ՄԵԽԱՆԻԿԱ МЕХАНИКА MECHANICS 1975

2U.34U.4U.6 UU2 ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԳԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա

XXVIII, № 1, 1975

Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН, П. А. МКРТЧЯН

О КОЛЕБАНИЯХ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В настоящей работе рассматривается ряд задач о магнитоупрутих колебаниях проводящей пластинки в поперечном стационарном магнитном поле методом интегральных преобразований.

Задача о бесконечной пластинке решается на основе трехмерных линеаризованных уравнений магнитоупругости. Полученный результат сопоставляется с результатом той же задачи, решаемой с помощью гипотез магнитоупругости [1, 2], которые трехмерные уравнения магнитоупругости приводят к двумерным.

На основе двумерных уравнений магнитоупругости [1, 2] исследуется влияние поперечного магнитного поля на характер упругих колебаний пластин конечных размеров при различных условиях опирания по краям.

Проведен численный анализ и построены графики, характеризующие изменение коэффициента затухания и частоты в зависимости от соотношения между силой Лоренца и упругой силой.

1. Пусть бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины 2h, изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится в поперечном стационарном магнитном поле с заданным век-

тором магнитной индукции В₀ (0, 0, B_{0z}).

Принимается, что магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей пластинку, равны единице, то есть принимается, что пластинка находится в вакууме.

Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются: модулем упругости E, коэффициентом Пуассона v, плотностью f, электропроводностью z, магнитной проницаемостью μ , диэлектрической проницаемостью ε .

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (xy) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу принятых предположений для рассматриваемой задачи получим следующие линеаризованные исходные уравнения и соотношения. Уравнения магнитоупругости пластинки [2]

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[\vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{B}_{0} \right] + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0$$
(1.1)

где h и e — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического поля для внутренней области (пространство, занимаемое пластинкой), \vec{U} — вектор перемещения частиц пластинки.

Для рассматриваемой задачи выполняется условие отсутствия электрического заряда [3], следовательно,

$$\operatorname{div} e = 0 \tag{1.2}$$

Уравнения движения пластинки [2]

$$D_{\nabla}^{4} w + 2\rho h \frac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}} = Z + \frac{\partial m_{x}}{\partial x} + \frac{\partial m_{y}}{\partial y}$$

$$\left(D = \frac{2Eh^{3}}{3(1-\gamma^{2})}\right)$$
(1.3)

Здесь *m_x*, *m_y*, *Z* — моменты и сила электромагнитного происхождения, которые определяются следующим образом:

$$m_x = \int_{-h}^{h} R_x z dz, \quad m_y = \int_{-h}^{h} R_y z dz, \quad Z = \int_{-h}^{h} R_z dz$$

где

$$\vec{R}(R_x, R_y, R_z) = \frac{\sigma}{c} \left(\vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \times \vec{B}_0 \right) \times \vec{B}_0$$

Уравнения электродинамики в вакууме [2]

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial e^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{e}^{(e)} =$$

(1.4)

O SOAN BERTHUR GOON

$$\operatorname{rot} \vec{e}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0$$

где $h^{(\epsilon)}$ и $e^{(\epsilon)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического поля для внешней области (пространство вне пластинки).

4

Решения уравнений (1.1) и (1.4) должны удовлетворять следующим линеаризованным граничным условиям на колеблющихся поверхностях пластинки [2]

$$h_{z} = \frac{1}{\mu} h_{z}^{(e)} \qquad e_{z} = \frac{1}{\varepsilon} e_{z}^{(e)}$$

$$h_{x} = h_{x}^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0z} \frac{\partial w}{\partial x} \qquad e_{x} = e_{x}^{(e)} \quad \text{при } z = \pm h \quad (1.5)$$

$$h_{y} = h_{y}^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0z} \frac{\partial w}{\partial y} \qquad e_{y} = e_{y}^{(e)}$$

Преобразуем основные уравнения задачи (1.1)-(1.4) и граничные условия (1.5) к удобному виду. Представляя с этой целью векторы напряженности индуцированного электрического и магнитного поля посредством вектор-потенциала А следующим образом:

$$\vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \vec{h} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{e}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^{(e)}}{\partial t}, \quad \vec{h}^{(e)} = \operatorname{rot} \vec{A}^{(e)}$$
(1.6)

тождественно удовлетворим последним двум уравнениям систем (1.1) (1.4), а из первых уравнений и из (1.3) получим: во внутренней области

$$D_{\nabla}^{4}w + 2\rho h \frac{\partial^{2}w}{\partial t^{2}} = \frac{2h^{3}\sigma B_{0z}^{2}}{3c^{2}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w + \frac{\sigma B_{0z}}{c^{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{h} \left(\frac{\partial A_{x}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y}}{\partial x}\right) z dz$$

$$(1.7)^{n}$$

$$(1.7)^{n}$$

во внешней области

$$\triangle \vec{A}^{(e)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^{(e)}}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{A}^{(e)} = 0$$
 (1.8)

При получении (1.7) используется также дополнительное условие

$$\operatorname{div} A = 0 \tag{1.9}$$

которое следует из условия (1.2).

На основании (1.6) из (1.5) для компонент векторного потенциала получаются следующие граничные условия:

$$A_{x} = A_{x}^{(e)}, \qquad A_{y} = A_{y}^{(e)}, \qquad A_{x} = \frac{1}{\varepsilon} A_{z}^{(e)}$$

$$\frac{\partial A_{z}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial A_{z}^{(e)}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y}^{(e)}}{\partial z} \right) + (\mu - 1) B_{0z} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A_{x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial A_{z}^{(e)}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}^{(e)}}{\partial x} \right) + (\mu - 1) B_{0x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} = \frac{\partial A_{y}^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial A_{y}^{(e)}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} = \frac{\partial A_{y}^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial A_{y}^{(e)}}{\partial y}$$

Нетрудно заметить, что последнее условие является следствием первого и второго условий. Так как условие (1.9) выполняется всюду, то оно в дальнейшем используется, как граничное условие на поверхностях пластинки в дополнение к условиям (1.10).

Таким образом, трехмерная задача магнитоупругих колебаний тонкой пластинки свелась к совместному интегрированию системы уравнений (1.7), (1.8), решения которых должны удовлетворять граничным условиям (1.10) и начальным условиям

$$w = w_0 f(x, y),$$
 $\frac{\partial w}{\partial t} = w_1 \varphi(x, y)$ при $t = 0$ (1.11)

2. Применяя относительно уравнений (1.7), (1.8) преобразование Лапласа по переменной t и двумерное экспоненциальное преобразование Фурье по переменным x и y [4], с учетом (1.11), для определения преобразованного векторного потенциала и преобразованного прогиба получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_{L}^{*}[\alpha_{0}^{-2}(\xi^{2}+\eta^{2})^{2}+\sigma_{0}(\xi^{2}+\eta^{2})s+s^{2}]=w_{0}F(\xi,\eta)[s+\sigma_{0}(\xi^{2}+\eta^{2})]+$$

$$+ w_{1}\Phi\left(\xi, \eta\right) + \frac{i\sigma sB_{0z}}{2\rho hc^{2}} \int_{-h}^{h} \left(\xi A_{Ly}^{\star} - \eta A_{Lx}^{\star}\right) z dz$$

$$\frac{d^{2}A_{Lx}^{*}}{dz^{2}} - v^{2}A_{Lx}^{*} = -\frac{4\pi\sigma i\mu\eta z B_{0z}}{c^{2}} [sw_{L}^{*} - w_{0}F(\xi, \eta)]$$

$$\frac{d^{2}A_{Ly}^{*}}{dz^{2}} - v^{2}A_{Ly}^{*} = \frac{4\pi\sigma i\mu\xi z B_{0z}}{c^{2}} [sw_{L}^{*} - w_{0}F(\xi, \eta)]$$
(2.1)

$$\frac{d^2 A_{Lz}^{i}}{dz^2} - v^2 A_{Lz}^{*} = 0, \qquad \frac{d^2 A_{Lx}^{(e)}}{dz^2} - v_1^2 A_{Lx}^{(e)*} = 0$$
$$\frac{d^2 A_{Ly}^{(e)*}}{dz^2} - v_1^2 A_{Ly}^{(e)*} = 0, \qquad \frac{d^2 A_{Lz}^{(e)*}}{dz^2} - v_1^2 A_{Lz}^{(e)*} = 0$$

где

$$\begin{split} \mathbf{v}^{2} &= \xi^{2} + \eta^{2} + \frac{4\pi\sigma\mu s}{c^{2}} + \frac{\varepsilon\mu}{c^{2}} s^{2}, \quad \mathbf{v}_{1}^{2} &= \xi^{2} + \eta^{2} + \frac{s^{2}}{c^{2}}, \quad \sigma_{0} &= \frac{h^{2}\sigma B_{0z}^{2}}{3\rho c^{2}}, \quad a_{0}^{2} &= \frac{2\rho h}{D} \\ \vec{A}_{L}^{*} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\xi x + \eta y\right)\right] dx dy \int_{0}^{\infty} \vec{A}\left(x, \, y, \, z, \, t\right) \exp\left(-st\right) dt \\ w_{L}^{*} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\xi x + \eta y\right)\right] dx dy \int_{0}^{\infty} w\left(x, \, y, \, t\right) \exp\left(-st\right) dt \\ F\left(\xi, \, \eta\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \, y\right) \exp\left[i\left(\xi x + \eta y\right)\right] dx dy \\ \Phi\left(\xi, \, \eta\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x, \, y\right) \exp\left[i\left(\xi x + \eta y\right)\right] dx dy \end{split}$$

Соответствующие граничные условия (1.10), вместе с условием (1.9), после преобразований принимают следующий вид:

$$A_{Lx}^{*} = A_{Lx}^{(e)^{*}}, \quad A_{Ly}^{*} = A_{Ly}^{(e)^{*}}, \quad A_{Lz}^{*} = \frac{1}{\varepsilon} A_{Lz}^{(e)^{*}}$$
$$i\eta A_{Lz}^{*} + \frac{dA_{Ly}^{*}}{dz} = \mu \left(i\eta A_{Lx}^{(e)^{*}} + \frac{dA_{Ly}^{(e)^{*}}}{dz} \right) + i\xi (\mu - 1) B_{0z} w_{L}^{*}$$
$$i\xi A_{Lz}^{*} + \frac{dA_{Lx}^{*}}{dz} = \mu \left(\frac{dA_{Lx}^{(e)^{*}}}{dz} + i\xi A_{Lz}^{(e)^{*}} \right) - i\eta (\mu - 1) B_{0z} w_{L}^{*} \quad \text{при} \quad z = \pm h$$
$$\frac{dA_{Lz}^{*}}{dz} = i\xi A_{Lx}^{*} + i\eta A_{Ly}^{*} \qquad (2.2)$$

12

Найдя общее решение системы (2.1), удовлетворяя граничным условиям (2.2) и условиям затухания возмущений на бесконечности, определим постоянные интегрирования и, следовательно, преобразованные векторные потенциалы возмущенного электромагнитного поля и преобразованный прогиб пластинки

$$w_{L}^{*} = \frac{sw_{0}F(\xi, \eta) + w_{1}\Phi(\xi, \eta) + \sigma_{0}(\xi^{2} + \eta^{2})w_{0}F(\xi, \eta)(1-\delta)}{s^{2} + \sigma_{0}(\xi^{2} + \eta^{2})(1-\delta)s + \sigma_{0}^{-2}(\xi^{2} + \eta^{2})^{2}}$$

$$A_{Lx}^{*} = \eta[B_{1}\gamma_{1}(z)\overline{w_{L}}^{*} - \mu_{0}w_{L}sh\nu z]$$

$$A_{Ly}^{*} = -\xi[B_{1}\gamma_{1}(z)\overline{w_{L}}^{*} - \mu_{0}w_{L}sh\nu z]$$

$$A_{Ly}^{*} = \eta(B_{1}\gamma_{2}\overline{w_{L}}^{*} - \mu_{0}w_{L}sh\nu h) \begin{cases} \exp[-\nu_{1}(z-h)] & \operatorname{npu} z > h \\ -\exp[\nu_{1}(z+h)] & \operatorname{npu} z < -h \end{cases}$$

$$A_{Ly}^{(e)^{*}} = \xi(B_{1}\gamma_{2}\overline{w_{L}}^{*} - \mu_{0}w_{L}sh\nu h) \begin{cases} -\exp[-\nu_{1}(z-h)] & \operatorname{npu} z > h \\ \exp[\nu_{1}(z+h)] & \operatorname{npu} z < -h \end{cases}$$

$$A_{Lz}^{(e)^{*}} = 0$$

7

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma_{1}(z) = z - \frac{(1 + v_{1}\mu h) \operatorname{sh} vz}{\Delta}, \qquad \gamma_{2} = h - \frac{(1 + v_{1}\mu h) \operatorname{sh} vh}{\Delta}$$
$$B_{1} = \frac{4\pi\sigma i\mu B_{0z}}{v^{2}c^{2}}, \qquad \mu_{0} = \frac{i(\mu - 1)B_{0z}}{\Delta}, \qquad \overline{w}_{L}^{*} = sw_{L}^{*} - w_{0}F(\xi, \eta)$$
$$\overline{w}_{L}^{*} = \frac{4\pi\sigma\mu s}{v^{2}c^{2}} - \left(\operatorname{ch} vh - \frac{\operatorname{sh} vh}{vh}\right) \left[\frac{3(\mu - 1)}{vh^{2}\Delta} + \frac{12\pi\sigma\mu s(1 + v_{1}\mu h)}{v^{3}h^{2}c^{2}\Delta}\right] \qquad (2.4)$$
$$\Delta = v \operatorname{ch} vh + v_{1}\mu \operatorname{sh} vh$$

Для простоты принимается, что $\mu = \varepsilon = 1$. При этом условии выражение для δ из (2.4) принимает вид

$$\delta = \left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^2\right] \left[1 - \frac{3\left(1 + v_1h\right)\left(vh - \operatorname{th} vh\right)}{v^2h^2\left(vh + v_1h\operatorname{th} vh\right)}\right]$$

Нетрудно показать, что для любых значений у имеет место $|\delta| \ll 1$ и поэтому в выражении (2.4) им можно пренебречь относительно единицы. Используя этот факт и применяя обратное преобразование Лапласа относительно w_I , получим

$$w^{*} = \frac{w_{0}F(\xi, \eta)}{\lambda} \{\lambda_{1} \exp\left[-\lambda_{2}\left(\xi^{2} + \eta^{2}\right)t\right] - \lambda_{2} \exp\left[-\lambda_{1}\left(\xi^{2} + \eta^{2}\right)t\right]\} + \frac{w_{1}\Phi(\xi, \eta)}{(\xi^{2} + \eta^{2})\lambda} \{\exp\left[-\lambda_{2}\left(\xi^{2} + \eta^{2}\right)t\right] - \exp\left[-\lambda_{1}\left(\xi^{2} + \eta^{2}\right)t\right]\}$$
(2.5)

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (\sigma_0 + \lambda), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (\sigma_0 - \lambda), \quad \lambda = \sqrt{\sigma_0^2 - 4\alpha_0^{-2}}$$

Из (2.5), согласно формуле обращения для двухмерного экспоненциального преобразования Фурье, следует, что прогиб пластинки выражается следующим образом:

$$w(x, y, t) = \frac{w_0}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \exp\left[-i\left(\xi x + \eta y\right)\right] \left[\lambda_1 \exp\left[-\lambda_2\left(\xi^2 + \eta^2\right)t\right] - \lambda_2 \exp\left[-\lambda_1\left(\xi^2 + \eta^2\right)t\right]\right] d\xi d\eta + \frac{w_1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp\left[-\lambda_2\left(\xi^2 + \eta^2\right)t\right] - \frac{\Phi\left(\xi, \eta\right)}{2\pi\lambda} + \frac{\psi_1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp\left[-\lambda_2\left(\xi^2 + \eta^2\right)t\right] - \frac{\Phi\left(\xi, \eta\right)}{2\pi\lambda} + \frac{\psi_1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp\left[-\lambda_2\left(\xi^2 + \eta^2\right)t\right] + \frac{\psi_1}{2\pi\lambda} + \frac{\psi_1}$$

$$-\exp\left[-\lambda_{1}\left(\xi^{2}+\eta^{2}\right)t\right]\right]\frac{\Phi\left(\xi,\eta\right)}{\xi^{2}+\eta^{2}}\exp\left[-i\left(\xi x+\eta y\right)\right]d\xi d\eta \qquad (2.6)$$

Чтобы применить теорему о свертках, необходимо знать трансформанты Фурье функций

$$F_{1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\lambda_{1} \exp\left[-\lambda_{2}(\xi^{2} + \eta^{2})t\right] - \lambda_{2} \exp\left[-\lambda_{1}(\xi^{2} + \eta^{2})t\right]\} \exp\left[-i(\xi x + \eta y)\right] d\xi d\eta$$

$$\Phi_{1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp\left[-\lambda_{2}(\xi^{2} + \eta^{2})t\right] - \sum_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\lambda_{1}(\xi^{2} + \eta^{2})t\right]\} \exp\left[-i(\xi x + \eta y)\right] d\xi d\eta$$

$$-\exp\left[-\lambda_{1}(\xi^{2} + \eta^{2})t\right]\} \exp\left[-i(\xi x + \eta y)\right] d\xi d\eta$$

Обозначая $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, а угол между радиус-векторами: \vec{r} и $\vec{\rho}$ через θ , получим

$$F_{1}(x, y) = \int_{0}^{\rho} f_{0}(r\rho) \left[\lambda_{1} \exp\left(-\lambda_{2}t\rho^{2}\right) - \lambda_{2} \exp\left(-\lambda_{1}t\rho^{2}\right)\right] d\rho$$

$$\Phi_{1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\rho} f_{0}(r\rho) \left[\exp\left(-\lambda_{2}t\rho^{2}\right) - \exp\left(-\lambda_{1}t\rho^{2}\right)\right] d\rho$$

где Jo (rp) — функция Бесселя нулевого порядка. Имея в виду, что

$$\int_{0}^{\infty} \rho f_{0}(r\rho) \exp\left(-\lambda_{0}\rho^{2}\right) d\rho = \frac{1}{2\lambda_{0}} \exp\left(-\frac{r^{2}}{4\lambda_{0}}\right)$$

после небольших преобразований получим

$$F_1(x,y) = \frac{1}{2t} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\lambda_2 t}\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\lambda_1 t}\right) \right] \quad (2.7)$$

$$\Phi_{1}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Fi}\left(-\frac{t^{2}x^{2} + y^{2}}{4\lambda_{2}t}\right) - \operatorname{Fi}\left(-\frac{x^{2} + y^{2}}{4\lambda_{1}t}\right) \right]$$
(2.8)

где Fi (т) — экспоненциальная интегральная функция

$$\operatorname{Fi}(-\tau) = \int_{-\theta}^{\infty} e^{-\theta} \frac{d\theta}{\theta}, \quad 0 < \tau < \infty$$

Используя равенства (2.7), (2.8) и теорему о свертках, из (2.6) окончательно получим

$$w(x, y, t) = \frac{w_0}{4\pi\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \exp\left(-\frac{u_1^2 + u_2^2}{4\lambda_2 t}\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{u_1^2 + u_2^2}{4\lambda_1 t}\right) \right] f(x - u_1, y - u_2) du_1 du_2 + \frac{u_1^2 + u_2^2}{4\lambda_1 t} du_2 + \frac{u_1^2 + u_2$$

9.

$$+\frac{w_1}{4\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\operatorname{Fi}\left(-\frac{u_1^2+u_2^2}{4\lambda_2 t}\right)-\operatorname{Fi}\left(-\frac{u_1^2+u_2^2}{4\lambda_1 t}\right)\right]\varphi\left(x-u_1, y-u_2\right)du_1du_2$$
(2.9)

В частности, если

$$f(x, y) = \exp\left[-i(kx + ny)\right], \quad \varphi(x, y) = 0$$

то решение (2.9) будет

$$w(x, y, t) = \frac{w_0}{2\sqrt{\beta^2-1}} \left\{ (\beta + \sqrt{\beta^2-1}) \exp\left[-\omega_0\left(\beta - \sqrt{\beta^2-1}\right)t\right] - \right\}$$

$$-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-1}\right)\exp\left[-\omega_0\left(\beta+\sqrt{\beta^2-1}\right)t\right]\exp\left[-i\left(kx+ny\right)\right] \quad (2.10)$$

где $w_0 = (k^2 + n^2) \sqrt{D/(2k)}$ — частота собственных колебаний пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля, а

$$\beta = \frac{h^3 \sigma B_{0z}^2 / (3c^2)}{\sqrt{2\rho h D}}$$

Из (2.10) следует, что если $\beta < 1$, то затухание возмущений имеет колебательный характер с коэффициентом затухания $(k^2 + n^2) h^2 \sigma B_{0z}^2 / (6\rho c^2)$. В противном случае возмущения затухают без колебаний.

Отметим, что при решении той же задачи на основе гипотез магнитоупругости, предложенном в работах [1, 2], полученное решение совпадает с (2.9). Таким образом, для данной задачи точность гипотез магнитоупругости характеризуется величиной | δ |, которая, как показано выше, намного мечьше единицы.

3. Пусть пластинка — полоса шириной a ($0 \le x \le a, -\infty \le y \le \infty$), находится во внешнем нормальном магнитном поле.

Принимаются гипотезы магнитоупругости, предложенные и обоснованные в работах [1, 2].

На основе этих гипотез искомая задача магнитоупругих колебаний пластинки, которая в данном случае не зависит от компонент индуцированного электромагнитного поля, приводится к интегрированию следующего дифференциального уравнения [5]:

$$D \triangle^4 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2h^3 \sigma B_{0z}^2}{3c^2} \frac{\partial}{\partial t} \triangle w$$
(3.1)

с начальными условиями (1.11).

Рассматриваются три случая граничных условий:

а) шарнирно-опертая пластинка

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$
 при $x = 0$, a (3.2)

в) заделанная пластинка

О колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитном поле

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
 при $x = 0, a$ (3.3)

с) консольная пластинка

2

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при} \quad x = a$$

(3.4)

Во всех случаях принимается, что форма колебания-цилиндрическая поверхность.

Применяя относительно уравнения (3.1) преобразование Лапласа по переменным x и t [6], с учетом (1.11), получим

$$r^{4} \left[w_{L}^{*}(r, s) - \frac{1}{r} w(0, s) - \frac{1}{r^{2}} w'(0, s) - \frac{1}{r^{3}} w''(0, s) - \frac{1}{r^{4}} w'''(0, s) \right] + a_{0}^{2} s^{2} \left[w_{L}^{*}(r, s) - \frac{w_{0}}{s} F(r) - \frac{w_{1}}{s^{2}} \Phi(r) \right] = \sigma_{1} r^{2} s \left[w_{L}^{*}(r, s) - \frac{1}{r^{2}} w(0, s) - \frac{1}{r^{2}} w(0, s) \right] - r^{2} w_{0} \sigma_{1} \left[F(r) - \frac{1}{r} f(0) - \frac{1}{r^{2}} f'(0) \right]$$
(3.5)

где штрих означает производную по переменной х,

$$\sigma_1 = \frac{2h^3 \sigma B_{0z}^2}{3Dc^2}, \qquad w_L^{\star}(r, s) - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(x, t) \exp\left[-(rx + st)\right] dx dt$$
$$F(r) = \int_0^{\infty} f(x) \exp\left(-rx\right) dx, \qquad \Phi(r) = \int_0^{\infty} \varphi(x) \exp\left(-rx\right) dx$$

Из (3.5) при граничных условиях (3.2) для преобразованного прогиба $w_L^*(r, s)$ имеем

$$w_{L}^{\bullet}(r, s) = \delta_{0}^{-1} \left[(r^{2} - \sigma_{1}s) w'(0, s) + w'''(0, s) + (\alpha_{0}^{2}s - \sigma_{1}r^{2}) w_{0}F(r) + \alpha_{0}^{2}w_{1}\Phi(r) + \sigma_{1}w_{0}f'(0) \right]$$
(3.6)

а при граничных условиях (3.3) и (3.4) $w_L^{\bullet}(r, s) = \delta_0^{-1} [rw''(0, s) + w'''(0, s) + (\alpha_0^2 s - \sigma_1 r^2) w_0 F(r) + \alpha_0^2 w_1 \Phi(r)]$ (3.7)

Здесь $\delta_0 = r^4 - \sigma_1 r^2 s + \alpha_0^2 s^2$.

Применяя обратное преобразование Лапласа по переменной r, из (3.6) получим

$$w_L(x, s) = \beta_0^{-1} s^{-3/2} \{ sw'(0, s) [K_1(x, s) - \sigma_1 K_{-1}(x, s)] + w'''(0, s) K_{-1}(x, s) \} + P_1(x, s)$$
(3.8)

а из (3.7)

 $w_{L}(x, s) = \beta_{0}^{-1} s^{-3/2} [w''(0, s) K_{-1}(x, s) + w'''(0, s) K_{-1}(x, s)] + P(x, s)$ (3.9) rate

$$P(x, s) = \beta_0^{-1} s^{-3/2} \int_0^x \{ sw_0 f(\tau) [a_0^2 K_{-1} (x - \tau, s) - \sigma_1 K_1 (x - \tau, s)] + a_0^2 w_1 K_{-1} (x - \tau, s) \varphi(\tau) \} d\tau$$

$$P_{1}(x, s) = P(x, s) + 2\alpha_{0}\beta_{0}^{-1}s^{-3/2}\beta w_{0}f'(0) K_{-1}(x, s)$$

$$r_{1} = \sqrt{\alpha_{0}(\beta + \sqrt{\beta^{2} - 1})}, \quad r_{2} = \sqrt{\alpha_{0}(\beta - \sqrt{\beta^{2} - 1})}, \quad \beta_{0} = 2\alpha_{0}\sqrt{\beta^{2} - 1}$$

$$K_{i}(x, s) = r_{1}^{i} \operatorname{sh} r_{1}a \sqrt{s} - r_{2}^{i} \operatorname{sh} r_{2}a \sqrt{s}, \quad i = -1, 1, 3.$$

Для определения w'(0, s) и w'''(0, s), входящих в (3.8), используются условия (3.2) на правой границе пластинки (x = a)

$$w'(0, s) = s^{-1/2} [\hat{o}_{1}(s)]^{-1} [K_{-1}(a, s) P_{1}(a, s) - sK_{1}(a, s) P_{1}(a, s)]$$

$$w'''(0, s) = s^{-1/2} [\hat{o}_{1}(s)]^{-1} \{s [K_{3}(a, s) - \sigma_{1}K_{1}(a, s)] P_{1}(a, s) - [K_{1}(a, s) - \sigma_{1}K_{-1}(a, s)] P_{1}(a, s)]$$

$$- [K_{1}(a, s) - \sigma_{1}K_{-1}(a, s)] P_{1}(a, s)]$$

$$\hat{o}_{1}(s) = \alpha_{0}^{-1}\beta_{0} \operatorname{sh} r_{1}a\sqrt{s} \operatorname{sh} r_{2}a\sqrt{s} \qquad (3.10)$$

Аналогично определяются w''(0, s) и w'''(0, s) из (3.9), если чиспользовать условия (3.3) и (3.4) на правой границе пластинки. При этом для заделанной пластинки получим

$$w''(0, s) = \frac{\beta_0 s Q_0(s)}{\Delta_0(s)}, \qquad w'''(0, s) = \frac{\beta_0 s Q_1(s)}{\Delta_0(s)}$$
(3.11)

а для консольной пластинки

$$w''(0, s) = \frac{\beta_0 s Q_2(s)}{\Delta_1(s)}, \qquad w'''(0, s) = \frac{\beta_0 s Q_3(s)}{\Delta_1(s)}$$
(3.12)

где

- 40

$$Q_{0}(s) = s^{-1/2} [K_{-1}(a, s) P'(a, s) - K_{-1}(a, s) P(a, s)]$$

$$Q_{1}(s) = s^{-1/2} [sK_{1}(a, s) P(a, s) - K_{-1}(a, s) P'(a, s)]$$

$$Q_{2}(s) = a_{0}^{-2} s^{-3/2} [K_{1}(a, s) P''(a, s) - K_{1}(a, s) P''(a, s)]$$

$$Q_{3}(s) = a_{0}^{-3} s^{-3/2} [sK_{3}(a, s) P''(a, s) - K_{1}(a, s) P''(a, s)]$$

$$(s) = 2 - (1 - \beta) \operatorname{ch}(r_{1} + r_{2}) a\sqrt{s} - (1 + \beta) \operatorname{ch}(r_{1} - r_{2})a\sqrt{s}$$

$$\Delta_{1}(s) = \Delta_{0}(s) + 4 (\beta^{2} - 1)$$

Подставляя выражения (3.10) в (3.8), а (3.11) и (3.12) в (3.9), после некоторых преобразований имеем:

для шарнирно-опертой пластинки

$$w_{L}(x, s) = \beta_{0}^{-1} \int_{0}^{a} \left\{ \left[\left(\sigma_{1} r_{1} - \frac{\alpha_{0}^{2}}{r_{1}} \right) G(r_{1}, x, s, \tau) + \left(\frac{\alpha_{0}^{2}}{r_{2}} - \sigma_{1} r_{2} \right) G(r_{2}, x, s, \tau) \right] w_{0} f(\tau) + \alpha_{0}^{2} \left[G(r_{2}, x, s, \tau) - G(r_{1}, x, s, \tau) \right] w_{1} \varphi(\tau) \right\} d\tau + P(x, s) \quad (3.13)$$

для заделанной пластинки

$$w_{L}(x, s) = \frac{R_{0}(x, s)}{\dot{\omega}_{0}(s)} + P(x, s)$$
(3.14)

для консольной пластинки

$$w_{L}(x, s) = \frac{R_{1}(x, s)}{\Delta_{1}(s)} + P(x, s)$$
(3.15)

где

$$R_{0}(x, s) = s^{-1/2} [K_{-1}(x, s) Q_{0}(s) + K_{-1}(x, s) Q_{1}(s)]$$

$$R_{1}(x, s) = s^{-1/2} [K_{-1}(x, s) Q_{2}(s) + K_{-1}(x, s) Q_{3}(s)]$$

$$G(r_{i}, x, s, \tau) = \frac{\operatorname{sh} r_{i} x \sqrt{s} \operatorname{sh} r_{i} (a - \tau) \sqrt{s}}{r_{i} \sqrt{s} \operatorname{sh} r_{i} a \sqrt{s}}, \quad i = 1, 2$$

Применяя к выражению (3.13) обратное преобразование Лапласа по переменной s, окончательно получим решение задачи для шарнирно-опертой пластинки

$$w(x, t) = \frac{w_0}{a \sqrt{\beta^2 - 1}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{a} x \left\{ (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) \exp[-\omega_k (\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})t] - \frac{\omega_k}{\alpha} \right\}$$

$$-(\beta-\sqrt{\beta^2-1})\exp\left[-\omega_k\left(\beta+\sqrt{\beta^2-1}\right)t\right]\bigg\}\int_0^{\cdot}\sin\frac{k\pi}{a}\tau f(\tau)\,d\tau+$$

$$+ \frac{a\alpha_{0}\omega_{1}}{\pi^{2}V\beta^{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2}} \sin \frac{k\pi}{a} x \left\{ \exp\left[-\omega_{k}\left(\beta-\sqrt{\beta^{2}-1}\right)t\right] - \exp\left[-\omega_{k}\left(\beta+\sqrt{\beta^{2}-1}\right)t\right] \right\} \int_{0}^{a} \sin \frac{k\pi}{a} \tau \varphi\left(\tau\right) d\tau \qquad (3.16)$$

$$w(x, t) = \frac{2w_0}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \omega_k t) \sin \frac{k\pi}{a} x \exp(-\omega_k t) \int_{0}^{a} \sin \frac{k\pi}{a} \tau f(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \sin \frac{k\pi}{a} \tau f(\tau) d\tau$$

$$+\frac{2w_{1}t}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{a}x\exp\left(-\omega_{k}t\right)\int_{0}^{a}\sin\frac{k\pi}{a}\tau\varphi\left(\tau\right)d\tau\quad \text{при}\quad \beta=1 \quad (3.17)$$

где $\omega_k = k^2 \pi^2 a^{-2} \sqrt{D/(2\rho h)}$ — частота собственных колебаний шарнирно-опертой пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

При получении (3.16) и (3.17) было учтено, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} P(x, s) \exp(st) \, ds = 0 \tag{3.18}$$

В частности, если начальные условия имеют вид

f(x) = 0, $\varphi(x) = \delta(x - x')$

где δ(x) — функция Дирака, то из (3.16) и (3.17) получаются

$$w(x, t) = \frac{a\alpha_0 w_1}{\pi^2 \sqrt{\beta^2 - 1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a} x' \left\{ \exp\left[-\omega_k \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}\right)t\right] - \exp\left[-\omega_k \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\right)t\right] \right\}$$

И

$$w(x, t) = \frac{2w_1 t}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a} x' \exp(-\omega_k t)$$
 при $\beta = 1$

Обратимся к случаям заделанной и консольной пластинки. В этих случаях прогиб пластинки определяется из (3.14) и (3.15) с применением обратного преобразования Лапласа по переменной s. Тогда с учетом (3.18) имеем:

для заделанной пластинки

$$w(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{R_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\Delta_0(\mathbf{s})} \exp(\mathbf{s}t) d\mathbf{s}$$

И

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{R_2(x, s)}{\Delta_2(s)} \exp(st) ds \quad \text{при} \quad \beta = 1 \quad (3.19)$$

для консольной пластинки

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{1+i\infty} \frac{R_1(x, s)}{\Delta_1(s)} \exp(st) ds$$

и

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau - i\infty}^{\tau - i\infty} \frac{R_3(x, s)}{\Delta_3(s)} \exp(st) ds \quad \text{при} \quad \beta = 1 \qquad (3.20)$$

где

$$\begin{split} R_{2}(x, s) &= l_{0}(x, s) \left\{ l_{1}(a, s) \left[P'(a, s) \right]_{\beta=1} - l_{1}'(a, s) \left[P(a, s) \right]_{\beta=1} \right\} + \\ &+ l_{1}(x, s) \left\{ l_{0}'(a, s) \left[P(a, s) \right]_{\beta=1} - l_{0}(a, s) \left[P'(a, s) \right]_{\beta=1} \right\} \\ R_{3}(x, s) &= (sa_{0})^{-1} l_{0}(x, s) \left\{ l_{0}'(a, s) \left[P'''(a, s) \right]_{\beta=1} - l_{0}(a, s) \left[P''(a, s) \right]_{\beta=1} \right\} \\ &+ (sa_{0})^{-2} l_{1}(x, s) \left\{ l_{0}'''(a, s) \left[P''(a, s) \right]_{\beta=1} - l_{0}(a, s) \left[P'''(a, s) \right]_{\beta=1} \right\} \\ &l_{0}(x, s) &= x \operatorname{sh} r_{0} x \sqrt{s}, \quad l_{1}(x, s) &= r_{0} x \sqrt{s} \operatorname{ch} r_{0} x \sqrt{s} - \operatorname{sh} r_{0} x \sqrt{s} \\ &r_{0} &= \sqrt{a_{0}}, \quad \Delta_{2}(s) &= a^{2} r_{0}^{2} s - \operatorname{sh}^{2} r_{0} a \sqrt{s}, \quad \Delta_{3}(s) &= 4 - a^{2} r_{0}^{2} s - \operatorname{sh}^{2} r_{0} a \sqrt{s} \end{split}$$

Отсюда, используя основную теорему вычетов, найдем выражения, определяющие прогиб пластинки. В результате получим:

для заделанной пластинки

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_0(x, s_k)}{\Delta'_0(s_k)} \exp(s_k t) \quad u \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_2(x, s_k)}{\Delta'_2(s_k)} \exp(s_k t)$$
при $\beta = 1$ (3.21)

для консольной пластинки

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_1(x, s_n)}{\int \Delta'_1(s_n)} \exp(s_n t) + w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_3(x, s_n)}{\Delta'_3(s_n)} \exp(s_n t)$$

при $\beta = 1$ (3.22)

где *s_k* и *s_n* — соответственно корни следующих трансцендентных уравнений:

$$\Delta_0(s) = 0$$
 и $\Delta_2(s) = 0$ при $\beta = 1$ (3.23)

$$\Delta_1(s) = 0$$
 и $\Delta_3(s) = 0$ при $\beta = 1$ (3.24)

4. Приведем численный анализ зависимости характеристик колебаний (частоты колебаний и коэффициента затухания) от напряженности магнитного поля и проводимости материала пластинки. С этой целью введем безразмерную переменную $\Omega = s/\Omega_0$, где $\Omega_0 = 9\pi^2 (2a)^{-2} \sqrt{D/(2ph)}$ — частота собственных [колебаний заделанной пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля. Полагая

$$3\pi \sqrt{\Omega} = \sqrt{2} (\lambda_0 + i \lambda_0)$$

для определения λ_0 и x_0 из (3.23) получим систему уравнений*

* Для второй ветви получается та же система уравнений.

 $\begin{cases} (1-\beta)\operatorname{ch}\sqrt{1+\beta}\lambda_{0}\cos\sqrt{1+\beta}z_{0} + (1+\beta)\cos\sqrt{1-\beta}\lambda_{0}\operatorname{ch}\sqrt{1-\beta}z_{0} = 2\\ (1-\beta)\operatorname{sh}\sqrt{1+\beta}\lambda_{0}\sin\sqrt{1+\beta}z_{0} - (1+\beta)\sin\sqrt{1-\beta}\lambda_{0}\operatorname{sh}\sqrt{1-\beta}z_{0} = 0\\ \operatorname{при} 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \end{cases}$

 $\begin{cases} (1-\beta)\operatorname{ch}\sqrt{1+\beta}\lambda_{0}\cos\sqrt{1+\beta}\varkappa_{0} + (1+\beta)\operatorname{ch}\sqrt{\beta-1}\lambda_{0}\cos\sqrt{\beta-1}\varkappa_{0} = 2\\ (1-\beta)\operatorname{sh}\sqrt{1+\beta}\lambda_{0}\sin\sqrt{1+\beta}\varkappa_{0} + (1+\beta)\operatorname{sh}\sqrt{\beta-1}\lambda_{0}\sin\sqrt{\beta-1}\varkappa_{0} = 0\\ \operatorname{пpu}\beta > 1 \end{cases}$

Результаты численных расчетов корней λ₀ и x₀, полученные при помощи ЭЦВМ, в зависимости от параметра β, характеризующего отношение силы Лоренца к упругой силе, приведены в табл. 1.

	Таблица 1						
	β	λο	×.0	Re Q	Im Ω		
	0	4.73	4.73	0	1		
	0.2	4.469	4.987	0.11	0.993		
	0.4	4.179	5.226	0.221	0.984		
	0.6	3.876	5.471	0.335	0.955		
	0.8	3.549	5.714	0.451	0.913		
	1	3.14	5.935	0.57	0.832		
	1.2	2.755	6.215	0.698	0.757		
	1.4	2.215	6.509	0.843	0.638		
	1.6	1.335	6.97	1.054	0.414		
	1.7	0	7.312	1.176	0		
	1.8	0	5.742	0.75	0		
	2	0	5.108	0.558	0		
	2.2	0	4.702	0.498	0		
1.0	2.4	0	4.404	0.437	0		
	2.6	0	4.167	0.391	0		
	2.8	0	3.971	0.355	0		
	3	0	3.805	0.326	0		
	4	0	3.221	0.234	0		

На фиг. 1—2 представлены графики зависимости коэффициента затухания (Re Ω) и частоты колебаний (Im Ω) от параметра β . Из фиг. 1 видно, что при возрастании параметра β коэффициент затухания вначале увеличивается, достигая максимума для определенного значения β , после чего начинает уменьшаться. Кривая на фиг. 2 показывает, что с увеличением напряженности магнитного поля или с увеличением проводимости материала пластинки частота колебани⁴ уменьшается и достигает значения нуль для $\beta = 1.7$. Таким образом, при $\beta < 1.7$ затухание возмущений имеет колебательный характер. В противном случае возмущения затухают без колебаний.



В случае шарнирно-опертой пластинки численные исследования решений (3.16) и (3.17) относительно $\text{Re}\,\omega$ и $\text{Im}\,\omega$ в зависимости от параметра β показаны на фиг. 3—4. В отличие от случая заделанной пластинки в этом случае колебательный характер имеет место до

1941000

2 Известия АН Армянской ССР, Механика, №

17



 $\beta < 1$ с коэффициентом затухания $(k\pi h)^2 a^{-2} \sigma B_{0z}^2/(6\rho c^2)$, после чего происходит затухание возмущений без колебания.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 22 III 1974

Գ. Ե. ԲԱՂԳԱՍԱՐՅԱՆ, Պ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

U. ú h n h n ı ú

Ուսումնասիրվում է լայնական ստացիոնար մագնիսական դաշտում .գտնվող սալերի մագնիսաառաձգական տատանումների վերաբերյալ մի շարջ .խնգիրներ ինտեգրալ ձևափոխուԹյունների մեԹոդով։

Անվերջ չափեր ունեցող սալի խնդիրը լուծվում է մադնիսաառաձգականուՅյան եռաչափ գծայնացված հավասարումների հիման վրա։ Ստացված լուծումը համեմատվում է նույն խնդրի լուծման հետ, որն ստացվում է մադնիսաառաձգականուՅյան հիպոՅեղների օգնուՅյամբ։ Ցույց է տրվում, որ տված խնդրի լուծման համար մագնիսաառաձգականուՅյան հիպոՅեղների հշտուՅյունը բնուՅադրվում է | ծ | մեծուՅյամբ, որը շատ փոքր է մեկից։

Մագնիստառաձգականունյան երկչափ Հավասարումների Հիման վրա, Հետաղոտվում է լայնական մազնիսական գաշտի ազգեցունյունը վերջավոր չափեր ունեցող մալերի առաձգական տատանումների բնույնի վրա տարբեր եզրային պայմանների դեպբում։

Կատարված է թվային անալիզ և կառուցված են դրաֆիկներ, որոնք բնութաղրում են մարման գործակցի և հաճախականության փոփոխությունը կախված էլեկտրոմագնիսական ծագում ունեցող ուժի և առաձգական ուժի հարաբերությունից։

ON VIBRATION OF CONDUCTING PLATES IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, P. A. MKRTCHIAN

Summary

The problem on magnetoelastic vibration of conducting plates in a transverse stationary magnetic field is considered by the method of integral transformations.

The problem on an infinite plate is solved in terms of three-dimensional linear equations of magnetoelasticity. The results obtained are compared with those for the similar problem being solved by meansof the magnetoelastic hypothesis and the precicion of the latter for the problem under examination is shown to be characterized by the value $|\delta|$ which is much less than unity.

The influence of a transverse magnetic field on the mode of elastic vibration of a finite plate under various conditions of support at ends is investigated through two-dimensional equations of magnetoelasticity.

A numerical analysis as well as graphs characterizing variation in the damping factor and frequency, depending upon the relation between Lorenz's and elastic forces are presented.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, в. 2, 1971.
- 2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В., К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, т. 37, вып, 1, 1973.
- 3. Белубекян М. В. Условия отсутствия электрического заряда в задачах электроматнитоупругости. Докл. АН Арм.ССР, т. VI, № 5, 1973.
- 4. Снеддон И. Преобразование Фурье. ИЛ, М., 1955.
- 5. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. О колебаниях проводящих пластин в магнитном поле. МТТ, 1974, № 2.
- 6. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехтеориздат, М.-Л., 1950.

20.840.505 002 ЭРХЛРРЗАРЬБЕР ОБОЗОРОБЕР ХЫЗЫЦАР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Սեխանիկա

XXVIII, Nº 1, 1975

Механика

з. н. даноян

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Рассматривается плоская задача о распространения магнитоупругих колебаний в изотропной безграничной среде от точечного источника типа мгновенного имиульса. Считается, что внешнее магнитное ноле постоянно и параллельно плоскости днижения.

Используя метод комплексных решений Смирнова-Соболева [1-3], строится решение, характеризующее магнитоупругие колебания от точечного источника типа мгновенного импульса. Проводится исследование полученных решений в зависимости от интенсивности внешнего магнитного поля.

На основе этих решений изучаются геометрические формы фронтов быстрых и медленных магнитоупругих волн в зависимости от интенсивности внешнего магнитного поля.

Аналогичные вопросы для анизотронных тел при отсутствии магнитного поля рассмотрены в [3-5].

§1. Постановка задачи, уравнения движения и их решения

Согласно [6—13] линеаризованные уравнения движения идеально проводящего упругого изотропного тела в постоянном однородном магнитном поле с заданным вектором напряженности *H*₀ после пренебрежения токами смещения имеют вид

$$G \Delta u + (i + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + R = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
 (1.1)

где и вектор упругого смещения, р магнитная проницаемость, р плотность, л и G упругие постоянные Лямэ среды, R сила электромагнитного происхождения, определяемая следующим образом:

$$R = \frac{\mu}{c_0} (j \times H_0) = \frac{\mu}{4\pi} [\operatorname{rotrot} (u \times H_0)] \times H_0$$
(1.2)

ј – вектор плотности индуциронанного тока, с_о – скорость света в вакууме.

При этом векторы индуцированного электромагнитного поля выражаются через вектор перемещения и по следующим формулам:

$$E = -\frac{n}{c_0} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times H_0 \right), \qquad h = \operatorname{rot} \left(u \times H_0 \right) \tag{1.3}$$

Отнеся упругую среду к прямоугольной системе координат x, y, z, рассмотрим случай, когда все искомые величины не зависят от од-

ной из координат, например с, и упругое перемещение по направлению соответствующей координаты отсутствует, то есть

$$u_{i} = u_{i}(x, y, t), \quad u_{i} = 0$$

$$u_{i} = h_{i}(x, y, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

Для существовання решений вида (1.4) необходимо, чтобы нектор напряженности внешнего магнитного поля был либо перпендикулярен к плоскости движения $xy (H_{01} - H_{02} = 0)$, либо параллелен $(H_{02} = 0)$ [13]. Первый случай соответствует изотропному действию магнитного поля, второй случай — анизотропному.

В первом случае, то есть при изотронном действии магнитного поля, задача о распространении магнитоупругих колебаний от точечного источника решлется совершенно аналогично случаю отсутствия внешнего магнитного поля.

Во втором случае ($H_{03} = 0$), то есть когда влияние магнитного поля внизотронно, совмещая ось x с направлением вектора H_0 , из (1.1) с учетом (1.2) и (1.4) получим

$$a^{2} \frac{\partial^{2} u_{1}}{\partial x^{2}} + b^{2} \frac{\partial^{2} u_{2}}{\partial y^{2}} + c^{2} \frac{\partial^{2} u_{2}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^{2} u_{1}}{\partial t^{2}}$$

$$b^{2} \frac{\partial^{2} u_{2}}{\partial x^{2}} - a^{2} \frac{\partial^{2} u_{3}}{\partial y^{2}} + c^{2} \frac{\partial^{2} u_{3}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^{2} u_{3}}{\partial t^{2}}$$
(1.5)

$$a_{1}^{2} = a^{2} + b_{1}^{2} = b^{2} + u^{2}, \quad x^{*} = \mu H_{0}/4\pi \phi, \quad c^{2} = a^{*} - b^{2}$$

$$a^{*} = (\kappa + 2G)/\phi, \quad b^{*} = G/\phi, \quad H_{0}^{2} = H_{01}^{2} + H_{02}$$
(1.6)

а и <u>b</u> — скорости продольных и поперечных упругих воли при отсутствии внешнего магнитного поля, « — скорость Альфвена.

Согласно [3-4, 13], система уравнений имеет класс решений слелующего вида:

$$u_{1}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Re} \left\{ \int_{0}^{t_{k}} p_{k}(\zeta) W_{k}(\zeta) d\zeta \right\}$$

$$u_{2}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Re} \left\{ \int_{0}^{t_{k}} q_{k}(\zeta) W_{k}(\zeta) d\zeta \right\}$$
(1.7)

где

$$p_{k}(\theta) = c^{2\beta_{k}}(\theta), \quad q_{k}(\theta) = a^{2\beta^{2}} + b^{2\beta_{k}}(\theta) - 1$$
(1.8)

Здесь комплексные переменные 🦕 как функции от x, y, t, определяются соотношениями

$$\lambda_k \equiv t - \vartheta_{\mathbf{x}} + \lambda_k \left(\vartheta \right) y + \gamma \left(\vartheta \right) = 0 \tag{1.9}$$

где величины I_k являются корнями дисперсионного уравнения системы (1.5)

$$a_1^2 b^2 v^4 - A(b) v^2 + B(b) = 0 \tag{1.10}$$

;(6) произвольная аналитическая функция.

Коэффициенты уравнения (1.10) определяются следующим образом:

$$4(b) = K_1 - Lb^2, \quad B(b) = (1 - a^2b^2)(1 - b^2b^2)$$

$$K_1 = a^1 + b^2, \quad L = a_1^2b^2 + b_1^2a^3$$
(1.11)

В решении (1.7) под следует понимать встви алгебраической функции , однозначной на соответствующей римановой поверхности, а под W_{\star} – встви произвольной аналитической функции W, однозначной на указанной выше римановой поверхности.

Если в соотношении (1.9) принять $\gamma(\theta) = 0$, то получим однородные, нулевого измерения, решения системы (1.5). При этом получим

$$\delta_k = 1 - b^2 + i_k(0) \tau_i = 0, \qquad x_i = y/t \tag{1.12}$$

Можно доказать, что все однородные, нулевого измерения решения системы (1.5) выражаются формулой (1.7).

Из предыдущих рассуждений следует, что для того, чтобы построить решение, характеризующее колебания от точечного источника, помещенного в начале координат, следует исследовать алгебраическую функцию $\lambda(b)$, удовлетворяющую уравнению (1.10), петви этой функции и соответствующую риманову поверхность.

Решения уравнения (1.10) представим в виде

$$\dot{k} = \pm h_k, \quad \dot{h}_k = \sqrt{\frac{A(0) \pm (-1)^k \sqrt{Q(0)}}{2a_1^2 b^2}}, \quad \dot{k} = 1, 2 \quad (1.13)$$

rge

$$Q(\theta) = A^{2}(\theta) - 4a_{1}^{2}b^{2}B(\theta) = N^{2}\theta^{4} - 2K_{1}N^{6} + K^{2}$$

$$K_{2} = a_{1}^{2} - b^{2}, \qquad N = \sqrt{c^{2}}$$
(1.14)

Для выделения однозначных регулярных ветвей алгебранческой функции 7(⁶) найдем особые точки атой функции, которые являются корнями дискриминанта уравнения (1.10) [14], то есть кориями следующего уравнения:

$$D = 16 a_1^2 b_2^2 B(b) Q^2(b) = 0 \tag{1.15}$$

(1.15) эквивалентно следующим уравнениям:

$$B(5) = 0, \quad Q(5) = 0 \tag{1.16}$$

Уравнения (1.16) имеют, соответственко, следующие кории [13]:

$$\theta = \pm b_3^0; \quad \theta = \pm b_4^0, \quad b_3^0 = b_1^{-1}, \quad b_4^0 = a^{-1}$$
 (1.17)

К влоской задаче распространения маснитоупругих колебаний

$$\mathbf{6} = \pm b_1^0; \quad \mathbf{5} = \pm b_2^0, \quad \mathbf{6}_{1,2}^0 = (a_1 \pm b) N^{-1/2} \tag{1.18}$$

Взаниное расположение точек (1.17) и (1.18) на вещественной оси комплексной плоскости и в зависимости от величины у изучено в работе [13] и имсет Бид

1.
$$0 < \theta_4 < \theta_5 < \theta_2^0 < \theta_3^0 <$$
при $0 < x < x_1$
2. $0 < \theta_4 < \theta_5 < \theta_2^0 < \theta_5^0 <$ при $0 < x < x_1$
3. $0 < \theta_4^0 = \theta_3 < \theta_2^0 < \theta_5^0 < \theta_2^0 <$ нри $x = x_2$ (1.19)
4. $0 < \theta_4^0 < \theta_4^0 < \theta_2^0 < \theta_5^0 < \theta_1 + \infty$ при $x_2 < x < x_3$
5. $0 < \theta_5 < \theta_4^0 = \theta_4 < \theta_5^0 < \theta_5^0 <$ но при $x_2 < x < + \infty$

где $\theta_5'(\theta_5 = L^{-1/2}K_1^{1/2})$ — корин уравнения $A(\theta) = 0$, а величины x_1 , x_2 определяются следующим образом:

$$x_1 = [2^{-1}b(1) \ \overline{4a^2 - 3b^2 - b}]^{1/2}, \qquad x_2 = 1 \ \overline{a^2 - b^2}, \qquad x_3 = ab \qquad (1.20)$$

Так как точки $= b_{13}^{-1}$ суть простые пули $Q(\frac{1}{2})$, то впутренний радикал, входящий в (1.13), будет однозначной функцией на плоскости 0 с разрезами ($\pm b_1$, b_1) вдоль вещественной осв. Фиксируем значение данного радикала условием, чтобы он был положительным на верхней части мнимой оси, то есть при 0 = il (l > 0).

Согласно работе [13], для внешних радикалов в зависимости от величины и имеем слодующие точки разветвления:

при	$0 \le z < z_1$ для $k = 1$ точки $\pm b_4$, для $k = 2$ точки $\pm b_1$
при	$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1\theta_1^0 - \theta_1^0 = +\theta_1(k-1), -\theta_3^0(k-2)$
прн	$z_1 < z = z_3 - \pm b_{a_1}^0 \pm b_3^0 (k = 1)$, не имеет $(k = 2)$
при	$x = x_0 = -b_4^0, b_2(k = 1), \ -b_4^0(k = 2)$
при	$x_3 < y = -\infty = \pm \frac{1}{23}(k-1), \pm \theta_1^0(k-2)$
при	$x = -$ не имсет $(k = 1), \pm \theta_1^0$ $(k = 2)$

На основания полученных результатов н ℓ_2 нужно рассматривать как ветви алгебранческой функции ℓ_1 однозначной на римановой поверхности, составленной из плоскостей θ_1 и θ_2 , склеенных пдоль купюр, соединяющих точки разветвления θ_1^0 и θ_2^0 . При этом, в зависимости от величины к на плоскостях θ_1 и θ_2 , вдоль вещественных осей следует провести следующие разрезы:

при 0 < х z_1 на плоскости $\theta_1 = (-\theta_4, + \theta_4^0)$, на плоскости $\theta_2 = (-\theta_3^0, + \theta_3^0)$.

23

при $\mathbf{x} = \mathbf{z}_1$ на $(\pm \infty, \pm \theta_1^0), (-\theta_1^0, \pm \theta_4^0),$ на $\theta_2 = (\pm \infty, \pm \theta_1^0),$ $(-\theta_2^0 = \theta_{3,}^0, \pm \theta_2^0 = \pm \theta_3^0),$

при $x_1 < z < x_2$ на $\theta_1 - (\pm \dots, \pm \theta_1^0)$, $(\pm \theta_2, \pm \theta_3^0)$, $(-\theta_4^0, \pm \theta_4^0)$, на $\theta_2 - (\pm \infty, \pm \theta_1^0)$, $(-\theta_2^0, \pm \theta_2^0)$,

при $x = x_2$ на $\theta_1 = (\pm \infty, \pm \theta_1), \quad (\pm \theta_2^0, \pm \theta_4^0 = \pm \theta_3^0), \quad (-\theta_4^0 = -\theta_3^0, -\theta_4^0 = +\theta_3^0), \quad (-\theta_4^0 = -\theta_3^0), \quad (-\theta_4^0 = -\theta_3^0),$

при $x_2 \le x < x_3$ на $\theta_1 - (\pm \infty, -\theta_1), (\pm \theta_2^0, \pm \theta_4^0), (-\theta_3^0, \pm \theta_3^0),$ на $\theta_2 - (\pm -, \pm \theta_1^0), (-\theta_2^0, \pm \theta_2^0),$

при $z = z_3$ на $\theta_1 = (\pm -, \pm \theta_1^0), (-\theta_3^0, \pm \theta_3^0),$ на $\theta_2 = (\pm -\alpha_1, \pm \theta_1), (-\theta_2^0 = -\theta_4^0, \pm \theta_2^0) = +\theta_4^0),$

при $z_3 < z < + =$ на $\theta_1 = (-\theta_3^0, -\theta_3^0)$, на $\theta_1 = (-\theta_4^0, -\theta_4^0)$.

при $x = -\infty$ на θ_1 — разрезы отсутствуют, на $\theta_2 = (-9_4, + \theta_4^0)$.

Остальные корни (1.10), отличающиеся от рассматриваемых h_k знаком, будут относиться к другим римановым поверхностям, подобным указанным выше и сосдиняющимся с ними в соответствующих разрезах.

На фиг. 1 и 2 приведены римановы поверхности для случаев $0 < x < x_1$ и $x_1 < x < x_2$, соответственно.



Фиг. 1.





Согласно [13], области вещественности функций ¼ на вещественных осях плоскостей ¼ римановой поверхности в зависимости от величины × приведены в табл. 1. Таблица 1

No No.	Случан	Для Х.		Для	
1	2. 0	0 0 0 ⁰	—	0 9 93	
2	0<2<21	0.0		$0 = 0 = 0_{21}^{(0)}$	
3	z z _i	0 0 64	9-12.25	0 0 023.5	
4	$x_1 x < x_2$	0 4	1 0 02	0 0 0	
5	2-21	0.6	$b = b_2^0$	0 0 9	
6	スコペス・ジスコ	0 4	1 6 2p	0 0 5	
7	a nika	0 4 9	$\theta = \theta_{2, 4, 5}^{0}$	0 4 12,1,5	
8	$x_0 < x < -\infty$	0 6	-	0 0 14	
9	7. · oc	$\eta = \theta_3^{-1} 0$		0 9	

Фиксируем значения и г. на римановой поверхности условием. чтобы они были положительными при 5 = 1/(1>0).

Следовательно, однородное решение системы (1.5) следует записать в следующей форме:

$$u_{1}(\zeta, \eta) = \sum_{k=1}^{2} \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\eta_{k}} p_{k}(\zeta) W_{k}(\zeta) d\zeta\right\}$$

$$u_{2}(\zeta, \eta) = \sum_{k=1}^{2} \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\eta_{k}} q_{k}(\zeta) W_{k}(\zeta) d\zeta\right]$$
(1.21)

где W_k — ветви произвольной аналитической функции W_k однозначной на римановой поперхности функции I(b), пид которой вивисит от величины х, а переменные Φ_k определяются соотношениями

$$1 - \theta_{1} + t_{1} \eta = 0, \quad 1 - t_{2} \eta = 0$$
 (1.22)

Подставляя значения μ_k из (1.13) в соотношения (1.22) и освобождаясь от радикалов, приходим к одному и тому же ураннению

$$A_{1} - A_{1} \beta_{k}^{3} + A_{2} \beta_{k}^{2} - A_{3} \beta_{k} - A_{4} = 0$$
 (1.23)

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0}(z, \eta) &= a_{1}^{2}b^{2}z^{4} + L^{2}\eta^{2} + a^{2}b^{2}\eta^{4} \\ \mathcal{A}_{1}(z, \eta) &= -2z(2a_{1}^{2}b^{2}z^{2} + L\eta^{2}) \\ \mathcal{A}_{2}(z, \eta) &= -(K_{1}\eta^{4} + K_{1}z^{2}\eta^{2} - 6a_{2}^{2}b^{2}z^{2} - L\eta^{2}) \\ \mathcal{A}_{3}(z, \eta) &= 2z(K_{1}\eta^{2} - 2a_{1}^{2}b^{2}) \\ \mathcal{A}_{4}(z, \eta) &= 2z(K_{1}\eta^{2} + a_{1}^{2}b^{2}) \\ \mathcal{A}_{4}(z, \eta) &= n^{4} - K_{4}\eta^{2} + a_{1}^{2}b^{2} \end{aligned}$$

В каждой точке плоскости – уравнение (1.23) имеет четыре кория. При с = 0, ч – 0 все кории уравнения (1.23) обращаются в бесколечность, что соответствует наличию источника колебаний в начале координат. В случае точечного источника, помещенного и пачале $i = 0, \tau = 0, \phi$ орма $A_0(i, \tau_i)$ из (1.24) должна быть определенной, что приводит к неравенству [3]

$$x^{2}[4a^{4}b^{2} + z^{2}(a^{2} - b^{2})^{4}] = 0$$
(1.25)

являющемуся условием вполяе гиперболичности системы уравнений (1.5).

Как известно, фронты воли могут быть получены как огибающие прямых (1.22) при нещественных звачениях и и и, связанных условисм (1.10). Уранвения фронтов воли будут

$$z_k = -v_k l(v_k - 1) - v_k = -1 l(v_k - 0_k v_k)$$
 (1.26)

Нормальные скорости распространения боли имеют выражения [13]

$$u_k = 1 (1 t_k^2 - \lambda_k^2), \quad k = 1, 2$$
(1.27)

Очевидно, что если пужно получить решение, характеризующее упругие колебания от гочечно, о источника при наличии магнитного поля, необходимо функцию W в (1.21) выбрать так, чтобы вещественные части W и W, обращались в нуль на берегах разрезов, где соответственно ', и вещественны.

§2. Геометрия полнопых фронтов. Условня существования остроугольных кромон

Расемотрим геометрическую форму фронтов ноли в зависимости от величины и на плоскости 20.

Посхольку волновые фронты симметричны относятельно координатных осен "...достаточно изучить их участки, соответствующие симметричным участкам разрезов плоскосте! в 2.

Пусть точкам b_1 и b_2 , находящимся на бересах разрезов вещественности функция ℓ_1 и ℓ_2 , соответствуют точки (ℓ_1, ℓ_3) и (ℓ_1, ℓ_2) на фронтах воли (фиг. 3).



Фнг. 3.

Обозначия через а, углы между отрицательной полуосью у и нормалями к фронтам в выбранных точках, будем иметь

$$tga_1 = \theta_1 h_2, \qquad (2.1)$$

Обозначив через 🦕 углы между отрицательной полуосью 4 и лучами, соединяющими выбранные точки ил фронтах с началом координатполучим

$$tg_{12} = r_1, \quad tg_{12} = r_2$$
 (2.2)

Изучение гоометрических форм фронтов воли требует исследотания поведения функций для различных значений », полученных вы (2.1) — (2.2)

$$V_{k} = \frac{1}{2a^{2}b^{2}r_{k}}$$
 $L = (1 - \frac{1}{1}Q)$ (2.3)

$$\left(\frac{\theta_k}{i_k}\right) = \frac{1}{2a^2 b^2 i_k^3} + \frac{1}{i_k} = \mathcal{K}_1 + (-1)^2 + \frac{1}{1-Q}$$
(2.4)

$$D_{k} = \frac{D_{k}}{4a_{1}b_{1}}, \quad D_{k} = 2a_{1}^{2}b^{2}(...+...) - 0$$
(2.5)

$$= \frac{(-1)^4 8 a_1^2 b^2 N^2 b_k^2}{1}$$
(2.6)

$$D_{*} = (-1)^{*} 48a_{*}^{*}b^{*}N^{\pi r_{l_{k}}r_{k}^{*}} \frac{K_{2} - K_{1}Nr_{k}}{10}$$
(2.7)

1. Пусть 0 < × < z₁.

В этом случае функция r_1 имеет вещественные значения на берегах разреза (- - θ .) плоскости r_2 . функция r_3 на берегах разреза (- $(q_1 + \theta_2^0)$) плоскости (фиг.

Изучим участки фронтов воля, соответствующие значениям верхних берегов разрезо

 $0 \qquad \qquad u \quad 0 \leqslant b_2 \leqslant b^0 \tag{2.8}$

Точкам $a_1 = 0$ и ' 0, стласно (1.26), соотпетатнуют точки волновых фронтов $\tau_0 = -a_1$ и = -b на оси . точкам $= \theta_1^a$ и $\theta_2 = -$ точки а и $z = b_1$ на оси . Промежуткам (2.8) соответствуют участки фронтов, границами которых булут указанные точки на координатных осях.

Согласно [3—5], основываясь на (2.1—2.7), можно доказать, что в втом случае углы z_1 . z_2 , монотонно возрастают от 0 до 90°. Следонательно, участкам (2.8) нерхних берегов разрезов римпиовон поперхности соотнетствуют участки фронтов ноли в четвертом квадранте плоскости t_7 , представляющие собой выпуклые кривые, концы которых подходят к координатиым осям под углом 90. Фронты воли представляют собой выпуклые замкнутые кривые с центром в начале координат. Внешний фронт, соответствующий k = 1, будет фронтом быстрой магнитоупругов волны. Внутренний, соответствующий k = 2, - фронтом медленной магнитоупругой волны (фиг. 4).



2. Пусть 21 < x < 2.

Винду того, что в этом случае форма фронтов воли сущестиенно изменяется, следует провести более детальный анализ.

Функция -, имеет вещественные зпачения на берегах разрезов (— и (⁵, - ¹) плоскости функция - на берегах разреза — + ⁶) плоскости ⁶, (фиг. 2).

Сначала научим участок фронта волны, соотчетствующий значениям 0 < 4 0; верхнего берега разреза плоскости. Точкам $\theta_a = 0$, $= \theta_1^a$ соответствуют точки эронта (0, -b) и $(1/b^a, 0)$, расположенные на координатных осях 5, и. Так ках = 0, = .(9) = 2a; >0, $(\theta_2/\mu_2)' = 0$, то $(\theta_2, -1)$ да, монотовно возрастает от нуля до конечного значения $\theta_2 h_2(\theta_2)$, угол α_a монотовно позрастает от нуля до значения $\pi_2(\theta_2^0) = 90^2$. С другоя стороны, так как точка находится за пределами участка $(0, \theta_2)$, то $D_2 < 0$. Имеем также

$$D^{2}(0) = -\frac{2a_{1}^{2}(LK_{2} + NK_{1})}{K_{2}} < 0, \quad D_{2}(b_{2}^{0}) =$$

Следовательно, $D_{*}(b_{*}) < 0$ и 4 $(b_{*}) < 0$. Тогда, согласно (2.2), угол 3 моноточно возрастает от 0 до 90.

Таким образом, при 21 < 22 участку (0, 52) перхнего берега разреза плоскости 6, соответствует участок фронта нолны и четвертом квадранте, представляющий собоя выпуклуп-кривую, которая пыходит на точки (0, -b) под прямым углом к оси η и нодходит к оси : в точке $(1/6_2^0, 0)$ под острым углом $\alpha_2(5_2^0) < 90$.

Согласно [3—5] легко показать, что участку (0, θ_{i}^{m}) верхнего берега разреза плоскости θ_{i} соответствует участок фронта волны в четнертом квадранте, представляющий собой выпуклую кривую, концы которой подходят к координатным осям под прямым углом, соответственно, в точках (α , 0) и (0, α_{i}).

Установим, какой участоч фронта волны соответствует значениям $1 \le 6_1$ 6° нижнего берега разреза плоскости. Очевидно, что на этом берегу разреза функция имеет положительные значения. Точкам $b_1 = b_3^\circ$ и $b_1 = 0$ соответствуют точки фронта волны $(b_1, 0)$ и $(1/b_2^0, 0)$, расположенные на положительной полуоси :. Так как $z < z = c_1$ $q_1(b_1) < 0$.

$$p_1(\theta_2) = -2b^2a_1^2(c^2-1)(bK_1-L) < 0$$

то $(\theta_1/\theta_1)^2 < 0$ на участке (θ_1, θ_2) , следовательно, на этом участке $(\theta_1/\theta_1)^2 < 0$ и θ_1/θ_1 монотонко убывает от — до значения $(\frac{260}{2}, \frac{260}{2}) = (\theta_2, -(\theta_2^0))$, угол τ_1 монотонко убывает от 90 до значения $(\frac{200}{2}, \frac{200}{2}) = a_2(\theta_2^0) < 90^2$.

С другой стороны, так как точка θ_0 то $D_1 > 0$ и $D_1 (\theta_0)$ (1) $D_1 (\theta_1) < 0$, $D_1 (\theta_2) - \infty$. Следовательно, в точке θ^* из участка (θ^0, θ^0_2) функции D_1 и меняют знак с минуса на плюс.

В интервале (6, 6*) правжя часть первого равенства (2.2) монотонно возрастает от до значения $-i_1$ ($<0, tg_{21}$ также монотонно возрастает от до значения i_1 (*) $<0, yron <math>z_1$ монотонно возрастает от до z_1 (z_2).

В интернале (*, правая часть перлого равенства (2.2) монотойно убывает от значения $\lambda_1(5^*)$ до , угол β_1 монотопно убывает от значения $\hat{\gamma}_1(\theta^*)$ до 90. Следовательно, нижному берегу разреза ($-\theta_{3^*}^*$ —) плоскости , соответствует участок фронта волны в первом кнадранте.

Один отрезок рассматриваемого участка, соответствующий интервалу (6_{2}^{0} , 6^{*}), представляет выпуклую кривую, которая выходит из гочки ($1/6_{2}^{0}$, 0) под острым углом к оси и будет продолжением выпуклого участка фронта волны, соответствующего интервалу (0, 5^{0}) верхнего берега разреза плоскости δ_{2} , так как $2, (5_{2}^{0}) = -12^{0}$. Другой отрезок, соответствующий интервалу (5^{*} , 6^{-1} представляет вогнутую кривую, один конец которой соединен точкой возврата перного рода с первым отрезком, другой конец подходит к оси ; в точке (b_{1} , 0) под прямым углом.

Таким образом, в случае 7, 7 высшний фронт будет фронтом быстрой магнитоупругой волны, соответствующим берегам разре-



При $z \to 0$ из первого случая получается, что волновые фронты представляют собой окружности с центром в начале координат с радиусами $b_2 = b_1$, $a_1 = a_2$.

При участки (6%) вещественности функцин 4 вырождаются 5 точки причем треугольные части фронта медленной нолны исчезан т, преврыдаясь з точки. Фронт становится замклутоп выпуклой вргвой, пересскаясь с осью з в двойных точках, которые получаются з формул (1.26) при 5 62 когда k = 1 и k = 2.

3. Пусть x - 2 с.

Этот случай аналогичен конической рефракции в кристаллооптике [15]. Основываясь на чрист алооптической аналогии, как это делается в [12], на циг. 6 приведены полновые фрокты, соответствующие этому случаю. Отметим, однако, что случай рефракции требует специального исследования. 4. Пусть $x_2 < x < x_3$.



Dur. 6.

Чтобы получить раманову поверхность функции i(v), следует на фиг. 2 поменять местами точки $\pm b_3^0$ и

В пределе, когда $x \to x_1$, участки ($\pm - - b_2^0$) вырождаются в точки $\pm b_4^0 = \pm - \phi$ ронт медленной волны становится выпуклой замкнутой привой, которая пересекается с осью в двойных точках, координаты которых определяются на формул (1.26) при b_4^0 , b_5^0 , когда k = 1 и k = 2.

5. Пусть 2₃ < 2 < 4 от.

В этом случае функция t_1 вещественна на берегах разреза (— θ_4^0 , + θ_3) плоскости θ_1 , а функция t_2 — на берегах разреза (— $(-\theta_4^0)$, плоскости θ_3 .

Рассуждая точно так же, как в случае $0 < x < x_1$, можно показать, что фронты волн представляют собой ныпуклые замкнутые кривые с центром в начале координат; пнешний фронт, соответствующий k = 1, будет фронтом быстрой волны, внутренний, соответствующий k = 2. фронтом медленной волны.

При х -- -- пяешний фронт, то есть фронт быстрой волны, вырождается в бескопечно удаленную точку.

Выполненные исследования дают возможность установить услония существования или отсутствия остроугольных кромок на фронтах магнитоупругих воли: когда $0 \times \le$ и $x_3 \times < -$, кромки отсутствуют, когда (\times кромки существуют, когда $\times = x_1$ имсет место коническая рефрахция магнитоупругих ноли.

Заметим, что, в отличие от сказанного, в магинтной газодинамике наличие остроугольных кромок обязательно [16]. Это объясняется илиянием поперечных упругих волн, так как при b = 0 области отсутствия кромок в магинтоупругости исчезают ($z_0 = 0$, $z_3 = +$).

Автор благодарит участников семинара "Электродинамика деформируемых сплошных сред" Института механики АН Арм ССР за обсуждение работы.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 19 IV 1974

🛸 հ. ԳԱՆԹՑԱՆ

ԿԵՏԱՅԻՆ ԱՎԲՅՈՒԲԻՑ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՉԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏԱԲԱԾՄԱՆ _ԱԲԹ ԽԴԴԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

վայութեմ մեկլակական անդնությունը հետոնակություն և հարաների հաղուլսի բնույնի տալին որը բից մազնիստառաձգական տատանումին դեր ման չարերին հիրորը։ Ակզբնական մազնիստկան գաշտը ենքագրվում է չաս ատառուն և զուցան

Ամիրնով-Առթոլնը կոմպլերս լուծումների մեթիոդի Դիման վրա ստացված են լուսումներ, որոնցոլ բնութագրվում են հատուրն աղբյուրից ապրածվող մացնիստառածգական տատանումները.

Բերված է հասացվուծ լուծումների շետազոտումը և Նրա շիման կրա ուոումնասիրված են արաղ և գունդաղ մազնիսաառաձգական ալիքների շակատների երկրաչափական շները՝ կախված սկղբնական մագնիսական դաշտի ինտենսիվուքի շնից։

ON A PLANE PROBLEM OF PROPAGATION OF MAGNETOELASTIC VIBRATION FROM A POINT SOURCE

Z. N. DANOIAN

Summary

A plane problem of propagation of magnetoelastic vibration in anisotropic infinite medium from a point source of an instantaneous impulse type is considered. The primary magnetic field is assumed to be constant and parallel to the plane of propagation.

The solutions, characterizing the magnetoelastic vibration from a point source, are obtained on the basis of Smirnov-Sobolev's complex solutions.

The solutions derived are analysed, and in their terms the geometry of fronts of fast and slow magnetoelastic waves are examined, depending upon the strength of the primary magnetic field.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Франх Ф. и Милес Р. Дифференциальные и интогральные уравнения математической физики, гл. 12. ОНТИ, М.-А., 1937.
- 2. Слирнов В. И. Курс высшей математики, т. З. часть 2. Изд. "Наука", М., 1969.
- 3. Свекло В. А. Упругие колебания андиограниого теля. Уч. зап. АГУ, 1949, вып. 17.
- 4. Осипов И. О. К плоской задаче распространения упругих колебании в анизотронной среде от точечного источника. ПММ, т. 33, вып. 3, 1969.
- 5. Осилов И. О. О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в янизотронной среде от зочечного источника. ИММ, т. 36, вып. 5, 1972.
- 6. Кенлис-Борок В. И., Мокик А. С. Могнитоупругие волны и граница з много вдра. Изв.АН СССР, сср. геофиз., № 11, 1959.
- Kollski S. The propagation of a non-linear loading wave in a magnetic field for a perfect conductor Proc. Vibr. Probl., Nº 5, 1960.
- 8. Кысачевский Л. Я. Об отраженин магнитоэвуковых поли. ПММ, г. 26, вын. 5, 1962.
- Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н. Распространение упругих воли в анизотропном полупространстве при наличии часнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 2, 1972.
- 10. Амбарцумян С. А. Багдасарян Г. Е., Белубскин М. В. К трехмерной задочмагинтоупругих колебаний пластинки, ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
- Селезов И. Т. Распространение магнитоупругих воли напряжения от нили дряческой полости в проводящей среда. ИМТФ. 2, 1969.
- 12. Bazer J. Geometrical magnetoelasticity. Goophys. J. Roy. Astron. Soc., N. 1, 1971.
- 13 Декоян З. Н.К плоской задаче распространения магнитоупругих воли и идеально проводящих изотроиных средах. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVII, № 5, 1974.
- 14. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций, Изд. "Наука", М., 1968.
- 15 Курант Р Уравнения с частными проязводными. Изд. "Мир", М., 1964.
- 16. Шерклаф Дж. Кура магнитаой гидроднаямики. Изд. "Мар", М., 1967.

20.840.405 ПО2 ФРУПРОЗПРОБОРО U40.960760.867640.967 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЯ ССР

Մեխանիկու

XXVIII, Nº 1, 1975

Механика

А. Н. МАРТИРОСЯН

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Решение ряда смешанных динамических задач для жидкой ими упругой среды дано в [1, 3]. В данной статье рассматринается плоская задача о движении анизотровной упругой среды при наличии трещины вдоль отрицательной действительной оси под воздействием сосредоточениой силы, приложенной в искоторой точке x = l на обоих берегах трещины. Для изотровной среды ата задача рассматриналась в [4]. Здесь указанная задача решена для анизотровной среды сначала при периодических во времени граничных условиях, а далее с помощью обратного преобразования по времени найдско решение исстационарной задачи во всей плоскости в форме В. И. Смирнова-С. Л. Соболева [3]. В частности, для изотровной среды в точке x = 0, y = 0 полученное решение приводится к решению, найденному другим нутем в [4]. Найдено также фунд ментальное решение для анизотровной среды.

 Уранисния движения в перемещения: для анизотронной среды и плоском случае при отсутствии массовых сил имеют вид [5]

$$a\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} + d \frac{\partial^{2}u}{\partial y} + c \frac{\partial^{2}v}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}$$

$$c\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y} + d \frac{\partial^{2}v}{\partial x^{4}} + a \frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}} = \frac{\partial^{2}v}{\partial t^{2}}$$
(1)

Рассмотрим следующую граничную задачу при наличии полубесконечного разреза:

$$z_{yy} = p \left[(c-d) \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} \right] \simeq -P\xi \left(x+l \right) e^{-i\omega t} \quad \text{mpa} \quad y = 0, \ x < 0$$

v = 0 при y = 0, x > 0; $s_{xy} = pd\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$ при y = 0, $x \in (-\infty, \infty)$

 $u = O(r^{1,2}), v = O(r^{1,2})$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - (условие на ребре¹ (2)

Здесь считается, что физические величины задаются в виде $f(x, y) \exp(-i\varphi t)$, где f(x, y) — некоторая функция, « — частота колебаний, t — время, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Задача считается симметричной относительно оси х. Согласно [3]

$$u(x, y, t) = u(x, y) e^{-i\omega t}, v(x, y, t) = v(x, y) e^{-i\omega t}$$
(3)

Подставляя (3) в (1), имеем

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -$$

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - w^2 v$$
(4)

Решение задачи будем искать в виде

$$u = \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(i) e^{\frac{i(x+y)}{1-x+y}} di$$

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(i) e^{\frac{i(x+y)}{1-x+y}} di$$
(5)

Здесь А, (1), В, (1), k, (1) — неизнестные функции. Подставляя (5) и (4), получим уравнения, решая которые булем иметь

$$B_{n} = -\frac{M_{n}}{c^{2} \bar{p}_{n}} A_{n}; \qquad M_{n} = d_{i_{n}}^{32} - a u_{i_{n}}^{2} = p_{n}^{2} - i_{i_{n}}^{2}$$

$$B_{n} = -\frac{M_{n}}{c^{2} \bar{p}_{n}} A_{n}; \qquad M_{n} = d_{i_{n}}^{32} - a u_{i_{n}}^{2}, \qquad u_{n}^{2} = p_{n}^{2} - i_{i_{n}}^{2}$$

где $L = a^2 - d^2 - c^2$, $p_1^2 = \frac{a^2}{a}$, $p_2^2 = \frac{a^2}{d}$ при c = a - d, $k_n = p_n$. Подставляя (6) в (5), находим решение

$$\overline{u} = \sum_{i} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(i) e^{i(\lambda_n - y\beta_n)} di$$

$$\overline{v} = -\sum_{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_i}{c^i \beta_n} A_n(i) e^{i(\lambda_n - y\beta_n)} di$$
(7)

Выражая из услония $z_{xy} = 0$ при $y = 0, -\infty x < A_{\pm}(t)$ через $A_{\pm}(t)$ и подстанляя в (7), имеем

$$\overline{u} = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\lambda) e^{i(1+ry)/2} d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_1N_1}{P_1N_2} A_1(\lambda) e^{i(1+ry)/2} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_1}{P_1N_2} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_$$

Решение в виде (8) удовлетворяст ураннениям (4) и граничному условию = 0 при y = 0. Остальные граничные условия и условие на ребре определяют функцию $A_1(\iota)$. Функции суть нетви аналитической функции, однозначной на римановой поверхности, составленной из двух листов, склесиных вдоль купюр ($\lambda_1 = (i_1, i_2)$, имеющих полубесконечные разрезы, соответстиенно, (p_1 , -), ($-\infty$, $-p_1$), и (p_2 , -), ($-\alpha = -$ корни уравления

$$\frac{(a+d)w^2-Lt^2}{2ad}\Big|^2-w^2w_2^2=0$$

причем подразумеваются те вет и этих функций, которые действительны и положительны при — $p_1 < p_2 < p_3$, то есть положительно мнимы на верхисм берегу девого разреза и на нижном берегу правого разреза. Контур интегрирования в (8) показан на фиг. 1.



Фиг. 1.

Далее, так как $= p \left[(c - d) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right]$ то при y = 0 имеем

$$A_{i}(i) A(i) e^{i \cdot i} d^{i}; \quad v = \int_{\infty} A_{i}(i) B(i) e^{-i} d^{i}.$$
(9)

$$A(i) = i \frac{a_1(1-\beta_1)}{i\beta_1 N_2} R(i), \qquad B(i) = \frac{a_1^{\alpha_1}(2-\beta_1^2)}{i\beta_1 N_2}$$

 $R(i) = \{[a^2 - (c - d)^2]^{12} - a^{32}\}$ $[a^2 - a^{32}]_{12} - a^{32}$, функция Рэлея.

Применение обратного преобразования Фурье к соотношениям (9) дает

$$A(\lambda) A_{1}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\overline{s}_{yy}}{p} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = \Omega^{+}(\lambda) + \Omega^{-}(\lambda)$$
$$B(\lambda) A_{1}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{v})_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = V^{-}(\lambda) + V^{-}(\lambda)$$
(10)

$$\Omega^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\overline{\sigma}_{yy}}{p}\right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx; \qquad \Omega^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\overline{\sigma}_{yy}}{p}\right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx$$

$$V^{+}(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \left(\overline{v} \right)_{y=0} e^{-i\omega x} dx; \qquad V^{-}(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{0} \left(\overline{v} \right)_{y=0} e^{-i\omega x} dx$$

причем искомые функции $\Omega^-(A)$ и V(A) аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскости комплексного переменного

Согласно граничным условиям (2) имеем

$$Q^{+}(i) = -\frac{\mu_{0}ii}{2i\phi}; \quad V^{-}(i) = 0$$
(11)

Подстацляя (10) в (9) и исключая A₁(4), приходим к следующему Функциональному уравлению Винера-Хопфа:

$$= i \frac{R(\epsilon) V^{+}(\epsilon)}{a_{21}(\beta_{1} + \beta_{2})} = 2^{-}(\epsilon) - \frac{P e^{i \tau}}{2 \pi \epsilon}$$
(12)

Легко проверить, что

$$R(i) = \frac{a^{2} - (c - d)^{2}}{\eta_{2} - \eta_{0}} \left| \lambda^{2} + \frac{(y_{2}^{2} - \lambda^{2})^{2} + Q}{4\eta_{1}\eta_{0}} \right| \eta_{1}\eta_{2}$$
(13)

где

$$Q = \frac{(c + d - a)(c + a - 3d)}{d^2 [a^2 - (c - d)^2]}$$

Подставляя (13) в (12), имеем

$$i\frac{a^{2}-(c-d)^{2}}{2a}\pi F(c)V^{*}(c) = \Omega^{*}(c) - \frac{Pe^{c^{2}}}{2\pi g}$$
(14)

где

$$F(\iota) = \frac{2}{p_2^2 - p_1^2} \frac{\pi_1 + \pi_2}{\beta_1 + \beta_2} \left[\left| \iota^2 + \frac{(p_2^2 - \iota^2)^2 + Q}{4p_1p_2} \right| \right]$$

Функции F(t) и | $p_{1}^{2} = k^{2}$ представим и виде

$$F(\lambda) = F^{-}(\lambda) F^{-}(\lambda); \quad V^{-} p_{2}^{*} - i^{2} = \{ p_{2} - \lambda \} p_{2} - \lambda$$
(15)

где функции F(i) и F(i) — аналитические и отличные от пуля соответственно в полуплоскостях lmi > 0 и lmi < 0. Согласно выбору ветви функции lpi i и контура, разделяющего нижнюю и верхнюю полуплоскости *i*-илоскости, $lp_{2}+i$ будет аналитической функцией в нерхнея полуплоскости (разрез вдоль y=0, $-\alpha < -p_{-}$), а $lp_{2}-i$ и нами деле, легко показать, что для функции F(i) разложение в ряд Лорака около бесконсчно удаленной точки имсет вид

$$F(\lambda) = 1 + \frac{a_{-2}}{\lambda^2} + \dots$$
Заметим, что $\ln F(\Lambda)$ — аналитическая функция в области (D) (фиг. 2) и непрерывна в замкнутой области (D) при достаточно больших R. Применим формулу Коши к этой функции в указанной области



Фиг. 2.

Так как при $|\lambda| \to \infty$ $F(\lambda) = 1 + \frac{\text{const}}{\lambda^2}$, то $I_R \to 0$ при $R \to \infty$. Тогда для I_3 получим

$$\begin{split} I_{3} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{0}^{-}}^{\Gamma_{0}} \ln \left(p_{1} + p_{2} \right) \left[\left[\tau^{2} + \frac{(p_{2}^{2} - \tau^{2})^{2} + Q}{4 p_{1} p_{2}} \right] \left[\frac{d\tau}{\tau - \lambda} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{0}^{-}}^{\Gamma_{0}} \ln \left(\beta_{1} + \beta_{2} \right) \frac{d\tau}{\tau - \lambda} \right] \end{split}$$

Так как подынтегральное выражение в первом интеграле не имеет точки разветвления и особенности внутри контура Г_а, то перный интеграл равен нулю, а подынтегральное выражение во втором интеграле принимает на обоих берегах разреза одинаковые значения, поэтому последния интеграл тоже ранен нулю. Итак, $l_3 = 0$. Аналогичным образом доказывается, что $l_1 = 0$. Отметим, что p_1 точка разветвления для $1 = -\kappa^2$, а $p_2 - \chi_{AR} + k_2 - \epsilon^2$. После выбора ветвей функций $1 = p_1^2 - \kappa^2$, $1 = k^2 - \kappa^2$ легко вычислить $l_1 = \ln F$ (л) в виде

$$F^{+}(\lambda) = \frac{\lambda_{R} + \lambda}{\sqrt{p_{1} + \lambda} \sqrt{p_{2} + \lambda}} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{p_{1}}^{\infty} \ln\left[\frac{R(\tau)}{\overline{R}(\tau)} \frac{\beta_{2} - \beta_{1}}{\beta_{2} - \overline{\beta}_{1}}\right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda}\right\}$$
(16)

Аналогично получим

$$F^{-}(\lambda) = \frac{\lambda_{R} - \lambda}{\sqrt{p_{1} - \lambda}} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{p_{1}}^{q_{1}} \ln\left[\frac{R(\tau)}{\bar{R}(\tau)} \frac{\beta_{2} - \beta_{1}}{\beta_{2} - \bar{\beta}_{1}}\right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda}\right\} (16')$$
$$\left(R(\lambda_{R}) = 0, \quad \lambda_{R} = \frac{m}{c_{R}}, \qquad c_{R} < \sqrt{d}\right)$$

Очевидно, что функции $F_{-}(\iota)$ и $F_{-}(\iota)$ апалитические и отличные от нуля соответственно в полуплоскостях $\text{Im} \iota > 0$ и $\text{Im} \iota < 0$. В частном случае, при c = a - d, выражения для $F_{-}(\iota)$ я $F_{-}(\iota)$ совпадеют с результатом Maye [6]. Подставляя (15) в (14), имеем

$$i\frac{a^{\prime} - (c - d)^{\prime}}{2a} + \overline{p} - i F^{+}(i) V^{+}(i) = \frac{2}{(i_{R} - i) X(i)} - \frac{P(\overline{p_{1} - i_{R}})^{o_{1}}}{2\pi p(i_{R} - i) X(i)}$$

$$F^{+}(i) = \frac{i_{R} - i}{1 \overline{p_{1} - i_{R}}} X(i)$$
(17)

Для того, чтобы применить стандартную процедуру Винера-Хопра к уравнению (17), необходимо преобразонать второе слагаемое в первой части, так как это слагаемое представляет расходящуюся волну на бесконечности при Im? О. Для этого надо перевести этот член в левую часть равенства (17).

Функция F(i) имеет нуль при i. i_R и точки разпетиления при $i - p_1$ и $i = p_2$ в показателе экспоненты, причем показатель экспоненты, в указанных окрестностях имеет соответственно порядок $-\frac{1}{2}\ln(p_1 - i)$ и $-\frac{1}{2}\ln(p_2 - i)$. Поэтому в точке $i = p_2$ функция $F^{-1}(i)V p_2 - i$, регуляр-

на. Последное следует из поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [7]. Преобразуем второе слагаемое в правой части уравнения (17). Окончательно имеем уравнение Винера-Хопфа

$$i\frac{a^{2} - (c - d)^{2}}{2a} + \overline{p_{1} + it^{+}}(i) V^{+}(i) + f_{1}^{+}(i) = \frac{Q^{-}(i)}{(i_{R} - i)} \frac{\overline{p_{1} - i}}{X(i_{0})} - f_{1}^{-}(i)$$

$$f_{1}(i) = \frac{P\sqrt{p_{1} - i_{0}}e^{it}}{2\pi i(i_{R} - i_{0})} \frac{f(i)}{X(i_{0})} = \frac{f(i)e^{it}}{i_{R} - i_{0}} = f_{1}^{+}(i) + f_{1}^{-}(i)$$

$$(18)$$

$$f_{2}^{-}(i_{0}) = \frac{f(i_{R})e^{it}e^{it}}{i_{R} - i_{0}} + \frac{g(i_{0} - i_{0})e^{it}}{i_{R} - i_{0}} = f_{1}^{+}(i) + f_{1}^{-}(i)$$

$$\frac{P[\overline{z-p_1}[a] = \frac{1}{z^2 - p_1^2} - \frac{3}{2} \operatorname{Re} R(\tau)]}{2\pi^2 (X^+(\tau)(3_2 - \beta_1) R(\tau)}, \quad z = (p_1, p_2) \\
= \left\{ \frac{P[\overline{z-p_1}[a] = \frac{1}{z^2 - p_1^2} - \frac{3}{2} \operatorname{Re} R(\tau)]}{2\pi^2 (X^+(\tau)(3_2 - \beta_1) R(\tau))}, \quad z = (p_1, p_2) \right\}$$

Так как точки p_1, p_2, r_R не припадлежат к нижней полуплоскости илоскости r_n то правая часть уравнения (18) представляет собой функцию аналитическую в нижней полуплоскости, в левая часть того же уравнения — функцию, аналитическую в верхней полуплоскости. По прияципу непрерыяного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями одна другой. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости λ_n в бесконечно удаленной точке. Используя теорему абелева типа [8] и условие на ребре, нетрудно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда в силу теоремы Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости λ_n .

Таким образом, получим

$$\underline{\Omega}_{-}(\lambda) = \frac{f(\lambda_{R}) X(\lambda) x^{n_{R}t}}{\sqrt{p_{1} - \lambda}} + \frac{(\lambda_{R} - \lambda) X(\lambda)}{\sqrt{p_{1} - \lambda}} \beta(p, t^{2})$$
(19)

$$V^{-}(\iota) = 2 \operatorname{aif}_{1}^{-}(\iota) \left\{ \left[a^{2} - (c - d)^{2} \right] \right\} \left[p_{2} + \iota F^{-}(\iota) \right\}^{-1}$$
(20)

Подставляя (20) в (10), получим

$$A_{1}(\lambda) = i [a_{1}^{(1)}(\lambda) e^{i\lambda t} + a_{2}^{(1)}(\lambda) e^{i\lambda R t} + a_{3}^{(1)}(\lambda) \beta(\varphi, t\gamma)]$$
(21)

Подставляя (21) и (9) в (8). имеем

$$u = \sum_{n=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \int_{-1}^{2} a_{n}^{(m)} \exp\left(i\overline{\varphi}_{n}^{(m)}(i)\right) + \frac{1}{2} \Im\left(a_{3}^{(m)}(i)\overline{\varphi}; \overline{\varphi}_{3}^{(m)}\right) di$$

$$\overline{v} = i \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \int_{0}^{1} \left[b_{n}^{(m)} \exp\left(i \frac{1}{2} \exp\left(i \frac{1}{2} \left(b_{n}^{(m)}(i)\right) + \frac{1}{2} \left(b_{n}^{(m)}(i)\right) + \frac{1}{2} \left(b_{n}^{(m)}(i)\right) + \frac{1}{2} \left(b_{n}^{(m)}(i)\right) \right] di$$
(22)

Решение некоторых нестационарных надач для анизотровной среды

$$a^{(m)} = (-1)^{m+1} \frac{P - N_{3-m}}{2\pi \varsigma G(\lambda)}; \qquad a^{(m)} = (-1) \frac{I(\lambda) - \lambda}{p - \lambda} \frac{I(\lambda)}{G(\lambda)}$$

$$a^{(m)}_{3} = (-1)^{m} \frac{I(\lambda) - \lambda}{p - \lambda} \frac{I(\lambda)}{p - \lambda} \frac{I(\lambda)}{G(\lambda)}$$

$$b^{(m)}_{n} = -\frac{M_{m}}{c\lambda_{m}^{2}} a^{(m)}; \qquad G = R(\lambda) - (\beta_{1} - \beta_{2})$$
(5)

 $\psi_1^{(m)} = i_k(x+l) + y_{lm}^3; \quad \psi_2^{(m)} = i_k l + i_k x + y_{lm}^3; \quad (m) = o(l + i_k x + y_{lm}^3)$

Таким образом, найдено решение постапленной задачи, периодическое во времени. Обратное преобразование по t, соответствующее решению нестационарной задачи, имеет вид

$$u = \frac{1}{2-i} \int_{s-i\infty}^{s+i} e^{s} \bar{u} ds; \quad v = \frac{1}{2-i} \int_{s-i\infty}^{s} e^{s} \bar{v} ds, \quad s = -i\infty$$
(22')

При применении обратного преобразования Ланласа по *I*, введем вместо A переменную 3, *i* = 93, s = 3 - *i*, где 3 - 0 и мало.

Существенными при вычислении интегралов (22), (22') оказываются окрестности точек : = :[n], для которых

$$f_{n}^{(m)}\left(\xi_{n}^{(m)}\right) \equiv i - \varphi_{n}^{(m)}\left(\xi_{n}^{(m)}\right) = 0$$
(23)
(n = 1, 2, 3; m = 1, 2)

причем сопряженные значения 🦾 также удовлетворяют (23). Для определенности нычислим один из шести интегралов, содержащих указанные экспоненты.

$$I_{1}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{0^{-1}\pi}^{0^{-1}\pi} ds \int_{0^{-1}\pi}^{\infty} ia_{1}^{(1)}(i)e^{-i\omega f_{1}^{(1)}(\xi)} di$$
(24)

Тогда, так как — , можно показать, что при с 0 нолуоси $\lambda < 0$ соответствует контур по : в верхней полуплоскости, а полуоси $\lambda > 0$ – контур : в нижней полуплоскости. В силу малости з можно условно эти контуры проводить по действительной оси с обходом особых точек в верхн й и соответственно нижней полуплоскости. Тогда

$$I_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} ds \operatorname{sgn} \left(\omega \right) \int_{-\infty}^{\infty} i a_1^{(1)}(z) e^{-i z - \frac{1}{2\pi i}} dz$$

где в силу однородности произпедено сокращение на w, причем во множителе при экспоненте в подынтегральной функции всюду положено w = 1, что дает повые формулы для $a_{11}^{(1)}(z)$.

Пусть w > 0. Заменим контур интегрирования = : < на контур Γ_1 , проходящий через указанные точки $z_1^{(1)}$, $\xi_1^{(1)}$ в направлении $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(z) = 0$. Для этого нужно найти области постоянного знака $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(z)$. В начале для простоты рассмотрим $f_1^{(1)}(z)$ для изотропной среды, для которой c = a = d, $k_1 = p_1$, $k_2 = p_2$. Обозначая $f_1^{(1)}(z) = B$, где величина B вещестненна, $z = \zeta + m$ можно убедиться, что в плоскости (ζ, η) линии = B состоят из днух нетвей гиперболы

$$rac{r_1^{2;2}}{x_1^2} - rac{r_1^2 \gamma_1^2}{y^2} = 1, \qquad r_1^* = a \ (x_1^* + y^*), \ x_1 = x + d \ x_1^* = x + d \ x_1^* + y^*),$$

а также из отрезков действительной оси $|\zeta| < \frac{1}{1+a}$ Пусть x > 0, y > 0. Тогда, предполагая, что на положительной мнимой нолуоси | a^{-1} 0, можно показать, что $\lim_{t \to 0} f_1^{(1)}(z) < 0$ и областях (фиг. 3), где проходят дуги окружности c_1 и c_2 . Тогда интегрирование по ; от do^{-1} заменяется на интегрирование по верхней половине контура Γ_1 , а интегрирование по z от $\frac{x_1}{c_1}$ до ∞ — на интегрирование по пижней полонине Γ_1 . Это возможно сделать, так как на c_1 и $c_2 \lim_{t \to 0} f_1^{(1)}(z) < 0$ и можно показать, что интегралы по c_1 и c_2 стремятся к нулю при неограниченном унеличении радиуса окружностей c_1 п c_2 .

Тогда при w > 0 можно заменить интегрирование по действительной оси : на интегрирование по Г₁.

При m < 0 вместо c_1 , c_2 берутся их дополнения до нерхней и соотнетственно нижней полуокружностей, на которых $Im f_1^{(1)}(z) > 0$.

Тогда интегрирование по действительной оси с заменится на интегрирование по Γ_1 , п обратном предыдущему илправлении. Весь инутренний интеграл в (24) поменяет знак на обратный, а решение будет таким же, как при $\omega > 0$. При x < 0 точки $\Xi^{(1)}$, дежат на левых встнях гиперболы (фиг. 3), контуры c_2 заменяются на симметричные относительно оси 1, и решение не изменяется.

Итак, при любом и из (24) получим

$$I_{1}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-e^{i\theta}}^{e^{i\theta}} ds \int_{\Gamma_{1}}^{\Gamma_{1}} ia_{1}^{(1)}(z) e^{-i\omega f_{1}^{(1)}(z)} dz$$
(25)

Для анизотропной задачи, учитывая, что выбранному значению $\hat{\mathfrak{I}}_1(\bar{\mathfrak{I}})$ соответствует по уравнению $f_1^{(1)}(\bar{\mathfrak{I}}) = 0$ одно значение $\bar{\mathfrak{I}}_1^{(1)}$, а также $\bar{\mathfrak{I}}_1^{(1)}$, вместо указанных гипербол (фиг. 3) выбираем ветви кривой $\mathrm{Im} f_1^{(1)}(\bar{\mathfrak{I}}) = 0$, причем при x 0 правая ветвь Γ_1 проходит через $\bar{\mathfrak{I}}_1^{(1)}, \bar{\mathfrak{I}}_1^{(1)}$. Отметим, что полюсы и точки разветвления подынтогральной

функции находятся на действительной оси причем отсутствие нулей R(:) вне действительной оси показано в [5]. Окончательно получим, вычисляя интеграл по s,



Фиг. З.

$$I_{1}^{(1)} = i \int_{\Gamma_{1}} a_{1}^{(1)}(z) \,\delta(f_{1}^{(1)}(z)) dz$$

Полагая вблизи точек $\tilde{z}_1^{(1)}$, $f_1^{(1)}(z) = f_1^{(1)}(\zeta_1^{(1)})(z-z_1^{(1)})$ и вычисляя интеграл от дельта-функции в точках $z_1^{(1)}$, $\tilde{z}_1^{(1)}$, получим

$$h_1^{(1)} = 2 \operatorname{Re} i \frac{a_1^{(1)} \left(\xi_1^{(1)}\right)}{f_1^{(1)} \left(\xi_1^{(1)}\right)}$$
(26)

Для изотропной упругой среды

$$l_{1}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{a_{1}^{(1)} \left(\xi_{1}^{(1)}\right) \left(t - \xi_{1}^{(1)} x - \frac{l}{\sqrt{a}}\right)}{y \sqrt{\left(t - \frac{l}{\sqrt{a}}\right)^{2} - \frac{x^{2} + y^{2}}{a}}}$$

При $t - \frac{1}{1 a} < \sqrt{\frac{x - y}{a}}$ решение $I_1^{(1)}$ равно нулю. Точно также п (25) для аниаотропнов среды $I_1^{(1)} = 0$ при $t < T^{(1)}(x, y)$, где $t = T^{(1)}(x, y)$ есть уравшение колны, образованной в точке x = 0, y = 0 в момент $t = \sqrt{a}$. уравнение которой находится как огибающая по уравнений плоских воли 0 и имест вид $f_1^{(1)}(z) = 0$, $f_1^{(1)}(z) = 0$. Областью аналитичности решения является область, указанная на фиг. 2, но без разрезов Γ_3 и Γ_4 , поскольку точки $I_{0,1}I_0$ не являются точками разветвления для решения задачи. Итак, для анизотропной среды из (22), (25) и аналогичных формул для остальных интегралов l^m решение уравневий (1) при граничных условиях (2), где для нестационарной задачи вместо $\exp(-I^m t)$ стоит (1), примет вид

$$\begin{split} u &= 2 \operatorname{Re} i \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \left[\frac{a_{n}^{(m)}(z_{n}^{(m)})}{f_{n}^{(m)}(z_{n}^{(m)})} + \frac{1}{2} \left. \Im\left(\frac{a_{3}^{(m)}(z_{3}^{(m)}) \cdot z}{f_{3}^{(m)}(z_{3}^{(m)})} ; \cdot 0 \right) \right] \\ \upsilon &= 2 \operatorname{Re} i \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \left[\frac{b_{n}^{(m)}(z_{n}^{(m)})}{f_{n}^{(m)}(z_{n}^{(m)})} + \frac{1}{2} \left. \Im\left(\frac{b_{3}^{(m)}(z_{3}^{(m)}) \cdot z}{f_{3}^{(m)}(z_{3}^{(m)})} ; \cdot 0 \right) \right] \\ \upsilon_{gg} &= -2\gamma \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} i \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \left[\frac{C_{n}^{(m)}(z_{n}^{(m)})}{f_{n}^{(m)'}(z_{n}^{(m)})} + \frac{1}{2} \left. \Im\left(\frac{C_{3}^{(m)}(z_{3}^{(m)}) \cdot z}{f_{3}^{(m)'}(z_{3}^{(m)})} ; \cdot 0 \right) \right] \\ C_{n}^{(m)} &= \frac{e\left(e - d\right) \cdot \cdots - aM_{m}}{e^{z}} \left[a_{m}^{(m)} \cdot \left(n - 1, 2, 3; m - 1, 2 \right), \end{split}$$

причем каждое из слагаемых равно пулю в области вне соответствующей волны $f_{n}^{(m)}(z) = f_{n}^{(m)}(z) = 0$, n = 1, 2, 3; m = 1, 2. На оси x эти выражения упроцаются

$$u = 2 \operatorname{Re} i \left[\sum_{n=1}^{2} \frac{D_{n}(\xi_{n}^{(1)})}{f_{n}^{(1)'}(\xi_{n}^{(1)})} + \beta \left(\frac{D_{3}(\xi_{3}^{(1)'}) \varphi}{f_{3}^{(1)'}(\xi_{3}^{(1)})}; 0 \right) \right]$$
$$v = 2 \operatorname{Re} i \left[\sum_{n=1}^{2} \frac{E_{n}(\xi_{n}^{(1)})}{f_{n}^{(1)'}(\xi_{n}^{(1)})} + \beta \left(\frac{E_{3}(\xi_{3}^{(1)}) \varphi}{f_{3}^{(1)'}(\xi_{3}^{(1)})}; 0 \right) \right]$$

FAC

$$D_n = \sum_{m=1}^2 a_n^{(m)}; \quad E_n = \sum_{m=1}^n b_n^{(m)}, \quad (n = 1, 2)$$

В частности, в точке y = 0, x - 0 получится

что совпадает в изотропной задаче с результатом [4]. Для граничного условия (2), где вместо $\exp(-i\omega t)$ стоит произвольная функция $\psi(t)$, решение получается из предыдущего в виде

$$u = \sum_{i=1}^{3} \sum_{m=1}^{2} \int_{T_{n}^{(m)}(x, y)}^{t} L_{n}^{(m)}(x, y, t') \,\psi(t - t') \, dt'$$

где $t = T_n^{(m)}$ есть уравнение волны $f_n^{(m)}(z) = f_n^{(m)}(z) = 0$, причем интегралы равны нулю при $t \in T^{(m)}$. (Для медленных воли $t = T_{n-1}^{(m)}$ состоит из точечной водны и касательных к ней из точек быстрой водны).

Для нагрузки, заданной на отрицательной оси к в виде произнольной функции § (x, 1), решение имеет вид

$$u = \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{3} \int_{0}^{0} dx' \int_{0}^{1} (x - x - l, y, t') \frac{1}{2} (x', t - t') dt'$$

2. В этом пункте рассматривается общий и вместе с тем простой подход к получению решений движения однородной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Решения находятся методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа. а затем приводятся к форме записи через аналитические функции, введенные В. И. Смирновым и С. Л. Соболсяым [3]. Указанным методом в плоской задаче определены фундаментальные решения для уравнений однородного апизотропного тела. Рассматривается задача определения вектора смещения (и. v) в плоской задаче для однородного анизотропного упругого тела, удовлетворяющего пулевым начальным условиям и уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{X_0}{2} \delta(x)^2 (y)^2 (t)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{Y_0}{2} \delta(x)^2 (y)^2 (t)$$
(27)

где 2 (x) есть дельта-функция Дирака. Вводя преобразование по Лапласу и, v от и, v по / и записывая

$$\overline{u} = \int \int u e^{i(z_1, z_2)} dz_1 dz_2; \qquad \overline{v} = \int \int \overline{v} e^{i(z_1, z_2)} dz_1 dz_1 dz_1 dz_2$$
(28)

из (27) можно получить после применения обратного к (28) преобразования Фурье, уравнения, решения которых имеют вид

$$d^{-1}Du = X_{0} (s^{2} + a_{1}^{2} + d^{2}) - X_{0}c\sigma_{1}\beta$$

$$4^{-2}cDv = V_{0} (s^{2} + a\alpha_{1} + d\beta^{2}) - X_{0}c\sigma_{1}\beta$$

$$D = (s^{2} + a\alpha_{1} + d\beta^{2}) (s^{2} + d\alpha_{2} + a\beta^{2}) - c^{2}\alpha_{1}\beta^{2}; \quad s = -i\omega$$
(29)

Полставляя (29) в (28), вычисляя вычет в интегралах по 3 относительно полюсов

45

$$\beta_n = \infty \sqrt{\frac{\alpha + d - Lx^2}{2\alpha d} + (-1)^n | \Delta}, \quad \alpha_1 = \infty$$
$$\Delta = \left(\frac{\alpha + d - Lx^2}{2\alpha d}\right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha} - x^2\right) \left(\frac{1}{d} - x^2\right)$$

можно получить

$$\bar{u} = \frac{i}{8\pi\rho_{ad}} \sum_{n=1}^{2} (-1)^{n} \int \left[X_{0} \left(a \beta_{n}^{2} + d z^{2} - 1 \right) - Y_{0} c z \beta_{n} \right] e^{i\omega(\pi x + \beta_{n} y)} \frac{dz}{|\bar{p}_{n}|^{2}}$$
(30)

$$\overline{v} = \frac{i}{8\pi p a d} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} [Y_0 (d_{Y_n}^{32} + a x^2 - 1) - X_0 c a_{Y_n}^{5}] e^{i \phi (xx + \frac{1}{2} a p)} \frac{dx}{\bar{p}_n + \Delta}$$

Контур интегрирования в (30) заменим через контуры Γ_1 , Γ_2 , которые проходят через точки α_1 , α_2 , $\overline{\alpha_2}$ соответственно, причем α_n находятся из уравнений

$$t - a_n x - \beta_n (a_n) y = 0$$
 (n = 1, 2) (31)

На контурах Γ_1 , Γ_2 левые части уравнений (31) нещественны, что позволяет получить обратное преобразование Лапласа по t в простом виде.

Переходя к оригиналам в (30), получим

$$u = \frac{i}{8\pi\rho a d_{n-1}} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{n} \int_{\Gamma_{n}}^{\Gamma} \delta\left(t - xx - y_{i,n}^{2}\right) \left[X_{0}\left(a\beta_{n}^{2} + dx^{2} - 1\right) - Y_{0}cx\beta_{n}\right] \frac{dx}{\beta_{0}V^{2}}$$
(32)

$$v = \frac{i}{8\pi\gamma ad} \sum_{n=1}^{2} (-1)^{n} \int_{\Gamma}^{0} i(t - ax - y\beta_{n}) |Y_{0}(d\beta_{n} + ax^{n} - 1) - X_{0}ca\beta_{n}] \frac{dz}{\beta_{n} \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{\beta_{n}}}$$

Алалогично (25) получим

$$u = \frac{1}{4\pi p_{0}ad} \operatorname{Ke} i \sum_{n=1}^{2} (-1)^{n-1} \frac{X_{0}(a\beta_{n}^{2} + dz^{2} - 1) - Y_{0}c_{2}\beta_{n}}{(x + y\beta_{n})\beta_{n}} \Big|_{x = z_{n}}$$
(33)
$$e = \frac{1}{4\pi p_{0}ad} \operatorname{Ke} i \sum_{n=1}^{2} (-1)^{n-1} \frac{Y_{0}(d\beta_{n}^{2} + az^{2} - 1) - X_{0}c_{2}\beta_{n}}{(x + y\beta_{n})\beta_{n}} \Big|_{x = z_{n}}$$

Записав уравнения (27) в интегральной форме, можно показать, что решения (35) удовлетворяют условиям задачи.

Иным путем фундаментальные решения для плоской задачи анизотропной теории упругости в другом виде получены в [9].

Автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский вриянский подвтогнческий институт им. Х. Аборяна

Поступила 14 V 1973

Ա. Ն. ՄԱՐՏԵՐՈՍՅԱՆ

ԱՆԻՋՈՏՐՈՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՐԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԽՆԳԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է առաձգական անիզուտրոպ միջավայրի շարժման Տարք խնդիրը բացասական իրական առանցթի նրկանթով Շեղթի և կենտրոնացած ուժերի աշկայուքքյան դեպրում, որոնք կիրառված են Ճեղթի երկու եզրերի ինչ որ կետերում։

Իզոտրոպ միջավայրի Համար այս խնդիրն ուռումնասիրված է Վ. Դ. Կուլինի կողմից։ ներկա աշխատանրում լուծվում է Վիներ-Հոպֆի մենոդով նշված խնդիրը անիզոտրոպ միջավայրի Համար և պարբերական ըստ ժամանակի եզրային պայմանները դեպբում։ Կատարված է նաև ևապլառի Հակառակ ձևափոխունյուն ըստ ժամանակի, որը նույլ է տալիս դանել ու ստացիոնար խնդրի լուծումը անմիջապես ամբողջ Հարքունյան Համար Վ. Ի. Սմիրնովի- Ս. Լ. Սոբունի տեսրով։

ON SOLUTION OF SOME NON-STATIONARY PROBLEMS FOR ANISOTROPIC MEDIUM

A. N. MARTIROSIAN

Summary

A plane problem on motion of anisotropic elastic medium in the presence of a crack along the negative real axis and a concentrated force, applied at some point on both borders of the crack, is considered. For isotropic medium the similar problem was analysed by V. D. Kuliev. In the present paper this problem is solved by the Vinner-Hopf method under boundary conditions periodic with time for antsotropic medium. In addition, an inverse transform with time is performed, permitting to find a solution to a non-stationary problem within the whole plane in the form suggested by Smirnov and Sobolev. A fundamental solution for anisotropic medium is found as well.

АИТЕРАТУРА

^{1.} Саюмонан А. Я., Поручикоз В. Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Изд. Московского ун-та, 1970.

Усрепанов Г. П. Дифрокции упругих воля на разрезе. В кн. "Моханика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 30-лотию акадомика Н. И. Мусхолишенли)". "Науко", М., 1972.

Франк Ф., Мизес Р. Диффорсициальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.

- Кулиев В. Д. Об одной динамической задаче теории упругости. ПММ, т. 36, вып. 6, 1972.
- 5. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. записи ЛГУ, вып. 17, 1944.
- Maue A. W. Die Entspannungswelle bei plotzlichem Einschnitt eines gespannten clastischen Körpers. ZAMM, Bd. 34, H1/2, 1954.
- 7. Мускелишнили Н. И. Спогулярные интегральны" уравнения. Наука, М., 1968.
- Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных урапнений в састных производных. ИЛ, М., 1962.
- Свеждо В. А. Смешапная задача для упругой анизотропной полундоскости. ПММ, т. XXVI, вып. 5, 1962.

2

20340406 002 АРХЛАРЗАРЬБОРЬ ИЧИАВИРИЗЬ ЗВОВИВАР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

հերունիկա

XXVIII, Nº 1, 1975.

Mexsulka.

Г. И. АВАНЕСОВА

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В работе исследуются параметрические колебания замкнутой круговой изотронной цилиндрической оболочки при действии локальной освениметричной нагрузки, вызывающей моментное начальное напряженное состояние.

В работах [1—3] показана необходимость учета неоднородности докритического состояния оболочек при исследовании областей устойчивости параметрических колебаний оболочек.

1. Исходные уравнения, связывающие пормальный прогиб Ши силовую фуякцию Ф, взяты в виде [1, 3]

$$\frac{1}{Eh}\Delta^{2}\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} + \frac{1}{2}L(W;W) = 0$$

$$(1.1)^{a}\Phi \frac{\partial^{a}W}{\partial t^{2}} + 2\pi h \frac{\partial W}{\partial t} + D\lambda^{2}W - \frac{1}{R}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial x^{2}} - L(W;\Phi) = q$$

где обозначения общепринятые [1].

Начальное осесимметричное моментное состояние описывается системой уравнения

$$\frac{1}{Eh}\frac{\partial^4 \Phi_0}{\partial x^4} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = 0$$

$$h\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} + 2agh\frac{\partial W_0}{\partial t} + D\frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = q$$
(1.2)

Обозначив вариации функций W и Ф через W_1 и Φ_1 и принимая $W = W_0 + W_1$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, приходим к следующим уравлениям устойчивости [3]:

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi_z + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0$$
(1.3)
$$\varphi h \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + 2 \varphi h \frac{\partial W_1}{\partial t} + D \Delta^2 W_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0$$

4 Изпестня АН Армянской ССР, Механика, № 1

Последние следует рассматривать при однородных граничных условиях, соответствующих типу закрепления торион оболочки.

При отсутствии продольных усилий систему (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} = 2i \frac{\partial W_0}{\partial t} + \frac{D}{2h} \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} + \frac{E}{2R^2} W_0 = \frac{q_0}{2h} \cos \delta t \qquad (1.4)$$

Решение ураннения (1.4) представляется в инде

$$W_{0} = \gamma_{1}(x) \cos \theta t + \gamma_{0}(x) \sin \theta t \qquad (1.5)$$

то есть учитываются только члены, не затухающие во времени. Значения ковффициентов ф.(x) всегла могут быть изйдены из (1.4) в зависимости от нагрузки.

Найденное решение с, (x) представляется и ниде ряда по косинусым [3-4]

$$\tau_{i}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\sigma}_{ik} \cos r_{k} x; \qquad r_{k} = \frac{k\pi}{l}$$
(1.6)

Решение системы (1.3) ищется в виде [3-4]

$$W_1 = \cos x_0 y \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \sin x_m x \tag{1.7}$$

$$\Phi_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m(t) \sin \nu_m x \qquad y_n = \frac{n}{R}$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в систему (1.3), исключая (1.6) и превебрегая нелинеяными членами, получим для любого п следующее уравнение [3]:

$$E\frac{d^2A}{dt^2} + 2\varepsilon E\frac{dA}{dt} + (\Omega^2 - S_t \cos \theta_t + S_t \sin \theta_t)A = 0$$
(1.8)

где п — число воля в окружном направления

 $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots \}$ (1.9)

$$\omega_{p} = \frac{1}{ph} \left[D(\lambda_{p}^{2} + \mu_{n}^{2})^{2} + \frac{Eh}{R^{2}} \frac{\lambda_{p}^{4}}{(\lambda_{p}^{2} + \mu_{n}^{2})^{2}} \right]$$
(1.11)

$$S_{j}^{i} = \frac{E\mu_{n}^{2}}{2\rho R} \left\{ 1 + \left[\frac{\lambda_{m}^{2}}{(\lambda_{m}^{2} + \mu_{n}^{2})^{2}} + \frac{\lambda_{p}^{2}}{(\lambda_{p}^{2} + \mu_{n}^{2})^{2}} \right] \lambda_{j}^{2} \right\} \psi_{j}^{i}$$
(1.12)

$$(j - m - p; m - p; p - m) c M [4]$$

2. Рассмотрим случай = 0, тогда уравнение (1.8) примет вид

$$E \frac{d^2 A}{dl^2} + (\Omega^2 + S_1 \cos \delta l) A = 0$$
 (2.1)

Решение уравнения (1.3) для нечетных областей динамической неустойчивости ищется в виде установившегося колебания с периодом 27, [1].

$$A(t) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \left(\overline{a_k} \sin \frac{k\theta_l}{2} - \overline{b}_k \cos \frac{k\theta_l}{2} \right)$$
(2.2)

гдс a_k и b_k — некоторые векторы, не зависящие от времени. При подстановке (2.2) в уравнение (2.1) и приравнивании коэффициентов при одинаковых sin $\frac{k\theta t}{2}$ и cos $\frac{k\theta t}{2}$, приходим к следующей системе матричных уравнений:

$$\left(\frac{\Omega^{2} - \frac{1}{2}S_{1} - \frac{1}{4}\Psi E}{4}\right)\overline{a}_{1} + \frac{1}{2}S_{1}\overline{a}_{3} = 0$$

$$\left(\frac{\Omega^{2} - \frac{k^{4}b^{2}}{4}E}{4}\right)\overline{a}_{k} + \frac{1}{2}S_{1}\left(\overline{a}_{k-2} + \overline{a}_{k+2}\right) = 0 \quad k = 3, 5, 7, \dots$$

$$\left(\frac{\Omega^{2} + \frac{1}{2}S_{1} - \frac{b^{2}E}{4}}{4}\right)\overline{b}_{1} + \frac{1}{2}S_{1}\overline{b}_{3} = 0$$

$$\Omega^{2} - \frac{k^{4}b^{2}}{4}E\right)\overline{b}_{k} + \frac{1}{2}S_{1}\left(\overline{b}_{k-2} + \overline{b}_{k+2}\right) = 0 \quad k = 3, 5, 7, \dots$$

$$\left(2.3\right)$$

Условнем существования нетривнальных решений системы линейных одвородных уравнений является раненство нулю определителя, составленного из коэффициентов этой системы. Уравнение критических частот для нечетных k в матричной форме имеет вид

51

Аналогично определяются четные области неустойчивости, ограничевные пероидическим решением с периодом *T*. В этом случае решение системы (2.1) представляется в виде

$$A(t) = \frac{1}{2}\bar{b}_{0} + \sum_{k=2,4,...} \left(\bar{\alpha}_{k}\sin\frac{k\omega_{k}}{2} + \bar{b}_{k}\cos\frac{k\omega_{k}}{2}\right)$$
(2.5)

Уравнения критических частот в этом случае имеют вид

	2° — 6° E	$\frac{1}{2}S_i$	0	
	$\frac{1}{2}S_i$	$\Omega^{2} = 46^{2}E$	$\frac{1}{2}S_1$	
	0	$\frac{1}{2}S_1$	$\Omega^{\circ} = 16\ell^2 E$	
	***		6441	
<u>O</u> 2	S ₁	0	0	1.2.2
$\frac{1}{2}S_1$	$\Omega^2 - \theta^2 E$	$\frac{1}{2}S_1$	0	
0	$\frac{1}{2}S_1$	Q² 45-E	$-\frac{1}{2}S_1$	= 0 (2.7)
0	0	$\frac{1}{2}S_1$	$\Omega^2 - 160^2 E$	

Все полученные определитсям отпосятся к классу пормальных определителей, что легко может быть доказано аналогично [1].

Приближенное выражение для границ главных областей неустойчивости получается при приравнивании нулю определителя нерхнего кназиэлемента матрицы

$$\left| \Omega^2 = \frac{1}{2} S_1 - \frac{1}{4} S^2 E \right| = 0$$
(2.8)

нан в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} -2 & -\frac{1}{4} e^2 & -\frac{1}{2} (2S_0^1 - S_1^1) & -\frac{1}{2} (S_1^1 - S_1^1) \\ -\frac{1}{2} (S_1^1 - S_1^1) & \omega_2^2 - \frac{1}{4} e^2 \pm \frac{1}{2} (2S_0^1 - S_4^1) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

Раскрыв определитель, получаем уравнение, решение которого дает выражение для границ двух главных областей неустойчивости.

Значения критических 9 могут быть получены из уравнения (2.9) при применении метода последовательных приближений, так как 9 входит и в выражение S. Авалогичный подход к решению задачи сохраняется при определевии четных областей неустойчивости.

Для определения границ нечетных областей динамической неустойчивости получается следующее уравнение в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} -\frac{9}{4} & E & -\frac{1}{2}S_1 & \frac{1}{2}S & \frac{1}{2}S_1 & 3:E^5 \\ \frac{1}{2}S_1 & \frac{4}{2}S_1 & \frac{1}{2}S_2 & -:E^5 & -\frac{1}{2}S_2 \\ \frac{1}{2}S_1 & \frac{1}{2}S_1 & \underline{2}: \frac{6^2E}{4} & \frac{1}{2}S_1 & \frac{1}{2}S_1 \\ 3:E^6 & \frac{1}{2}S_1 & \frac{1}{2}S_1 & \underline{2}: \frac{6^2E}{4} & \frac{1}{2}S_1 \\ \hline \end{bmatrix} = 0$$

$$(2.10)$$

а для чотных областей уравнение

Так же, как и в случае = 0, определены приближенные значения критических частот параметрического резонанса.

Уравнение критических частот для нечетных областей в матричвой форме имеет нид

$$\frac{2^{2} - \frac{6^{2}}{4}E - \frac{1}{2}S_{1}}{\frac{1}{2}S_{1} - \frac{1}{2}S_{2} - \frac{1}{2}E}$$

$$\frac{1}{2}S_{2} + \frac{1}{2}E = \frac{6^{2}}{4}E - \frac{1}{2}S_{1} = 0 \qquad (2.12)$$

или в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} \omega_{1}^{2} - \frac{b^{2}}{4} - \frac{A_{1}}{2} & -\frac{C_{1}}{2} & \frac{A_{2}}{2} - \varepsilon^{b} & \frac{C_{2}}{2} \\ -\frac{C_{1}}{2} & \omega_{2}^{2} - \frac{b^{2}}{4} - \frac{B_{1}}{2} & \frac{C_{2}}{2} & \frac{B_{2}}{2} - \varepsilon^{b} \\ \frac{A_{1}}{2} + \varepsilon^{b} & \frac{C_{2}}{2} & \omega_{1}^{2} - \frac{b^{2}}{4} + \frac{A_{1}}{2} & \frac{C_{1}}{2} \\ \frac{C_{2}}{2} & \frac{B_{2}}{2} + \varepsilon^{b} & \frac{C_{1}}{2} & \omega_{2}^{2} - \frac{b^{2}}{4} + \frac{B_{1}}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

где

$$A_{i} = 2S_{0}^{i} - S_{1-1}^{i}$$

$$B_{i} = 2S_{0}^{i} - S_{1-2}^{i}$$

$$C_{i} = S_{1-1}^{i} - S_{1-1}^{i}$$
(2.14)

то же для четных областей

$$\begin{vmatrix} \underline{\Omega}^{2} & \underline{\theta}^{2}E & \frac{1}{2} S_{2} & -2\varepsilon E\theta \\ S_{2} & \underline{\Omega}^{2}E & S_{3} \\ 2\varepsilon E\theta & \frac{1}{2} S_{3} & \underline{\Omega}^{2} - \theta^{2}E \end{vmatrix} = 0$$
(2.15)

3. В качестве примера рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с шарнирным опиранием у торцов.

Граничные условия для докритического состояния имеют вид:

$$W_0 = \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и } x = l$$
 (3.1)

Функции ф. (x) и осесимметричная локальная нагрузка q = qacosbl представляются в виде рядов

 $\varphi_{i}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_{ir} \sin r, x \qquad (3.2)$ $q_{0} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{i}^{r} \sin r, x$ $a_{ir} = \frac{a_{r}^{q} v_{ir}}{ph} \qquad (3.2)$

(33)

где

$$m_{\rm r} = \frac{\left|\frac{D_{\rm r}^4}{r_{\rm h}^4} + (a_{\rm p}^2 - b_{\rm r}^2)\right|}{\left|\frac{D_{\rm r}^4}{r_{\rm h}^4} + (a_{\rm p}^2 - b_{\rm r}^2)\right|^4 - 4a^2 b^2}$$
(3.4)

$$\mathbf{v}_{2r} = \frac{2i\theta}{\left|\frac{Di_{r}^{4}}{\gamma h} + (a_{0}^{2} - b^{2})\right|^{2} + 4i^{2\eta z}}; \quad a_{0}^{2} = \frac{E}{\gamma R^{2}}$$
(3.5)

Ниже приведены коэффициенты разложения q в ряд по синусам для различных случаев осесимметричных нагрузок:

а) кольцевая обжимающая нагрузка

$$a_r^q = \frac{2q_0}{l} \sin i_r a \tag{3.6}$$



 б) нормальная к поперхности нагрузка, распределенная по части длины зоболочки

$$a_{i}^{g} = \frac{2q_{0}}{r^{\pi}}(\cos i, a - \cos i, b)$$
(3.7)

Коэффициенты разложения функций ₂₁(x) (1.6) в ряд по косинусам имеют вид

$$\Psi^{i} = \frac{1}{ph} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r}^{q_{y_{ir}}}}{r\pi} (1 - (-1)^{r})$$
(3.8)

$$\Psi_{k}^{i} = \frac{1}{k^{h}} \sum_{r=1}^{n} \frac{a_{r}^{*} v_{r}}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^{r+k}}{r+k} + \frac{1 - (-1)^{r+k}}{r-k} \right)_{r \neq k}$$

Ниже приведен числовой пример. Рассмотрена круговая оболочка, имеющая следующие параметры: l R = 1; 0.3; R h = 100. Наименьшее значение парциальной частоты достигается при p = 1. n = 7 и равняется 0.06. Приведенные в табл. 1, 2 и 3 значения $\theta = \frac{\theta}{2}$ вычислены при n = 7. В табл. 1 приведены значения критических θ ири кольцевой обжимающей нагрузке, в табл. 2 — при нормальной к поверхности на-

грузке, распределенной по всей длине оболочки, в табл. 3 — при вормальной нагрузке, распределенной от x = 0 до $x = \frac{l}{3}$.

Таблици 1

DU/EN	i = 0		
I'R	1.10-4	3-10-4	
1	$\overline{b_1} = 0.470, \ \overline{b_3} = 0.485$	0.456, 5 0.500	
	$\overline{\theta_3}$ 1.082, $\overline{\theta}_4$ 1.213	$\bar{b_3} = 1.001, \ \bar{b_4} = 1.224$	
0.2	0,-1.022, 0, 1.645	0, 0,972, 0, 1,983	
0.5	$\overline{\theta}_{1} = 3.330, \ \overline{\theta}_{1} = 3.363$	$\bar{\eta}_{\rm J} = 3.030, \ \bar{\theta}_{\rm I} = 3.371$	

Howaha P	ľ	a	бл	ti	H	a	-2
----------	---	---	----	----	---	---	----

a./5	ε 0 - 3			
I/R	1.5.10-5	3.10-5		
	$\tilde{v}_1 = 0.391, \ \tilde{v}_2 = 0.547$	$\overline{b_1} = 0.283, \ \overline{b_2} = 0.593$		
	$\overline{\theta_{a}}$ 1.020, $\overline{\theta_{1}}$ 1.108	$\bar{y}_{2} = 1.012, \ \bar{y}_{4} = 1.224$		
4.9	$\bar{v_1} = 0.785, \bar{v_2} = 0.976$	$\overline{v}_1 = 0.648, \ \overline{v}_2 = 0.909$		
0.3	$\vec{\theta}_{1} = 3.007, \ \vec{\theta}_{1} = 3.032$	9 ₃ 2.847, 9 ₁ = 2.946		

Таблицо З

qo!E	« () a=0	<i>b</i> = 1/3	
UR	1.5-10	3.10	
,	$\vec{v}_1 = 0.3625, v_2 = 0.584$	$\overline{b_1} = 0.216, \ \overline{b_1} = 0.685$	
L.	$\bar{\theta}_{0} = 0.982, \ \bar{\theta}_{4} = 1.109$	$\vec{v}_3 = 0.986, \ \overline{v}_4 = 0.991$	
0 3	$\overline{b}_1 = 1.568, \ \overline{b}_2 = 1.573$	$\overline{\theta}_1 = 1.532, \ \overline{\theta}_2 = 1.545$	
0.5	$\overline{\theta_2} = 3.350, \ \overline{\theta}_4 = 3.351$	$\bar{\theta}_3$ 3.025, $\bar{\theta}_4$ =3.361	

Перные две величины б определяют область главного параметрического резонанса. Последни: — побочную область резонансных колебаний.

Таблица 4

118	1		
9	⁵² на ур-ия (2.9)	02 us pn6. [4]	
9 -0-6-10 S	$\overline{v}_1 = 0.15, \ \overline{v}_2^2 = 0.311$ $\overline{v}_3^2 = 1.04, \ \overline{v}_2^2 = 1.18$	b_1^2 0.17, 0.33 \overline{b}_3^2 0.91, $\overline{b}_3^2 = 1.10$	

В табл. 4 приведено сравнение результатов для оболочки, нагруженной нормальной нагрузкой, распределенной по всей длине оболочки, полученных при данной постановке задачи и в предположении безноментного докритического состояния [3]:

Как видно из табл. 4, приведенные решения несколько отличаются (4—7%).

Вычисления, приведенные в данной работе, осуществлены в Вычислительном центре Института физики АН Арм. ССР.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркев

Поступила 18 11 1974

Գ. Ի. ԱՎԱՆՈՈՒՎԱ

<mark>ԱՌԱՆՑՔԱ</mark>ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՏԵՂԱԿԱՆ ԲԵՌԻ ԱԶԳԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ ՆԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԳԵՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են փակ շրջանային գլանային թիտղանիի պարամետրական տատանումները՝ նրա վրա առանցրասիմետրիկ տեղական բեռի աղդեցության դեպրում։

Թաղանթի մինչկրիտիկական վիճակը ընդունված է մոմենտային և առանցթառիմետրիկ։ Լայնական իներցիոն ուժերը Վաչվի առնելու և մինչկրիաիկական վիճակը պարամետրերը ֆուրյեի շարջի վերաժելու գեպթում խնգիրը թնրում է Հայտնի մատրիցային Վավասարման։

ON DYNAMIC STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER AXISYMMETRIC LOCAL LOAD

G. I. AVANESOVA

Summary

Parametric oscillations of a closed circular cylindrical shell under axisymmetric local loads are examined.

Precritical condition of the shell is assumed to be instantaneous and axisymmetric. Taking into account transverse forces and expanding the parameters of precritical condition into the Fourier series, the problem is reduced to a familiar matrix equation.

АИТЕРАТУРА

- 1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТА, М. 1956.
- Болотин В. В. О взаимодействии выпужденных параметрически возбуждаемых колебаняй. Иля. АН Арм. ССР, ОТН. № 4, 1956.
- Гнуни В. Ц. Динамическая устойчивость моментных состояний пилиндрической оболочки с учезом инерции докритического состояния. Ияв. АН Арм.ССР, Механика, т. ХХУ, № 2, 1972.
- 4 Гидии В. Ц., Моясисян А. А. Об устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Прикл. механика, 1. V, имп. 6, 1969.

20.340406 002 9050003066600 0.4006000030 56964090 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա

XXVIII, № 1, 1975

Механика

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

О КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВЫЗЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ ДВИЖУЩИХСЯ СИЛ

Рассматриваются установившиеся колебания тонкой плиты, вызванные вращательным движением на ее поверхности нагрузки, состоящей из четного числа равных регулярно расположенных по окружности сил. В первом приближении исследуемая система может служить теоретической моделью для определения воздействия на прямоугольную пластину со стороны упорного шарикоподшинника.

Пусть поперечные колебания плиты описываются обычным дифференциальным уравнением без учета сдвига и инерции поворота [1]

$$D\nabla^{2-2}W + pW = q(x, y, t)$$
⁽¹⁾

Здесь
$$^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}, D$$
 — изгибная жесткость, p — масса, отне-

сенная к единице плошади, q — внешняя нагрузка.

Поместив начало системы координат *хоу* в угол пластины с размерами в плане l_1 , l_2 , разложим поперечный прогиб в ряд

$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}$$
(2)

удовлетворяющий условиям свободного опирания кромок.

Построим аналогичный ряд для внешней нагрузки

$$q = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}$$
(3)

которая задана выражением

$$q = Q \sum_{i=1}^{2k} \delta(x - x_i) \delta(y - y_i)$$
(4)

Здесь Q — сила, приложенная в точке с координатами $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$; 2k — количество сил, движущихся по окружности радиуса r с центром в точке (a, b); \hat{v} — функция Дирака.

Из выражений (3) и (4) для коэффициентов разложения имеем

$$B_{mn}(t) = \frac{4Q}{l_1 l_2} \left(\sin \alpha \, a \sin \beta \, b \, \sum_{i=1}^{2k} \cos \alpha \, \xi_i \cos \beta \, \eta_i + \cos \alpha \, a \, \cos \beta \, b \sum_{i=1}^{2k} \sin \alpha \, \xi_i \, \sin \beta \, \eta_i \right)$$
(5)

При этом введены следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{m\pi}{l_1}, \qquad \beta = \frac{n\pi}{l_2}, \qquad \xi_i = x_i - \alpha, \ \eta_i = g_i - b.$$

Переходя к полярной системе координат, положение точки (x_i, y_i) на окружности радиуса r определим углом φ_i по формулам

$$\eta_i = \operatorname{rcos} \varphi_i \quad \eta_i = r \sin \varphi_i \quad (i = 1, 2, ..., 2k).$$

Тогда для произведения косинусов и синусов получим

$$\cos \alpha \xi_{i} \cos \beta \eta_{i} = \frac{1}{2} [\cos (rR \sin \theta_{1}) + \cos (rR \sin \theta_{2})]$$
$$\sin \alpha \xi_{i} \sin \beta \eta_{i} = \frac{1}{2} [\cos (rR \sin \theta_{1}) - \cos (rR \sin \theta_{2})]$$
(6)

$$R = (\alpha^2 + \beta)^{1/2}; \quad \theta_{1,2} = \gamma \pm \varphi_i, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$$

Пользуясь известным разложением [2]

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(z)\cos 2j\theta$$

выражение (б) преобразуем к виду

$$\cos\alpha \xi_i \cos\beta \gamma_i = \int_0 (rR) + 2\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2j} (rR) \cos 2j \gamma \cos 2j \varphi_i$$

$$\sin\alpha \xi_i \sin\beta \gamma_i = 2\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2j} (rR) \sin 2j \gamma \sin 2j \varphi_i$$
(7)

где J. — функция Бесселя первого рода порядка v = 0, 2, 4, ...Подставив соотношения (7) в (5), имеем

$$B_{mn}(t) = \frac{4Q}{l_1 l_2} \left[2k f_0(rR) + \sum_{j=1}^{\infty} i_{1j} \sum_{i=1}^{2k} \cos 2j \, \varphi_i \right. + \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty} i_{2j} \sum_{i=1}^{2k} \sin 2j \, \varphi_i \right]$$
(8)

Здесь

$$h_{1j} = 2J_{2j}(rR)\cos 2j$$
 $\gamma \sin \sigma a \sin eta b$
 $h_{2j} = 2J_{2j}(rR)\sin 2j$ $\gamma \cos \sigma a \cos b$

При помощи формул [2]

$$\sum_{i=0}^{2k-1} \cos\left(u+iv\right) = \cos\left(u+\frac{2k-1}{2}v\right) \sin kv \operatorname{cosec} \frac{v}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{2k-1} \sin\left(u+iv\right) = \sin\left(u+\frac{2k-1}{2}v\right) \sin kv \operatorname{cosec} \frac{v}{2}$$

для регулярного расположения сил Q

$$\varphi_{i+1} = \varphi_1 + i \triangle \varphi = \varphi_1 + \frac{i\pi}{k}, \quad i = 0, 1, 2, ..., 2k-1,$$

после раскрытия неопределенности находим

$$\sum_{i=1}^{2k} \cos 2j \,\varphi_i = \begin{cases} 2k \cos 2sk \,\varphi_1 \, \text{при} \, j = sk \\ 0 & \text{при} \, j = sk \end{cases}$$
(9)
$$\sum_{i=1}^{2k} \sin 2j \,\varphi_i = \begin{cases} 2k \sin 2sk \,\varphi_1 & \text{при} \, j = sk \\ 0 & \text{при} \, j = sk \end{cases}$$

При постоянной скорости вращения (91 = 00t) согласно (8) и (9) имеем .

$$B_{mn}(t) = \frac{4Q \cdot 2k}{l_1 l_2} \left| f_0(rR) + \sum_{i=1}^{\infty} M_i \cos 2ik\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} N_i \sin 2ik\omega t \right|$$
(10)

где

$$M_{i} = 2 f_{2ik} (rR) \cos 2ik\gamma \sin \alpha a \sin \beta b$$

$$N_{i} = 2 f_{2ik} (rR) \sin 2ik\gamma \cos \alpha \alpha \cos \beta b$$
(11)

Подставив ряды (2), (3) в уравнение (1), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\overline{A}_{mn} + \Omega_{mn}^2 A_{mn} = \rho^{-1} B_{mn} (t)$$

Здесь $Q_{mn}^2 = \frac{D}{p} (\alpha^2 + \beta^2)^2$ — квадраты собственных частот колебаний цанты.

Ограничиваясь рассмотрением установившегося режима колебаний, решение *тл*-го уравнения с учетом разложения (10) ищем в виде

$$A_{mn} = C_{mn}^{0} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{mn}^{(i)} \cos 2ik\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} D_{mn}^{(i)} \sin 2ik\omega t$$

Для определения коэффициентов получаем равенства

$$C_{mn}^{0} = \frac{4Q \cdot 2k}{l_{1}l_{2}} \frac{\int_{0} (rR)}{D(\alpha^{2} + \beta^{2})^{2}}$$

$$C_{mn}^{(i)} = \frac{4Q \cdot 2k}{\rho l_{1}l_{2}} \frac{M_{i}}{\Omega_{mn}^{2} - (2ik\omega)^{2}}$$

$$D_{mn}^{(i)} = \frac{4Q \cdot 2k}{\rho l_{1}l_{2}} \frac{N_{i}}{\Omega_{mn}^{2} - (2ik\omega)^{2}}$$
(12)

Таким образом, в установившемся режиме пластина, получив статическую осадку, равную

$$W_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{m\pi}^0 \sin \alpha x \sin \beta y$$

будет совершать колебания с частотами 2ik. Осадка пластины пропорциональна произведению F = 2kQ, следовательно, она зависит от суммарного внешнего усилия, передаваемого на пластинку.

Проанализируем теперь амплитуды возбуждения колебаний (11). В силу того, что максимальные значения функций Бесселя /.(z) убывают с ростом у, приходим к выводу, что увеличение количества сил 2k уменьшает амплитуды возбуждения. Таким образом, увеличение количества сил Q, без изменения статической осадки плиты, приводит к снижению уровня возможных вибраций.

Из выражений (12) следуют условия резонансов в рассматриваемой системе

$$\Omega_{mn}^{2} - (2ik\omega)^{2} = 0$$
 или $\omega = \frac{\Omega_{mn}}{2ik}, i = 1, 2, 3$

Эти формулы показывают, что при заданной скорости вращения 🖤 группы, состоящей из 2k сил, резонанс невозможен на собственных частотах пластины, удовлетворяющих условию

$$\Omega_{mn} \leqslant \Omega^*$$
, rge $\Omega^* = 2k\omega_1$

Для больших значений і и к имеется возможность наступления резонансов, соответствующих малым скоростям вращения «. Однако, при этом, как показано выше, амплитуды полигармонического возбуждения убывают и оказываются недостаточными для того, чтобы вызвать заметные колебания в системах, где существуют значительные силы рассеяния энергии.

Выше предполагалось, что величины движущихся сил являются постоянными во времени. Не представляет затруднений определить амплитуды внешнего возбуждения и при наличии гармонической составляющей, то есть при $Q = P + G \cos t$. Для коэффициентов разложения внешней нагрузки в этом случае получим

$$B_{\text{max}}(t) = \frac{4P \cdot 2k}{l_1 l_2} \left| J_0(rR) + \sum_{i=1}^{\infty} M_i \cos 2ik\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} N_i \sin 2ik\omega t \right| + \frac{4G \cdot 2k}{l_1 l_2} \left| J_0(rR) \cos it + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \left(\cos \varepsilon_{1i} t + \cos \varepsilon_{2i} t \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} N_i \left(\sin \varepsilon_{1i} t + \sin \varepsilon_{2i} t \right) \right|$$

$$\varepsilon_{24} = \varepsilon_{1i} = 2ik\omega - i, \quad \varepsilon_{2i} = 2ik\omega + i.$$

61

где

В отличие от рассмотренного ранее случая в системе теперь возможно появление дополнительных резонансов на частотах $\lambda = \Omega_{mn}$ и $2ik\omega \pm \lambda = \Omega_{mn}$. Последние являются комбинационными резонансами, обусловленными пульсацией сил и изменением координат их точек приложения. Об опасности этих резонансов позволит судить только учет реальных сил рассеяния энергии, что не вызывает принципиальных затруднений в рамках линейной постановки задачи.

В заключение отметим, что полученные результаты можно легко распространить на случай нескольких групп сил, движущихся по концентрическим окружностям.

Харьковский ордена Ленина политехнический институт

Поступила 10 VII 1973

Ե. Գ. ԳՈԼՈՍԿՈԿՈՎ, Վ. Պ. ՕԼՇԱՆՍԿԻ

ՇԱԲԺՎՈՂ ՈՒԺԵԲԻ ՍԻՍՏԵՄՈՎ ՀԱԲՈՒՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ԹԻԹԵՂԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են ուղղանկյունաձև ԹիԹեղի տատանումները շրջանագծով շարժ։[ող ուժերի սիստեմի աղդեցուԹյան տակ։

Թիկեղի վիճակագրական դիրքի որոշման Տամար, որի նկատմամբ կատարվում են տատանումները, ստացվել է բանաձև։ Որոշվել են պտտման կրիտիկական արագուվյունները, որոնց դեպքում Տնարավոր է ռեզոնանս։ Բերվում են նաև պոլիճարմոնիկ գրգռման ամպլիտուղաների որոշման համար բանաձևեր։

ON VIBRATION OF A RECTANGULAR PLATE, EXCITED BY A SYSTEM OF MOVING FORCES

E. G. GOLOSKOKOV, V. P. OLSHANSKY

Summary

Stationary vibration of a rectangular freely supported plate, excited by a system of circular moving loads is investigated. Statical transverse displacement of the plate is determined. Formulas for resonance angular velocities of the rotating system as well as for the amplitude of polygarmonic excitation are given.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания механических систем. Изд. "Наукова думка", Киев, 1966.
- 2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

ШЗЧЦЧЦЬ ПЛС ЧРЗПРОЗОРОВЕРЬ ИНИЛОГРИЗР ЗОДОВИЧЕР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЯ ССР

Véjvaréjéger

XXVIII, № 1, 1975

Механико

В. И. ПЕТРОВ. А. В. БИЛЬЧЕНКО, Р. А. КОТИКЯН

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

При исследовании влияния ползучести на напряженно-деформиреванное состояние элементов конструкции, работающих в условиях иногозсного воздействия нагрузок, вопросы определения козффициентов поперечных деформаций бетона $v_1(z)$ и $v_2(t, z)$ за имают первостепенное значение. Наряду с основными физическими характеристиками бетона E(z) и C(t, z) эти коэффициенты входят в ураниения теории упруго-полаучето тела в общем случае трехмерного напряженного состояния. В предположении одинаковой ползучести бетона при растяжения и сжатии указанные характеристики связаны [1] между собой зависимостью $w(t, z) = 2C(t, z)[1 - v_2(t, z)]$ без каких-либо ограниения величины коэффициента попере ной деформации ползучести $v_3(t, z)$.

На современном этапе разянти і теория ползучести бетоя, решения ее основных задач в основном получены при условии равенства во времени коэффициентов у, (*) и у, (/, *)

$$v_1(\tau) = v_n(t, \tau) = v \quad \text{const} \tag{1}$$

Проведенные к настоящему времени исследования ноказывают, что принятая в теории упруго-ползучего тела предносылка (1) эксперименталько ис подтверждается. Так, в опытах одних авторов [5, 6] хоэффициент (/, -) был равен нулю, других [10] находился в пределах 0 < ч (1, -) = ч, (-), а в искоторых [2, 3, 7, 8, 9] -был больше ч, (-). В вастоящих исследованных для более точного определения значений козффициента у₂ (t, :) авторы стремились к выполнению двух основных условий: разработке способов измерения таких малых величин, какник являются поперечные деформации ползучести, а также устравению влияния конценого эффекта на их развитие. Общепринятая методика исследования ползучести бетона из линейных элементах (призмах) не устраняет этих недостатков, так как никакие прохладки не ногут полностью исключить влияние трения между бетоном и нагрузающими поверхностями, а точность измерительных приборов, устанавливаемых на малой базе в поперечном направлении образца, зачастую оказывается соизмеримой с величинами поперечных деформаций ползучести.

В работе [4] была разработана методика проведения длительных испытаний на плоских образцах, позволяющая в значительной степени устранить перечисленные выше недостатки. Эта методика и была приията при проведении описываемых ниже опытов.

Исследовались деформации ползучести неизолировзиного бетон, повергнутого одноосному и двухосному сжатию, а также особенности развития коэффициентов $v_1(r)$ и $v_2(t, r)$ в зависимости от величи сжимающих напряжений. В качестве экспериментальных образцов были применены плиты с размерами $220 \times 220 \times 30$ мм, изготовленные из тяжелого бетона марки 300 состава 1:1, 7:3.4 (по несу) В Ц = 0.49 ва мелком гранитном щебие. Продольные и поперечные деформации измерялись индикаторами часового типа с ценой деления 0.001 мм, установленными на базе 100 мм попарно во взаимно перпендикулярных ваправлениях одновременно с двух сторон. Крепление индикаторов осуществлялось при помощи винтов к металлическим закладным деталям. заложенным в образция при их бетопировании.

Нагружение образцов осущестнлялось по торцам при помощи лвух пар резиновых камер, заполненных жидкостью под давлением, созданаемым и поддерживаемым в течение всего эксперимента рычажногидравлической установкой. При отключении одной нары камер осуществлялось одноосное нагружение.

Данление жидкости на все стороны было одинаковым, торцы резиновых камер упирались в жесткую металлическую обойму. Толщина стенок резиновой камеры была 2—3 мм, поэтому в зазоре между металлической рамкой и плиткой резина не выдвигалась. Что касается касательных усилий, которые могут появляться у пластии за счет того, что коэффициент Пуассона резины больше, чем бетона, то ими можно пренебречь, так как при выбранной методике эксперимента не вызываются большие деформации резины. Таким образом, усилия, действующие на торцы резиновых камер не могли передаваться на бетонные пластины (фиг. 1).

Для определения усадочных деформаций параллельно были постанлены ненагруженные образцы-близнецы. Возраст бетона к моменту нагружения составлял 7 и 8 суток.

Результаты измерений коэффициента поперечной деформации v(z), определенного как отношение полных поперечных деформаций к продольным в процессе нагружения плит, припедены на фиг. 2. При определении v(z) из продольных и поперечных деформаций не были исключены деформации полаучести, появляющиеся и процессе нагружения образцов. Предстанленные на графиках значения v(z) не равны значениям коэффициента поперечных упругих деформаций $v_1(z)$, а несколько меньше его. так ках в направлении действия нагрузки деформации ползучести всегда больше, чем в поперечном. Тем не менее на основании полученных данных можно сделать вывод, что при нагрузках $z = (0.45 - 0.5)R_{av}$, соответствующих границе трещинообразования R^0 , коэффициент v(z) изменяется незначительно (от 0.15 до 0.2) и может быть принят постоянным, не зависящим от уровня сжимающих

64

паряжений и ранным своему среднему значению $v(\tau) = 0.175$. Поэтому пря : R^0 за величину кооф аниента $v_1(\tau)$ в исследуемом диапазоне возрастов бетона к моменту : грежения может прилать значение $v(\tau)$ в считать его постоянным и не эзгисящим от τ

$$\nu_1(\tau) = \nu(\tau) = \nu = \text{const}$$
 (2)



Our. 1.

При напряжениях $\Rightarrow > (0.45 - 0.5)R_{\rm up}$ значения коэффициента v(т) начныют резко возрастать, что свидетельствует о появлении необратимых чикротрещии, и при напряжениях $\Rightarrow \simeq 0.88 R_{\rm sp}$ достигают величины $\simeq 0.45$.

На фиг. З представлены результаты измерений продольных и поперечных (в плоскости образца) деформаций одноосно нагруженных плит. К сожалению, из-за незначительной толщины (ЗОмм) не удалось проследить развитие поперечных деформаций ползучести плиты и определить степень влияния анизотропии ботона (плиты бетонировались в горизонтальном положении) на характер изменения коэффициента $v_2(t, z)$.

Из графиков видно, что поперечные деформации ползучести наиболее интенсивно нарастали в течение первых 20—30 суток с момента нагружения, в дальнейшем их рост замедлялся и наблюдалась тенденция к стабилизации. В напривлении действия нагрузки активный рост леформаций ползучести наблюдался значительно дольше (примерно 50—55 суток), что и предопрезнамало характер изменения коэффициента (,) во времени (фиг. 4).

5 Известия АН Армянской ССР, Мехлинка, № 1

Коэффициент поперечной деформации ползучести $v_2(t, \tau)$, определенный как отношение поперечных деформаций ползучести к продольным, достиг своего максимального значения в первые сутки после нагружения, а затем постепенно уменьшался до величины, примерно равной значению коэффициента $v_1(\tau)$, что объясняется большей скоростью затухания поперечных деформаций ползучести по сравнению с продольными. При $t \to 90$ суток значения коэффициента $v_2(t, \tau)$ оставались практически неизменными и постоянными во времени. При этом большему значению относительных сжимающих напряжений соответствовала и большая величина коэффициента τ_2 . Аналогичный характер



Фиг. 2. Изменские коэффицисита поперечной деформации »(:) при кратковременных испытаниях плят.

изменения коэффициента — во времени был отмечен и другими исследователями [2, 3, 7]. Так в опытах С. В. Александровского [2], О. Я. Берга и А. И. Рожкова [3] и А. В. Яшина [7] с призмами начальный цериод резкого увеличения коэффициента у₂(*t*, ⁻) составил от 2-4 до 15 20 сут. соответственно. С увеличением значений относительных сжимающих напряжений величина этого периода уменьшалась и при приближалась к одним суткам. В опытах авторов получено одно существенное отличие в очертаниях криных в начальный после нагружения период. Коэффициент поперечной деформации ползучести резко возрос в: первые сутки после нагружения (фиг. 4). Причина такого различия, по нашему мнению, заключается в отсутствии сдерживающего влияния сил трения на контакте бетона с нагружающими поверхностями на развитие поперечных деформаций ползучести.



Фиг. 3. Опытные кривые деформация получести илят. Условные оболначения: 111 1. 0.4 R_{np}); П2 ($z_x = 0.4 R_{np}$, $z_y = 0.2 R_{np}$); П3 ($z_x = 0.4 R_{np}$, 0.0); П4 ($\sigma_x = \sigma_y = 0.2 R_{np}$); П5 ($z_x = 0.2 R_{np}$, $\sigma_y = 0.0$); П6 ($z_y = 0.3 R_{np}$); П8 ($z_x = 0.3 R_{np}$, $\sigma_y = 0.00$).

крвиме, построенные с использованием принципа наложения.



Фиг. 4. Развитио во премени козффициентов поперечкой деформации ползучести бетона ·· (1, т) (пунктиром показамы кривые по зависимости (5)).

Уменьшение периода начального роста коэффициента поперечной полаучести ч. (1, 1) и работах [2, 3, 7] при напряжениях, близких к границе трещинообразования, объясняется появлением обратимых микротрещип* и разрывов в плоскостях, параллельных плоскости действия нагрузки, что приводит к интенсивному развитию поперечных деформаций ползучести.

На фиг. 5 нанесены точки, соответствующие максимальным значениям коэффициента поперечной ползучести (с. т.) для неизолировалного бетона сстественного твердения, полученные в опытах авторов и других исследователей. Несмотря на значительные различия в составах бетонов, их прочности, нозраста к моменту загружения, расположение точек на графиках достаточно закономерно. Из графика видно, что существует четкая нелизейная связь между максимальными значениями коэффициента поперечной ползучести и напряжениями сжатия,



Фиг. 5. Изменение максимальных значений ковффициента за^{вил} (7). Условимо абозна, чения: о — опыты аязоров, — опыты О. Я. Берга и А. И. Рожкова, — опыты Гопалакришизия К. С., <u>+</u> — опыты Хананта Д. Я. I — хривая по зависимаети (3).

$$s_{2}^{\min}(z) = \frac{v_{1}(z)}{1 - 1.1 \frac{z}{R_{so}}}$$
(3)

где $v_{1}(\tau) = v(\tau) - \tau = 1/6 = const, \tau - напряжение, приложенное к образцу в момент времени т.$

Пол обратичами микротрощинами понимаются тръщним, появляющиеся в ранном вопрасто под нагрузкой, которые в процессе твърдения бето на залочиваются или нечезают совсем.

Кривая, построенкая по ззенсимости (3), удовлетворительно согласуется с опытными данными.

Последующее уменьшение коэффициента $v_2(t, z)$ по времени от своего максимального значения $v_2^{\max}(z)$ до величины, примерно равной $v_1(z)$, происходило наиболее интенсинно в первыс 40- 50 сут и через 90-100 сут выдержки под нагрузкой наступала его стабилизация. Это явление связано с процессами непрерывного уплотнения структуры бетона в области линейной ползучести [3], самозалечиванием микротрещии, увеличением модуля деформаций бетона и характеризуется уменьшением его объема. Поэтому изменение коэффициента $v_2(t, z)$ во времени предлагается определять по убывающей экспонсициальной зависимости

$$v_1(t, z) = v_1(z) - [v_1 - v_1(z)] e^{-t(z)}$$
(4)

гле у — пораметр, карактеризующий скорость изменения коэффициента *{(/. *) по времени. Обработ а опытов автор, и другах исследователей [3, 8, 9] показила, что в области личенной ползучести параметр у практически не зависит от уровия напряженного состояния, возраста бетона к м менту нагружения, а каке от его состава и может быть принят ранным своей средкей величине у = 0.027.

Подставив в формулу (4) выражение для 25 (т), получим

$$v_{z}(t, z) = v_{1}(z) - 1.1 \frac{z}{K_{ap}} \frac{v_{1}(z)}{1 - 1.1 \frac{z}{K_{ap}}} e^{-0.(20)t-z)}$$
(5)

Построенные по зависимости (5) кривые удовлетворичельно согласуются с опытными давными (фиг. 4.)

В опытах авторов деформации ползучести (и фиг. З пунктирные лини), полученные нутсм наложения поперечных деформаций ползучести одноосно обжаты: плит на деформации ползучести дпухосно нагруженных элементов, оклиались на 12—16° меньше опытных значений деформаций ползучести одноосно сж. тых плит. Тако, разл. чие и ходится в пределах допустимого разброса опытных данных для бетовных элементов. Кроме этого, при наложения поперечных деформаций ползучести одноосно сжат к плит, полученных с использованием равенства (1), на деформации ползучести двухосно сжатых элементов различие между опытными значениями деформации ползучести одноосно обж тых плит в начальный после нагружения период (60–70 суток) составит около 25–30° разанных. Это подтверждает возможность применения принципа наложения при двухосном сжатии длительно действующей нагрузкой.

Таким образом, применение равенства (1) при решении задачи влоского напряженного состояния с использованием реологических уравнений теории упруго-ползучего тела не внесет больших погрешностей по сравнению с экспериментальными данными.

Проведенные авторами исследования позволили сделать следующие основные выводы:

1. Экспериментально установлено унсличение коэффициента ((, :) в начальный после нагружения период в зависимости от уровней напряжений одноосного сжатия. Предложена аналитическая зависимость для определения коэффициента у ((, :).

2. Доказана возможность применения принципа наложения воздействий для деформаций ползучести бетона при двухосном сжатии.

3. Доказана правомерность применения условия (1) при решении задачи плоского напряженного состояния с использованием реологических уравлений теории упруго-ползучего тела.

Институт механиви АН Арминской ССР

Поступила 28 | 1974

д. Б. МБЗРИД, В. Ц. ИНДВАНИ, Б. В. БИЗИМИ

ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԳԵՖՈՔՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԳՈՐԾԱԿՑԻ ՄԱՍԻՆ Ա.մ.փ.ո.փ.ո.ւմ

Ալխատանքում բերվում են բետոնի սողքի լայնական ղեֆորմացիաների գործակոի էրսպերիմենտուլ հետուղստուքյուն արդյունքները։ Ստացված է, որ ».(t, =) գործակիցը բեռնուվորման սկղրում մեծանում է և ապա փորթանալով հավասարվում է $I_1(z)$ -ի արժերին։ $Y_2(t, z)$ գործակցի որոշման համար առաջարկված է անալիտիկ արտահայտունյուն կախված դործող լաթումներից։

Երկառանցը սեղմման դեպրում բետոնի սողջի դեֆորմացիաների մամար ապացուցուցեւմ է վերադրման սկղթունրի կիրառելիուՈլյունը։

ON THE COEFFICIENT OF TRANSVERSE DEFORMATION OF CONCRETE CREEP

V. J. PETROV, A. V. BILCHENKO, R. A. KOTIKIAN

Summary

The results of experimental studies on the coefficient of transverse deformation in concrete creep, $v_2(t, \cdot)$, are examined showing its increase at the period initial after loading with a subsequent decrease to the value of $v_1(\tau)$. An analytical dependence is suggested for the definition of $v_2(t, \tau)$ as a function of the level of operating stresses. The principle of superposition of effects is proved to be valid for concrete creep deformation under two-axial compression.

АИТЕРАТУРА

- 1. Арутюнян Н. Х. Нехоторые вопросы техрии поляучести. Госстровиздат, М., 1952.
- Александровский С. В., Полкова С. М. О колффици не понеречной деформации бетона при длигельном дейстики нагрузки. Полаучесть и услака бегона. Материвлы совещания, подготояхенного НИИЖБ Гесстроя СССР, М., 1969.
- Берг О. Я., Рожков И. А. Исследование неупругих деформаций и структурных изменений имсокопрочного б энд при длительном действии сжимающих напряжевий. Тр. Всесоюзного НИИ транспортного строительства. Изд-во "Троиспорт", М., 1969.
- 4 Бильченко А. В. Молодченко Г.А., Патров В. И. О метадиян испытония двухосно обжатых образцов при длятельном патрушении, "Строительные конструкция", вкн. XXI. Изд-по "Будислыкии", Кисц. 1973.
- 5. Копикан Р. А. Полаучесть богона при двухо ном растяжении. Иля. АН Армянской ССР. Механика, т. XXI, №1, 1968.
- В Проколович И. Е. Влияние длигельных працессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. Госстройиздат. М., 1953.
- Яшик А. В. Прочность бетона при длят льном этгрудский и закономерности его разрушения и леформаций. VI конферсация на бетону и железобетону, НИИЖБвып. І. Стройиздет. М. 1965, 19-21.
- Copulakrishnan K. S., Adam, Ghalt Amin. Creep Poissons Ratio of Concrete under Multiaxiel Compression. J. of the American Concrete Institute Proceedings, v. 66, Nr 12, 1969.
- Hannant D. J. Creep and Creep Recovery of Concrete Subjectend to Multiaxial Compressive Stress. J. of the American Concrete Listitute, No. 5, May, 1969, Proceedings, v. 66.
- Duke C. M., Davis H. E. Some Properties of Concrete under Test Materials, 44, 1944.

20340405002 Эманалар вывариная зацьяцяе известия академии в академинской сср

II **հի**սանիկա

XXVIII, Me 1, 1975

Механики

A. A. ARBELLII

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОТВЕРСТИЙ В ПЛАСТИНАХ

Концентрация изпряжским около эллиптических отверства в пластинах конечных размеров наут и прественно меньше, чем концентрация напражении охоло круголь, с в стий. Решения для сллиптических отверстий и јеско: выло олучено еще Колосоным [1] в Игласом а знелариа и тако (методами фотоунругости) Коксром в Файлоном [3, "Дурелли Мурелли [4]. Дурелли, Парке и Фен. [5] вкелери в вло пределили напряжения около эллиптического отверсти в случае пого напряжения около эллиптического отверсти в случае пого напряжениого состояния. До гато но полный обзор и ди ревений по рассматринаемому вопросу приведен в известной монографии 1. Н. Савина [6].

Рассмотрим эндногу о расприделение напряжения в прямоугольной области с эллиптическим отверствое (пр. 1).

Естественно при решении длиной зада и изрейти к эллиптическим координатам

$$x = c \operatorname{chces} \eta = g - c \operatorname{shsin} \eta$$
 (1)

Дифференциальное урагиение для функции напряжения ^и в эллиптических координатах имсет вид

$$\frac{R^2}{c^2} \Delta^2 \Psi - 2 \frac{R}{c} \left(\sin 2z \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Psi - z \psi_z + \frac{\partial}{\partial z_z} \Delta \Psi \right) = \frac{R}{c} \Delta \Psi = 0$$
(2)

где

$$K = c \left(\frac{4\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Delta = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}$$

При этом напряжения определяются по формулам

$$R^{2}\tau_{1} = -\frac{D}{\partial t^{2}} \frac{\partial^{2}\Psi}{\partial t^{2}} - \sinh \tilde{\tau} \cosh \tilde{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\tau}} + \sin \tau_{t} \cos \tau \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{t}}$$

$$R^{2}\tau_{2} = R - \sin \tau_{t} \cos \tau_{t} - \sinh \tilde{\tau} \cosh \tau_{t} - \sinh \tilde{\tau} \cosh \tau_{t}$$

$$R^{2}\tau_{2}\tau_{2} = -R \frac{\partial^{2}\Psi}{\partial \tau_{t}} + \sin \tau_{t} \cos \tau_{t} \frac{\partial \tau_{t}}{\partial \tau_{t}} + \sinh \tilde{\tau} \hbar \tilde{\tau} \hbar \tilde{\tau} \hbar \tilde{\tau} \hbar \tilde{\tau} \hbar \tilde{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{t}}$$
(3)

В качестве аппроксимирующих использовались два вида функций, удовлетворяющих (2); гармонические полиномы [7]

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_{2-1,2}^{n-1}(t,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i {\binom{n}{2}} t^{n-2i} \eta^{2i}$$
(4)

и гиперболо-тригонометрические функции

$$\Psi = a_0; \quad b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i) + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i] + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i] + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i] + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i] + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m v_i - c_{2m} \sin a_m v_i] + b_0 v_i = \sum_{m=1}^{\infty} [ch a_m; (c_{1m} \cos a_m$$

$$cos_{m}$$
; $(c_{3m}ch_{2}-r_{1}+c_{4m}h_{2m}r_{1}) + sh_{2m}$; $(c_{5m}cos_{2m}r_{1}+c_{4m}h_{2m}r_{1})$

$$-c_{\delta m} \sin a_m \tau_i) + \sin a_m : (c - cha_m \tau_i - c_{\delta m} \sin a_m \tau_i)$$
(5)

1.

신

etrom

Тах как ниже рассмотрени симметричные относительно осен ; и д случан нагружения, то в (4) и (5) удерживались симметричные члены.

Функции (5) праменялись Кокером и Файлоном [3], а также Джонсом и Ходосом [8], получиншими с их полощью численные результаты.

Заметим, что гармонич кис полиномы (4) записын-ются в форме. предложенной В. А. Бондаревко [7].

При этом

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b! (a-b)!}$$

$$\begin{split} I = \left\{ \frac{n}{2} \right\} = \underbrace{\text{uerast success}}_{Q_X} H_{3-1,2} = nH_1, \\ \frac{\partial}{\partial x} H_{2-1,2} = nH_1, \\ \frac{\partial}{\partial y} H_{2-1,2} = -nH_{2-2,1}^{r-1} \\ \int H_{2-1,2}^{n-1} dx = \frac{1}{n+1} \\ \int H_{2-1,2}^{n-1} dy = \frac{1}{n+1} H_{2-1,1}^{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial t} H_{2-1,2}^{n-1} dy = \frac{1}{n+1} H_{2-1,1}^{n-1} \\ \lambda = 2 \left| \frac{n}{2} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 & \text{оря } n \text{ четном} \\ 1 & \text{при } n \text{ нечстном} \end{array} \right|$$

Нижние индексы при Н показывают четность или нечетность по переменным с и з, верхние степень полинома и порядок лапласиана. Связь напряжений 🚛 🔩 и 🗤 с с., с и т. определяется следующим образом (фиг. 1):

73
🐛 . L. Alustana,

$$\cos z = \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \sin \tau_i}{\sqrt{\operatorname{ch} 2 + \cos 2\tau_i}}$$
(6)

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в практике симметричные задачи. При этом возможно ограничиться рассмотрением одного квадрата. Сформулируем граничные условия (фиг. 1). На кромке отверстия

$$z = z_{0} = 0$$
 npa ; z_{0} (7)

на наружном контуре пластины

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||npn|| y = \frac{l}{2}; 0 \leqslant x < \frac{L}{2}$$
(9)

Для получения приближенных решений использовался метод переопределенной граничной коллокации, причем граничные условия удовлетворялись в заданных точках как на внутреннем, так и на наружном контуре пластины.

Программа вычислений предусматривала использование двух типов анпроксимирующих функций. Так как вычисления производились на ЭВМ "Минск-22", то число значащих цифр не превышало 7, что, вообще говоря, может оказаться недостаточным при решении плохо обусловленных систем липейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов анпроксимирующего ряда — Таким образом, для получения устойчивого решения особенно нажными становятся соотзетствующие свойства системы координатных функций. Количество точек коллокации доходило до 50, а число членов аппроксимирующего ряда до 21 (в каждой точке выполнялось одно условие).

Некоторые полученные результаты в сраинении их с изнестными акспериментальными данными показаны на фиг. 2–9. Приводятся в основном решения, для которых оказалось нозможно найти соответствующие экспериментальные данные, а также тиничные картины разпределения напряжения. По фиг. 10 показан характер сходимости решений. Как видно из фис. 10. значение для n = 21 (в пределах 5°.0), начиная с m = 30. для n = 15 с m = 35. а для n = 10, очевидно, m > 50. При этом характер стабилизации уровня напряжений различен, что видно из фиг. 10.

Следует стметить, что все приведенные результаты получены с помощью функций (4). Попытка повторить результаты Джонса и Хозоса [8], применяя используемые ими аппроксимирующие функции (5), окончилась неудачно. Получаемые при этом системы ураннений оказывались плохо обусловленнями и больщие вычислительные погрешности пе дали возможности получить разумные результаты (фиг. 5).

Вероятно, авторы [8] использовали ЭВМ с большим количеством значащих цифр. Однако в полученных ими результатах имеются серь-

74



Øur. 1.

Фиг. 2.



Фиг. 3.



Qur. 4.



Qur. 5.

4



Фиг. 6.



Фяс. 7.





.9 .mp





езные расхождения с нашими результатами и известными экспериментальными решениями, объясняемые, как видно, иычислительными погрешностями.

Харьковский научно-исследоватольский институт завода "Электротяжмаш"

Поступила 10 XI 1973

Ա. Լ. ԼԻՎՇԻՑ

ԹԻԹԵՂՆԵՐՈՒՄ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՑՔԵՐԻ ՇՈՒՐՋԸ ԼԱՔՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՅԵՆՏՔԱՑԻԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է էլիպտական անդրով ուղղանկյունաձև քիիքեղներում լա․ րումների որոշման վերարերյալ խնդիրը։

Խնդիրը լուծվում է նախապնս որոշված կոլոկացիայի մեքնողով։ Ուսումնասիրվում են երկու տեսակի մոտարկող ֆունկցիաննը։ Ստացվել են նվային արդյունջներ։ Գանված լուծումները համեմատվում են ուրիշ հեղինակների մի բանի փորձնական արդյունջների հետ։ Թվային մանապարհով ուսումնասիրվում են ստացված լուծումների գուդամիտության արագությունը և բնույթը.

А. Л. Лявшан

STRESS CONCENTRATIONS NEAR ELLIPTICAL HOLES IN PLATES

A. L. LIVSHITS

Summary

Determination of stresses in rectangular plates is considered by means of the collocation method. The results obtained are compared with experimental ones.

ЛИТЕРАТУРА

1. Совин Г. Н. Концентрация изпримений около отверстий. ГТТИ, 1951.

2. Inglis C. Trans. Inst. Naval. Arch. London, v. 35, 1913.

3. Кокер Э., Файлон Л. Онтический метод исследования напряжений. ОНТИ, 1936.

4. Durelli H. Exp. Stress Analysis, v. 1, No 1, 1913.

- Дуреали, Перкс, Фенг. Напряжение вокруг эллинтического отверстия в пластине конечных размеров, подверженных действию осевой нагрузки. Прикл. механика, № 1, 1966.
- 6. Савин Г. Н. Распределение наприжений около отверстий. Киев, 1968.

7. Бондаренко Б. А. Полигармонические полиномы. Ташкент, 1969.

.8. Джонс, Хозос. Распролежение напряжений около эллиптических отверстий и илоских пластинах. Конструнрование и технология машиностроения, № 3, 1971.