# ՄԵԽԱՆԻԿԱ

# МЕХАНИКА

# MECHANICS

1975

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

К. А. АГАЯН

# ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Контактные задачи для бесконечной или полубесконечной пластины с упругими креплениями в виде накладок (стрингеров) малой толщины рассматривались в работах многих авторов. Эти задачи иначе называются задачами о передаче нагрузок от стрингеров к упругим телам. Достаточно полный перечень работ, посвященных этим задачам, содержится в [1].

В настоящей работе рассматривается периодическая контактная задача для упругого листа в виде бесконечной тонкой пластины, усиленной симметрично расположенными и равноотстоящими друг от друга парами упругих накладок конечной длины.

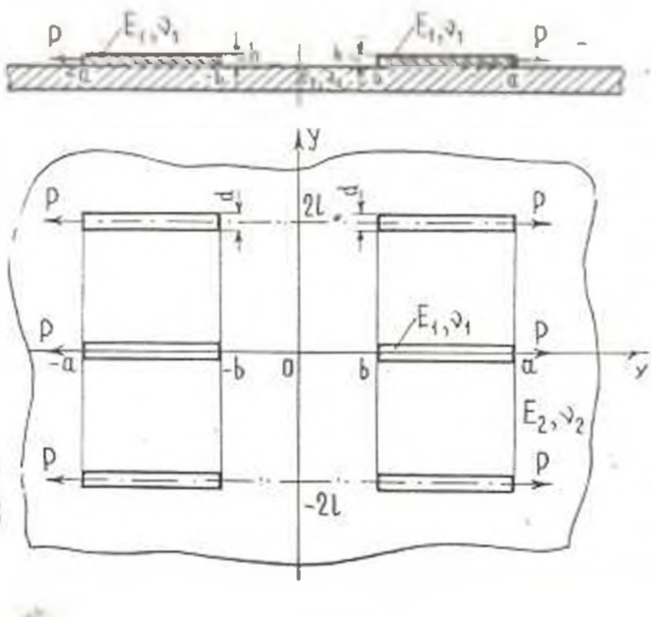
На основе известных [2, 3] предположений решение поставленной задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей. Решение этого уравнения, как и в работах [3, 4, 5], сводится к решению вполне регулярной или квазивполне регулярной бесконечной системы линейных уравнений простой структуры. Приводятся числовые результаты.

1. Пусть упругий лист в виде бесконечной пластины на конечных отрезках $[-a, -b]$ и $[b, a]$ $(b<a)$ линий $y=2nl$ $(n=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$ усилен упругими накладками прямоугольного поперечного сечения малой толщины $h$ и малой ширины $d$. К концам накладок приложены равные по величине и противоположные по направлению силы $P$ (фиг. 1). Целью работы является определение закона распределения контактных напряжений вдоль линий соединения накладок с пластиной.

Отметим, что указанная задача в случае произвольного конечного числа накладок была рассмотрена в работе [6], где ее решение было сведено к вполне или квазивполне регулярной системе из $N$ бесконечных систем линейных уравнений ($2N$ — число пар накладок). При больших $N$ эти системы приобретают довольно громоздкий вид и исключается возможность получения эффективного решения. Но при больших $N$ естественно эту задачу интерпретировать как периодическую в одном направлении задачу. Одновременно с этим периодическая задача представляет собой самостоятельный интерес и, очевидно, эквивалентна некоторой смешанной граничной задаче для полуполосы. С другой стороны, решение периодической задачи в принципе можно получить из решения задачи в случае конечного числа накладок при помощи предельного перехода. Однако, фактическое осуществление предельного перехода в данном случае связано с определенными трудностями и представляется нам невозможным. Таким образом, рассмотрение в настоящей работе периодической задачи аргументировано тем, что, во-первых, она представляет самостоятельный интерес и принципиально отлична от рассмотренной в [6] задачи, и, во-вторых, при больших $N$ эффективное решение задачи из работы [6], фактически совпадающей с периодической задачей, весьма затруднительно. В противовес этому, как будет показано ниже, решение периодической задачи можно получить в довольно простом и удобном для вычислений виде.

Теперь, как и в работах [2, 3], будем предполагать, что вследствие малости толщины $h$ жесткость накладок на изгиб пренебрежимо мала, так что давлением накладок на пластину можно пренебречь. Тогда под накладками будут действовать только тангенциальные контактные напряжения. Предположим далее, что эти контактные напряжения сосредоточены вдоль средних линий накладок. Иначе говоря, примем модель одноосного напряженного состояния накладки в сочетании с моделью контакта по линии. Кроме этого, примем, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии.

Условимся все физические и геометрические величины, относящиеся к накладкам, обозначить индексом 1, а для плоскости индексом 2.




Фиг. 1.

Чтобы поставленную задачу сформулировать в виде определенного функционального уравнения, обратимся сначала к построению соответствующей функции влияния для пластины.

Функция влияния — горизонтальные перемещения точек пластины от приложенной в точке $(x_0, y_0)$ сосредоточенной горизонтальной силы $P$, имеет вид [6]

$$u^{(2)}(x, y) = P\theta_2 \left[ \ln \frac{1}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{1}{\varkappa_2} \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right] + C \tag{1.1}$$

где $\theta_2 = \varkappa_2 / 4\pi\mu_2 (1+\varkappa_2)$, а $C$ — произвольная постоянная.

Здесь $u^{(2)}(x, y)$ — горизонтальное перемещение точки $(x, y)$ пластины, то есть перемещение вдоль оси $Ox$. Отметим, что в случае обобщенного плоского напряженного состояния $\varkappa_2 = (\lambda_2 + 3\mu_2)/(\lambda_2 + \mu_2) = (3-\nu_2)/(1+\nu_2) > 1$, где $\lambda_2$ и $\mu_2$ — коэффициенты Ляме, а $\nu_2$ — коэффициент Пуассона.

Пусть теперь на пластинку действуют периодически повторяющиеся с периодом $2l$ в направлении оси $Oy$ единичные горизонтальные сосредоточенные в точках $(x_0, 2nl)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ силы. Такая нагрузка, очевидно, выражается формулой

$$P(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - 2nl)$$

где $\delta(x, y)$ — известная дельта-функция Дирака.

На основании известного принципа наложения теории упругости и согласно (1.1) находим, что горизонтальные перемещения $U^{(2)}(x, y)$ точек пластины на оси $Ox$ имеют вид

$$U^{(2)}(x) = -2\theta_2 \ln \left| \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x_0)}{2l} \right| - \frac{2\theta_2}{\varkappa_2} \frac{\pi(x-x_0)}{2l} \operatorname{cth} \frac{\pi(x-x_0)}{2l} + C \tag{1.2}$$

где $C$ — произвольная постоянная, выражающая жесткое смещение пластины.

Здесь предполагается, что последняя функция в направлении оси $Oy$ продолжена периодически с периодом $2l$.

Отметим, что при получении (1.2) были использованы известные соотношения [7]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{2x} \left( \operatorname{cth} \pi x - \frac{1}{\pi x} \right)$$

Вследствие периодического характера задачи закон распределения контактных напряжений под парами накладок одинаков. Поэтому можем ограничиться рассмотрением одной из них, например, той, для которой $n = 0$.

Обращаясь теперь к выводу разрешающего уравнения, заметим, что из равновесия частей $[-a, -b]$ и $[b, a]$ накладок и на основании закона Гука будем иметь

$$\varepsilon^{(1)}(x)=\frac{dU^{(1)}(x)}{dx}=\frac{1}{E_1hd}\begin{cases}\displaystyle\int_{-a}^{x}\tau(s)\,ds, & x\in[-a,\ -b]\\ \displaystyle\int_{b}^{x}\tau(s)\,ds, & x\in[b,\ a]\end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь $E_1$ — модуль упругости материала накладки, $\tau(x)$ — подлежащее определению тангенциальное напряжение, действующее под накладкой вдоль линий соединения ее с пластиной и приложенное к накладке, $U^{(1)}(x)$ — горизонтальное перемещение точек накладки.

С другой стороны, перемещения точек отрезков $[-a,\ -b]$ и $[b,\ a]$ пластины от действующих на нее по тем же отрезкам контактных напряжений интенсивности $\tau(x)$, согласно (1.2), будут

$$U^{(2)}(x)=2\theta_2\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\left[-\ln\left|\operatorname{sh}\frac{\pi(x-s)}{2l}\right|+\frac{\pi(x-s)}{2l\varkappa_2}\operatorname{cth}\frac{\pi(x-s)}{2l}\right]\tau(s)ds+C \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в условие контакта

$$\frac{dU^{(1)}(x)}{dx}=\frac{dU^{(2)}(x)}{dx},\quad x\in\{[-a,\ -b],\ [b,\ a]\}$$

после некоторых элементарных выкладок для определения контактных напряжений получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\left(\int_{-a_1}^{-b_1}+\int_{b_1}^{a_1}\right)\left[\operatorname{cth}\frac{s-x}{2}+K(s-x)\right]\varphi'(s)\,ds=\lambda\varphi(x) \tag{1.5}$$

где

$$K(x)=\frac{1}{\varkappa_2}\left[\frac{x}{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}-\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right]$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-b_1}^{x}\tau^*(s)\,ds, & x\in[-a_1,\ -b_1]\\ \displaystyle\int_{b_1}^{x}\tau^*(s)\,ds, & x\in[b_1,\ a_1]\end{cases}$$

$$a_1=\pi a/l,\qquad b_1=\pi b/l,\qquad \lambda=\frac{4\mu_2(1+\varkappa_2)l}{E_1\varkappa_2hd}$$

Следует отметить, что первый интеграл в (1.5) понимается в смысле главного значения по Коши.

Следует еще отметить, что истинное контактное напряжение под накладками теперь дается соотношениями

$$\tau(x) = \frac{\pi P}{l}\varphi'\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Далее, из условия равновесия накладки вытекает, что функция должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered} \varphi(-a_1) = 1, \qquad \varphi(-b_1) = 0 \\ \varphi(b_1) = 0, \qquad \varphi(a_1) = 1 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Таким образом, решение поставленной выше контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6).

2. Приступив к решению интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6), произведем в (1.5) следующую замену переменных:

$$\begin{gathered} \operatorname{ch} s = \alpha u + \beta, \quad \alpha = \frac{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}{2} \\ \operatorname{ch} x = \alpha v + \beta, \quad \beta = \frac{\operatorname{ch} a_1 + \operatorname{ch} b_1}{2} \end{gathered} \tag{2.1}$$

После некоторых элементарных операций (1.5) примет вид

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{\rho(u)}{u-v} + K_1(u, v)\right]\varphi'(u)\,du = \lambda\varphi(v) \tag{2.2}$$

где

$$\rho(u) = \frac{2}{\alpha}\sqrt{(\alpha u + \beta)^2 - 1}, \quad K_1(u, v) = K(s - x) + K(s + x)$$

причем $s$ и $x$ следует заменить на $u$ и $v$ по формулам (2.1). При этом граничные условия (1.6) преобразуются к виду

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \tag{2.3}$$

Для контактных напряжений будем иметь формулу

$$\tau(x) = \frac{\pi P}{\alpha l}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{l}\varphi'(v), \quad v = \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{l} - \beta\right) \tag{2.4}$$

Решение уравнения (2.2) при граничных условиях (2.3) ищем в виде [4]

$$\varphi'(u) = \frac{1}{\rho(u)\sqrt{1-u^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(u) \tag{2.5}$$

где $T_n(u)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева первого рода, $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя (2.5) в (2.2), после некоторых элементарных операций относительно неизвестных коэффициентов $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} X_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{m,n} X_n + a_m X_0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n X_n = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$A_{m,n} = R_{m,n} + M_{m,n}, \quad a_m = R_{m,0} + M_{m,0} \tag{2.7}$$

$$R_{m,n} = \frac{2\lambda}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-v^2}\, U_{m-1}(v)\, dv \int_{-1}^{1} \frac{T_n(u)\, du}{\rho(u)\sqrt{1-u^2}}$$

$$M_{m,n} = -\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-v^2}\, U_{m-1}(v)\, dv \int_{-1}^{1} K_2(u, v) \frac{T_n(u)\, du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(u)\, du}{\rho(u)\sqrt{1-u^2}}, \quad K_2(u, v) = \frac{K_1(u, v)}{\rho(u)}$$

Здесь $U_{m-1}(v)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Отметим, что при получении бесконечной системы линейных уравнений было использовано известное соотношение для многочленов Чебышева [7]

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(u)\, du}{(u-v)\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ \pi U_{n-1}(v), & (n = 1, 2, \ldots) \end{cases} \quad (-1 \leqslant v \leqslant 1)$$

3. Перейдя к исследованию бесконечной системы линейных уравнений (2.6), не останавливаясь здесь на подробностях, отметим лишь, что при помощи известных методов [5, 6] можно показать, что при условии

$$\lambda < 2\sqrt{3}\, \frac{1-A}{B}$$

где

$$A = \frac{2}{3\sqrt{\pi\varkappa_2}}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\left(\frac{\partial K_2(u, v)}{\partial u}\right)^2 du\, dv\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$B = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{cth} b_1\left|1 + \frac{\alpha(2\varepsilon+1)}{4\operatorname{sh} b_1}\operatorname{cth} b_1\right|$$

бесконечная система (2.6) будет вполне регулярной.

Заметим, что ядро бесконечной системы (2.6) представляет собой коэффициенты Фурье некоторой функции по полной ортогональной в квадрате $-1 \leqslant u, v \leqslant 1$ системе функций $\{U_{m-1}(u)\, U_{n-1}(v)\}_{m,n=1}^{\infty}$, которая имеет квадратично интегрируемую производную. Из известных теорем о двойных рядах, как это показано в [5, 6], следует, что при остальных значениях параметра $\lambda$ бесконечная система (2.6) квазивполне регулярна. При этом суммы

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty}\left[|R_{m,n}| + |M_{m,n}|\right]$$

при $m \to \infty$ стремятся к нулю как $m^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$, где $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число.

4. Численные результаты по разбираемой задаче были получены на ЭВМ „Наири — 2" при следующих значениях параметров:

1) $\lambda = 1, \quad \pi a/l = 1, \quad \pi b/l = 0.2$

2) $\lambda = 1, \quad \pi a/l = 3, \quad \pi b/l = 1.2$

3) $\lambda = 1, \quad \pi a/l = 3, \quad \pi b/l = 0.6$

4) $\lambda = 2, \quad \pi a/l = 3, \quad \pi b/l = 0.6$

5) $\lambda = 2, \quad \pi a/l = 3, \quad \pi b/l = 0.6$

В случаях 1) — 4) в качестве материалов контактирующих тел для накладки взяты углеродистая сталь, а для пластины — свинец.

Следует заметить, что случай 4) получается из случая 3) заменой $a$, $b$ и $l$ соответственно на $2a$, $2b$ и $2l$. Этим фактически учтено влияние величины полупериода $l$.

Случай 5) представляет собой тот же самый случай 3), но при другом значении параметра $\lambda$, которым учитываются различные варианты сочетания материалов накладки и пластины. Во всех этих случаях принималось $l/hd = 5$.

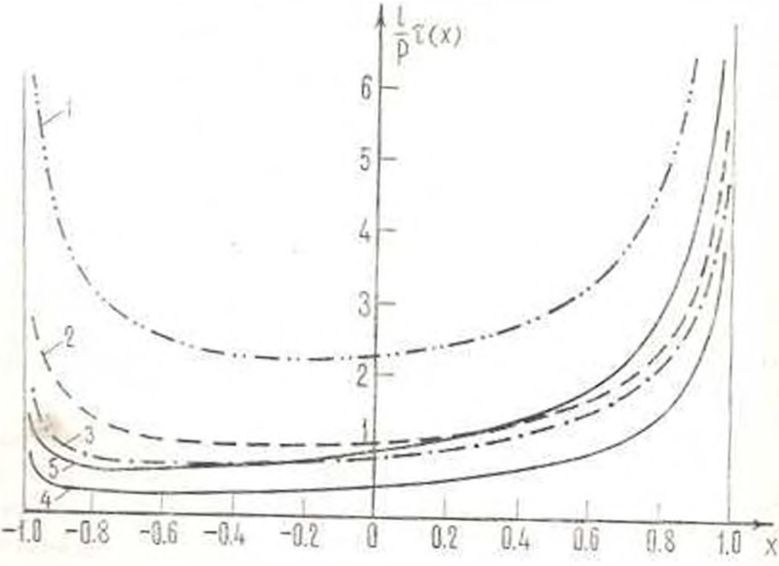
При указанных значениях параметров бесконечная система (2.6) была решена на ЭВМ „Наири-2" методом редукции. Сначала бралась система из восьми уравнений, а затем система из десяти уравнений. При этом оказалось, что соответствующие решения этих систем совпали с большой точностью, а именно: после запятой оказались идентичными пять цифр.

Решения системы (2.6) из десяти уравнений соответственно указанным выше случаям приведены в таблице, в которой входящие числа имеют после запятой шесть верных цифровых знаков.

*Таблица*

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $X_0$ | 1.492876 | 0.707074 | 0.574065 | 0.658546 |
| $X_1$ | 0.318021 | 0.237275 | 0.332463 | 0.509501 |
| $X_2$ | 0.044339 | 0.030477 | 0.026451 | 0.73110 |
| $X_3$ | −0.009980 | −0.003773 | −0.001242 | 0.001305 |
| $X_4$ | 0.005484 | 0.005753 | 0.005087 | 0.009783 |
| $X_5$ | −0.004075 | −0.001954 | −0.001661 | −0.018772 |
| $X_6$ | 0.001059 | 0.001918 | 0.002045 | 0.003619 |
| $X_7$ | −0.002175 | −0.000718 | −0.000873 | −0.001747 |
| $X_8$ | 0.000690 | 0.000803 | 0.000983 | 0.001814 |
| $X_9$ | −0.001412 | −0.000330 | −0.000474 | −0.000777 |
| $X_{10}$ | −0.000316 | 0.000402 | 0.000529 | 0.000942 |

На основе этой таблицы по формулам (2.3) и (2.4) получены числовые значения тангенциальных контактных напряжений $\tau(x)$ в различных точках. При помощи этих значений построены графики изменения хода функции $\frac{l}{P}\tau(x)$ (фиг. 2). Сопоставление этих графиков показывает, что при увеличении размеров участка контакта и величины полупериода $l$ контактные напряжения резко падают. При этом коэф-




Фиг. 2.

фициент концентрации напряжения вблизи концов накладки также уменьшается. С другой стороны, при варьировании упругих констант накладки и пластины в достаточно коротком интервале их изменения незначительно сказываются на распределении контактных напряжения.

В заключение приношу благодарность Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 5 VII 1974

Կ. Լ. ԱՂԱՅԱՆ

## ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Աշխատանքում դիտարկվում է փոքր հաստություն ունեցող երկուական առաձգական վերադիրներով սիմետրիկ դասավորությամբ ուժեղացված անվերջ սալի համար պարբերական կոնտակտային խնդիրը։*

*Խնդրի լուծումը բերվում է շոշափող կոնտակտային լարումն արտահայտող ֆունկցիայի նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրո դիֆերենցիալ հավասարման։*

*Այդ հավասարման լուծումը փնտրվում է ըստ Չեբիշևի առաջին սեռի բազմանդամների շարքի տեսքով։ Շարքի անհայտ գործակիցների նկատմամբ ստացվում է լիովին կամ քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հավասարումների անվերջ սիստեմ։*

*Բերվում է թվային օրինակ։*

## A PERIODIC CONTACT PROBLEM FOR AN INFINITE PLATE WITH ELASTIC STIFFENERS

K. L. AGAYAN

The present paper deals with a periodic contact problem for an infinite plate reinforced by symmetrically placed dual elastic stiffeners of a small thickness.

The solution of the problem is reduced to a singular integro-differential equation with respect to a function expressing a contact stress.

The solution of this equation is found as a series over Chebishev polynomials of the first kind. For the unknown coefficients of the series a quite regular or a quasi-quite infinite system of linear algebraic equations is obtained.

A numerical example is presented.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Муки Р., Стернберг Е.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. мех., Тр. Америк. об-ва инж.-механ., серия Е, т. 35, №4, 1968, 124—135.
2. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
3. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, в. 5, 1969.
4. *Arutunyan N. K., Mchitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and termoelasticity. Witold Nawacki Anniversary Volume. Wolters-Nordhoff Publishing, 1971, p. 3—20.
5. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, т. 36, вып. 5, 1972.
6. *Агаян К. Л.* Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. МТТ, 1972, №5.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4. Физматгиз, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

М. Г. МЕЛКОНЯН, А. М. МКРТЧЯН

# ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Рассматривается плоская задача теории упругости для двух прямоугольников из различных материалов, которые прижимаются друг к другу вдоль одной стороны при отсутствии сцепления. Действия прижимающих сил, приложенных на сторонах прямоугольников, параллельных линии прижатия, передаются к прямоугольникам либо через жесткие гладкие штампы, либо непосредственно. Зона контакта двух прямоугольников считается неизвестной и определяется в дальнейшем.

Некоторые граничные задачи плоской теории упругости для прямоугольных областей рассматривались в работах [1—4], где основное внимание уделено определению полей напряжений и перемещений. В некоторых из них дополнительно изучен характер распределения контактных напряжений под жесткими штампами [2—4].

Во всех отмеченных задачах область контакта считалась известной. Задачи с определением области контакта для случаев, когда одно из контактирующих тел имеет неограниченный размер, были рассмотрены в работах [5—10].

Определению области контакта между двумя конечными контактирующими телами из различных материалов посвящено исследование [11].

Следует отметить, что в работе [11] использованы такие граничные условия, которые допускают отрыв прижатых друг к другу двух прямоугольников только в средней части линии прижатия.

Основной целью настоящей работы является определение размера контактной области — зоны активной передачи нормальной нагрузки от одного прямоугольника к другому.

1. Пусть прямоугольники $ABDC$ и $C'D'FE$ с модулями Юнга $E_1$, $E_2$ и коэффициентами Пуассона $\nu_1, \nu_2$ соответственно прижимаются друг к другу без сцепления вдоль оси $Ox$ по сторонам $CD$ и $C'D'$ (фиг. 1). По сторонам $AB$ и $EF$ прямоугольников действуют жесткие гладкие штампы, симметрично расположенные относительно оси $y$, а вне штампов действуют заданные нормальные нагрузки.

Для простоты принимается, что остальные части границ прямоугольников свободны от внешних нагрузок.

Из симметрии следует, что область контакта будет симметричной относительно оси $Oy$. Длина участка контакта $2l_3$ пока неизвестна и подлежит определению в дальнейшем.

Выбирая координатные оси, как показано на фиг. 1, рассматриваем только правую половину основной области, удовлетворяя при этом следующим граничным условиям:

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,\ h_1) = \tau_{xy}^{(2)}(x,\ -h_2) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi),\quad v_1(x,\ h_1) = \varphi_1(x) \quad (0 \leqslant x < l_1)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(\pi,\ y) = \sigma_x^{(1)}(\pi,\ y) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant h_1),\quad \sigma_y^{(1)}(x,\ h_1) = f_1(x) \quad (l_1 < x \leqslant \pi) \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(\pi,\ y) = \sigma_x^{(2)}(\pi,\ y) = 0 \quad (-h_2 \leqslant y \leqslant 0),\quad v_2(x,\ -h_2) = \varphi_2(x) \quad (0 \leqslant x < l_2)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x,\ -h_2) = f_2(x) \quad (l_2 < x \leqslant \pi)$$

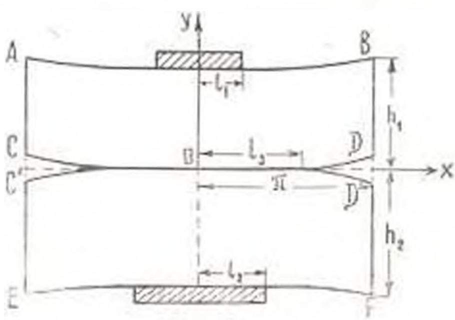
условиям симметрии

$$\tau_{xy}^{(1)}(0,\ y) = u_1(0,\ y) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant h_1),\quad \tau_{xy}^{(2)}(0,\ y) = u_2(0,\ y) = 0 \quad (-h_2 \leqslant y \leqslant 0) \tag{1.2}$$

и условиям контакта двух прямоугольников

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,\ 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x,\ 0) = 0,\quad \sigma_y^{(1)}(x,\ 0) = \sigma_y^{(2)}(x,\ 0) \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$v_1(x,\ 0) = v_2(x,\ 0) \quad (0 \leqslant x \leqslant l_3),\quad \sigma_y^{(1)}(x,\ 0) = \sigma_y^{(2)}(x,\ 0) \quad (l_3 < x \leqslant \pi) \tag{1.3}$$




Фиг. 1.

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений Эри известными соотношениями [3]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$Eu = \int\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,dx - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x} + EU_0 \tag{1.4}$$

$$Ev = \int\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,dy - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial y} + EV_0$$

Бигармоническую функцию $\Phi(x,\ y)$ ищем в виде

$$\Phi(x,\ y) = \begin{cases} \Phi_1(x,\ y) & \text{в области } ABDC \\ \Phi_2(x,\ y) & \text{в области } C'D'FE \end{cases}$$

где

$$\Phi_i(x,y) = P_1 x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} ky}{k^2 \operatorname{sh} kh_i} \left\{ X_k^{(i)} \left[ 1 + \frac{kh_i}{\operatorname{th} kh_i} - \frac{ky}{\operatorname{cth} ky} \right] - \right.$$

$$\left. - Y_k^{(i)} \left[ \frac{kh_i}{\operatorname{sh} kh_i} + \frac{\operatorname{ch}(h_i + (-1)^i y)}{\operatorname{ch} ky} - ky \frac{\operatorname{sh} k(h_i + (-1)^i y)}{(-1)^i \operatorname{ch} ky} \right] \right\} \cos kx - \tag{1.5}$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k^{(i)} x}{\beta_k^{(i)2} \operatorname{sh} \beta_k^{(i)} \pi} \left[ 1 + \frac{\beta_k^{(i)} \pi}{\operatorname{th} \beta_k^{(i)} \pi} - \frac{\beta_k^{(i)} x}{\operatorname{cth} \beta_k^{(i)} x} \right] \cos \beta_k^{(i)} y; \; \beta_k^{(i)} = \frac{k\pi}{h_i} \quad (i = 1,2)$$

При выборе функции $\Phi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ в виде (1.5) условия равенства нулю касательных напряжений по всему контуру прямоугольника, а также на линиях контакта $y = 0$ и симметрии $x = 0$ удовлетворяются тождественно. Из условий $u_1(0, y) = u_2(0, y) = 0$ получаем $U_0^{(1)} = U_0^{(2)} = 0$.

Удовлетворив остальным граничным условиям, после ряда выкладок для определения неизвестных коэффициентов $X_k^{(i)}$, $Y_k^{(i)}$, $Z_k^{(i)}$ $(i = 1,2)$ получим следующие бесконечные системы алгебраических уравнений:

$$Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)} = \frac{4(-1)^k k^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{\beta_p^{(1)} Z_p^{(1)}}{(\beta_p^{(1)2} + k^2)^2} - \frac{\beta_p^{(2)} Z_p^{(2)}}{(\beta_p^{(2)2} + k^2)^2} \right] + U_k^{(1)} + U_k^{(2)}$$

$$Z_k^{(i)} = \frac{4(-1)^k \beta_k^{(i)2}}{h_i \Delta_k^{(i)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-i} p}{(\beta_k^{(i)2} + p^2)^2} \left[ X_p^{(i)} - (-1)^k Y_p^{(i)} \right] \quad \begin{matrix} (i = 1, 2) \\ (k = 1, 2, 3 \ldots) \end{matrix} \tag{1.6}$$

и парные ряды-уравнения

$$2(-1)^{i-1} P_1 h_i + E_i V_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} X_k^{(i)} \cos kx = E_i \varphi_i(x) \quad (0 \leqslant x < l_i)$$

$$2P_1 - (-1)^i \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (1 + M_k^{(i)}) X_k^{(i)} - N_k^{(i)} Y_k^{(i)} \right] \cos kx = f_i(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Z_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(x) \tag{1.7}$$

$$(l_i < x \leqslant \pi)$$

$$V_0^{(1)} - V_0^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (E_1^{-1} Y_k^{(1)} - E_2^{-1} Y_k^{(2)}) \cos kx = 0 \qquad (0 \leqslant x < l_2)$$

$$2(E_1 + E_2) P_1 - \sum_{k=1}^{\infty} (E_2 Y_k^{(1)} - E_1 Y_k^{(2)}) \cos kx = \sum_{k=1}^{\infty} (E_1 U_k^{(2)} - E_2 U_k^{(1)}) \cos kx -$$

$$- E_2 \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^{(1)} \varphi_k^{(1)}(x) - E_1 \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^{(2)} \varphi_k^{(2)}(x) \qquad (l_2 < x \leqslant \pi) \tag{1.8}$$

В (1.6)–(1.8) введены обозначения

$$\varphi_k^{(i)}(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_k^{(i)}\pi}\left[\operatorname{ch}\beta_k^{(i)}x-\frac{\beta_k^{(i)}\pi}{\operatorname{sh}\beta_k^{(i)}\pi}\operatorname{ch}\beta_k^{(i)}(\pi-x)-\beta_k^{(i)}(\pi-x)\operatorname{sh}\beta_k^{(i)}x\right]$$

$$U_k^{(i)}=N_k^{(i)}X_k^{(i)}-M_k^{(i)}Y_k^{(i)},\quad \Delta_k^{(i)}=\operatorname{cth}\beta_k^{(i)}\pi+\beta_k^{(i)}\pi/\operatorname{sh}^2\beta_k^{(i)}\pi \tag{1.9}$$

$$M_k^{(i)}=\frac{e^{-kh_i}}{\operatorname{sh}kh_i}+\frac{kh_i}{\operatorname{sh}^2kh_i},\quad N_k^{(i)}=\frac{1+\operatorname{cth}kh_i}{\operatorname{sh}kh_i}\quad (i=1,\ 2)$$

Уравнения (1.6) представляют собой бесконечные системы алгебраических уравнений для определения $Z_k^{(1)}$, $Z_k^{(2)}$, $Y_k^{(1)}+Y_k^{(2)}$ через $X_k^{(i)}$, $Y_k^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$. А соотношения (1.7)–(1.8) представляют собой тригонометрические парные ряды-уравнения, которые намного сложнее обычных уравнений такого типа тем, что в их правых частях фигурируют слагаемые в виде рядов, содержащих неизвестные коэффициенты и комбинации гиперболических функций $\varphi_k^{(i)}(x)$.

2. Рассматривая парные уравнения (1.7) относительно неизвестных коэффициентов $X_k^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$ соответственно, а (1.8) относительно комбинаций $E_1^{-1}Y_k^{(1)}-E_2^{-1}Y_k^{(2)}$ и применяя известные методы решения таких уравнений [12], приведем их к бесконечным системам алгебраических уравнений

$$X_k^{(i)}=\sum_{p=1}^{\infty}\left[a_{pk}^{(i)}X_p^{(i)}+b_{pk}^{(i)}Y_p^{(i)}+c_{pk}^{(i)}Z_p^{(i)}\right]+\gamma_k^{(i)}\quad (i=1,\ 2) \tag{2.1}$$

$$E_2Y_k^{(1)}-E_1Y_k^{(2)}=\frac{k}{2}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\left[E_2U_p^{(1)}-E_1U_p^{(2)}\right]J_{pk}(l_3)-\sum_{p=1}^{\infty}E_2Z_p^{(1)}K_{pk}^{(1)}(l_3)-\right.$$

$$\left.-\sum_{p=1}^{\infty}E_1Z_p^{(2)}K_{pk}^{(2)}(l_3)-4(E_1+E_2)P_1\int_{l_3}^{\pi}Z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\right\} \tag{2.2}$$

и к уравнениям для определения постоянных $P_1$, $V_0^{(1)}$, $V_0^{(2)}$:

$$2(-1)^iP_1\left(h_i-4\ln\sin\frac{l_i}{2}\right)-E_i\left[V_0^{(i)}-v_i(0)\right]=\int_0^{l_i}G_i(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta-$$

$$-(-1)^i\int_{l_i}^{\pi}F_i(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta-\sum_{p=1}^{\infty}p^{-1}\left[M_p^{(i)}X_p^{(i)}-N_p^{(i)}Y_p^{(i)}\right]g_p(\cos l_i)-$$

$$-(-1)^i\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^pZ_p^{(i)}\int_{l_i}^{\pi}L_p^{(i)}(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\quad (i=1,2) \tag{2.3}$$

$$E_1E_2\left| V_0^{(1)} - V_0^{(2)} + 8P_1 \ln \sin \frac{l_2}{2}\right| = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1}[E_1 L_p^{(2)} - E_2 L_p^{(1)}]\, y_p(\cos l_3) +$$

$$+ E_2 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(1)} \int_{l_2}^{\pi} L_p^{(1)}(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta + E_1\sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(2)}\int_{l_1}^{\pi} L_p^{(2)}(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta$$

В (2.1)—(2.3) введены обозначения

$$a_{pk}^{(i)} = -\frac{k}{2}M_p^{(i)} J_{pk}(l_i),\quad b_{pk}^{(i)} = \frac{k}{2}N_p^{(i)}J_{pk}(l_i),\quad c_{pk}^{(i)} = -\frac{k}{2}(-1)^{p+i}K_{pk}^{(i)}(l_i)$$

$$\gamma_k^{(i)} = \frac{k}{2}\left[\int_0^{l_i} G_i(\theta)\, z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta - 4(-1)^i P_1\int_{l_i}^{\pi} z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta -\right.$$

$$\left.-(-1)^i\int_{l_i}^{\pi} F_i(\theta)\, z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta\right]$$

$$J_{nk}(l_i) = \int_{l_i}^{\pi} y_k(\cos\theta)\, y_n(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}d\theta = \tag{2.4}$$

$$= (n^2-k^2)^{-1}[k z_k(\cos l_i)\, y_n(\cos l_i) - n z_n(\cos l_i)\, y_k(\cos l_i)]\quad (n\ne k)$$

$$J_{kk}(l_i) = (2k)^{-1}\left\{4\sum_{m=1}^{k-1} P_m(\cos l_i)[P_m(\cos l_i)\cos l_i - P_{m+1}(\cos l_i)] + 2 +\right.$$

$$\left.+ 4\cos l_i + P_k^2(\cos l_i) - P_{k-1}^2(\cos l_i) - 2P_{k-1}(\cos l_i)P_k(\cos l_i)\right\}\quad (i=1,2)$$

$$F_i(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{f_i(x)\sin x/2}{(\cos\theta-\cos x)^{1/2}}dx,\quad G_i(\theta) = -\frac{E_i\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\psi_i(x)\sin x/2}{(\cos x - \cos\theta)^{1/2}}dx$$

Через $K_{pk}^{(i)}(l_i)$ обозначены интегралы

$$K_{pk}^{(i)}(l_i) = \int_{l_i}^{\pi} L_p^{(i)}(\cos\theta)\, z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta\quad(i=1,2) \tag{2.5}$$

Функции $L_p^{(i)}(\cos\theta)$ связаны с $\varphi_p^{(i)}(x)$ формулой

$$L_p^{(i)}(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\varphi_p^{(i)}(x)\sin x/2}{(\cos\theta-\cos x)^{1/2}}dx\quad(i=1,2) \tag{2.6}$$

Здесь $P_k(x)$ — полиномы Лежандра, а $y_k(x)$ и $z_k(x)$ имеют вид

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x) \quad (|x| < 1) \tag{2.7}$$

Интегралы (2.5) легко вычисляются, если рассматривать их как интегралы типа Ломмеля [3] для функций $L_p(\cos\theta)$, $M_p(\cos\theta)$, $K_p(\cos\theta)$, $R_p(\cos\theta)$, где

$$M_p(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_\theta^\pi \left[ \operatorname{sh} p\varphi + \frac{p\pi \operatorname{sh} p(\pi - \varphi)}{\operatorname{sh} p\pi} - p(\pi - \varphi) \operatorname{ch} p\varphi \right] \frac{\cos \varphi/2 \, d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}} \tag{2.8}$$

$$K_p(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_\theta^\pi \frac{\operatorname{sh} p\varphi \cos \varphi/2 \, d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}, \quad R_p(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^\theta \frac{\operatorname{ch} p\varphi \sin \varphi/2 \, d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}$$

При больших значениях индекса „$p$" для этих функций имеют место асимптотические оценки

$$\begin{aligned} L_p(x) &= O(p^{-3}), \quad M_p(x) = O(p^{-2}) \\ K_p(x) &= O(p^{-2}), \quad R_p(x) = O(p^{-1}) \end{aligned} \qquad (|x| < 1 - \delta) \tag{2.9}$$

и на концах интервала $(0 < \theta < \pi)$ эти функции принимают значения

$$L_k(1) = M_k(-1) = K_k(-1) = 0$$

$$L_k(-1) = 2\left( \operatorname{cth} k\pi - \frac{k\pi}{\operatorname{sh}^2 k\pi} \right), \quad R_k(1) = \frac{2}{k\pi}$$

$$R_k(-1) = 2 \operatorname{cth} k\pi, \quad K_k(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} p}{p^2 - k^2} \tag{2.10}$$

$$M_k(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p(p^2 - k^2)}{(p^2 - k^2)^2}$$

Решая совместно третье уравнение из (1.6) и уравнение (2.2) относительно „главных" частей, содержащих $Y_k^{(1)}$ и $Y_k^{(2)}$, предварительно исключив неизвестные $Z_k^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ при помощи (1.6), получим

$$\begin{aligned} Y_k^{(i)} = (-1)^i \frac{k}{2} \Bigg[ & 4P_1 \int_{l_1}^{\pi} z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \, d\theta - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_2 U_p^{(1)} - E_1 U_p^{(2)}}{E_1 + E_2} J_{pk}(l_1) + \\ & - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_2 Z_p^{(1)} K_{pk}^{(1)}(l_2) + E_1 Z_p^{(2)} K_{pk}^{(2)}(l_3)}{E_1 + E_2} \Bigg] + \frac{E_i}{E_1 + E_2} (U_k^{(1)} + U_k^{(2)}) - \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$
-\frac{16\,E_i(-1)^k k^2}{\pi(E_1+E_2)}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n X_n^{(1)}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p a_{pkn}^{(1)}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n Y_n^{(1)}\sum_{p=1}^{\infty} a_{pkn}^{(1)}+\right.
$$

$$
\left.+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n X_n^{(2)}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p a_{pkn}^{(2)}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n Y_n^{(2)}\sum_{p=1}^{\infty} a_{pkn}^{(2)}\right\} \quad (i=1,\ 2)
$$

где

$$
a_{pkn}^{(i)}=\frac{\beta_p^{(i)3}}{h_i\Delta_p^{(i)}(\beta_p^{(i)2}+k^2)^2(\beta_p^{(i)2}+n^2)^2}
$$

Таким образом, вместо бесконечных систем (1.6), (2.1) и (2.2) можно рассматривать эквивалентные им системы (2.1) и (2.11).

Докажем, что эти последние системы квази-вполне регулярны. Для этого оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных.

На основе (2.1) и из оценок, полученных в работе [11], следует, что

$$
\sum_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(i)}|<\frac{A_i}{\sqrt{k}},\quad \sum_{p=1}^{\infty}|b_{pk}^{(i)}|<\frac{B_i}{\sqrt{k}},\quad (i=1,2) \tag{2.12}
$$

а на основе (2.9) и (2.3), с использованием значений функций $K_{pk}^{(i)}(x)$ [3], получим

$$
\sum_{p=1}^{\infty}|c_{pk}^{(i)}|<\frac{C_i}{\sqrt{k}}\quad (i=1,\ 2) \tag{2.13}
$$

Так как $\Delta_k^{(i)}>1$ и $a_{pkn}^{(i)}>0$ для любых значений индексов, то

$$
\sum_{p=1}^{\infty}a_{pkn}^{(i)}<\frac{1}{\pi}\left|\frac{k^2+n^2}{(k^2-n^2)^2}\ln\frac{k}{n}-\frac{1}{(k^2-n^2)^2}\right|
$$

$$
(i=1,\ 2)
$$

$$
\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p a_{pkn}^{(i)}<\frac{2\pi^3 h_i^4}{(\pi^2+k^2h_i^2)^2(\pi^2+n^2h_i^2)^2}
$$

и для сумм модулей коэффициентов при неизвестных системы (2.11) будем иметь

$$
\frac{16E_ik^2}{\pi(E_1+E_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n n\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p a_{pkn}^{(i)}\right|<
$$

$$
<\frac{32\pi^2 E_i h_i^4 k^2}{(E_1+E_2)(\pi^2+h_i^2k^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi^2+n^2h_i^2)^2}=O(k^{-2}) \tag{2.14}
$$

$$
\frac{16E_ik^2}{\pi(E_1+E_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n n\sum_{p=1}^{\infty}a_{pkn}^{(i)}\right|<\frac{4E_i}{\pi^2(E_1+E_2)}\quad (i=1,\ 2)
$$

Суммы модулей остальных коэффициентов при неизвестных в системе (2.11) стремятся к нулю, по крайней мере, как $O(k^{-1/2})$.

Таким образом, суммы модулей коэффициентов бесконечных систем (2.1) и (2.11) при $n \to \infty$ стремятся к нулю или остаются меньше единицы. Следовательно, эти системы, свободные члены которых имеют порядок $O(k^{-1/2})$, квази-вполне регулярны и имеют единственное решение, которое можно определить методом последовательных приближений [13].

3. Имея решения бесконечных систем $X_k^{(i)}$, $Y_k^{(i)}$, $Z_k^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, на основе (1.4) и (1.5) для определения напряжений и перемещений получим

$$\sigma_y^{(i)}(x, y) = 2P_i - (-1)^i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}\,ky}{\mathrm{sh}\,kh_i} \left\{ X_k^{(i)} \left[ 1 + \frac{kh_i}{\mathrm{th}\,kh_i} - \frac{ky}{\mathrm{cth}\,ky} \right] - \right.$$

$$\left. - Y_k^{(i)} \left[ \frac{kh_i}{\mathrm{sh}\,kh_i} - ky \frac{\mathrm{sh}\,k(h_i + (-1)^i y)}{(-1)^i \mathrm{ch}\,ky} + \frac{\mathrm{ch}\,k(h_i + (-1)^i y)}{\mathrm{ch}\,ky} \right] \right\} \cos kx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^{(i)} \mathrm{ch}\,\beta_k^{(i)} x}{\mathrm{sh}\,\beta_k^{(i)} a} \left[ 1 - \frac{\beta_k^{(i)} a}{\mathrm{th}\,\beta_k^{(i)} a} + \frac{\beta_k^{(i)} x}{\mathrm{cth}\,\beta_k^{(i)} x} \right] \cos \beta_k^{(i)} y \qquad (3.1)$$

$$\frac{E_i v_i(x, y)}{1 - \nu_i} = \frac{E_i V_0^{(i)} - 2P_i y}{1 + \nu_i} - (-1)^i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\,ky}{k\,\mathrm{sh}\,kh_i} \left\{ X_k^{(i)} \left[ \frac{2}{1 - \nu_i} + \frac{kh_i}{\mathrm{th}\,kh_i} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{ky}{\mathrm{th}\,ky} \right] - Y_k^{(i)} \left[ \frac{kh_i}{\mathrm{sh}\,kh_i} - ky \frac{\mathrm{ch}\,k(h_i + (-1)^i y)}{\mathrm{sh}\,ky} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2\,\mathrm{sh}\,k(h_i - (-1)^i y)}{(-1)^i (1 + \nu_i)\,\mathrm{sh}\,ky} \right] \right\} \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^{(i)} \mathrm{ch}\,\beta_k^{(i)} x}{\beta_k^{(i)} \mathrm{sh}\,\beta_k^{(i)} a} \left[ \frac{1 - \nu_i}{1 + \nu_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_k^{(i)} x}{\mathrm{cth}\,\beta_k^{(i)} x} - \frac{\beta_k^{(i)} a}{\mathrm{th}\,\beta_k^{(i)} a} \right] \sin \beta_k^{(i)} y$$

По этим формулам можно вычислить значения основных расчетных величин в любой точке прямоугольников.

Однако, при приближении к концам штампов и области контакта, некоторые ряды расходятся или сходятся медленно.

Для улучшения сходимости этих рядов и выделения особенностей напряжений на концах штампов, преобразуем формулы для контактных напряжений и перемещения на линиях $y = h_1$, $y = 0$ и $y = -h_2$.

Подставляя значения $X_k^{(i)}$, $Y_k^{(i)}$, $Z_k^{(i)}$ из бесконечных систем в (3.1), после ряда выкладок для контактных напряжений $\sigma_y^{(i)}$ и перемещений вне штампов $v_i$ получим следующие удобные для расчета формулы:

$$\sigma_y^{(i)}[x,(-1)^{i-1}h_i]=f_i(x)-\frac{R_i\sqrt{2}\cos x/2}{2\sqrt{\cos x-\cos l_i}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}\left\{\int_x^{l_i}\frac{F_i(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos x-\cos\vartheta}}+\right.$$

$$+(-1)^i\int_x^{l_i}\frac{G_i(\vartheta)\sin\vartheta}{\sqrt{\cos x-\cos\vartheta}}d\vartheta-(-1)^i\sum_{p=1}^{\infty}p[M_p^{(i)}X_p^{(i)}-$$

$$-N_p^{(i)}Y_p^{(i)}]\int_x^{l_i}\frac{y_p(\cos\vartheta)\,\mathrm{tg}\,\vartheta/2}{\sqrt{\cos x-\cos\vartheta}}d\vartheta-\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\beta_p^{(i)}Z_p^{(i)}\times$$

$$\left.\times\int_x^{l_i}\frac{M_p^{(i)}(\cos\vartheta)+K_p^{(i)}(\cos\vartheta)}{\sqrt{\cos x-\cos\vartheta}}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta\right\}\quad \begin{matrix}(i=1,2)\\(0\leqslant x<l_i)\end{matrix}\tag{3.2}$$

$$(E_1+E_2)\,\sigma_y(x,0)=\frac{R_3\sqrt{2}\cos x/2}{2\sqrt{\cos x-\cos l_3}}+$$

$$+\frac{\cos x/2}{\sqrt{2}}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}p[E_2U_p^{(1)}-E_1U_p^{(2)}]\int_x^{l_3}\frac{y_p(\cos\vartheta)\,\mathrm{tg}\,\vartheta/2}{\sqrt{\cos x-\cos\vartheta}}d\vartheta-\right.$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left[E_2\beta_p^{(1)}Z_p^{(1)}\int_x^{l_3}\frac{M_p^{(1)}(\cos\vartheta)+K_p^{(1)}(\cos\vartheta)}{\sqrt{\cos x-\cos\vartheta}}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta+\right.$$

$$\left.\left.+E_1\beta_p^{(2)}Z_p^{(2)}\int_x^{l_3}\frac{M_p^{(2)}(\cos\vartheta)+K_p^{(2)}(\cos\vartheta)}{\sqrt{\cos x-\cos\vartheta}}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta\right]\right\}\quad(0\leqslant x<l_3)\tag{3.3}$$

$$E_i\,v_i[x,(-1)^{i-1}h_i]=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\left\{(-1)^i\int_{l_i}^{x}\frac{F_i(\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta/2}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos x}}d\vartheta-\right.$$

$$-\int_{x}^{l_i}\frac{G_i(\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta/2}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos x}}d\vartheta-\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}Z_p^{(i)}\int_{l_i}^{x}\frac{L_p^{(i)}(\cos\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta/2}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos x}}d\vartheta-$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{\infty}[M_p^{(i)}X_p^{(i)}-N_p^{(i)}Y_p^{(i)}]\int_{l_i}^{x}\frac{z_p(\cos\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta/2}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos x}}d\vartheta\right\}-2\int_0^{l_i}G_i(\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta/2\,d\vartheta+$$

$$+4P_1(-1)^i\sqrt{2}\ln\frac{\sin x/2+\sqrt{\sin^2 x/2-\sin^2 l_i/2}}{\sin l_i/2}-E_i\,v_i(0)\quad \begin{matrix}(i=1,\ 2)\\(0<x<l_i)\end{matrix}\tag{3.4}$$

Здесь постоянные множители $R_i$ $(i = 1, 2, 3)$ вычисляются по формулам

$$R_i = 4P_1 + F_i(l_i) + G_i(l_i) + (-1)^i \sum_{p=1}^{\infty} [M_p^{(i)} X_p^{(i)} - N_p^{(i)} Y_p] z_p(\cos l_i) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p Z_p^{(i)} L_p^{(i)}(\cos l_i) \quad (i = 1, 2)$$

$$R_3 = 4(E_1 + E_2) P_1 - \sum_{p=1}^{\infty} [E_2 U_p^{(1)} - E_1 U_p^{(2)}] z_p(\cos l_3) + \tag{3.5}$$

$$+ E_2 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(1)} L_p^{(1)}(\cos l_3) - E_1 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(2)} L_p^{(2)}(\cos l_3)$$

Имея контактные напряжения (3.2), легко вычислить значения сил, действующих на штампы

$$Q_i = 2 \int_0^{l_i} \sigma_y^{(i)}[x, (-1)^{i-1} h_i] dx - 4\pi P_i - 2 \int_{l_i} f_i(x) dx \tag{3.6}$$

До сих пор мы предполагали, что длина зоны контакта $2l_3$ между материалами известна. Это привело к тому, что контактное напряжение (3.3) неограниченно возрастает при приближении к концу зоны контакта $(x \to l_3)$. Но из физических соображений ясно, что контактное напряжение должно быть непрерывным и ограниченным, то есть должно иметь место условие $\sigma_y(l_3, 0) = 0$, откуда и следует, что $R_3 = 0$. Это условие дает уравнение для определения размера контакта

$$4(E_1 + E_2) P_1 + \sum_{p=1}^{\infty} [E_1 U_p^{(2)} - E_2 U_p^{(1)}] z_p(\cos l_3) +$$

$$+ E_2 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(1)} L_p^{(1)}(\cos l_3) + E_1 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(2)} L_p^{(2)}(\cos l_3) = 0 \tag{3.7}$$

Для получения полного решения задачи необходимо совместно решать бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (1.6), (2.1), (2.2), линейные уравнения (2.3) и трансцендентное относительно $l_3$ уравнение (3.7).

4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть два прямоугольника одинаковых размеров прижимаются друг к другу двумя жесткими плоскими штампами одинаковой длины, а контур прямоугольника вне штампов свободен от внешних нагрузок, то есть

$h_1 = h_2,\ l_1 = l_2,\ f_1(x) = f_2(x) = 0,\ \varphi_1(x) = -\delta_1,\ \varphi_2(x) = \delta_2;\ \delta_1, \delta_2 \sim \mathrm{const}.$
В этом случае $X_k^{(1)} = -X_k^{(2)},\ Y_k^{(1)} = -Y_k^{(2)},\ Z_k^{(1)} = Z_k^{(2)}$.

Введением новых неизвестных по формулам

$$X_k^{(1)} = 2P_1 X_k,\ Y_k^{(1)} = 2P_1 Y_k,\ Z_k^{(1)} = 2P_1 Z_k \tag{4.1}$$

бесконечные системы (1.6), (2.1), (2.2) и трансцендентное уравнение (3.7) приводятся к виду

$$X_k = \frac{k}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(N_p Y_p - M_p X_p) J_{pk}(l) - \frac{k}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p Z_p K_{pk}(l) + g_k(\cos l)$$

$$Y_k = \frac{k}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(N_p X_p - M_p Y_p) J_{pk}(l_3) - \frac{k}{2}\sum_{p=1}^{\infty} Z_p K_{pk}(l_3) - g_k(\cos l_3)$$

$$Z_k = \frac{4(-1)^k \gamma_k^2}{h\Delta_k}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1} p}{(\gamma_k^2 + p^2)^2}[X_p - (-1)^k Y_p] \tag{4.2}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}(M_p Y_p - N_p X_p) z_p(\cos l_3) + \sum_{p=1}^{\infty} Z_p L_p(\cos l_3) + 2 = 0$$

Система (2.3) для определения постоянных $V_0^{(1)}$, $V_0^{(2)}$ и $P_1$ принимает вид

$$V_0^{(2)} = \frac{2\delta_2 - \delta_1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}V_0^{(1)}, \text{ где } \alpha = \frac{E_2}{E_1}$$

$$E_1(V_0^{(1)} + \delta_1) + 2P_1\left(h - 4\ln\sin\frac{l}{2}\right) = \sum_{p=1}^{\infty}(N_p Y_p^{(1)} - M_p X_p^{(1)}) p^{-1} Y_p(\cos l) -$$

$$- \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p Z_p^{(1)} \int_0^l L_p(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta \tag{4.3}$$

$$E_1\left(V_0^{(1)} + \frac{\delta_1 - \alpha\delta_2}{1+\alpha}\right) - 8P_1\ln\sin\frac{l_3}{2} = \sum_{p=1}^{\infty}(M_p Y_p^{(1)} - N_p X_p^{(1)}) p^{-1} y_p(\cos l_3) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(1)} \int_{l_3}^{\pi} L_p(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Поскольку основная цель работы заключается в определении размера контакта $l_3$, то уравнения (4.2) позволяют добиться этого без рассмотрения неизвестных, связанных с жесткими перемещениями, то есть уравнений (4.3). Отсюда следует, что если прямоугольники из различных материалов, имеющие одинаковые размеры, прижимаются друг к другу одинаковыми, симметрично расположенными жесткими плоскими гладкими штампами, то размер области контакта не зависит от материалов составных частей и от величины осадок штампов.

б) Пусть штампы отсутствуют и по противоположным сторонам прямоугольника $AB$ и $EF$ действует одинаковая нормальная нагрузка, симметричная относительно оси $Oy$, то есть $l_1 = l_2 = 0$, $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$.

В этом случае бесконечные системы (1.6), (2.2) и трансцендентное уравнение (3.7) остаются без изменения, а системы (2.1) принимают вид

$$X_k^{(i)} = (-1)^i \left| \frac{4(-1)^k k^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_p^{(i)} Z_p^{(i)}}{(\beta_p^{(i)2} + k^2)^2} - (-1)^i [M_k^{(i)} X_k^{(i)} - N_k^{(i)} Y_k^{(i)}] - \right.$$

$$\left. - \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx - 4P_1 \right| \quad (i = 1,\ 2) \tag{4.4}$$

Из линейных уравнений (2.3) получается

$$E_1 E_2 (v_0^{(1)} - v_0^{(2)}) - 8(E_1 + E_2) P_1 \ln \sin \frac{l_3}{2} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} [E_1 U_p^{(2)} - E_2 U_p^{(1)}] y_p (\cos l_3) +$$

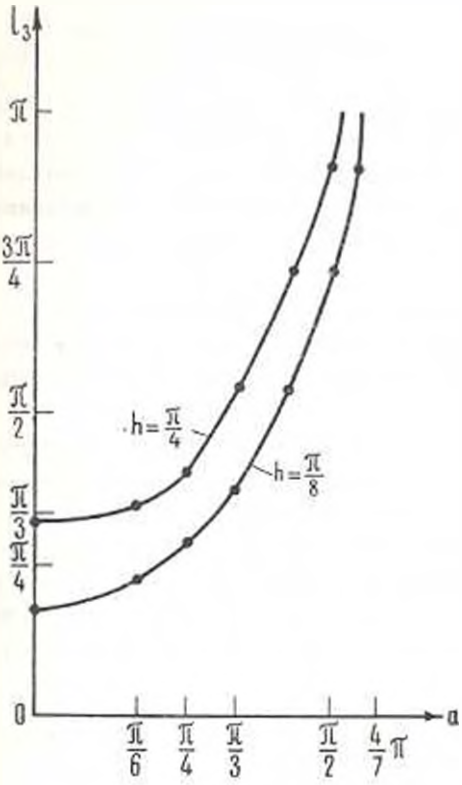
$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \left[ E_2 Z_p^{(1)} \int_{l_3}^{\pi} L_p^{(1)} (\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \right.$$

$$\left. + E_1 Z_p^{(2)} \int_{l_3}^{\pi} L_p^{(2)} (\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \right]; \quad 2P_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx \tag{4.5}$$

Отметим, что и в данном случае при $h_1 = h_2$, то есть когда два прямоугольника одинаковых размеров прижимаются друг к другу симметричными силами, размер контакта не зависит от интеграла действующих сил и от упругих характеристик материалов.

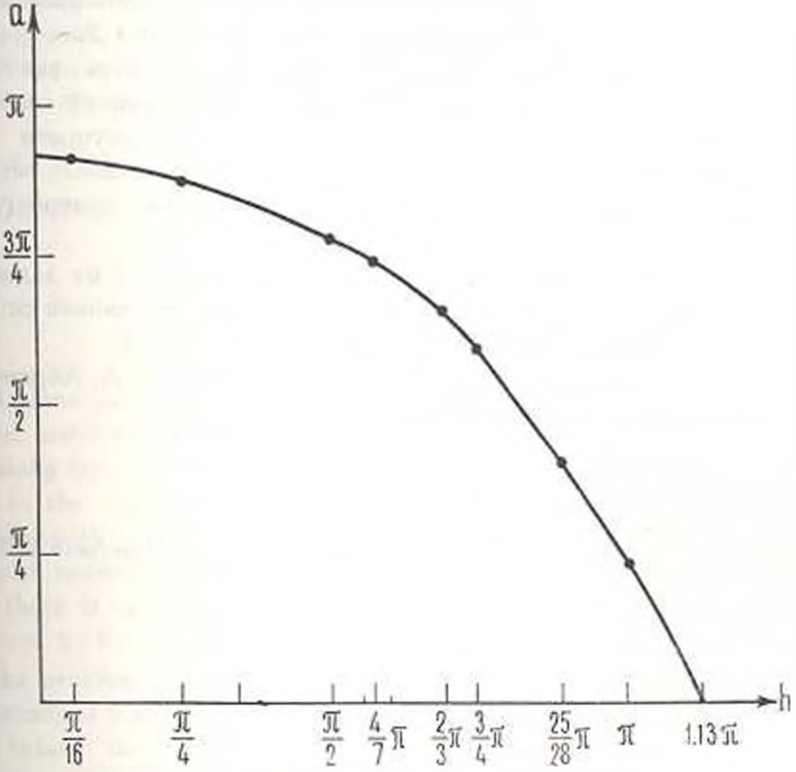
Полученный результат является следствием симметрии граничных условий и геометрии задачи, а также отсутствия касательных напряжений в зоне контакта и можно объяснить следующим образом.

В контактной задаче прямоугольника, прижатого нормальной симметричной нагрузкой к жесткому гладкому основанию, контактное напряжение не зависит от упругих постоянных материала, так как эта задача приводится к первой основной задаче для прямоугольника.



$l_3$
$\pi$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
0
$h=\frac{\pi}{4}$
$h=\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{4}{7}\pi$
a


Фиг. 2.



a
$\pi$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{16}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{4}{7}\pi$ $\frac{2}{3}\pi$ $\frac{3}{4}\pi$ $\frac{25}{28}\pi$ $\pi$ $1.13\pi$
h


Фиг. 3.

В частности, два прямоугольника из различных материалов с одинаковыми геометрией и нагружением при гладком контакте с жестким плоским основанием будут иметь одинаковые контактные напряжения. При замене действий жестких оснований нормальными контактными напряжениями соответствующие края прямоугольников останутся плоскими.

Если теперь соединим эти прямоугольники по участкам, где действуют нормальные напряжения, то напряженно-деформированные состояния отдельных частей и системы из двух прямоугольников в целом не изменятся.

Следовательно, контактное напряжение между двумя прямоугольниками с одинаковой геометрией при симметричном нагружении не зависит от материалов прямоугольников.

И так как размер зоны контакта определяется из условия, накладываемого на контактное напряжение, то и этот размер не будет зависеть от упругих постоянных материалов прямоугольников.

В качестве численного примера для этого случая примем $h_1 = h_2 = h$ и

$$f(x) = \begin{cases} -p & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{при} \quad a \leqslant x < \infty \end{cases}$$

то есть два прямоугольника одинаковых размеров прижимаются друг к другу одинаковой, равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности $p$, действующей по участкам длиной $2a$.

На фиг. 2 приведены графики зависимости размера контакта $l_3$ от длины участка распределения нагрузки $a$. Из графиков видно, что с увеличением участка распределения нагрузки до некоторого значения $a_*$ размер контакта увеличивается почти линейно, после чего резко возрастает. Значение $a_*$ зависит от относительных размеров прямоугольника.

График зависимости толщины прямоугольников $h$ от длины участка приложения нагрузки при условии, что прямоугольники остаются в контакте по всей длине ($l_3 = \infty$), приведен на фиг. 3.

Авторы выражают признательность проф. Б. А. Абрамяну за постановку задачи и ценные советы.

Институт механики АН
Армянской ССР
Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 16 XII 1974

Մ. Գ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

## ԵՐԿՈՒ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը տարբեր նյութերից երկու ուղղանկյունների համար։ Ուղղանկյունները իրար են սեղմվում մի կողմով կառչման բացակայության դեպքում։ Սեղմող ուժերի ազդեցությունը ուղղանկյուններին է փոխանցվում կամ կոշտ ողորկ դրոշմների միջոցով, որոնք ուղղանկյունների համաչափության ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ դասավորված են համաչափ, կամ էլ անմիջապես սեղմող ուժերի կիրառումով։ Ենթադրվում է, որ արտաքին ուժերի ազդեցության տակ կա կոնտակտի միայն մեկ անընդհատ տիրույթ, որի չափը համարվում է անհայտ և որոշվում է տրանսցենդենտ հավասարումից։*

*Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով։ Վերլուծության գործակիցները որոշվում են գծային հավասարումների անվերջ սիստեմներից։ Ապացուցվում է, որ ընդհանուր դեպքում կոնտակտի տիրույթի ցանկացած երկարության համար անվերջ սիստեմները կվազի-լիովին ռեգուլյար են։*

*Երկրաչափական պարամետրերի մի քանի կոնկրետ հարաբերությունների համար դիտված են թվային օրինակներ։ Կառուցված են գրաֆիկներ, որոնք ցույց են տալիս բեռնվածության տեղամասի երկարությունից կոնտակտի չափի կախվածությունը և ուղղանկյունների հաստությունից բեռնվածության տեղամասի երկարության կախվածությունը այն պայմանով, որ ուղղանկյունները կոնտակտի մեջ լինեն սեղմման գծի ամբողջ երկարությամբ։*

## ON A CONTACT PROBLEM FOR TWO RECTANGLES

M. G. MELKONIAN, A. M. MKRTCHIAN

### Summary

A plane problem in the theory of elasticity for two rectangles of different materials is considered. The rectangles are pressed to one another along one side free from coupling. The pressing forces are imparted to the rectangles either through rigid smooth dies spaced symmetrically with respect to the vertical axis of symmetry of the rectangles or immediately. It is assumed that due to action of external forces there is only one continuous contact domain whose dimension is considered to be unknown and defined from the transcendental equation.

The problem is solved by Fourier's method. Expansion coefficients are determined from infinite systems of linear equations. Infinite systems for a contact domain of any length in the general case are proved to be quasi-quite regular.

Numerical examples are presented for some specific relations of

geometric parameters. The graphs are constructed for dependence of the contact domain upon the length of load distribution section as well as for dependence of the length of load application portion upon the thickness of the rectangles, provided the rectangles contact one another throughout the length of the compression line.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ т. 21, вып. 1, 1957.
2. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 23, №5, 1970.
3. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 24, №5, 1971.
4. *Мелконян М. Г.* Об одной плоской контактной задаче термоупругости для составного прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 25, №1, 1972.
5. *Вейцман.* О контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. Прикл. мех., Изд. „Мир", №2, 1969.
6. *Pu S. L., Hussain M. A., Anderson G.* Lifting of a plate from the Foundation Due to Axisymmetric Pressure. Developments in Mechanics, Proceedings of the 11th Midwestern Mechanics Conference, vol. 5, 1969.
7. *Пу С. Л., Хуссейн М. А.* К вопросу о контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. Прикл. мех., № 3, 1970. Изд. „Мир".
8. *Наумов Ю. А., Никифоров В. Д.* Об отставании упругого слоя. Прикл. мех., т. 7, №11, 1971.
9. *Кир, Дандерс, Цзай.* Контактная задача для слоя, лежащего на полупространство. Прикл. мех., № 4, 1972. Изд. „Мир".
10. *Кир, Сильва.* Две смешанные задачи для полуполосы. Прикл. мех., № 4, 1972. Изд. „Мир".
11. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 27, №5, 1974.
12. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
13. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, Л.-М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, В. Н. ЛОЖКИН

# КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ПЬЕЗО- И ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

1. Рассмотрим сплошное тело, упругие свойства которого неотделимы от электрических и тепловых (явление пьезо- и пироэлектричества). Пусть в недеформированном и ненапряженном состоянии, а также при отсутствии электромагнитного поля тело имеет температуру $T_0$.

Предположим, что объемные силы, объемные электрические заряды и внутренние тепловые источники в теле отсутствуют. Вследствие действия поверхностных сил, нагрева или охлаждения поверхности тела, наличия поверхностных электрических зарядов, а также при задании на поверхности потенциала электрического поля в теле возникнут поля перемещений, характеризуемые вектором $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, деформаций $r_{ij}$ и напряжений $t_{ij}$. При этом приращение температуры составит $\Theta = T - T_0$, где $T$ абсолютная температура тела.

Допустим, что намагничиванием тела можно пренебречь. Тогда возникаемое в нем электромагнитное поле характеризуется векторами $\vec{E}$ $(E_1, E_2, E_3)$ напряженности электрического поля, $\vec{D}$ $(D_1, D_2, D_3)$ электрической индукции и $\vec{H}$ $(H_1, H_2, H_3)$ напряженности магнитного поля.

Все введенные величины рассматриваются в некоторой прямолинейной ортогональной системе координат $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

При сделанных предположениях электрическое поле будет потенциальным, то есть

$$E_m = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Одна из форм термодинамических соотношений, связывающих линейной зависимостью механические, электрические и тепловые величины, такова [1]

$$t_{ij} = c_{ijkl}^E r_{kl} - e_{mij} E_m - \gamma_{ij}^E \Theta$$

$$D_m = 4\pi e_{mij} r_{ij} + \varepsilon_{mn}^r E_n + 4\pi p_m^r \Theta \qquad (i, j, m = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Здесь $c_{ijkl}^E$ и $\gamma_{ij}^E$ — соответственно модули упругости и температурные коэффициенты механических напряжений, измеренные при постоянной напряженности электрического поля; $\varepsilon'_{mn}$ и $p'_m$ — постоянные диэлектрической проницаемости и пироэлектрические коэффициенты, измеренные при постоянных деформациях; $e_{mij}$ — пьезоэлектрические модули.

Для деформаций и перемещений имеют место равенства

$$r_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \qquad r_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i \neq j) \tag{1.3}$$

Система уравнений движения рассматриваемого тела состоит из уравнений движения классической теории упругости

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1.4}$$

уравнений Максвелла для электромагнитного поля [2], которые с учетом равенств (1.1) принимают вид

$$\operatorname{div}\vec{D}=0\,, \qquad \operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{1.5}$$

и уравнения теплопроводности. При этом $\rho$ — удельная плотность материала тела, $c$ — скорость света в пустоте.

Уравнение теплопроводности получим из закона сохранения энергии, являющегося локальной формулировкой второго закона термодинамики [3]. При отсутствии внутренних тепловых источников имеем

$$T\frac{dS}{dt}=-\operatorname{div}\vec{q} \tag{1.6}$$

Здесь $S$ — энтропия рассматриваемого материала тела, $\vec{q}$ — вектор теплового потока. Исходя из феноменологического закона Фурье для анизотропного тела [3]

$$q_i=-k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1.7}$$

где $k_{ij}$ — коэффициенты теплопроводности, уравнение (1.6) можно записать так

$$T\frac{dS}{dt}=k_{ij}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_j} \tag{1.8}$$

Термодинамическое соотношение для энтропии $S$ имеет вид [1]

$$S=\gamma^E_{ij}r_{ij}+p'_m E_m+c'^E T_0^{-1}\theta \tag{1.9}$$

При этом $c'^E$ — удельная теплоемкость тела, измеренная при постоянных деформациях и напряженности электрического поля. Подставив последнее равенство в выражение (1.8) и учитывая малость изменения температуры, получим линейное уравнение теплопроводности в виде

$$k_{ij}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_j}-c'^{E}\frac{\partial\Theta}{\partial t}-T_0\gamma^E_{ij}\frac{\partial r_{ij}}{\partial t}-T_0p'_m\frac{\partial E_m}{\partial x_m}=0 \qquad (1.10)$$

Таким образом, с учетом соотношений (1.2)–(1.5) и (1.10) система уравнений движения тела получается такой

$$c^E_{ijkl}\frac{\partial r_{kl}}{\partial x_j}-e_{mij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_m}-\gamma^E_{ij}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$T_0\gamma^E_{ij}\frac{\partial r_{ij}}{\partial t}+T_0p'_m\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x_m}-k_{ij}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_j}+c'^{E}\frac{\partial\Theta}{\partial t}=0$$

$$4\pi e_{mij}\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_m}-\varepsilon'_{mn}\frac{\partial^2 v}{\partial x_m\partial x_n}+4\pi p'_m\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}=0 \qquad (1.11)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Пять первых уравнений системы (1.11) можно рассматривать независимо, а последнее — векторное уравнение использовать для определения магнитной напряженности $\vec{H}$.

Будем считать, что на поверхности тела заданы механические (поверхностные силы или перемещения) [4], тепловые (температура, тепловой поток или конвективный теплообмен) [5], а также распределение поверхностного электрического заряда или потенциал электрического поля [2] и соответствующие начальные условия.

2. Рассмотрим квазистатическую задачу термоупругости для кристаллического слоя постоянной толщины $2h$ ($-h\le x_1\le h$). Будем считать, что физические условия позволяют рассматривать задачу одномерной, то есть

$$u_1=u(x,\ t),\quad u_2=u_3=0,\ v=v(x,\ t),\ \Theta=\Theta(x,t) \qquad (2.1)$$

Переходя от тензорной записи к матричной [6], соотношения (1.2) можно записать так

$$t_l=c^E_{1l}\frac{\partial u}{\partial x}-e_{1l}\frac{\partial v}{\partial x}-\gamma^E_l\frac{\partial\Theta}{\partial x}=0 \qquad (l=\overline{1,6})$$

$$D_m=4\pi e_{m1}\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon'_{m1}\frac{\partial v}{\partial x}+4\pi p'_m\frac{\partial\Theta}{\partial x} \qquad (m=1,2,3) \qquad (2.2)$$

Дифференциальные уравнения движения (1.11) (первое, четвертое и пятое) примут вид

$$c^E_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-e_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\gamma^E_1\frac{\partial\Theta}{\partial x}=0$$

$$T_0\gamma_1^E \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + T_0 p_1' \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} - k_{11}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + c'^E\frac{\partial\Theta}{\partial t} = 0 \qquad (2.3)$$

$$4\pi e_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_{11}^r\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\pi p_1'\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0$$

Два оставшихся уравнения механического движения используем для вывода условий одномерности рассматриваемой задачи. В данном случае получим

$$c_{15}^E = c_{16}^E = e_{15} = e_{16} = \gamma_{15}^E = \gamma_{16}^E = 0 \qquad (2.4)$$

Такими свойствами обладают, например, $X$- и $Y$-срезы кварца [6].

Будем считать, что в начальный момент времени слой не подвержен внешним воздействиям, а именно

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \Theta|_{t=0} = 0 \qquad (2.5)$$

а при $t > 0$ на его плоских гранях заданы потенциал электрического поля при отсутствии механических воздействий и изменения температуры, то есть

$$t_1|_{x=\pm h} = 0, \quad v|_{x=\pm h} = \pm v_0(t), \quad \Theta|_{x=\pm h} = 0 \qquad (2.6)$$

где $v_0(t)$ — известная функция, медленно изменяющаяся во времени.

Применяя к системе уравнений (2.3) преобразование Лапласа и разрешая полученную систему относительно функций-изображений, будем иметь

$$\bar u(x,p) = (b_1 b_2 \sqrt{p}\,\lambda x \,\mathrm{ch}\sqrt{p}\,\lambda h + T_0 b_3 b_1 \,\mathrm{sh}\sqrt{p}\,\lambda x)\,\bar v_0(p) w^{-1}(p)$$

$$\bar v(x,p) = (b_2 b_5 \sqrt{p}\,\lambda x \,\mathrm{ch}\sqrt{p}\,\lambda h - 4\pi T_0 b_3^2 \,\mathrm{sh}\sqrt{p}\,\lambda x)\,\bar v_0(p) w^{-1}(p) \qquad (2.7)$$

$$\bar\Theta(x,p) = T_0 b_2 b_3 \lambda (\mathrm{ch}\sqrt{p}\,\lambda h - \mathrm{ch}\sqrt{p}\,\lambda x)\,\bar v_0(p) w^{-1}(p)$$

Здесь

$$w(p) = b_2 b_5 \sqrt{p}\,\lambda h \,\mathrm{ch}\sqrt{p}\,\lambda h - 4\pi T_0 b_3^2 \,\mathrm{sh}\sqrt{p}\,\lambda h \qquad (2.8)$$

Постоянные, входящие в соотношения (2.7) и (2.8), принимают такие значения

$$b_1 = c'^E c_{11}^E - T_0 p_1' \gamma_1^E, \qquad b_2 = c_{11}^E \varepsilon_{11}^r + 4\pi e_{11}^2$$

$$b_3 = c_{11}^E p_1' + e_{11}\gamma_1^E, \qquad b_4 = \gamma_1^E \varepsilon_{11}^r - 4\pi e_{11} p_1' \qquad (2.9)$$

$$b_5 = c'^E c_{11}^E + T_0 \gamma_1^{E2}$$

$$\lambda = [k_{11}^{-1}(c'^E + T_0 \gamma_1^E b_2^{-1})]^{\frac{1}{2}}$$

Нули $p_m$ функции $w(p^*)$ лежат на мнимой оси: $p_m = i\lambda^{-1}h^{-1}\lambda_m$.

Используя обобщенную теорему умножения и вторую теорему разложения [7], для функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $\theta(x, t)$ получим следующие выражения:

$$u(x, t) = \frac{e_{11}}{c_{11}^{E}} v_0(t) \frac{x}{h} - 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(b_1 b_2 \lambda_m \frac{x}{h} \cos\lambda_m + T_0 b_3 b_1 \sin\lambda_m \frac{x}{h}\right) v_m(t)$$

$$v(x, t) = v_0(t)\frac{x}{h} - 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left( b_2 b_3 \lambda_m \frac{x}{h} \cos\lambda_m - 4\pi T_0 b_3^2 \sin\lambda_m \frac{x}{h}\right) v_m(t) \quad (2.10)$$

$$\theta(x, t) = 2h^{-1} T_0 b_2 b_3 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m \left( \cos\lambda_m - \cos\lambda_m \frac{x}{h} \right) v_m(t)$$

Здесь

$$v_m(t) = \exp\left( -\frac{\lambda_m^2}{\lambda^2 h^2} t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda_m^2}{\lambda^2 h^2}\tau\right) v_0'(\tau) d\tau$$

$$a_m = \lambda_m^{-1} [b_2 b_3 \lambda_m \sin\lambda_m - (b_2 b_3 - 4\pi T_0 b_3^2)\cos\lambda_m]^{-1} \quad (2.11)$$

Характеристики термоэлектроупругого состояния рассматриваемого слоя можно получить, подставив функцию (2.10) в соотношения (2.2).

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила 20 V 1974

Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄՅԱՆՍԿԻ, Վ. Ն. ԼՈԺԿԻՆ

## ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՔՎԱԶԻՍՏԱՏԻԿ ԽՆԴԻՐ ՊՅԵԶՈ ԵՎ ՊԻՐՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԷՖԵԿՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Բյուրեղային շերտի համար, որի առաձգական հատկությունները անբաժանելի են ջերմային և էլեկտրական հատկություններից (պյեզո և պիրոէլեկտրական երևույթ) տրվում է քվազիստատիկ խնդրի լուծումը:*

# A QUASI-STATIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR ANISOTROPIC LAYER WITH PIEZO- AND PYROELECTRIC EFFECTS

A. S. KOSMODAMIANSKY, V. N. LOZHKIN

S u m m a r y

The solution to a quasi-static problem of thermoelasticity is given for a crystal layer whose elastic properties are inseparable from electric and thermal ones (piezo- and pyroelectric effects).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. ИЛ, М., 1952.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. I. Изд-во „Наука", М., 1970.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
5. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. Изд-во „Наука", М., 1970.
6. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. Изд-во „Наука", М., 1968.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

И. А. ВЕКОВИЩЕВА

# ДВЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим тонкую пьезоэлектрическую пластинку, вырезанную из материала, структурная единица которого имеет одну плоскость симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки. Пусть пластинка испытывает деформацию изгиба под действием нагрузки, приложенной к ее краю. Нагрузка представляется в виде изгибающего $M_n$ и крутящего $H_{tn}$ моментов, а также перерезывающей силы $N_n$. Общая постановка задачи изложена в работе [1], где получена система двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $w(x_1, x_2)$ — прогиба срединной плоскости и $V(x_1, x_2)$ — распределения потенциала срединной поверхности

$$L_4 w - \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h} L_3 V = q, \quad \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h} L_3 w + \frac{1}{4\pi}\frac{4}{h^2} L_2 V = Q \tag{1}$$

Линейные операторы с частными производными имеют вид

$$L_4 = B_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 4B_{13}\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(B_{12} + 2B_{33})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4B_{23}\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + B_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$$

$$L_3 = B_{14}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (B_{15} + 2B_{34})\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (B_{24} + 2B_{35})\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} + B_{25}\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \tag{2}$$

$$L_2 = B_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2B_{45}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{55}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Здесь $B_{ij}$ — постоянные коэффициенты, связанные с толщиной $h$ и материальными константами среды.

В условиях поставленной задачи положим, что интенсивность нормальной нагрузки $q = 0$, а также интенсивность свободного заряда на поверхностях пластинки $Q = 0$.

Система уравнений (1) относится к тому же типу, что и система уравнений для функций напряжений и индукции, полученная в работе (2). Общие выражения для функций $w$ и $V$ зависят от корней характеристического уравнения

$$l_2(\mu)\, l_4(\mu) + \frac{1}{4\pi} l_3^2(\mu) = 0 \tag{3}$$

где обозначены полиномы от $\mu$

$$
\begin{aligned}
l_4(\mu) &= B_{33}\mu^2 + 2B_{15}\mu + B_{44}\\
l_3(\mu) &= B_{25}\mu^3 + (B_{24} - 2B_{35})\mu^2 + (B_{15} + 2B_{34})\mu + B_{14} \qquad (4)\\
l_1(\mu) &= B_{22}\mu^4 + 4B_{23}\mu^3 + 2(B_{12} - 2B_{33})\mu^2 - 4B_{13}\mu + B_{11}
\end{aligned}
$$

Примем, что корни уравнения (3) не являются кратными, а также они не являются корнями уравнений

$$l_2(\mu) = 0 \qquad l_1(\mu) = 0$$

С помощью метода последовательного интегрирования действиями, аналогичными изложенным в работе [2], найдем общие выражения для искомых функций

$$w = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} w_k(y_k), \qquad V = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} V_k(y_k) \qquad (5)$$

Здесь $w_k$ и $V_k$ — произвольные аналитические функции комплексных переменных $y_k = x_1 + \mu_k x_2$ $(k = 1, 2, 3)$, $\mu_k$ — три корня уравнения (3), три остальные корня будут им сопряженные.

Введем обозначения

$$w_1'(y_1) = \Phi_1(y_1), \qquad w_2'(y_2) = \Phi_2(y_2), \qquad V_3'(y_3) = \Phi_3(y_3) \qquad (6)$$

Штрихами обозначены производные по своим аргументам. Представляется возможным выразить все искомые функции, а также краевые условия задачи через эти три функции.

Введем обозначения

$$m_1 = -\frac{h}{2}\frac{l_3(\mu_1)}{l_2(\mu_1)}, \quad m_2 = -\frac{h}{2}\frac{l_1(\mu_2)}{l_3(\mu_2)}, \qquad m_3 = \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h}\frac{l_3(\mu_3)}{l_1(\mu_3)} \qquad (7)$$

Тогда изгибающие и крутящий моменты $M_1$, $M_2$, $H_{12}$, перерезывающие силы $N_1$, $N_2$, а также электрические моменты $P_1$, $P_2$, отнесенные к единице длины сечения срединной плоскости, выражаются через функции (6)

$$M_1 = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{1k}\Phi_k', \qquad M_2 = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{2k}\Phi_k'$$

$$H_{12} = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{3k}\Phi_k'$$

$$N_1 = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{4k}\Phi_k'', \qquad N_2 = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{5k}\Phi_k'' \qquad (8)$$

$$P_1 = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{6k}\Phi_k', \qquad P_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{7k}\Phi_k'$$

Введем вспомогательные обозначения ($k = 1, 2, 3$)

$$\mu_{1k} = B_{11} + 2B_{13}\mu_k + B_{33}\mu_k^2, \qquad \nu_{1k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{14} + B_{34}\mu_k)$$

$$\mu_{2k} = B_{12} + 2B_{23}\mu_k + B_{22}\mu_k^2, \quad \nu_{2k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{24} + B_{25}\mu_k)$$

$$\mu_{3k} = B_{13} + 2B_{33}\mu_k + B_{23}\mu_k^2, \quad \nu_{3k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{34} + B_{35}\mu_k)$$

$$\mu_{4k} = B_{11} + 3B_{13}\mu_k + (B_{12} + 2B_{33})\mu_k^2 + B_{23}\mu_k^3$$

$$\nu_{4k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}[B_{14} + (B_{15} + B_{34})\mu_k + B_{35}\mu_k^2]$$

$$\mu_{5k} = B_{13} + (B_{12} + 2B_{33})\mu_k + 3B_{23}\mu_k^2 + B_{22}\mu_k^3 \tag{9}$$

$$\nu_{5k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}[B_{34} + (B_{24} + B_{35})\mu_k + B_{25}\mu_k^2]$$

$$\mu_{6k} = \frac{1}{4\pi}(B_{14} + 2B_{34}\mu_k + B_{24}\mu_k^2), \qquad \nu_{6k} = \frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{44} + B_{45}\mu_k)$$

$$\mu_{7k} = \frac{1}{4\pi}(B_{15} + 2B_{35}\mu_k + B_{25}\mu_k^2), \qquad \nu_{7k} = \frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{45} + B_{55}\mu_k)$$

Тогда постоянные коэффициенты при функциях $\Phi_k'$ в выражениях (8) ($l = 1, 2, \ldots, 7$; $k = 1, 2$) будут

$$n_{lk} = \mu_{lk} + m_k\nu_{lk}, \qquad n_{l3} = \mu_{l3} m_3 + \nu_{l3} \tag{10}$$

Пусть на краю пластинки заданы изгибающий и крутящий моменты, перерезывающая сила, а также электрический момент как функции дуги контура $s$

$$M_n = m(s), \qquad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = r(s), \qquad P_n = p(s) \tag{11}$$

Имея в распоряжении ряд легко доказываемых тождеств ($k = 1, 2, 3$)

$$n_{4k} + \mu_k n_{5k} = 0, \qquad n_{6k} + \mu_k n_{7k} = 0$$

$$\frac{n_{2k}}{\mu_k} + n_{3k} = \frac{n_{1k}}{\mu_k}, \qquad -n_{3k} - \frac{n_{4k}}{\mu_k} = n_{2k}\mu_k \tag{12}$$

интегрированием получим краевые условия для функций $\Phi_k$:

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{n_{1k}}{\mu_k}\Phi_k = -\int_0^s [m(s)\,dx_2 + f(s)\,dx_1] - Cx_1 + C_1$$

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{2k}\Phi_k = \int_0^s [-m(s)\,dx_1 + f(s)\,dx_2] + Cx_2 + C_2 \tag{13}$$

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{7k}\Phi_k = -4\pi\int_0^s p(s)\,ds + C_3$$

где $f(s) = \int_0^s r(s)\,ds$; $C$, $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные интегрирования; интегралы берутся по дуге контура от некоторой начальной до переменной точки.

Рассмотрим краевую задачу об изгибе пьезоэлектрической пластинки сосредоточенным моментом. Пусть пластинка имеет прямолинейный участок границы. Тогда можно рассматривать пластинку как бесконечную полуплоскость. Направим вдоль прямолинейной границы ось $x_2$, ось $x_1$ — внутрь пластинки. Пусть сосредоточенный изгибающий момент приложен в начале координат. Для решения задачи применим метод Н. И. Мусхелишвили [3], с помощью которого была решена аналогичная математическая проблема в работе [4]. Краевые условия (11) при $x_1 = 0$ имеют вид

$$M_1 = m(\xi), \quad N_1 + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} = 0, \qquad P_1 = 0 \tag{14}$$

где $\xi$ — точка контура срединной поверхности пластинки. Условия для функций $\Phi_k$, в соответствии с (8) и с учетом тождести (12), будут

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{1k}\Phi_k'(\xi) = m(\xi), \qquad 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{2k}\lambda_k\Phi_k'(\xi) = 0$$

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{6k}\Phi_k'(\xi) = 0 \tag{15}$$

Умножим каждое из равенств (15) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\xi}{\xi - y}$, где $y = x_1 + ix_2$ — произвольная точка внутри области $S$, и почленно проинтегрируем в пределах от $-\infty$ до $\infty$. На основании свойств интеграла типа Коши, взятого по прямой, получим

$$n_{11}\Phi_1'(y) + n_{12}\Phi_2'(y) + n_{13}\Phi_3'(y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi - y}d\xi$$

$$\lambda_1 n_{21}\Phi_1'(y) + \lambda_2 n_{22}\Phi_2'(y) + \lambda_3 n_{23}\Phi_3'(y) = 0 \tag{16}$$

$$n_{61}\Phi_1'(y) + n_{62}\Phi_2'(y) + n_{63}\Phi_3'(y) = 0$$

Разрешим систему (16) относительно $\Phi_k'(y)$ и припишем каждой функции значение своего аргумента в соответствии с (6).

$$\Phi_1'(y_1) = -\frac{\nu_1 n_{22} n_{63}}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi - y}d\xi$$

$$\Phi_2'(y_2) = -\frac{\nu_2 n_{21} n_{63}}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi - y}d\xi \qquad (17)$$

$$\Phi_3'(y_3) = -\frac{\nu_3 n_{21} n_{62}}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi - y}d\xi$$

где $\Delta$ — определитель системы (16)

$$\Delta = \nu_2 n_{11} n_{22} n_{63} + \nu_3 n_{12} n_{23} n_{61} + \nu_1 n_{13} n_{21} n_{62} -$$

$$-(\nu_2 n_{13} n_{22} n_{61} + \nu_1 n_{11} n_{23} n_{62} + \nu_3 n_{12} n_{21} n_{63}) \qquad (18)$$

Представим заданный сосредоточенный момент $M$ в виде распределенного момента равномерной интенсивности $M/2\varepsilon$, действующего на контуре в пределах от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$. Подставив это выражение в (17), вычислив интегралы и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим производные от вспомогательных функций:

$$\Phi_1'(y_1) = \frac{\nu_1 n_{22} n_{63}}{2\pi i\Delta}\,\frac{M}{y_1}$$

$$\Phi_2'(y_2) = \frac{\nu_2 n_{23} n_{61}}{2\pi i\Delta}\,\frac{M}{y_2} \qquad (19)$$

$$\Phi_3'(y_3) = \frac{\nu_3 n_{21} n_{62}}{2\pi i\Delta}\,\frac{M}{y_3}$$

Зная функции (19), можно определить остальные искомые величины, такие, как прогиб и распределение потенциала срединной поверхности пластинки, напряжения и деформации в любой ее точке, а также поляризацию и напряженность электрического поля.

Числовой пример рассмотрим на основе пластинки толщины $h = 0.1$ *см*, вырезанной из кристалла бифталата калия, свойства которого изучены в работе [5]. Основная система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$(0.1255\, w_{,1111}^{IV} + 0.377\, w_{,1122}^{IV} + 0.107\, w_{,2222}^{IV}) \cdot 10^{6} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}(0.0986\, V_{,111}''' + 0.283\, V_{,122}''') \cdot 10^{3} = 0 \qquad (20)$$

$$\frac{1}{2\varepsilon}(0.0986\, w'''_{111} + 0.283\, w'''_{122})\cdot 10^3 + \frac{1}{\varepsilon}(0.034\, V''_{11} + 0.0498\, V''_{22}) = 0$$

Характеристический полином (3) имеет корни

$$\lambda_1 = i1.77, \qquad \lambda_2 = i0.615, \qquad \lambda_3 = i0.827$$

$$\lambda_4 = \bar{\lambda}_1, \quad \lambda_5 = \bar{\lambda}_2, \quad \lambda_6 = \bar{\lambda}_3 \tag{21}$$

а отношения $m_k$, согласно (7), имеют значения

$$m_1 = -1.015\cdot 10^2, \qquad m_2 = 0.0865\cdot 10^3 \tag{22}$$

$$m_3 = 1.85\cdot 10^{-5}$$

Вспомогательные функции задачи, согласно (19), получим в виде

$$\Phi_1'(y_1) = -0.4i\cdot 10^{-9}\frac{M}{y_1}, \qquad \Phi_2'(y_2) = -0.591i\cdot 10^{-9}\frac{M}{y_2}$$

$$\Phi_1'(y_3) = -0.1875i\cdot 10^{-9}\frac{M}{y_3} \tag{23}$$

Подставляя (23) в выражения (8), найдем вызванное сосредоточенным изгибающим моментом распределение изгибающих и крутящего моментов, а также электрического момента в любой точке срединной поверхности пластинки, измеренных в единицах системы $CGSE$.

$$M_1 = 2M\left(-\frac{4.92}{\Delta_1} + \frac{3.71}{\Delta_2} + \frac{213}{\Delta_3}\right)x_2\cdot 10^{-3}$$

$$M_2 = 2M\left(-\frac{19.2}{\Delta_1} + \frac{0.762}{\Delta_2} - \frac{152}{\Delta_3}\right)x_2\cdot 10^{-3}$$

$$H_{12} = 2M\left(-\frac{8.93}{\Delta_1} - \frac{4.57}{\Delta_2} - \frac{336}{\Delta_3}\right)x_1\cdot 10^{-3} \tag{24}$$

$$P_1 = 2M\left(\frac{8.45}{\Delta_1} + \frac{0.232}{\Delta_2} - \frac{786}{\Delta_3}\right)x_2\cdot 10^{-9}$$

$$P_2 = 2M\left(-\frac{1.68}{\Delta_1} - \frac{0.566}{\Delta_2} - \frac{1183}{\Delta_3}\right)x_1\cdot 10^{-9}$$

где

$$\Delta_1 = x_1^2 + 3.14x_2^2, \qquad \Delta_2 = x_1^2 + 0.378x_2^2, \qquad \Delta_3 = x_1^2 - 0.685x_2^2$$

Можно далее найти и другие неизвестные фукции задачи, такие, как прогиб, распределение потенциала электрического поля в срединной поверхности, перерезывающие силы и другие.

Метод позволяет исследовать электроупругое состояние пластинки, когда на ограниченном участке прямолинейной границы ее действует крутящий момент или перерезывающая сила или любая их совокупность, распределенные по любому закону.

Большой практический интерес представляет рассмотрение работы пьезоэлектрической пластинки в условиях, когда ее поверхности находятся в непосредственном контакте с обкладками — хорошо проводящими электродами, не оказывающими влияния на ее упругие свойства. Технология нанесения таких обкладок подробно описана в монографии [6].

Рассматривая прямой пьезоэффект, поставим задачу отыскания потенциала электрического поля $U$ на обкладках, появляющегося в результате действия на пластинку распределенной нагрузки интенсивности $q(x_1, x_2)$, нормальной к срединной плоскости пластинки в ее недеформированном состоянии. Для этого изучим краевую задачу об изгибе тонкой прямоугольной пьезоэлектрической пластинки с обкладками, защемленной по всему контуру.

Для вывода дифференциальных уравнений запишем вариационный принцип исследуемой задачи, утверждающий стационарность функционала на искомых функциях [7]

$$
\begin{gathered}
J[w, V]=\frac{1}{2}\iint_{(S)}\{B_{11}(w''_{11})^2+B_{22}(w''_{22})^2+4B_{66}(w''_{12})^2+ \\
+2B_{12}w''_{11}w''_{22}+4B_{16}w''_{11}w''_{12}+4B_{26}w''_{22}w''_{12}- \\
-\frac{1}{4\pi}\frac{4}{h}(B_{14}w''_{11}V_1+B_{15}w''_{11}V_2+B_{24}w''_{22}V_1+B_{25}w''_{22}V_2+ \qquad (25) \\
+2B_{34}w''_{12}V_1+2B_{35}w''_{12}V_2)-\frac{1}{4\pi}\frac{4}{h^2}[B_{44}(V_1)^2+B_{55}(V_2)^2+ \\
+2B_{45}V_1V_2]-2QV-2qw\}\,dS
\end{gathered}
$$

Штрихи вместе с нижними индексами обозначают частные производные по координате $x_1$ или $x_2$.

При рассмотрении прямого пьезоэффекта $Q(x_1, x_2)$ — интенсивность свободного электрического заряда на обкладках — представляет собой интенсивность свободного заряда, индуцированного связанным зарядом, выделившимся на поверхности пластинки. Очевидно, что функция $Q$ заранее неизвестна и зависит от электроупругого состояния пластинки.

Известно [8], что вблизи заряженной поверхности проводника нормальная компонента вектора электростатической индукции есть

$$D_n = 4\pi Q \qquad (26)$$

Запишем выражение для единичного вектора нормали к поверхности $w = w(x_1, x_2)$ [9]

$$\vec{n}=\frac{-p\vec{i}-q\vec{j}+1\cdot\vec{k}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad (27)$$

где $p$ и $q$ суть тангенсы углов наклона касательных к кривой в сечениях соответственно $x_1x_3$ и $x_2x_3$.

$$p = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad q = \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{28}$$

Необходимо выразить неизвестную функцию $Q(x_1, x_2)$ через искомые функции $w(x_1, x_2)$ и $V(x_1, x_2)$. Величины (28) и тем более их квадраты малы по сравнению с единицей вследствие основных предположений теории изгиба тонких пластин о малости толщины по сравнению с размерами пластинки в плане и малости прогиба по сравнению с толщиной. Подставляя (27) в (26), получим

$$D_n = \vec{D} \cdot \vec{n} = D_3 \tag{29}$$

Согласно одному из уравнений состояния [10] имеем

$$D_3 = \varepsilon_{3j} E_j - e_{3ij} \xi_{ij} \tag{30}$$

Здесь предполагается суммирование по индексам $i$, $j$ = 1, 2, 3.

Если структурная единица материала имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную оси $x_3$, то [11]

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0, \qquad e_{311} = e_{312} = e_{322} = 0 \tag{31}$$

Кроме того, согласно гипотезам прямых нормалей Кирхгофа, в теории изгиба тонких пластин предполагается, что

$$\xi_{13} = \xi_{23} = \xi_{33} = 0 \tag{32}$$

Подставим (31) и (32) в (30). Тогда получим

$$D_3 = \varepsilon_{33} E_3 \tag{33}$$

Теперь можно записать с учетом (26) и (29)

$$E_3 = \frac{4\pi Q}{\varepsilon_{33}} \tag{34}$$

С другой стороны, компонента напряженности электрического поля $E_3$ выражается через двумерный потенциал электрического поля — функцию $V$ — следующим образом:

$$E_3 = -\frac{2}{h} V \tag{35}$$

Сравнивая (34) и (35), получим выражение функции $Q$ через функцию $V$

$$Q = -\frac{\varepsilon_{33}}{2\pi h} V \tag{36}$$

Подставляя (36) в (25) и составляя уравнения Эйлера, получим основные уравнения теории изгиба тонких пьезоэлектрических пластин с обкладками под действием нормальных распределенных усилий

$$L_1 w - \frac{1}{2\pi h} L_3 V = q, \qquad L_3 w + \frac{2}{h} L_2 V - 2\varepsilon_{33} V = 0 \tag{37}$$

Краевая задача состоит в нахождении двух неизвестных функций $w$ и $V$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (37) и следующим граничным условиям при $x_1 = 0$, $x_1 = l$:

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \qquad V = 0 \tag{38}$$

при $x_2 = \pm b$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \qquad V = 0 \tag{39}$$

Введем безразмерные координаты

$$y_1 = \frac{x_1}{b}, \qquad 0 \leq y_1 \leq 2a, \qquad y_2 = \frac{x_2}{b}, \qquad -1 \leq y_2 \leq 1 \tag{40}$$

Согласно методу Л. В. Канторовича, приближенное решение задачи ищем в виде

$$\begin{gathered} w(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_1) h_k(y_2) \\ V(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y_1) H_k(y_2) \end{gathered} \tag{41}$$

Здесь $h_k(y_2)$ и $H_k(y_2)$ — две системы линейно-независимых функций, удовлетворяющих, в соответствии с (39), условиям

$$h_k(\pm 1) = h_k'(\pm 1) = 0, \qquad H_k(\pm 1) = 0 \tag{42}$$

$g_k(y_1)$ и $G_k(y_1)$ — функции, подлежащие определению из вариационного принципа.

В качестве функций $h_k(y_2)$ и $H_k(y_2)$ возьмем системы ортонормированных полиномов, построенных Г. Хорви [12]. Для первого приближения они имеют вид

$$h_1(y_2) = \frac{3\sqrt{5\cdot 7}}{16}(1 - y_2^2)^2, \qquad H_1(y_2) = \frac{\sqrt{3\cdot 5}}{4}(1 - y_2^2) \tag{43}$$

Подставляя (43) в функционал (25) с учетом (40) и (41), а также производя интегрирование по $y_2$, получим

$$J = \frac{1}{2b^2}\int_0^{2a}\Big\{B_{11}(g'')^2 + \frac{9\cdot 7}{2}B_{22}g^2 + 12B_{33}(g')^2 - 6B_{12}g''g -$$

$$-\frac{1}{4}\frac{4b}{h}\Big(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{14}G g'' - \sqrt{\frac{3\cdot 7}{2}}B_{24}G g + \sqrt{3\cdot 7}B_{35}G' g'\Big) -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{4b^2}{h^2}\left[B_{11}(G')^2+\frac{5}{2}B_{55}G^2\right]+\frac{\varepsilon_{33}b^4}{\pi h}G^2-2qb^4g\sqrt{\frac{7}{5}}\Bigg\}dy_1 \qquad (44)$$

Из условия стационарности функционала (44) вытекает система двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $g(y_1)$ и $G(y_1)$

$$B_{11}g^{IV}-6(B_{12}+2B_{33})g''+31.5B_{22}g-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{b}{h}\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{11}G'''-\frac{\sqrt{3\cdot 7}}{2}(B_{21}+2B_{33})G'\right]=qb^4\sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$(45)$$

$$\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{11}g'''-\frac{\sqrt{3\cdot 7}}{2}(B_{21}+2B_{33})g'\right]+$$

$$+\frac{2b}{h}\left[B_{11}G''+\left(\varepsilon_{33}b^2h-\frac{5}{2}B_{55}\right)G\right]=0$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$g(0)=g'(0)=0, \qquad g=(2a)=g'(2a)=0, \qquad G(0)=G(2a)=0 \qquad (46)$$

Числовой пример рассмотрим на основе пластинки, вырезанной из кристалла бифталата калия [5], имеющей размеры $2a=1$ *см*, $b=1$ *см*, $h=0.1$ *см*.

Уравнения (45) будут иметь вид

$$(g^{IV}-9g''+26.8g)\cdot 10^2-(1.22G'''-8.24G')=0.094q$$

$$(47)$$

$$(g'''-6.71g')\cdot 10^3+(0.704G''+40\,G)=0$$

Корни характеристического определителя имеют значения

$$\lambda_{1,2,3,4}=\pm 2.18\pm i0.48; \qquad \lambda_{5,6}=\pm i7.52 \qquad (48)$$

Записывая общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (47) и удовлетворяя граничным условиям (46), получим

$$g=-[e^{2.18y_1}(0.772\cos 0.48y_1-0.818\sin 0.48y_1)+$$

$$+e^{-2.18y_1}(2.73\cos 0.48\,y_1+9.69\sin 0.48\,y_1)+0.00209\cos 7.52\,y_1+$$

$$+0.00151\sin 7.52\,y_1-3.51]\cdot 10^{-4}q$$

$$(49)$$

$$G=[e^{2.18y_1}(-1.734\cos 0.48\,y_1-0.435\sin 0.48\,y_1)+$$

$$+e^{-2.18y_1}(11.94\cos 0.48y_1+10.67\sin 0.48y_1)-$$

$$-10.2\cos 7.52\,y_1-14.15\sin 7.52\,y_1]\cdot 10^{-4}q$$

Подставляя (49) в (41), найдем искомые функции $w$ и $V$ в первом приближении.

Для определения разности потенциалов на обкладках воспользуемся формулой для плоского конденсатора

$$U_2-U_1=\frac{4\pi h}{\varepsilon_{33}S}\iint\limits_{(S)} Q\,dS \tag{50}$$

Вместо функции $Q$ подставим ее значение (36) через функцию $V$

$$U_2-U_1=-\frac{2}{S}\iint\limits_{(S)} V\,dS \tag{51}$$

Вычисляя интеграл (51) по всей площади пластинки, получим

$$U_2-U_1=-5.79\cdot 10^{-6}q \tag{52}$$

Так, при действии равномерной нагрузки интенсивности $10\ г/см^2$ на обкладках возникает разность потенциалов в $17\ в$, причем, обкладка, расположенная в области $x_3>0$, будет иметь отрицательный потенциал.

Изложенный метод решения задачи о нахождении разности потенциалов на обкладках при изгибе пьезоэлектрической пластинки позволяет решать широкий круг задач при различных закреплениях сторон $x_1=0$, $x_1=l$, а также различных функциях распределения внешней нагрузки.

Ленинградский политехнический
институт им. М. И. Калинина

Поступила 12 V 1974

Ի. Ա. ՎԱՍԻԼԵՆԿՈ

## ԲԱՐԱԿ ՊՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԵՐԿՈՒ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

*Աշխատանքում դիտարկվում են բարակ պյեզոէլեկտրական սալի ծռման վերաբերյալ երկու եզրային խնդիրներ։ Ուսումնասիրվում է պյեզոէլեկտրական սալի էլեկտրաստատիկական վիճակը, երբ ազդող բեռը բաշխված է սալի եզրի վրա՝ լուծվում է առաջին եզրային խնդիրը, երբ եզրի վրա կիրառված է կենտրոնական ծռող մոմենտ։ Երկրորդ եզրային խնդրի լուծման ժամանակ ստացվել է դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ երեսպատումներով պյեզոէլեկտրական սալի ծռման դեպքի համար և գտնվել է հավասարաչափ բաշխված նորմալ ճիգերի ազդեցության ժամանակ երեսպատումների վրա պոտենցիալների տարբերությունը։*

# TWO BOUNDARY PROBLEMS ON BENDING A THIN PIEZOELECTRIC PLATE

I. A. VEKOVISCHEVA


## Summary

Two boundary problems on bending a thin piezoelectric plate are dealt with. An dielectroelasticity state of the plate under load, distributed along its boundaries, is examined. Accordingly, a solution to the first problem with a concentrated bending moment is presented. On solving the second problem a system of differential equations for bending the piezoelectric plate with electrodes is derived and the potential difference oz electrods under regularly distributed normal stresses is found.


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Вековищева И. А.* Теория изгиба тонких пьезоэлектрических пластин. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, №4, 1972.
2. *Вековищева И. А.* Плоская задача теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта. ПМТФ, №2, 1970.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука", 1966.
4. *Вековищева И. А.* Распределение деформаций и электрического поля в электроупругом полупространстве при прямом пьезоэффекте. Прикл. мех-ка, т. IX, вып. 12, 1973.
5. *Беляев Л. М.* и др. Выращивание кристаллов бифталата калия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства. Кристаллография, т. 14, вып. 4, 1969.
6. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практические применения. ИЛ., 1949.
7. *Вековищева И. А.* Вариационные принципы в теории электроупругости. Прикл. мех-ка, т. 8, вып. [illegible], 1971.
8. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. Физматгиз, 1954.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. II. Изд-во „Наука", 1967.
10. *Вековищева И. А.* Общие уравнения теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта. Изв. ВУЗов, Физика, №10, 1970.
11. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. Изд-во „Наука", 1968.
12. *Horvay G.* The End Problem of Rectangular Strips. J. Appl. Mech., 20, 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

Г. А. БАБАДЖАНЯН

# СТАЦИОНАРНОЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ДЛИННОМ ГАЗОПРОВОДЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ УКЛОНА ПРОФИЛЯ ТРАССЫ

## § 1. Уравнения движения и краевые условия

Рассматривается одномерное неизотермическое стационарное движение газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы.

Исследования показывают, что при движении газа в длинном газопроводе на газодинамические величины существенно влияют как уклон трубопровода, так и изменение температуры газа вдоль газопровода. Изменение температуры газа чаще всего обусловлено изменением температуры почвы, по которой проходит газопровод. Это явление встречается в горных условиях местности или в случае, когда газ выходит из глубоких скважин на поверхность земли и т. п.

Движение газа при вышеизложенных условиях описывается следующей системой уравнений [1]:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\xi \rho u^2}{2d} + \rho g \sin\alpha \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$p = \rho R T$$

где $p$, $u$, $\rho$ и $T$ — соответственно средние по сечению трубы давление, скорость, плотность и абсолютная температура газа, $\xi$ — коэффициент сопротивления, $d$ — диаметр трубы, $R$ — газовая постоянная, $x$ — направление движения, $g$ — ускорение силы тяжести.

В третьем уравнении системы (1.1) абсолютная температура $T$ — известная функция от $x$, $T = T(x)$, так что в этой нелинейной системе уравнений неизвестными величинами являются функции $p(x)$, $u(x)$ и $\rho(x)$.

При решении поставленной задачи примем следующие граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad p = p_н$$

$$\text{при } x = L \quad p = p_к \tag{1.2}$$

где $p_н$ и $p_к$ — значения давлений в начале и в конце газопровода, $L$ — длина газопровода.

## § 2. Решение системы уравнений (1.1)

Попытаемся решить систему уравнений (1.1), то есть найти неизвестные функции $p(x)$, $u(x)$ и $\rho(x)$ для двух режимов движения — ламинарного, когда потеря напора на единицу длины пропорциональна первой степени скорости, и турбулентного, когда потеря напора пропорциональна квадрату скорости.

а) В случае ламинарного режима движения коэффициент сопротивления $\xi$ имеет следующее значение:

$$\xi = \frac{64}{Re} = \frac{64\mu}{ud\rho} \tag{2.1}$$

где $\mu$ — динамический коэффициент вязкости газа, который принимается постоянным вдоль газопровода.

Подставляя (2.1) и (1.1), получим

$$-\frac{dp}{dx} = bu + \rho g \sin\alpha \tag{2.2}$$

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0$$

$$p = \rho RT$$

где $b = \frac{32\mu}{d^2}$.

Исключая из системы уравнений (2.2) функции $u(x)$ и $\rho(x)$, относительно функции $p(x)$ получим следующее уравнение:

$$p\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{2g\sin\alpha}{RT}p\frac{dp}{dx} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 - \frac{p}{T}\frac{dp}{dx}\frac{dT}{dx} - \frac{2gp^2}{RT^2}\sin\alpha\frac{dT}{dx} = 0 \tag{2.3}$$

Если обозначить $p^2(x) = P(x)$, уравнение (2.3) примет следующий вид:

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \left(\frac{2g\sin\alpha}{RT} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dx}\right)\frac{dP}{dx} - \frac{4g\sin\alpha}{RT^2}P\frac{dT}{dx} = 0 \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) относительно новой неизвестной функции есть линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, которое с помощью подстановки $P'(x) = Z(x)P(x)$ приводится к уравнению Риккати относительно функции $Z(x)$. Частное решение этого уравнения

$$\tilde{Z}(x) = -\frac{g\sin\alpha}{RT} - \frac{1}{2T}\frac{dT}{dx} \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.4) будет

$$P(x) = C_2 e^{\int \left[ \frac{e^{\int \left( \frac{2g \sin\alpha}{RT} + \frac{dT}{T dx} \right) dx}}{C_1 + \int e^{\int \left( \frac{2g \sin\alpha}{RT} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right) dx} dx} - \frac{2g \sin\alpha}{RT} \right] dx} \tag{2.6}$$

Определяя постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ с помощью граничных условий (1.2) и учитывая обозначение $P(x) = p^2(x)$, найдем закон изменения давления вдоль газопровода, зависящий от значения уклона профиля трассы, и для любого заранее заданного закона изменения температуры газа.

Из третьего уравнения системы (2.2) найдем закон изменения плотности. А из первого уравнения той же системы получим закон изменения скорости

$$u = -\frac{1}{b}\frac{dp}{dx} - \frac{g\rho \sin\alpha}{b} \tag{2.7}$$

Расход газа определится по следующей формуле:

$$G = \frac{s}{RT} u(x)\, p(x) \tag{2.8}$$

где $s$ — площадь поперечного сечения трубы.

Известно, что современные газопроводы имеют большие диаметры и большие скорости подачи газа. При таких условиях ламинарный режим движения газа мало вероятен.

Поэтому, с практической точки зрения, ламинарный случай движения не представляет интереса. Практический интерес представляет турбулентный режим движения, к исследованию которого мы и перейдем.

б) При турбулентном режиме движения коэффициент сопротивления $\xi$ принимает постоянное значение, зависящее только от диаметра трубы.

Исключая из системы (1.1) функции $u(x)$ и $\rho(x)$, получим уравнение относительно $p(x)$ в виде (2.3), которое после обозначения $p^2(x) = P(x)$ примет вид (2.4).

Получается, что при стационарном одномерном движении газа в длинном газопроводе при ламинарном и турбулентном режимах давление удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению. Следовательно, закон изменения давления для вышеуказанных двух режимов при одинаковых граничных условиях один и тот же. Из уравнения состояния получается, что закон изменения плотности также совпадает для обоих режимов движения. Это совпадение, конечно, не имеет места при нестационарном движении.

Закон изменения скорости определяется из первого уравнения системы (1.1)

$$u(x) = \left( -\frac{2dRT}{\xi p}\frac{dp}{dx} - \frac{2dg}{\xi}\sin\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

расход газа вычисляется по формуле

$$G = \frac{s}{RT}\left[-\frac{2d\,RT}{\xi}p\frac{dp}{dx} - \frac{2d\alpha p^2}{\xi}\sin\alpha\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

Из формул (2.7), (2.8), (2.9) и (2.10) видно, что законы изменения скорости и расхода при ламинарном и турбулентном режимах не совпадают.

В случае $T = \mathrm{const}$ значения всех найденных функций совпадают со значениями этих величин, полученными в работе [2].

Если $\alpha = 0$, полученные результаты совпадают с результатами работы [3]. Когда одновременно и $T = \mathrm{const}$ и $\alpha = 0$, получим результаты работы [4].

## § 3. Пример расчета

Примем закон изменения температуры газа вдоль газопровода линейным, то есть

$$T(x) = T_н + (T_к - T_н)\frac{x}{L} = T_н(1 + kx) \tag{3.1}$$

где $k = \dfrac{T_к - T_н}{T_н L}$.

Вычислим законы изменения давления, скорости, расхода и плотности газа при турбулентом режиме движения.

Подставляя значение $T(x)$ в виде (3.1) в выражение $P(x)$ (2.6), после вычисления получим

$$P(x) = C_1(1 + kx)^2 + C_2(1 + kx)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_н k}} \tag{3.2}$$

Определяя значения постоянных интегрирования $C_1$ и $C_2$ и учитывая обозначение $p^2(x) = P(x)$, получим окончательно

$$p(x) = \left[\frac{p_н^2(1 + kL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_н k}} - p_к^2}{(1 + kL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_н k}} - (1 + kL)^2}(1 + kx)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{p_н^2(1 + kL)^2 - p_к^2}{(1 + kL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_н k}} - (1 + kL)^2}(1 + kx)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_н k}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

Из (2.9) определим скорость

$$u(x) = \left[-\frac{2d\,RT_н}{\xi p^2}\left[\frac{\left(p_н^2(1 + kL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_н k}} - p_к^2\right)(1 + kx)}{(1 + kL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_н k}} - (1 + kL)^2} - \right.\right.$$

$$+\frac{g\sin\alpha}{RT_{н}k}\,\frac{(p_{н}^{2}(1+kL)^{2}-p_{к}^{2})(1+kx)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_{н}k}-1}}{(1+kL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_{н}k}}-(1+kL)^{2}}-\frac{2dg\sin\alpha}{\xi}\Bigg]\Bigg\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.4)$$

из (2.10) определим расход

$$G=\frac{s}{RT}u(x)\,p(x)=s\left|-\frac{2d}{\xi RT_{н}}\left(k+\frac{g\sin\alpha}{RT_{н}}\right)\frac{p_{н}^{2}(1+kL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_{н}k}}-p_{к}^{2}}{(1+kL)^{-\frac{2g\sin\alpha}{RT_{н}k}}-(1+kL)^{2}}\right|^{\frac{1}{2}} \qquad (3.5)$$

плотность определится по формуле

$$\rho(x)=\frac{p(x)}{RT(x)} \qquad (3.6)$$

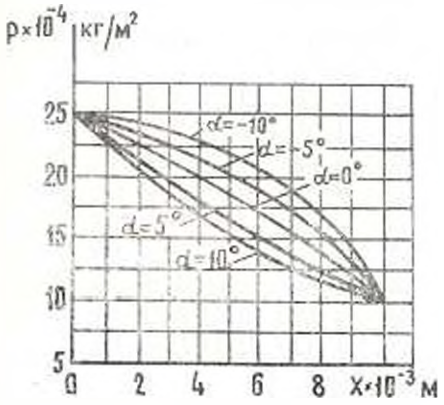
Для вычисления конкретного численного примера возьмем следующие данные:

$$p_{н}=25\cdot10^{4}\ кГ/м^{2},\ p_{к}=10\cdot10^{4}\ кГ/м^{2},\ L=10^{4}\ м$$

$$R=50\ кГм/кг\,C^{\circ},\ T_{н}=310^{\circ}\ C,\ T_{к}=280^{\circ}\ C$$

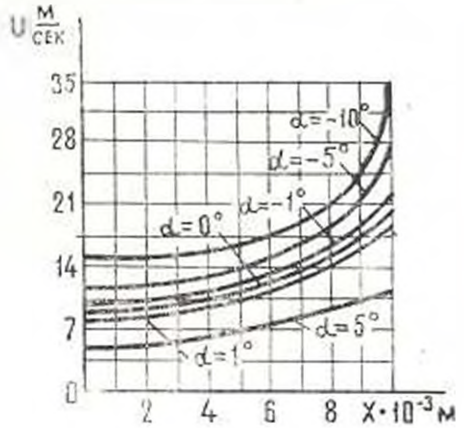
$$d=0.7\ м,\ \xi=0.012,\ \alpha=0,\ \pm1^{\circ},\ \pm5^{\circ},\ \pm10^{\circ}$$

Законы изменения давления, скорости и расхода газа представлены на фиг. 1, 2, 3.

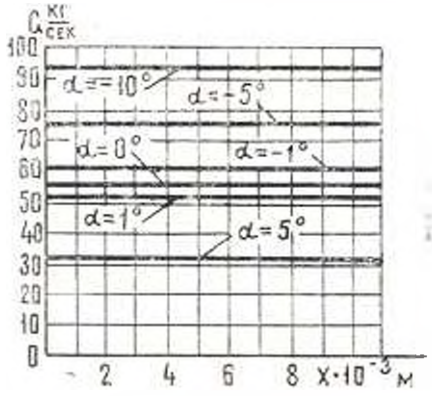



Фиг. 1.

Из полученных результатов и из численного примера видно, что в принятом законе изменения температуры (по движению газа температура уменьшается линейно) давление, скорость и расход газа уменьшаются при увеличении уклона газопровода ($\alpha > 0$). Эти величины увеличиваются, если уклон уменьшается ($\alpha < 0$). Следует отметить, что изменение расхода, зависящее от уклона, происходит более интенсивно, чем изменение давления и скорости.




Фиг. 2.




Фиг. 3.

Так, например, если при $\alpha = 0$ расход равен 54 *кг/сек*, то при $\alpha = +5^\circ$ расход равен 31 *кг/сек*, а при $\alpha = -5^\circ$ расход увеличивается до значения 75 *кг/сек*.

Очевидно, что на изменение газодинамических величин влияет также соответствующий подбор закона изменения температуры.

Ереванский государственный
университет

Поступила 7 VI 1974

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

## ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ ԻՐԱԿԱՆ ԳԱԶԻ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ, ՈՉ ԻԶՈԹԵՐՄ ՇԱՐԺՈՒՄԸ, ՈՒՂԵԳԾԻ ՊՐՈՖԻԼԻ ԹԵՔՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ


### Ամփոփում

*Հոդվածում քննարկվում է իրական (մածուցիկ) գազի ստացիոնար, ոչ իզոթերմ շարժումը գլանային երկար գազամուղում, գազամուղի հորիզոնի նկատմամբ ունեցած թեքության անկյան ազդեցության հաշվառումով։*

*Շարժման ոչ իզոթերմ բնույթը պայմանավորված է գազի ջերմաստիճանի փոփոխությամբ կախված ներքին և արտաքին պատճառներից։ Հետազոտված են շարժման լամինար և տուրբուլենտ ռեժիմները։ Որոշված են գազի ճնշման, արագության, խտության և ելքի փոփոխման օրենքները գազամուղի երկարությամբ, կախված նրա թեքության անկյունից և գազի ջերմաստիճանի փոփոխման օրենքից։*

*Խնդրի գործնական նշանակությունը մեծանում է լեռնային ռելեֆ ունեցող վայրերի համար, որոնցով անցնում են երկար գազամուղները։*

*Խնդրի լուծումը և հաշված թվային օրինակը ցույց են տալիս, որ գազամուղի թեքության անկյունը և գազի շարժման ոչ իզոթերմ բնույթը էականորեն են ազդում գազադինամիկական մեծությունների վրա։*


## STATIONARY NON-ISOTHERMAL MOTION OF REAL GAS IN A LONG GASPIPING, CONSIDERING THE INFLUENCE OF THE LINE PROFILE SLOPE

G. A. BABAJANIAN


### Summary

The paper discusses a stationary one-dimensional non-isothermal motion of real gas in a long gaspiping, considering the influence of the line profile slope. Both laminar and turbulent regimes of gas motion are examined. The laws of variation in pressure, density, velocity and flow rate along the gaspiping, depending on its slope and gas temperature are revealed.

A specific numerical example is presented for the temperature variation law given linearly. The solution and the numerical example show that the line profile slope and the variable gas temperature essentially influence the motion parameters.


### ЛИТЕРАТУРА


1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехтеориздат, М., 1951.
2. *Бабаджанян Г. А.* Движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния профиля трассы. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVI, №5, 1973.
3. *Бабаджанян Г. А.* Стационарное неизотермическое движение реального газа в длинном газопроводе. Ученые записки ЕГУ, №3, 1974.
4. *Смирнов А. С.* и *Ширковский А. И.* Добыча и транспорт газа. Гостоптехиздат, М., 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

Н. Е. САРКИСЯН, М. М. МАРТИРОСЯН

# ВЫНОСЛИВОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНО АРМИРОВАННЫХ СТЕКЛОШПОНОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ПЕРЕГИБЕ

Исследование выносливости тонкой ленты из конструкционных материалов в условиях нагружения, соответствующих циклическому перегибу, представляет определенный практический интерес [1,2].

В настоящей работе проведено экспериментальное исследование деформационной выносливости стеклошпонов типа СВАМ при циклическом перегибе в зависимости от анизотропии механических свойств и типа связующего материала, частоты перегиба и степени предварительного натяжения образца.

## 1. Методика испытаний

В качестве материала для испытаний были использованы стеклошпоны на эпокси-фенольном и бутвар-фенольном связующем с соотношением волокон в ортогональных направлениях 1:1. Число слоев шпона было 18 (по 9 в двух ортогональных направлениях). Фактическое соотношение волокон колебалось в пределах от 1:1.5 до 1:1.3. Диаметр стекловолокна 13.1 ÷ 13.8 *микрон*, содержание смолы в шпоне 22.0 ÷ 24.6%.

Образцы для испытаний имели форму прямоугольной полоски размером $150 \times 10 \times \delta$ *мм*, где $\delta$ — толщина шпона. Толщина $\delta$ колебалась в пределах от 0.162 до 0.317 *мм* в зависимости от листа и типа связующего.

Для исследования влияния анизотропии образцы вырезались в трех направлениях в плоскости листа, которые с направлением волокон составляли угол $\varphi = 0°$, 22.5° и 45°.

Деформативные и прочностные свойства стеклошпонов при простом растяжении (табл. 1) определялись по данным испытания 5 образцов в обычных условиях среды на разрывной машине ЦДМ-500 при постоянной скорости перемещения захватов $v = 10$ *мм/мин*. Деформации при растяжении определялись проволочными тензодатчиками сопротивления с помощью электронного измерителя деформации АИД-1М.

Как показали сравнительные испытания, по своим механическим свойствам стеклошпон мало отличается от листового материала. Так, например, прочность шпона на растяжение на 2 ÷ 7% выше прочности листа толщиной 5 *мм*, спрессованного из тех же шпонов методом горячего прессования.

Усталостные испытания проводились при режимах так называемого жесткого нагружения, когда в процессе испытания постоянным сохраняется амплитудное значение угла перегиба. При этом в процессе циклического деформирования для разупрочняющегося материала может произойти уменьшение прилагаемого изгибающего момента.

*Таблица 1*

Механические свойства стеклошпонов при статическом растяжении

| Тип связующего | Угол с направлением волокон $\varphi$, *град* | Механические характеристики | | Результаты статистической обработки данных по пределу прочности $\sigma_p$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | предел прочности $\sigma_p$, *кгс/мм²* | модуль упругости $E$, *кгс/мм²* | среднее квадратическое отклонение, *кгс/мм²* | коэффициент вариации, % |
| Эпокси-фенольное | 0 | 64.40 | 2480 | 2.03 | 3.15 |
| | 22.5 | 15.04 | 1060* | 0.85 | 5.65 |
| | 45 | 12.80 | 785* | 1.69 | 13.15 |
| Бутвар-фенольное | 0 | 41.12 | 2350 | 2.71 | 6.61 |
| | 22.5 | 11.76 | 1300* | 1.56 | 13.23 |
| | 45 | 7.10 | 1080* | 0.14 | 1.90 |

* По начальному линейному участку зависимости напряжение–деформация.

Испытания проводились на приборе ДП-5/3 (фиг. 1), служащем для определения выносливости гибких листовых образцов из пластмасс, металлической фольги и т. д. в условиях перегиба.

Образец закреплялся в зажиме, выполняющем попеременно вращательное движение в противоположные стороны вокруг горизонтальной оси, совпадающей с осью перегиба. Висящий вниз свободный конец образца нагружался грузами, придающими образцу предварительное натяжение.

Угол перегиба образца (угол поворота зажима) в опытах варьировался в пределах до 90° и устанавливался с точностью 1°.

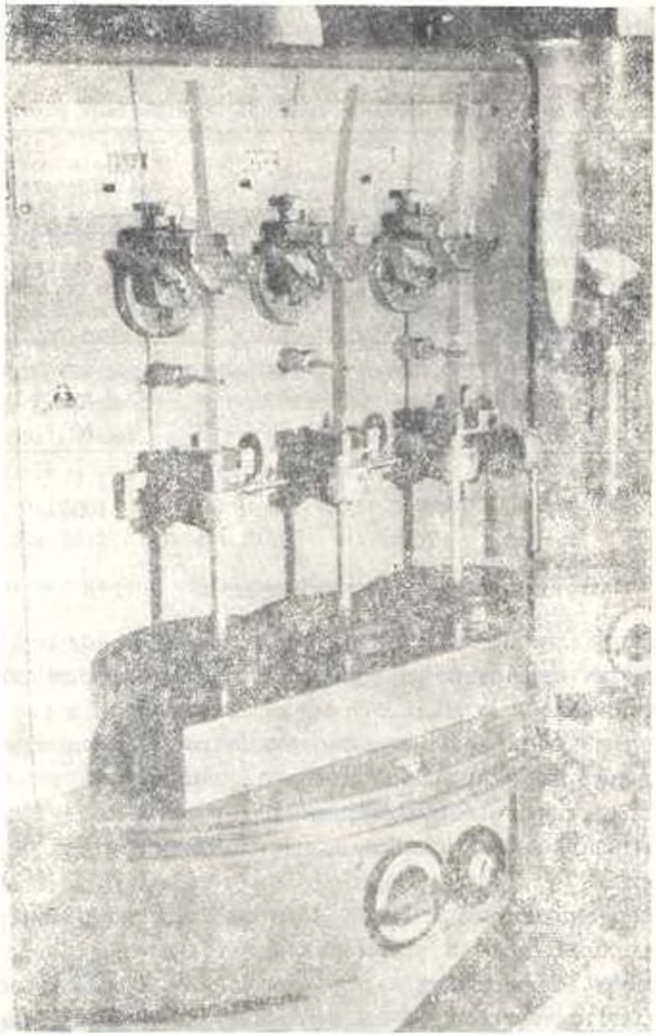
Испытания проводились при частоте 95 и 285 *цикл/мин*. Эти значения являются промежуточными между частотами, характерными для мало- и многоцикловой усталости стеклопластиков. Последние же, в основном, определяются соответственно на базе $10^4$ и $10^6$ циклов нагружения. С учетом этого база испытаний в данной работе ограничечена $10^5$ циклами.

В процессе экспериментов исключались остановки и другие перерывы, могущие влиять на результаты испытаний.

Для каждой серии испытаний отношение величины постоянной растягивающей нагрузки $P$ к величине нагрузки $P_{ст}$, разрушающей образец при статическом растяжении*, оставалось постоянным и составляло

$$K = \frac{P}{P_{ст}} = 0.024,\ 0.029 \text{ и } 0.122$$

* Это отношение в дальнейшем будет упоминаться как коэффициент (степень) предварительного натяжения образца.



Фиг. 1. Общий вид установки для испытания материалов на циклический симметричный перегиб.

При этом, как показывают расчеты, напряженное состояние материала в образцах, продольная ось которых совпадает с направлением стекловолокон в шпоне, характеризуется коэффициентом асимметрии цикла, равном 0.96 и 0.98, соответственно, для шпонов на эпокси- и бутвар-фенольном связующем.

Установка обеспечивала одновременное испытание трех образцов при одинаковом угле перегиба $\theta$ и коэффициенте предварительного натяжения $K$.

Количество образцов, испытанных на одной точке (при заданном угле перегиба $\theta$), определялось степенью разброса экспериментальных данных и составляло 3—8.

В целом для данной работы было испытано 230 образцов.

Испытания проводились в закрытой камере в нормальных условиях температуры и влажности.

Повышение температуры материала в рабочем сечении образца в процессе циклического деформирования обнаружено не было. В процессе усталостных испытаний определялось число циклов $N$ до разрушения образца в зависимости от амплитудного значения задаваемого угла перегиба $\theta$ и степени предварительного натяжения $K$.

Статистическая обработка экспериментальных результатов производилась по методике малого числа измерений [3].

## 2. Обсуждение результатов испытаний

Зависимость между числом циклов до разрушения и амплитудным значением угла перегиба $\theta$ для фиксированной ориентации $\varphi$ и предварительного натяжения в полулогарифмической системе координат оказывается линейной (фиг. 2—5).

Кривые Велера для исследованных стеклопластиков, независимо от типа связующего, частоты перегиба и угла между направлением армирующих волокон и плоскостью перегиба, описываются уравнением

$$\theta = a - b \lg N$$

где $a$ и $b$ — параметры, определяемые из опыта, зависящие от указанных выше факторов.

В табл. 2 помещены значения параметров $a$ и $b$ для всех 11 серий испытаний.

На приведенных в статье усталостных диаграммах точки соответствуют среднеарифметическим значениям $\theta$ и $N$, а графики построены по корреляционным уравнениям, вычисленным на основе неосредненных результатов каждой серии испытаний. В табл. 2 помещены коэф-

*Таблица 2*

Корреляционные уравнения зависимости $\theta - \lg N$

| Тип связующего стеклопластика | Угол вырезки образца с направ. волокон $\varphi$, (?) | Коэффициент степени предварительного напряжения, $K$ | Частота перегиба, цикл/мин | Параметры корреляционного ур-ния $\theta = a - b \lg N$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $a$ | $b$ | $r$ |
| Эпоксифенольное | 0 | 0.024 | 95 | 65.607 | 8.547 | −0.960 |
| | 0 | 0.029 | 95 | 58.701 | 7.463 | −0.999 |
| | 22.5 | 0.029 | 95 | 103.101 | 13.423 | −0.999 |
| | 45 | 0.024 | 95 | 128.072 | 15.552 | −0.999 |
| | 45 | 0.029 | 95 | 126.313 | 16.313 | −0.955 |
| | 45 | 0.122 | 95 | 86.864 | 10.050 | −0.997 |
| | 45 | 0.122 | 285 | 93.804 | 10.869 | −0.997 |
| Бутвар-фенольное | 0 | 0.024 | 95 | 73.083 | 8.834 | −0.987 |
| | 0 | 0.029 | 95 | 69.432 | 8.772 | −0.995 |
| | 22.5 | 0.029 | 95 | 108.052 | 13.072 | −0.986 |
| | 45 | 0.029 | 95 | 117.738 | 11.655 | −0.992 |

фициенты корреляции $r$ зависимости между $\theta$ и $\lg N$. Отношение критерия линейности к его основной ошибке колебалось от 0.125 до 0.795, что свидетельствует о существенной линейности зависимости Велера.

Линейность зависимости $f - \lg N$ и $\sigma - \lg N$ ($f$ и $\sigma$ — соответственно, прогиб и максимальное напряжение в рабочем сечении образца) для листового СВАМ-а и большого числа стеклотекстолитов установлена как в испытаниях на жесткий [4, 5], так и на мягкий режим плоского изгиба [6]. Кривые Велера состоят из двух линейных участков. Точка перелома графика, характеризующая в этих опытах предел выносливости материала, соответствует $10^4 - 10^6$ циклам нагружения. Исключение составляет случай изгиба образцов, вырезанных в направлении волокон, при котором предел выносливости не наблюдается даже на базе $10^7$ циклов [4, 5].

Рассматриваемые здесь испытания, подтверждая линейный характер усталостной зависимости $\theta - \lg N$, вместе с тем указывают на отсутствие предела выносливости стеклопластиков при циклическом перегибе на базе $10^5$ циклов независимо от угла между направлением волокон и плоскостью деформирования.

Анизотропия прочностных и деформативных свойств исследованных стеклошпонов влияет на выносливость лишь с количественной стороны.

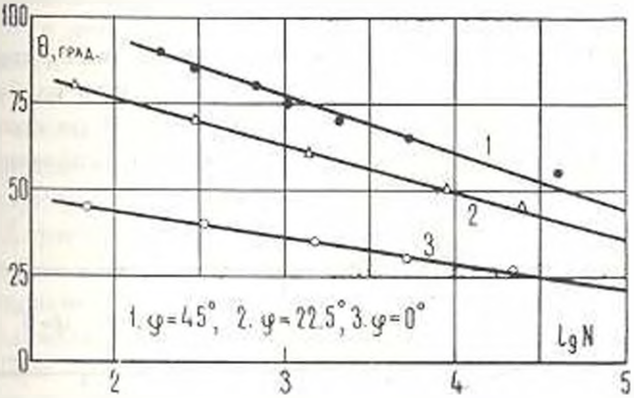
Кривые, представленные на фиг. 2, выражают число циклов симметричного перегиба до разрушения в зависимости от анизотропии материала и значения угла перегиба $\theta$ (при постоянном коэффициенте степени предварительного натяжения). Эти кривые свидетельствуют об относительно большей выносливости материала по мере приближения угла между направлением стекловолокон и плоскостью циклического перегиба к углу наименьшей жесткости материала*. Например, при $N_p = 10^4$ циклов угол перегиба $\theta$ для образцов ориентации $\varphi \neq 0^\circ$ примерно в два раза больше, чем угол перегиба образцов, вырезанных вдоль волокон. Однако, следует также иметь в виду, что с увеличением числа циклов до разрушения разница в значениях угла перегиба несколько уменьшается.

Независимо от долговечности излом образца происходит внезапно в течение полуцикла перегиба. Однако, следы начала макроразрушения, начинающегося сначала в смоле, наблюдаются задолго до излома образца.

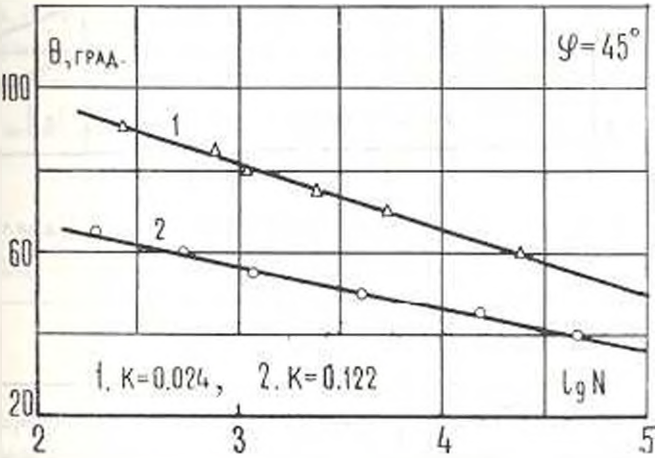
Влияние величины коэффициента предварительного натяжения образца на его выносливость было исследовано при испытаниях образцов всех трех ориентаций на стеклошпонах с эпокси-фенольным и бутвар-фенольным связующим.

На фиг. 3, для иллюстрации, приведены усталостные диаграммы испытания образцов, вырезанных при $\varphi = 45^\circ$.

* Угол наименьшей жесткости зависит от соотношения волокон. В частности, для ортогонально равнопрочного стеклошпона этот угол равен 45°.




Фиг. 3. Влияние анизотропии свойств стеклошпона на деформационную выносливость при циклическом перегибе. (Связующее—эпокси-фенольное, $K = 0.02$, частота перегиба — 95 *цикл/мин*).

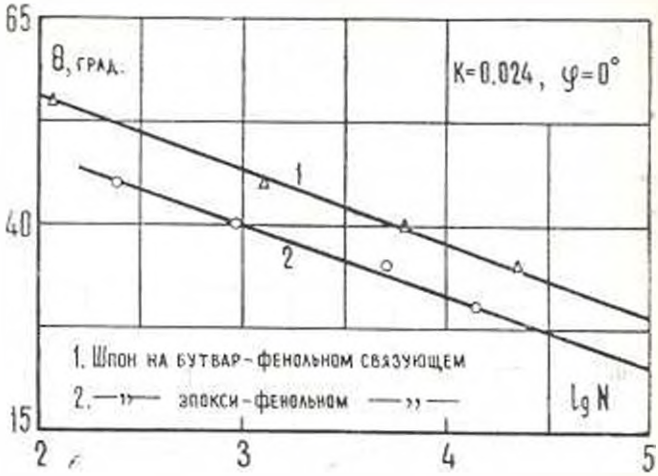



Фиг. 3. Влияние предварительного натяжения (связующее—эпокси-фенольное, частота перегиба — 95 *цикл/мин*)

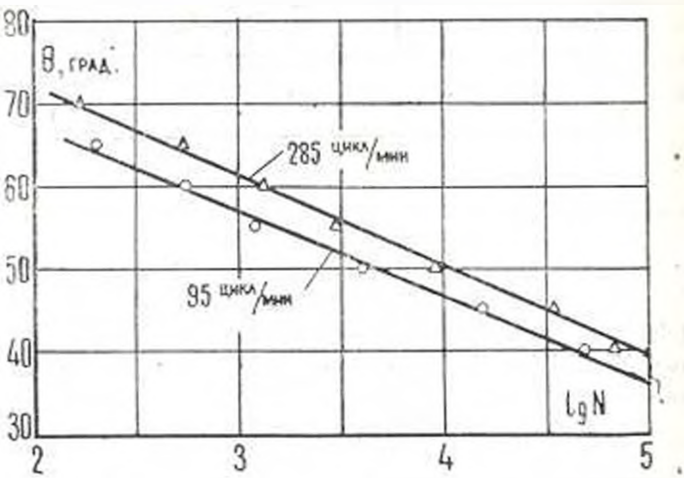
Как видно из сравнения значений параметров $a$ в табл. 2 и графиков на фиг. 3, для образцов, одинаково ориентированных относительно направления волокон, изменение коэффициента предварительного натяжения в небольшом интервале ($\pm$ 20% от некоторого среднего значения) мало влияет на величину угла перегиба $\theta$ и приводит к некоторому почти поступательному перемещению отрезка прямой $\theta$ — $\lg N$ на плоскости координат. Более сильное изменение коэффициента $K$ существенно изменяет наклон усталостной диаграммы. Например, увеличение коэффициента предварительного натяжения в 4 раза вызывает уменьшение угла перегиба $\theta$ от 28 до 16% (на базе числа циклов разрушения от $10^2$ до $10^5$ циклов).

Влияние типа связующего на способность стеклошпонов сопротивляться циклическому перегибу было выявлено в испытаниях образц полосок, по-разному ориентированных в плоскости, при двух знач ниях коэффициента $K$ (табл. 2).

Установлено, что, если соблюдается одинаковая степень предв рительного натяжения, выносливость стеклошпонов на бутвар-фенол ном связующем оказывается существенно большой по сравнению с вы носливостью стеклошпонов на эпокси-фенольном связующем. В част ности, это видно из фиг. 4.




Фиг. 4. Влияние типа связующего (частота перегиба — 95 цикл/мин).




Фиг. 5. Влияние частоты перегиба.

На фиг. 5 приведены графики зависимости Велера, иллюстрирую щие влияние частоты циклического перегиба на выносливость образ цов стеклошпона на эпокси-фенольном связующем, вырезанных в диа гональном направлении ($K = 0.122$). Как следует также из табл. 2, увеличение частоты перегиба в 3 раза практически не изменило характера усталостной диаграммы, но привело к некоторому повышению сопротивляемости материала.

*Выводы.* 1. Установлены линейный характер зависимости $\delta - \lg N$ и отсутствие „истинного“ предела выносливости ортогонально равнопрочных стеклошпонов СВАМ при циклических перегибах на базе 10[illegible] циклов независимо от угла вырезки образца с направлением волокон, типа связующего и частоты перегиба.

2. Деформационная выносливость стеклошпонов увеличивается по мере приближения угла между направлением волокон и плоскостью деформирования к углу наименьшей жесткости материала (при относительно одинаковой степени предварительного натяжения образца).

3. При одинаковых условиях циклического перегиба стеклошпоны на бутвар-фенольном связующем обладают относительно большей деформационной выносливостью, чем стеклошпоны на эпокси-фенольном связующем.

4. Увеличение частоты перегиба в 3 раза практически не меняет характер усталостной диаграммы, но приводит к некоторому повышению сопротивляемости материала деформации симметричного циклического перегиба.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 10 XI 1974

Ն. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

## ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԱՐՄԱՏԱՎՈՐՎԱԾ ԱՊԱԿԵՇՊՈՆՆԵՐԻ ԴԻՄԱԴՐՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՑԻԿԼԻԿ ԾՌՄԱՆԸ

### Ամփոփում

*Քննարկվում են CBAM տիպի ապակեշպոնների դիմադրողականության փորձնական ուսումնասիրության արդյունքները ցիկլիկ ծռման դեպքում կախված նյութի մեխանիկական հատկությունների անիզոտրոպիայից, խեժի տիպից, ծռման հաճախականությունից և նմուշների նախնական ձգման աստիճանից։*

*Փորձերի համար օգտագործվել են էպօքսի-ֆենոլային և բուտվար-ֆենոլային խեժերի վրա պատրաստված ապակեշպոններ։ Նմուշների երկայնական առանցքները թելիկների ուղղության հետ կազմել են 0°, 22.5° և 45° անկյուններ։ Հոգնածության ուսումնասիրության փորձարկումները կատարվել են կոշտ բեռնավորման ռեժիմի պայմաններում, 95 և 285 ցիկլ-րոպե հաճախականությամբ։ Նմուշի ծռման անկյունը փորձերի ընթացքում փոփոխվել է 27°-ից մինչև 90°։*

# RESISTANCE OF ORTHOGONAL REINFORCED LAMINATED GLASS-FIBRE SHEETS TO CYCLIC TWISTING

N. S. SARKISIAN, M. M. MARTIROSIAN


## Summary

The experimental results of investigation on resistance of laminated glass-fibre sheets of the CBAM type to cyclic twisting, depending on anisotropy of mechanical properties and the type of the bending material, twisting frequency and the degree of preliminary tension, are presented.


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ван-Гаут Ю. Н.* Стойкость к усталостному разрушению полихлорвиниловых пластиков. Механика полимеров, №3, 1965.
2. *Зыкалин П. Г., Лукин Б. Ю.* Выносливость тонкой ленты из жаропрочных сплавов. Проблемы прочности, №2, 1974.
3. *Митропольский А. К.* Техника статистических вычислений. Физматгиз, М., 1961.
4. *Ашкенази Е. К.* Анизотропия механических свойств некоторых стеклопластиков. ЛДНТП, Л., 1961.
5. *Ашкенази Е. К., Поздняков А. А.* Испытание стеклопластиков на усталость. Заводская лаборатория, т. XXVII, №10, 1961.
6. *Сидоренков А. Н., Захаров В. Н., Смирнов В. И.* Усталостная прочность судостроительных стеклопластиков при знакопеременном изгибе и влияние на нее некоторых технологических и эксплуатационных факторов. В сб.: „Свойства полиэфирных стеклопластиков и методы их контроля", Л., вып. 2, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

И. Е. ПРОКОПОВИЧ, Ю. А. ШАФРАНОВСКИЙ, А. С. ЛИННИК

# О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ К РАСЧЕТУ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ДЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ*

Задачи научно-технического прогресса и высокая степень экспериментально-теоретической проработки [1] заставляют считать настоятельно необходимым более широкое внедрение результатов теории ползучести бетона в практику проектирования. По мнению авторов, для этого, прежде всего, необходимо:

1) уточнить путем статистической обработки возможно большего массива экспериментальных данных начертания исходных семейств кривых ползучести бетона при сжатии, полученных в условиях постоянных напряжений, температур и влажностей окружающей среды, то есть в условиях исходных режимов;

2) выбрать выражения для аппроксимации исходных семейств кривых ползучести бетона и разработать расчетную методику назначения величин соответствующих параметров.

Поскольку феноменологическая теория использует принцип наложения, то основным требованием, предъявляемым к аналитическим выражениям для описания меры ползучести, является их наиболее полное соответствие исходным экспериментальным кривым.

Ввиду недостаточной проработки вопроса о количественных оценках такого соответствия, весьма полезно использование хотя бы качественных оценок. Выполнение многочисленных расчетов показало, что в этом смысле удобна оценка [2]

$$\frac{\partial C(t,\tau_1)}{\partial t} < \frac{\partial C(t,\tau_2)}{\partial t} \qquad \text{(a)}$$

Эта оценка записана, исходя из известного положения о том, что после снятия длительно действующей постоянной нагрузки происходит упругое последействие, уменьшающее величину деформаций, накопленных ранее.

Желательно, чтобы выражения, выбранные для описания мер ползучести, допускали решение основных интегральных уравнений в аналитической форме.

Предполагается, что выполнение намеченной программы создает базу, необходимую для составления таблиц, позволяющих рассчитывать конструкции при длительных воздействиях с учетом влияния свойств и

* Заметка печатается в порядке обсуждения.

соотношений исходных материалов, условий хранения и приготовления бетона, а также условий эксплуатации.

1. Для решения первого вопроса одним из авторов, совместно с М. М. Заставой, проведена систематизация и статистическая обработка результатов большого количества экспериментов, выполненных в условиях исходных режимов советскими и зарубежными исследователями и относящихся к ползучести при сжатии. Учитывая, что во многих случаях целью практического расчета является картина напряженно-деформированного состояния конструкции после окончания процесса ползучести, рассматривался период действия нагрузки, равный 2000 *суток*, то есть период, на протяжении которого практически происходит затухание длительных деформаций.

Прежде всего выполнен анализ пределов применимости выражения для меры ползучести [4]

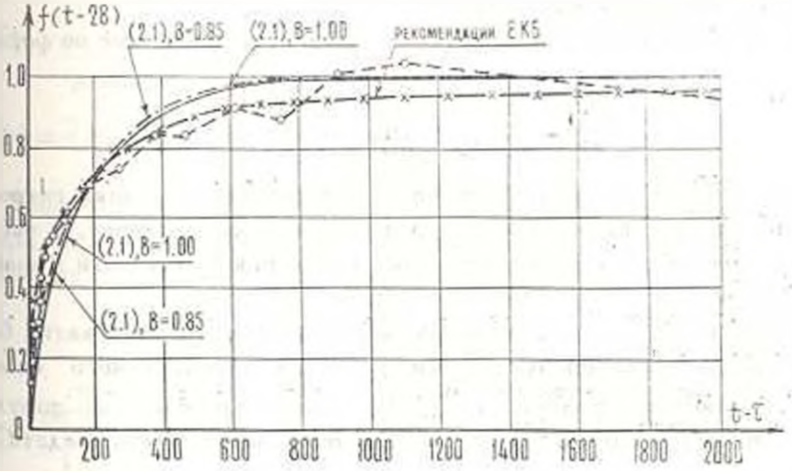
$$C(t, \tau) = \Theta(\tau) \cdot f(t - \tau) \tag{1.1}$$

основанного на гипотезе об аффинном подобии кривых ползучести образцов бетона, испытанных в условиях исходного режима при сжимающих напряжениях, не превышающих $0.5\,R_{np}$. Оказалось, что кривые ползучести бетона практически аффинноподобны в случаях, когда загружение производится при $\tau_1 > 20$ *суток*, то есть когда нагрузка прикладывается к достаточно зрелому бетону [5]. А из этого следует, что в области условно линейной ползучести выражения типа (1.1) могут применяться при расчете бетонных и железобетонных конструкций на воздействия как эксплуатационного, так и монтажного характера, иначе говоря, на все воздействия, вызывающие напряженное состояние в достаточно зрелом бетоне.

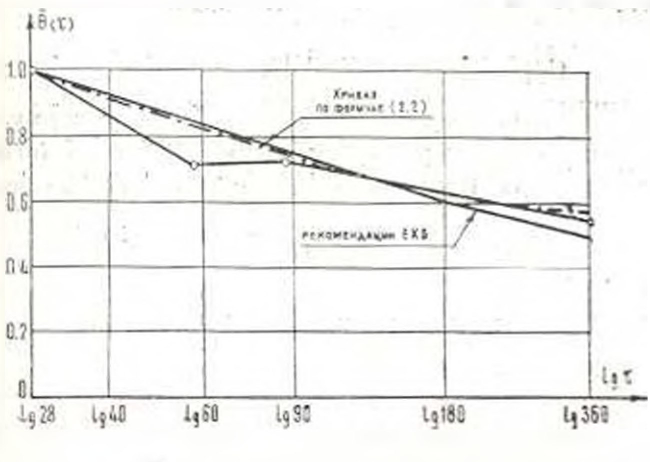
Таким образом, при $\tau_1 > 20$ *суток* задача изучения начертания исходных семейств кривых ползучести бетона свелась к изучению начертания кривых, соответствующих $\Theta(\tau)$ и $f(t - \tau)$.

На фиг. 1 показана эмпирическая линия регрессии зависимости $f(t - 28)$ для эталонного бетона, построенная на основании статистической обработки результатов 1220 исследований. В качестве эталонного, применительно к предложениям А. Е. Десова, принят бетон с такими уровнями факторов влияния: портландцемент марки 500; гранитный щебень; В/Ц — 0.55; содержание цементного теста 20%; вибрирование; твердение в естественных условиях; $\tau_1 = 28$ *суток*; марка бетона М-400; относительная влажность воздуха — 70%; $r^{-1} = 0.20$; $\frac{\sigma}{R_{np}} = 0.4$.

Обработка накопленного экспериментального материала показала наличие влияния на очертания кривых, соответствующих $f(t - \tau)$, размеров поперечных сечений образцов только при величинах обратного гидравлического радиуса $r^{-1} > 0.2 (\leqslant 20 \times 20$ *см*). У таких образцов при уменьшении поперечного сечения скорость деформаций ползучести на начальном участке увеличивается.




Фиг. 1. Графики функции $f(t-28)$ для эталонного бетона




Фиг. 2. Графики функции $\bar{\theta}(\tau)$ для бетона, изготовленного на портландцементе

Детальная обработка собранных экспериментальных данных не позволила выявить каких-либо факторов, влияющих на начертание кривой $\theta(\tau)$, кроме скорости твердения цемента. На фиг. 2 нанесена эмпирическая линия регрессии функции $\bar{\theta}(\tau)$, характеризующей старение бетона, изготовленного на портландцементе.

$$\theta(\tau) = \bar{\theta}(\tau)\, C_э(\infty, 28), \quad \bar{\theta}(28) = 1 \qquad (1.2)$$

где $C_э(\infty, 28)$ — предельная мера ползучести эталонного бетона.

На фиг. 1 и 2, в целях сопоставления, показаны и кривые $f(t-\tau_1)$ и $\bar{\theta}(\tau)$, построенные согласно рекомендациям ЕКБ [6].

Величина $C_э(\infty, 28)$ определена путем обработки результатов 296 опытов, выполненных на образцах из тяжелого бетона, и оказалась равной $C_э(\infty, 28) = 6.36 \cdot 10^{-6}$ $см^2/кг$. Для бетонов с уровнями факторов, отличными от соответствующих эталонному, величина $C(\infty, 28)$

подсчитывается путем умножения $C_*(\infty, 28)$ на произведение корректирующих коэффициентов [7].

2. На фиг. 1 и 2 показаны также кривые, построенные по формулам

$$f(t-\tau) = 1 - 0.85\, e^{-0.006(t-\tau)}, \quad f(t-\tau) = 1 - e^{-0.006(t-\tau)} \tag{2.1}$$

$$\bar{\Theta}(\tau) = 0.50 + 0.70\, e^{-0.012\tau} \tag{2.2}$$

достаточно хорошо соответствующие эмпирическим линиям регрессии, обеспечивающие выполнение условия (а) и позволяющие, в частных случаях, получить решения основных уравнений ползучести в аналитической форме.

В соответствии со сказанным мера ползучести при сжатии бетонного образца, характеризующегося размерами поперечного сечения, удовлетворяющего условию $r^{-1} < 0.2$, изготовленного на портландцементе и загруженного при $\tau_1 \geq 28$, *суток*, может быть представлена в виде

$$C(t, \tau) = (C_0 + Ae^{-\gamma_1\tau})\,[1 - Be^{-\gamma_2(t-\tau)}] \tag{2.3}$$

Если это выражение переписать несколько иначе

$$C(t, \tau) = C_0[1 - Be^{-\gamma_2(t-\tau)}] + ABe^{-(\gamma_1-\gamma_2)\tau}\,[e^{-\gamma_2\tau} - e^{-\gamma_2 t}]$$

то нетрудно заметить, что оно достаточно близко к формуле для меры ползучести, построенной в [8] путем рассмотрения реологической модели стареющего тела. В частности, для образца из эталонного бетона

$$C(t, \tau) = (3.0 + 4.2e^{-0.012\tau})\,[1 - Be^{-0.006(t-\tau)}]10^{-6} \tag{2.4}$$

где $B = 0.85$ или $B = 1$.

Для образца из бетона, отличного от эталонного,

$$C_0 = 0.5\cdot C(\infty, 28), \quad A = 0.7\cdot C(\infty, 28) \tag{2.5}$$

Как будет показано дальше (табл. 1), при вычислении предельных величин коэффициентов затухания напряжений в условиях стационарных вынужденных деформаций $H(\infty, 28)$ величина $B(0.85 \leq B \leq 1.00)$ существенно не влияет на результаты. Однако, принятие $B < 1$, то есть выделение скоропроходящей части деформации ползучести, хотя и приводит к более сложным расчетным формулам, но позволяет лучше аппроксимировать экспериментальные данные при рассмотрении конечных периодов деформирования.

Недостатком формулы (2.3) при $B \neq 1$, имеющим, по сути дела, формальный характер, является то, что она приводит к неравенству $C(t, t) \neq 0$.

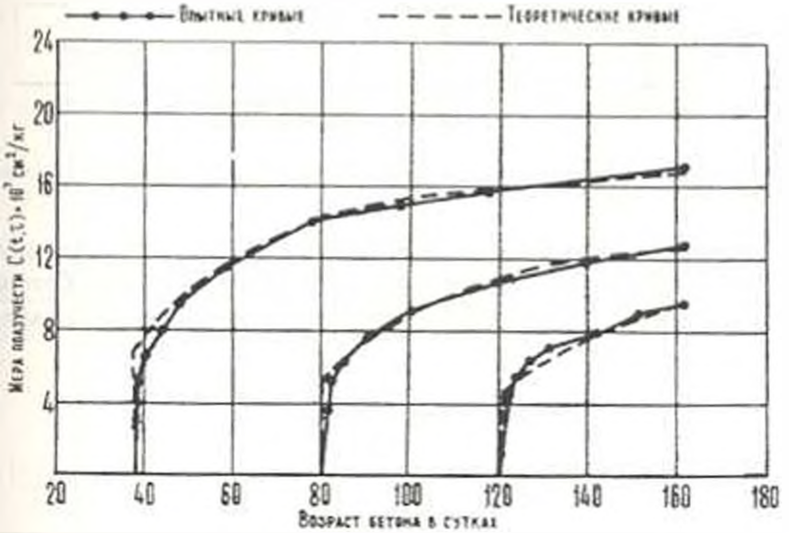
От этого недостатка можно освободиться, если отнести скоропроходящую часть деформаций ползучести к мгновенным деформациям, то есть если представить выражения для полных относительных деформаций в виде

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{\overline{E}(\tau)} + \overline{\Theta}(\tau)\left[1 - e^{-\gamma_1 (t-\tau)}\right] \tag{2.6}$$

где

$$\overline{E}(\tau) = \overline{\nu}(\tau)\, E(\tau), \quad \overline{\nu}(\tau) = \frac{1}{1 + E(\tau)\Theta(\tau)\,(1 - B)}, \quad \overline{\Theta}(\tau) = B\Theta(\tau) \tag{2.7}$$

**Представление $\delta(t, \tau)$ в форме (2.6) рационально еще и потому, что при практических расчетах железобетонных конструкций обычно используется модуль упруго-пластических деформаций, то есть модуль $\overline{E}(\tau)$.**



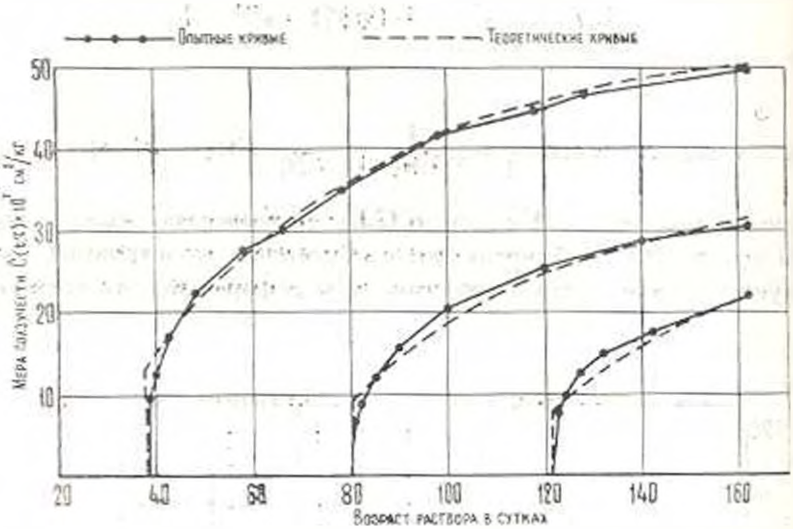

**Фиг. 3. Экспериментальные и теоретические (2.3) кривые ползучести бетона при сжатии**

Для иллюстрации возможностей выражения (2.3), а следовательно, и (2.6), при изучении деформирования на конечных периодах времени на фиг. 3 показаны экспериментальное семейство кривых ползучести бетона и соответствующее аналитическое описание. Эти кривые получены путем испытания образцов размерами $7 \times 7 \times 70$ *см*, изготовленных из бетона состава 1:1.32:3.86 по весу, изолированных от влагопотерь и загруженных нагрузкой, соответствующей $0.3\ R_{пр}$. На фиг. 4 приведены аналогичные кривые для таких же образцов из исходного раствора, то есть цементного раствора состава 1:1.32. Более подробно эти опыты описаны в статье [9].

Для аналитического описания кривых на фиг. 3 и 4 применялась формула (2.3) при величинах коэффициентов:

для бетона: $C_0 = 1.078 \cdot 10^{-6}\ см^2/кг$, $A = 1.582 \cdot 10^{-6}\ см^2/кг$
$\gamma = 0.025\ 1/сут$, $\gamma_1 = 0.03\ 1/сут$, $B = 0.6$, $E(28) = 4 \cdot 10^5\ кг/см^2$

для раствора: $C_0 = 3.225 \cdot 10^{-6}\ см^2/кг$, $A = 8.35 \cdot 10^{-6}\ см^2/кг$
$\gamma = 0.035\ 1/сут$, $\gamma_1 = 0.02\ 1/сут$, $B = 0.76$, $E(28) = 2.64 \cdot 10^5\ кг/см^2$




Фиг. 4. Экспериментальные и теоретические (2.3) кривые ползучести раствора при сжатии

3. Таким образом, при записи интегрального уравнения релаксации удобно представить характеристики деформативности бетона согласно (2.6) и (2.7). В этом случае интегральное уравнение релаксации принимает вид

$$\sigma^*(t) - \bar{E}(t)\int_{\tau_1}^{t}\sigma^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau = \bar{\sigma}(t) \qquad (3.1)$$

причем $\bar{\sigma}(t)$ — напряжения, развивающиеся после проявления упруго-мгновенных деформаций и скоропроходящей части деформаций ползучести; эти напряжения связаны с напряжениями упруго-мгновенной задачи $\sigma(t)$ формулой

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\nu}(t)\,\sigma(t) \qquad (3.2)$$

Интегральное уравнение (3.1) при удельной относительной деформации $\delta(t,\tau)$ согласно (2.6) и $E(t) = \text{const}$ может быть сведено к дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами.

Если для сокращения записи ввести обозначения

$$\xi = \frac{1}{\gamma_1}, \qquad c = EC_0, \qquad a = EAe \qquad (3.3)$$

то это дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\sigma^*(t)}{dt^2} + \gamma_1\left[1 - \bar{\Theta}(t)\bar{E}(t) - \xi\left(1 - \frac{\bar{E}(t)}{\bar{E}(\infty)}\right)\right]\frac{d\sigma^*(t)}{dt} = 0 \qquad (3.4)$$

и должно решаться при таких начальных условиях:

$$\sigma^*(\tau_1) = \bar{\nu}(\tau_1)\,\sigma(\tau_1)$$

$$\left.\frac{d\sigma^*(t)}{dt}\right|_{t=\tau_1} = -\gamma_1 B(a+c)\,\bar{\nu}^2(\tau_1)\,\sigma(\tau_1) \qquad (3.5)$$

где $\sigma(\tau_1)$ — напряжения упруго-мгновенной задачи, возникающие в момент введения вынужденной деформации $\tau_1$.

При стационарных вынужденных деформациях решение уравнения (3.4) с начальными условиями (3.5) может быть представлено формулой

$$\sigma^*(t) = \bar{\sigma}(\tau_1)\left\{1 - \frac{B(a+c)\,\bar{\nu}(\tau_1)}{(1+c)\,\bar{\nu}(\infty)}\left[F(0) - F(t-\tau_1)\,K(t-\tau_1)\right]\right\} \qquad (3.6)$$

где

$$K(t-\tau_1) = \exp\left\{-\gamma_1(1+c)\,\bar{\nu}(\infty)\,(t-\tau_1) + \left[\frac{B\bar{\nu}(\infty)}{\xi(1-B)} - 1\right]\ln\frac{\bar{\nu}(\tau_1)}{\bar{\nu}(t)}\right\} \qquad (3.7)$$

$$F(t-\tau_1) = 1 + \frac{[\xi(1-B) - B\bar{\nu}(\infty)]}{[1+\xi+Bc\,\bar{\nu}(\infty)]}\,\frac{[\bar{\nu}(\infty) - \bar{\nu}(t)]}{\bar{\nu}(\infty)\,\xi(1-B)} +$$

$$+ \frac{[\xi(1-B) - B\bar{\nu}(\infty)][2\xi(1-B) - B\bar{\nu}(\infty)]}{[1+\xi+Bc\,\bar{\nu}(\infty)][1+2\xi+Bc\,\bar{\nu}(\infty)]}\left[\frac{\bar{\nu}(\infty) - \bar{\nu}(t)}{\xi(1-B)\,\bar{\nu}(\infty)}\right]^2 + \ldots \qquad (3.8)$$

$$F(0) = 1 + \frac{[\xi(1-B) - B\bar{\nu}(\infty)]}{[1+\xi+Bc\,\bar{\nu}(\infty)]}\,\alpha\,\bar{\nu}(\tau_1) +$$

$$+ \frac{[\xi(1-B) - B\bar{\nu}(\infty)][2\xi(1-B) - B\bar{\nu}(\infty)]}{[1+\xi+Bc\,\bar{\nu}(\infty)][1+2\xi+Bc\,\bar{\nu}(\infty)]}\,\alpha^2\bar{\nu}^2(\tau_1) + \ldots \qquad (3.9)$$

Из (3.6) следует формула для напряжений в момент $t-\tau_1 \to \infty$

$$\sigma^*(\infty) = \bar{\nu}(\tau_1)\,\sigma(\tau_1)\left\{1 - \frac{B(a+c)\,\bar{\nu}(\tau_1)}{(1+c)\,\bar{\nu}(\infty)}F(0)\right\} \qquad (3.10)$$

Соответствующий коэффициент затухания напряжений вычисляется по формуле

$$H^*(\infty) = \frac{\sigma^*(\infty)}{\sigma(\tau_1)} \qquad (3.11)$$

В случае $B = 1$, то есть при отнесении скоропроходящей части ползучести к длительным деформациям найдем

$$\sigma^*(t) = \sigma(\tau_1)\left\{1 - \frac{a+c}{1+c}\left[F_1(0) - F_1(t-\tau_1)\,K_1(t-\tau_1)\right]\right\} \qquad (3.12)$$

где

$$K_1(t-\tau_1) = \exp\left\{-\gamma_1(1+c)(t-\tau_1) - \frac{\alpha}{\xi}\left[1 - e^{-\xi(t-\tau_1)}\right]\right\} \qquad (3.13)$$

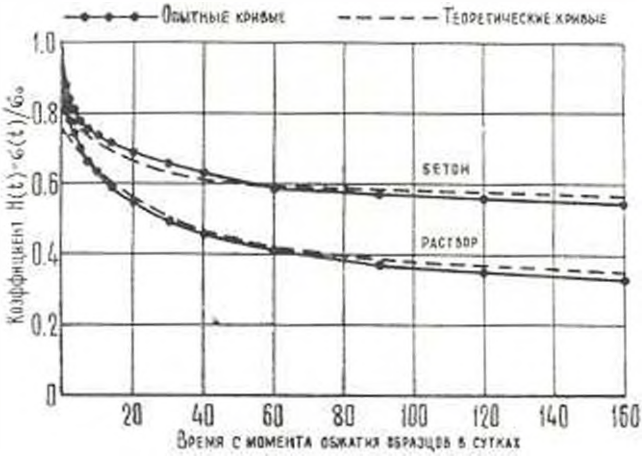
$$F_1(t-\tau_1) = 1 - \frac{\alpha e^{-\gamma(t-\tau_1)}}{1+c+\xi} + \frac{\alpha^2 e^{-2\gamma(t-\tau_1)}}{(1+c+\xi)(1+c+2\xi)} - \dots \tag{3.14}$$

$$F_1(0) = 1 - \frac{\alpha}{1+c+\xi} + \frac{\alpha^2}{(1+c+\xi)(1+c+2\xi)} - \dots \tag{3.15}$$

Формула (3.10) примет вид

$$\sigma^*(\infty) = \sigma(\tau_1)\left|1 - \frac{\alpha+c}{1+c}F_1(0)\right| \tag{3.16}$$

Если в (3.12)—(3.16) положить $\tau_1 = \tau_0$, то придем к известным формулам [2].




Фиг. 5. Экспериментальные и теоретические (3.6) кривые релаксации напряжений в сжатых бетонных и растворных образцах

В табл. 1 приведены величины коэффициентов затухания напряжений $H(\infty, 28)$, подсчитанные согласно изложенному выше для элементов из эталонного бетона, а также по теории упругой наследственности (ТУН) и теории старения (ТС).

*Таблица 1*

Величины коэффициентов затухания напряжений $H(\infty, 28)$ для эталонного бетона

| Теория | Характеристика аппроксимаций | $H_э(\infty, 28)$ |
|---|---|---|
| НТС | $B = 0.85$ | 0.256 |
| | $B = 1.00$ | 0.228 |
| | $B = 1.00;\ \gamma = \gamma_1$ | 0.277 |
| ТУН | $\varphi = 1.89$ | 0.346 |
| ТС | $\varphi = 1.89$ | 0.151 |

Для проверки соответствия опытным данным результатов расчетов, выполненных по формуле (3.6), использованы кривые релаксации, изображенные на фиг. 5 и построенные одним из авторов. Кривые относятся к образцам $7 \times 7 \times 70$ *см*, изготовленным из бетона и из раствора, характеризующихся кривыми ползучести, показанными на фиг. 3 и 4 и приведенными выше коэффициентами. Образцы в течение 168 *суток* находились в условиях вынужденных деформаций, вызвавших в момент загружения $\tau_1 = 38$ *суток* сжимающие напряжения $\sigma = 0.3R_{пр}$ и сохранившихся постоянными во времени путем соответствующего сбрасывания нагрузки.

## Выводы

1. Если сжимающие напряжения приложены к бетону в возрасте $\tau_1 > 20$ *суток*, то есть приложены к достаточно затвердевшему бетону, то исходные кривые ползучести аффинноподобны. Расчеты бетонных и железобетонных конструкций на длительные воздействия эксплуатационного характера могут выполняться на основе представления меры ползучести в форме (1.1) и, в частности, на основе (2.3).

2. При размерах поперечных сечений элементов бетонных и железобетонных конструкций, удовлетворяющих условию $r^{-1} < 0.20$, мера ползучести бетона при сжатии может приниматься согласно формулам (2.4) и (2.5), последняя из которых учитывает влияние свойств и соотношений исходных материалов, условий хранения и приготовления бетона, а также условий эксплуатации.

3. Формулы (3.6) и (3.10), построенные на основе аппроксимации (2.3), достаточно достоверно описывают процесс релаксации в сжатых бетонных образцах. Следовательно, выражение для меры ползучести (2.3) может с успехом применяться при медленно и монотонно убывающих напряжениях. Дополнительный анализ показал, что (2.3) применимо и в случаях медленного монотонного возрастания напряжений с последующим возможным уменьшением.

Одесский инженерно-строительный
институт

Поступила 13 XII 1973

Ի. Ե. ՊՐՈԿՈՊՈՎԻՉ, Յու. Ա. ՇԱՖՐԱՆՈՎՍԿԻ, Ա. Ա. ԼԵՎԻՆ

## ԵՐԿԱՐԱՏԵՎ ՇԱՀԱԳՈՐԾՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆՅԱ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻՆ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Երկարատև շահագործման ընթացքում ազդեցությունների որոշման համար բետոնյա և երկաթբետոնյա կառուցվածքների հաշվարկները կարող են կատարվել բետոնի սողքի չափը սողքի կորերին աֆինային նմանության ձևով ներկայացնելու ճանապարհով։ Այստեղ սեղմող լարումներ կիրառվում են բավական ամրացած բետոնի վրա* ($\tau_1 > 20$ օր)։

*Առաջարկություններ են արված բետոնի սողքի չափը այնպիսի էլեմենտների համար որոշելու, որոնց լայնական կտրվածքների չափերը բնորոշվում են հիդրավլիկական $r^{-1} < 0.20$ շառավղի հակադարձ մեծությամբ: Ընդ որում հաշվի են առնված նախնական նյութերի հատկությունները և հարաբերությունները, բետոնի պատրաստման, պահման և շահագործման պայմանները:*

*Սողքի ինտեգրալ հավասարումների լուծումը հիմնված է բետոնի սողքի չափի համար առաջարկված արտահայտության վրա: Այդ լուծումը սեղմված բետոնային նմուշում լար ժամանակի լարումների թուլացման համար տալիս է լրիվ պատկերը և կարող է հաջողությամբ կիրառվել դանդաղ և մոնոտոնաբար փոփոխվող լարումների համար:*

# CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE DURABLE STRUCTURES (USING SOME ASPECTS OF THE THEORY OF CREEP)

I. E. PROKOPOVICH, Y. A. SHAFRANOVSKY


## Summary

The calculation of concrete and reinforced concrete structures designed for prolonged operation can be made by presenting the creep measure of concrete in terms of creep affinity. Here the compressive stresses are applied to a sufficiently hardened concrete (at $\tau > 20$ days).

Some recommendations are given on defining the compressive creep measure of concrete for the elements whose cross-sections are characterized by the inverted hydraulic radius, $r^{-1} < 0.20$. The effect of properties and proportions of initial materials, the conditions of casting, storing and using concrete are taken into account.

The solution to the integral creep equation is based on the expression suggested for the creep measure of concrete. It provides a complete pattern of the relaxation stress process in compressed concrete sapmles and can be successfully applied to slowly and monotonously changing stresses.


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Арутюнян Н. Х.* Механика в СССР за 50 лет. „Наука", 1972.
2. *Прокопович И. Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. Госстройиздат, М., 1963.
3. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности окружающей среды. Стройиздат, М., 1973.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
5. *Застава М. М.* О статистической оценке влияния возраста загружения на ползучесть бетона при сжатии. Сб. „Строительные конструкции", в. XVI, Киев, 1970.
6. Европейский комитет по бетону. Международные рекомендации для расчета и осуществления обычных и предварительно напряженных железобетонных конструкций. М., 1970.

7. *Прокопович И. Е., Засмина М. М.* О расчетном определении предельных длительных деформаций тяжелого бетона. „Бетон и железобетон", №5, 1972.

8. *Васильев П. И., Гаврилин Б. А., Харлаб В. Д.* Реологическая модель стареющего бетона. Сб. тр. ЛИСИ, №63, Л., 1970.

9. *Шафриновский Ю. А.* Ползучесть бетона при повторных нагрузках. Известия вузов „Строительство и архитектура", №3, 1969.