1 + \lambda^{2}}f_{1} = 0$$
(3.3)

Эдесь введены следующие безразмерные обозначения:

$$\tau = \Omega_{1}t, \qquad \chi = \frac{\varepsilon}{\Omega_{1}}, \qquad p = \frac{\varkappa p_{0}}{2\rho h a_{0} \Omega_{1}}, \qquad \Omega_{1}^{2} = \frac{63D}{4\rho h a^{4}}$$
$$\Omega_{2}^{2} = \frac{485 D}{4\rho h a^{4}}, \qquad \alpha_{1} = \frac{35}{8\pi} \frac{\rho_{0} a_{0}^{2}}{2\rho h a \Omega_{1}^{2}}, \qquad \alpha_{2} = \frac{77}{8\pi} \frac{\rho_{0} a_{0}^{2}}{2\rho h a \Omega_{1}^{2}}$$

$$M=rac{U}{a_0}, \quad eta_1=rac{lpha p_0}{42ha\Omega_1^2}, \quad eta_2=11\,eta_1, \quad eta=rac{\Omega}{\Omega},$$

Из системы (3.3), аналогичным образом как в [4], для критической скорости получим формулу

$$M_{*}^{2} = \frac{1}{\beta_{1}\beta_{2} \sqrt{1+\lambda^{2}}} \left[\left(\frac{\gamma^{2}-1}{2} + \frac{\alpha_{2}-\alpha_{1}}{2} \lambda^{2} \right)^{2} + \left(\frac{\gamma^{2}+1}{2} + \frac{\alpha_{1}+\alpha_{2}}{2} \lambda^{2} \right) (\lambda + \mu \sqrt{1+\lambda^{2}})^{2} \right]$$
(3.4)

На фиг. 1 представлен график зависимости критической скорости $\overline{M}_* = M_*/M_*^0(M_*^0 - \kappa \rho \mu \tau u v e c ko \rho o c \tau u b o c c v c t b o c v c t t v e mar nu t v e c ko p o c v e mar nu t v e c ko p o c v e mar nu t v e c ko p o c v e mar nu t v e c ko p o c v e mar nu t v e c ko p o c v e mar nu t e mar nu e mar nu t e mar nu$



Фиг. 1.

Из фиг. 1 видно, что магнитное поле со сравнительно малой напряженностью может оказать дестабилирующее влияние, приводящее к уменьшению критической скорости флаттера.

Аналогичные результаты получены в работах [1. 5] для бесконечной цилиндрической оболочки на основании анализа точных решений.

4. В качестве второго примера рассмотрим задачу устойчивости бесконечной анизотропной слоистой пластинки в сверхэвуковом потоке идеально проводящего газа при наличии магнитного поля с вектором напряженности, параллельным бектору скорости обтекающего потока. Пластинка, собранная из произвольного числа однородных анизотропных слоев, обтекается потоком газа с невозмущенной скоростью U, направленной вдоль оси ол. Предполагается, что материал пластинки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке каждого слоя имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной плоскости (xy).

В силу принятых предположений для рассматриваемой пластинки имеем следующие исходные уравнения движения [6]

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = -X$$

$$L_{12}u + L_{22}v + L_{23}w = -Y$$

$$L_{13}u + L_{23}v + L_{33}w = Z$$
(4.1)

Здесь X, Y, Z — компоненты внешней нагрузки по направлениям x, y, z; u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t) — соответственно тангенциальные и нормальные перемещения токов (xy) координатной плоскости пластинки, L_{1k} — линейные дифференциальные операторы

$$\begin{split} L_{11} &= c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{18} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{12} &= c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{22} &= c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{13} &= -K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - K_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \quad (4.2) \\ L_{23} &= -K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\ L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ &+ 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{split}$$

с_{jk}, D_{jk}, K_{jk} -- соответственно жесткости растяжения, изгиба и взаимного влияния слоев пластинки

$$c_{jk} = \sum_{s=1}^{p} B_{jk}^{(s)} (h_s - h_{s-1})$$
$$K_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p} B_{jk}^{(s)} (h_s^2 - h_{s-1}^2)$$
$$D_{jk} = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{p} B_{jk}^{(s)} (h_s^3 - h_{s-1}^3)$$

 h_s — расстояние s-го слоя от координатной плоскости, $B_{jk}^{(s)}$ — упругие коэффициенты s-го слоя, p — число слоев пластинки.

Большой интерес представляют пластинки, составленные из ортотропных слоев так, что направления упругости не совпадают с направлениями известия АН Армянской ССР, Механика, № 4 координатных линий ох и оу. В этом случае, как известно [6], пластинка качественно работает как произвольно анизотропная. Тогда коэффициенты $B_{ik}^{(s)}$ имеют вид [6]

$$B_{11}^{(s)} = B_{11*}^{(s)} \cos^{4} \varphi_{s} + 2(B_{12*}^{(s)} + 2B_{66*}^{(s)}) \sin^{2} \varphi_{s} \cos^{2} \varphi_{s} + B_{22*}^{(s)} \sin^{4} \varphi_{s}$$

$$B_{22}^{(s)} = B_{11*}^{(s)} \sin^{4} \varphi_{s} + 2(B_{12*}^{(s)} + 2B_{66*}^{(s)}) \sin^{2} \varphi_{s} \cos^{2} \varphi_{s} + B_{22*}^{(s)} \cos^{4} \varphi_{s}$$

$$B_{12}^{(s)} = B_{12*}^{(s)} + [B_{11*}^{(s)} + B_{22*}^{(s)} - 2(B_{12*}^{(s)} + 2B_{66*}^{(s)})] \sin^{2} \varphi_{s} \cos^{2} \varphi_{s}$$

$$B_{66}^{(s)} = B_{66*}^{(s)} + [B_{11*}^{(s)} + B_{22*}^{(s)} - 2(B_{12*}^{(s)} + 2B_{66*}^{(s)})] \sin^{2} \varphi_{s} \cos^{2} \varphi_{s}$$

$$B_{16}^{(s)} = \frac{1}{2} [B_{22*}^{(s)} \sin^{2} \varphi_{s} - B_{11*}^{(s)} \cos^{2} \varphi_{s} + (B_{12*}^{(s)} + 2B_{66*}^{(s)}) \cos^{2} \varphi_{s}] \sin^{2} \varphi_{s}$$

$$B_{26}^{(s)} = \frac{1}{2} [B_{22*}^{(s)} \cos^{2} \varphi_{s} - B_{11*}^{(s)} \sin^{2} \varphi_{s} - (B_{12*}^{(s)} + 2B_{66*}^{(s)}) \cos^{2} \varphi_{s}] \sin^{2} \varphi_{s}$$

где φ_{*} — угол между главными геометрическими и физическими направлениями s-го слоя, $B_{jk}^{(*)}$ — коэффициенты упругости s-го слоя при $\varphi_{s} = 0.$

В системе (4.1) заменив Х, У, Z выражениями [7]

$$X = -m_{0} \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} + m_{1} \frac{\partial^{3} w}{\partial x \partial t^{2}}$$

$$Y = -m_{0} \frac{\partial^{2} v}{\partial t^{2}} + m_{1} \frac{\partial^{3} w}{\partial y \partial t^{2}}$$

$$Z = -m_{0} \frac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}} - 2m_{0} \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p - m_{1} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + m_{2} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right)$$

$$(4.4)$$

получим уравнения устойчивости слоистой анизотропной пластинки в сверхзвуковом потоке идеально проводящего газа при действии магнитного поля.

Здесь є — коэффициент линейного затухания, *m*₀, *m*₁, *m*₂— приведенные массы

$$m_{0} = \frac{1}{g} \sum_{s=1}^{p} \gamma_{s} (h_{s} - h_{s-1})$$
$$m_{1} = \frac{1}{2g} \sum_{s=1}^{p} \gamma_{s} (h_{s}^{2} - h_{s-1}^{2})$$
$$m_{2} = \frac{1}{3g} \sum_{s=1}^{p} \gamma_{s} (h_{s}^{3} - h_{s-1}^{3})$$

 γ_s — удельный вес S-го слоя, g — ускорение силы тяжести, Δp — суммарное аэродинамическое и магнитное давление, которое согласно (2.8) имест вид

$$\Delta p = -\frac{\varkappa p_0}{a_0} \sqrt{1+\lambda^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda^2 \frac{\varphi_0 a_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi) w_{\xi}^*(\xi, \eta, t)}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right]^{3/2}} d\xi d\eta$$

$$(4.5)$$

Решение системы (4.1) будем искать в виде волн. распространяющихся вдоль пластинки [7]

$$u = iu_{1}e^{i(\omega t - k_{x}x - k_{y}y)}$$

$$v = iu_{2}e^{i(\omega t - k_{x}x - k_{y}y)}$$

$$w = u_{1}e^{i(\omega t - k_{x}x - k_{y}y)}$$
(4.6)

где u_1 , u_2 , u_3 некоторые комплексные коэффициенты, ω – частота колебаний, $k_x = \pi/\lambda_x$, $k_y = \pi/\lambda_y$ – волновые числа, λ_y и λ_y – длины полуволн соответственно в направлениях x и y.

Подставляя (4.6) в уравнения (4.1), с учетом (4.4) и (4.5) получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{b_{jk}}{m_0 h^2} - \delta_{jk} \omega^2 + \delta_{jk} \left[\lambda^2 \mu_1 m + 2i \varepsilon \omega + i \mu_2 \left(\omega - \frac{m}{h} U \right) \sqrt{1 + \lambda^2} \right] \right\} u_k = 0$$

$$(j = 1, 2, 3)$$
(4.7)

где введены следующие обозначения:

$$b_{11} = c_{11}m^2 + 2c_{16}mn + c_{66}n^2$$

$$b_{12} = b_{21} = c_{16}m^2 + (c_{12} + c_{66})mn + c_{26}n^2$$

$$b_{22} = c_{66}m^2 + 2c_{26}mn + c_{22}n^2$$

$$b_{13} = b_{31} = \frac{1}{h} [K_{11}m^3 + 3K_{16}m^2n + (K_{12} + 2K_{66})mn^2 + K_{26}n^3]$$

$$b_{23} = b_{32}^* = \frac{1}{h} [K_{22}n^3 + 3K_{26}n^2m + (K_{12} + 2K_{66})m^2n + K_{16}m^3]$$

$$a_{33} = \frac{1}{h^2} [D_{11}m^4 + 4D_{16}m^3n + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2 + 4D_{26}mn^3 + D_{22}n^4] \quad (4.8)$$

$$\hat{b}_{11} = \hat{b}_{22} = 1, \qquad \hat{b}_{12} = \hat{b}_{21} = 0, \qquad \hat{b}_{33} = 1 + \frac{m_2}{m_0}\frac{m^2 + n^2}{h^2}$$

$$\hat{b}_{31} = \hat{b}_{13} = \frac{m_1}{m_0}\frac{m}{h}, \qquad \hat{b}_{23} = \hat{b}_{32} = \frac{m_1}{m_0}\frac{n}{h}$$

$$\mu_1 = \frac{(\iota_0 a_0^2}{m_0 h} \frac{m^2}{1/m^2 + n^2}, \qquad \mu_2 = \frac{\kappa p_0}{a_1 m_0}$$

$$m = k_{x}h, \quad n = k_{y}h, \quad \delta_{jk} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Из системы алгебраических однородных уравнений (4.7) можно определить критическую скорость флаттера.

Система (4.7) имеет отличные от нуля решения только в том случае. если равен нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы. Тогда критическая скорость флатгера определяется из уравнения

$$\left|\frac{b_{jk}}{m_0 h^2} - b_{jk} \omega^2 + b_{jk}\right| \left| h^2 \mu_1 m + i \left(2z + \mu_2 + \overline{1 + i^2}\right) \omega - i \frac{m\mu_2}{h} + \overline{1 + h^2} U \right| = 0$$
(4.9)

Невозмущенная форма равновесия пластинки устойчива пока все значения ω лежат в левой полуплоскости комплексного переменного. Наименьшее значение U, при котором один из показателей ω переходит на правую полуплоскость, оставаясь при этом комплексным, является критической скоростью флагтера. Скорость флаттера определяется здесь как минимальная скорость, при которой появляются бегущие волны с прогрессирующей амплитудой.

Если частота собственных поперечных колебаний пластинки мала по сравнению с частотой собственных колебаний в своей плоскости (колебания с достаточно большим показателем изменяемости), то тангенциальными составляющими сил инерции можно пренебречь. В этом случае уравнение (4.9) принимает вид

$$\omega^{2} - \Omega_{0}^{2} - A \left[i\omega \left(2\varepsilon + \mu_{2} \sqrt{1 + \lambda^{2}} \right) - i \frac{m\mu_{2}}{h} \sqrt{1 + \lambda^{2}} U + m\mu_{1} \lambda^{2} \right] = 0 \quad (4.10)$$

где

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{m_0 h^2} \frac{b_{13} A_{13} - b_{23} A_{23} + b_{33} A_{33}}{\delta_{13} A_{13} - \delta_{23} A_{23} + \delta_{33} A_{33}}$$

квадрат частоты собственных полеречных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля,

$$A = \frac{A_{33}}{\delta_{13}A_{13} - \delta_{23}A_{23} - \delta_{33}A_{33}}$$

А_{і3} — миноры второго порядка детерминанта (4.9).

Поступая аналогичным образом, как в работах [4. 7], из уравнения (4.10) для критической скорости флаттера получим формулу

$$U_{\rm sp} = V \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu_2 \sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{\mu_1 \mathcal{A}}{\Omega_0^2}}$$
(4.11)

где V = Ω_h/m — фазовая скорость распространения изгибных волн при собственных колебаниях пластинки в вакууме.

Рассматривая формулу (4.11), замечаем, что зависимость критической скорости от параметра λ , как и в предыдущей задаче, может иметь экстремальный характер. При увеличении напряженности магнитного поля критическая скорость вначале уменьшается, достигая минимума для определенного значения λ , после чего начинает возрастать, стабилизируя рассматриваемый процесс.

Нанбольший интерес представляют значения аргуметов m и n, вблизи которых критическая скорость принимает минимальное значение. В общем случае эти значения можно найти численным методом. Для получения результатов в замкнутой форме рассмотрим случай, когда влиянием инерционных членов, возникающих вследствие несимметричного строения пластинки, можно пренебречь. Тогда, если имеет место цилиндрическая форма цотери устойчивости, то n=0, а для критической скорости. согласно (4.8) и (4.11), получим следующее выражение:

$$U_{st} = ah\left(1 + \frac{2s}{|u_{s}| - 1 + h^{2}}\right) \left[\sqrt{m^{2} + b\frac{\pi}{m}}\right]$$
(4.12)

где

$$\pi^{2} = \frac{1}{m_{0}h^{4}} \left[D_{11} + \frac{2K_{11}K_{16}c_{16} - K_{12}^{2}c_{66} - K_{16}^{2}c_{11}}{c_{11}c_{66} - c_{16}^{2}} \right], \qquad b = \frac{\mu_{0}a_{0}^{2}}{m_{0}h^{2}}$$
(4.13)

Из (4.12) видно, что присутствие магнитного поля нарушает монотонную зависимость критической скорости от длины волны в направлении потока. Критическая скорость принимает минимальное значение при $m^3 = b\lambda^2/2$ и равняется

$$\min_{(m)} U_{\phi} = \frac{1}{3} \alpha h \left(1 + \frac{2\epsilon}{\mu_2 \sqrt{1+\lambda^2}} \right) \left(\frac{b\lambda^2}{2} \right)^{1/3}$$
(4.14)

Формулы (4.13). (4.14) показывают, что минимальное значение критической скорости, а также величина параметра m (следовательно, и длина полуволны) существенным образом зависят от напряженности магнитного поля и согласно (4.3) являются периодическими функциями углов ориентации ϕ , каждого слоя в теле пластинки.

На фиг. 2 приведена качественная картина изменения минимальной критической скорости в зависимости от λ. Кривая I соответствует случаю малого конструкционного затухания.

Для иллюстрации зависимости минимальной критической скорости от ориентации слоев пластинки, рассмотрим двухслойную пластинку, слои когорой имеют одинаковые толщины, изготовлены из одинакового ортотропного материала. но различно ориентированы по отношению к главным геометрическим направлениям. Пусть ориентация первого слоя характеризуєгся углом Ф1, а вгорого слоя — углом Ф2. На фиг. 3 приведен график зависимости $\overline{U}_{\pm} = \underset{(m)}{3} \min U_{\pm}$, $\beta = (h_1/m_0)^{-1/2}$ [3] $\overline{20B}_{20}V_A^2$]^{-1/3} от углов ориентации φ_1 и φ_2 при z = 0, h = 1, $B_{jk_{\pm}}^{(1)} = B_{jk_{\pm}}^{(2)}$, $B_{66^{+}}^{(s)} = 0.5B$, $B_{11^{\pm}}^{(s)} = 10B_{22^{\pm}}^{(s)} = 10B$.



Из фиг. З бидно, что если в случае однослойной цилиндрической оболочки максимальные значения минимальной критической скорости получаются при совпадении главных геометрических и физических направлений [5], то здесь они получатся внутри прямоугольника [$0 \le \varphi_1 \le \pi$; $0 \le \varphi_2 \le \pi$]. Значения φ_1 и φ_2 , при которых min U_* принимает максимальные значения.

существенно зависят как от напряженности магнитного поля, так и от отношения упругих постоянных материала слоев пластинки. От указанных величин зависят также значения max [min U_{*}].

Таким образом, при заданном материале слоев и при заданном магнитном поле, варьируя углами ориентации материала слоев, можно значительно расширить область устойчивости пластинки.

Ниститут механики АН Армянской ССР

Поступила 22 I 1975

๑, ยนโคนมนารแระ

ՀԱՂՈԲԳԻՉ ԳԱԶԻ ՀՈՍԱՆՔԻ ՄԵՋ ԳՏՆՎՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հողվածում, ելնելով գերձայնային հոսանքի ասիմպտոտիկ հատկու-Այուններից, ստացվել է բանաձև մագնիսական դաշտի և դաղի հոսանքի աղդեցուԱյան շնորհիվ սալի վրա առաջացած ձնշումը հաշվելու համար։

Ստացված բանաձևը կիրառվում է տարբեր տիպի սալերի կայունությունը ուսումնասիրելիս երկայնական մադնիսական դաշտի առկայության ղեպքում։ Ստացվել են բանաձևեր կրիտիկական արազության Հաշվման Համար։ Ուսումնասիրվել է մադնիսական դաշտի լարվածության և սալի անիդոտրոպունկան ուղղունկունների փոփոխունկան ազդեցունկունը կրիտիկական արաղունկան մեծունկան վրա։ Ցույց է տրված, որ նշված մեծունկունների միջև կապակցունկունը որոշ պայմանների դեպքում ունի էքստրեմալ բնույն։

ON STABILITY OF AN ELASTIC PLATE IN A FLOW OF CONDUCTING GAS IN A MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN

Summary

In terms of asymptotic properties of supersonic flow the formula is derived to determine pressure of a magnetic field and a gas flow into a plate.

The formula is applied to investigate the stability of a variety of plates in a magnetic field. Formulas to determine critical velocity are also obtained.

. The effect of alteration both in the magnetic field strength and in anisotropy directions on the value of critical velocity is examined. This dependence is shown to be extremal under certain conditions.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Флаттер цилиндрической оболочки в потоке сжамаемой проводящей жидкости в присутствии магиитного поля. МТТ, № 6. 1966.
- 2. Багдасарян Г. Е. Об устойчивости проводящей цилиндрической оболочки в потоже проводящего газа в присутствии магнитного поля МТТ, № 1, 1975.
- Kaliski S., Solarz Z. Aero-magneto-flutter of a plate flown past by a perfectly conducting gas in a magnetic field with isotropic action. Vibr. Probl., vol. 3, № 3, 1962.
- 4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз. М., 1961.
- 5. Аванесян Г. Г. Флаттер анизотропной цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. В сб. «Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластии. Ростов на Дону, 1971». «Наука», М., 1973.
- 6. Амбариумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
- 7. Багдасарян Г. Е. Устойчивость анизотрояной слоистой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. Докл. АН Арм. ССР. т. XXXIX, № 5, 1964.

Մեխանիկա

XXVIII, No.

Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТЕРМОУПРУГОЙ И ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКАХ, КОГДА ПЛАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА ЗАВИСЯТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Пользуясь мичимальными принципами термоупругой и гермопластической краевых задач [1], путем подхолящего выбора статически возможных полей скоростей изменения напряжений и кинематически возможных полей скоростей деформаций, получаются некоторые неравенства, сиязывающее ришения красвой задачи в несвязанной термоупругой и гермопластической постановках. В частности, на базе термоупругих решений полузатся оценка сверху для решения термопластической краевой задачи.

В качестве механических соотношений принимаются соотношения Праг., а [2], учитывающие влияние температуры на поверхность техучести мате Аналогично с вопросы бел учета влияния температуры на поверхность текучести материала рассмотрены в работе [3].

1 В прямоугольной декартовой системе координат с рассмотрим тамо объема V, находящееся под действием массовых сил X₁₀ поверхностных нагрузок P₄₀, приложенных на части поверхности S₄₀ и перемещений и₁₀, заданных на остальной части поверхности тела S₄₀. Будем считать, что эти воздействия и температурное поле тела 0 зависят от времени 1, но они наполько медленно изменяются, что можно пренебречь инсријонными аффектами. Как обычно, будем полагать, что температурное поле тела не зазисит от его напряженного состояния и определяется решением соответствующей задачи теплопроводности. С целью упрощения считаем также, что из физико-механических свойств материала только поверхность текучести зависит от температуры.

Соотношения термопластичности примем в виде [2]

$$z_{ij} = z_i + z_{ij} + ab \lambda_{ij} \tag{1.1}$$

$$z_{\mu} = A_{i,\mu\lambda} z_{\mu\lambda} \tag{1.2}$$

$$\hat{t}_{ij} = g H \frac{\partial f}{\partial z_{ijk}} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ijk}} \hat{z}_{ik} - \frac{\partial f}{\partial b} \hat{b} \right)$$
(1.3)

тде з₁₁ — тензор скоростей упругих деформаций. тензор скоростей иластических леформации, т. А₁ тензоры напряжения и коэффициентов упругости, т. – символ Кронскера, т. – коэффициент линейного температурного р симрения материала. Положительная функция упрочнения Н при ассоциированном законе течения (1.3) из-

вестным образом определяется в зависимости от формы поверхности текучести / = 0. Коэффициент у принимает значения

$$g = 0$$
, если $f < 0$, а также, если $f = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} z_{ij} - \frac{\partial f}{\partial z} b = 0$ (1.4)

H

$$g = 1, \text{ ecan } f = 0 = \frac{\partial f}{\partial z_{0}} \phi_{0} + \frac{\partial f}{\partial z} \phi \ge 0$$
 (1.5)

Согласно с минимальными принципами термопластической красвой задачи [1] выражения

$$\frac{1}{2} \int_{v} \left[\dot{s}_{ij}^{*} \left(\dot{s}_{ij}^{*} + ab\delta_{ii} \right) + g^{*} H \frac{\partial f}{\partial b} \dot{v} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} \dot{z}_{ij}^{*} + \frac{\partial f}{\partial b} \dot{b} \right) \right] dv + \int_{\delta_{ij}} \dot{s}_{ij} n_{j} \dot{u}_{ij} ds \quad (1.6)$$

н

$$\frac{1}{2} \int_{v} \left[\dot{z}_{ij}^{0} \left(\dot{z}_{ij}^{0} - \alpha b \lambda_{ij} \right) - g^{*} H \frac{\partial f}{\partial b} \dot{i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} \dot{z}_{ij}^{0} - \frac{\partial f}{\partial b} \dot{b} \right) \right] dv - \int_{v} \tilde{X}_{i} \dot{u}_{i}^{0} dv - \int_{s_{ij}} \dot{P}_{i} \dot{u}_{i}^{0} ds$$

$$(1.7)$$

Если в (1.6). (1.7) и в соотношениях (1.1), (1.2) положить H=0, то получатся соответствующие минимальные принципы для термоупругой краевой задачи.

2. Принимая в качестве статически возможного поля скоростей изменения напряжении деиствительное поле скорос сй паменения термоупругих напряжений (за) минимальный принцип для скоростей изменения вапряжений термовластичестой красвой задачи представим в лиде из чеченства

В работе [1] эти минимальные принципы получены при исстоянных собъемных солах. когда X₁ = 0. Можно убедиться и гом, что учет изментной объемных сил скаланистся только на минимальном принципе для скорастей деформации и вылажатся по-

явлением члена — X. a.do.

41

$$\frac{1}{2} \int_{v}^{v} \left[\dot{s}_{ij}^{*} \left(\dot{s}_{ij}^{*} + s\dot{\theta}\dot{s}_{ij} \right) + g^{*}H \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} \dot{v} \left(\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{il}^{*} + \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} \dot{b} \right) \right] dv - \int_{s_{u}} \dot{s}_{ij} n_{j} u_{l0} ds - \frac{1}{2} \int_{v} \left[\dot{s}_{ij} \left(\dot{s}_{ij} + \alpha \dot{\theta} \dot{s}_{ij} \right) + gH \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{b} \left(\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{b} \right) \right] dv + \int_{s_{u}} \dot{s}_{ij} n_{j} \dot{u}_{i0} ds \ge 0$$

$$(2.1)$$

Исключая поверхностные интегралы с помощью уравнении виртуальных работ и имся в виду соотношения (1.1)—(1.3), из (2.1) получим

$$\int \dot{z}_{ij} \, \dot{z}_{ij} \, dv + \int H \left[g^* \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} \, \sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial z} \, b \right) - g \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} \, c_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \, \dot{\theta} \right) \right] \frac{\partial j}{\partial \vartheta} \theta dv - f \ge 0$$
(2.2)

где скорости пластических деформаций, которые имели бы место, если действительные напряжения з_{иј} изменились бы со скоростями изменския термоупругих напряжений з_{ил}

$$J = \int (2\bar{z}_{ij}^{*} \bar{z}_{ij}^{*} - \bar{z}_{ij} \bar{z}_{ij}^{*} - \bar{z}_{ij} \bar{z}_{ij}^{*}) dv$$
(2.3)

Символом «Н» наверху обозначены скорости соответствующих деформаций без температурного расширения

$$\varepsilon_{i_l}^{e_l} = \varepsilon_{i_l} - \varepsilon_{i_l}^{e_l} = \varepsilon_{i_l}^{e_l} - \varepsilon_{i_l}^{e_l}$$
(2.4)

Применяя минимальный принцип для скоростей изменения напряжений термоупругой краевой задачи, когда в качестве статически возможного поля принимается действительное поле скоростей изменения напряжения термопластической красной задачи э.у. и следуя работе [3], получим

$$J - \int z_{ij} z_{ij} \, dv \ge 0 \tag{2.5}$$

Суммируя неравенства (2.2) и (2.5), приходим к следующему неравенству:

$$\int_{v} \left[\dot{z}_{ij} \dot{z}_{il} + gH \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} \dot{z}_{il} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) \right] dv \leqslant \\
\leqslant \int_{v} \left[\dot{z}_{ij}^{*} \dot{z}_{ij}^{*} + g^{*}H \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} \dot{z}_{il}^{*} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) \right] dv \qquad (2.6)$$

С помощью соотношении (1.3) неравенство (2.6) можно представить в виде

$$\int_{+} \Pi \left(\dot{s}_{ij} \right) dv \leqslant \int_{0} \Pi \left(\dot{s}_{ij} \right) dv \tag{2.7}$$

нли

$$\int_{v} \frac{(\tilde{\varepsilon}_{ij})^2}{gH\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^2} dv \leqslant \int_{v} \frac{(\tilde{\varepsilon}_{ij})^2}{g^e H\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^2} dv$$
(2.8)

где П — пластический потенциал

$$\Pi = \frac{1}{2} g H \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} \dot{z}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \right)^2, \quad \left(\dot{z}_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{z}_{ij}} \right)$$
(2.9)

Асяме части неравенств (2.7) и (2.8), разумеется, можно рассматриваль как некоторые интегральные контерни об интенсивности процесса дальнейшего пластического течения в геле при заданных скоростях изменений внешних воздействий.

Неравенства (2.7) и (2.8) позволяют оценить сверху эти критерии из оазе термоупругих решений, без анализа действительного упруго-пластического равновесия тела.

3. В качестве кинематически возможного поля скоростей деформации примем действительное поле скоростей деформации термоупругой краевой задачи, то есть

$$z_{ij} = z_{ij}$$
 (3.1)

Тогла для соответствующих скоростей изменения напряжения -,, с помоцью соотношен. й (1.1)—(1.3) получим

$$\dot{z}_{II}^{ac} = \dot{z}_{II}^{*} - A_{IJsk}^{-1} \dot{z}_{sk}^{*ac}$$
(3.2)

гле A_{ijnk}^{-1} тензор модулей упругости. z_{ij}^{0i} скорости пластических леформация, которые имели бы место, если действительные деформации z_{ij} изменились бы со скоростями термоупругих деформаций

При кинематически возможном поле (3.1) минимальный принцип для своростей деформаций термопластической краевой задачи выразится неравенством

$$\frac{1}{2} \int_{v} \left[\hat{\sigma}_{ij}^{or} \hat{s}_{ij}^{H} - g^{a}H \frac{\partial f}{\partial b} \hat{\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{ij}} \hat{s}_{ij}^{a} - \frac{\partial f}{\partial b} \hat{\theta} \right) \right] dv - \int_{v} X_{i} u dv - \int_{v_{\mu}} \hat{P}_{i} u_{i} ds - \frac{1}{2} \int_{v} \left[\hat{\sigma}_{ij} \hat{s}_{ij}^{H} - gH \frac{\partial f}{\partial b} \hat{\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial b} \hat{\theta} \right) \right] dv + \int_{v} X_{i} u_{i} dv + \int_{s_{\mu}} \hat{P}_{i} u_{i} ds > 0$$

$$(3.3)$$

Вычитая из (3.3) доа раза

$$\int (\dot{s}_{ij} - \dot{s}_{ij}) (\dot{s}_{ij}^{ij} - \dot{s}_{ij}^{ij}) \, dw = 0 \tag{3.4}$$

в циез в виду (3.2), с подходящим использованием уравнения виртуальных работ получим

$$J = \int \left[\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{2} \int \frac{\partial f}{\partial t_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial t_{ij}}$$

Применяя минимальным принцип для скоростей деформаций термоупругой краевой залачи, когда в качестве кинематически возможного пола принимается деиствительное поле скоростей деформации упруго-пластического тела -,, после некоторых выкладок, аналогичных вышесделанным, получим

$$-J - \int (A_i \int_{a_i} \tau_{ij} \tau_{ij} + \tau_{ij} z_{ij}) \, dv \ge 0 \tag{3.6}$$

Суммя уя неразенства (3.5) и (3.6) и имея в виду (1.3) и (2.9), находим

$$+ (2\Pi - A_{i_j \cdot i_k}^{-1} z_{i_j \cdot -nk}) dv = [2\Pi (z_{i_j}) + A_{i_j n k} z_{i_j \cdot -nk}] dv \quad (3.7)$$

С унетом (2.7) и (3.7) для материалов, которые в упругой области изотропны в линейны, получим

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{z}_{i} \, \hat{e}_{ij} \, dv \gg \int_{\mathbb{R}} \hat{z}_{ij}^{\circ \circ} \, \hat{z}_{ij}^{\circ \circ \circ} \, dv + \frac{1}{G} \int_{\mathbb{R}} \left[\prod \left(\hat{z}_{ij}^{\circ \circ} \right) - \prod \left(\hat{z}_{ij}^{\circ} \right) \right] dv \tag{3.8}$$

гле (7 — модуль сдвига материала.

Перавенство (3.8) можно использовать в качестие оценки решения термопластической краевой задачи снизу.

Аналогичные попросы в рамках деформационной теории пластичности гассмотрены в работе [4]

Піститут механяки АН Армянской ССР

Поступила 16 Х 1974

Ռ. Մ. ԿԻԲԱԿՈՍՏԱՆ

ԵՉՐԱՅԻՆ ԽՆԳՐԻ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ Ե ՋԵՐՄԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԳՐՎԱԾՋՆԵՐՈՎ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԾԻՋԵՎ ԵՐԱՆ ԿԱՊԸ, ԵՐՔ ՆՅՈՒԹԻ "ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՑՈՒՆՆԵՐԸ ԿՈЬՎԱԾ ԵՆ ՋԵՐՄԱՍՏԻՀԱՆԻՑ

ից ի պետերությունը հերան առաձղական և ջերնապրաստիկական դրված ինչ՝ ռային հաղորդների մենիմալ սկզբուն գրից և ամապրատասխան ձեռվ ընդ

44

րելով լարումների փոփոխման արադությունների ստատինորեն ննարավոր դալաը ու դեֆորմացիաների արադությունների կինեմատիկորեն ննարավոր դալար ստացվում են որոշ աննավասարություններ, որոնք կապ են նաստատում ջերմատաաձդական և ջերմապլաստիկական գրվուծբներով եգրային խնդրի նամար ստացված լուծումների մեջ։ Մասնավորտպես, ջերմատոաձգական դրվածրով ստացված լուծման միման վրա ստացվում է ջերմատորատիկանը եգրային խնդրի լուծման վերին դնանանորագրութ

ON CORRELATION BETWEEN SOLUTIONS OF BOUNDARY PROBLEMS IN THERMOELASTIC AND THERMOPLASTIC STATEMENTS, WITH ELASTIC PROPERTIES OF THE MATERIAL DEPENDING ON TEMPERATURE

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

In terms of minimum principles of thermoelastic and thermoplastic boundary problems, by proper selection of statically and kinematically probable fields of velocity variation in stress and deformation, some inequalities are obtained relating the solutions for boundary problems in statements independent of thermoelasticity and thermoplasticity. In particular, on the basis of thermoelastic solutions the upper estimation for the thermoplastic boundary problem is derived.

ΛΗΤΕΡΑΤΥΡΑ

- Mroz Z., Rantecki B. Variational principles in uncoupled thermoplasticity. Int. J. Eng. Sci. 11, No. 11, 1973.
- 2. Пратер В. Нензотермическое пластическое деформирование Механика. № 5 (57). 1959.
- Киракосян Р. М. Минимальные принциппо и некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесни тел при нестационарных силовых и температурных воздействиях. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. ХХV!. № 2, 1973.
- 4. Киракосян Р. М. О связях между решениями кра пон задачи деформируемого тела, полученными в упругой и упруго-пластической постановках. Иза АН Арм. ССР. Механика, т. XXVII, № 1, 1974.

45

20.350.050.002.55315656655665 изчестволь сср. ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОВ ССР.

Ուեհոունիկա

XXVIII, Nº4, 1975

Mexaninal

П. И. ВАСИЛЬЕВ. Ю. Г. ВИЛЛЕР, А. А. ЗЕВИН

ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОИ СТЕНЫ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ БЕТОННЫХ БЛОКОВ

Бетонные стены различных сооружении бетоппруются горизонтальными блоками значительной толщины или собираются из сборных прямоугольных элементов. Швы между ними имеют малое сопротивление растяжению. Такие конструкции передко рассчитывают без учета сопротивлеиия растянутой зоны. В связи с этим в статье рассматривается задача е сжатии эксцептричной нагрузкой стены из бетонных блоков, с учетом илияния ползучести на деформации системы (фиг 1). Показано, что перемещения, обусловленные ползучестью, могут привести к потере устойчивости системы опрокидыванию.

Длина блоков предполагается достаточно большоя, поэтому задача рассматривается как плоская.

§ 1. Рассмотрим предварительно контактиую задачу о сжатин двух прямоугольных блоков эксцентричной нагрузкой, воспользовавшись функциями влияния перемещений границы прямоугольной области [1]. В безразмерных координатах $x = x_0$, $0 = y_0$, $z = x_0$ (фиг. 2) перемещения граинцы x = 0

$$u(0) = \int_{0}^{2} L_{1}(0, z) q(z) dz = \frac{(1 - \sqrt{y_{0}})}{E} \int_{0}^{2} L_{2}(0, z) - \frac{2}{\pi} \ln |0 - z| |q(z) dz = \frac{(1 - \sqrt{y_{0}})}{E} \int_{0}^{2} K^{1}(0, z) q(z) dz$$
(1)

Влесь $q(\cdot)$ нагрузка на гранях z 0 и z = -2: $L_{+}(0, c) = L_{0,0}(\tau_0, \tau_D)(\tau_0 = 1 - 0, \tau_D = 1 - 1)$ – регулярная часть функции влияния, которая протабулирована для различных значения $\tau = y_0/x_0$.

Рассматривая контакт двух блоков (фиг. За), полагаем, что нагрузки на противоположных гранях блоков отличаются незначительно и определяются равнодействующен P и величиной с: это допущение позволяст использовать функции влияния L_n (0, .).

Собственным весом блоков пренебрегаем. Приближенно плияние сойстисиного веса можно учесть, добавляя его к поверхностным нагрузкам. Вследствие симметрии относительно оси в плоскость контакта не иснажается. Учитывая (1), условия контактной задачи для идеально упругих блоков можно записать в виде

$$\frac{(1-\gamma^2)}{E}\int_{0}^{\eta(t)} K^{\intercal}(\theta,\,\zeta) p\left(\zeta,\,t\right) d\zeta = \frac{\delta\left(t\right)}{2} - \frac{\varphi\left(t\right)\theta}{2}$$
(2)

пнутри области контакта [0, α(t)]

$$f_x(0, \theta, t) = 0$$
 вне области контакта (3)

$$\int_{0}^{u(t)} p[(\zeta, t) d\zeta \coloneqq \frac{P(t)}{y_0}, \quad \int_{0}^{u(t)} p(\zeta, t) \zeta d\zeta \coloneqq \frac{P(t)}{y_0} \frac{e(t)}{y_0}$$
(4)













В уравнениях (2)—(4) p(z, t) — контактное давление $\delta(t)$ — взаимное сближение блоков, q(t) — их взанмный угол поворота. Условия задачи с учетом ползучести получим, замения в (1) конститы оператором

$$Q_t \int_0^t K^*(0, 1) p^*(\xi, t) d\xi = \frac{\delta^*(t)}{2} + \frac{\delta^*(t)}{2}$$
 (5)

$$\int_{0}^{q(t)} p(\zeta, t) d\zeta = \frac{P(t)}{y_0} \qquad \int_{0}^{q^*(t)} p^*(\zeta, t) d\zeta = \frac{P(t)}{y_0} \frac{e(t)}{y_0} \qquad (6)$$

Злесь

$$Q_t = Q_0 [1 + H^*], \quad Q_0 = \frac{(1 - s^2)}{E}$$
 (7)

$$H^{\pm}(t) = \int_{0}^{t} H(t, z) f(z) dz, \quad H(t, z) = -\frac{\sigma}{\sigma z} EC(t, z)$$
 (8)

Нетрудно проверить, что уравненням (5), (6) удовлетворяют функция

$$p^{*}(l^{*}, t) = p(l^{*}, t); \qquad 2^{*}(t) = \alpha(t)$$

$$\hat{s}^{*}(t) = [1 - H^{*}]\hat{s}(t); \quad z^{*}(t) = [1 + H^{*}]\hat{s}(t) \qquad (9)$$

кото не решают задачу с учетом ползучести бетона.

Если $\frac{e(t)}{g_0} = \frac{e_0}{N_0}$ const. уравнения (5), (6) удовлетворяются при $p^*(z, t) = p_0(z) P(t); z^*(t) = a_0 = \text{const}; z^*(t) = b_0[1 \div H^*] P(t); z^*(t) = z_0[1 - H^*] P(t),$ причем $p_0(z), z_0, b_0, \varphi_0$ – решение соответствующея задачи теории упругости при $\frac{p}{h} = 1.$

40

. аким образом, понходим к следующим выводам*:

 Ползучесть бетона не оказывает влияния на величних зоны конте га и контактиме напряжения.

2. Зона контакта не зависят от величины действующей нагрузки и виределяется только относительной координатной равнодействующей —

Уо § 2. Рассмотрим сжагие прямоугольной призмы, состоящей из m + 1-то огояного блока, с учетом деформированной схемы. Полагаем, что m+1-й (нижний) блок защемлен в основании: верхний блок свободен от кинематических связей Все блоки имеют одинаковые размеры 2x6°290. Сжимаюцая сила = сопя риложена на расстоянии с. = сопя! от вертикальной грани верхнего бло (фиг.) Касательными напояжениями на поверхио-

Нолу исинов нымот прои дливы также в случае сжатия пдентичных простравтвенных тел аронзнольсти формы, сокметр чных относительно илоскости изгиба, сам сонтактирующий верхности боль с функцию влияния перемешения илоскости колокта, тел чожно продоссийсь в виде проззведения функции упругих постоящихок функции координат.

и с. в нанисьмо, с конгактных и пряжений от характери, на полаучести бетова и л. планале и без отручно заученитеснию нагруженного штам сограниченией ширики на полноле Н. Е. Приконовносм, ПАМА, т. Х.Х. в. 6, 1956 г.

стях контакта, которые появляются при деформациях системы. пренебрегаем.

Вследствие ползучести деформации системы увеличиваются, и расстояния (R=1, 2, ..., m) становятся функциями времени. Из геометрических соображений следует

$$\frac{e_k(t)}{y_0} = \frac{e_0}{y_0} - \frac{h}{y_0} \left| k\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} (k-v) \varphi_i(t) \right|$$
(10)
(k = 1, 2, ..., m)

где

$$\Phi(t) = \sum_{k=1} \varphi_m(t) \tag{11}$$

 $f_{1}(t) =$ взаимный угол поворота блоков k и $k = 1, h = 2x_0$ высота блока.

Пусть в результате решения задачи теории упругости о сжатии лиух блоков нагрузкой $\frac{P}{y_0}$ 1 при $Q_0 = 1$ получена зависимость $\varphi = \psi \left[\frac{e}{y_0} \right]$ взаимного угла новорота блокоя от $\cdot y_0$.

С учетом ползучести бетона

$$\varphi_{k}(t) = \frac{PQ_{0}}{y_{0}} \left[1 \cdots H^{*} \right] \cdot \left[\frac{e_{k}(t)}{y_{0}} \right]$$
$$= \frac{PQ_{0}}{y_{0}} \left[\phi \left[\frac{e_{k}(t)}{y_{0}} \right] + \int H(t, z) \cdot \left[\frac{e_{k}(z)}{y_{0}} \right] dz \right]$$
(12)

Решение системы (10)—(12) для произвольного момента времени межет быть получено методом конечных сумм. Введем дискретную шкалу $h = \tau_0 + i\Delta$ и проинтегрируем (12) по формуле трапеций

$$\frac{PO_{0}}{y_{0}} = \frac{PO_{0}}{y_{0}} = \frac{PO_{0}}{y$$

Соотношение (13) сояместно с уралиениями (10), (11) позволяет определить неизвестные $e_k(t_i)$, $\varphi_k(t_i)$ последовательно, начиная с 4 Известна АН Армянской ССР. Механика, № 4 $t_0 = \tau_0$. Полагая, что решение для моментов $\tau_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}$ извести задавшись $\Phi(t_i)$, последовательно находим

$$\frac{e_1(t_i)}{y_0} = \frac{e_0}{y_0} - \frac{h}{y_0} \Phi(t_i), \quad =_1(t_i) - \text{no popyae (13)}$$

$$\frac{e_0}{y_0} = \frac{e_0}{y_0} - \frac{h}{y_0} [2\Phi(t_i) - \phi_1(t_i)], \phi_2(t_i) - по формуле (13) и т. д.$$

После определения $\varphi_1(t_i)$, $\varphi_2(t_i)$, ..., $\varphi_k(t_i)$ проверяется выполнение условия (11); величина $\Phi(t_i)$ нарьирустся до тех пор, пока это условие не будет удовлетворено.

При 1/2 = 0 п выражения (13) учитывается только первое слагаемое.

Таким образом, почти треугольная структура системы уравнений (10) значительно упрощает решение, так как при мобом (1) задача по существу приводится к решенню одного нелинейного уравнения (11).

Устойчивость системы блоков определяется условием сm (1)>0. Рассматриная консчный интервал времени, получим уравнение для определение кригической силы в интервале {то, т.]:

$$\mathbf{r}_{s} \begin{bmatrix} \frac{P_{ss}}{y_{0}}, & Q_{0}, & \gamma_{s}, & \gamma_{0}, & \gamma_{1} \end{bmatrix} = 0$$
 (14)

где 📪 — реологические параметры.

Практически нет необходимости решать уравнение (14); достаточно при задачной нагрупке Р проверить выполнение условия е_m (-1) > 0.

§ 3. Имея бвиду получение числовых результатов в задаче о сжатия двух упругих блоков, заменим непрерывный контакт системой 2(n+1) односторонних связей, расположенных в серединах участков ширший сда (фиг. 36). Начало координат удобно совместить с нулевой связью.

Полагаем, что в пределах участков су, реакции связей распределяются равномерно.

Ках показано в § 1, зона контакта, а, значит, и число включившихся связей не зависит от величины нагрузки и определяется относительной координатой се приложения с/4. Пусть при некотором значении с/9. включалась / 1 связь.

Тогда неизвестные $X_{-} = \frac{Z_{-}}{y_{0}}, \phi = \frac{2}{Q_{0}}, \phi = \frac{1}{y_{0}Q_{0}}$ определяются из системы уравнений

$$A_{r=2}\overline{X} = \overline{P}$$
(15)

Здесь вектор $\bar{X} = (\bar{\tau}, \bar{v}, X_0, X_1, ..., X_r)$: вектор $\bar{I}^2 = \left(\frac{Pe}{y_0^2}, \frac{-P}{y_0}\right)$

0, 0, ..., 0): матрица порядка r — 3

$$A_{r,3} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 2c, & rc \\ 0, & 0, & -1, & -1, & -1 \\ 0, & -1, & 2t_{00}, & 2t_{01}, & 2t_{02}, \\ c, & -1, & 2t_{10}, & 2t_{11}, & 2t_{12}, & 2t_{12}, \\ rc, & -1, & 2t_{10}, & 2t_{12}, & 2t_{12}, \\ c_{r,1} & c_{r,2} & c_{r,2} & c_{r,2} \end{bmatrix}$$
(16)

 Z_i усилия в снязях; с нааимный угол понорота олоков; с их вближение; Q_0 перемещевие понерхности контакта блока по вправлению снязи *i* от пагрузки $q = 1 c g_0$, ранномерно распределенной на участке *j*.

Первые две строки в системе (15) представляют собой уравнение раянансия, остальные — уравнения неразрывности деформаций по напранлоию такочношнася связей.

. Перемещения ч, найдем, воспользовавшись выражением (1) Полжив Ф=с(i+0.5) и интегрируя в пределах (c= (i+1)с, получим

$$\delta_{ij} = \delta_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}^{(2)}$$

где

$$\hat{a}_{ij}^{(1)} = \frac{1 - r^2}{E} \hat{L}_{ou}^{\dagger} \left[c \left(i + 0.5 \right), \ c \left(j + 0.5 \right) \right]$$

$$\begin{split} \delta_{ij}^{2n} &= \frac{2\left(1-\mathbf{v}^{2}\right)}{\pi E} \left\{ 1+\ln\left[\left(\frac{j-i-0.5}{j-i+0.5}\right)^{j-1} \frac{1}{c \, V^{-}(j-i)-0.25^{-}}\right]\right\} \ (i\neq j) \\ \delta_{ii}^{(2)} &= \frac{2\left(1-\mathbf{v}^{2}\right)}{\pi E} \left(1-\ln\frac{c}{2}\right) \end{split}$$

При интегрировании регулярной части функции влияния использовазась формула прямоугольников.

Так как число включившихся связей заранее не изпестно, уравнения (15) удобно решать в следующем порядке

Последовательно, при r = 1, 2, ..., 2n - 1, умножая обратную матрицу

$$\begin{bmatrix}
x_{i+3} = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{i}^{r} & \text{ на вектор } P \text{ при } \frac{1}{y_0} = 1, \text{ получим} \\
= \begin{bmatrix} x_{i+3} & x_{i+3} \\ y_0 & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+3} & y_0 \\ x_{i+3} & y_0 \end{bmatrix}$$

гле мерез ф. ч и X. – обожначены величины т. ч и X. – соотнетствуюние нагрузке Pigo 1. Координату равнодействующей, соответствующую включевим г связей, можно найти из условня X_c = 0

$$\frac{1}{y_0} = \frac{r+3}{a_{r+3,1}}$$
(17)

При заданной величине $\frac{e}{y_0}$ число включившихся связей опре леляется условием $\frac{e_{r+1}}{y_0} > \frac{e}{y_0} \gg \frac{e_r}{y_0}$. После определения r_1 из ураний (15) находятся исизвестные $\stackrel{\wedge}{z}, \stackrel{\wedge}{\xi}$ и X_1 .

Решая (15) при $\frac{P}{y_0} = 1$ и различных значениях $\frac{e}{y_0}$, можно построить зависимость $\left[\frac{e}{y_0}\right]$, которая необходима для определния деформаций системы блоков с учетом полаучести.

§ 4. По изложенной методике решен численный пример о сжатии ст из кна ратных блоков. При решении задачи о контакте двух блоков непрерывный контакт заменялся системой дискретных связей, расположенных з серединах участков величиной суъ—0.1 уъ.

В табл. 1 принедены значения $X_i = \frac{Z_i}{P}$ в функции $\frac{e}{y_0}$. Завис мость $\left| \frac{e}{y_0} \right|$ дана в табл. 2. Эти данные могут быть использонаны при расчете стены из произвольного количества кнадра блоков с учетом ползучести бетона.

- Z, e,

Таблица І

			Jaw	ICHNOC.	ть <i>X</i> , =	p o	50					
	٣,	Номер связи										
	φo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	11	0			1						
2	0.0332	0.668	0.332	0								
3	0.0725	0.484	0.306	0.209	0							
4	0.1125	0.375	8.269	0.213	0.144	0						
5	0.1484	0,311	11.238	0.201	0.156	0.094	0					
6	6,1856	0,264	0.212	0.186	0,154	0.110	0.074	0				
7	9.2231	0.229	0.140	0.171	0.148	0,113	0.089	0,060	0			
8	0.2698	0.202	0.172	0.158	0,140	0.112	0.091	0.073	0.049	0	_	
≪ ij	0,2911	.0,183	0.158	0.147	U.133	0.109	0.094	0.078)	0.060	0.036	0	

На основании полученных результатов рассчитана стена из трех блоков. Устойчивость системы определяется величиной зоны контакта между

52

вторым и третьим блоком, которая зависит от $\frac{e_{u}(t)}{y_{0}}$; при $\frac{e_{u}(t)}{y_{0}} = 0$ система становится изменяемой.

Tab. suga 2

$P Q_{v} \text{or} y_{a}$											
e gu	۵	0.03	D.06	0.04	0.12	0.15	0.18	0,21	0,24	0.27	U, 30
9	40.16	23.6	16,1	12.2	9,4	7.5	6.1	5.1	4.3	3.7	3.3

Ч

На фиг. 4 приведены графики с. В интервале времени 10-

- 110 сит. Ядро ползучести бетона принято и виде

$$H(t,z) = -\frac{\partial}{\partial z} EC(t,z) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(EC_0 - \frac{EA_1}{z} \right) \left[1 - \exp\left[-\frac{1}{2} \left(t - z \right) \right] \right]$$

при числовых значениях нараметров: $EC_0 = 1.8$; $EA_1 = 0.64$ сут; 3 = 0.026. Значение со призято расным 0.2 g .



Dar. 4.

При заданных реологических нарамстрах и — устойчивость системы в конечном интернале времени определяется безразмерным и = <u>PQa</u>. Как лило на фил. 4, характерно резкое папараметром дение кривых e₂(t) пре значения: 1 близких к критическому времени, апределяющему момент потери устоячивости.

Ленинградский ордена Ленина политехнический институт им. М. П. Калнивна

Поступила 18 VE 1974

. Պ. Ե. ՎԱՅԿՅԵՎ, ՅՈՒ Դ. ՎԵԼԵԺ, Ա. Ա. ՉԵՎԵՆ

ՈՒՂՂԱՆԵՏՈՒՆԱՉԵԼ ԱՌԱՉԳԱՍԵՂՔԱՅԻՆ ԲԵՏՈՆԵԱ ԲԼՈՒՆԵՐԻՑ ԿԱՉԻԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՍԵՂՄՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կտը. աումով ու կյունաձև բետոնդա բլակեն սի ժերածված զմայի սեղմումը։ Ուսումիասիրվում է սոգրի աղդեցությու սը ս ստեմի կայունությոն վրա։ Բերվում է թվային օրինակ։

CREEP EFFECT ON DISPLACEMENTS OF THE ECCENTRICALLY COMPRESSED WALL MADE OF RECTANGULAR CONCRETE BLOCKS

P. I. VASILIEV, Y. G. VILLER, A. A. ZEVIN

Summary

Discussed is the flat contact problem of compressing two retangular concrete plates by an eccentric load.

It is shown that the creep has no affect either on the value of a contact zone or on contact voltages.

Based on the contact problem solution, discussed here are the displacements of the eccentrically compressed concrete block wall. It is shown that the creep has a substantial effect on the value of a critical load which leads to the stalling of the system.

AHTEPATYPA

 Иншенко В. И., Тропелянков І. П. Функции плаяния для по ремещений границы примоутольной области. Пав ВНИИГа, т. 93, 1970

-22

Filmfilm

XXVIII, N. 4,1975

Механика

H. E. CAPKHORE

К ВОПРОСУ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ

Для инженерной оценки сопротивляемо ти конструкционных материалов налоцикловому деформированию важно нахождение гаких заинсимостея, с помощью которых возможие предсление долговечности по опытным данным механических свойств материала при кратковременном статическом птружении.

С втой точки врения весьма удобной оказалась дависимость Коффиия [1]

$$z_{n} \Lambda^{\prime \prime} = C \qquad (1)$$

тиваливающая сиязь между иласт нески деромацией разрушения и пответствующим числом циклон при малоцикловом нагружении металлов и анапазоне N == 1.+. 106 циклов в условиях повышенных температур

В выражения (1) постоянные и и С определяются свойствами материала и условиями испытания. Для большинства металлов показатель стелени и=0.5. Постоянная С равна половине пластической деформации при патическом однократном нагружении, если предположить, что разрушелис наступает в течение 1/4 цихла.

Формула (1) применима для условий жесткого режима нагружения тах как одной из двух варьируемых в ней переменных величин является размах пластической деформации цикла (---)

В некоторых случаях 2 и др | при расчетах по формуле (1) берется общая деформация пикла, поскольку при высоких значениях долговечностей упругая деформация становится существенной по сравнению с пластичесвой или даже может превзойти с

В работе [3] уравнение кривой усталоств (1) преобразовано к вилу, удобному для использования в мягком режиму нагружения

$$\tau_y = \frac{Ec}{2N^{0.5}} = \tau^* \tag{2}$$

гае б_у— напряжение, соответствующее заданному числу циклов до разрушения Л', б'— напряжение предела выносливости

Исходными значениями механических параметров материала в заниенности (2) являются модуль упругости Е и постоянная с. характеризушцая относительное сужение образца перед разрушением при кратковремечном растяжении. Другой варнант описания кривой усталости праводлежит Мансову Зависимость, предложениая для условий жесткого режима нагружения, а ет вид

$$V = 0.5 D^{10} N^{-10} + \frac{1.75}{E} N^{-10}$$

где = предел прочности.

Параметр D определяется по относительному сужению понеречного т чения ф при статическом растяжении образца.

$$D = \ln \frac{100}{100 - \frac{1}{2}}$$

и по своему значению равен 2с.

Некоторые другие гим тетические формы записи аппрохсимации межд числом циклов А и величиной Ф, или в подробно обсуждены Мансонов в рецензии к работе [3].

Отмеченные выше уравнения кривой малоцикловой усталости вы разниты по отношению к виду циклической деформации, частоте нагруния и ис учитывают и м испия, происходящие в материале в процессе да сльного нахождения его под нагрузкой (накопление повреждений и т. д.)

Заметим, что забисимость типа (1) требует также соблюдения нодоби ктивых усталости для различных материалов и условий испытания.

Оценка сопрятивляемости стеклопластиков малоцикловому дефоркрованию по формулам (1) и (3) в настоящее время в принцине невозможн сак как известные литературные данные экспериментов [5—10], за исклитеплем [10], соответствуют мяскому режиму нагружения.

Проверка спрацедлиности выражения (2) для стеклонластиков такж оказывается грудной алочей гонду отсутствии в литературе данных по обносительному сужению поперечного сечения и наприжению предела вывочивости.

Как известно, при действии нагрузки в направлении волокой стем на тики и сарушлются практически хрупко. Поперечное сужение образи вере изломом по сравнению с металлами значительно меньше. Кроме тог то деталь особенностий макроразрушения волокинстого материала оврезалися ужение образца можно лишь весьма условно.

Что касается предела выносливости С^{*}, то у стеклонластиков, как и ; две вых металлов, такон пределу отсутствует. Величина п^{*}, соотнетствующи условно принимаемому пределу выносливости, в отличие от металлов судеста ино завлент от соблюдения идентичности технологии изготовлей, мат р¹ — а также от условии испытания. Это, в свою очередь, сильно уменинт достогерность значения о^{*}, принимаемого в основу расчета по формче (2). Заметим акже, что к настоящему премени в литературе отсутствугот систематическое дание по условно щ инимаемому пределу малоцикая вой выносливости стеклопластиков.

Таним образом, необходимость простого, но достаточие эффективное спосеба оценки усталостной прочности стеклопластиков при малом чися циямов нагружения с инженерно-конструкторской точки эрения является актуальной.

Искомая зависимость может быть эмпирической и содержать характеристики механических свойств, определяемые нутем кратконременного испытанкя материа и на простои янд деформации. Такими характеристиками ногут быть предел прочности от, модуль упругости Е, другие механические показатели и какие-либо их эмпирические или физические комбинации При атом, очевидно, следует иметь в инду как эффективность предласаечей зависимости так и позможность с использования на эсньве милимума изгормации о свойствах композита.

Как известно, циклическая прочность стекловодокнистых материалов э основном коррелирует со значением предела прочности пон краткониеменное статическом нагружении.

В настоящей работе в качестве залисимости, оценивающен усталостную прочность стеклопластика при малоничкловом нагружении. предлагается инприческое выражение типа

$$z_{n} = z_{n} \cdot N^{*} \tag{4}$$

со значением показателя степени (3=0.05.

Принимая для простоты, что разрушение в случае однократного статического растяжения происходит при N = 1, по формуле (4) получаем значибе соответствующего циклического напряжения, равное пределу прочности. По нашим экспериментальным результатам, обсуждаемым ниже, такое условие практически соблюдается.

Очевидно, зависимость (4) самая простая и удобная в применении Как и формула Коффина (1), она подразумевает подобие кривых усталости Велера в малоцикловой области ври варьировании материалами и видами зеформации в условиях пормальной температуры, когда нагрузка приклаливается вдоль волокон стеклопластика.

Для оценки усталостной прочности стеклопластика по формуле (4) и сравнения ее с экспериментальными результатами, нами испытывался ортотовально равнопрочно армированный стеклопластик CBAM на эпокси-фенольном связующем.

Образцы толщиной 5 мм в виде двухсторонней лопатки вырезались из австов композита в направлении колокон и предварительно подвергались подвергались обработке, как это было в [11].

Опыты проводились при комнатной температуре

Предел прочности стеклопластика при кратковременном растяжения определялся по результатам испытаний 5 образцов: п. = 49.85 = ±1.70 кгс/мл⁻.

Циклическое нагружение соответствовало мягкому режиму и осудествлялось на разрывной машние статического деформирования ЦДМ-10. дополнительно оборудованной автоматическими переключателями.

Испытания пронодились на пульсирующее растяжение Коэффициент истрии цикла г ~ 0.03. Частога нагружения—3 цикл чин. На фиг. 1 приведены кривая усталости, рассчитанная по формуле (4) экспериментальные точки, характеризующие фактическую прочность данного стеклопластика в описанных условиях малоциклового нагружения Как видно, соотнетствие между расчетными и экспериментальными данными виолие удовлетворительное, наибольшее отклонение по усталостной прочности менее 5%.



Фиг. 1. СВАМ 1:1 на знокен-фенольном связующем, растяж не вдоль волокон, 19,85 км мля, частота 3 дака мня. — расчет, — эксперимент.

Рассмотрим возможность прогнозирования крисых Велера различных стеклопластиков при пульсирующем растяжении, сжатии и симметричном чистом изгибе, исходя из литературных значений предела прочности материалов на тот же вид деформации [5—9]. Опытные данные усталостной прочности соответствуют мягкому режиму циклического нагружения частотой от 1 до 10 цик і мин.

На фиг. 2—5 приведены кривые усталости, рассчитанные по формуле (4), и соответствующие экспериментальные кривые или точки. Сравнение



Фиг. 2. Растяжение стаклотекстолита, частота 10 дикл. мин. [5] 1. ЭФ-32-301 на сочетании можсидной смолы с фенолоформальдетидной (по основе), с.р. 40.5 кгс мм², 2. КАСТ-В на феноло-формальдетидной смоле (по основе), 30.6 кгс мм², 3. То же, что и 2. по утку, с.р. 15.5 кгс мм², — расчет, точки-эксперимент.

^{*} Кранных точки соответствуют испытанию одного образца, остальные трех пораздой

График зависимости (4) является прямой линией в двойжой логарифмической системе координат, однако для конкретных значений [5 0.05 в 0.10 кригилно оказывает.я настолько малой, что и в приводимой здесь системе координат соомстрическое место вычисленных точек графически изображается отрезком прямой.

этих результатов показывает, что по формуле (4) можно с достаточной точностью оценить циклическую прочность стеклопластиков в области мало-



Фиг. 3. Оценка зависимости (4) по данным работы [6], частота 1 цикл лиля а. растажение: 1. СВАМ на эпокси-фенольном Гевизующем (вдоль волокон), зар. = 130 кис.м.м², 2. стеклотекстолит на ткани АСТТ(6) С₂ О и связующем ПН-1 (по основе), зар. 28.6 кис.м.м², 3. СВАМ на связующем БФ-4 (кдоль золокон), зар. 24.0 кис/м.м³. 6. стеклотекстолит на ткани АСТТ(6) С₂--В и связующем НН 3 (ап основе): 1. чистый изгиб. зав. = 30.7 кис.м.м², 2. сжатие, зас. 21.7 кис.м.м⁴. - расяст. — аксперимент.



Фис. 4. в. Стеклотекстолит горячего отверждения на эпокендном скязующем. растяжение по основе, 7ар. 29.0 кг мм², частота 2 цикл мин [7], — расчот, — вкспоримент 6. Стеклотекстолит 33 – 18С, растижение, 5ар. 43.5 кгс мм², чаетота 10 цикл мин [9], --- расчет. — эксперимент.

циклового нагружения на базе N от 1 до 10° *циклов*. Расхождение при этом носит случанный характер и по сравнению с фактическим значением циклической прочности не выходит за пределы 10%. Вместе с тем оказывается, что не для всех стеклопластиков можна определить усталостную прочность по формуле (4) при значении стенени $\beta = 0.05$. Это может означать, что не для всех материалов допустимо условне подобия крилых усталости.



Фис. 5. Чис. 61 — , частота 1 дикл. ман [6], 1. 17.11 — 1. 30 по знокся фенольном связующем и стоялогилии АСТТ(6)-С₂ комбинороданной структуры, был 57.5 ни. 2. Стеклогекстолит пераллельной структуры на сколе ЛН-3 и тали АСТТ(6)-С₂-В, ₇₈₄ — 31.3 кгс. м.я² --- растот, — эксперимент

Как показывают расчеты (табл. 1 и 2), с точки врения практического использования зависимости (4) стекловоложнистые материалы можно условно разбить на две срупны: материалы, пормально- и «слабо» сопроивляющиеся малошихловому деформированию.

Для первов группы стеклопластиков значение коэффициента усталостнов прочности материала

$$K = \frac{1}{\tau_{a}}$$

малоцикловой области, например, на базе 10° циклов, не менее 0.6, а для второй групны — K<0.60.

В табл. 1 и 2 для сравнения приведены расчетные и экспериментальные данные не усталостной прочности стеклопластиков. «нормально» и «слабоопротивляющихся малоникловому леформированию. Для материалов вервся группы показатель степени в = 0.05, а для второй значение в принято вдвое больше = 0.10.

Как нидно, для оценки малоцикловой прочности «слабо» сопротивляющихся стеклоциластиков снова можно использовать формулу (4), но при знаении b, равном 0.1. В этом случае разброс расчетных значений d, относительно фактически измеченных значений сиона небольшой и имеет случаиный характер.

100							
- 2	100		- 61	12.0	1.0	10.0	
		L.F	216				

"Нормальное" сопротивление милоцикловому деформированию (К 0.60), 3 0.05.

21 22	Тип стоялопластика	Оржент. продельн. оси образца	Цастота нагруж. цина мил	База исиыт. (число циклои N)	Предел прочн.	Факт. устал. Прочіі. Кіс лім	Расчет устал. прочи. 5 ^р кис жы ^г	Horpen.	Козф. факт. устал. прочи. К	Антер. источ.
		Ely.	ьсярующ	ее растяж	онич					
1	На смоле ПН-1 и твали АСТТ(6)-С1-0	Ilo ocu.	1	2000	28.4	17.0	19.4	+ 14.1	0.60	[6]
2	СТЭР-1-30 на твани АСТТ(6)-С		1	300	32.0	23.0	24.0	+4.3	0.72	[6]
3	СВАМ на связующем БФ-4	Вдоль воликон	1	300	24.1	18.3	18.1	- 1.1	0.76	[6]
4	СВАМ на эпокен-фенольном свизующем	Вдоль волокон	1	300	43.0	28.8	92.4	12,5	0.67	[6]
5	Горячего отвержд. на вноксид. соязующем	Ilo ocu.	2	500	29.0	20.6	21.2	- 2.9	0.71	171
6	3318 C	-	10	10000	43.5	29.1	27.5	- 5,5	0.67	9
		1	јульсиру н	ощее сжаті	02					
7	На смоле ПН-З и ткани АСТТ(6) -С. В	Hu ven.	1	500	21.7	14.1	15.8	+ 12.0	0.65	ñ
8	СТЭР-1-30 на нали АСТТ(6) - C ₂	14	E	500	37.4	25.2	27.3	4.2	0.70	[6]
		Christ	метричны	1 чистын	биченб					
-0	На смоле ПН-З и твани АСТТ(6)	Ho oen.	1	2000	32.1	20.0	22.1	10.5	0.60	[6]
10	Параллельн, структ. на сячле 1111-3 и тялик АСТТ(6)-С2-В	-	I	2000	31.3	18.8	21.4	13.8	0.60	[8]
11	СТЭР-1-30 на ткани АСТТ(6)-С1 нарал- лелън. структ.	14	1	500	39.5	26.2	28 1	1 7.3	U.68	[8]
2	СТЭР-1-30 им ткани АСТТ(6)-С, кочан- ниров. структ.	м	I	2000	57.5	40.8	39,2	- 3.9	0.71	[8]

2

Таблица 2

			- I - F F							
No. at a	Гип стеклопластика Каза Сип стеклопластика Спо стеклопластика Каза Сосн									
	Пульенр	ующее растам	нине, час	тота 1 ин	валмин [б	1				
1	МТБ на смоле ПИ-1 и ткани Т	Перекрест. структура	300	25.0	12.9	14.E	9,3	0.52		
2	МТГ на смоле ПН-1 и ткани Т	Перекрест. структура	300	26.8	14.8	15.1	= 2.0	0.55		
3	Ни смоле ПН-3 и ткани АСТТ(6) - С1-0	По осн.	2000	27.5	11.0	12.9	-17.3	0,40		
-1	На сколе ПН-1 и ткани АСТТ(б)С. О	По утку	2400	18.4	10,0	8.4	-16.0	0,55		
5	На смоле ПН-1 и тилии АСТТ(6) С.	llo ocu.	1500	30.0	15.0	14-4	- 10	0.50		

"Слабое" сопротивление малоцикловому деформированию (К < 0.60), 1 0.10

10

\$

Выводы. Предложена эмпирическая зависимость для оценки малоцикловой усталостион прочности стеклопластиков. При этом сделаны допущения о корреляции циклической прочности только с пределом прочности материала и о полобии кривых усталости для различных условий деформирования. Предлагаются два значения параметра эмпирической зависимости, обусловлениые степенью сопротивляемости стеклопластиков переменному нагружению. Последняя определяется коэффициентом усталостной прочиссти, по величине которой стеклопластики условно классифицированы на «нормально» и «слабо» сопротивляющиеся малоцикловому деформированию. Установлено удовлетворительное совпадение расчетных данных с экспериментальными результатами.

Институт механини АН Армянской ССР

Поступила 18 11/ 1975

Ն, հ, ՍԱՐԳԱՑԱՆ

ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏՆԵՐԻ ՍԱԿԱՎԱՑԻՎԱՅԻՆ ՀՈԳՆԱԾԱՅԻՆ ԱՄՐՈՒԻՑՈՒՆԸ ԿԱՆԽԱՏԵՍԵՂՈՒ ՀԱՐՑԻ ՇՈԳՐՋԸ

Ամփոփում

Առաջարկվում է էմպիրիկ բանաձն ապակեպլասանների սակավացիկլային ծոգնածային ամրությունը գնահատելու համար։ Արվել են ընդունելություն, ներ, որոնց համաձայն տարբեր նյութերի և դեֆորժացիաների անսակների հա մար կառուցվել են նման հոգնածային կորեր, ընդ որում նյութե ցիկլիկ ամրությունը կախված է միայն նրա ամրության սահմանից։ Առաջարկվում են եմպիրիկ բանաձնի պարաժնարի երկու արժերներ, որոնը պայմանավորված են փոփոխական բնոնավորման նկատմամբ ապակեպլաստների դիմադրողա, կանության աստիճանով, վերջինս որոշվում է հողնածային ամրության կործակցով, ըստ որի ապակեպլաստները պայմանականորնն դատակարված նն սակավացիկլային դեֆորմացմանը «նորմայի և «թույլ» դիմադրող խմբերի.

Սածմանված է ծաչվային տվյալների և ծայանի փորձնական – աթդյունջ. հերի բավարար համընկնում։

ON PREDICTION OF LOW-CYCLE FATIGUE RIGIDITY OF GLASS-FIBRE REINFORCED PLASTICS

N. E. SARKISIAN

Summary

An empiric power dependence to estimate fatigue rigidity of glass-fibre reinforced plastics is suggested. Assumptions are made of cyclic rigidity correlation with the rigidity limit of the material as well as of similarity of fatigue curves for various materials and modes of deformation.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Коффин. 1. Ф. Циклические деформации и усгалость металлов. В кн. Усталость и выносливость металлов. И.Л. М., 1963.
- 2 Стенюковин А. В. Никитин В. Н. Оценка сопротивления усталисти сталей в упругоиластической зо асти при высокой тимиературе. В кг. Вопросы механичской усталости. Млиниостр., М., 1964.
- Таверналаш, Коффин мл. Экспериментальное подтверждение обобщенного уравнения лля оценки усталости при малом числе циклов. Тр. Американского об-ва инженериплыехаников, сер. техи. механика, 4, 1964.
- Manson S. S. A simple procedure for estimating hightemperature low-cycle fatique Exptl. Mech. 1968, 8, No 8.
- В нашин Б. Н., Бартенея Г. М. Финотенов Г. П. Прочность иластмасс при повторных нагрузках. Пласт. массы. № 11, 1960.
- Слинкова М. К., Соколов Б. П., Сидорин Я. С., Пванов А. П. Прочность корруса судна на ставловиластика. Судостр., А., 1965.
- Констиние Е. Н., Дольнов Г. М. Влияние высоких растятивающих имприжения при попторникх нагрузках за прочность и деформативность стеклопластиями. В кн. Ияж. конструкции. Кратког содерж дока к XXV научи конф. АИСИ, А., 1967.
- Гладов С. Ф. Деформируемость стеклопластиков ври повторно-статическом нагнос. Пласт. массы, 1967. № 1.
- 9. Зависо Г. П., Стол В. С. Сопротниление стеклопластмасс деформированию и разрушению при статическом рестяжении. В ки Конструкционные свойства илистмасе. Машиностр., М., 1968.
- James T. K., Appl F. J., Bert C. W. Low-cycle fatigue of a glass-fabric-reinforced plastic laminate. Exptl. Mech., 1968, 8, No 7.
- 11 Сархисяв Н. Е. О влияния термической обработки на усталостные свойства неткавог стеклопластика. Или. АН АрмССР, Механика, 1, 25, № 5, 1972.

20.3540405 802 ЭРУЛРАЛРЬБРР ОЛИЧЬОРОВ УВЛЬЧИЧЕР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЯ ССР

Մեխանիկա

XXVIII, Nº 4, 1973

Механнка

Р. М. БАРСЕГЯН

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА НАПОРА

В настоящен работе дается уравнение одномерной фильтрации жидкости в доформируемых груптах с учетом начального граднента напора. Уравнение движения выводится на основе закона Дарси и отличается от соответственного уравнения неустановившейся фильтрации жидкости в деформируемых грунтах, принятого до настоящего времени в механике грунтов, где оснояным законом фильтрации принимается закон Дарси-Герсеванова [1]. На численном примере сопоставлены значения напоров для однои частной задачи, решения которон найдены с учетом и без учета начального граднента напора.

Как известно, фильтрация воды в плотных глинах возникает после того, как граднент напора превысит некоторое критическое значение, называемос начальным граднентом напора. В тех случаях, когда начальный граднент напора составляет не больше 10—20% от фактического градиента напора, то влияние начального градиента практически не учитывается. Если же оп достигает значительных величии (панример, для кембрийской глины [2] это значение больше 5), то учет влияния начального градиента напора становится практически необходимым.

Таким образом, при учете начального граднента напора обычная записимость Дарси заменяется следующими записимостями:

$$u_{z} = 0$$
, когда $\frac{\partial H}{\partial z} < i_{0}$
 $u_{z} = -k\left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_{0}\right)$, когда $\frac{\partial H}{\partial z} > i_{0}$

где и. — скорость фильтрации, 11 — напор, k — коэффициент фильтрации, I₀ — начальный градиент напора.

Выделяя в подонасыщенном грунте элементарный параллеленинед. обычным путем находим, что урапнение неразрывности жидкой фазы имсет вид

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

где 11 — пористость элементарного объема в момент времени l, причем $n = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, ε — коэффициент пористости.

5 Известия АН Армянскоп ССР Механика. No 4

Из (1) имеем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = (1+\varepsilon)^{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[k \left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_{0} \right) \right]$$
(2)

С учетом равенства $H = \frac{p}{2} + z$ (начало координатной системы находится на подошве слоя) ур-ние (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (1+z)^2 \left[\frac{\partial k}{\partial z} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + 1 - i_0 \right) + \frac{k}{\gamma} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right]$$
(3)

Вычисляя производные $\frac{\partial p}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$ из уравнения равновесия

$$p = q + w - \varepsilon + \left(\frac{\gamma \varepsilon + \gamma_{\varepsilon \kappa}}{1 + \varepsilon}\right)(l - z) \tag{4}$$

(где η — внешняя нагрузка. Ш — давление в воде по верхнему основанию водонасыщенного грунта, σ — напряжение в скелете, β — давление в воде. — мощность грунта, γ — удельный вес жидкости, γ_{ск} — удельный вес скельта) и подстапляя в (3), получим

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{k (\gamma - \gamma_{ck}) (l-z)}{\gamma (1+\varepsilon)^2} \frac{\partial z^2}{\partial z^2} - \frac{2k}{\gamma} \frac{(\gamma - \gamma_{ck}) (l-z)}{(1+\varepsilon)^3} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + \\ + \left| \frac{1}{\gamma} \frac{\partial k}{\partial z} \frac{(\gamma - \gamma_{ck}) (l-z)}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{2k}{\gamma} \frac{\gamma - \gamma_{ck}}{(1-\varepsilon)^2} \right| \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \\ - \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\gamma \varepsilon - \gamma_{ck}}{1+\varepsilon} + \frac{k}{\gamma} \frac{\partial - \sigma}{\partial z^2} - (1-i_0) \frac{\partial k}{\partial z} \right]$$

Подставляя в полученное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{d}{\partial \varepsilon^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{dk}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}, \quad u = \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{k_1 - k_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = k_0 - \text{const}$$

и язвестное соотношение [3]

$$k = k_1 - \frac{k_1 - k_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \left(\varepsilon_1 - \varepsilon \right)$$

получим

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2}} \frac{dt}{\partial t} = \frac{k}{\gamma} \left[\frac{\left(\frac{\gamma}{1}-\frac{\gamma}{\varepsilon_{x}}\right)\left(l-z\right)}{(1+\varepsilon)^{2}} - \frac{d\tau}{dz} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{d\tau}{dz} - \frac{d\tau}{d\tau} - \frac{d\tau}{dz} - \frac{d\tau}{d\tau} -$$

Второс уравнение, содержащее неизнестные функции H(z, t) и $\varepsilon(z, t)$, ножно получить из уравнении (2) и(4), оно имеет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{(1+\varepsilon)^2 - (\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_{ek})(l-z)\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}{\gamma \frac{d\varepsilon}{d\sigma}} \frac{\partial}{\partial z} \left[k \left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_0 \right) \right]$$
(6)

Уравнения (5) и (6) составляют систему основных уравнений одномерной фильтрации жидкости и деформируемых груптах с учегом начального градиента напора.

Для спрямленного участка компрессионной кривой е=--аб соп<-имеем

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{k}{\gamma} \left[\frac{(\gamma - \gamma_{cs})(l-z)}{(1+\varepsilon)^{2}} + \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial z^{2}} \\ = \left[k \left(1 - t_{e} - \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma c + \gamma_{rs}}{(1+\varepsilon)^{2}} \right) - \frac{2k}{\gamma} \frac{\gamma - \gamma_{rs}}{(1+\varepsilon)^{2}} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \\ - \left[\frac{2k}{\gamma} \frac{(\gamma - \gamma_{cs})(l-z)}{(1+\varepsilon)^{3}} - \frac{k_{0}}{\gamma} \frac{(\gamma - \gamma_{cs})(l-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^{2}} - \frac{k_{0}}{a\gamma} \right] \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right)^{2}$$
(7)
$$\frac{H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial l} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial w}{\partial l} + \frac{(1+\varepsilon)^{2} + a(\gamma - \gamma_{cs})(l-z)}{a\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left[k \left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_{0} \right) \right]$$
(8)

где а — коэффициент уплотнения.

Граничные условия обычные. На водопроницаемых участках известизначения напора а на водонепроницаемых участках границы

$$\frac{\partial H}{\partial z} := i_b$$

Уравнения (5) и (6) (также (7) и (8)) при in=0 превращаются в систему уралнений одномерной фильтрации жидкости в деформируемых грунтах без учета начального градиента напора.

При постоянных q и @ и осредненном коэффициенте пористости из основных уравнении (5) и (6) получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{(1 + i \epsilon_{\theta})^{2} + a(\gamma - \gamma_{ex})(l - z)}{a_{\gamma}^{2}} \frac{\partial}{\partial z} \left[k \left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_{0} \right) \right]$$
(9)

Коэффициент фильтрации и в уравнении (9) не может быть постоянным, в противном случае это уравнение совпало бы с уравнением одномерной фильтрации без учета начального градиента напора.

Для примера найдем решение уравнения (9) при k=µ+vz (µ и v—постоянные) с условиями $H(z, 0) = H_0 = l + \frac{q}{\gamma} = \text{const}, \quad H(0, t) = 0, \quad H(l, t) = H_1 = \text{const}$

Перенишем уравнение (9) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (a - \beta z) \left[\sqrt[n]{\frac{\partial H}{\partial z}} + (\mu + \gamma z) \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right]$$
(10)

r ae

$$a = \frac{(1 + z_{cp})^2 + al(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_{cu})}{a\tilde{\gamma}}, \qquad \beta = \frac{\tilde{\gamma}_{cu} - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}}, \quad \overline{H} = H - i_0 z$$

Начальное и граничные условия для (10) будут

$$\widetilde{H}(z, 0) = H_0 - i_0 z, \quad \overline{H}(0, t) = 0, \quad \overline{H}(t, t) = H_0 - i_0 t = \overline{H}_0$$
(11)

Применяя преобразование Лапласа по времени к задаче (10)-(11). получим задачу (12)-(13)

$$(\alpha - \beta_2) (\mu + \nu_2) \frac{d^2 h}{dz^2} + \nu (\alpha + \beta_2) \frac{dh}{dz} - ph = i_0 z - H_0$$
(12)
$$h (0, p) = 0, \quad h(l, p) = \frac{H_1}{p}$$

где

$$h(z, p) = \int e^{-zt} \overline{H}(z, t) dt$$
(13)

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (12), при условии вр = эх дзется формулой

 $h = C_1 \sin V p y + C_2 \cos V p y$

где $y = \int \frac{dz}{V(z + zz)(y + yz)}$, C, и C. произвольные постоянные, а

решение задачи (12)-(13) имсет пид

$$h = \frac{i_0}{4a_0} \left[\frac{1}{p} \frac{p}{p-a_0} e^{1\frac{\pi}{n}y} + \frac{1}{p} \frac{p}{p+a_0} (b^2 - 4a_0c)e^{-1\frac{\pi}{n}y} - \frac{2b}{\sqrt{p}} \right] \stackrel{\text{m}}{\longrightarrow} \frac{H_0}{1} + \frac{M\sin 1}{p} \frac{p(y-y_2) + N\sin 1}{p(y_1-y_2)} - \frac{H_1\sin \sqrt{p}(y_2-y_2)}{p\sin 1 p(y_2-y_2)}$$
(14)

гле

$$a_{0} = \beta a_{0} + b_{0} = \beta a_{0} + a_{0} + c_{0} = a_{0}, \quad y_{1} = \frac{1}{||a_{0}||} \ln (b_{0} + ||a_{0}c_{0}|)$$

$$y_{2} = \frac{1}{||a_{0}|} \ln \left[2a_{0}l + b + 2 \right] \left[\overline{a_{0}} (a_{0}l^{2} + bl + c) \right]$$

$$M = \frac{H_{0}}{||p|} - \frac{i_{0}}{4a_{0}} \left[\frac{||p||e^{1/a_{0}q_{1}}}{|p| + a_{0}|} + \frac{||p||(b^{2} - 4a_{0}c)|e^{-1/a_{0}}}{|p| + a_{0}|} - \frac{2b}{||p||} \right]$$

$$N = \frac{H_{0}}{||p||} - \frac{i_{0}}{||a_{0}||} \left[\frac{1}{||p| + a_{0}|} - \frac{1}{||p||} \frac{||p||(b^{2} - 4a_{0}c)|e^{-1/a_{0}q_{0}}}{||p| + a_{0}|||-1/a_{0}q_{0}||} - \frac{2b}{||p||} \right]$$

Решение задачи и преобразованиях без учета начального градиента напора имеет выд

$$h = -\frac{H_0}{1/p} - \frac{\frac{H_0}{1/p}}{\sin 1/p} \left(y - y_0\right) + \left(\frac{H_0}{p} - \frac{H_0}{1/p}\right) \sin 1/p \left(y_1 - y_0\right)}{\sin 1/p} \left(y_1 - y_0\right)$$
(15)

Рассмотрим первые два приближения решений (14) я (15). В первом приближении из (14) получим

$$h = \frac{\overline{H_1}(y_1 - y)}{p + y_1 - y_2} + Q \frac{V p}{p + a_0}$$
(16)

rae

$$Q = \frac{i_0}{4a_0} \left\{ e^{\sqrt{a_0}y} - (b^2 - 4a_0c) e^{-\sqrt{a_0}y_1} - \frac{y}{y_1 - y_2} \left[e^{\sqrt{a_0}y_1} + (b^2 - 4a_0c) e^{-\sqrt{a_0}y_1} \right] - \frac{y}{y_1 - y_2} \left[e^{\sqrt{a_0}y_1} + (b^2 - 4a_0c) e^{-\sqrt{a_0}y_1} \right] \right]$$

Орягинал для (16) будет

$$\overline{H} = \frac{\overline{H}_1(y_1 - y)}{y_1 - y_2} + Q\left(\frac{1}{1 - i} + i\sqrt{a_0}e^{-a_0t}\operatorname{erf} i + \overline{a_0t}\right)$$
(17)

Соответственное решение для задачи без учета начального градиента напора будет

$$H = \frac{H_1(y_1 - y)}{y_1 - y_2} \tag{18}$$

Отметим, что решения (17) и (18) пригодны для предельно больших значений времени.

Оригинал для второго приближения, полученный из формулы (14), имеет вид

$$H = \frac{1}{1 - i} \left(Q_{2} - Q_{3} - Q_{5} - \frac{1}{2a_{0}} - H_{0} \right) \\ + \left(Q_{2} - Q_{3} - \frac{Q_{1}}{a_{0} - w} \right) i + a_{0} e^{-i} \operatorname{erf} i + \frac{1}{a_{0} - w} + \frac{Q_{1}}{a_{0} - w} - \frac{Q_{1}}{a_{0} - w} + \frac{Q_{1}}{w} \right) + w e^{-i} \operatorname{erf} i + \frac{Q_{1} - Q_{2}}{w} + \frac{Q_{1}}{w} + \frac{Q_{2}}{w} + \frac{Q_$$

r,ae

$$m = \frac{a}{(y_1 - y_2)^2}, \qquad Q_1 = \frac{i_0}{4a_0} \left[(b^2 - 4a_0 c) e^{-1} \right]$$
$$-\frac{i_0}{4a_0} \frac{G_1}{(y_1 - y_2)^2}$$
$$G_1 = 6^+ (y - y_2) \left[e^{1-a_2 q_1} + (b^2 - 4a_1 c + e^{-1}) \right]$$

гле

543

 $Q_i =$

$$Q_{1} = y\left[e^{1-a_{-y}} - (b^{2} - 4a_{0}c)e^{-1-a_{0}}\right]$$

$$Q_{1} = \frac{I_{0}}{4a_{0}}\frac{G_{1}}{(y_{1} - y_{2})}$$

$$G_{2} = (y - y_{2})^{3}[e^{1-a_{0}} + (b^{2} - 4a_{0}c)e^{-1-a_{0}y_{1}}]$$

$$(y_{1} - y)^{3}[e^{1-a_{0}} - (b^{2} - 4a_{0}c)e^{-1-a_{0}y_{1}}]$$

$$\frac{-6\left(\frac{i_{0}b}{2a_{0}} - H_{0}\right)}{(y_{1} - y_{2})^{2}} = Q_{1} - \frac{\left(\frac{i_{0}b}{2a_{0}} + H_{0}\right)[(y - y_{2})^{3} - (y_{1} - y)^{3}]}{(y_{1} - y_{2})^{3}}$$

$$Q_{1} = \frac{H_{1}(y_{1} - y)^{3}}{(y_{1} - y_{2})^{3}} + Q_{1} = \frac{6H_{1}(y_{1} - y)}{(y_{1} - y_{2})^{3}}$$

 $(y_1 - y_3)^3$ $(y_1 - y_3)^3$

Соотвеуственное решение задачи без учета начального граднента напора 6yger

$$H = -\frac{H_{0}}{1 - t} - H_{0} = e^{-t} \operatorname{erf} = \operatorname{ot} + \frac{H_{0}[(y - y_{2})^{t} - (y_{1} - y_{1})^{t}]}{(y_{1} - y_{2})^{t}} \left(\frac{1}{1 - t} - 1 - \operatorname{or} e^{-t} \operatorname{erf} = 1 - t\right) - \frac{1}{1 - t} \left(\frac{Q_{0}^{t}}{Q_{0}^{t}} - \frac{Q_{0}^{t}}{w}\right) e^{-t} + \frac{Q_{0}^{t}}{w}$$

$$(20)$$

5,1e

$$Q = \frac{H_1(y_1 - y_1)}{(y_1 - y_2)^3} \cdot Q_1 = \frac{6H_1(y_1 - y_1)}{(y_1 - y_2)^3}$$

Для сопоставления решений (19) в (20) приведем численный пример со следующими исходными данными:

$$a = 0.01 \frac{c_M}{\kappa_2}, \quad z_{cp} = 0.7, \quad l = 1000 \ c_M, \quad \gamma = 0.001 \frac{\kappa_1}{c_M},$$
$$\gamma_{cx} = 0.0028 \frac{\kappa_1}{c_M}, \quad 3 = 1.8, \quad \sigma = 0.1682 \ c_M, \quad \mu = 0.0002 \frac{c_M}{c_g m},$$
$$\gamma = 0.00214 \frac{1}{c_g m}, \quad i_0 = 5, \quad H_0 = 0, \quad H_1 = 10000 \ c_M$$



На фиг. 1 приведены графики напоров для двух эначений времени $t = 100 \ сут и t = 1000 \ сут.$ Графики 1 и 3 построены по формуле (19), а 2 и 4 — по формуле (20) соответственно для $t = 100 \ сут и t = 1000 \ сут.$ График 5 соответствует предельному случаю, когда $t \rightarrow \infty$. Как видно, на фиг. 1 расхождение между значениями напоров, нычисленными по формуле (19) (с учетом начального градиента напора) и (20) (без учета начального градиента напора) значительное.

Ереванский полителнический институт им К Маркеа

Ноступила 5 Х 1974

IF. IT. PRIPERSUL

ՋՐԻ ՉԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ՖԻԼՏԲԱՑԻԱՑԻ ՄԻԱՉԱՓ ԽՆԴԻՐԸ ՃՆՇՄԱՆ ԳՐԵԳԱՆԱՆԱՆ ԳՐԱՅԵՆՏԻ ՀԱՇՎԱԻՄԱՄԲ

Ամփոփում

Հոդվածում արտածվել է ձևափոխվող բնահողում հեղուկի ֆիլարացիայի միալափ խնդրի հավասարումը ճնչման սկզբնական գրադիննաի հաշվառմամբ։ Ստացված հավասարումը տարբերվում է մինչև այժմ բնահոդնրի մեխանիկայում օգտագործվող Տավասարումներից, որովհետև ֆիլարացիայի հիմնական օրենը է ընդունված Գարսու օրենքը ի տարբերություն առաջներում ընդունված Գարսի-Գերսեվանովի օրենքի։ Թվային օրինակից երևում է, որ միննույն խնգրի համար ստացված երկու յուծումների (Տնչվան սկզբնական դրագիննտի հայվառմամբ և առանց այն հաշվի առնելու գեպքում) միջն տարբերությունը կղալի է։

ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF UNSTEADY FILTRATION OF WATER WITH REGARD FOR THE INITIAL PRESSURE GRADIENT

R. M. BARSEGHIAN

Summary

The equation of one-dimensional filtration of water in deformed sell with regard for original pressure gradient is considered.

The equation of motion is derived on the basis of Darci's law and differs from the corresponding equation of the unsteady liquid filtration accepted nowdays in seil mechanics, where Darci-Gersevanov's law is assumed to be basic.

A numerical example is given to show that the difference between the solution of problems with regard for initial pressure gradient and regardless of this gradient is considerable.

ΛΗΤΕΡΑΤΥΡΑ

1. Фларин В. А. Основы механики сруптов. - 2. Госстройнодат. М., 1961.

2. Рана С. А. Осадки гидротехнических сооружений из глинах с малой плажностыма «з идротехническое строительство», № 9, 1950.

3. Всл. швекий В. М. Осадки сооружений во времени. Госстройныдат. М., 1940.