ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1975

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

В. В. МИКАЕЛЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА С УПРУГИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда две противоположные его кромки защемлены, а в средней части прямоугольник усилен упругим тонким включением, расположенным параллельно защемленным кромкам. Включение представляется в виде приваренной к прямоугольнику достаточно тонкой полосы толщиной h, которая растягивается вдоль ее оси сосредоточенной силой.

Исследованию напряженного состояния полуплоскости с упругими накладками на границе посвящены многие работы. Подробная библиография по этому вопросу приводится в работах Р. Муки и Э. Стернберга [1], Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна [2]. Некоторые задачи о растяжении упругих прямоугольников накладками рассматривались в работах [3, 4]. Во всех этих работах принимается допущение Э. Мелана [5], то есть считается, что упругая накладка находится в одноосном напряженном состоянии.

Решение поставленной задачи осуществляется в перемещениях, которые представляются в виде рядов Фурье по тригонометрическим функциям. Коэффициенты разложений определяются из полученных вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Следует отметить, что некоторые другие задачи для прямоугольника с усиленными кромками или ребрами рассматривались в работах [6—8].

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника (фиг. 1), когда две кромки ($y = 0$, $y = 2b$) защемлены, а посредине прямоугольник усилен приваренным к нему упругим включением или накладкой толщиной h, которые растягиваются вдоль своей оси силой $2P$. Остальные кромки прямоугольника считаются свободными от нагрузок.

В силу симметрии граничных условий мы рассмотрим только половину области прямоугольника ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), для которой граничные условия можно записать в виде:
на защемленном крае

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \tag{1.1}$$

на свободных от нагрузок кромках

$$\sigma_x(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = \sigma_x(a, y) = \tau_{xy}(a, y) = 0 \tag{1.2}$$

а на линии контакта с включением или накладкой по условию симметрии имеем

$$v(x, b) = 0 \tag{1.3}$$

Из условия равновесия элемента накладки [2] на контактной линии $y = b$ получим второе граничное условие

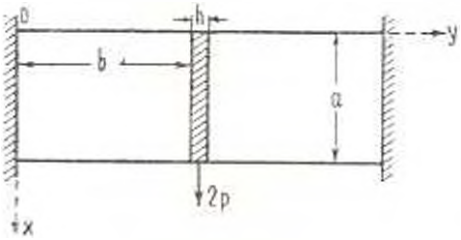
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{2P}{E_1 F} - \frac{2}{E_1 h}\int_0^x \tau_{xy}(t, b)\,dt \tag{1.4}$$

где E_1 — модуль упругости материала накладки, а F — площадь поперечного сечения накладки.
При этом

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a,\ y=b} = 0 \tag{1.5}$$

то есть один конец накладки свободен от нагрузки.

Как известно, перемещения u и v должны удовлетворять уравнениям Ляме



Фиг. 1.

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda + \mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} = 0$$

$$\mu\nabla^2 v + (\lambda + \mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} = 0 \tag{1.6}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

λ и μ — упругие постоянные материала прямоугольника, а напряжения выражаются через перемещения формулами

$$\sigma_x = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_y = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{1.7}$$

Решение уравнений (1.6) для перемещений u и v ищем в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{sh}\alpha_k y + B_k \operatorname{ch}\alpha_k y + C_k \alpha_k y \operatorname{sh}\alpha_k y + D_k \alpha_k y \operatorname{ch}\alpha_k y)\cos\alpha_k x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(E_k \operatorname{sh}\gamma_k x + F_k \operatorname{ch}\gamma_k x + G_k \gamma_k x \operatorname{sh}\gamma_k x + H_k \gamma_k x \operatorname{ch}\gamma_k x)\cos\gamma_k y +$$

$$+ a_0 y + b_0 \tag{1.8}$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \{ [B_k - (3-4\nu) C_k] \operatorname{sh} \lambda_k y + [A_k - (3-4\nu) D_k] \operatorname{ch} \lambda_k y +$$

$$+ D_k \lambda_k y \operatorname{sh} \lambda_k y + C_k \lambda_k y \operatorname{ch} \lambda_k y \} \sin \lambda_k x -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \{ [E_k - (3-4\nu) H_k] \operatorname{ch} \gamma_k x + [F_k - (3-4\nu) G_k] \operatorname{sh} \gamma_k x +$$

$$+ H_k \gamma_k x \operatorname{sh} \gamma_k x + G_k \gamma_k x \operatorname{ch} \gamma_k x \} \sin \gamma_k y \tag{1.9}$$

где $\lambda_k = k\pi/a$, $\gamma_k = k\pi/b$, а ν — коэффициент Пуассона материала прямоугольника.

Используя граничные условия (1.1) — (1.5), после некоторых преобразований получим следующие соотношения:

$$A_k = (3-4\nu) D_k, \qquad E_k = -(1-2\nu) H_k$$

$$B_k + D_k \lambda_k b + C_k [\lambda_k b \operatorname{cth} \lambda_k b - (3-4\nu)] = 0$$

$$F_k + H_k \gamma_k a + G_k [\gamma_k a \operatorname{cth} \gamma_k a + (1-2\nu)] \tag{1.10}$$

и совокупность уравнений из восьми бесконечных систем линейных уравнений

$$x_k^{(1)} = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} a_{nk}^{(1)} x_n^{(1)}, \qquad x_k^{(2)} = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} a_{nk}^{(2)} x_n^{(2)} \tag{1.11}$$

$$y_k^{(1)} = \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} b_{nk}^{(1)} x_n^{(1)} + c_k^{(1)}, \qquad y_k^{(2)} = \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} b_{nk}^{(2)} x_n^{(2)} \tag{1.12}$$

$$z_k^{(1)} = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} c_{nk}^{(1)} x_n^{(1)} + \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} d_{nk}^{(1)} x_n^{(2)} + D_k^{(1)} \tag{1.13}$$

$$z_k^{(2)} = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} c_{nk}^{(2)} y_n^{(2)} + \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} d_{nk}^{(2)} y_n^{(2)} + D_k^{(2)} \tag{1.14}$$

$$u_k^{(1)} = \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} E_{nk}^{(1)} x_n^{(2)} + \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} F_{nk}^{(1)} x_n^{(1)} + b_k^{(1)} \tag{1.15}$$

$$u_k^{(2)} = \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} E_{nk}^{(2)} y_n^{(2)} + \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} F_{nk}^{(2)} y_n^{(1)} + b_k^{(2)} \tag{1.16}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C_k = \frac{(-1)^k}{2\lambda_k}\left(u_k \operatorname{cth}\frac{\lambda_k b}{2} - z_k \operatorname{th}\frac{\lambda_k b}{2}\right), \qquad D_k = \frac{(-1)^k}{2\lambda_k}(z_k - u_k) \tag{1.17}$$

$$G_k = \frac{am(-1)^k}{2\delta\lambda_k}\left(y_k \operatorname{cth}\frac{\gamma_k a}{2} - x_k \operatorname{th}\frac{\gamma_k a}{2}\right), \qquad H_k = \frac{ma(-1)^k}{2b\gamma_k}(x_k - y_k) \tag{1.18}$$

$$a_{nk}^{(1)} = \frac{8\gamma_k \operatorname{cth}\gamma_k a/2\,[\nu\lambda_n^2 - (1-\nu)\gamma_k^2]}{ma\left(1 + \dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right)(\gamma_k^2 + \lambda_n^2)^2} \tag{1.19}$$

$$b_{nk}^{(1)} = \frac{8\gamma_k \operatorname{th}\gamma_k a/2\,[\nu\lambda_n^2 - (1-\nu)\gamma_k^2]}{ma\left(1 - \dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right)(\gamma_k^2 + \lambda_n^2)^2} \tag{1.20}$$

$$c_{nk}^{(1)} = \frac{8m\lambda_k\left[\operatorname{cth}\lambda_k b/2\left(3 - 4\nu - \dfrac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) + \alpha_k\right][(1-\nu)\gamma_n^2 - \nu\lambda_k^2]}{b\Delta_k(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \tag{1.21}$$

$$d_{nk}^{(1)} = -\frac{8m\lambda_k z_k[(1-\nu)\gamma_n^2 - \nu\lambda_k^2]}{b\Delta_k(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \tag{1.22}$$

$$E_{nk}^{(1)} = \frac{8m\lambda_k\left[\operatorname{th}\lambda_k b/2\left(3 - 4\nu + \dfrac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) + \alpha_k\right][(1-\nu)\gamma_n^2 - \nu\lambda_k^2]}{b\Delta_k(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \tag{1.23}$$

$$F_{nk}^{(1)} = -\frac{8m\lambda_k z_k[(1-\nu)\gamma_n^2 - \nu\lambda_k^2]}{b\Delta_k(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \tag{1.24}$$

$$D_k^{(1)} = \frac{mP \operatorname{cth}\lambda_k b/2}{\lambda_k E_1 F a \Delta_k}\left(3 - 4\nu - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) \tag{1.25}$$

$$b_k^{(1)} = \frac{mP \operatorname{th}\lambda_k b/2}{\lambda_k E_1 F a \Delta_k}\left(3 - 4\nu + \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) \tag{1.26}$$

$$c_k^{(1)} = -\frac{4Ph \operatorname{th}\dfrac{\gamma_k a}{2}}{mF\nu a^2\lambda_k\left(1 - \dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right)} \tag{1.27}$$

$$b_0 = 2(1-\nu)m\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^n y_n^{(1)}}{\gamma_n^{(2)} b}, \qquad a_0 = \frac{Ph}{F\nu a} \tag{1.28}$$

$$m = \sqrt{3-4\nu}, \qquad \alpha_k = \frac{4\mu(1-\nu)}{E_1 h \lambda_k} \tag{1.29}$$

$$\Delta_k = (3-4\nu)^2 - \frac{\lambda_k^2 b^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k b} + 2\alpha_k \left[(3-4\nu)\operatorname{cth}\lambda_k b - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k b} \right] \tag{1.30}$$

В формулах (1.19) — (1.26) нечетному индексу k соответствует значение $i = 1$, а четному — $i = 2$.

2. При исследовании бесконечных систем (1.11) — (1.16) пользуемся неравенствами

$$\left| \omega_n^2 - (1-\nu)\gamma_k^2 \right| < \omega_n^2 + (1-\nu)\gamma_k^2$$

$$\left| (1-\nu)\gamma_n^2 - \omega_k^2 \right| < (1-\nu)\gamma_n^2 + \omega_k^2$$

а также суммами рядов [9]

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n^2 + \gamma_k^2)^2} = \frac{a}{8\gamma_k^3} \operatorname{th}\frac{\gamma_k a}{2}\left(1 - \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right)$$

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \gamma_k^2)^2} = \frac{a}{8\gamma_k} \operatorname{th}\frac{\gamma_k a}{2}\left(1 + \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right)$$

$$\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n^2 + \gamma_k^2)^2} = \frac{a}{8\gamma_k^3}\left[\operatorname{cth}\frac{\gamma_k a}{2}\left(1 + \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right) - \frac{4}{\gamma_k a}\right]$$

$$\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 + \gamma_k^2)^2} = \frac{a}{8\gamma_k} \operatorname{cth}\frac{\gamma_k a}{2}\left(1 - \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right)$$

После некоторых преобразований для суммы абсолютных значений коэффициентов систем получим следующие неравенства:

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \left|a_{nk}^{(i)}\right| < \frac{1 - (1-2\nu)\dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}}{m\left(1 - \dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right)} < \frac{1}{m} \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \left|b_{nk}^{(i)}\right| < \frac{1 + (1-2\nu)\dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a} - \dfrac{4(1-\nu)}{\gamma_k a}\operatorname{th}\dfrac{\gamma_k a}{2}}{m\left(1 - \dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\right)} \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \left|c_{nk}^{(i)}\right| + \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \left|d_{nk}^{(i)}\right| < \frac{m}{\Delta_k}\left\{\left[1 + (1-2\nu)\frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right]\left[3 - 4\nu - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right] + \right.$$

$$+2\sigma_k\left|\operatorname{cth}\lambda_k b-\frac{2\nu}{\lambda_k b}-(1-2\nu)\frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right|\Bigg| \tag{2.3}$$

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}|F_{nk}^{(1)}|+\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}|F_{nk}^{(1)}|<\frac{m}{\Delta_k}\left|3-4\nu-\frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right|\left|1-(1-2\nu)\frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}-\right.$$

$$\left.-\frac{4\nu}{\lambda_k b}\operatorname{th}\frac{\lambda_k b}{2}\right|+2\sigma_k\left|\operatorname{cth}\lambda_k b-\frac{2\nu}{\lambda_k b}-(1-2\nu)\frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right|\Bigg| \tag{2.4}$$

Докажем, что правая часть неравенства (2.2) меньше $1/m$, то есть

$$1+(1-2\nu)\frac{x}{\operatorname{sh}x}-\frac{4(1-\nu)}{x}\operatorname{th}\frac{x}{2}<1-\frac{x}{\operatorname{sh}x} \tag{2.5}$$

Из разложения функции $\operatorname{ch}x$ в ряд Тейлора легко получить неравенство

$$2(\operatorname{ch}x-1)>x^2$$

Умножив обе части этого неравенства на $-2(1-\nu)x\operatorname{sh}x$ и прибавив к ним

$$1-(1-2\nu)\frac{x}{\operatorname{sh}x}$$

получим неравенство (2.5).

Покажем, что правая часть (2.3) меньше единицы. Для этого заметим, что при $0<\nu<1/4$ имеют место следующие неравенства:

$$(1-4\nu)\left(1-\frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right)>0$$

$$(1-4\nu)\left(\operatorname{cth}\lambda_k b-\frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}^2\lambda_k b}\right)+\frac{4\nu}{\lambda_k b}>0$$

а при $1/4<\nu<1/2$ следующие неравенства:

$$1-2\nu<\frac{1}{3-4\nu}$$

$$2\nu+\left(1-2\nu-\frac{1}{3-4\nu}\right)\frac{\lambda_k b^2}{\operatorname{sh}^2\lambda_k b}>0$$

На основании этих неравенств, а также (1.29) и (1.30) легко можно убедиться, что при $0<\nu<1/4$ правая часть (2.3) меньше $m/2$, а при $1/4<\nu<1/2$ меньше $1/m$.

Аналогично можно доказать, что правая часть (2.4) меньше $1/m$. Легко видеть из (1.29), что $1/m$ или $m/2$ меньше единицы.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что полученные системы линейных уравнений (1.11) — (1.16) вполне регулярны.

Легко видеть также, что свободные члены этих уравнений ограничены сверху и для больших индексов „k" имеют порядок убывания k^{-1}. Следовательно, значения неизвестных коэффициентов, а также напряжений и перемещений можно вычислить с любой степенью точности.

3. В качестве примера рассмотрим случай, когда накладка абсолютно жесткая, то есть $1/E_1 = 0$. В этом случае решение совокупности линейных уравнений, состоящих из восьми бесконечных систем уравнений, сводится к рассмотрению четырех совокупностей уравнений, в каждую из которых входят две бесконечные системы уравнений, причем три из этих совокупностей уравнений дают нулевое решение, то есть

$$x_k^{(i)} = u_k^{(i)} = y_k^{(2)} = z_k^{(1)} = 0 \tag{3.1}$$

а остальные неизвестные определяются из четвертой совокупности уравнений

$$z_k^{(2)} = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} c_{nk}^{(2)} y_n^{(1)} \qquad y_k^{(1)} = \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} b_{nk}^{(1)} z_n^{(2)} + c_k^{(1)} \tag{3.2}$$

Для получения расчетных формул для перемещений u, v и напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} подставим значения коэффициентов из (1.10), (1.17), (1.18) в (1.8), (1.9), используем (1.7) и произведем параллельный перенос координатных осей

$$x = x_1 + a/2 \qquad y = y_1 + b/2 \tag{3.3}$$

то есть начало координатных осей x_1, y_1 будет помещено в центре левого прямоугольника.

После некоторых преобразований получим следующие формулы:

$$u(x_1, y_1) - b_0 - \frac{Phb}{2F\mu a} = \frac{1}{2}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)}}{\lambda_k \operatorname{ch}\frac{\lambda_k b}{2}} \left\{ \left[3 - 4\nu - \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{th}\frac{\lambda_k b}{2} \right] \operatorname{sh}\lambda_k y_1 - \right.$$

$$\left. + \lambda_k y_1 \operatorname{ch}\lambda_k y_1 \right\} (-1)^{k/2} \cos\lambda_k x_1 + \frac{ma}{2b} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{y_k^{(1)}}{\gamma_k \operatorname{sh}\gamma_k a} \left\{ \left(1 - 2\nu + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth}\frac{\gamma_k a}{2} \right) \operatorname{ch}\gamma_k x_1 - \gamma_k x_1 \operatorname{sh}\gamma_k x_1 \Big\} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sin\gamma_k y_1 + \frac{phy_1}{F\mu a} \tag{3.4}$$

$$v(x_1, y_1) = -\frac{1}{2}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)}(-1)^{k/2}}{\lambda_k \operatorname{ch}\frac{\lambda_k b}{2}} \left[\lambda_k b \operatorname{th}\lambda_k b \operatorname{ch}\lambda_k y_1 - \right.$$

$$-\lambda_k y_1 \operatorname{sh} \lambda_k y_1 \left| \sin \lambda_k x_1 - \frac{ma}{2b} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{y_k^{(1)}(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\gamma_k \operatorname{sh} \frac{\gamma_k a}{2}} \right| \Bigg| 2(1-\nu) -$$

$$-\frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \Bigg| \operatorname{sh} \gamma_k x_1 + \gamma_k x_1 \operatorname{ch} \gamma_k x_1 \Bigg| \cos \gamma_k y_1 \tag{3.5}$$

$$\tau_x(x_1, y_1) = 2\mu \Bigg\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)}(-1)^{k/2}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_k b}{2}} \Bigg| \left(3 - 2\nu - \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2}\right) \operatorname{sh} \lambda_k y_1 +$$

$$+ \lambda_k y_1 \operatorname{ch} \lambda_k y_1 \Bigg| \sin \lambda_k x_1 + \frac{ma}{2b} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{y_k^{(1)}(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma_k a}{2}} \times$$

$$\times \Bigg| \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{sh} \gamma_k x_1 - \gamma_k x_1 \operatorname{ch} \gamma_k x_1 \Bigg| \sin \gamma_k y_1 \Bigg| \tag{3.6}$$

$$\tau_y(x_1, y_1) = 2\mu \Bigg| \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)}(-1)^{k/2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_k b}{2}} \Bigg| \left(1 - 2\nu - \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2}\right) \operatorname{sh} \lambda_k y_1 +$$

$$+ \lambda_k y_1 \operatorname{ch} \lambda_k y_1 \Bigg| \sin \lambda_k x_1 + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{m a y_k^{(1)}(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2b \operatorname{sh} \frac{\gamma_k a}{2}} \Bigg| \Bigg(2 -$$

$$- \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \Bigg) \operatorname{sh} \gamma_k x_1 + \gamma_k x_1 \operatorname{ch} \gamma_k x_1 \Bigg| \sin \gamma_k y_1 \Bigg| \tag{3.7}$$

$$\tau_{xy}(x_1, y_1) = \frac{pb}{F_\Theta} + 2\mu \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)}(-1)^{k/2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_k b}{2}} \Bigg| \Bigg| 2(1-\nu) -$$

$$- \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \Bigg| \operatorname{ch} \lambda_k y_1 - \lambda_k y_1 \operatorname{sh} \lambda_k y_1 \Bigg| \cos \lambda_k x_1 -$$

$$- 2\mu \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{m a y_k^{(1)}(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2b \operatorname{sh} \frac{\gamma_k a}{2}} \Bigg| \left(1 - \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2}\right) \operatorname{ch} \gamma_k x_1 +$$

$$+ \gamma_k x_1 \operatorname{sh} \gamma_k x_1 \Big\} \cos \gamma_k y_1 \tag{3.8}$$

В результате преобразования (3.3) правые части (3.4) — (3.8) оказываются четными или нечетными функциями от аргументов x_1 и y_1, что позволяет вычислить их значения для области ($0 \leqslant x_1 \leqslant a/2$, $0 \leqslant y_1 \leqslant b/2$), а дальше, воспользовавшись ими, можно записать значения этих же функций и для остальных областей прямоугольника.

Произведен численный расчет при $\nu = 1/3$ для нормальных и касательных напряжений на линии контакта с включением (табл. 1 и 2), а также вычислены значения нормальных перемещений в точках, лежащих на свободном от нагрузок крае (табл. 3).

Таблица 1

σ_y (x, b) Fa/ph

x/a \ t	1	2	5	10
0	−1.298	−4.572	−23.892	−88.288
0.1	−1.055	−3.963	−22.322	−85.212
0.2	−0.937	−3.672	−21.598	−83.844
0.3	−0.885	−3.417	−20.950	−82.595
0.4	−0.740	−3.213	−20.382	−81.450
0.5	0	0	0	0
0.6	0.740	3.213	20.382	81.450
0.7	0.825	3.417	20.950	82.595
0.8	0.937	3.672	21.598	83.844
0.9	1.055	3.963	22.322	85.212
1.0	1.298	4.572	23.892	88.288

Таблица 2

$\tau_{xy}(x, b)$ Fa/ph

x/a \ t	1	2	5	10
0	4.261	7.436	16.655	30.965
0.1	0.917	1.157	1.894	3.064
0.2	0.896	0.839	0.659	0.343
0.3	0.950	0.730	0.066	−1.051
0.4	0.995	0.692	−0.233	−1.754
0.5	1.011	0.682	−0.310	−1.971
0.6	0.995	0.692	−0.223	−1.754
0.7	0.95	0.730	0.066	−1.051
0.8	0.896	0.839	0.659	0.343
0.9	0.917	1.157	1.894	3.064
1.0	4.261	7.436	16.655	30.965

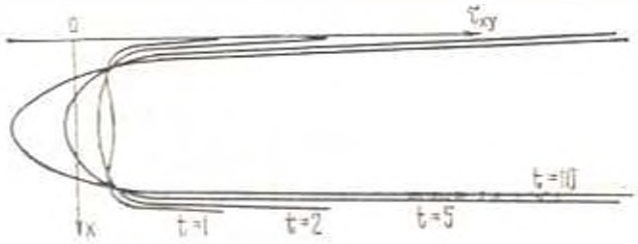
Таблица 3

$u(0, y)$ $P_{\max}/PAb$

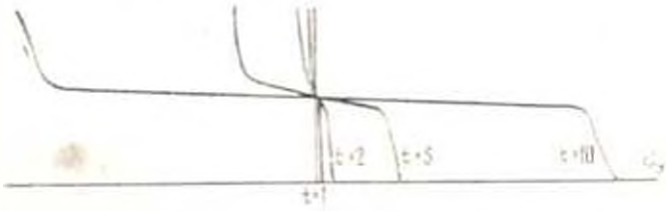
y/b \ t	1	2	5	10
0.0	0	0	0	0
0.1	0.215	0.186	0.389	1.078
0.2	0.334	0.375	1.095	3.509
0.3	0.459	0.606	2.100	9.460
0.4	0.590	0.869	3.395	12.051
0.5	0.724	1.146	4.617	17.041
0.6	0.858	1.424	5.915	22.031
0.7	0.982	1.686	7.120	26.622
0.8	1.114	1.917	8.125	30.413
0.9	1.233	2.165	9.831	33.004
1.0	1.448	2.395	9.220	34.082

Из формул (3.7) и (3.8) видно, что для определения нормального напряжения на защемленном крае можно воспользоваться табл. 1, меняя только знаки, а значение касательного напряжения на этом крае дается в табл. 2.

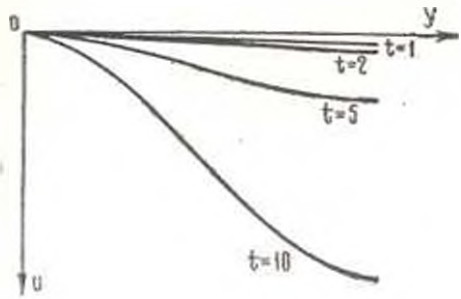
Как видно из фиг. 2, касательные напряжения на линии контакта, а также на защемленном крае для отношений $t = b/a = 5$; 10 в средней части контакта меняют знак, а при $t = b/a = 1$ значение касательного напряжения в центральной точке линии контакта имеет относительный максимум.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4.

Отметим, что аналогичные явления были замечены в работе [10].

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 1[illegible] II 1975

Վ. Վ. ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ

ԲԱՐԱԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՆԹԻՐԱԿՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՈՒԺԵՂՈՒՆԵՐՈՎ ՇՈՒՐՋԸ ԻՐ ԿԵՆՏՐՈՆ ՄԱՍՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ուղանկյան համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիր։ Երբ նրա երկու հանդիպակաց կողերը ամրակցված են, իսկ միջին մասում դուզահեռ ամրակցված կողերին ուղղանկյունը ամրացված է բարակ առաձգական ներդրակով։ Ներդրակի մի ծայրին նրա առանցքի ուղղությամբ ազդում է կենտրոնացված ուժ։

Խնդրի լուծումը իրականացվում է տեղափոխումներով, որոնք ներկայացվում են Ֆուրյեի շարքերի տեսքով բաց հանկյունաչափական ֆունկցիաների։ Վերլուծության գործակիցները որոշվում են ստացված լիովին ինդուլյար գծային հավասարումների անվերջ սիստեմից։

Բերվում է բացարձակ կարծր ներդրակի դեպքի համար թվային օրինակ։

A BENDING PROBLEM FOR A RECTANGLE WITH ELASTIC ENGAGEMENT

V. V. MICAELIAN

Summary

A plane contact problem in the elasticity theory is considered for a rectangle where its two opposite edges are fixed and its midsection is reinforced by an elastic stiffener arranged parallel to the fixed edges.

A point force acts on one end of the engagement along its axis. The solution to the problem is found in displacements represented as Fourier's series by means of trigonometrical functions. The expansion coefficients are determined from the infinite systems of quite-regular equations thus obtained. A numerical example is given for an absolute rigid stiffener.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мунн Р., Стернберг Э.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. Прикл. механика. Тр. америк. общества инж. механиков, т. 35, 1968, № 4, 124—135.
2. *Arutunyan N. K. and Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity: Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971, p. 3—20.
3. *Микаелян В. В.* О двух задачах растяжения упругого прямоугольника с упругими накладками. Докл. АН Арм. ССР, т. 56, № 4, 1973, 225—231.
4. *Микаелян В. В.* Об одной задаче растяжения прямоугольника с упругими накладками. Докл. АН Арм. ССР, т. 58, № 1, 1974, 21—27.
5. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster verbindungen. Ingenieur Archiv, vol. 3, № 2, 1932, p. 123—129.
6. *Теокарис, Дафермос.* Упругая полоса при смешанных граничных условиях. Прикл. механика (Тр. америк. общества инженеров механиков), т. 31, № 4, 1964, 159—162.
7. *Раскин Ю. Н.* Решение плоской задачи теории упругости для случая передачи продольного усилия через ребро на пластину. Тр. Ленинградского кораблестроительного института, 1962, вып. 35, 39—50.
8. *Саркисян В. Г. Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние предварительно напряженного армированного прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, т. 26, № 1, 1973, 31—37.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4. Физматгиз, М., 1962.
10. *Галфаян П. О.* Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ-мат. наук, т. XVII, № 1, 1964, 39—61.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В настоящей работе на основе гипотез магнитоупругости тонких тел, предложенных в работах [1, 2], рассматривается задача параметрических колебаний проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Получена формула для определения критических частот главного параметрического резонанса. Исследуются влияния проводимости материала пластинки и интенсивности заданного магнитного поля на области динамической устойчивости. Определено предельное значение напряженности магнитного поля, превышение которого исключает возможность появления параметрического резонанса.

1. Изотропная тонкая упругая пластинка постоянной толщины $2h$ помещена в поперечное магнитное поле. Упругие и электрические свойства материала пластинки характеризуются: модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ. Магнитные и диэлектрические проницаемости пластинки и среды, окружающей пластинку, принимаются равными единице. Токи смещения в пластинке пренебрегаются по сравнению с токами проводимости.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (xy) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Пусть в плоскости (xy) пластинка подвергается действию равномерно распределенных по сторонам, параллельным оси oy, сжимающих усилий интенсивности $p(t) = p_0 + p_1\cos\theta t$. До возникновения возмущений в пластинке вследствие сжимающих усилий индуцируется электромагнитное поле и поле упругих перемещений.

Оставаясь в пределах точности теории тонких пластинок, будем предполагать, что все величины, характеризующие невозмущенное состояние, не зависят от координаты z. Тогда компоненты невозмущенных полей определяются из следующих уравнений электродинамики движущейся среды и теории упругости проводящего тела:

$$\frac{\partial h_{0z}}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_{0y} - \frac{H_z + h_{0z}}{c}\frac{\partial u_{0x}}{\partial t}\right) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial e_{0y}}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial h_{0z}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_{0x}}{\partial x^2} - \frac{H_z + h_{0z}}{4\pi}\frac{\partial h_{0z}}{\partial x} = 0$$

Здесь $h_0(0, 0, h_{0z})$, $e_0(0, e_{0y}, 0)$ — соответственно векторы индуцированного магнитного и электрического полей; $U_0(u_{0x}, 0, 0)$ — вектор упругих перемещений частиц пластинки; $H(0, 0, H_z)$ — вектор напряжен-

Согласно этим гипотезам

$$u_x = u - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = v - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y, t)$$
$$e_x = \varphi(x, y, t), \quad e_y = \psi(x, y, t), \quad h_z = f(x, y, t) \tag{2.1}$$

Здесь $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ — искомые перемещения срединной плоскости пластинки; φ, ψ — искомые тангенциальные компоненты вектора напряженности индуцированного электрического поля $e(e_x, e_y, e_z)$; f — искомая нормальная компонента вектора напряженности индуцированного магнитного поля $h(h_x, h_y, h_z)$.

Используя гипотезы (2.1) так, как это делается в работах [1,2], получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости пластинки:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi - \frac{H_3 + h_{0z}}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial u_{0x}}{\partial t} f\right] = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi + \frac{H_3 + h_{0z}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma(H_3 - h_{0z})}{c}\left[\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{c}\frac{\partial u_{0x}}{\partial t} f - \frac{H_3 + h_{0z}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma(H_3 + h_{0z})}{c}\left[\psi + \right.$$
$$\left. + \frac{H_3 + h_{0z}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (p_0 - p_1\cos\theta t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2\sigma h^3}{3c^2}(H_3 + h_{0z})^2\frac{\partial \Delta w}{\partial t}$$

где индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при $z = h$ и $z = -h$, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$.

Для полного определения перемещений и электромагнитного поля в пластинке, как видно из (2.2), необходимо иметь значения компонент индуцированного электромагнитного поля на поверхностях $z = \pm h$. Поэтому уравнения (2.2) необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для внешней среды при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред. Сюда должны быть присоединены также условия закрепления краев пластинки и условия затухания электромагнитных возмущений на бесконечности.

Однако, если ограничиться рассмотрением лишь задачи динамической устойчивости пластинки, то, как видно из (2.2), она приводится к решению пятого уравнения системы (2.2) с обычными условиями закрепления краев пластинки. Отсюда вытекает также, что индуцированное электромагнитное поле в пределах справедливости гипотеза магнитоупругости тонких тел не оказывает влияния на критические частоты и области динамической неустойчивости пластинки.

3. Пусть прямоугольная ($a > b$) пластинка—шарнирно опертая по всему контуру. Принимая $[(1-\nu^2)p_1/(2Eh)]^2 \ll 1$, с учетом (1.3) и (2.2) задачу параметрических колебаний пластинки приводим к решению уравнения

$$D\Delta^2 w + 2\varepsilon h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\varepsilon h^3}{3c^2}\left[1 + \frac{(1-\nu^2)p_1}{Eh}(1-\cos\theta t)\right]H_1^2\frac{\partial\Delta w}{\partial t} +$$

$$+ (p_0 - p_1\cos\theta t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.1)$$

Представляя решение уравнения (3.1) в виде

$$w = f_{nm}(t)\sin\nu_n x\sin\nu_m y$$

где $\nu_n = n\pi/a$, $\nu_m = m\pi/b$, удовлетворим условиям шарнирного опирания краев, а для определения $f_{nm}(t)$ из (3.1) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f_{nm}}{dt^2} + \varepsilon_{nm}(1 + 2\delta\cos\theta t)\frac{df_{nm}}{dt} + \Omega_{nm}^2(1 - 2\gamma_{nm}\cos\theta t)f_{nm} = 0 \qquad (3.2)$$

где

$$\Omega_{nm}^2 = \omega_{nm}^2\left(1 - \frac{p_0}{p_{nm}^*}\right), \qquad \omega_{nm}^2 = \frac{D}{2\rho h}(\lambda_n^2 + \nu_m^2)^2$$

$$p_{nm}^* = \frac{D}{\lambda_n^2}(\lambda_n^2 + \nu_m^2), \qquad \gamma_{nm} = \frac{p_1}{2(p_{nm}^* - p_0)}$$

$$\varepsilon_{nm} = \frac{\varepsilon H_1^2 h^2}{3\rho c^2}(1-\varepsilon)(\lambda_n^2 + \nu_m^2), \qquad \varepsilon = \frac{1-\nu^2}{Eh}p_1, \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \qquad (3.3)$$

В (3.3) ω_{nm} — частота собственных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля, δ и γ_{nm} — коэффициенты возбуждения, p_{nm}^* — значения критической силы при статической устойчивости пластинки, ε_{nm} — параметр, характеризующий напряженность заданного магнитного поля и проводимость материала пластинки.

Уравнение (3.2) имеет периодические коэффициенты, и, как известно [3,4], при некоторых соотношениях между коэффициентами имеет неограниченно возрастающие решения. Границы области главного параметрического резонанса определим, используя метод гармонического баланса [3].

Согласно сказанному, решение уравнения (3.2) будем искать в виде

$$f_{nm}(t) = A \sin \frac{\theta t}{2} - B \cos \frac{\theta t}{2} \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2) и приравнивая определитель нулю, для определения критических частот главного параметрического резонанса получим формулу

$$\theta_*^2 = 4\Omega_{nm}^2 [1 - \gamma_{nm} \pm \sqrt{\mu_{nm}^2 - 2\gamma_{nm} + \gamma_{nm}^2}]$$

$$\gamma_{nm} = \frac{\varepsilon_{nm}^2}{2\Omega_{nm}^2}(1 - \delta^2) \tag{3.5}$$

Из (3.5) видно, что необходимым условием существования параметрического резонанса является

$$\mu_{nm}^2 - 2\gamma_{nm} + \gamma_{nm}^2 > 0$$

что имеет место, если величина γ_{nm} не принадлежит промежутку $(1 - \sqrt{1 - \mu_{nm}^2},\ 1 + \sqrt{1 - \mu_{nm}^2})$. С другой стороны, если $\gamma_{nm} \in (1 + \sqrt{1 - \mu_{nm}^2},\ +\infty)$, то выражение в квадратных скобках формулы (3.5) становится отрицательным, исключая возможность появления параметрического резонанса.

Таким образом, пока $0 < \gamma_{nm} < 1 - \sqrt{1 - \mu_{nm}^2}$, формула (3.5) дает для критической частоты два вещественных значения, соответствующих двум границам главной области неустойчивости. Предельный случай, когда

$$\varepsilon_{nm}^2 = \frac{2\Omega_{nm}^2}{1 - \delta^2}[1 - \sqrt{1 - \mu_{nm}^2}] \tag{3.6}$$

определяет минимальное значение напряженности заданного магнитного поля

$$\left(\frac{H_3^2}{E}\right)_{\text{пр}} = \frac{\sqrt{3}\, c^2}{\sigma h a_0 (1 + \nu)} \left| \left(1 - \frac{p_0}{p_{nm}^*}\right) \frac{1 - \sqrt{1 - \mu_{nm}^2}}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} \right|^{1/2} \tag{3.7}$$

при котором еще возможно возникновение незатухающих колебаний.

В (3.7) $a_0^2 = E/2\rho(1 + \nu)$ — скорость поперечной упругой волны.

В табл. приведены значения $H_{\text{пр}}$ для некоторых проводников при $h = 2\,см$, $p_0 = 0$.

Формула (3.6) показывает, что чем больше проводимость материала пластинки и интенсивность заданного магнитного поля, тем большая амплитуда параметрической силы требуется, чтобы вызвать динамическую неустойчивость пластинки.

Из (3.5) видно, что при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности область главного параметрического резонанса уменьшается и исчезает при $H_з = H_{пр}$.

Вещество	E, 10^{11} дин/см²	ρ, г/см³	τ, 10^{12} 1/сек	$H_{пр} \cdot 10^3$ эрстед	
				$\varepsilon_{пр} = 0.01$	$\varepsilon_{пр} = 0.001$
Алюминий	7.00	2.70	3.2	7.11	2.23
Медь	11.00	8.80	5.5	8.32	2.62
Латунь	[illegible]	8.50	2.0	12.67	4.02
Цинк	8.00	7.10	1.5	13.57	4.28

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 IX 1974

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում հինգերորդ բարակապատ մարմինների մագնիսաառաձգական վարկածներից, դիտարկվում է վերջավոր սալի դինամիկ կայունության խնդիրը լայնական մագնիսական դաշտում։ Ստացված է բանաձև գլխավոր պարամետրական ռեզոնանսի կորիտիկական հաճախականության հաշվման համար։

Ուսումնասիրվում է սալի նյութի էլեկտրահաղորդականության և տված մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունը դինամիկ կայունության սիրույթների վրա։ Որոշված է արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության սահմանային արժեքը, որի դեպքում բացառվում է պարամետրական ռեզոնանսի հնարավորությունը։

ON DYNAMIC STABILITY OF CONDUCTING PLATES IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN

S u m m a r y

The problem of parametric vibration of conducting plates in the presence of a transverse magnetic field is considered in terms of the magnetoelastic hypotheses suggested in [1,2]. The formula to determine critical major parametric resonance frequencies is derived.

In the region of dynamic stability the influence of conductivity of plate material and of intensity of a given magnetic field is examined. A limiting value of the magnetic field the excess of which eliminates the possibility of occurrence of parametric resonance is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. Б.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, в. 2, 1971.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, в. 1, 1973.
3. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. Изд. „Наука", М., 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН

К ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЙ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИН

Одной из трудностей решения задач магнитоупругости тел с конечными размерами и конечной электропроводностью является необходимость совместного решения уравнений электродинамики для движущейся проводящей среды (упругого тела), уравнений движения упругого тела и уравнений электродинамики для среды, окружающей тело, при общих граничных условиях на поверхности упругого тела.

В настоящей работе, с целью упрощения хода решения задач магнитоупругости тонких проводящих пластин, делается попытка обойти, в некотором смысле, необходимость рассмотрения уравнений электродинамики для среды, окружающей пластинку.

При этом существенно используются гипотезы магнитоупругости, сформулированные и обоснованные в работах [1, 2], и дополнительные допущения о характере возмущенного электромагнитного поля в среде, окружающей пластинку, обоснованием которых служат сравнения получаемых решений с решением задач в точной постановке.

1. Пластинка толщиной $2h$ находится во внешнем стационарном магнитном поле и служит проводником стационарного электрического тока в направлении, параллельном срединной плоскости пластинки.

Магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей пластинку, равны единице, проводимость равна нулю. Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются: жесткостью D, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (xy) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Гипотезы магнитоупругости, предложенные в работах [1,2], аналитически записываются в форме

$$u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad u_z = w(x, y, t)$$

$$e_x = \varphi(x, y, t), \qquad e_y = \psi(x, y, t), \qquad h_z = f(x, y, t) \quad (1.1)$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты вектора перемещений частиц пластинки, e_x и e_y — тангенциальные компоненты вектора напряженности возмущенного электрического поля, h_z — нормальная компонента вектора напряженности индуцированного магнитного поля при $|z| \leq h$.

На основе соотношений (1.1) в работе [3], в случае начального электрического и магнитного полей с соответствующими векторами

напряженностей $E_0(E_{0x}, E_{0y}, 0)$ и $B_0(B_{0x}, B_{0y}, B_{0z})$, для линейных задач магнитоупругости была получена следующая система уравнений относительно четырех искомых функций φ, ψ, f, w:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi - \frac{4\pi\sigma}{2hc^2}\left(c_x\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} - b_y\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\psi + \frac{4\pi\sigma}{2hc^2}\left(c_y\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - b_x\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L\left[\varphi, \psi, w, (e_z^+ + e_z^-), \frac{\partial}{\partial x}(h_y^+ + h_y^-) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}(h_x^+ + h_x^-)\right] \tag{1.2}$$

Здесь величины с индексами „+" и „−" представляют значения компонент индуцированного электромагнитного поля при $z = h$ и $z = -h$ соответственно, L — линейная комбинация указанных аргументов и их производных по x, y, t с коэффициентами, зависящими (так же, как и c_x, b_x, b_y) от физико-механических характеристик пластины и от заданного начального электромагнитного поля. Выражения для этих коэффициентов в общем случае даются в работе [3], и так как занимают большое место и для данной работы не существенны, здесь не приводятся.

Остальные компоненты индуцированного магнитного поля в пластинке выражаются через функции φ, ψ, f, w и свои граничные значения при $z = \pm h$. В частности, имеем

$$e_z = \frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right] - z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{1}{c}\left[\left(a_y - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \left(a_x - \frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right] + \frac{z}{c}\left(B_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - B_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) \tag{1.3}$$

Сказанное относительно коэффициентов в уравнениях (1.2) относится и к коэффициентам a_x, a_y, a в выражении (1.3).

Ранее были рассмотрены задачи, для которых правая часть четвертого уравнения из (1.2) была функцией только w, а именно:

а) заданное магнитное поле постоянно с вектором напряженности, перпендикулярным срединной поверхности, электрическое поле отсутствует [4];

б) пластинка служит проводником равномерно распределенного электрического тока в направлении, параллельном срединной поверх-

ности, и колебания не зависят от направления, по которому протекает ток [3];

в) комбинация задач а) и б) [5].

Для указанных задач исследование колебаний пластинки не требует определения индуцированного электромагнитного поля, так как четвертое уравнение из системы (1.2) становится автономным.

В общем случае все четыре уравнения системы (1.2) связаны и, более того, система (1.2) незамкнута, так как в уравнениях имеются неизвестные граничные значения при $z = \pm h$. Поэтому необходимо к системе (1.2) присоединить уравнения электродинамики для среды, окружающей пластинку (вакуума), и общие граничные условия на поверхностях пластинки.

Уравнения электродинамики для среды, окружающей пластинку (вакуума), имеют вид

$$\operatorname{rot} h^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial e^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} e^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} h^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} e^{(e)} = 0 \tag{1.4}$$

индекс (e) показывает принадлежность к среде, окружающей пластинку.

Граничные условия при $z = \pm h$ приводятся из работы [3]

$$\begin{gathered}
h_x = h_x^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0x}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial w}{\partial t} E_{0y} \\
h_y = h_y^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0x}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{c} E_{0x} \frac{\partial w}{\partial t} \\
h_z = \frac{1}{\mu} h_z^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0x}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0y}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial y} \\
e_x = e_x^{(e)} + \frac{\mu - 1}{c} B_{0y}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t}, \qquad e_y = e_y^{(e)} - \frac{\mu - 1}{c} B_{0x}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t} \\
e_z = \frac{1}{\varepsilon} e_z^{(e)} + E_{0x} \frac{\partial w}{\partial x} + E_{0y} \frac{\partial w}{\partial y}
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Таким образом, в общем случае, требуется совместное решение систем уравнений (1.2) и (1.4) при общих граничных условиях (1.5).

Задача заключается в замыкании уравнений (1.2) дополнительными условиями, не требующими определения индуцированного электромагнитного поля в среде, окружающей пластинку, то есть не требующими решения уравнений (1.4).

2. Во многих случаях оказывается полезным применение условия равенства нулю нормальной к поверхности пластинки составляющей электрического тока. Указанное условие получается из закона сохранения электрического заряда [6]

$$\int_{\tau} \rho_e d\tau = -\oint_{\Sigma} j_n d\Sigma \tag{2.1}$$

где τ — некоторый объем, содержащий часть поверхности пластинки, Σ — поверхность, ограничивающая этот объем, ρ_e — электрический заряд, n — нормаль к поверхности пластинки, j_n — нормальная составляющая электрического тока.

С помощью обычной процедуры из уравнения (2.1) получается

$$(j_n - j_n^{(e)})\, n_n = -\frac{1}{\Sigma}\lim_{\delta \to 0} \frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} \rho_e d\tau = \delta \quad \text{при } z = \pm h \tag{2.2}$$

Здесь δ — характерный размер объема τ по нормали к пластинке, δ — поверхностный электрический заряд, n_n — единичный вектор нормали к пластинке в системе координат, привязанной к пластинке.

При условиях равенства нулю проводимости среды, окружающей пластинку, и отсутствия поверхностного электрического заряда, условие (2.2) принимает вид

$$j_n \cdot n_n = 0 \quad \text{при } z = \pm h \tag{2.3}$$

Принимая для электрического тока в пластинке закон Ома, переходя к неподвижной системе координат (x, y, z), как это делается в работе [2], вместо (2.3) получим условие

$$\left(E + \frac{v}{c}\frac{\partial u}{\partial t} \times H\right)\operatorname{grad}(z - w) = 0 \quad \text{при } z = \pm h \tag{2.4}$$

где E и H — векторы напряженностей результирующего электрического и магнитного полей.

Раскрывая выражение (2.4) и линеаризуя, получим условие для нормальной компоненты индуцированного электромагнитного поля

$$e_z = E_{0x}\frac{\partial w}{\partial x} + E_{0y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{B_{0x}}{c}\frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{B_{0y}}{c}\frac{\partial u_x}{\partial t} \quad \text{при } z = \pm h \tag{2.5}$$

Из (2.5) величина $e_z^+ - e_z^-$, входящая в L из четвертого уравнения (1.2), определяется независимо от индуцированного электромагнитного поля.

Подставляя в граничные условия (1.3) значения e_z при $z = h$ и $z = -h$, слагая полученные выражения, найдем, что и величина

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_x^+ + h_x^-) - \frac{\partial}{\partial y}(h_y^+ - h_y^-)$$

также входящая в L, не зависит от индуцированного электромагнитного поля.

Возможны задачи, для которых условие (2.5) оказывается достаточным, чтобы четвертое уравнение системы (1.2) оказалось автономным.

В частности, в задаче пластинки, несущей равномерно распределенный электрический ток по направлению оси x, коэффициенты φ и ψ из L оказываются равными нулю, и уравнение движения пластинки приводится с учетом (2.5) к виду

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h^3\sigma}{3c^2}\left(\frac{4\pi\sigma\mu}{c}E_{0x}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2h^3\sigma}{3c^2}E_{0x}^2\left[\left(\frac{4\pi\sigma\mu}{c}\right)^2\frac{h^2}{5} + \right.$$

$$+ (\varepsilon\mu - 1)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\sigma h E_{0x}^2}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{4\pi\sigma\mu h^2}{c^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}\right) + \left.\frac{2h^3\sigma}{3c^2}E_{0x}^2\right|\varepsilon -$$

$$- \frac{3\varepsilon c^2}{(4\pi\sigma)^2 h^2}\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{4\pi\sigma\mu h^2}{c^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}\right)\right. \tag{2.6}$$

Отметим, что рассматриваемая задача более общая, чем задача б), в которой имеется дополнительное ограничение независимости колебаний от координаты x.

Для задачи колебаний бесконечной пластинки, описываемой уравнением (2.6), оказывается, что демпфирующее воздействие электрического поля в направлении x больше, чем в направлении y.

Таким образом, условие (2.5) может оказаться полезным при решении некоторых задач, однако система уравнений (1.2) пока оказывается незамкнутой вследствие наличия правых частей во втором и третьем уравнениях.

3. С целью окончательного замыкания системы (1.2) делаются следующие предположения:

$$h_x^{(1)} = h_x^{(1)}(x, y, t), \quad h_y^{(1)} = h_y^{(1)}(x, y, t) \text{ при } h < z < h + \lambda$$

$$h_x^{(2)} = h_x^{(2)}(x, y, t), \quad h_y^{(2)} = h_y^{(2)}(x, y, t) \quad \text{при } -h - \lambda < z < -h$$

$$e_x^{(1)}(h + \lambda) \ll e_x^{(1)}(h), \quad e_y^{(1)}(h + \lambda) \ll e_y^{(1)}(h), \quad h_z^{(1)}(h + \lambda) \ll h_z^{(1)}(h) \tag{3.1}$$

$$e_x^{(2)}(-h - \lambda) \ll e_x^{(2)}(-h), \quad e_y^{(2)}(-h - \lambda) \ll e_y^{(2)}(-h), \quad h_z^{(2)}(-h - \lambda) \ll h_z^{(2)}(h)$$

где λ — некоторый характерный для данной задачи размер (в частности, длина волны).

Принятие условий (3.1) означает, что существует некоторое расстояние, отсчитываемое от поверхностей пластинки $z = \pm h$ по внешней нормали, для которого можно допустить, что тангенциальные компоненты возбужденного магнитного поля не зависят от z, а тангенциальные компоненты возбужденного электрического поля и нормальная компонента возбужденного магнитного поля быстро затухают при удалении от поверхностей пластинки.

Из уравнений (1.4) выделим следующую группу уравнений:

$$\frac{\partial h_y^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial h_x^{(e)}}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial e_z^{(e)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial e_z^{(e)}}{\partial y} - \frac{\partial e_y^{(e)}}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_x^{(e)}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial e_x^{(e)}}{\partial z} - \frac{\partial e_z^{(e)}}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_y^{(e)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial h_x^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial h_y^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial h_z^{(e)}}{\partial z} = 0 \tag{3.2}$$

$$(e = 1, 2)$$

Из уравнений (3.2), путем дифференцирования по x и y исключая $e_z^{(i)}$ и интегрируя по z при $e=1$ в пределах от h до $h+\lambda$, а при $e=2$ в пределах от $-h$ до $-h-\lambda$, согласно допущению (3.1), получим

$$\square h_x^{(1)} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial h_z^{(1)}(h)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial e_y^{(1)}(h)}{\partial t}\right], \quad \square h_y^{(1)} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial h_z^{(1)}(h)}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial e_x^{(1)}(h)}{\partial t}\right]$$

$$\square h_x^{(2)} = -\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial h_z^{(2)}(-h)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial e_y^{(2)}(-h)}{\partial t}\right]$$

$$\square h_y^{(2)} = -\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial h_z^{(2)}(-h)}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial e_x^{(2)}(-h)}{\partial t}\right] \tag{3.3}$$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Используя в (3.3) граничные условия (1.5), окончательно найдем

$$\square h_x^{+} = \square\left[\frac{\mu-1}{\mu} B_{0x}^{(1)+}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c} E_{0y}\frac{\partial w}{\partial t}\right] +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left[\mu\frac{\partial f}{\partial x} - (\mu-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(B_{0x}^{(1)+}\frac{\partial w}{\partial x} + B_{0y}^{(1)+}\frac{\partial w}{\partial y}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mu-1}{c^2} B_{0x}^{(1)+}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]$$

$$\square h_y^{+} = \square\left[\frac{\mu-1}{\mu} B_{0y}^{(1)+}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{c} E_{0x}\frac{\partial w}{\partial t}\right] +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left[\mu\frac{\partial f}{\partial y} - (\mu-1)\frac{\partial}{\partial y}\left(B_{0x}^{(1)+}\frac{\partial w}{\partial x} + B_{0y}^{(1)+}\frac{\partial w}{\partial y}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mu-1}{c^2} B_{0y}^{(1)+}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] \tag{3.4}$$

$$\square h_x^{-} = \square\left[\frac{\mu-1}{\mu} B_{0x}^{(2)-}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c} E_{0y}\frac{\partial w}{\partial t}\right] -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\left[\mu\frac{\partial f}{\partial x} - (\mu-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(B_{0x}^{(2)-}\frac{\partial w}{\partial x} + B_{0y}^{(2)-}\frac{\partial w}{\partial y}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mu-1}{c^2} B_{0x}^{(2)-}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]$$

$$\square h_y^{-} = \square\left[\frac{\mu-1}{\mu} B_{0y}^{(2)-}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{c} E_{0x}\frac{\partial w}{\partial t}\right] -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\left[\mu\frac{\partial f}{\partial y} - (\mu-1)\frac{\partial}{\partial y}\left(B_{0x}^{(2)-}\frac{\partial w}{\partial x} + B_{0y}^{(2)-}\frac{\partial w}{\partial y}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mu-1}{c^2} B_{0y}^{(2)-}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]$$

Составляя при помощи (3.4) уравнения для $h_x^+ - h_x^-$ и $h_y^+ - h_y^-$ и рассматривая совместно с уравнениями (1.2), используя при этом условия (2.5), получим замкнутую систему из шести уравнений относительно искомых функций φ, ψ, f, w, $h_x^+ - h_x^-$, $h_y^+ - h_y^-$.

Для иллюстрации приведем эти два уравнения в случае $\mu = \varepsilon = 1$

$$\Box (h_x^+ - h_x^-) = \frac{2}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \qquad \Box (h_y^+ - h_y^-) = \frac{2}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \tag{3.5}$$

Таким образом, система уравнений (1.2) и (3.5) с учетом условия (2.5) полностью определяет индуцированное электромагнитное поле в области, занимаемой пластинкой, и прогибы пластины.

Рассмотрим частные случаи для бесконечной пластинки. В случае, когда заданное магнитное поле постоянно с вектором напряженности, параллельным оси x, и при условии независимости колебаний от y, уравнения (3.5) приводятся к одному условию

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_x^+ - h_x^-) = -\frac{2c}{i}\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(h_x^+ - h_x^-) = \frac{2}{i} f \tag{3.6}$$

где принято, что из $\Box q = \Box \varphi$ следует $q = \varphi$.

Разрешающая система уравнений (1.2) после некоторых преобразований приведется к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi + \frac{H_{0x}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{2}{ih} \tag{3.7}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h\sigma}{c} H_{0x}\left(\varphi + \frac{1}{c} H_{0x}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

Представляя решение системы (3.7) в виде

$$q = q_0 \exp i(\omega t - kx) \tag{3.8}$$

и выбирая $i = k^{-1}$, для определения частоты колебаний получим следующее характеристическое уравнение:

$$Dk^4 - 2\rho h\omega^2 = -\frac{2h\sigma i\omega}{c^2} H_{0x}^2 \frac{k(1 + kh)}{k(1 + kh) + 4\pi i\omega h/c^2} \tag{3.9}$$

Уравнение (3.3) совпадает с характеристическим уравнением, полученным при решении той же задачи в точной постановке [1].

В случае, когда пластинка служит проводником равномерно распределенного электрического тока в направлении оси x и колебания не зависят от координаты x, разрешающая система уравнений приведется к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{f}{\sigma h}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h^3\sigma}{3c^2}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{zz}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.10}$$

Как отмечалось выше, в этом случае уравнение движения пластинки автономно и независимо от других уравнений определяет характер колебаний пластинки.

Для определения характера колебаний индуцированного электромагнитного поля представим решение уравнений (3.10) в виде

$$q = q_0 \exp i(\omega t - k_1 y)$$

и выберем $\lambda = k_1^{-1}$. При этом характеристическое уравнение получается в виде

$$-k_1 - 4\pi\sigma i\omega/c^2 = k_1/h$$

откуда

$$i\omega = -c^2 k_1 (1 + k_1 h)/(4\pi\sigma) \tag{3.11}$$

Учитывая, что токи смещения в пластинке не были учтены, формула (3.11) дает коэффициент затухания электромагнитного поля. Этот результат также совпадает с точным решением при условии пренебрежения токами смещения по сравнению с токами проводимости и при пренебрежении величиной ω^2/c^2 по сравнению с k_1^2.

Приведенные примеры показывают, что допущения (3.1) о характере возбужденного электромагнитного поля в среде, окружающей пластинку, приводят к точному решению для искомых величин в среде, занимаемой бесконечной пластинкой. Точное решение здесь понимается в смысле решения той же задачи, но без допущения (3.1).

Естественно ожидать, что допущения (3.1) для задач магнитоупругости конечных тонких пластин приведут к достаточно близким к точному решению результатам.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 II 1974

Ս. Վ. ԲԵԼՈՒՇԵՎԱՆ

ՀՈՍԱՆԵԼԱՏԻՐ ՍԱԼԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Նկարագրվում են արվում տատանվող հոսանքատար սալը շրջապատող միջավայրում գրգռված էլեկտրամագնիսական դաշտի բնույթի վերաբերյալ

Այդ ենթադրությունների հիման վրա դրդված էլեկտրամագնիսական դաշտի եզրային շոշափող բաղադրիչների արժեքների համար ստացվում են դիֆերենցիալ կապեր։ Նշված կապերը փակում են մագնիսաառաձգականության հավասարումների սիստեման։

Այսպիսով, հնարավոր է լինում շրջանցել սալի մագնիսաառաձգականության և սալը շրջապատող միջավայրի էլեկտրոդինամիկայի հավասարումների համատեղ ուսումնասիրելու անհրաժեշտությունը։

ON THE VIBRATION PROBLEM FOR CURRENT-CARRYING PLATES

M. V. BELUBEKIAN

S u m m a r y

Assumptions are formulated on the character of an excited electromagnetic field in the medium surrounding a vibrating current-carrying plate with an initial stationary magnetic field. Comparison with the solution to problems of precise statement supports the above assumptions.

Equations concerning the values of tangential components of an induced magnetic field on the plate surfaces closing the equations of magnetic elasticity for the region occupied by the plate are derived.

Thus, the necessity of simultaneous consideration of magnetoelasticity equations and those of electrodynamics for the medium surrounding the plate, bound by common boundary conditions on the surfaces of the plate, is avoided.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 2, 1973.
3. *Белубекян М. В.* К уравнениям магнитоупругости токонесущих пластин. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXVII, № 2, 1974.
4. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* О колебаниях проводящих пластин в магнитном поле. МТТ, № 2, 1974.
5. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Колебания и устойчивость токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле. Докл. АН Арм.ССР, т. LVII, № 5, 1973.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

Г. Г. ОГАНЯН

СЛАБЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о сходящейся слабой ударной волне в реагирующей смеси, изменение состава которой определяется протеканием химической реакции. Уравнения, описывающие распространение слабых ударных волн в химически активных средах, рассмотрены в работах [1,2]. Для сходящихся волн произвольной интенсивности в химически инертных газах рассматриваемая задача изучалась в работах, обзор которых дается в [3].

В настоящей работе методом сращиваемых разложений [4], примененным для соответствующей газодинамической задачи, определяется аналитическое решение при разных значениях числа q, определяющего отношение нелинейного и релаксационного эффектов. Приведены данные по физико-химическим формулам, позволяющие оценить влияние релаксационных эффектов на распределение параметров движения, причем, для рассмотренной реакции диссоциации четырехокиси азота, релаксационные эффекты намного превосходят эффекты вязкости.

1. Предполагается, что в n-компонентной химически активной смеси вязкого газа, в которой происходит только одна химическая реакция, вне бесконечного цилиндрического объема радиуса R_0 происходит взрыв, то есть в результате внезапного избыточного давления образуется ударная волна. В предположении, что скорости всех компонентов смеси в каждой точке пространства и любой момент времени одинаковы, изменение состава смеси будет характеризоваться параметром q, называемым полнотой (степенью развития) химической реакции. Уравнения движения смеси возьмем в виде [5]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v) + \frac{\rho v}{r} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) \tag{1.2}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + v\frac{\partial s}{\partial r}\right) - Q\left(\frac{\partial q}{\partial t} + v\frac{\partial q}{\partial r}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2 - \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right] + 3\lambda_3\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial r} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v\frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{1}{\tau}H_1 Q \tag{1.4}$$

$$p = p(\rho, q, s) \text{ или } p = p(\rho, Q, s) \tag{1.5}$$

$$Q = Q(p, \rho, q), \qquad Q = \sum_{k=1}^{n} \nu_k \mu_k \tag{1.6}$$

Здесь t — время, ρ — плотность, p — давление, s — энтропия, T — температура, v — скорость, Q — сродство химической реакции, μ_k — химический потенциал k-го компонента смеси, λ_1 и λ_2 — первый и второй коэффициенты вязкости, $\nu_k M_k$ пропорционально стехиометрическому коэффициенту k-го компонента в уравнении химической реакции, τ — время протекания химической реакции, коэффициент $H_1 > 0$ ввиду того, что в необратимых процессах энтропия смеси может только увеличиваться.

Предполагается, что разность возмущенных и невозмущенных параметров смеси в каждой точке пространства и в любой момент времени мала

$$p = p_0 + \varepsilon p', \ \rho = \rho_0 + \varepsilon\rho', \ s = s_0 + \varepsilon s', \ T = T_0 + \varepsilon T' \tag{1.7}$$
$$q = q_0 + \varepsilon q', \ Q = \varepsilon Q', \ v = \varepsilon v'$$

Здесь невозмущенные величины обозначены нулевым индексом, ε — малый параметр.

Для возмущений примем следующие начальные значения:

$$p' = \rho' = s' = Q' = v' = 0 \quad \text{при } r < R_0, \ t \leqslant 0$$

$$p' = \Delta, \ \rho' = \Delta/a_{e0}^2, \ q' = \Delta\left(\frac{\partial q}{\partial p_0}\right)_{0,s} \tag{1.8}$$

$$s' = Q' = v' = 0 \quad \text{при } r > R_0, \ t \leqslant 0$$

где $a_{e0} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)^{1/2}$ — равновесная скорость звука в состоянии полного термодинамического равновесия. Условия (1.8) совместно с требованием непрерывности v', p' на линии $r = R_0$ при $t > 0$, как будет показано, определяют решение системы (1.1)—(1.6).

В дальнейшем, при линеаризации и последующем упрощении уравнений, штрихи над возмущенными параметрами опускаются.

Производя посредством (1.7) линеаризацию системы (1.1)—(1.6) и применяя преобразование Лапласа по t к получаемой системе линеаризованных уравнений, для возмущения скорости v можно получить

$$d_1\bar{v}'' - \frac{1}{r}d_1\bar{v}' - \left(d - \frac{1}{r^2}d_1\right)\bar{v} = 0 \tag{1.9}$$

где $\bar{v}$ — обращение по Лапласу, $d_1 = \left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\omega^2 +$

$$+\left[\frac{H_{10}}{\tau}\left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q_0}\right)_{p,s} + \rho_0 a_{f0}^2\right]\omega + \frac{H_{10}}{\tau}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_0}\right)_{p,s}\rho_0 a_{e0}^2$$

$$d_2 = \rho_0\omega^3 + \frac{H_{10}}{\tau}\rho_0\left(\frac{\partial Q}{\partial q_0}\right)_{p,s}\omega^2$$

ω — параметр преобразования Лапласа.

Для малых значений t после взрыва, поскольку течение не сразу достигает оси симметрии, где имеется особенность, его можно считать локально плоским, поэтому в начальной области можно пренебречь радиальными членами в (1.9). Общее решение получаемого уравнения запишется в виде

$$\bar{v}(\omega, x) = D_1(\omega)e^{-kx} + D_2(\omega)e^{kx}$$

где $x = R_0 - r$, $k = (d_2/d_1)^{1/2}$

Полученное решение содержит в себе два вида волн: сходящуюся и расходящуюся

$$\bar{v}(\omega, x) = D_1(\omega)e^{-kx} \quad \text{при } x > 0 \quad (r < R_0)$$

$$\bar{v}(\omega, x) = D_2(\omega)e^{kx} \quad \text{при } x < 0 \quad (r > R_0)$$

Функции D_1, D_2 определяются из условия непрерывности v, p, а следовательно, и $\bar{v}$, $\bar{p}$ на линии $x = 0$ $(r = R_0)$, так что для сходящейся волны находим

$$D_1(\omega) = -\frac{\Delta}{2\rho_0 a_{f0}^2 k}\left(1 - \frac{H_{10}b_0b_1}{\omega\tau - H_{10}b_0}\right)$$

где

$$b_0 = \left(\frac{\partial Q}{\partial q_0}\right)_{p,s}, \quad b_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial q_0}\right)_{p,s}\left(\frac{\partial q}{\partial p_0}\right)_{Q,s} = 1 - \frac{a_{f0}^2}{a_{e0}^2}$$

$a_f = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{q,s}^{1/2}$ — замороженная скорость звука.

Для малых $\omega\tau$, которым соответствует квазиравновесный процесс распространения возмущений, получаем

$$\bar{v}(\omega, x) = -\frac{\Delta}{2\rho_0 a_{e0}\omega}e^{-\frac{x}{a_{e0}} - \frac{1}{2}\gamma_1\omega^2} \tag{1.10}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{\rho_0 a_{e0}^3}\left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right) - \frac{\tau}{H_{10}a_{e0}}\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{p,s}\left(\frac{a_{f0}^2}{a_{e0}^2} - 1\right)$$

Разложение (1.10) справедливо лишь в узкой волновой области и при отсутствии химической реакции совпадает с [4].

Применяя к (1.10) обратное преобразование Лапласа [6] и заменяя переменную интегрирования, для возмущения скорости можно получить

$$v(x, t) = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}\, a_{e0}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{t - \dfrac{x}{a_{e0}}}{\sqrt{2x\tau_1}} \right) \right], \quad x = R_0 - r \tag{1.11}$$

Отсюда видно, что позади (впереди) фронта волны скорости частиц химически активной среды по абсолютной величине меньше (больше) соответствующих скоростей частиц в смеси инертных газов.

Для квазиравновесного процесса распространения возмущений, аналогично [1,2], можно преобразовать уравнение энергии (1.3) к альтернативной форме

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v - a_e)\frac{\partial p}{\partial r} - \rho a_e \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v - a_e)\frac{\partial v}{\partial r} - a_e \frac{v}{r} \right] = L_{1e} + L_{2e} + L_{3e} \tag{1.12}$$

где

$$L_{1e} = -a_e\left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right)$$

$$L_{2e} = \frac{1}{\rho T}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\rho, Q}\left\{\frac{4}{3}\lambda_1\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2 - \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right] + \right.$$

$$\left. + \lambda_2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2 + 2\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right]\right\}$$

$$L_{3e} = -\frac{Q}{\rho T}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\rho, Q}\left[\frac{\partial q}{\partial t} + v\frac{\partial q}{\partial r} - \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho, s}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + v\frac{\partial Q}{\partial r}\right)\right]$$

В соотношениях (1.7) был введен малый параметр ε. Примем

$$\varepsilon = \Delta / 2\gamma_0 a_{e0}^2$$

Предполагается, что рассматриваемое течение релаксирующей смеси представляет собой короткую волну с узкой возмущенной зоной, движущейся с равновесной скоростью звука a_{e0}. Дальнейшие исследования проводятся методами, развитыми в [1, 2, 4].

2. Предположим, что эффекты диссипации по порядку величины много больше интенсивности волны, то есть

$$\varepsilon = \frac{a_{e0}}{\sqrt{R_0}} \ll 1 \tag{2.1}$$

Из (1.11) видно, что линейное решение зависит лишь от

$\left(t - \frac{R_0 - r}{a_{e0}}\right) \Big/ \sqrt{2\varepsilon(R_0 - r)}$. Поэтому при малых r вводятся новые переменные

$$\zeta = \frac{\left(t - \frac{R_0 - r}{a_{e0}}\right)\sqrt{R_0}}{a_{e0}\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tau = r \tag{2.2}$$

Применяя преобразования (1.7) и (2.2) к уравнениям (1.1), (1.2) и удерживая лишь главные члены, получим

$$\gamma = -\frac{\rho_0}{a_{e0}} v = \frac{1}{a_{e0}^2} p \tag{2.3}$$

Аналогично [1, 2, 7] можно показать, что

$$s = Q = 0 \tag{2.4}$$

то есть в принятом приближении в квазиравновесном процессе распространения возмущений сжатие газа происходит обратимо при постоянном сродстве химической реакции. В рассматриваемом приближении

$$a_e = -(\alpha_e^0 - 1)v, \quad \alpha_e^0 = \frac{1}{a_{e0}}\left[\frac{\partial}{\partial \rho_0}(\rho a_e)\right]_{Q=0}$$

$$q = -\left(\frac{\partial q}{\partial \rho_0}\right)_{Q=0} \frac{\rho_0}{a_{e0}} v \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} = -N_e H_{10} \frac{a_{e0}^2}{R_0 \sqrt{2}} \gamma^{1/2} Q, \quad N_e = \frac{R_0}{a_{e0}\tau}$$

Из (2.4) и последнего соотношения (2.5) видно, что $N_e \gg 1$, то есть время протекания химической реакции τ много меньше макроскопического времени R_0/a_{e0}.

Применяя преобразования (1.7), (2.2) к альтернативной форме (1.12), учитывая затем соотношения (2.3)–(2.5) и оставляя лишь главные члены, получим

$$2\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{r} - \frac{R_0}{a_{e0}^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) допускает решение

$$v(\zeta, r) = -\frac{a_{e0}\sqrt{R_0}}{2\sqrt{r}}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a_{e0}\zeta}{\sqrt{2R_0(R_0 - r)}}\right)\right] \tag{2.7}$$

которое сращивается с (1.11) при $r \to R_0$.

Когда r становится малым, приближение (2.7) становится неверным из-за взаимодействия волны с осью симметрии. Поэтому обратимся к уравнению (1.9), которое после известного преобразования приводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2\bar{v}}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\bar{v}}{dz}-\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\bar{v}=0,\quad z=\left(-\frac{d_2}{d_1}\right)^{1/2}r$$

общее решение которого есть

$$\bar{v}(z)=D_2I_1(z)+D_1K_1(z)$$

где I_1, K_1 — модифицированные функции Бесселя первого порядка. Выделяя из общего решения сходящуюся и расходящуюся волны, находим

$$\bar{v}(z)=D_2(s)I_1(z)\quad \text{при } r<R_0$$

$$\bar{v}(z)=D_1(s)K_1(z)\quad \text{при } r>R_0$$

Функции D_1, D_2 определяются из условия непрерывности $\bar{v}$, $\bar{p}$ на линии $r=R_0$. После несложных вычислений можно найти решение, соответствующее сходящейся цилиндрической волне. При этом, для малых s, соответствующих квазиравновесному процессу распространения возмущений,

$$\bar{v}(z)=-\frac{\Delta(1-b_2)R_0K_1\left(\frac{R_0}{a_{e0}}-\frac{R_0}{2}s^2\right)}{\rho_0a_{e0}^2}I_1(z) \tag{2.8}$$

Воспользовавшись асимптотическим разложением функции K_1, заменяя I_1 через функцию Бесселя первого рода первого порядка $J_1(z)$, затем совершая обратное преобразование Лапласа и вводя вместо s новый параметр τ

$$-s=\frac{i\tau}{\sqrt{R_0\tau_1}}$$

из (2.8) можно получить решение в виде

$$v(\xi,\tau)=-\sqrt{\frac{4R_0a_{e0}^2}{\pi^2\tau_1}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}J_1\left(\frac{\tau\xi}{R_0}\right)\cos\left(\frac{a_{e0}\tau}{R_0}\tau+\frac{\pi}{4}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \tag{2.9}$$

Здесь

$$\xi=\frac{\sqrt{R_0}}{a_{e0}\sqrt{\tau_1}}r,\qquad \tau=\frac{\left(t-\frac{R_0}{a_{e0}}\right)\sqrt{R_0}}{a_{e0}\sqrt{\tau_1}} \tag{2.10}$$

Из решения (2.9) видно, что при $r=0$, то есть на оси симметрии, скорость частицы смеси конечна. Полученное решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{v}{\zeta^2} \right) = 0 \tag{2.11}$$

что можно проверить подстановкой и заменой $v(\xi, \zeta)$ в (2.9) его асимптотическим выражением. Заметим, что уравнение (2.11) можно получить также из альтернативной формы (1.12) методом, примененным при выводе (2.6), причем за новые независимые переменные берутся (2.10).

Решение (2.9) верно для малых r, то есть вблизи оси симметрии. Для сращивания (2.9) с решением (2.7) удобнее всего взять и (2.8) асимптотические выражения для K_1 и I_1 для больших r и затем совершить обратное преобразование Лапласа.

Итак, при получении уравнений (2.6), (2.11) были пренебрежены нелинейные члены в (1.12) в силу требования (2.1).

3. Если же условие (2.1) не выполняется, то тогда при упрощении альтернативной формы (1.12) следует оставлять конвективные слагаемые. Пусть теперь

$$\left| \frac{a_{\infty}}{R_0} \right| \sim \frac{1}{\eta} \tag{3.1}$$

За независимые переменные принимаются

$$\zeta = \frac{\left(1 - \frac{R_0 - r}{a_{\infty}}\right) R_0^2}{a_{\infty}^2 \eta}, \qquad \xi = \frac{(R_0 - r) R_0^2}{a_{\infty}^2 \eta} \tag{3.2}$$

Применение преобразований (1.7) и (3.2) к системе (1.1) — (1.6) приводит к соотношениям, подобным (2.3) — (2.5). Аналогичные выкладки над альтернативной формой (1.12) дают в основном порядке уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\eta}{a_{\infty}^2} v \frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{R_0}{2a_{\infty}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \tag{3.3}$$

которые можно записать в форме

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \beta \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \qquad \left(\beta = \frac{R_0}{2a_{\infty}^2}, \quad v = -\frac{2\beta a_{\infty}^2}{\eta} \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \tag{3.4}$$

Граничные условия для уравнения (3.3) берутся в виде

$$v(\xi, 0) = \begin{cases} -a_{\infty} & \text{при} \quad r = R_0, \quad \xi > 0 \\ 0 & \text{при} \quad r = R_0, \quad \xi \leq 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

то есть решение уравнения Бюргерса, описывающее окрестность волны, сращивается с асимптотикой линейного решения на волне. В соответствии с (3.5) граничные условия для (3.4) преобразуются в виду

$$\theta(\xi, 0) = \begin{cases} e^{\frac{\alpha a_{e0}}{2\xi}} & \text{при } \xi > 0 \\ 1 & \text{при } \xi \leq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Аналогично [7, 8], решение (3.4) при условии (3.6) после перехода к скорости v можно записать в виде

$$v(\xi, \tau) = -a_{e0} \frac{B}{A - B} \tag{3.7}$$

где

$$A = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha_1} e^{-\alpha^2} d\alpha \right] e^{-\frac{\tau^2 a_{e0}^2 \xi}{4\xi} - \frac{\tau a_{e0}}{2\xi}}, \qquad \alpha = \frac{\alpha_e^0}{a_{e0}^2}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha_2} e^{-\alpha^2} d\alpha, \qquad \alpha_1 = \frac{\xi + \tau a_{e0} \xi}{\sqrt{4\tau\xi}}, \qquad \alpha_2 = \frac{\xi}{\sqrt{4\tau\xi}}$$

Решение (3.7) есть точное решение уравнения (3.3), сращиваемое в пределе ($r \to R_0$) с (1.11). При этом в решении (3.7) предполагается, что $|\alpha_1| \gg 1$, $|\alpha_2| \gg 1$, причем $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$, так что, используя асимптотику интегралов ошибок для больших ξ, можно найти приближенное значение

$$v(\xi, \tau) = -a_{e0} \left(1 + e^{-\frac{\alpha^2 a_{e0}^2 \xi}{4\tau} - \frac{\tau a_{e0} \xi}{2\tau}} \right)^{-1} \tag{3.8}$$

Видно, что решение зависит лишь от $(\tau^2 a_{e0}^2 \xi - 2\tau a_{e0} \xi)$, поэтому, переходя по (3.2) к переменным r, t, можно показать, что линия

$$\xi - \frac{\tau a_{e0}}{2} \xi = 0$$

есть приближенное отображение физической линии

$$r = -a_{e0} \left(1 - \varepsilon \frac{\gamma_e^0}{2} \right) t$$

которая представляет собой траекторию слабой плоской ударной волны. Очевидно, что скорость частиц на волне не зависит от физических переменных r и t, то есть волна принимает форму установившегося профиля, который возмущается только таким внешним воздействием, как эффект радиальной симметрии.

Предположим теперь, что ни радиальная координата r, ни расстояние от границы $R_0 - r$ не малы. За независимые переменные принимаются

$$\zeta = \frac{\left| t - \frac{R_0 - r}{a_{\infty}} - \frac{\varepsilon L(r)}{a_{\infty}} \right| R_0^2}{a_{\infty}^2 \varepsilon}, \quad r = r \tag{3.9}$$

где функция $L(r)$ определяется ниже. В данном случае снова имеют место соотношения, подобные (2.3) — (2.5), которые используются при упрощении альтернативной формы (1.12), дающей в основном порядке уравнение Тейлора

$$2\alpha_{\infty}^2 v \frac{\partial v}{\partial r} - 2a_{\infty} \frac{dL}{dr} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \tag{3.10}$$

Интегрирование (3.10) приводит к решению

$$v(\zeta, r) = 2a_{\infty} \frac{dL}{dr} \left[\alpha_{\infty}^2 \left(1 + e^{\frac{2a_{\infty}}{R_0} \frac{dL}{dr} \zeta} \right) \right]^{-1} \tag{3.11}$$

Линия

$$t - \frac{R_0 - r}{a_{\infty}} + \frac{\varepsilon L(r)}{a_{\infty}} = 0$$

есть траектория слабой ударной волны. Отсюда легко найти скорость распространения ударной волны, которая, с другой стороны, равна среднему арифметическому из скоростей распространения возмущений впереди и позади ударной волны, то есть

$$\frac{dL}{dr} = \lim_{\zeta \to \infty} \frac{\alpha_{\infty}^2}{2a_{\infty}} v(\zeta, r)$$

причем условие $\zeta \to \infty$ соответствует переходу к линейному решению. Из граничного условия (3.5) видно, что при $r = R_0$

$$\left. \frac{dL}{dr} \right|_{r=R_0} = -\frac{\alpha_{\infty}^2}{2} \tag{3.12}$$

С учетом (3.12) решение (3.11) при $r \to R_0$ переходит в (3.8), когда последнее выражается в терминах (3.9).

Для завершения решения остается определить $L(r)$. Течение вдали от волны и не вблизи оси симметрии можно считать, в основном, недиссипативным. Тогда, определяя возмущение скорости v из линеаризованной посредством (1.7) и (2.2) системы уравнений, находим

$$\frac{dL}{dr} = -\frac{\alpha_e^0}{2}\sqrt{\frac{R_0}{r}} \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.11), получим решение

$$v(\xi, r) = \frac{a_{e0}\sqrt{R_0}}{\sqrt{r}}\left(1 + e^{\frac{\alpha_e^0 a_{e0}}{\sqrt{R_0 r}}\xi}\right)^{-1} \tag{3.14}$$

которое при $r \to R_0$ сращивается с (3.8). Решение (3.14) описывает только изменение толщины ударной волны.

4. Пусть теперь эффекты диссипации и нелинейности имеют одинаковый порядок, то есть

$$\frac{\nu\sqrt{R_0}}{a_{e0}\sqrt{r}} = g \sim o(1)$$

что представляет собой промежуточный случай между существованием и отсутствием слабых ударных волн.

В области, где r и $(R_0 - r)$ не малы, вводятся переменные (2.2), с помощью которых, аналогично выводу (2.6), производится упрощение альтернативной формы (1.12), после чего получается уравнение Бюргерса радиального течения

$$2\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{R_0}{a_{e0}^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 2g\frac{\alpha_e^0}{a_{e0}^2}v\frac{\partial v}{\partial \xi} \tag{4.1}$$

Введем новые переменные

$$\xi = \zeta + \frac{\sqrt{R_0}\,w(\zeta, r)}{a_{e0}\sqrt{r}}, \quad r = r \tag{4.2}$$

где функция $w(\zeta, r)$ имеет порядок $o(1)$ и, по идее метода коротких волн, ее производная по направлению ξ — величина более низкого порядка малости, чем сама функция. Преобразуя посредством (4.2) уравнение (4.1), можно записать его в виде

$$2\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{R_0}{a_{e0}^2}\left(1 - g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial v}{\partial \xi}\left(1 - g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\right] =$$

$$g\left(1 - g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\left[2\frac{\alpha_e^0}{a_{e0}^2}v\frac{\partial v}{\partial \xi} - 2\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right] \tag{4.3}$$

Если теперь выбрать функцию $w = w(\xi, r)$ таким образом, чтобы

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\alpha_e^0}{a_{e0}^2}v \tag{4.4}$$

то уравнение (4.3) примет вид

$$2\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}+\frac{R_0}{a_{eo}^2}\left(1-g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial v}{\partial \xi}\left(1-g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\right]=0 \qquad (4.5)$$

В работе [4] принимается, что $\frac{\partial w}{\partial \xi}\sim o(\xi)$, поэтому вместо уравнения (4.5) получается линейное уравнение типа (2.6), выраженное в переменных (4.2), но, как было сказано выше, $\frac{\partial w}{\partial \xi}\sim\frac{1}{\xi}$, так что метод, предложенный в [4], можно рассматривать лишь как первое приближение при итерационном процессе.

Рассмотрим случай отсутствия эффектов диссипации. Тогда в уравнении (4.5) третий член исчезает, так что решение линейного уравнения можно записать в виде

$$v=\varphi(\xi)/\sqrt{r}$$

Подставляя данное решение в (4.4), находим

$$w=-\frac{\alpha_e''}{2a_{eo}^2}\varphi(\xi)/\sqrt{r}+f(\xi) \qquad (4.6)$$

С другой стороны, из чисто нелинейного уравнения, получаемого из (4.1) при отсутствии диссипативных эффектов, можно получить

$$\zeta=-g\frac{\alpha_e''}{2a_{eo}^2}\varphi(\xi)/\sqrt{r}+\xi$$

что, согласно (4.2), совпадает с (4.6) при $f(\xi)=0$.

Таким образом, в нелинейной задаче указанный подход приводит к точному решению, в то время как при учете диссипативных эффектов получается гораздо более сложное уравнение (4.5).

5. В качестве примера рассмотрим реакцию диссоциации четырехокиси азота: $N_2O_4\rightleftarrows 2NO_2$.

Для вычисления коэффициента η в формулах (1.11), (2.7) использованы работы [10, 11, 12, 13, 14]. Значения a_{eo} для различных давлений и температур были заимствованы из [10], а a_{fo} и комбинация $\frac{1}{H_{10}}\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{p,T}$ вычислены по формулам, данным в [11, 12]. В работах [13, 14] даны критические параметры соответственно для N_2O_4 и NO_2, с помощью которых были рассчитаны по формуле Бромлея-Уилка [14] вязкости отдельных компонент. Вязкость газовой смеси была вычислена по формуле Уилка [14]. Время после взрыва считалось равным $t=0.0009$ *сек*. Численные значения некоторых характерных параметров течения приведены в табл. 1, где обозначения те же, что были приняты выше, а v_* — скорость частиц смеси без учета химической

реакции. Здесь же приведены значения скоростей частиц смеси v и отношения v/v_0, вычисленные в трех точках позади фронта волны для различных случаев. Эти точки выбраны так, чтобы они находились в каждом случае на расстоянии 0.003 *м*, 0.002 *м* и 0.001 *м* от фронта волны. В таблице эти точки расположены в одинаковых столбцах сверху вниз. Видно, что при приближении к фронту волны при фиксированных p и T скорости v и отношения v/v_0 уменьшаются. При данной температуре с увеличением давления скорости v и отношения v/v_0 уже увеличиваются. При данном давлении с увеличением температуры скорости v увеличиваются, а отношения v/v_0 меняются незначительно.

Таблица 1

T°C	20°			50°	
p(*атм*)	0.035	0.11	0.26	0.036	0.11
a_0 *м/сек*	230	216	190	250	245
a_f *м/сек*	244	220	198	265	260
ρ_0 (*кг/сек²м⁴*)	$0.3807\cdot10^{-4}$	$0.2973\cdot10^{-4}$	$0.2686\cdot10^{-4}$	$0.5178\cdot10^{-4}$	$0.4417\cdot10^{-4}$
ρ_f (*кг/сек²м⁴*)	$0.5062\cdot10^{-4}$	$0.7207\cdot10^{-4}$	$0.2809\cdot10^{-4}$	$0.3973\cdot10^{-4}$	$0.9107\cdot10^{-4}$
x *м*	0.204	0.185	0.168	0.222	0.2175
v *м/сек*	151	187	188	164	198
v/v_0	0.6576	0.3912	0.9892	0.6565	0.8078
x *м*	0.205	0.187	0.169	0.221	0.2185
v *м/сек*	139	166	175	151	176
v/v_0	0.6065	0.794	0.923	0.606	0.7185
x *м*	0.206	0.188	0.170	0.224	0.2195
v *м/сек*	127	139	147	138	150
v/v_0	0.5534	0.6585	0.7765	0.5524	0.6136

Автор выражает глубокую благодарность А. Г. Багдоеву за постановку задачи и ценные указания.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 X 1970

Դ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԻՄՊԼՍ ԴԼԱՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՔԻՄԻԱԿԱՆ ԱԿՏԻՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է խնդիր սեղմվող թույլ հարվածային ալիքի վերաբերյալ քիմիապես ակտիվ գազային խառնուրդում, որում տեղի է ունենում միայն մեկ ռեակցիա։

Կարճ ալիքների և կառուցող վերլուծությունների մեթոդներով կառուցվում է

անալիտիկ լուծում որոշ ոչ գծային և ռելաքսացիոն էֆեկտների հարաբերություններ բնութագրող g պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում։ Բերված են թվային տվյալներ, որոնք թույլ են տալիս գնահատելու շարժման պարամետրերի բաշխման վրա ռելաքսացիոն էֆեկտների ազդեցությունը։ Ցույց է տրված, որ քառաբջիջ ազոտի դիսոցիացիայի ռեակցիայի համար ռելաքսացիոն էֆեկտները բավականաչափ զգալի ազդեցություն են մածուցիկության էֆեկտներին։

WEAK CYLINDRICAL WAVES IN CHEMICALLY ACTIVE MEDIUM

G. G. OHANIAN

S u m m a r y

The problem of a converging shock wave in a reacting multicomponent mixture of viscous gas with one chemical reaction is considered.

The method of matched asymptotic expansions is used to find an analytic solution with different values of number g characterizing the ratio between non-linear and relaxation effects. The data allowing to estimate the influence of relaxation effects on the distribution of motion parameters are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, т. 35, № 6, 1971.
2. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, т. 11, № 5, 1971.
3. *Забабахин Е. И.* Явления неограниченной кумуляции. В сб. „Механика в СССР за 50 лет", т. 2, „Наука". М., 1970.
4. *Chapman P. B.* Weak cylindrical implosions. J. Inst. Maths. and applics, №1, 1965.
5. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. „Мир", М., 1964.
6. *Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. „Наука", М., 1965.
7. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVI, № 6, 1973.
8. *Анисимов В. В., Хохлов Р. В.* Об ударных волнах, образующихся при обтекании тонких профилей вязким газом. ПММ, т. 28, № 3, 1964.
9. *Whitham G. B.* Some comments on wave propagation and shock wave strukture with application to magnetohydrodinamics. Comm. on pure and applied mathematics, vol. XII, № 1, 1959
10. *Sessler G.* Schallausbreitung in teilweise dissoziiertem gasformigem Distickstoffotryd. Acustica, vol. 10, №1, 1960.
11. *Баузр Г.* Феноменологическая теория релаксационных явлений в газах. Сб. „Физическая акустика под ред. У. Мазона, т. II, ч. А. „Мир", М., 1968.
12. *Кизер Г.* Релаксационные процессы в газах. Сб. „Физическая акустика" под ред. У. Мазона, т. II, ч. А. „Мир", М., 1968.
13. *Перри Дж. Г.* Справочник инженера-химика, т. I. „Химия". Л., 1966.
14. *Бретшнайдер С.* Свойства газов и жидкостей. „Химия". М.—Л., 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, Г. С. БЕЗИРГЕНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХКРИТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ОТКРЫТОМ ВОДОВОДЕ КОНФУЗОРНОЙ ФОРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОДОЛЬНЫМ УКЛОНОМ

Рассматривается сверхкритическое стационарное движение несжимаемой идеальной жидкости в открытом водоводе с плоским наклонным дном, слегка сужающимся вниз по течению, с целью выяснения возможности непрерывного (беспрыжкового) сужения бурного потока, а также расчета прыжков в случае их образования. Выводится уравнение нелинейных характеристик, определяются условия на прыжке и наклонном водотоке и доказывается, что наклон фронта прыжка относительно оси водовода есть среднее арифметическое наклонов характеристик впереди и позади него. Производится линеаризация уравнений относительно одномерного (переменного по длине) течения и находится лучевое решение в окрестности характеристики, отделяющей в плане области одномерного и двухмерного течений. Методом замены в линейном решении характеристической переменной через нелинейную переменную, предложенным в [6] для задачи газовой динамики определяется нелинейное решение в окрестности линейной характеристики. Исследуется образование прыжков в зависимости от формы стенок сужающего водовода. Приводится обоснование правильности полученного нелинейного решения. Для этого выводится уравнение Буссинеска для наклонных водотоков и затем получается уравнение коротких волн для установившегося движения с учетом дисперсии. При пренебрежении дисперсией получается нелинейное уравнение, которому удовлетворяет вышеуказанное нелинейное решение. Следует отметить, что можно тем же путем получить уравнение двухмерных коротких волн с учетом нестационарности и силы трения.

Из работ, посвященных исследованию бурных течений на участках сужения быстротоков, в основу которых положена теория двухмерных потоков, следует отметить [1—4]. При малых уклонах дна водотока уравнение одномерного нестационарного движения с учетом дисперсии получено в работе [5]. Впервые уравнения коротких волн в газовой динамике были получены в работе [7]. Ряд решений этих уравнений получены в работах [8—9]. Уравнения трехмерных стационарных и нестационарных коротких волн в газовой динамике получены в работах [10—11]. В магнитной газовой динамике, а также для произвольной среды подобные уравнения получены в работах [12—14].

1. Рассмотрим сверхкритическое, стационарное, безвихревое движение несжимаемой жидкости в открытом водотоке с плоским наклон-

ным дном и сходящимися боковыми стенками. Пусть уклон дна водотока произвольный, а боковые стенки в плане повернуты на относительно малые углы θ. В этом случае на свободной поверхности бурного потока появляются возмущения, у которых есть тенденция накладывания (суммирования) друг на друга (пересечение нелинейных характеристик). Это приводит к образованию все более крутых фронтов волн, которые в конечном счете превращаются в стоячую волну или гидравлический прыжок.

При сужении сверхкритического потока усилия проектировщиков направлены на уменьшение высоты стоячих волн, возможного устранения гидравлических прыжков и обеспечении в пределах допустимости равномерного распределения скоростей потока в конце сужения с помощью подбора подходящих форм боковых стенок водосброса.

Отметим, что по причинам значительной высоты гребня водосброса и затопления берегов водохранилища требуется сооружать водосброс с довольно широким фронтом. В то же время экономические и топографические условия требуют сузить водосброс вниз по течению. Таким образом, возникает необходимость в устройстве непризматических водосливных сооружений, обеспечивающих на относительно короткой длине симметричное сужение бурного потока. Сооружение таких плотин дает возможность увеличить полезный объем водохранилища, что позволит получать большую экономическую выгоду.

Чтобы не усложнять выкладки, предположим, что скорость и глубина потока во входном сечении водосброса постоянны, причем скорости направлены параллельно его оси. Как значение этих величин, так и геометрические параметры водотока (ширина входного сечения — $2b_0$, длина — L, уклон — ν) и очертание боковых стенок являются заданными величинами.

При бурном режиме движения силами трения по сравнению с силами инерции для коротких участков можно пренебречь [4, 15]. Дело в том, что если написать уравнения в форме Рейнольдса и перейти к безразмерным величинам, то уравнения сохраняют свой вид, но перед членами, учитывающими турбулентное трение, появляется число Рейнольдса в знаменателе и при сильной турбулизации, то есть при $Re \to \infty$, эти члены исчезают, и уравнение принимает вид для идеальной жидкости.

Расположим начало координат во входном сечении водотока, ось Ox совместим с осью его симметрии, ось Oz направим перпендикулярно к его дну, а ось Oy — перпендикулярно к плоскости xOz (фиг. 1).

Исходные уравнения двухмерного движения и неразрывности бурных потоков в водоводах с плоским наклонным дном даны в [4]

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial x}\cos\nu+g\sin\nu \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial y}\cos\nu \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x}+\frac{\partial(hv)}{\partial y}=0 \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем h — глубина воды, отсчитываемая по нормали ко дну, u, v — компоненты скорости V соответственно по осям Ox и Oy, а g — ускорение силы тяжести.

После несложных преобразований, с использованием условия отсутствия вихрей, легко доказать, что система дифференциальных уравнений (1.1)—(1.3) эквивалентна системе уравнений

$$(c^2-u^2)\frac{\partial u}{\partial x}-2uv\frac{\partial u}{\partial y}+(c^2-v^2)\frac{\partial v}{\partial y}=-gu\sin\nu \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{u^2+v^2}{2g}-x\sin\nu+h\cos\nu=\frac{u_0^2}{2g}+h_0\cos\nu \tag{1.6}$$

где u_0, h_0 — значение скорости и глубины в начальном сечении, а $c=\sqrt{gh\cos\nu}$ — скорость распространения слабых возмущений в наклонных каналах.

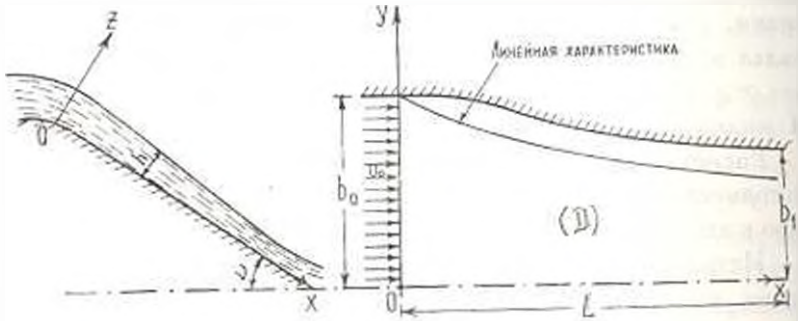
Во входном сечении водотока ($x=0$, $-b_0\leqslant y\leqslant b_0$) согласно постановке задачи имеем

$$u(0,\ y)=u_0=\text{const},\quad v(0,\ y)=0 \tag{1.7}$$

так как очертания боковых стенок являются линиями тока, то вдоль них выполняются условия

$$v(x,\ y_{ст})=u(x,\ y_{ст})\,\mathrm{tg}\,\delta \tag{1.8}$$

где δ — угол между касательной к стенке и осью Ox. Отметим, что по условию δ — величина малая.



Фиг. 1.

К этим условиям еще надо добавить условие симметричности течения

$$v(x,\ 0)=0 \tag{1.8*}$$

как дополнительное граничное условие.

Таким образом, решение поставленной прямой задачи свелось к нахождению решения смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений (1.4) и (1.5) (считается, что h в этих уравнениях исключено с помощью уравнения (1.6)) при начальных условиях (1.7) и граничных — (1.8), (1.8*), которая является корректной, так как система уравнений (1.4) и (1.5) при сверхкритическом режиме течения будет гиперболического типа.

2. Так как поток в области двухмерного течения по условию задачи слабо возмущен, то в этой области параметры течения u, v, h можно представить в виде асимптотических рядов

$$u(x, y, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, y) + \ldots \tag{2.1}$$

$$v(x, y, \varepsilon) = \varepsilon v_{(1)}(x, y) + \ldots \tag{2.2}$$

$$h(x, y, \varepsilon) = h_{(0)}(x) + \varepsilon h_{(1)}(x, y) + \ldots \tag{2.3}$$

где ε — малый параметр, который в рассматриваемой задаче характеризует порядок наклона очертания стенки (характерный наклон стенки).

Подставляя ряды (2.1), (2.2) и (2.3) в уравнение (1.1)—(1.3) и приравнивая в полученных уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных для определения членов разложения. В частности, для определения величин $u_{(1)}$, $v_{(1)}$, $h_{(1)}$ (первого приближения) получаем

$$(gh_{(0)}\cos\nu - u_{(0)}^2)\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} + gh_{(0)}\cos\nu\frac{\partial v_{(1)}}{\partial y} + gh_{(1)}\sin\nu +$$

$$+ (gh_{(1)}\cos\nu - 2u_{(0)}u_{(1)})\frac{du_{(0)}}{dx} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial u_{(1)}}{\partial y} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{u_{(0)}u_{(1)}}{g\cos\nu} + h_{(1)} = 0 \tag{2.6}$$

Уравнение нулевого приближения не выписали, так как получаются известные уравнения одномерного стационарного движения и их первый интеграл.

Подставляя в дифференциальное уравнение (2.4) вместо $\frac{du_{(0)}}{dx}$ его выражения из нулевого приближения, исключая затем величину $h_{(1)}$ с помощью (2.6), заменяя везде $\frac{u_{(0)}^2}{gh_{(0)}\cos\nu}$ числом Фруда $\mathrm{Fr}_{x(0)}$, а $h_{(0)} = h_{(0)}\left(\frac{\mathrm{Fr}_x}{\mathrm{Fr}_{x(0)}}\right)^{1/3}$ (Fr_x — значение $\mathrm{Fr}_{x(0)}$ при $x = 0$) и вводя потенциал по

(2.5) с учетом, что $u_{(1)} = \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial x}$, $v_{(1)} = \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial y}$, получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{2\mathrm{Fr}_{(0)} + 1}{(\mathrm{Fr}_{(0)} - 1)^2} \frac{tg^2}{h_{(0)}} \left(\frac{\mathrm{Fr}_{(0)}}{\mathrm{Fr}_{(0)}}\right)^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad (2.7)$$

Начальные (1.7) и граничные (1.8), (1.8*) условия для функции φ соответственно записываются в форме

$$\varphi(0, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(0, y)}{\partial x} = 0, \quad (0 \leq y \leq b_0) \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = akx^{k-1} u_{(0)}(x) \text{ при } y = y_{ст} \qquad (2.9а)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad (0 \leq x \leq L) \qquad (2.9б)$$

Очертание стенки и плоскости течения задается в форме $y_{ст} = b_0 + \varepsilon a x^k$, где $a = \mathrm{const} < 0$ подлежит подбору, k — произвольное, действительное, положительное число и также подлежит подбору.

Решение уравнения (2.7) вблизи характеристики

$$y = b_0 - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}}$$

ищем в виде лучевого решения

$$\varphi = A(x) f(\xi) \qquad (2.10)$$

где $\xi = y - b_0 + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}}$ — лучевая координата, а функция $f(\xi)$ удовлетворяет условию $f'(\xi) \gg f(\xi)$, то есть $f(\xi)$ — быстро изменяющаяся функция.

Переходя в уравнении (2.7) от переменных x, y к переменным x, ξ и подставляя в полученное уравнение вместо φ свое выражение из (2.10) и интегрируя полученное уравнение с учетом условия $f' \gg f$, получаем

$$A = \sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}} \; e^{-\frac{1}{2} \int_0^x B(x) dx} \qquad (2.11)$$

где

$$B^2 = \frac{2\mathrm{Fr}_{(0)} + 1}{(\mathrm{Fr}_{(0)} - 1)^2} \left(\frac{\mathrm{Fr}_{(0)}}{\mathrm{Fr}_{(0)}}\right)^{1/2} \frac{tg^2}{h_0}$$

Если провести из точки (x, y) в плоскости xOy характеристику $\xi = 0$, то в области (D) (фиг. 1) решение уравнения (2.7) при начальных условиях (2.8) и условии на оси x (2.9б) равно нулю [16], откуда следует

$$\varphi_{(D)}(x, y) = 0 \text{ при } \xi = 0 \tag{2.12}$$

Используя граничное условие (2.9а), условие на характеристике (2.12) и форму решения (2.10), получаем

$$f(\xi_{ст}) = ak \int_0^{\xi_{ст}} \frac{x_{ст}^{k-1} u_{(0)}}{A} d\xi_{ст}$$

где

$$\xi_{ст} = ax_{ст}^{k-1} + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}} \tag{2.13}$$

Так как мы рассматриваем ту часть течения, которая расположена вблизи характеристики $\xi = 0$, то функции $u_{(0)}$, A и $(\mathrm{Fr}_{(0)} - 1)^{1/2}$, входящие в подинтегральное выражение (2.13), можно разложить в ряды по степеням $x_{ст}$. Таким образом, получим ($\varepsilon \sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1} < 1$)

$$f(\xi_{ст}) = ak \int_0^{\xi_{ст}} x_{ст}^{k-1} [u_0 - (\beta - du_0) x_{ст}] d\xi_{ст} \tag{2.14}$$

$$x_{ст} = \sqrt{Fr_{(0)} - 1}\, \xi_{ст} \left(1 + \frac{\beta}{4} \frac{\xi_{ст}}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}} \right) \tag{2.15}$$

где

$$\beta = \left. \frac{du_{(0)}}{dx} \right|_{x=0}, \quad d = A'(0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1} + B_0^2 \right)$$

$$B_0 = B^2(0), \quad a = \left. \frac{d\mathrm{Fr}_{(0)}}{dx} \right|_{x=0}$$

Подставляя выражение $x_{ст}$ из (2.15) в (2.14) и выполняя некоторые простые вычисления, находим, что

$$f(\xi) = p\xi^k (1 + n\xi + m\xi^2), \quad p = au_0 (\mathrm{Fr}_{(0)} - 1)^{\frac{k-1}{2}}, \quad p = au_0 (\mathrm{Fr}_{(0)} - 1)^{\frac{k-1}{2}} \tag{2.16}$$

где

$$n = \frac{k}{k+1} \left[\frac{(k-1)\alpha}{4(\mathrm{Fr}_{(0)} - 1)^{1/2}} + \frac{\beta - du_0}{u_0} (\mathrm{Fr}_{(0)} - 1)^{1/2} \right], \quad m = \frac{k^2 \alpha (c - du_0)}{4(k+2)}$$

(так как вдоль каждой характеристики $\xi = \xi_{ст} = \mathrm{const}$, то замена в (2.16) $\xi_{ст}$ на ξ справедлива).

Введем новую функцию

$$F(\xi) = f(\xi) \text{ при } \xi > 0 \text{ и } F(\xi) = 0 \text{ при } \xi < 0 \tag{2.17}$$

Тогда для всех значений ξ можем написать, что

$$v_{(1)} = v_* = AF(\xi), \quad u_{(1)} = u_* = \frac{AF(\xi)}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}} \tag{2.18}$$

Заменяя в полученном линейном решении (2.18) характеристическую переменную ξ через нелинейную переменную ζ, предложенную Витемом [6], получим решение нелинейного дифференциального уравнения (уравнение коротких волн), которое имеет место вблизи характеристики $\zeta = 0$. Обоснование сказанного приведем в нижеизложенном материале.

3. Уравнение характеристик двухмерных сверхкритических потоков записываются в форме [4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv \pm c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{u^2 - c^2} \tag{3.1}$$

Подставляя в это выражение вместо u, v, h соответственно асимптотические ряды (2.1), (2.2), (2.3) и производя некоторые несложные вычисления, находим

$$\frac{dy_{\text{хар}}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}}\left[1 - \varepsilon\frac{\mathrm{Fr}_{(0)}}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}}\left(\frac{2 + \mathrm{Fr}_{(0)}}{2\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}}\frac{u_{(1)}}{u_{(0)}} + \frac{v_{(0)}}{u_{(0)}}\right) + \ldots\right] \tag{3.2}$$

(Рассматриваем только семейство характеристик, которое вытягивается вниз по течению).

Подставляя в уравнение (3.2) вместо $u_{(1)}$ и $v_{(1)}$ полученное решение (2.10) с учетом обозначения (2.14), получаем уравнение семейства характеристик, идущих вниз по течению и расположенных вблизи линейной характеристики $\xi = 0$

$$\frac{dy_{\text{хар}}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{(0)} - 1}}\left[1 - \varepsilon\frac{3\mathrm{Fr}_{(0)}}{2(\mathrm{Fr}_{(0)} - 1)}\frac{AF}{u_{(0)}} + O(\varepsilon^2)\right] \tag{3.3}$$

Из уравнения (3.3) видно, что последующие характеристики, принадлежащие рассматриваемому семейству, идут вниз по течению более круто, чем предыдущие. Последнее явление обычно приводит к пересечению характеристик одного и того же семейства, то есть к суммированию (наложению) элементарных волн повышения, что приводит к образованию косого гидравлического прыжка: слабого или сильного в зависимости от степени сужения.

Выведем те соотношения, которые выполняются при переходе через прыжок для наклонных русел. Эти соотношения в [4] выведены для горизонтального русла при предположении, что поток перед прыжком направлен параллельно оси водовода.

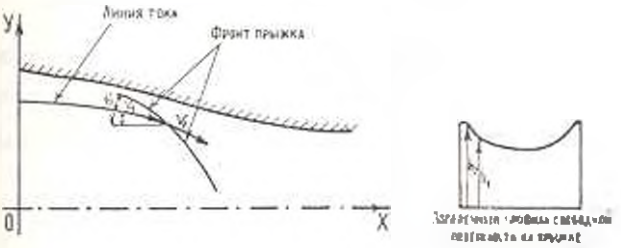
Записывая уравнения (1.1) — (1.3) в дивергентной форме, можно оттуда легко получить уравнения сохранения на прыжке (фиг. 2)

$$h_1 v_{n1} = h_2 v_{n2} \tag{3.4}$$

$$h_1 v_{n1}^2 + \frac{gh_1^2}{2}\cos\gamma = h_2 v_{n2}^2 + \frac{gh_2^2}{2}\cos\gamma \tag{3.5}$$

$$v_{t1} = v_{t2} \tag{3.6}$$

Здесь и в дальнейшем индексом 1 обозначаются значения рассматриваемых величин перед прыжком, а индексом 2 — значения тех же величин непосредственно за прыжком.



Фиг. 2.

Если обозначить через ε угол между фронтом прыжка и вектором скорости $\vec{v}_1$, а через γ угол между $\vec{v}_1$ и осью Ox, то можно показать [4], что

$$\sin^2\varepsilon = \frac{\eta}{2\mathrm{Fr}_{n1}}(1+\eta), \qquad \left(\eta = \frac{h_2}{h_1}\right) \tag{3.7}$$

Так как в рассматриваемом случае прыжок слабый, то его амплитуда будет малой, то есть

$$\eta = 1 - \delta \qquad (\delta \text{ — мало}) \tag{3.8}$$

Выражая в уравнении (3.7) η через δ, получаем

$$\sin\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{n1}}}\left(1 + \frac{3}{4}\delta + 0(\delta^2)\right) \tag{3.9}$$

Отсюда и из (3.8) находим, что

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{n1}-1}}\left(1 - \varepsilon\frac{3}{4}\frac{\mathrm{Fr}_{n1}}{\mathrm{Fr}_{n1}-1}\frac{u_{(1)2}-u_{(1)1}}{u_{(0)}}\mathrm{Fr}_{n(0)} + 0(\varepsilon^2)\right) \tag{3.10}$$

Из рисунка (2) видно, что

$$\frac{dy_{\text{пр}}}{dx} = \mathrm{tg}(\varepsilon+\gamma) = \mathrm{tg}\,\varepsilon + \frac{\gamma}{\cos^2\varepsilon} + \ldots, \quad \gamma = \frac{v_{(1)}}{u_{(0)}} \tag{3.11}$$

γ — величина малая, так как канал сужается слегка (линии тока слабо искривлены). Из равенств (3.10), (3.11) следует, что

$$\frac{dy_{\text{пр}}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{Fr_{v1}-1}}\left(1 - \varepsilon\frac{3}{4}\frac{Fr_{v1}}{Fr_{v1}-1}\frac{u_{(1)2}-u_{(1)1}}{u_{(0)}}Fr_{v(0)}\right) +$$

$$+ \varepsilon\frac{v_{(1)1}}{u_{(0)}\cos^3\vartheta} + 0(\varepsilon^2) \qquad (3.12)$$

Используя выражения Fr_v и разложения (2.1)—(2.3), легко получить, что

$$Fr_v = Fr_{v(0)}\left[1 + \varepsilon\frac{u_{(1)}}{u_{(0)}}\left(2 + Fr_{v(0)}\right) + \ldots\right]$$

Заменяя в уравнении (3.12) $\cos^3\vartheta$, Fr_{v1} своими асимптотическими разложениями и подставляя вместо $u_{(1)1}$, $u_{(1)2}$, $v_{(1)1}$ выражения (2.18), получим дифференциальное уравнение слабого прыжка (стационарной волны конечной амплитуды)

$$\frac{dy_{\text{пр}}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{Fr_{v(0)}-1}}\left[1 - \varepsilon\frac{3}{4}\frac{Fr^2_{v(0)}}{(Fr_{v(0)}-1)^2}\frac{A}{u_{(0)}}\left(F_2 + F_1\right) + 0(\varepsilon^2)\right] \qquad (3.13)$$

Из уравнений (3.3) и (3.16) видно, что $\frac{dy_{\text{пр}}}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy_{\text{хар}1}}{dx} + \frac{dy_{\text{хар}2}}{dx}\right)$, то есть наклон слабого прыжка в открытых водоводах с любым продольным уклоном дна равен среднему арифметическому значений наклона характеристики перед и за прыжком, что в газовой динамике показано в [17].

4. Интегрируя уравнение (3.3) семейства нелинейных характеристик, рассматривая ξ как параметр (вдоль каждой характеристики $\xi = \text{const}$) и используя уравнение стенки и соотношение (2.16), получаем

$$y_{\text{хар}} = b_0 - \varepsilon\alpha\left(Fr_{v0}-1\right)^{\frac{k}{2}}\xi^k\left(1 + \frac{\alpha k}{4\sqrt{Fr_{v0}-1}}\xi\right) - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{Fr_{v(0)}-1}} + \qquad (4.1)$$

$$+ \xi\left(1 + \frac{\alpha}{4}\frac{1}{\sqrt{Fr_{v0}-1}}\xi\right) + \left[\psi(x) + \lambda^2\frac{Fr^2_{v(0)}}{(Fr_{v0}-1)^2}\xi\left(1 + \frac{\alpha}{4}\frac{1}{\sqrt{Fr_{v(0)}-1}}\xi\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\xi^{k-1}\left(1 - \frac{k+1}{k}n\xi + \frac{k+2}{k}m\xi^2\right)\right]$$

где

$$\psi(x) = -\lambda^2\int_0^x \frac{Fr^2_{v(0)}}{(Fr_{v(0)}-1)^2}\frac{A}{u_{(0)}}dt, \qquad \lambda^2 = -\varepsilon\frac{3}{2}kp$$

Определим место образования огибающей семейства характеристик (4.1), то есть где возникает неоднозначность решения (начало образования прыжка или разрыва параметров течения) в зависимости от форм стенок водотока.

Отметим, что задача определения формы плановых очертаний боковых стенок сужающегося водотока (переходный участок на быстротоке, водослив и т. д.), которая обеспечивала бы гидравлически рациональный режим течения, то есть минимально возможную высоту стационарных волн и косых прыжков, более или менее равномерного распределения удельного расхода в концевом сечении, сводится к решению обратной задачи.

Для значений $k < 2$, в уравнении (4.1) оставляя члены порядка не выше ξ и записывая условия для огибающей, находим, что

$$\xi = \left| \frac{1}{(1-k)\varphi(x)} \right|^{1/(k-1)} \tag{4.2}$$

Отсюда видно, что $\xi = O(x^{(2-k)/(k-1)})$. Следовательно, для значений $1 < k < 2$ огибающая образуется в точке $(0, b_0)$ (фиг. 3). Подставляя значение ξ из (4.2) в упрощенное уравнение характеристик, найдем уравнение огибающей

$$y_{\text{ог}} = b_0 - \left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{\text{ин}} - 1}} - \frac{k-2}{k-1} \right] (1-k)\varphi(x) \Big|^{1/(k-1)} \tag{4.3}$$

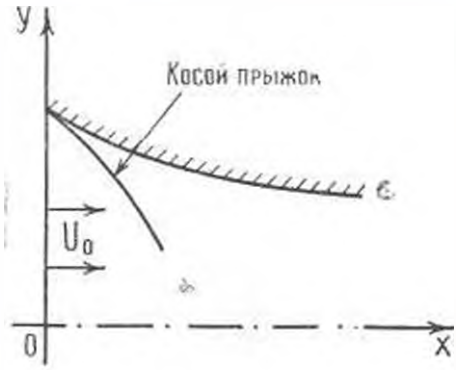
Фиг. 3.

Для значений $k \leq 1$, как видно из (4.2), огибающая характеристик не существует, но эти характеристики пересекаются с линейной характеристикой $\xi = 0$, что обусловливает возникновение прыжка в точке $(0, b_0)$ (фиг. 4).

В случае $k = 2$, оставляя в уравнении характеристик члены порядка не выше ξ^2 и дифференцируя упрощенное уравнение (4.1) по ξ, получаем

$$\xi = -\frac{2}{\varphi}(1+\varphi) \sqrt{\mathrm{Fr}_{\text{ин}} - 1} \tag{4.4}$$

В этом случае огибающая возникает в точке x, для которой $\xi = -1$, и описывается уравнением (фиг. 5)



Фиг. 4.

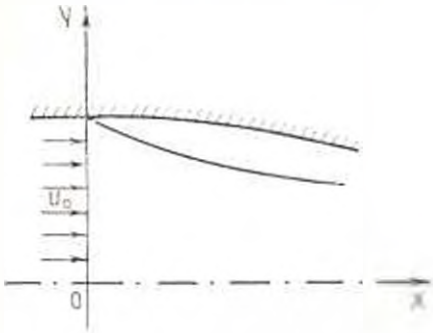
$$y_{\infty} = b_0 - \int_{\xi}^{\xi} \frac{dt}{\sqrt{Fr_{\infty} - 1}} - \frac{1}{2}\sqrt{Fr_{\infty} - 1}\,(1 + \xi)^2 \tag{4.5}$$

Для значений $k > 2$, оставляя в уравнении (4.1) члены того же порядка малости, что и при $k < 2$, придем к уравнению (4.2). Следовательно, при $k > 2$ на первой характеристике прыжок не возникает (фиг. 6). Из сделанного анализа следует, что гидравлически рациональное очертание стенки при задании его начального участка уравнением (2.8) получается для значений $k > 2$. Таким образом, можно утверждать, что невозможно создать такую форму сходящихся плановых очертаний для короткого участка водотока, при которой исключались бы образования стационарных волн конечной амплитуды (слабые прыжки) и обеспечивался равномерный режим в выходном сечении.

Фиг. 5.

Отметим, что исследование течения в водотоке для различных форм стенок является одним из приближенных методов решения обратной задачи. Нахождение оптимальных форм плановых очертаний открытого сужающегося водовода в строгой постановке сводится к решению вариационной задачи [18].

Получим уравнение слабого прыжка в общем случае, то есть когда поток перед и за прыжком возмущен.



Фиг. 6.

Перепишем уравнение (4.1) семейства характеристик, идущих вниз по течению в форме

$$y_{\text{хар}} = b_0 - \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{\text{кр}} - 1}} + f(x)F(\xi) - \xi, \quad f(x) = \frac{1}{kp}\varphi(x) \tag{4.6}$$

(В уравнении (4.6) оставлены члены не выше порядка ξ).

Обозначим через ξ_1 значение ξ непосредственно перед прыжком, а через ξ_2 — значение ξ непосредственно после прыжка. Тогда приравнивая значение y на характеристиках в точках их пересечения с прыжковой волной, получаем

$$f(x)[F(\xi_2) - F(\xi_1)] = \xi_2 - \xi_1 \tag{4.7}$$

Как и в газовой динамике [20] можно показать, что имеет место закон площадей, то есть

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1)[F(\xi_1) + F(\xi_2)] \tag{4.8}$$

Подставляя в уравнения (4.7) и (4.8) вместо $f(x)$ и $F(x)$ свои выражения, получаем систему трансцендентных алгебраических уравнений для определения значений ξ_1 и ξ_2

$$\varphi(x)\xi_1^{k-2}\left[\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{k-1} - 1\right] = 1 - \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

$$\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^k - 1 = \frac{k}{2}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - 1\right)\left[\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{k-1} + 1\right] \tag{4.9}$$

Подставляя найденные значения ξ_2 и ξ_1 в уравнение характеристик (4.6), получим уравнение прыжка.

В частном случае, когда $k < 2$ и впереди ударной волны нет возмущений ($\xi_1 < 0$), формулы (4.7), (4.8) с использованием (2.17) дают

$$2\int_{\xi_2}^{\xi_1} F(\xi)\,d\xi = -f(x)\,F^{-1}(\xi_2) \quad (F(\xi) < 0) \tag{4.10}$$

Подставляя в (4.10) $F(\xi)$ из (2.16), получаем

$$\xi_2 = \left[-\frac{k}{2}\varphi(x)\right]^{1/2-k} \tag{4.11}$$

Отсюда, как и из закона площадей, видно, что косой гидравлический прыжок образуется на первой характеристике при $k < 2$, причем для $k = 2$ надо взять в (2.21) полное выражение.

Из (4.11) и (4.6) получаем уравнение прыжка для $k < 2$ (фиг. 3)

$$y_{\text{пр}} = b_0 - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{x(0)} - 1}} - \left(\frac{2}{k} - 1\right)\left[-\frac{k}{2}\varphi(x)\right]^{1/2-k} \tag{4.12}$$

При $1 < k < 2$ кривая (4.12) вогнута в сторону оси Ox, что согласуется с данными эксперимента, приведенными в [4].

5. Выведем уравнение коротких волн и покажем, что лучевое решение (2.14), в котором характеристическая переменная заменена через нелинейную переменную ξ, является решением полученного уравнения и тем самым обоснуем метод Витема [6] в нашем случае.

Для общности получим уравнение коротких волн при наличии малой дисперсии. Уравнение движения для наклонных русел выводится методом, примененным в [19] для случая горизонтального русла. Опуская промежуточные выкладки из-за недостатка места, приведем окончательное уравнение Буссинеска для наклонных русел при нестационарном режиме

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla h \cdot \vec{V} + h\nabla \cdot \vec{V} - \frac{h^3}{3}\Delta(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \tag{5.1}$$

при этом уравнения движения соответственно отличаются от (1.1) и (1.2) только нестационарными членами $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$. В дальнейшем ограничимся случаем стационарного движения и в силу малости дисперсии линеаризируем дисперсионный член.

Вводя лучевую переменную ξ и переходя в уравнении (1.1), (1.2) и (5.1) от координат (x, y) к координатам (x, ξ), получаем

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \chi'\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + v\frac{\partial u}{\partial \xi} = g\sin\alpha - g\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \chi'\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)\cos\alpha \tag{5.2}$$

$$u\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\gamma'\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)+v\frac{\partial v}{\partial \xi}=-g\frac{\partial h}{\partial \xi}\cos\nu \tag{5.3}$$

$$h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma'\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)+(v+\gamma' u)\frac{\partial h}{\partial \xi}+u\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} \tag{5.4}$$

где

$$\gamma'(x)=\int_0^x\frac{dl}{\sqrt{Fr_{(0)}-1}}$$

Решение этих уравнений ищем в форме

$$u(x,\xi)=u_{(0)}(x)+\bar{u}(x,\xi),\quad v(x,\xi)=\bar{v}(x,\xi),\quad h(x,\xi)=h_{(0)}(x)+\bar{h}(x,\xi) \tag{5.5}$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{h}$ малы и необязательно, чтобы все они имели одинаковый порядок малости.

Подставляя выражения u, v, h в уравнение (5.2)—(5.4), отбрасывая в первых двух из них члены $\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\bar{u}_{(0)}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$, а в третьем — члены $\bar{h}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\bar{u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$, имеющие более высокий порядок малости, чем остальные члены и учитывая уравнения нулевого приближения, получаем

$$u_{(0)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\gamma' u_{(0)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+\bar{u}\frac{du_{(0)}}{dx}+\gamma' u_{(0)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}=-g\left(\frac{dh_{(0)}}{dx}+\gamma'\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}\right)\cos\nu \tag{5.6}$$

$$u_{(0)}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}-\gamma' u_{(0)}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}-u\gamma'\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}=-g\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}\cos\nu \tag{5.7}$$

$$h_{(0)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\gamma' h_{(0)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+h_{(0)}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}+\bar{h}\frac{du_{(0)}}{dx}+\gamma'\bar{h}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+\bar{h}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}+\bar{v}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}+$$

$$+\bar{v}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}+\gamma' u_{(0)}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}+\gamma'\bar{u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}+u_{(0)}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}+\bar{u}\frac{dh_{(0)}}{dx}=\frac{h_{(0)}^3}{6}\frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \xi^3} \tag{5.8}$$

Приравнивая в этих уравнениях члены наименьшего порядка малости (члены, содержащие производные $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}$ линейно) и интегрируя выписанные уравнения, получим алгебраические уравнения, из которых находим, что

$$\bar{h}=-\frac{u_{(0)}\bar{u}}{g\cos\nu},\qquad \bar{v}=\frac{\bar{u}}{\gamma'} \tag{5.9}$$

Заменяя в уравнениях (5.6)—(5.8) в членах, содержащих производные по x, и в нелинейных членах $\bar{h}$, $\bar{v}$ своими выражениями из (5.9), подставляя из полученных первых двух уравнений $\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}$ в третье и используя уравнение нулевого приближения, получаем уравнение коротких волн

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{3\mathrm{Fr}_{(0)}}{2(\mathrm{Fr}_{(0)}-1)^2}\frac{\bar{u}}{u_{(0)}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{7\mathrm{Fr}_{(0)}-2}{4(\mathrm{Fr}_{(0)}-1)^2}\frac{(g\cos\alpha)}{h_{(0)}}\bar{u} = \frac{h^2_{(0)}}{6}\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \xi^3} \qquad (5.10)$$

Учитывая формулу (2.18) для лучевого решения, можно (5.10), после отбрасывания дисперсионного члена, записать в форме

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{3\mathrm{Fr}^2_{(0)}}{2(\mathrm{Fr}_{(0)}-1)^2}\frac{\bar{u}}{u_{(0)}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{u}\frac{\partial \ln u_{(0)}}{\partial x} = 0 \qquad (5.11)$$

Из уравнения (5.11) сразу следует правило Витема, использованное в п. 2.

Упрощенные нелинейные уравнения для установившегося движения произвольной недиссипативной среды, описывающие окрестность слабых разрывов, можно получить методом [12], причем выбирая ось $\tau = x_1 = x$ по нормали к волне линейной задачи, ось $x_2 = y$ по лучу, проходящему через фиксированную точку, например, точку касания волн, ось $x_3 = z$ по нормали к (x_1, x_2), можно получить указанные уравнения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} - u\frac{d\ln\Phi}{dx_2} - \frac{1}{2}\frac{\Delta_{,2}}{\Delta}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{(\gamma+1)u}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial x_{3,4}}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - u$$

где u есть возмущенное значение нормальной к волне скорости среды, Φ — лучевое решение, $\Delta = 0$, $\Delta = \alpha V_x + \beta V_y + \gamma V_z - c_n\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ есть характеристическое уравнение в линейной задаче, $(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{grad}\,\tau$ есть вектор нормали к линейной волне, c_n — ее нормальная скорость (V_x, V_y, V_z) — скорость среды перед волной, причем в нелинейной задаче нормальная скорость волны в первом порядке $C_n = c_n + \gamma u$, смысл $u_{(0)}$ легко выясняется из проекций уравнений движения на направление x_1.

Институт механики АН Армянской ССР
НИИ Водных проблем и гидротехники

Поступила 15 VII 1974

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Գ. Ս. ԲԵԶԻՐԳԱՆՅԱՆ

ՎԵՐԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՀՈՍՔԻ ՄՈՄՈՒՄՏԱԿԱՆԻՐԱՎԻՃԱԿԻ ԿՈՆՅՈՒԳԱՑՈՒՄ ՏԵՍՔ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ԵՐԱՆՅԱԿԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ ԲԱՑ ՉՐԱՏԱՐՈՒՄ

Ամփոփում է բրգաձևական անսեղմելի հեղուկի կայունացած վերկրիտիկական շարժումը բաց ջրատարում: Դիտարկվում է բնորոշում ոչ գծային, բնութագրիչների համատարումը, և որոշվում են այն պայմանները, որոնք տեղի ունեն թեք ջրատարում առաջացած թռիչքի շրջակայքում: Որոշվում է ոչ գծային լուծումը գծային բնութագրիչի շրջակայքում, գծային լուծումում բնութագրիչ փոփոխա-

կանը ոչ գծային փոփոխականով փոխարինելու մեթոդով։ Ուսումնասիրվում են թռիչքի առաջացման պայմանները՝ կախված նեղացող ջրատարի պատերի տեսքից, և բերվում է ոչ գծային լուծման հիմնավորումը։

ON INVESTIGATION OF SUPERCRITICAL FLOW IN A CONFUSOR SHAPE OPEN CHANNEL OF ARBITRARY SLOPE

A. G. BAGDOEV, G. S. BESIRGANIAN

S u m m a r y

The supercritical steady flow of incompressible ideal fluid in an open channel is considered. The equation of non-linear characteristics is derived and the conditions on the hydraulic jump in an inclined channel are determined. The method of substitution in the linear solution of the characteristic variable by the non-linear one is used to find a non-linear solution in the proximity of linear characteristic. The jump formation, depending upon the wall shape of a narrowing channel, is examined. The validity of the correctness of the non-linear solution obtained is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиргидов А. Д.* Движение жидкости по криволинейным поверхностям с постоянной глубиной. Изв. КНИИТ, т. 78, 1965.
2. *Гиргидов А. Д.* Расчет криволинейной поверхности дна в безнапорных водопропускных сооружениях. Автореферат, АПИ им. Калинина, 1966.
3. *Ippen A. T., Dawson J. H.* Design of channel constractions. Transactions of ASCE, vol. 116, 1951.
4. *Емцев Б. Т.* Двухмерные бурные потоки. Изд. „Энергия", М., 1967.
5. *Островский А. А., Пелиновский Е. Н.* Динамика нелинейных волн в береговой зоне океана. VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Цахкадзор, 1973.
6. *Лайтхилл М. Дж.* Высшие приближения. Сб. „Общая теория аэродинамики больших скоростей", М., 1962.
7. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, т. 22, № 5, 1958, стр. 586–59[illegible].
8. *Березин О. А., Грой А. А.* Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, № 2, 1960, стр. 31–39.
9. *Шиндяпин Г. Н.* О регулярном отражении слабых ударных волн. Сб. „Трансзвуковые течения газа", под ред. А. В. Фальковича. Изд. СГУ, 1964.
10. *Рыжов О. С.* Затухание стационарных волн в неоднородных средах. ПМТФ, № 1, 1962.
11. *Шефтер Г. М.* Уст[illegible] и [illegible]ности при распространении импульсов в неоднородной [illegible] жидкости. ПММ, т. 33, № 1, 196[illegible], стр. 162–168.
12. *Багдоев А. Г., Данелян Э. Н.* Исследование течения среды в присутствии тонкого насыпного ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Журнал вычислит. математики и математич. физики, т. 12, № [illegible], 1[illegible].
13. *Минасян М. М.* О распространении слабых [illegible] в магнитной [illegible]

мике. Докл. АН Арм. ССР, т. LV, №5, 1972.
14. *Багдоев А. Г.* Определение нелинейных уравнений движения среды в окрестности точки касания ударных волн. Докл. АН Арм. ССР, т. 52, №4, 1971.
15. *Орлов В. Т.* Резкоизменяющееся движение жидкости в русле с переменным уклоном дна. Тр. координационных совещ. по гидротехнике, вып. 52. Изд. „Энергия", Ленинградское отд., 1969.
16. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Изд. „Мир", М., 1964.
17. *Курант Р., Фридрихс О.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ., М., 1950.
18. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, т. 28, вып. 2, М., 1964, стр. 280—285.
19. *Карман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Изд. „Наука", М., 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

А. Д. ХАНЖОВ

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Получено решение плоской задачи термоупругости для полубесконечной ортотропной пластинки со смешанными температурными и механическими условиями на границе.

Используется метод интегральных преобразований Фурье, позволяющий свести задачу определения поля температур и напряжений к парным интегральным уравнениям, имеющим известное решение.

Рассмотрим теплоизолированную по боковым поверхностям тонкую пластинку, отнесенную к прямоугольной системе координат x, y. На свободном от внешней нагрузки участке границы $|x| < a$ задан постоянный тепловой поток F, а на остальном закрепленном участке $|x| > a$ поддерживается нулевая температура. Касательные напряжения τ_{xy} на всей границе пластинки отсутствуют.

Полагаем, что материал пластинки однороден и ортотропен в отношении упругих и тепловых свойств; главные направления упругой и тепловой симметрии совпадают с осями координат; тепловые и механические характеристики материала от температуры не зависят.

Задача термоупругости для ортотропной пластинки сводится к решению системы уравнений [1]

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y - \alpha_1 T) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y - \alpha_2 T) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} a_{66}\tau_{xy}$$

со следующими граничными условиями:

$$-k_2 \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = F \quad (|x| < a), \quad T(x, 0) = 0 \quad (|x| > a) \tag{3}$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (|x| < a), \quad v(x, 0) = 0 \quad (|x| > a)$$

Здесь T — температура, k_1, k_2 и α_1, α_2 — коэффициенты теплопроводности и температурные коэффициенты линейного расширения в направлении осей x, y. Другие обозначения являются общепринятыми [2]

Применяя к уравнениям (1), (2) интегральное преобразование Фурье [3] по переменной x и предполагая, что температура, напряжения и производные от этих величин на бесконечности равны нулю, находим выражения трансформант температуры и напряжений

$$\overline{T}(\xi, y) = Ae^{-\alpha_1|\xi|y} \tag{4}$$

$$\overline{\sigma}_x(\xi, y) = Be^{-\alpha_2|\xi|y} + Ce^{-\alpha_3|\xi|y} + G_1 s_1 \overline{T} \tag{5}$$

$$\overline{\tau}_{xy}(\xi, y) = \frac{1}{i\xi}\frac{d\overline{\sigma}_x(\xi, y)}{dy}, \quad \overline{\sigma}_y(\xi, y) = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d^2\overline{\sigma}_x(\xi, y)}{dy^2} \tag{6}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$s_1 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad s_2, s_3 = \left\{(2a_{12})^{-1}[(2a_{12} + a_{22}) \pm \sqrt{(2a_{12} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22}}]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$G_n = \frac{s_j s_k^2 - s_k}{a_{11}(s_j - s_k)s_n^2(s_j - s_k)s_n}, \quad n = 1, 2, 3 \begin{cases} j = 2, \ k = 3 \text{ при } n = 1 \\ j = 3, \ k = 1 \text{ при } n = 2 \\ j = 1, \ k = 2 \text{ при } n = 3 \end{cases}$$

причем

$$(2a_{12} + a_{22})^2 > 4a_{11}a_{22}$$

Постоянные интегрирования A, B и C определяются из граничных условий.

Применяя теорему обращения для преобразования Фурье к выражению (4) и дифференцируя результат по y, удовлетворим первым двум граничным условиям (3). Таким образом, учитывая четность функции $\overline{T}$ по переменной x, приходим к парным интегральным уравнениям

$$\begin{gathered} \int_0^\infty \frac{d\overline{T}(\xi, 0)}{dy}\cos x\xi d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{F}{k_2}, \quad 0 < x < a \\ \int_0^\infty \overline{T}(\xi, 0)\cos x\xi d\xi = 0, \quad x > a \end{gathered} \tag{7}$$

Если ввести новые переменные $t = x/a$, $z = a\xi$, то уравнения (7) с учетом соотношения

$$\cos x\xi = \sqrt{\frac{\pi x\xi}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x\xi) \tag{8}$$

можно записать в виде

$$\int_0^\infty z g(z) J_{-\frac{1}{2}}(\eta z)\, dz = h(\eta), \quad 0 < \eta < 1 \tag{9}$$

$$\int_0^\infty g(z) J_{-\frac{1}{2}}(\eta z)\, dz = 0, \quad \eta > 1$$

где

$$g(z) = \sqrt{z}\, A, \qquad h(\eta) = \frac{F a^2}{k_2 s_1 \sqrt{\eta}} \tag{10}$$

$J(\eta z)$ — функция Бесселя первого рода.

Решением уравнений (9) является функция [3]

$$g(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \int_0^1 \eta^{\frac{3}{2}} J_0(z\eta)\, d\eta \int_0^1 h(\eta\mu)\, \mu^{\frac{1}{2}} (1-\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\mu \tag{11}$$

Возвращаясь к старым переменным, из формул (10), (11) после вычисления интегралов получим

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Fa}{k_2 s_1^2} J_1(a)$$

Из интегрально преобразованного граничного условия $\bar{\tau}_{xy} = 0$ и формул (5), (6) находим

$$C = -\frac{k_2}{s_2} B - G_1 \frac{s_1^2}{s_2} A \tag{12}$$

Для определения постоянной B воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_x - a_{12}\sigma_y + \alpha_1 T, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\tau_{xy}$$

из которых после применения интегральных преобразований к ним найдем

$$\bar{v} = \frac{a_{11} - a_{12}}{s^2} \frac{d\bar{\sigma}_x}{dy} - \frac{a_{12}}{s^2} \frac{d^2\bar{\sigma}_y}{dy^2} - \frac{\alpha_1}{s^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{13}$$

Применяя теорему обращения для преобразования Фурье к выражениям (5), (13) и удовлетворяя последним двум граничным условиям (3), приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty \bar{\tau}_y(\xi, 0)\cos x\xi d\xi = 0 \quad 0 < x < a$$

$$\int_0^\infty \bar{v}(\xi, 0)\cos x\xi d\xi = 0 \quad x > a \tag{14}$$

которые в новых переменных с учетом (8), (12) сводятся к уравнениям типа (9)

$$\int_0^\infty z f(z) J_{-\frac{1}{2}}(\iota z)\, dz = H(\iota), \quad 0 < \iota < 1$$

$$\int_0^\infty f(z) J_{-\frac{1}{2}}(\iota z)\, dz = 0, \quad \iota > 1 \tag{15}$$

где

$$\bar{\tau}_y(\xi, 0) = \frac{s_1 - s_2}{s_3}\left(B + G_1 s_1 \frac{s_3 - s_1}{s_3 - s_2} A \right)$$

$$\bar{v}(\xi, 0) = \frac{a_{11}}{\xi} s_1(s_3^2 - s_2^2)\left(B - G_2 s_1 A \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}(B - G_2 s_1 A), \qquad G_2 = \frac{s_3 a_{11} + G_1 s_1(s_3^2 - s_1^2)}{s_1(s_2^2 - s_3^2)} \tag{16}$$

$$H(\iota) = \sqrt{\frac{2}{\pi\iota}}\left(G_1 s_1 \frac{s_3 - s_1}{s_2 - s_3} + G_2 s_1 \right)\int_0^\infty A \cos \iota z dz$$

Последнее выражение после вычисления интеграла при $0 < \iota < 1$ и с учетом тождества

$$\sum_{n=1}^{3} G_n s_n = 0$$

принимает вид

$$H(\iota) = \frac{F a^2 s_1}{k_2(s_2 - s_3)}\sqrt{\frac{1 - \iota^2}{\iota}} \sum_{n=1}^{3} G_n \tag{17}$$

Используя решение уравнений (15) в форме (11), из формул (16), (17) находим

$$B=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{Fa^2 s_1 s_2}{k_2(s_2-s_3)}\sum_{n=1}^{3}G_n\int_0^1\eta\, J_0(a\xi\eta)\,d\eta\int_0^1\sqrt{\frac{1-\eta^2\mu^2}{1-\mu^2}}\,d\mu-G_2 s_1 A$$

Подставляя значения A, B и C в выражения (4), (5), (6) и пользуясь теоремой обращения для преобразования Фурье, находим распределение температур и напряжений в пластинке

$$T(x,y)=\frac{F}{k_2 s_1}\left(\sqrt{r_1\rho_1}\cos\omega_1-y s_1\right)$$

$$\sigma_x(x,y)=-\frac{2Fs_2 s_3}{\pi k_2(s_2-s_3)}\sum_{n=1}^{3}G_n\Bigg|-\frac{a s_2 R_2}{\sqrt{r_2\rho_2}}\cos\Omega_2+$$

$$+s_2\sqrt{r_2\rho_2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_2\right)\cos\omega_2+\frac{s_2\sqrt{r_2\rho_2}}{2}\ln\frac{\rho_2}{r_2}\sin\omega_2+\frac{a s_3 R_3}{\sqrt{r_3\rho_3}}\cos\Omega_3-$$

$$-s_3\sqrt{r_3\rho_3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_3\right)\cos\omega_3-\frac{s_3\sqrt{r_3\rho_3}}{2}\ln\frac{\rho_3}{r_3}\sin\omega_3\Bigg|-$$

$$-\frac{F}{k_2}\sum_{n=1}^{3}G_n s_n\left(\sqrt{r_n\rho_n}\cos\omega_n-y s_n\right)$$

$$\sigma_y(x,y)=\frac{2F}{\pi k_2(s_2-s_3)}\sum_{n=1}^{3}G_n\Bigg|-\frac{a s_3 R_2}{\sqrt{r_2\rho_2}}\cos\Omega_2-$$

$$+s_3\sqrt{r_2\rho_2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_2\right)\cos\omega_2+\frac{s_3\sqrt{r_2\rho_2}}{2}\ln\frac{\rho_2}{r_2}\sin\omega_2+\frac{a s_2 R_3}{\sqrt{r_3\rho_3}}\cos\Omega_3-$$

$$-s_2\sqrt{r_3\rho_3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_3\right)\cos\omega_3-\frac{s_2\sqrt{r_3\rho_3}}{2}\ln\frac{\rho_3}{r_3}\sin\omega_3\Bigg|+$$

$$+\frac{F}{k_2}\sum_{n=1}^{3}G_n\sqrt{r_n\rho_n}\cos\omega_n$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\frac{2Fs_2 s_1}{\pi k_2(s_2-s_3)}\sum_{n=1}^{3}G_n\Bigg|\frac{aR_2}{\sqrt{r_2\rho_2}}\sin\Omega_2-$$

$$-\sqrt{r_2\rho_2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_2\right)\sin\omega_2+\frac{\sqrt{r_2\rho_2}}{2}\ln\frac{\rho_2}{r_2}\cos\omega_2-\frac{aR_3}{\sqrt{r_3\rho_3}}\sin\Omega_3+$$

$$+\sqrt{r_3\rho_3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_3\right)\sin\omega_3-\frac{\sqrt{r_3\rho_3}}{2}\ln\frac{\rho_3}{r_3}\cos\omega_3\Bigg|-$$

$$-\frac{F}{k_2}\sum_{n=1}^{3} G_n s_n \sqrt{r_n \rho_n}\ \sin\omega_n$$

где

$$R_n = \sqrt{y^2 s_n^2 - x^2}, \qquad r_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + (x-a)^2}, \qquad \rho_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + (x+a)^2}$$

$$\Omega_n = \theta_n - \frac{1}{2}(\varphi_n + \psi_n), \qquad \omega_n = \frac{1}{2}(\varphi_n + \psi_n), \qquad \xi_n = \frac{2ays_n}{a^2 - y^2 s_n^2 - x^2}$$

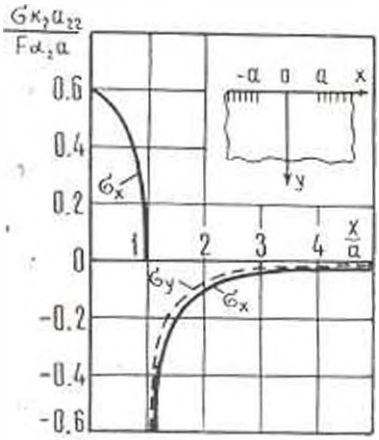
$$\cos\theta_n = \frac{ys_n}{R_n}, \qquad \cos\varphi_n = \frac{ys_n}{r_n}, \qquad \cos\psi_n = \frac{ys_n}{\rho_n}$$

$$\sin\theta_n = \frac{x}{R_n}, \qquad \sin\varphi_n = \frac{x-a}{r_n} \qquad \sin\psi_n = \frac{x+a}{\rho_n}$$

На фиг. 1 приведены графики распределения безразмерных напряжений вдоль прямолинейной границы пластинки. Численный расчет проводился для пластинки, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ-В, для которого постоянные равны [4]

$$a_{11} = 4.69\cdot 10^{-11}\,м^2/н, \quad a_{22} = 8.26\cdot 10^{-11}\,м^2/н, \quad a_{12} = -0.898\cdot 10^{-11}\,м^2/н$$

$$a_{66} = 49\cdot 10^{-11}\,м^2/н, \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{5}{8}, \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{3}{4}$$



Фиг. 1.

В точках $|x| = l$ границы пластинки наблюдается бесконечный разрыв напряжений.

Тамбовский институт
химического машиностроения

Поступила 3 XII 1973

Ա. Դ. ԽԱՆԺՈՎ

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՈՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽԱՌԻԿ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Լուծվում է կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալի համար ջերմաառաձգականության հարթ խնդիրը խառը եզրային պայմանների դեպքում։

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ սալի բեռնավորումից ազատ եզրի մի մասի վրա տրված է հաստատուն ջերմային հոսք, իսկ մնացած ամրակցված մասի վրա՝ զրոյական ջերմաստիճան։

Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը բերվում է հայտնի լուծում ունեցող զույգ ինտեգրալ հավասարումների։

ON A MIXED PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A SEMI-INFINITE ORTHOTROPIC PLATE

A. D. KHANZHOV

Summary

A plane problem of thermoelasticity for a semi-infinite orthotropic plate is solved with mixed boundary conditions. The case is considered where a constant heat flow is given in some part free from loading on the boundary of the plate while in the rest fixed part the temperature is zero.

By means of the Fourier transformation the problem is reduced to a dual integral equation, having a known solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. АН СССР, М., 1962.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
3. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ., М., 1955.
4. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд. Саратовского университета, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

М. А. БУРЫШКИН

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП К ЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Учет симметрии механических систем в разнообразных расчетах связан с применением методов теории представлений групп [3—6]. С практической точки зрения весьма важен такой подход к исследованию симметричных инженерных конструкций, в котором бы эти методы — специфичные и зачастую громоздкие — непосредственно не участвовали. В работе [6] приведена методика статических расчетов пластин с циклической симметрией, отвечающая указанному условию. В данной работе эта методика распространяется на разнообразные линейные задачи механики консервативных систем, обладающих произвольной группой симметрии.

1. Группы симметрии реальных механических систем относятся к следующим двенадцати типам точечных групп: C_n, D_n, T, O, S_{2n}, C_{nh}, C_{nv}, D_{nh}, D_{nd}, T_d, T_h и O_h (описание этих групп приведено, например, в [1]), причем $C_{nh} = C_n \times \sigma_h$, $D_{nh} = D_n \times C_{nh}$, $D_{2n+1,d} = D_{2n+1} \times I$, $T_h = T \times I$ и $O_h = O \times I$ [1]. Последние равенства в общем виде записываются как $G = G' \times E_2$, где G' — любая из групп C_{nh}, D_{nh}, $D_{2n+1,d}$, T_h и O_h; G' и E_2 — соответствующие G' группы с порядками, равными m' и двум. В дальнейшем через m обозначается порядок группы G; l и m_i — число различных неприводимых представлений τ_i и их размерность; l' — число неприводимых представлений группы G', а $q_j(G)$ и просто q_j — j-ый элемент группы G.

Каждая точечная группа характеризуется своей системой простых и зеркальных осей (здесь отражение рассматривается как зеркальный поворот на 360°). Оси нумеруются, начиная с осей высшего порядка. Обозначения отражений, а также нумерация осей в пределах одного порядка совпадают с принятыми в [1], причем ось $C_4^{(2)}$ группы O направляется вертикально вверх. Если множества простых поворотов вокруг осей некоторой группы первого рода расположить в соответствии с нумерацией осей, причем в каждом таком множестве повороты, отсчитываемые в направлении против часовой стрелки, располагать в порядке увеличения их углов, то элементы групп 1-го рода упорядочиваются и нумеруются, начиная с единичного. Неприводимые представления групп 1-го рода пронумерованы в [1].

Замечание 1. Если некоторое представление τ_i группы G — комплексно, то с теми же оговорками, что и в [6], вместо τ_i и $\tau_{\bar{i}}$ рас-

сматривается уже приводимое представление, индуцируемое регулярным представлением группы G на объединение подпространств $R^{(\nu)}$ и $\overline{R}^{(\nu)}$ преобразующихся соответственно по τ_ν и $\overline{\tau}_\nu$. Указанному представлению приписывается наименьший из номеров представлений τ_ν и $\overline{\tau}_\nu$. Таково, например, второе представление группы T.

Упорядочивание множества зеркальных поворотов групп C_{nv}, S_{2n}, D_{2nd} и T_d аналогично множеству простых поворотов и подчинение первого множества второму определяет способ нумерации элементов этих групп. Удобно считать, что номера одинаковых неприводимых представлений изоморфных групп совпадают.

Теперь естественно нумеровать элементы и неприводимые представления групп C_{nh}, D_{nh}, D_{2n-1d}, T_h и O_h по следующему принципу: $g_j(G') = g_j(G')$, $g_{j+m}(G') = g_j(E_2)\,g_j(G')$, $(j = 1, 2, \ldots, m')$ и $\tau_\nu = \tau_\nu' \otimes \theta_1$; $\tau_{\nu+l'} = \tau_\nu' \times \theta_2$, $(\nu = 1, 2, \ldots, l')$, где τ_ν' и τ_ν' — ν-ые неприводимые представления групп G' и G', а θ_1 и θ_2 — неприводимые представления группы E_2, причем θ_1 — единичное представление.

Пусть область Ω трехмерного пространства обладает точечной группой G симметрии, $x \in \Omega$ — произвольная точка этой области, а p и $p(x)$ — определенная в Ω вектор-функция и ее значение в точке x. Действуя элементом симметрии $g_j \in G (j = 1, 2, \ldots, m)$ на точку x и вектор-функцию p, получим соответственно точку $g_j x$ и функцию p_j, которая точке x ставит в соответствие вектор $g_j p(g_j^{-1}x)$. Согласно [2] справедливы разложения

$$p = \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{m_\nu} p_{\nu\mu}^{(\nu)}; \qquad p_{\nu\mu}^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{m} c_{\nu\mu}^{(\nu)j} p_j; \quad (\nu = 1, 2, \ldots, l; \ \mu, k = 1, 2, \ldots, m_\nu) \qquad (1)$$

Коэффициенты $c_{\nu\mu}^{(\nu)j}$ и матрицы $\hat{\tau}_\nu(g_j)$ представлений τ_ν для групп C_n и C_{nv} приведены в [6]. Для групп T и O эти коэффициенты и μk-е элементы $\hat{\tau}_{\nu\mu k}(g_j)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, l;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ k, \mu = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ указанных матриц даны в табл. 1. В случае одномерных представлений матрицы $\hat{\tau}_\nu(g_j)$ вырождаются в скаляры, являющиеся значениями характеров этих представлений. Для групп D_n, S_{2n}, D_{2nd} и T_d соответственно имеющимся изоморфизмам попросту переставляются коэффициенты и матрицы групп C_{nv}, C_{2n}, D_{2n} и O.

Замечание 2. Приведем необходимые соответствия между номерами элементов изоморфных групп: $g_j(S_{2n}) \to g_{2j-1}(C_{2n})$, $g_{j+n}(S_{2n}) \to g_{2j}(C_{2n})$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $g_j(D_{2nd}) \to g_{2j-1}(D_{4n})$, $g_{2n+j}(D_{2nd}) \to g_{4n+2j-1}(D_{4n})$, $g_{4n+j}(D_{2nd}) \to g_{2j}(D_{4n})$, $g_{6n+j}(D_{2nd}) \to g_{4n+2j}(D_{4n})$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$; $g_j(D_n) \to g_j(C_{nv})$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$; $T_j \to O$: 1 → 1; 2 → 17; 3 → 18; 4 → 16; 5 → 15; 6 → 13; 7 → 14; 8 → 12; 9 → 11; 10 → 3; 11 → 6; 12 → 9; 13 → 2; 14 → 4; 15 → 5; 16 → 7; 17 → 10; 18 → 8; 19 → 21; 20 → 20; 21 → 22; 22 → 23; 23 → 19; 24 → 24.

Таблица 1

Коэффициенты $C^{(\kappa)}_{\mu j}$ и матричные элементы $\hat{T}_{\mu\kappa}(\vec{g}_j)$																															
Группа	Индексы			Коэффициенты		Значения $\hat{T}_{\mu\kappa}(\vec{g}_j)/6$ и $C^{(\kappa)}_{\mu j}\cdot d$																									
	J	μ	κ	6	d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
O	1	1	1	1	24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	24	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	3	1	1	1/2	12	2	-2	2	-2	1	2	1	1	2	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-2	2	1	1
		2		√3/2	12	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	0	0	1	1
		1	2	√3/2	12	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	0	0	1	1
		2		1/2	12	2	2	2	2	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	-1	-1
	4	1	1	1	8	1	1	1	1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
		2		1	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	-1	0	0	-1	1	0	1	-1	0	0	0	0
		3		1	8	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	1
		1	2	1	8	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	1	-1	0	0	0	0
		2		1	8	1	0	-1	0	1	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
		3		1	8	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	-1	1	0	0
		1	3	1	8	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	-1	1
		2		1	8	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0
		3		1	8	1	0	-1	0	0	-1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
	5	1	1	1	8	1	-1	1	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
		2		1	8	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	-1	0	0	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0
		3		1	8	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1
		1	2	1	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	-1	1	0	0	0	0
		2		1	8	1	0	-1	0	-1	1	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
		3		1	8	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	1	-1	0	0
		1	3	1	8	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	-1
		2		1	8	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0
		3		1	8	1	0	-1	0	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
T	1	1	1	1	12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	2	1	1	1/2	6	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		√3/2	6	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		1	2	√3/2	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		1/2	0	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	3	1	1	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		1	4	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		3		1	4	0	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		1	2	1	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		3		1	4	0	-1	0	-1	0	1	0	1	0	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		1	3	1	4	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		1	4	0	0	-1	0	-1	0	1	0	1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		3		1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Наконец, коэффициенты $c^{(k)}_{\nu\mu j}$ и матрицы $\overset{*}{\tau}_{\nu}(g_j)$ для любой группы $G'' = G' \times E_m$ определяются из равенств: $c^{(k)}_{\nu\mu j}(C'') = c^{(k)}_{\nu\mu j\,m+1}(G'') = c^{(k)}_{\nu\mu r,2j}(G'') = -c^{(k)}_{\nu\mu r,2j+m}(G'') = -\frac{1}{2}c^{(k)}_{\nu\mu j}(G')$; $\overset{*}{\tau}[g_j(G'')] = \overset{*}{\tau}[g_{m+j}(G'')] = \overset{*}{\tau}_{\nu r}[g_j(G'')] = -\overset{*}{\tau}_{\nu r}[g_{m+j}(G'')] = \tau[g_j(G')]$; $\nu = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, m$; $k, \mu = 1, 2, \ldots, m_\nu$.

Через Ω_1 обозначается элементарная ячейка области Ω. Положим для конкретности, что в зависимости от типа группы G ячейка Ω_1 ограничивается следующими плоскостями: C_n — $\Pi(e)$ и $\Pi(C_n)$; D_n — $\Pi(C_n, C_2^{(2)})$, $\Pi(C_n, C_2^{(3)})$, $\Pi(C_2^{(2)}, C_2^{(1)})$ и $\Pi(C_2^{(2)}, C_2^{(3)})$; T — $\Pi(C_3^{(4)}, C_3^{(1)})$, $\Pi(C_3^{(4)}, C_3^{(2)})$, $\Pi(C_2^{(1)}, C_2^{(1)})$ и $\Pi(C_2^{(1)}, C_2^{(2)})$; O — $\Pi(C_3^{(1)}, C_3^{(1)})$, $\Pi(C_3^{(1)}, C_3^{(4)})$, $\Pi(C_2^{(4)}, C_2^{(1)})$ и $\Pi(C_2^{(4)}, C_3^{(4)})$; S_{2n} — $\Pi(e)$ и $\Pi(S_{2n})$; C_{nh} — $\Pi(e)$, $\Pi(C_n)$ и $\Pi(\sigma)$; C_{nv} — $\Pi(\sigma_1)$ и $\Pi(\sigma_2)$; D_{nh} — $\Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_2)$ и $\Pi(\sigma)$; D_{nd} — $\Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_2)$, $\Pi(C_2^{(2)}, C_2^{(1)})$ и $\Pi(C_2^{(2)}, C_2^{(3)})$; T_d — $\Pi(\sigma_{23})$, $\Pi(\sigma_{13})$ и $\Pi(\sigma_{13})$; T_h — $\Pi(\sigma_{14})$, $\Pi(C_3^{(1)}, C_3^{(1)})$ и $\Pi(C_3^{(1)}, C_3^{(2)})$; O_h — $\Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_{12})$ и $\Pi(\sigma_{11})$. Здесь $\Pi(e)$ — произвольная полуплоскость, проходящая через ось C_n; $\Pi(C_n)$ и $\Pi(S_{2n})$ — полуплоскости, полученные из $\Pi(e)$ воздействием элементов C_n и S_{2n}; $\Pi(C_n^{(k)}, C_n^{(k+1)})$ — полуплоскость, проходящая через оси $C_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$ и ограниченная последней. $\Pi(\sigma_i)$ — плоскость отражения σ_i.

2. Пусть упругая механическая система S занимает область Ω. Тогда в подобласти Ω_1 располагается элементарная ячейка S_1 системы S [4]. Введем в Ω_1 координатную систему u_1, v_1, z_1. Действуя на Ω_1 элементом симметрии $g_j \in G$, получим новую подобласть Ω_j с координатной системой u_j, v_j, z_j. Вектор-функция p, заданная на Ω, определена и в Ω_j ($j = 1, 2, \ldots, m$), где может быть выражена как вектор-функция $p(u_j, v_j, z_j)$ соответствующих координат. Если r, q и f — перемещения, внешние и инерционные силы в точках системы S, то из принципа виртуальных перемещений следует такое уравнение движения:

$$\delta V = \int_{\Omega} (q - f)\,\delta r \tag{2}$$

где V — потенциальная энергия системы S.

Следствием симметрии является тот факт, что перемещения точек системы S под нагрузкой p_j определяются вектор-функцией r_j. Тогда в силу разложения (1) и линейности задачи нагрузке $q^{(k)}_{\nu\mu}$ отвечает вектор-функция $r^{(k)}_{\nu\mu}$ перемещений системы S. В связи с этим при нагрузке типа $q^{(k)}_{\nu\mu}$, используя выражение

$$\int_{\Omega} p^{(k)}_{\nu\mu} f^{(k)}_{\nu\mu}\, d\Omega = \delta_{\nu\nu}\,\delta_{\mu\mu}\,\frac{m}{m_\nu}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_1} p^{(k)}_{\nu\mu}(u_1, v_1, z_1) f^{(k)}_{\nu\mu}(u_1, v_1, z_1)\, d\Omega_1 \tag{3}$$

в котором под f, как и под p, понимается произвольная вектор-функция, заданная на Ω, а δ_{ij} и $\delta_{\mu\nu}$ — символы Кронекера, и которое является естественным обобщением аналогичного равенства из [6], можно показать тем же путем, что и в [6], справедливость записи уравнения (2) в следующей форме:

$$\sum_{\mu=1}^{m_1} \delta V_1^{(\mu k)} = \sum_{\mu=1}^{m_1} \int_{\Omega_1} (q_{\mu}^{(k)} + f_{\mu}^{(k)})(\delta r)_{\mu}^{(k)} d\Omega_1 \tag{4}$$

где $V_1^{(\mu k)}$ — потенциальная энергия ячейки S_1 в случае, когда перемещения системы S имеют вид $r_{\mu}^{(k)}$. Соответственно [6] выражение (4) трактуется как уравнение движения (в частном случае — равновесия системы S_1, состоящей из m_1 элементарных ячеек S_{μ}, совпадающих с S_1 и загруженных внешними силами по схеме $q_{\mu}^{(k)}$, при которой на ячейку S_{μ} действует нагрузка $q_{\mu}^{(k)}(u_1, v_1, z_1)$.

Нетрудно получить такие соотношения

$$p_{\mu}^{(k)}(u_1, v_1, z_1) = q_{\mu} \sum_{\mu'=1}^{m_1} \overset{*}{\delta}_{\mu\mu'}(q^{-1}) p_{\mu'}^{(k)}(u_1, v_1, z_1) \tag{5}$$

Из (5) видно, что деформативное, а следовательно, и напряженное состояние S_{μ}, загруженной по схеме $q_{\mu}^{(k)}$, полностью характеризуют соответствующие состояния всей системы S. Поэтому в случае линейной механической задачи оказывается возможным вместо непосредственного нахождения составляющих $w_{\mu}^{(k)}$ искомой функции w определять порождающие их функции $w_{\mu}^{(k)}(u_1, v_1, z_1)$, которые для ячеек S_{μ} ($\mu = 1, 2, \ldots, m_1$) системы S имеют тот же физический смысл, что и функция w для системы S.

Плоскости, ограничивающие Ω_1, разбиваются на три категории: а) плоскости типа $\Pi(\sigma_i)$, б) пары плоскостей $\Pi(C_n^{(i)}, C_i^{(\nu)})$ и $\Pi(C_n^{(i)}, C_i^{(\nu)})$, для которых элемент $C_n^{(i)}$ переводит первую плоскость пары во вторую (частным случаем является пара $\Pi(e)$ и $\Pi(C_n)$), в) пары плоскостей $\Pi(e)$ и $\Pi(S_{2n})$.

Пусть $x(C_n^{(i)}, C_i^{(\nu)}) \in \Pi(C_n^{(i)}, C_i^{(\nu)})$, $x(e) \in \Pi(e)$, $x(S_{2n}) \in \Pi(S_{2n})$, $x(C_n) \in \Pi(C_n)$, $x(\sigma_i) \in \Pi(\sigma_i)$, причем $C_n^{(i)} x(C_n^{(i)}, C_i^{(\nu)}) = x(C_n^{(i)}, C_i^{(\nu)})$; $S_{2n} x(e) = x(S_{2n})$; $C_n x(e) = x(C_n)$. Тогда из (5) следует

$$p_{\mu}^{(k)}[x(C_n^{(i)}, C_i^{(\nu)})] = C_n^{(i)} \sum_{\mu'=1}^{m_1} \overset{*}{\delta}_{\mu\mu'}[(C_n^{(i)})^{-1}] p_{\mu'}^{(k)}[x(C_n^{(i)}, C_i^{(\nu)})] \tag{6}$$

$$p_{\mu}^{(k)}[x(C_n)] = C_n \sum_{\mu'=1}^{m_1} \overset{*}{\delta}_{\mu\mu'}(C_n^{-1}) p_{\mu'}^{(k)}[x(e)] \tag{7}$$

$$p_{\omega}^{(k)}[x(S_{2\omega})] = S_{2\omega} \sum_{\omega'=1}^{m} \xi_{\omega'\omega}(S_{2\omega}^{-1})\, p_{\omega'}^{(k)}[x(e)] \tag{8}$$

$$p_{\omega}^{(k)}[x(s_1)] = s_1 \sum_{\omega'=1}^{m} \xi_{\omega'\omega}(s_1)\, p_{\omega'}^{(k)}[x(s_1)] \tag{9}$$

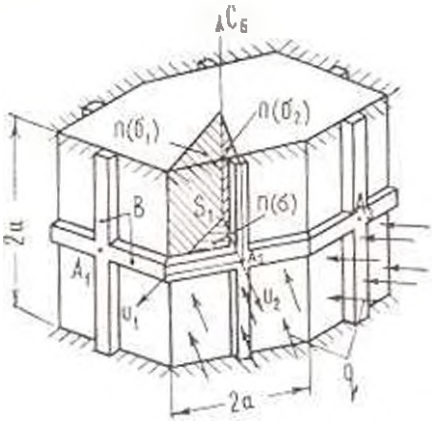
Весь порядок методики из [6] переносится таким образом на рассматриваемые в данной работе задачи. Функции нагрузки $q_{\omega}^{(k)}(u_1, v_1, z_1)$ ячеек S_{ω} имеют вид (при $q_{\omega} = q_{\omega}^{(k)}$):

$$q_{\omega}^{(k)}(u_1, v_1, z_1) = \sum_{j=1}^{m} c_{\omega j}^{(k)}\, q_{\omega}\, q(u_j, v_j, z_j) \tag{10}$$

а их граничные условия определяются выражениями (6), (7), (8) и (9).

Изложенный подход может быть применен в статических и динамических расчетах симметричных пластинчатых систем (с упругим основанием и без него) и оболочек при наличии ребер жесткости, сосредоточенных масс и нагрузок, в симметричных задачах теории упругости и т. д.

Пример. Система из шести пластин, подкрепленных ребрами жесткости, вместе с внешней нагрузкой изображена на фиг. 1. Элементы симметрии образуют группу $D_{6h} = D_6 \times C_h$. Искомыми являются прогибы пластин в точках A_2 и A_1. Перемещениями пластин в своей плоскости будем пренебрегать. Предположим также, что силовые факторы в плоскостях пластин малы по сравнению с критическими.

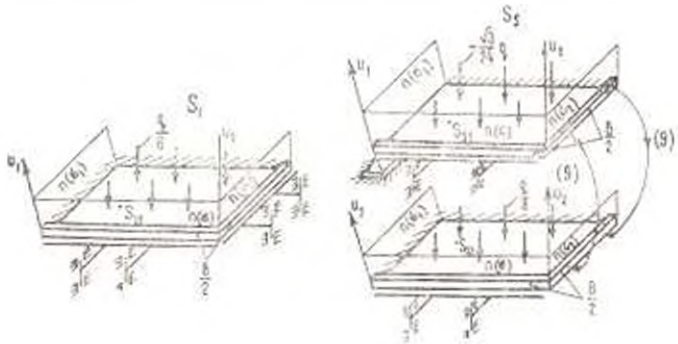


Фиг. 1.

Примем $\frac{B}{Da} = 0.25$ (B — изгибная жесткость ребер). Для группы D_{6h}:

$m = 24$, $l = 12$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_{10} = 1$, $m_8 = m_9 = m_{11} = m_{12} = 2$. Строя системы S_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 12$) и загружая их

по схемам $q_{k}^{(1)}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), убеждаемся, что ненулевые прогибы в точке A_2 имеют место только для S_1, S_5 и S_6. Системы S_5 и S_6, загруженные соответственно по схемам $q_{5}^{(1)}$ и $q_{6}^{(1)}$, приведены на фиг. 2.



Фиг. 2.

Используя формулу (10), находим $q_{11}^{(1)} = \frac{1}{6}q$; $q_{51}^{(1)} = \frac{1}{8}q$; $q_{52}^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{8}q$; $q_{51}^{(2)} = -\frac{\sqrt{3}}{24}q$; $q_{52}^{(2)} = \frac{1}{8}q$; $q_{61}^{(1)} = \frac{1}{8}q$; $q_{62}^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{24}q$; $q_{61}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{24}q$; $q_{62}^{(2)} = -\frac{1}{24}q$. Определяя прогибы w систем S_1, S_5 и S_6, например, методом сеток, получаем

$$w_{11}^{(1)}(A_2) = 0.00305\frac{qa^4}{D};\quad w_{51}^{(1)}(A_2) = 0.0025\frac{qa^4}{D};\ w_{52}^{(1)}(A_2) = -0.0044\frac{qa^4}{D};$$

$$w_{51}^{(2)}(A_2) = 0.0015\frac{qa^4}{D};\ w_{52}^{(2)}(A_2) = 0.0025\frac{qa^4}{D};\ w_{61}^{(1)}(A_2) = 0.0032\frac{qa^4}{D};$$

$$w_{62}^{(1)}(A_2) = -0.0018\frac{qa^4}{D};\ w_{61}^{(2)}(A_2) = 0.0018\frac{qa^4}{D};\ w_{62}^{(2)}(A_2) = -0.0011\frac{qa^4}{D}.$$

Используя соотношение (5), находим

$$w_{11}^{(1)}(A_1) = 0.00305\frac{qa^4}{D};\ w_{51}^{(1)}(A_1) = -0.0025\frac{qa^4}{D};\ w_{52}^{(1)}(A_1) = 0.0025\frac{qa^4}{D};$$

$$w_{61}^{(1)}(A_1) = -0.0032\frac{qa^4}{D};\ w_{62}^{(1)}(A_1) = -0.0011\frac{qa^4}{D}$$

Тогда из разложения (1) окончательно следует, что

$$w(A_1) = -0.00125\frac{qa^4}{D};\quad w(A_2) = 0.0103\frac{qa^4}{D}.$$

С помощью соотношения (5) нетрудно, между прочим, проверить, что имеет место равенство $w(A_3) = w(A_1)$, обусловленное симметрией нагрузки.

В заключение отметим, что точность проведенного расчета связана исключительно с решением систем S_1, S_5 и S_6.

Одесский
инженерно-строительный институт

Поступила 10 III 1972

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ

ԿՈՆՍԵՐՎԱՏԻՎ ՀԱՄԱՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԽՄԲԻՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Հեղինակի նախորդ հոդվածներից մեկում [6] ցիկլիկ սիմետրիայով ատիրի ստատիկական հաշվարկների համար առաջարկվել է եղանակ։ Ներկա աշխատանքում այդ եղանակը կիրառվել է կոնսերվատիվ սիստեմների մեխանիկայի տարբեր գծային խնդիրների լուծման համար։

Դիտարկվում է սիմետրիայի կետային խումբ տիրապետող գծային կոնսերվատիվ սիստեմ։ Ցույց է տրվում, որ նիստերին բնոր ձևափոխվում է ըստ սիմետրիայի խմբի չբերվող ներկայացման, այդ դեպքում սկզբնական սիստեմի փոխարեն կարելի է ուսումնասիրել ավելի պարզ սիստեմ, ընդհանրապես ասած, մի քանի պարզ բջիջներից բաղկացած, որոնց վրա կիրառված են որոշակի կապեր։

THE APPLICATION OF GROUP REPRESENTATION THEORY TO LINEAR PROBLEMS OF THE CONSERVATIVE SYSTEM MECHANICS

M. L. BURYSHKIN

Summary

The simplification of linear conservative system calculations is investigated for the systems possessing a point group of symmetry. The technique of control for similar simplifications has been suggested, which is based on the mechanical treatment of „elementary cell" method and is independent on that of conservative system calculation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. ГИФМЛ, М., 1958.
2. *Каплан И. Г.* Симметрия многоэлектронных систем. Наука, М., 1969.
3. *Удилов В. В., Кондаев Г. Т.* Исследование собственных колебаний стержневых систем с групповой симметрией. Сб. „Кибернетика и вычислительная техника", в. 1. „Наукова думка", Киев, 1969.
4. *Фомин В. М.* О методике элементарной ячейки при расчете колебаний симметричных стержневых систем. Сб. „Техническая кибернетика", в. 1. „Наукова думка", Киев, 1970.
5. *Бурышкин М. Л.* О свободных колебаниях регулярных решетчатых систем. ПМ, Киев, 1971.
6. *Бурышкин М. Л., Семенов В. А.* О равновесии симметричных пластин. Докл. АН Арм. ССР, т. XV, №3, 1972.