ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1974

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН

К УРАВНЕНИЯМ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИН

На основе гипотез магнитоупругости, предложенных в работах [1, 2], выводятся уравнения магнитоупругих колебаний тонких токонесущих пластин, помещенных в магнитное поле. Полученные уравнения рассматриваются для частного случая — задачи колебаний бесконечной пластинки, несущей равномерно распределенный электрический ток.

1. Пластинка постоянной толщины $2h$ служит проводником стационарного электрического тока в направлении, параллельном срединной плоскости. Кроме магнитного поля, обусловленного заданным электрическим током в пластинке, предполагается также наличие внешнего магнитного поля, которое до тех пор, пока пластинка находится в покое, не создает электрического тока.

Магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей пластинку, равны единице. Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (x, y) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}_0\,(E_{0x}, E_{0y}, 0)$ обусловленный током в пластинке, должен удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 \tag{1.1}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{E}_0$ внутри пластинки не зависит от координаты z, а вне пластинки равняется нулю.

Предполагается, что задача магнитостатики для невозбужденного состояния пластинки решена. Задача магнитостатики требует решения уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}_0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 \tag{1.2}$$

при условиях на поверхностях, ограничивающих пластинку

$$[\mathbf{B}_0^{(e)} - \mathbf{B}_0^{(i)}] \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad [\mathbf{H}_0^{(e)} - \mathbf{H}_0^{(i)}] \times \mathbf{n} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем индекс (i) показывает принадлежность к внутренней области, ограниченной поверхностями пластинки, индекс (e) — к внешней области, $\mathbf{n}$ — нормаль к соответствующей поверхности пластинки, $\mathbf{B}_0 \{B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}\}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{H}_0^{(e)} = \mathbf{B}_0^{(e)}$, $\mu \mathbf{H}_0^{(i)} = \mathbf{B}_0^{(i)}$.

Уравнения электродинамики для движущейся среды принимаются в виде [3]:

во внутренней области ($|z| \leqslant h$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(i)} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[\mathbf{E}^{(i)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B}^{(i)} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}^{(i)}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(i)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(i)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^{(i)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}^{(i)} = 4\pi\rho_e \tag{1.4}$$

во внешней области ($|z| > h$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}^{(e)} = 0 \tag{1.5}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ — соответственно векторы напряженности и индукции электрического поля, $\mathbf{u}\ \{u_x, u_y, u_z\}$ — вектор перемещения частиц пластинки, c — скорость света в вакууме, ρ_e — плотность электрических зарядов в пластинке.

Связи между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в системе координат, связанной с движущейся поверхностью раздела двух сред, принимаются в виде

$$\mathbf{B}_*^{(i)} = \mu \mathbf{H}_*^{(i)}, \qquad \mathbf{B}_*^{(e)} = \mathbf{H}_*^{(e)}, \qquad \mathbf{D}_*^{(i)} = \varepsilon \mathbf{E}_*^{(i)}, \qquad \mathbf{D}_*^{(e)} = \mathbf{E}_*^{(e)} \tag{1.6}$$

Векторы, характеризующие рассматриваемое электромагнитное поле в подвижной системе координат, отмеченные индексом (*), выражаются через соответствующие векторы неподвижной системы координат (x, y, z) по формулам [1]

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{E}, \qquad \mathbf{H}_* = \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{D}$$
$$\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}, \qquad \mathbf{D}_* = \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{H} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{v}_n$ — вектор скорости перемещения поверхности раздела в направлении нормали, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности раздела в неподвижной системе координат.

Рассматриваемая здесь задача колебаний токонесущей пластинки будет полностью поставлена, если к уравнениям (1.3) и (1.4) присоединить уравнения движения пластинки с учетом сил и моментов электромагнитного происхождения и соответствующих граничных условий на поверхности раздела двух сред (пластинки и вакуума). Силы и моменты электромагнитного происхождения определяются из формул

$$\mathbf{R} = \int\limits_{-h}^{h} \left[\frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} + \rho_e \mathbf{E} \right] dz$$

$$\mathbf{m} = \int\limits_{-h}^{h} \left[\frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d \mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} + \rho_e \mathbf{E} \right] z dz \tag{1.8}$$

В настоящей работе рассматриваются задачи магнитоупругих колебаний при малых возмущениях. Принимая для компонент возмущенного электромагнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e} \tag{1.9}$$

и учитывая, что компоненты векторов $\mathbf{h}$ и $\mathbf{e}$ индуцированного электромагнитного поля и компоненты вектора $\mathbf{u}$ малы, уравнения (1.4) и (1.5) линеаризуются. Используя при этом связи (1.6) и линеаризованные соотношения (1.7), получим уравнения электродинамики в следующем виде:

для внутренней области (здесь и в дальнейшем индекс (i) опускается)

$$\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_x + \frac{1}{c} \left(B_{0z} \frac{\partial u_y}{\partial t} - B_{0y} \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_x}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} H_{0y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_y + \frac{1}{c} \left(B_{0x} \frac{\partial u_z}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} H_{0x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_z + \frac{1}{c} \left(B_{0y} \frac{\partial u_x}{\partial t} - B_{0x} \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_z}{\partial t} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_x}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} E_{0y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} E_{0x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_z}{\partial t} \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c} \left(E_{0y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial t} - E_{0x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial t} \right) = 0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial x}+\frac{\partial e_y}{\partial y}+\frac{\partial e_z}{\partial z}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu c}\left(H_{0x}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial t}-H_{0y}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial t}\right)=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_e \quad (1.17)$$

для внешней области

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{h}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\mathbf{h}^{(e)}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{e}^{(e)}=0 \quad (1.18)$$

Члены с коэффициентами ε и $\varepsilon\mu-1$ в уравнениях (1.10)—(1.12) обусловлены токами смещения. Для проводников, обладающих хорошей проводимостью, токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости, что в дальнейшем и делается.

2. Гипотезы магнитоупругости, предложенные в работах [1, 2], аналитически записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}u_x=-z\frac{\partial w}{\partial x},\quad u_y=-z\frac{\partial w}{\partial y},\quad u_z=w(x,y,t)\\ e_x=\varphi(x,y,t),\quad e_y=\psi(x,y,t),\quad h_z=f(x,y,t)\end{gathered} \quad (2.1)$$

Интегрируя уравнения (1.10) и (1.11) по z и используя соотношения (2.1), компоненты индуцированного магнитного поля h_x и h_y определим посредством их граничных значений при $z=\pm h$ и функций φ, ψ, f, w

$$\begin{gathered}h_x=\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}+z\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\psi\right)+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(a_x\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\\ h_y=\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}+z\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right)+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(a_y\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)\end{gathered} \quad (2.2)$$

Здесь h_x^+, h_x^- и h_y^+, h_y^- — значения компонент h_x и h_y при $z=\pm h$ соответственно,

$$a=\int_{-h}^{z}B_{0z}z\,dz-\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}B_{0z}z\,dz,\quad a_i=\int_{-h}^{z}B_{0i}\,dz-\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}B_{0i}\,dz \quad (i=x,y,z)$$

В выражениях (2.2), как было оговорено выше, токи смещения не учтены. Однако, из уравнений (1.10) и (1.11) легко заметить, что при определении h_x и h_y учет токов смещения не представляет трудности.

Аналогичным образом из уравнения (1.12) определяется компонента электрического поля e_z. При этом пренебрежение токами смещения существенно облегчает нахождение e_z

$$\begin{gathered}e_z=\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right]-z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\\ +\frac{1}{c}\left[\left(a_y-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\left(a_x-\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right]+\frac{z}{c}\left(B_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-B_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)\end{gathered} \quad (2.3)$$

При необходимости учета токов смещения приведенный в настоящей работе способ получения уравнений магнитоупругости можно применить в следующих случаях:

а) при решении задач с периодическими колебаниями. Искомые величины в этих задачах представляются в виде $q\ (x,\ y,\ z)\ \exp\ (i\omega t)$ и компонента e_z определяется из уравнения (1.12);

б) при решении задач магнитоупругости, для которых выполняются условия отсутствия электрических зарядов [4]. Тогда компоненту e_z следует определять из уравнения (1.17) при $\gamma_e = 0$ после соответствующего интегрирования по z.

Используя соотношения (2.1) и интегрируя уравнения (1.15), (1.10) и (1.11) по z в пределах от $-h$ до h, получим следующие уравнения, определяющие неизвестные функции $\varphi,\ \psi,\ f$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi + \frac{4\pi\sigma}{2hc^2}\left(c_z\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} + b_y\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\psi + \frac{4\pi\sigma}{2hc^2}\left(c_z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + b_x\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

где

$$b_l = \int\limits_{-h}^{h} B_{0l}\,dz, \qquad c_l = \int\limits_{-h}^{h} zB_{0l}\,dz \qquad (l = x,\ y,\ z)$$

Соответствующее интегрирование остальных уравнений из (1.10)—(1.16) после некоторых преобразований приводит к дополнительным условиям, налагаемым на граничные значения искомых величин при $z = \pm h$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right| =$$

$$= -\frac{4\pi\sigma}{c}\left|\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right) + \frac{1}{2h}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \frac{\partial g_z}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{4\pi\sigma\mu}{2hc^2}\left(c_x\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g_z\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right) + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}E_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right| = \tag{2.5}$$

$$= \frac{4\pi\sigma}{c^2}\left|\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{1}{2h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \frac{\partial g_z}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{4\pi\sigma\mu}{2hc^2}\left(c_y\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g_z\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}\right) - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}E_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) = \frac{4\pi\sigma^2}{2hc^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(c_x\frac{\partial w}{\partial t} + g_z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(c_y\frac{\partial w}{\partial t} + g_z\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)\right] - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c}\left(E_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - E_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) \qquad (2.5)$$

где

$$g_i = \int_{-h}^{h} z^2 B_{0i} dz \qquad (i = x,\ y,\ z)$$

К уравнениям (2.4) необходимо присоединить линейное уравнение движения пластинки с учетом сил и моментов электромагнитного происхождения [1]

$$D\Delta^2 w + \frac{\partial}{\partial x}\left(T_{0x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{0y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = R_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \qquad (2.6)$$

Здесь T_{0x} и T_{0y} — усилия в направлениях x и y, определяемые из решения соответствующей задачи упругости при наличии статических объемных сил электромагнитного происхождения в направлениях x и y

$$R_{0x} = \frac{\sigma}{c} b_z E_{0y}, \qquad R_{0y} = -\frac{\sigma}{c} b_z E_{0x}$$

Сила R_z и моменты m_x, m_y определяются согласно формулам (1.8) следующим образом (формулы (1.8) предварительно линеаризуются и преобразуются с учетом (2.1)—(2.3)):

$$R_z = \frac{\sigma}{c}\left\{b_y(E_{0x} + \varphi) - b_x(E_{0y} + \psi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c}\left[(b_{xx} + b_{yy})\frac{\partial w}{\partial t} + c_{xz}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + c_{yz}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right]\right\}$$

$$m_x = \frac{\sigma}{c}\left\{c_z(E_{0y} + \psi) - c_y\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right] + \right.$$

$$+ g_y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{c_{xz}}{c}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{c}\left[l_{yy} - \frac{1}{2}b_y c_y - \frac{\partial}{\partial y}\left(l_y - \frac{1}{2}c_z c_y\right) - \right. \qquad (2.7)$$

$$\left. - g_{zz}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{1}{c}\left[l_{xy} - \frac{1}{2}b_x c_y - \frac{\partial}{\partial x}\left(l_y - \frac{1}{2}c_z c_y\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} +$$

$$+ \frac{2h\varepsilon E_{0x}}{4\pi}\left\{\frac{e_z^+ + e_z^-}{2} - \frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2hc}\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \frac{\partial g_z}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) + \frac{\varepsilon\mu - 1}{2h\mu c}\left(c_x\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} - c_y\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right\}$$

$$
\begin{gathered}
m_y=\frac{\sigma}{c}\left\{-c_z(E_{0x}+\varphi)+c_x\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^++h_y^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^++h_x^-}{2}\right)\right]-\right.\\
-g_z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{c_{yz}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{c}\left[l_{yx}-\frac{1}{2}b_yc_x-\frac{\partial}{\partial y}\left(l_x-\frac{1}{2}c_zc_x\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\\
-\frac{1}{c}\left[l_{yx}-\frac{1}{2}b_zc_x-\frac{\partial}{\partial x}\left(l_x-\frac{1}{2}c_zc_x\right)-g_{zz}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}+\\
+\frac{2h\varepsilon E_{0x}}{4\pi}\left[\frac{e_z^++e_z^-}{2}-\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^++h_y^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^++h_x^-}{2}\right)\right]\right]-\\
\left.-\frac{1}{2hc}\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\frac{\partial g_z}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{2h\varepsilon c}\left(c_x\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}-c_y\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right\}
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

где

$$
b_{ij}=\int_{-h}^{h}B_{0i}B_{0j}\,dz,\qquad c_{ij}=\int_{-h}^{h}zB_{0i}B_{0j}\,dz,\qquad g_{zz}=\int_{-h}^{h}z^2B_{0z}^2\,dz
$$

$$
l_{ij}=\int_{-h}^{h}\left(\int_{-h}^{z}B_{0i}\,d\xi\right)B_{0j}z\,dz,\qquad l_i=\int_{-h}^{h}\left(\int_{-h}^{z}\xi B_{0z}\,d\xi\right)zB_{0i}\,dz
$$

$$(i,\ j=x,\ y,\ z)$$

В четырех уравнениях (2.4) и (2.6) относительно искомых функций φ, ψ, f, ω содержатся также неизвестные значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля и нормальной компоненты индуцированного электрического поля (согласно (2.7)) при $z=\pm h$. Поэтому уравнения (2.4) и (2.6), вообще, следует решать совместно с уравнениями электродинамики (1.18) для внешней области при общих граничных условиях на поверхностях, ограничивающих пластинку. Схема вывода указанных граничных условий на основе гипотез (2.1) для линейных задач магнитоупругости имеется в работе [2]. В рассматриваемом случае граничные условия на поверхности $z=\pm h$ запишутся следующим образом.

$$
\begin{gathered}
h_x=h_x^{(e)}+\frac{\mu-1}{\mu}B_{0z}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c}E_{0y}\frac{\partial w}{\partial t}\\
h_y=h_y^{(e)}+\frac{\mu-1}{\mu}B_{0z}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\varepsilon}{c}E_{0x}\frac{\partial w}{\partial t}\\
h_z=\frac{1}{\mu}h_z^{(e)}+\frac{\mu-1}{\mu}B_{0x}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\mu-1}{\mu}B_{0y}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial y}\\
e_x=e_x^{(e)}+\frac{\mu-1}{c}B_{0y}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial t},\qquad e_y=e_y^{(e)}-\frac{\mu-1}{c}B_{0x}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial t}\\
e_z=\frac{1}{\varepsilon}e_z^{(e)}+E_{0x}\frac{\partial w}{\partial x}+E_{0y}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

3. Пусть бесконечная пластинка служит проводником равномерно распределенного тока в направлении оси x. Электрическое поле в пластинке дается вектором $\mathbf{E}_0\{E_{0x},\ 0,\ 0\}$, $E_{0x} = \mathrm{const}$.

Решая задачу магнитостатики — уравнения (1.2) при граничных условиях (1.3),— найдем

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0\{0,\ H_{0y},\ 0\}, \qquad H_{0y} = \begin{cases} -\dfrac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} h & \text{при} \quad z > h \\ -\dfrac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} z & \text{при} \quad |z| \leqslant h \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} h & \text{при} \quad z < -h \end{cases} \tag{3.1}$$

Используя (2.7) и (3.1), уравнения (2.4) и (2.6), определяющие искомые функции φ, ψ, f, w, приведем к следующему виду:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\psi = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h^3\sigma}{3c^2}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}\right)^2\frac{\partial w}{\partial t} +$$

$$+ \frac{2h^3\sigma}{3c^2}E_{0x}^2\left[\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2\frac{h^2}{5} + (\varepsilon\mu - 1)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t} + \frac{\varepsilon h E_{0x}}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e_z^+ + e_z^-}{2}\right) + \right. \tag{3.2}$$

$$\left. + \frac{2h^3\sigma E_{0x}}{3c}\left[1 - \frac{3\varepsilon c^2}{(4\pi\sigma)^2h^2}\right]\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right]\right]$$

В частном случае, когда колебания не зависят от координаты x, получаем $\psi = 0$, а вместо (3.2) — следующие уравнения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h^3\sigma}{3c^2}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}\right)^2\frac{\partial w}{\partial t} \tag{3.3}$$

Из (3.3) видно, что в этом случае уравнение движения пластинки отделяется от уравнений для индуцированного электромагнитного поля. Представляя решение уравнения движения пластинки в виде

$$w = w_0 \exp i(\omega t - kx)$$

получим характеристическое уравнение, определяющее частоту колебаний

$$\Omega^2 + 2\beta\Omega + 1 = 0 \tag{3.4}$$

Здесь

$$\Omega = \frac{i\omega}{\Omega_0}, \qquad \beta = \frac{\sigma h^2}{6\rho c^2\Omega_0}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}\right)^2, \qquad \Omega_0^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h}$$

Решение уравнения (3.4) показывает, что при $\beta < 1$ возмущения затухают по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания и частотой $(1-\beta^2)^{1/2}$, а при $\beta > 1$ возмущения затухают без колебаний с коэффициентом затухания $\beta + (\beta^2 - 1)^{1/2}$.

В рассмотренном частном случае условие отсутствия электрического заряда, приведенное в работе [4], выполняется. Следовательно, как было указано выше, легко можно учитывать токи смещения, определяя компоненту e_z из уравнения (1.17) интегрированием по z. Повторяя далее процедуру, приведенную в пункте 2, можно показать, что первое и третье уравнения из (3.2) остаются без изменений, а вместо второго уравнения получим

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} e_z = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{h_v^+ - h_v^-}{2h}$$

Таким образом, в этом случае с точностью гипотез магнитоупругости токи смещения не влияют на характер упругих колебаний пластинки.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1973

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

[1, 2] աշխատանքներում առաջարկված մագնիսաառաձգականության վարկածների հիման վրա ստացված են մագնիսական դաշտում տեղադրված հոսանքատար սալերի մագնիսաառաձգականության հավասարումները։ Ենթադրված է, որ էլեկտրական հոսանքը զուգահեռ է սալի միջին հարթությանը։

Ստացված հավասարումները ուսումնասիրված են մասնավոր դեպքի համար։ Դիտարկված են անվերջ սալի տատանումները, որին հաղորդվում է հավասարաչափ բաշխված էլեկտրական հոսանք։ Գտնված են տատանումների հաճախականությունը և մարման օրենքը՝ կախված հոսանքի խտությունից։

ON MAGNETOELASTIC EGUATIONS FOR CURRENT-CARRYING PLATES

M. V. BELUBEKIAN

Summary

On the basis of magnetoelasticity hypothesis the equations for magnetoelastic oscillations of plates are deduced. The plates carry electrical current and are placed in a magnetic field.

The frequency of oscillations and the law of damping dependent on electrical current density are defined for a special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошных сред, т. 1. «Наука», М., 1970.
4. *Белубекян М. В.* Условия отсутствия электрического заряда в задачах электромагнитоупругости. Докл. АН Арм. ССР, т. LVI, № 2, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОТЕРМОУПРУГОСТИ

В работе рассматривается общий и вместе с тем простой подход к получению решений уравнений движения однородной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Решения находятся методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа, а затем приводятся к форме записи через аналитические функции, введенной В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым [1]. Указанным методом в плоской задаче определены фундаментальные решения для уравнений однородного изотропного упругого тела, магнитоупругости, однородного анизотропного упругого тела, термоупругости.

1. Рассматривается задача определения вектора смещения (u, v) в плоской задаче для однородного изотропного упругого тела, удовлетворяющего нулевым начальным условиям и уравнениям

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+X$$
$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+Y \qquad (1.1)$$

где объемные силы берутся в виде $X = X_0\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t)$, $Y = Y_0\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t)$, $\delta(x)$ есть дельта-функция.

Вводя преобразование по Лапласу $\bar{u}$, $\bar{v}$ от u, v по t и записывая

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\bar{u}}e^{i(\bar{\alpha}x+\bar{\beta}y)}\,d\bar{\alpha}\,d\bar{\beta}, \qquad \bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\bar{v}}e^{i(\bar{\alpha}x+\bar{\beta}y)}\,d\bar{\alpha}\,d\bar{\beta} \qquad (1.2)$$

из (1.1) после применения обратного к (1.2) преобразования Фурье можно получить уравнения, решение которых имеет вид

$$D\bar{\bar{u}} = \frac{X_0}{4\pi^2\rho}(s^2+a^2\bar{\beta}^2+b^2\bar{\alpha}^2)-\frac{Y_0}{4\pi^2\rho}\bar{\alpha}\bar{\beta}(a^2-b^2)$$
$$D\bar{\bar{v}} = \frac{Y_0}{4\pi^2\rho}(s^2+a^2\bar{\alpha}^2+b^2\bar{\beta}^2)-\frac{X_0}{4\pi^2\rho}\bar{\alpha}\bar{\beta}(a^2-b^2) \qquad (1.3)$$

где

$$D=[\omega^2-(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2)\,a^2]\,[\omega^2-(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2)\,b^2],\qquad a^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$$

$$b^2=\frac{\mu}{\rho},\qquad s=-i\omega$$

Полагая для определенности $y>0$, можно видеть, что волны, определяемые уравнением $t-\alpha_0 x-\beta(\alpha_0)y=0$ лишь при $\beta>0$ будут приходящими в точку (x, y) из точки 0, поэтому согласно принципу излучения нужно выбрать корни уравнения $D=0$ в виде $\bar{\beta}_1=\omega\sqrt{\frac{1}{a^2}-\alpha^2}$, $\bar{\beta}_2=\omega\sqrt{\frac{1}{b^2}-\alpha^2}$, $\alpha=\frac{\bar{\alpha}}{\omega}$, $\beta=\frac{\bar{\beta}}{\omega}$. Введением малой мнимой части для ω можно добиться, чтобы указанные корни находились вне действительной оси плоскости β, и тогда по теореме о вычетах

$$4\pi^2\rho\bar{u}=2\pi i\omega\,\mathrm{sgn}\,\omega\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\bar{\alpha}x+\bar{\beta}_1 y)}\frac{1}{-2a^2\bar{\beta}_1}\times$$

$$\times\frac{X_0(s^2+a^2\bar{\beta}_1^2+b^2\bar{\alpha}^2)-Y_0\bar{\alpha}\bar{\beta}_1(a^2-b^2)}{\omega^2-(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}_1^2)\,b^2}\,d\bar{\alpha}+2\pi i\omega\,\mathrm{sgn}\,\omega\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\bar{\alpha}x+\bar{\beta}_2 y)}\times$$

$$\times\frac{1}{-2b^2\bar{\beta}_2}\,\frac{X_0(s^2+a^2\bar{\beta}_2^2+b^2\bar{\alpha}^2)-Y_0\bar{\alpha}\bar{\beta}_2(a^2-b^2)}{\omega^2-(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}_2^2)\,a^2}\,d\bar{\alpha}\qquad(1.4)$$

Аналогичное выражение получается для v. Для точек $y<0$ знаки $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$ меняются, однако решение получится снова в прежнем виде. При применении обратного преобразования по t существенными оказываются окрестности точек $\alpha=\alpha_k$ $(k=1,2)$, для которых

$$T(\alpha)=t-\alpha x-\beta_k(\alpha)\,y,\quad T(\alpha_k)=0\qquad(1.5)$$

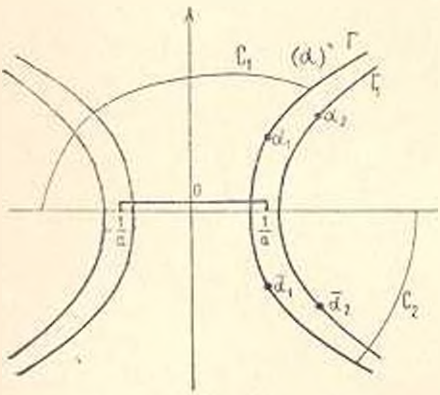
причем комплексно сопряженные значения $\alpha=\bar{\alpha}_k$ также удовлетворяют (1.5). Далее контур интегрирования $-\infty<\alpha<\infty$ заменяется на контуры Γ, Γ_1 (причем в § 2 полюсы подынтегральных функций не дадут дополнительных слагаемых в решении).

Пусть $\omega>0$. Заменим контур интегрирования $-\infty<\alpha<\infty$ на контуры Γ, Γ_1, проходящие через указанные точки α_k в направлении $\mathrm{Im}\,T(\alpha)=0$. Для этого нужно найти области постоянного знака $\mathrm{Im}\,T(\alpha)$. Обозначая $T(\alpha)=B$, где величина B вещественна, обозначая $\alpha=\xi+i\eta$, можно убедиться, что в плоскости ξ, η линии $T(\alpha)=B$ состоят из двух ветвей гиперболы

$$\frac{\xi^2}{x^2/a_n^2(x^2+y^2)}-\frac{\eta^2}{y^2/a_n^2(x^2+y^2)}=1$$

где $a_n = a$ или $a_n = b$ соответственно, а также из отрезков действительной оси $|\xi| < \frac{1}{a_n}$.

Пусть $x > 0$, $y > 0$. Тогда, предполагая, что на положительной мнимой полуоси $\beta_n = \sqrt{\frac{1}{a_n^2} - \alpha^2}$ положительны, можно показать, что $\operatorname{Im} T(\alpha) < 0$ в областях (фиг. 1), где проходят дуги окружностей C_1 и C_2. Интегрирование по α от $-\infty$ до $\frac{x}{a_n\sqrt{x^2+y^2}}$ заменяется интегрированием по верхней половине контура Г, а интегрирование по α от $\frac{x}{a_n\sqrt{x^2+y^2}}$ до ∞ — интегрированием по нижней половине Г.



Фиг. 1

Это возможно сделать, так как на C_1 и C_2 $e^{-i\omega T(\alpha)}$ стремится к нулю в силу условия $\operatorname{Im} T(\alpha) < 0$ при неограниченном увеличении радиуса окружностей $C_{1,2}$. Тогда при $\omega > 0$ можно заменить интегрирование по действительной оси α интегрированием по Г (фиг. 1). Аналогичные рассуждения применимы к контуру Γ_1. При $\omega < 0$ вместо $C_{1,2}$ берутся их дополнения до верхней и соответственно нижней полуокружностей, на которых $\operatorname{Im} T(\alpha) > 0$. Тогда интегрирование по действительной оси α заменится интегрированием по Г в обратном предыдущему направлении. Весь интеграл в (1.4) поменяет знак на обратный, а решение будет таким же, как при $\omega > 0$. При $x < 0$ точки α_1, α_2 лежат на левых ветвях гиперболы (фиг. 1), контуры C_1, C_2 заменяются на симметричные им относительно оси ξ контуры, и решение не изменяется.

Итак, при любом ω

$$4\pi^2 \rho \bar{u} = 2\pi i \int_{\Gamma} e^{i\omega(\alpha x + \beta_1 y)} \frac{1}{-2\beta_1 a^2} \frac{X_0(-1 + a^2\beta_1^2 + b^2\alpha^2) - Y_0\alpha\beta_1(a^2 - b^2)}{1 - (\alpha^2 + \beta_1^2) b^2} d\alpha +$$

$$+ 2\pi i \int_{\Gamma_1} e^{i\omega(\alpha x + \beta_2 y)} \frac{1}{-2\beta_2 b^2} \frac{X_0(-1 + a^2\beta_2^2 + b^2\alpha^2) - Y_0\alpha\beta_2(a^2 - b^2)}{1 - (\alpha^2 + \beta_2^2) a^2} d\alpha$$

Переходя к оригиналам в (1.4), получим

$$u = -\frac{i}{4\pi^2\rho}\int_{\Gamma}\frac{\delta(t-\alpha x-\beta_1 y)}{\beta_1 a^2}\,\frac{X_0(-1+a^2\beta_1^2+b^2\alpha^2)-Y_0\alpha\beta_1(a^2-b^2)}{1-(\alpha^2+\beta_1^2)\,b^2}\,d\alpha -$$

$$-\frac{i}{4\pi^2\rho}\int_{\Gamma_1}\frac{\delta(t-\alpha x-\beta_2 y)}{\beta_2 b^2}\,\frac{X_0(-1+a^2\beta_2^2+b^2\alpha^2)-Y_0\alpha\beta_2(a^2-b^2)}{1-(\alpha^2+\beta_2^2)\,a^2}\,d\alpha \quad (1.6)$$

где

$$\beta_1=\sqrt{\frac{1}{a^2}-\alpha^2}, \qquad \beta_2=\sqrt{\frac{1}{b^2}-\alpha^2}$$

При вычислении интегралов по Γ, Γ_1 существенны лишь точки α, в которых аргументы δ-функции обращаются в нуль. Таких значений для Γ и Γ_1 будет по два: значение $\alpha=\alpha_1$ и сопряженное ему $\bar\alpha_1$ для контура Γ и соответственные значения $\alpha=\alpha_2$ и $\alpha=\bar\alpha_2$ для контура Γ_1, определяемые из уравнений (1.5) или

$$r^2\alpha_1=tx+iy\sqrt{t^2-r^2/a^2}, \quad r^2\alpha_2=tx+iy\sqrt{t^2-r^2/b^2}, \quad r^2=x^2+y^2 \quad (1.7)$$

Контур Γ проходит через точки α_1, $\bar\alpha_1$ в прямом и обратном направлениях соответственно фиг. 1. Вычисляя интегралы (1.6) от δ-функции вещественного аргумента, можно убедиться, что решение запишется в виде

$$\begin{aligned}2\pi\rho u &= \mathrm{Re}\,\frac{i(-X_0\alpha_1^2-Y_0\alpha_1\beta_1)}{\beta_1 x-\alpha_1 y}+\mathrm{Re}\,\frac{i(-X_0\beta_2^2+Y_0\alpha_2\beta_2)}{\beta_2 x-\alpha_2 y}\\ 2\pi\rho v &= \mathrm{Re}\,\frac{i(-Y_0\beta_1^2-X_0\alpha_1\beta_1)}{\beta_1 x-\alpha_1 y}+\mathrm{Re}\,\frac{i(-\alpha_2^2 Y_0+\alpha_2\beta_2 X_0)}{\beta_2 x-\alpha_2 y}\end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь объединены попарно интегралы по окрестностям α_1, $\bar\alpha_1$ и α_2, $\bar\alpha_2$ соответственно, причем выражение для v получено аналогичным путем. Из (1.7), (1.8) получится

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2\pi\rho}\,\mathrm{Re}\,\frac{X_0\alpha_1^2+Y_0\alpha_1\beta_1}{\sqrt{t^2-r^2/a^2}}+\frac{1}{2\pi\rho}\,\mathrm{Re}\,\frac{X_0\beta_2^2-Y_0\alpha_2\beta_2}{\sqrt{t^2-r^2/b^2}}\\ v &= \frac{1}{2\pi\rho}\,\mathrm{Re}\,\frac{Y_0\beta_1^2+X_0\alpha_1\beta_1}{\sqrt{t^2-r^2/a^2}}+\frac{1}{2\pi\rho}\,\mathrm{Re}\,\frac{Y_0\alpha_2^2-X_0\alpha_2\beta_2}{\sqrt{t^2-r^2/b^2}}\end{aligned} \quad (1.9)$$

Решение (1.8) совпадает с фундаментальным решением уравнений теории упругости, данным в [1].

При проведении выкладок с интегралами по α должны были быть проведены разрезы в плоскости α от $\pm\dfrac{1}{a}$ до $\pm\infty$ для первых интегралов и от $\pm\dfrac{1}{b}$ до $\pm\infty$ для вторых интегралов (1.4).

В окончательном же решении (1.8) следует разрезать плоскости α_1, α_2 по отрезкам $-\frac{1}{a} < \alpha_1 < \frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b} < \alpha_2 < \frac{1}{b}$ соответственно, причем верхние берега отрезков соответствуют верхним ($y > 0$) частям фронтов волн, нижние берега — нижним полуокружностям волн.

Приведенный здесь метод гораздо проще метода [1]. Отделяя действительную часть в (1.9), можно получить решение в виде [2].

2. Получим фундаментальные решения для задачи магнитоупругости.

Уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2\nabla^2 u + (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \\
&+ \frac{H_y^2}{4\pi\rho}\nabla^2 u - \frac{H_x H_y}{4\pi\rho}\nabla^2 v + \frac{X_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(t) \\
&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2\nabla^2 v + (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \\
&- \frac{H_x H_y}{4\pi\rho}\nabla^2 u + \frac{H_x^2}{4\pi\rho}\nabla^2 v + \frac{Y_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(t)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, (H_x, H_y) есть однородное начальное магнитное поле. Начальные условия нулевые.

Решение для преобразования Лапласа по t от компонентов смещений $(\bar u, \bar v)$ ищется в виде преобразования Фурье (1.2).

Без ограничения общности можно считать $H_y = 0$, и тогда после разрешения (2.1) относительно $\bar{\bar u}$, $\bar{\bar v}$ получится

$$
\begin{aligned}
&4\pi\rho\bar D\bar{\bar u} = X_0\left[s^2 + a^2\bar\beta^2 + b^2\bar\alpha^2 + a_1^2(\bar\alpha^2 + \bar\beta^2)\right] - Y_0(a^2 - b^2)\bar\alpha\bar\beta \\
&4\pi\rho\bar D\bar{\bar v} = Y_0(s^2 + a^2\bar\alpha^2 + b^2\bar\beta^2) - X_0(a^2 - b^2)\bar\alpha\bar\beta, \qquad a_1^2 = \frac{H_x^2}{4\pi\rho}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где

$$
\bar D = (s^2 + a^2\bar\alpha^2)(s^2 + b^2\bar\alpha^2 + a_1^2\bar\alpha^2) + \bar\beta^2 A(\alpha)\omega^2 + \beta^4(a^2 + a_1^2)b^2 \tag{2.3}
$$

Здесь $s = -i\omega$, причем можно, как и прежде, обозначить $\alpha = \frac{\bar\alpha}{\omega}$, $\beta = \frac{\bar\beta}{\omega}$ и значение $A(\alpha)$ примет вид

$$
A(\alpha) = (a^2 + b^2)a_1^2\alpha^2 + 2a^2b^2\alpha^2 - a^2 - b^2 - a_1^2 \tag{2.4}
$$

Уравнение поверхности (кривой) нормалей $\beta = \beta_{1,2}(\alpha)$ к магнитоупругим волнам получится из дисперсионного соотношения $\bar D = 0$, причем из (2.3) можно получить

$$2(a^2+a_1^2)\,b^2\beta_{1,2}^2 = -A(\alpha) \mp$$

$$\mp \sqrt{A^2(\alpha) - 4(a^2+a_1^2)\,b^2(-1+a^2\alpha^2)(-1+b^2\alpha^2+a_1^2\alpha^2)} \qquad (2.5)$$

где верхний знак соответствует быстрым, а нижний — медленным волнам. Как и в § 1, можно вычислить вычет в интегралах по β относительно полюсов $\beta_{1,2}$ соответственно и тогда получится, например, для $\overline{u}$ значение

$$\overline{u} = \sum_{n=1}^{2} \frac{i \operatorname{sgn} \omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\alpha x - \beta_n y)} \times$$

$$\times \frac{X_0[-1 + a^2\beta_n^2 + b^2\alpha^2 + a_1^2(\alpha^2+\beta_n^2)] - Y_0(a^2-b^2)\alpha\beta_n}{G(\alpha, \beta_n)} \qquad (2.6)$$

где $D = \dfrac{\overline{D}}{\omega^4}$ находится из (2.3) после перехода к переменным α, β,

$$G = \frac{\partial D}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=\beta_n}$$

Далее, как и в § 1, интегрирование по α в (2.6) заменяется интегрированием по контурам Γ, Γ_1 (в первом и во втором интеграле), проходящим в направлениях $\operatorname{Im} T_n(\alpha) = 0$ через точки $\alpha = \alpha_1$, $\overline{\alpha}_1$ и $\alpha = \alpha_2$, $\overline{\alpha}_2$ соответственно, которые определяются из уравнений

$$T(\alpha_n) = t - \alpha_n x - \beta_n(\alpha_n)\,y, \qquad T'(\alpha_n) = 0, \qquad n = 1, 2 \qquad (2.7)$$

причем $\beta_{1,2}(\alpha)$ находятся из (2.5). Соображения по замене интегрирования по действительной оси α интегрированием по контурам Γ, Γ_1 остаются прежними, только кривые Γ, Γ_1 уже не будут гиперболами и кроме того надо выяснить, не имеется ли вклада в решение от возможных полюсов или точек ветвления подинтегральных функций. Можно показать, что в (2.6) полюсы отсутствуют, а точками ветвления будут корни $\alpha^{(1)} = \pm\dfrac{1}{a}$, $\alpha^{(2)} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{b^2+a_1^2}}$ внешнего радикала для $\beta_{1,2}(\alpha)$, а также корни $\alpha = \alpha_i$ внутреннего радикала в (2.5), определяемые в виде

$$\alpha_i^2 = \frac{a^2+b^2+a_1^2 \pm \sqrt{(a^2+b^2+a_1^2)^2 - (a^2-b^2+a_1^2)^2}}{a_1^2(a^2-b^2)}$$

Отсюда видно, что все точки ветвления находятся на действительной оси α, причем можно провести разрез плоскости α по ее действительной оси от $\pm\alpha_0$ до $\pm\infty$, где $\alpha_0 = \min(\alpha_i, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ и выбрать соответствующие ветви функций $\beta_{1,2}(\alpha)$. При этом, как и в § 1, как видно из (2.5), на бесконечности получится $\operatorname{Im} \omega\beta_{1,2}(\alpha) > 0$ на верхнем берегу левого разреза и нижнем берегу правого разреза, поскольку $\beta_{1,2}(\alpha)\approx\approx\mp i\alpha K_{1,2}$ при больших $|\alpha|$. Контур интегрирования по $\bar{\alpha}$, как и в § 1, выбирается так, что он обходит особые точки на отрицательной действительной полуоси в верхней полуплоскости, а на положительной полуоси — в нижней полуплоскости. Как и в § 1, можно показать, что согласно (2.5) $\beta_{1,2}\approx\mp i\alpha K_{1,2}$ для больших α, причем при $\omega>0$, $y>0$ верхний знак выбирается на верхнем берегу левого разреза и нижнем берегу правого разреза, причем на контурах C_1 и C_2 (фиг. 1) получится $\operatorname{Im} T(\alpha_{1,2})<0$. Контур интегрирования по α, как и в § 1, выбирается так, что он обходит особые точки на отрицательной действительной полуоси в верхней полуплоскости, а на положительной полуоси — в нижней полуплоскости. При $\omega<0$ или $y<0$, как и в § 1, можно показать, что получится снова решение (2.8). Согласно условию $\operatorname{Im} T(\alpha_{1,2})<0$ на контурах C_1, C_2, можно заменить интегралы в (2.6) по действительной оси α интегралами по контурам Γ, Γ_1. Тогда после обратного преобразования по Лапласу получится

$$u=\frac{i}{4\pi\rho}\int\limits_{\Gamma}\delta(t-\alpha x-\beta_1 y)\times$$

$$\times\frac{X_0(-1+a^2\beta_1^2+b^2\alpha^2+a_1^2\alpha^2+a_1^2\beta_1^2)-Y_0(a^2-b^2)\alpha\beta_1}{G(\alpha,\beta_1)}\,d\alpha+$$

$$+\frac{i}{4\pi\rho}\int\limits_{\Gamma_1}\delta(t-\alpha x-\beta_2 y)\times$$

$$\times\frac{X_0(-1+a^2\beta_2^2+b^2\alpha^2+a_1^2\alpha^2+a_1^2\beta_2^2)-Y_0(a^2-b^2)\alpha\beta_2}{G(\alpha,\beta_2)}\,d\alpha \qquad (2.8)$$

После вычисления интегралов по Γ, Γ_1, на которых аргументы дельта-функции вещественны, получится окончательное решение в виде

$$u=-\operatorname{Re}\frac{i}{2\pi\rho}\sum_{n=1}^{2}\frac{X_0[-1+a^2\beta_n^2+b^2\alpha_n^2+a_1^2(\alpha_n^2+\beta_n^2)]-Y_0(a^2-b^2)\alpha_n\beta_n}{G(\alpha_n,\beta_n)}$$

$$v=-\operatorname{Re}\frac{i}{2\pi\rho}\sum_{n=1}^{2}\frac{Y_0(-1+a^2\alpha_n^2+b^2\beta_n^2)-X_0(a^2-b^2)\alpha_n\beta_n}{G(\alpha_n,\beta_n)}$$

причем $\beta_{1,2}(\alpha_{1,2})$ дается (2.5) и $\alpha_{1,2}$ находятся из соотношений (2.7). Слагаемые в u, v, соответствующие α_1 и α_2, равны нулю вне соответствующих фронтов волн. Следует отметить, что некоторым частям физической плоскости может соответствовать по паре значений α_2 и ни одного значения α_1 [3], или наоборот, поэтому в решении (2.9) подразумевается сумма слагаемых по всем тем корням уравнений (2.7), которые существуют в рассматриваемой области. Указанным методом также получается решение задачи Лэмба в магнитоупругости. Таким образом, получено точное решение (2.9) уравнений (2.1).

3. Определяются решения уравнений термоупругости при наличии точечных импульсов. Линейные уравнения термоупругости можно привести к виду [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2\nabla^2 u + (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{X_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(t)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2\nabla^2 v + (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{Y_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(t) \quad (3.1)$$

$$\nabla^2\theta = \left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta\frac{\partial\, \mathrm{div}\,\bar{u}}{\partial t}\right) + \tau_0\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2\,\mathrm{div}\,\bar{u}}{\partial t^2}\right)$$

где $\theta = T - T_0$, T — температура, γ, $\varkappa$, η, τ_0 — постоянные.

Решение для преобразования Лапласа по t от u, v ищется в виде (1.2).

Из (3.1) после обратного преобразования по $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ получится

$$D\overline{\overline{\overline{u}}} = \frac{X_0}{4\pi^2\rho}\left(s^2 + b^2\bar{\alpha}^2 + a^2\bar{\beta}^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\gamma\eta\bar{\beta}^2 s}{p}\right) -$$

$$- \frac{Y_0}{4\pi^2\rho}\left\{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,(a^2 - b^2) + \frac{1}{\rho}\frac{\gamma\eta\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,s}{p}\right\}$$

$$D\overline{\overline{\overline{v}}} = \frac{Y_0}{4\pi^2\rho}\left(s^2 + b^2\bar{\beta}^2 + a^2\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\gamma\eta\bar{\alpha}^2 s}{p}\right) - \quad (3.2)$$

$$- \frac{X_0}{4\pi^2\rho}\left\{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,(a^2 - b^2) + \frac{1}{\rho}\frac{\gamma\eta\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,s}{p}\right\}$$

где

$$p = \frac{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}{1 + \tau_0 s} + \frac{s}{\varkappa}, \qquad s = -i\omega$$

$$D = \{s^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)b^2\}\left\{s^2 + a^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \frac{\gamma}{\rho}\eta s(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)\frac{1}{p}\right\} \quad (3.3)$$

Простые формулы получаются лишь для однородной по ω задачи, то есть для больших или малых значений $\omega\tau_0$. При $\tau_0\omega \gg 1$ получится

$$\frac{D}{-\omega^2 + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)b^2} = -\omega^2 + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)a^2 + \frac{\tau_0\gamma}{\rho}\eta\frac{\omega^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)}{\frac{\tau_0}{\varkappa}\omega^2 - (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)} \quad (3.4)$$

В переменных $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\omega}$, $\beta = \frac{\bar{\beta}}{\omega}$ дисперсионное уравнение $D = 0$ имеет решения $\beta_{1,2,3}$.

$$2a^2(\alpha^2+\beta^2_{1,2})=\frac{\tau_0}{\varkappa}a^2+1+\frac{\tau_0\gamma\eta}{\rho}\pm\sqrt{\left(\frac{\tau_0}{\varkappa}a^2+1+\frac{\tau_0\gamma\eta}{\rho}\right)^2-4a^2\frac{\tau_0}{\varkappa}} \tag{3.5}$$

$$\alpha^2+\beta_3^2=\frac{1}{b^2}$$

Вычисляя, как и в § 1, вычет в интегралах (1.2) относительно полюсов $\beta_{1,2,3}$, переходя к контуру Г (фиг. 1), после обратного преобразования Лапласа по t можно получить, как и выше, значения перемещений

$$u=-\mathrm{Re}\frac{i}{2\pi\rho}\sum_{n=1}^{2}\frac{X_0(-1+b^2\alpha_n^2+a^2\beta_n^2+\beta_n^2\Lambda_n)-Y_0\alpha_n\beta_n(a^2-b^2+\Lambda_n)}{(\beta_nx-\alpha_ny)\left(a^2+\frac{\rho}{\gamma\eta\varkappa}\Lambda_n^2\right)[-1+(\alpha_n^2+\beta_n^2)b^2]}-$$

$$-\mathrm{Re}\frac{i}{2\pi\rho}\frac{X_0(-1+b^2\alpha_3^2+a^2\beta_3^2+\beta_3^2\Lambda_3)-Y_0\alpha_3\beta_3(a^2-b^2+\Lambda_3)}{(\beta_3x-\alpha_3y)\,b^2\left(-1+\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{b^2}\Lambda_3\right)} \tag{3.6}$$

$$v=-\mathrm{Re}\frac{i}{2\pi\rho}\sum_{n=1}^{2}\frac{Y_0(-1+b^2\beta_n^2+a^2\alpha_n^2+\alpha_n^2\Lambda_n)-X_0\alpha_n\beta_n(a^2-b^2+\Lambda_n)}{(\beta_nx-\alpha_ny)\left(a^2+\frac{\rho}{\gamma\eta\varkappa}\Lambda_n^2\right)[-1+(\alpha_n^2+\beta_n^2)b^2]}-$$

$$-\mathrm{Re}\frac{i}{2\pi\rho}\frac{Y_0(-1+b^2\beta_3^2+a^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\Lambda_3)-X_0\alpha_3\beta_3(a^2-b^2+\Lambda_3)}{(\beta_3x-\alpha_3y)(-b^2+a^2+\Lambda_3)}$$

где $\Lambda_n=\gamma\eta\frac{\tau_0}{\rho}\left\{\frac{\tau_0}{\varkappa}-(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right\}^{-1}$. Решение (3.6) можно было бы упростить и далее, используя (3.5).

Для $\omega\tau_0\ll1$ из (3.4) получится

$$\frac{D}{-\omega^2+(\alpha^2+\beta^2)b^2}=-\omega^2+a^2(\alpha^2+\beta^2)+\frac{\gamma\eta\varkappa}{\rho}(\alpha^2+\beta^2) \tag{3.7}$$

В (3.2) можно произвести упрощение, причем

$$\frac{\gamma}{\rho}\eta s\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{1+\tau_0s}+\frac{s}{\varkappa}\right)^{-1}\approx\frac{\gamma}{\rho}\eta\varkappa \tag{3.8}$$

Тогда из (3.2), (3.3) следует, что решение для термоупругой среды в диапазоне низких частот приводится к решению для упругой среды § 1, в котором следует заменить a^2 на $a^2+\frac{\gamma\eta\varkappa}{\rho}$.

Таким образом, найдены фундаментальные решения для однородной термоупругой среды в форме В. И. Смирнова—С. Л. Соболева для $\omega\tau_0\gg1$ и $\omega\tau_0\ll1$, то есть вблизи быстрой и медленной тепловых волн и вблизи быстрой и медленной термоупругих волн.

4. Рассмотрим задачу определения решения уравнений анизотропной упругой среды в плоской задаче

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{X_0}{\rho}\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t)\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Y_0}{\rho}\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где u, v удовлетворяют нулевым начальным условиям. Решение находится тем же путем, что и в предыдущих параграфах работы.

Дисперсионное уравнение для (4.1) имеет решение

$$
\beta_{1,2}(\alpha) = \sqrt{\frac{(a+d)-L\alpha^2}{2da} \pm \sqrt{\Delta}}
\tag{4.2}
$$

где

$$
L = a^2 + d^2 - c^2, \qquad \Delta = \left\{\frac{(a+d)-L\alpha^2}{2da}\right\}^2 - \left(\frac{1}{a} - \alpha^2\right)\left(\frac{1}{d} - \alpha^2\right)
$$

Здесь на коэффициенты a, d, c накладывается условие $c < a - d$, в силу которого точки разветвления α_3, $\bar{\alpha}_3$, α_4, $\bar{\alpha}_4$ для $\beta(\alpha)$, определяемые из уравнения $\Delta = 0$, — комплексные попарно сопряженные величины. Соединяя α_3, α_4 и $\bar{\alpha}_3$, $\bar{\alpha}_4$ попарно разрезами, можно выбрать ветви функций (4.2) на берегах разрезов определенным образом, причем при переходе с одного берега разреза на другой β_1 меняется на β_2, и наоборот. Учитывая это обстоятельство, можно показать, что интегралы, дающие значения $\bar{u}$, $\bar{v}$, взятые по обоим берегам разрезов, сокращаются и, как и прежде, можно заменять интегрирование по α от $-\infty$ до ∞ интегрированием по контурам Γ, Γ_1 (фиг. 1).

Окончательное решение примет вид

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\pi\rho}\,\mathrm{Re}\, i\sum_{1}^{2}(-1)^{k-1}\,\frac{X_0(a\beta_k^2 + d\alpha_k^2 - 1) - Y_0 c\alpha_k\beta_k}{\beta_k\sqrt{\Delta(\alpha_k)}\,(x+\beta_k y)\,2da}\\
v &= \frac{1}{2\pi\rho}\,\mathrm{Re}\, i\sum_{1}^{2}(-1)^{k-1}\,\frac{Y_0(d\beta_k^2 + a\alpha_k^2 - 1) - X_0 c\alpha_k\beta_k}{\beta_k\sqrt{\Delta(\alpha_k)}\,(x+\beta_k y)\,2da}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где $\beta_k = \beta(\alpha_k)$, причем α_k определяются соотношениями (2.7), (4.2). Другим, менее прямым путем, фундаментальные решения для анизотропной упругой плоскости получены в [5], причем сравнение с (4.3) показало лишь на совпадение членов с наибольшими степенями переменных α_k, β_k. Указанные методы можно, очевидно, применить к пространственной задаче, а также к более общим задачам о приложенных импульсах.

Автор благодарит участников семинара по магнитоупругости Института механики АН Арм. ССР за ценные обсуждения работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 III 1973

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՎ

ՋԵՐՄԱՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կենտրոնացված ազդեցությունների առկայության դեպքում ջերմամագնիսաառաձգական համասեռ միջավայրի հավասարումների լուծման էֆեկտիվ կառուցման բավական ընդհանուր եղանակ։

Լուծումը որոշվում է Ֆուրյեի մեթոդով և այնուհետև բերվում է Սմիրնով-Սոբոլևի անալիտիկ ֆունկցիաներով արտահայտված տեսքի։

DETERMINATION OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR EQUATIONS OF MAGNETOTHERMOELASTICITY

A. G. BAGDOEV

Summary

A rather general method to determine solutions for equations of a homogeneous medium motion in the presence of point impulses is considered. The solutions are found by the method of integral transforms and then reduced to the Smirnov-Sobolev solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк Ф.* и *Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ. Л.—М., 1937, 468—617.
2. *Бабич В. М.* и др. Линейные уравнения математической физики. «Наука», М., 1964.
3. *Осипов И. О.* О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах. ПММ, т. 36, № 5, 1972.
4. *Нигул У. К.* и *Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Изд. АН Эстонской ССР, Таллин, 1972.
5. *Свекло В. А.* Смешанная задача для упругой анизотропной полуплоскости. ПММ, т. 26, № 6, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, В. К. ОПАНАСОВИЧ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ СО ЩЕЛЬЮ ПРИ СЖАТИИ

Задача о сжатии однородной изотропной плоскости с прямолинейной щелью с учетом ее ширины и соприкасания берегов при заданном однородном напряженном состоянии на бесконечности была впервые поставлена и изучена В. И. Моссаковским и П. А. Загубиженко [1, 2].

Случай произвольного напряженного состояния на бесконечности при постоянной ширине щели рассматривался в публикациях [3, 4].

В настоящей работе решена задача о распределении упругих напряжений в кусочно-однородной изотропной пластинке со щелью переменной ширины на прямой линии раздела материалов при условии, что берега щели после деформирования пластинки заданным внешним напряженным состоянием приходят в гладкий контакт. Определены все основные характеристики задачи, необходимые для определения напряженно-деформированного состояния в кусочно-однородной плоскости.

1. Рассмотрим плоскость, состоящую из двух спаянных между собой изотропных полуплоскостей. Предположим, что линия раздела материалов ослаблена прямолинейной щелью переменной ширины h, соизмеримой с упругими смещениями. Поместим начало декартовой системы координат xOy в центре щели, длиной $2a$, с осью Ox, направленной вдоль щели. Все характеристики, относящиеся к верхней полуплоскости $(y>0)$ будем снабжать индексом «1», к нижней — индексом «2».

Пусть на бесконечности плоскость сжимается равномерно распределенными напряжениями интенсивности q, перпендикулярными линии расположения щели, и растягивается равномерно распределенными напряжениями p_j, параллельными линии щели. Кроме того, в точках $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn_j}$ действуют сосредоточенные силы $P_{j1}, P_{j2}, \ldots, P_{jn_j}$, а в точках $b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jm_j}$ — сосредоточенные моменты $M_{j1}, M_{j2}, \ldots, M_{jm_j}$ $(j=1, 2)$.

Предположим, что деформированный контур щели состоит из трех участков: двух свободных по краям и одного среднего участка контакта. Силы трения между берегами щели не учитываются (фиг. 1).

Требуется определить напряженное состояние кусочно-однородной плоскости, в частности, компоненты тензора напряжений вдоль линии раздела материалов и длину участка контакта.

Обозначим линию спая через L'', свободные края щели через L', а длину участка контакта (α_1, α_2) через L.

Имеем следующие условия на линии раздела материалов

$$(Y_y - iX_y)^+ = (Y_y - iX_y)^-, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^- \quad (1.1)$$

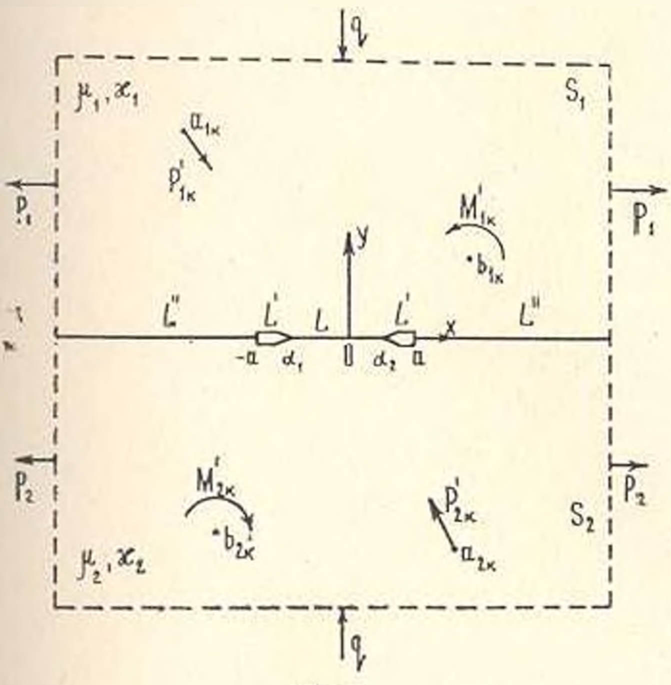
на L''

$$Y_y^+ = Y_y^- = X_y^+ = X_y^- = 0 \qquad \text{на } L' \qquad (1.2)$$

$$Y_y^+ = Y_y^-, \quad X_y^+ = X_y^- = 0$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^- = -f_1'(x) + f_2'(x) = f'(x) \qquad \text{на } L \qquad (1.3)$$

Индексами плюс и минус обозначены граничные значения функций на действительной оси сверху, то есть из S_1, и снизу, то есть из S_2, соответственно. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — уравнения верхнего и соответственно нижнего берега щели в недеформированном состоянии.



Фиг. 1.

Введем функции напряжений $\Phi_j(z)$ и $\Psi_j(z)$ для полуплоскостей S_j $(j = 1, 2)$. Распространив определение функции $\Phi_1(z)$ на область S_2, а функции $\Phi_2(z)$ на область S_1 известным образом [5]

$$\Phi_j(z) = -\overline{\Phi}_j(z) - z\overline{\Phi}_j'(z) - \overline{\Psi}_j(z) \qquad (1.4)$$

получим формулы для определения напряженно-деформированного состояния каждой полуплоскости через одну функцию $\Phi_j(z)$ $(j = 1, 2)$

$$X_x + Y_y = 2[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}]$$

$$Y_y - iX_y = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi'_j(z)} \tag{1.5}$$

$$2\mu_j \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \varkappa_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi'_j(z)} \qquad (j = 1, 2)$$

По условию задачи напряженное состояние на бесконечности задано в виде

$$Y_y^{(\infty)} = -q, \quad X_y^{(\infty)} = 0 \quad \text{для} \quad S_1 \text{ и } S_2$$
$$X_x^{(\infty)} = \begin{cases} p_1 & \text{для } S_1 \\ p_2 & \text{для } S_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

Функции напряжений $\Phi_j(z)$ и $\Psi_j(z)$ в окрестности точек a_{j1}, $a_{j2}, \ldots, a_{jn_j}$, b_{j1}, $b_{j2}, \ldots, b_{jm_j}$ имеют вид

$$\Phi_j(z) = -\sum_{k=1}^{n_j} \frac{P_{jk}}{z - a_{jk}} + \Phi_{0j}(z)$$

$$\Psi_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \left[\frac{\varkappa_j \bar P_{jk}}{z - a_{jk}} - \frac{\bar a_{jk} P_{jk}}{(z - a_{jk})^2} \right] - i \sum_{k=1}^{m_j} \frac{M_{jk}}{(z - b_{jk})^2} + \Psi_{0j}(z) \tag{1.7}$$

где $\Phi_{0j}(z)$ и $\Psi_{0j}(z)$ — голоморфные функции в окрестности этих точек, а

$$P_{jk} = \frac{X_{jk} + iY_{jk}}{2\pi(1 + \varkappa_j)}, \qquad M_{jk} = \frac{M'_{jk}}{2\pi} \tag{1.8}$$

Здесь X_{jk} и Y_{jk} — компоненты вектора сосредоточенной силы P_{jk}.

Исходя из соотношений (1.5) и удовлетворяя условиям (1.1), учитывая при этом (1.6), (1.7) и (1.4), будем иметь

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} A_1^{-1}[B_{02}\theta(z) + \Phi_0(z)] & \text{в } S_1 \\ A_2^{-1}[A_{02}\theta(z) - \Phi_0(z)] & \text{в } S_2 \end{cases}$$

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} A_1^{-1}[A_{01}\theta(z) - \Phi_0(z)] & \text{в } S_1 \\ A_2^{-1}[B_{01}\theta(z) + \Phi_0(z)] & \text{в } S_2 \end{cases} \tag{1.9}$$

В предыдущих формулах введены обозначения

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} A_{01}\Phi_2(z) - B_{02}\Phi_1(z) & \text{в } S_1 \\ A_{02}\Phi_1(z) - B_{01}\Phi_2(z) & \text{в } S_2 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\theta(z) = B + \theta_1(z) \tag{1.11}$$

$$\theta_1(z) = \sum_{j=1}^{2} \left\{ \sum_{k=1}^{n_j} \left[-\frac{P_{jk}}{z - a_{jk}} - \frac{\varkappa_j P_{jk}}{z - \bar a_{jk}} + \frac{(a_{jk} - \bar a_{jk})\bar P_{jk}}{(z - \bar a_{jk})^2} \right] - i \sum_{k=1}^{m_j} \frac{M_{jk}}{(z - b_{jk})^2} \right\} \tag{1.12}$$

$$B = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + 2q) \tag{1.13}$$

$$A_{0j} = C_j g^{2-j}, \quad B_{0j} = -C_j g^{j-1}, \quad C_j = \frac{(-1)^j \lambda_j (1 + \varkappa_j)}{1 - g}$$
$$\lambda_j = \mu_{3-j}, \quad \Lambda_j = \mu_j + \lambda_j \varkappa_j, \quad g = -\Lambda_1 \Lambda_2^{-1} \tag{1.14}$$

Кроме того, между напряжениями на бесконечности пластинки и ее упругими константами выполняется соотношение

$$\mu_1(1 + \varkappa_2) p_2 - \mu_2(1 + \varkappa_1) p_1 = [3(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1\varkappa_2 - \mu_2\varkappa_1]\, q \tag{1.15}$$

являющееся условием разрешимости задачи.

Функцию $\Phi_0(z)$ можно представить в виде

$$\Phi_0(z) = K_1 + F(z) + \Phi(z) \tag{1.16}$$

где $\Phi(z)$ — кусочно-голоморфная функция, стремящаяся к нулю при $z \to \infty$, а

$$F(z) = \sum_{j=1}^{2} \left\{ \sum_{k=1}^{n_j} \left[\frac{Q_{jk}}{z - a_{jk}} + \frac{L_{jk}}{z - \overline{a}_{jk}} + \frac{F_{jk}}{(z - \overline{a}_{jk})^2} \right] + \sum_{p=1}^{m_j} \frac{\Pi_{jp}}{(z - b_{jp})^2} \right\} \tag{1.17}$$

$$K_1 = \begin{cases} \frac{1}{4}[A_{01} p_1 - B_{02} p_2 - (3B_{02} + A_{01}) q] & \text{в } S_1 \\ \frac{1}{4}[A_{02} p_2 - B_{01} p_1 - (3B_{01} + A_{02}) q] & \text{в } S_2 \end{cases} \tag{1.18}$$

В формулах (1.17) введены обозначения

$$Q_{jk} = -A_{0j} P_{jk}, \quad L_{jk} = \varkappa_j B_{0j} P_{jk}, \quad F_{jk} = -B_{0j}(a_{jk} - \overline{a}_{jk}) \overline{P}_{jk}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n_j)$$
$$\Pi_{jp} = iB_{0j} M_{jp} \qquad (p = 1, 2, \ldots, m_j; \quad j = 1, 2) \tag{1.19}$$

Удовлетворив условиям (1.2) и (1.3), получим граничную задачу сопряжения для определения функции $\Phi_0(z)$

$$\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) = 0 \qquad (x \in L')$$
$$\Phi_0^+(x) - \overline{\Phi_0^+(x)} = ig\omega(x) \qquad (x \in L) \tag{1.20}$$
$$\Phi_0^-(x) - \overline{\Phi_0^-(x)} = i\omega(x) \qquad (x \in L)$$

где

$$\omega(x) = -4\mu_1\mu_2(1 - g)^{-1} f(x) \tag{1.21}$$

Частное решение однородной задачи сопряжения (1.20) есть функция

$$R(z)=\frac{\psi(z)}{\sqrt{z^2-a^2}}\,e^{p(z)}\qquad(1.22)$$

где

$$p(z)=\psi(z)\ln|g|\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{dt}{\psi^{+}(t)(t-z)},\qquad \psi(z)=\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}$$

которая будет ограниченной в точках α_1 и α_2.

Как видно из (1.16), функция $\Phi_0(z)$ ограничена на бесконечности и имеет полюсы в некоторых точках, и, кроме того, из физических соображений она должна быть ограниченной в точках α_1, α_2. Учитывая это, решение задачи (1.20) будем искать в виде

$$\Phi_0(z)=[\varphi_1(z)+\varphi_0(z)]\,R(z)\qquad(1.23)$$

где $\varphi_0(z)$ — рациональная функция, имеющая полюсы в точках a_{j1}, $a_{j2},\ldots,a_{jn_j}$, b_{j1}, $b_{j2},\ldots,b_{jm_j}$, причем разложение функции $\varphi_0(z)\,R(z)$ в окрестности этих точек имеет вид (1.17), а $\varphi_1(z)$ — кусочно-голоморфная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{aligned}&[\varphi_1(x)-\bar{\varphi}_1(x)]^{+}+[\varphi_1(x)-\bar{\varphi}_1(x)]^{-}=\omega_1(x)+2\omega_3(x)\qquad(x\in L)\\&[\varphi_1(x)+\bar{\varphi}_1(x)]^{+}-[\varphi_1(x)+\bar{\varphi}_1(x)]^{-}=\omega_2(x)\qquad(x\in L)\end{aligned}\qquad(1.24)$$

где

$$\omega_3(x)=\bar{\varphi}_0(x)-\varphi_0(x),\qquad \omega_j(x)=\frac{f_0(x)\,[gR^{-}(x)+(-1)^{j+1}R^{+}(x)]}{R^{+}(x)\,R^{-}(x)}$$

$$(j=1,\ 2)$$

Решая задачи (1.24) и принимая во внимание соотношение (1.23), получим значение для функции $\Phi_0(z)$

$$2\Phi_0(z)=R(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\omega_2(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{\psi(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\psi^{-}(t)\,\omega_1(t)\,dt}{t-z}+\right.$$

$$\left.+\varphi_2(z)+2C_0+\frac{1}{\psi(z)}\,[2i\,(D_0+D_1z)+\varphi_3(z)-\varphi_4(z)]\right\}\qquad(1.25)$$

где

$$R(z)=\frac{\psi(z)}{\sqrt{z^2-a^2}}\,[A(z)]^{i\beta}\qquad(1.26)$$

$$A(z)=\frac{v(z)+c}{v(z)-c}\,\frac{1-dv(z)}{1+dv(z)},\qquad v(z)=\sqrt{\frac{z-\alpha_2}{z-\alpha_1}}$$

$$c=\sqrt{\frac{a-\alpha_2}{a-\alpha_1}},\qquad d=\sqrt{\frac{a+\alpha_1}{a+\alpha_2}},\qquad \beta=\frac{\ln|g|}{2\pi}$$

$$\varphi_2(z)=\sum_{c=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left\{\sum_{k=1}^{n_j}\left[\frac{E_{jkc}}{(z-\bar a_{jk})^c}+\frac{\bar E_{jkc}}{(z-a_{jk})^c}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m_j}\left[\frac{H_{jkc}}{(z-\bar b_{jk})^c}+\frac{\bar H_{jkc}}{(z-b_{jk})^c}\right]\right\}$$

$$\psi_2(z)=\sum_{c=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left\{\sum_{k=1}^{n_j}\left[\frac{\bar A_{jkc}}{(z-a_{jk})^c}-\frac{A_{jkc}}{(z-\bar a_{jk})^c}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m_j}\left[\frac{B_{jkc}}{(z-\bar b_{jk})^c}-\frac{\bar B_{jkc}}{(z-b_{jk})^c}\right]\right\}$$

$$\varphi_3(z)=-2i\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{n_j}(\Gamma_{jk2}+\Gamma_{jk1})+\sum_{k=1}^{m_j}H_{jk1}\right]\right\} \qquad (1.27)$$

$$\Gamma_{jk1}=Q_{jk}F_1(\bar a_{jk}),\qquad \Gamma_{jk2}=L_{jk}F_1(a_{jk})-F_{jk}F_2(a_{jk})$$

$$\Gamma_{jk1}=\Gamma_{jk2}+\bar\Gamma_{jk1},\qquad E_{jk2}=F_{jk}F_1(a_{jk})$$

$$A_{jk1}=(\Gamma_{jk2}-\bar\Gamma_{jk1})\,\psi(\bar a_{jk})-E_{jk2}\,\psi'(\bar a_{jk})$$

$$A_{jk2}=E_{jk2}\psi(\bar a_{jk})\qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n_j) \qquad (1.28)$$

$$H_{jk1}=-\Pi_{jk}F_2(b_{jk}),\qquad H_{jk2}=\Pi_{jk}F_1(b_{jk})$$

$$B_{jk1}=-H_{jk1}\,\psi(\bar b_{jk})-H_{jk2}\,\psi'(\bar b_{jk}),\qquad B_{jk2}=-H_{jk2}\,\psi(\bar b_{jk})$$

$$(k=1,2,\dots,m_j;\ j=1,\ 2)$$

$$F_1(z)=[R(\bar z)]^{-1},\qquad F_2(z)=\frac{R'(\bar z)}{[R(\bar z)]^2} \qquad (1.29)$$

Неизвестные коэффициенты C_0, D_0, D_1, входящие в выражение функции $\Phi_0(z)$, найдем из однозначности смещений и условия на бесконечности (1.16) с учетом (1.15). Опуская выкладки, запишем окончательный результат

$$C_0=B_2\cos\nu,\qquad D_1=-B_2\sin\nu$$

$$D_0=H_1\sin\nu-(H_2+\beta k_2B_2)\cos\nu-E_2 \qquad (1.30)$$

$$(H_1-B_2k_2)\cos\nu+(H_2+B_2\beta k_2)\sin\nu+B_1+E_1=0 \qquad (1.31)$$

Здесь

$$B_1 = -\frac{1}{4\pi i}\int_L \omega_2(t)\,dt, \qquad B_2 = -\frac{A_1}{1-g}q$$

$$k_1 = \left(\frac{\sqrt{a-\alpha_1}+\sqrt{a-\alpha_2}}{\sqrt{a+\alpha_1}+\sqrt{a+\alpha_2}}\right)^2$$

$$k_2 = \sqrt{(a+\alpha_1)(a+\alpha_2)} + \sqrt{(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)}$$

$$k_3 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \qquad \nu = \beta \ln k_1$$

$$E_1 + iE_2 = \sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{n_j}(\Gamma_{jk1}+\Gamma_{jk2}) + \sum_{k=1}^{m_j} H_{jk1}\right] \tag{1.32}$$

$$H_1 + iH_2 = \frac{A}{2\pi(1-g)}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_j}(X_{jk}+iY_{jk})$$

$$A = \mu_1\mu_2(1-\varkappa_1\varkappa_2)A_2^{-1}$$

Соотношение (1.31) совместно с условием

$$\int_{-a}^{\alpha_1}\operatorname{Im}[\Phi_0^-(t)]\,dt = \frac{2\mu_1\mu_2 g f(\alpha_1)}{g-1} \tag{1.33}$$

служат для определения длины участка контакта между берегами щели.

Имея выражение для функции $\Phi_0(z)$ и зная длину участка контакта, задачу можно считать в принципе решенной.

Компоненты тензора напряжений вдоль действительной оси определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
Y_y^+ &= Y_y^- = A_1^{-1}\operatorname{Re}[\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)]\\
X_y^+ &= X_y^- = -A_1^{-1}\operatorname{Im}[\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)]\\
X_x^+ &= A_1^{-1}\operatorname{Re}[3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x) + 4B_{02}\theta_1(x)] + p_1 + \frac{3+g}{1-g}q\\
X_x^- &= -A_1^{-1}\operatorname{Re}[\Phi_0^+(x) + 3g\Phi_0^-(x) + 4gB_{01}\theta_1(x)] + p_2 - \frac{1+3g}{1-g}q
\end{aligned} \tag{1.34}$$

При этом существует следующая зависимость:

$$X_x^+ + X_x^- - 2Y_y^+ = p_1 + p_2 + 2q + 4\theta_2(x) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{1.35}$$

где

$$\theta_2(x) = \operatorname{Re}[\theta_1(x)]$$

Соотношение (1.35) сохраняет силу независимо от ширины щели и длины участка контакта.

2. Рассмотрим важный случай рассмотренной задачи. Предположим, что пластинка, ослабленная трещиной постоянной ширины, находится под действием сосредоточенной силы $-Y_1$ с точкой приложения „ib_1" в верхней полуплоскости и сосредоточенной силы Y_2 с точкой приложения „$-ib_2$" в нижней полуплоскости.

Согласно условию задачи имеем

$$a_{j1} = i(-1)^{j+1} b_j, \qquad P_{j1} = \frac{i(-1)^j Y_j}{2\pi(1+\varkappa_j)}, \qquad f'(x) = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{2.1}$$

Из физических соображений следует, что в данном случае длина участка контакта будет симметричной относительно оси ординат, то есть

$$\alpha_1 = -\alpha, \qquad \alpha_2 = \alpha \tag{2.2}$$

Условие (1.31) при этом автоматически выполняется.

Если учесть (2.1) и (2.2), то формула (1.25) примет вид

$$\Phi_0(z) = \left[\varphi_0(z) - \frac{i\varphi_3(z)}{\sqrt{z^2-\alpha^2}}\right] R(z) \tag{2.3}$$

$$R(z) = \sqrt{\frac{z^2-\alpha^2}{z^2-a^2}} \left(\frac{\sqrt{z^2-\alpha^2} + ak_0}{\sqrt{z^2-\alpha^2} - ak_0}\right)^{i\beta} \tag{2.4}$$

$$\varphi_0(z) = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{i(-1)^j b_j E_{j11}}{z^2+b_j^2} + \frac{E_{j12}(z^2-b_j^2)}{(z^2+b_j^2)^2}\right]$$

$$\varphi_3(z) = i\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{i(-1)^j b_j A_{j11}}{z^2+b_j^2} + \frac{A_{j12}(z^2-b_j^2)}{(z^2+b_j^2)^2}\right] + H_2 \tag{2.5}$$

$$H_2 = \frac{A(Y_2-Y_1)}{2\pi(1-g)}, \qquad k_0 = \sqrt{1-\lambda^2}, \qquad \lambda = \frac{\alpha}{a}$$

$$E_{j11} = iT_j\{\Pi_j^{2j-3} g^{2-j} - \Pi_j^{3-2j} g^{j-1}[\varkappa_j - (-1)^j W_j b_j]\} \tag{2.6}$$

$$E_{j12} = 2(-1)^{j+1} T_j b_j g^{j-1} \Pi_j^{3-2j}$$

$$A_{j11} = (-1)^{j+1} T_j\left\{g^{j-1}\Pi_j^{3-2j}\left[d_j((-1)^j W_j b_j - \varkappa_j) + \frac{2b_j^2}{d_j}\right] - d_j g^{2-j}\Pi_j^{2j-3}\right\}$$

$$A_{j12} = -2iT_j b_j d_j g^{j-1}\Pi_j^{3-2j} \qquad (j = 1, 2)$$

В соотношениях (2.6) введены обозначения

$$T_j = \frac{k_j Y_j c_j}{2\pi (1-g) d_j}, \qquad d_j = \sqrt{b_j^2 + \alpha^2}, \qquad c_j = \sqrt{b_j^2 + a^2}$$

$$\Pi_j = e^{-\beta(2\varphi_j - \pi)}, \qquad \varphi_j = \operatorname{arctg} \frac{d_j}{a k_0} \tag{2.7}$$

$$W_j = \frac{2 b_j a k_0 \left[2\beta d_j + (-1)^{j+1} a k_0\right]}{d_j^2 c_j^2} \qquad (j = 1,\ 2)$$

Неизвестный параметр α определим из формулы (1.33), которая для нашего случая принимает вид

$$\frac{2\mu_1\mu_2 h e^{\pi\beta}}{(g-1)a} = k_0 \int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} u \left[\varphi_5(u) \sin(2\beta u) + a k_0 \varphi_6(u) \operatorname{th} u \cos(2\beta u)\right] du}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 u + \alpha^2}} \tag{2.8}$$

Выражение для функций $\varphi_5(u)$ и $\varphi_6(u)$, вошедшие в (2.8), получим из (2.5) с помощью замены

$$z = a^2 k_0^2 \operatorname{th}^2 u + \alpha^2$$

Имея функцию $\Phi_0(z)$, можно определить компоненты напряженного состояния на участке спая и вдоль щели по формулам

$$|x| > a$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = A_1 \{\varphi_6(x) t_1(x) \cos[\beta\gamma_2(x)] - \varphi_5(x) t_2(x) \sin[\beta\gamma_2(x)]\}$$

$$X_y^+ = X_y^- = A_3 \operatorname{sign} x \{\varphi_5(x) t_2(x) \cos[\beta\gamma_2(x)] + \varphi_6(x) t_1(x) \sin[\beta\gamma_2(x)]\}$$

$$X_x^+ = \frac{3+g}{1-g} Y_y^+ + A_4 \theta_2(x), \qquad X_x^- = \frac{1+3g}{1-g} Y_y^+ - A_5 \theta_2(x)$$

$$\alpha < |x| < a$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = X_y^+ = X_y^- = 0$$

$$X_x^+ = 4A_6 \{\varphi_6(x) t_3(x) \sin[\beta\gamma_1(x)] - \varphi_5(x) t_4(x) \cos[\beta\gamma_1(x)]\} + A_4 \theta_2(x)$$

$$X_x^- = -X_x^+ + 4\theta_2(x)$$

$$|x| < \alpha$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = 2A_6 \{\varphi_6(x) t_3(x) \operatorname{ch}[2\beta\gamma_1(x)] + \varphi_5(x) t_4(x) \operatorname{sh}[2\beta\gamma_1(x)]\} \tag{2.9}$$

$$X_y^+ = X_y^- = 0$$

$$X_x^+ = A_6 \{3[\varphi_6(x) t_3(x) - \varphi_5(x) t_4(x)] e^{-2\beta\gamma_1(x)} - [\varphi_6(x) t_3(x) + \varphi_5(x) t_4(x)] e^{2\beta\gamma_1(x)}\} + A_4 \theta_2(x)$$

$$X_x^- = 2Y_y^+ - X_x^+ + 4\theta_2(x)$$

В предыдущих формулах введены обозначения

$$\gamma_1(x) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{ak_0}, \qquad \gamma_2(x) = \ln\frac{\sqrt{x^2-\alpha^2} - ak_0}{\sqrt{x^2-\alpha^2} + ak_0}$$

$$\gamma_3(x) = \ln\frac{ak_0 + \sqrt{x^2-\alpha^2}}{ak_0 - \sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad t_1(x) = \sqrt{\frac{x^2-\alpha^2}{x^2-a^2}}, \quad t_2(x) = \sqrt{\frac{x^2-\alpha^2}{a^2-x^2}} \tag{2.10}$$

$$t_3(x) = \sqrt{\frac{\alpha^2-x^2}{a^2-x^2}}, \qquad t_6(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad t_7(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\varphi_2(x) = -\sum_{j=1}^{2}\frac{Y_j b_j}{2\pi(1+\kappa_j)}\left[\frac{1-\kappa_j}{x^2+b_j^2} + \frac{2(x^2-b_j^2)}{(x^2+b_j^2)^2}\right]$$

$$A_3 = (1-g)A_1^{-1}, \quad A_4 = 4B_{02}A_1^{-1}, \quad A_5 = 4gB_{01}A_1^{-1}, \quad A_6 = e^{\pi\theta}A_1^{-1}.$$

Положив в (2.3)—(2.8) $\alpha=0$, получим уравнение для определения соотношения между сжимающими силами, при котором начинает зарождаться контакт

$$\frac{2\varphi_1\gamma_0 h e^{\pi\theta}}{g-1} = \int_0^\infty \frac{[\varphi_5(u)\sin(2\beta u) + \alpha\varphi_6(u)\,\mathrm{th}\,u\cos(2\beta u)]\,du}{\mathrm{ch}\,u} \tag{2.11}$$

и выражение для функции напряжений

$$\Phi_0(z) = [z\varphi_6(z) - i\varphi_5(z)]\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{i\beta} \tag{2.12}$$

Рассмотрим частные случаи:

1) математическая щель, то есть $h=0$, $\alpha=a$. В этом случае функция напряжений $\Phi_0(z)$ определится формулой

$$\Phi_0(z) = \varphi_6(z) - \frac{i\varphi_5(z)}{\sqrt{z^2-a^2}} \tag{2.13}$$

выражения для функций $\varphi_6(z)$ и $\varphi_5(z)$ остаются без изменений, только входящие в них коэффициенты имеют более простой вид

$$\begin{aligned} &E_{j1} = iT_j(g^{2-j} - g^{j-1}\kappa_j) \\ &E_{j2} = 2(-1)^{j-1}T_j b_j g^{j-1} \\ &A_{j1} = (-1)^{j+1}\left[T_j g^{j-1}\left(\frac{2b_j^2}{d_j} - \kappa_j d_j\right) - d_j g^{2-j}\right] \\ &A_{j2} = -2iT_j b_j d_j g^{j-1} \\ &T_j = \frac{Y_j\lambda_j}{2\pi(1-g)}, \qquad d_j = \sqrt{b_j^2 + a^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Формулы для компонент напряжений в этом случае примут вид

$|x|>a$

$$Y_y^{+}=Y_y^{-}=A_3\varphi_6(x),\qquad X_y^{+}=X_y^{-}=A_3\,\mathrm{sign}\,x\varphi_5(x)\,t_6(x)$$

$$X_x^{+}=(3+g)\,A_1^{-1}\varphi_6(x)+A_4\theta_2(x),\quad X_x^{-}=-(1-3g)\,A_1^{-1}\varphi_6(x)-A_5\theta_2(x)$$

$|x|<a$

$$Y_y^{+}=Y_y^{-}=A_3\varphi_6(x)-(1+g)\,A_1^{-1}\varphi_5(x)\,t_6(x),\qquad X_y^{+}=X_y^{-}=0 \tag{2.15}$$

$$X_x^{+}=A_1^{-1}\left[(3+g)\,\varphi_6(x)+(g-3)\,\varphi_5(x)\,t_6(x)\right]+A_4\theta_2(x)$$

$$X_x^{-}=-A_1^{-1}\left[(1-3g)\,\varphi_6(x)+(3g-1)\,\varphi_5(x)\,t_6(x)\right]-A_5\theta_2(x)$$

2) Однородная плоскость. Предположим, что $Y_1=Y_2=Y$ и $b_1=b_2=b$. В этом случае функция $\Phi_0(z)$ определяется формулой

$$\Phi_0(z)=\varphi_6(z)\sqrt{\frac{z^2-a^2}{z^2-\alpha^2}} \tag{2.16}$$

а уравнения для определения параметра контакта и критической нагрузки примут вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda^2}}\left[B_5F\left(k_0,\frac{\pi}{2}\right)+B_6\Pi\left(n,k_0,\frac{\pi}{2}\right)+B_7\Pi\left(m,k_0,\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{\mu h\pi}{Y\lambda_3\sqrt{\lambda_3^2+1}} \tag{2.17}$$

$$\frac{1+\varkappa}{4}\ln\frac{\sqrt{\lambda_3^2+1}+1}{\sqrt{\lambda_3^2+1}-1}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_3^2+1}}=\frac{\mu h\pi}{Y^{*}} \tag{2.18}$$

где

$$\varphi_6(z)=\frac{B_3}{z^2+b^2}+\frac{B_4(z^2-b^2)}{(z^2+b^2)^2}$$

$$B_3=-\frac{\mu bYc}{2\pi d}\left(1+\varkappa+\frac{2b^2a^2k_0^2}{d^2c^2}\right),\qquad B_4=\frac{b\mu Yc}{\pi d}$$

$$c=\sqrt{b^2+a^2},\qquad d=\sqrt{b^2+\alpha^2},\qquad \lambda_3=\frac{b}{a} \tag{2.19}$$

$$B_5=\frac{1}{2}(1-\varkappa)-\frac{\lambda_3^2}{\lambda_3^2+\lambda^2},\qquad B_6=\frac{1}{2}(1+\varkappa)\frac{\lambda^2+\lambda_3^2}{1+\lambda_3^2}$$

$$B_7=-\frac{\lambda^2}{1+\lambda_3^2},\qquad n=\frac{\lambda^2-1}{1+\lambda_3^2},\qquad m=\lambda^2-1$$

F и Π — символы эллиптических интегралов первого и третьего рода.

На основании (2.9), распределение напряжений вдоль действительной оси определяется по формулам

$$Y_y^+ = Y_y^- = \begin{cases} 2A_1^{-1} \varphi_0(x)\, l_1(x) & |x| > a \\ 0 & \alpha < |x| < a \\ 2A_1^{-1} \varphi_0(x)\, l_3(x) & |x| < \alpha \end{cases} \tag{2.20}$$

$$X_y^+ = X_y^- = 0, \quad X_x^+ = X_x^- = Y_y^+ + 2\theta_2(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

где

$$\theta_2(x) = -\frac{Yb}{\pi(1+\varkappa)}\left[\frac{1-\varkappa}{x^2+b^2} + \frac{2(x^2-b^2)}{(x^2+b^2)^2}\right]$$

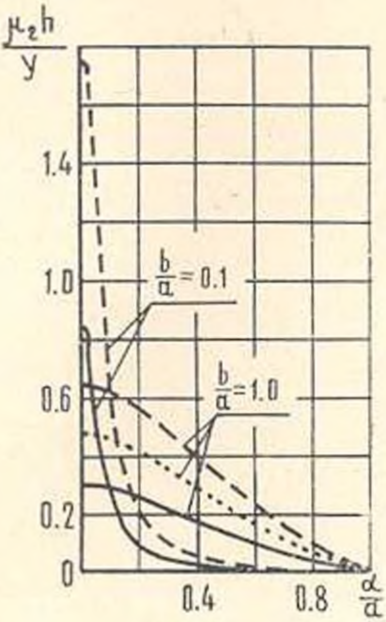
В случае математической щели формулы (2.20) примут вид:

$$Y_y = \frac{bY}{\pi(1+\varkappa)}\left[\frac{1-\varkappa}{x^2+b^2} - \frac{4b^2}{(x^2+b^2)^2}\right], \quad X_y = 0, \quad X_x = Y_y + 2\theta_2(x) \tag{2.21}$$

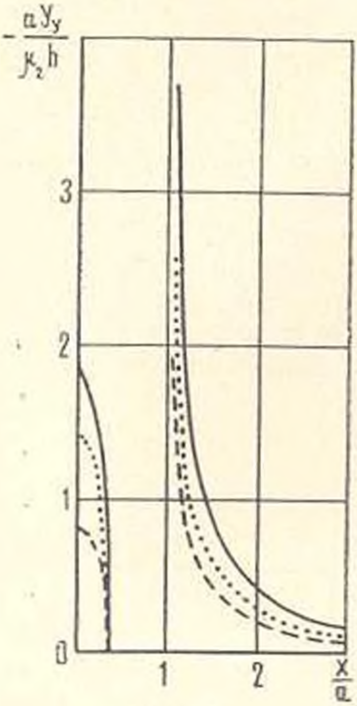
Анализируя выражения для компонент напряжений на линии спая (2.9) и (2.15) видим, что в случае физической щели они имеют колебательный характер и неограниченно возрастают при подходе к концам щели, в то время как для математической щели колебательного характера напряжений не наблюдается, напряжение Y_y^+ ограничено на концах щели, а X_y^+ — неограниченно. Таким образом, наличие физической щели на линии раздела материалов влияет на характер распределения напряжений вдоль линии спая.

Математическая щель в однородной плоскости в условиях сжатия не оказывает влияния на распределение напряжений.

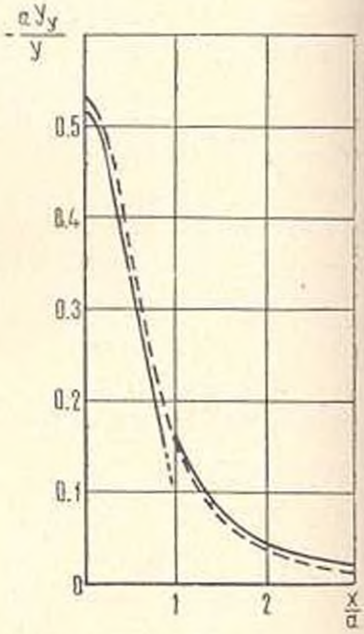
Численный анализ рассмотренной во втором параграфе задачи при условии, что $b_1=b_2=b$ и $Y_1=Y_2=Y$ был проведен на ЭВМ «Минск-22». Результаты вычислений приводятся на фиг. 2—4. Пунктирные линии соответствуют значениям параметров $\mu_1=\mu_2$ и $\varkappa_1=\varkappa_2=2$; точечные линии — значениям $\mu_1=2\mu_2$, $\varkappa_1=2$, $\varkappa_2=1{,}9$; сплошные линии построены при значениях параметров: $\varkappa_1=3$, $\varkappa_2=2$, $\frac{\mu_2}{\mu_1}=0$. На фиг. 2 дается зависимость величины $\frac{\pi_* h}{Y}$ от отношения $\frac{\alpha}{a}$ при разных значениях $\frac{b}{a}$. Графики на фиг. 3—4 построены при значении отношения $\frac{b}{a}=1$. Распределение контактных напряжений Y_y в зависимости от безразмерного параметра $\frac{x}{a}$ при условии, что отношение длины площадки контакта к длине щели равно 0,4, приводится на фиг. 3. На фиг. 4 дается распределение тех же напряжений для математической щели. Вычисления показали, что в этом случае напряжение Y_y при подходе к концам щели с внутренней стороны является неограниченно положительным, причем точка, где Y_y меняет знак, лежит в малой окрестности конца щели.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для математической щели в однородной плоскости напряжение Y_y является ограниченным и знака не меняет.

Львовский государственный
университет

Поступила 28 I 1972

Դ. Վ. ԳՐԻԼԻՑԿԻ, Վ. Կ. ՕՊԱՆԱՍՈՎԻՉ

ՃԵՂՔՈՎ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ՍԵՂՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է ճեղքով կտոր առ կտոր համասեռ իզոտրոպ սալի առաձգական հավասարակշռության որոշման խնդիրը, երբ փոփոխական լայնություն ունեցող ճեղքը գտնվում է նյութերի բաժանման ուղիղ գծի վրա այն պայմանով, որ ճեղքի ափերը տրված կենտրոնացած գործոնների և համասեռ լարված վիճակի ազդեցության տակ անվերջությունում բերվում են ողորկ կոնտակտի։

Գտնված են լարումների ֆունկցիաները և ճեղքի ափերի միջև կոնտակտի հատվածի երկարության որոշման համար պայմանները։

STRESS DISTRIBUTION IN A PIECE-HOMOGENEOUS PLATE WITH A CRACK UPON COMPRESSION

D. V. GRILITSKY, V. K. OPANASOVICH

Summary

The problem on elastic equilibrium for a piece-homogeneous isotropic plate with a variable breadth crack along the straight line of division is considered. The edges of the crack are assumed to keep in smooth touch with each other under the action of specified concentrated factors and homogeneous strees state. The stress junctions and conditions to determine the contact line length are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моссаковский В. И., Загубиженко П. А.* Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Докл. АН СССР, т. 94 № 4, 1954.
2. *Моссаковский В. И., Загубиженко П. А.* О сжатии упругой изотропной плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Докл. АН УССР, № 5, 1954.
3. *Беркович П. Е.* Щель в неоднородном поле сжимающих напряжений. Прикл. механика, т. 2, вып. 5, 1966.
4. *Беркович П. Е., Чаплыгина С. Н.* Щель в плоскости, находящейся под действием неоднородного поля напряжений. Прикл. механика, т. 6, вып. 3, 1970.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

М. Р. ГАЛАДЖЕВА, В. Х. СИРУНЯН, Б. И. СМЕТАНИН

О РАСКЛИНИВАНИИ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача о расклинивании упругой полуплоскости узким жестким клином с углом при вершине 2α. В окрестности вершины врезающегося клина образуется трещина, ориентированная по его биссектрисе. Клин вдавливается в полуплоскость силой P. Трение на гранях клина предполагается отсутствующим.

Задача сведена к интегральному уравнению первого рода с сингулярным ядром сложной структуры. Найдено асимптотическое решение этого уравнения «методом больших λ» [1]. Определены значения параметров клина, при которых должно происходить расклинивание полуплоскости. Расклинивание полуплоскости клином постоянной толщины изучено ранее в работе [2].

1. Будем предполагать, что в силу узости клина граничные условия задачи возможно снести на его ось. Тогда, разыскивая решение уравнений Ламе в цилиндрической системе координат в форме интегралов Меллина, сведем задачу к следующему интегральному уравнению первого рода:

$$\int_a^b \frac{\gamma(\rho)}{\rho} d\rho \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(-is)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds = -\int_0^a \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(-is)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds + D_0 \tag{1.1}$$

$$(a \leqslant r \leqslant b, \ D_0 = \text{const})$$

$$L(-is) = -2i\left(s^2 - \sin^2\frac{\pi s}{2}\right)(\sin \pi s)^{-1} \tag{1.2}$$

Здесь $\gamma(r)$ — функция, описывающая форму трещины, $f(r)$ — функция, описывающая форму клина, a и b — координаты начала и конца трещины (фиг. 1). Необходимо найти решение уравнения (1.1), (1.2), удовлетворяющее очевидным условиям

$$\gamma(a) = f(a), \qquad \gamma(b) = 0 \tag{1.3}$$

Величины a и b определим затем из условий [4]

$$\lim_{r\to a}[\gamma'(r) - f'(r)] = 0$$

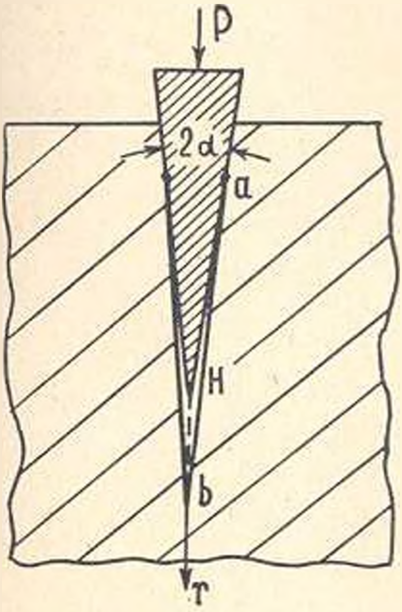
$$\lim_{r\to b}\gamma'(r)\sqrt{b-r} = -\frac{K}{\pi\Delta}, \quad \left(\Delta = \frac{G}{1-\nu}\right) \tag{1.4}$$

где K — модуль сцепления материала полуплоскости, G и ν — упругие постоянные полуплоскости.

Отметим, что контактные давления $q(r)$ между поверхностями клина и полуплоскости могут быть найдены после определения функции $\gamma(r)$ по формуле[1]

$$q(r) = -\frac{\Delta}{2\pi}\frac{d}{dr}\int_0^b \frac{v(\rho)}{\rho}\,d\rho \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(-is)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds \qquad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

$$v(r) = f(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant a), \qquad v(r) = \gamma(r) \quad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{1.5}$$



Фиг. 1.

Связь между глубиной погружения клина H и величиной вдавливающей силы P может быть затем определена из условия статики

$$P = 2\alpha \int_0^a q(r)\,dr \tag{1.6}$$

Введем новую неизвестную функцию

$$\delta(r) = \gamma(r) - f(r) \quad (a \leqslant r \leqslant H), \qquad \delta(r) = \gamma(r) \quad (H \leqslant r \leqslant b) \tag{1.7}$$

Затем, полагая $c=0$, $s=iu$ и учитывая, что

$$\int_0^\infty L(u)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)du = -\frac{8\rho^2 r^2}{(\rho-r)(\rho+r)^3}, \qquad f(r) = \alpha(H-r) \tag{1.8}$$

приведем интегральное уравнение (1.1) к виду

[1] Рассматривается случай плоской деформации.

$$\int_a^b \frac{\delta(\rho)}{\rho} Q\left(\ln\frac{\rho}{r}\right) d\rho = g(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{1.9}$$

$$Q(t) = \int_0^\infty L(u)\sin(ut)\,du \qquad \left(t = \ln\frac{\rho}{r}\right) \tag{1.10}$$

$$g(r) = -\frac{h}{H}(H-r)\ln\left|\frac{r-H}{r+H}\right| + \frac{2rh}{H+r} + D$$

$$(h = H\alpha), \qquad D = \text{const} \tag{1.11}$$

Решение уравнения (1.9) должно удовлетворять условиям

$$\delta(a) = \delta(b) = 0 \tag{1.12}$$

Введем новые переменные и обозначения

$$r = a\exp\frac{1+x}{\lambda}, \qquad \rho = a\exp\frac{1+\xi}{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{2}{\ln b/a}$$

$$\varphi(\xi) = \delta\left(a\exp\frac{1+\xi}{\lambda}\right), \qquad p(x) = g\left(a\exp\frac{1+x}{\lambda}\right) \tag{1.13}$$

Тогда уравнение (1.9) можно записать в форме

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi)\, Q\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \lambda p(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.14}$$

Выделяя сингулярную часть ядра $Q(t)$, перепишем уравнение (1.14) следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \psi(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.15}$$

$$\psi(x) = p(x) - \frac{1}{\lambda}\int_{-1}^1 \varphi(\xi)\, F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \tag{1.16}$$

$$F(t) = \int_0^\infty [L(u) - 1]\sin(ut)\,du$$

Нетрудно показать, что функция $F(t)$ при $0 \leqslant |t| \leqslant 2/\lambda$, $\lambda > 0$ непрерывна со всеми производными.

Ограниченное решение уравнения (1.15) имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2}\int_{-1}^1 \frac{\psi(t)\,dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.17}$$

при дополнительных условиях

$$\Phi = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t\psi(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \qquad \left(\Phi = \int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,d\xi\right) \tag{1.18}$$

Соотношение (1.17) представляет собой с учетом (1.16) интегральное уравнение второго рода относительно $\varphi(x)$. Условия (1.18) могут быть удовлетворены путем выбора двух произвольных постоянных: D в (1.11) и Φ.

Раскладывая функцию $p(x)$ в ряд по степеням λ^{-1}, получим

$$p(x) = h\sum_{k=0}^{\infty}[A_k(x-x_0) - B_k(x-x_0)\ln\lambda]\lambda^{-k}$$

$$A_0 = 1 + D/h, \qquad A_1 = (x-x_0)\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{|x-x_0|}{2}\right)$$

$$A_2 = \frac{(x-x_0)^2}{2}\ln\frac{|x-x_0|}{2}, \qquad x_0 = \lambda\ln\frac{H}{a} - 1 \tag{1.19}$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = x - x_0, \quad B_2 = 0.5(x-x_0)^2 \quad \text{и т. д.}$$

Легко убедиться, что разложение (1.19) равномерно сходится по $x\in[-1, 1]$, если

$$\lambda > \varkappa = (1,10)^{-1}\sup[(1-x_0), (1+x_0)] \tag{1.20}$$

Регулярную часть ядра $F(t)$ при больших λ (малых t) разложим в ряд по степеням t

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{2n+1}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^{\infty}[L(u)-1]u^{2n+1}du \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.21}$$

Можно показать, что разложение (1.21) равномерно сходится при $|t|\leqslant\pi$ и, следовательно, равномерно сходится по $x\in[-1,1]$ и $\xi\in[-1, 1]$, если

$$\lambda > 2/\pi \tag{1.22}$$

Вычислением установлено

$$a_0 = -\frac{5}{12}, \quad a_1 = \frac{11}{180}, \quad a_2 = -\frac{239}{12096} \tag{1.23}$$

На основании (1.19) и (1.21) можно заключить, что асимптотически при больших λ решение интегрального уравнения (1.17) следует искать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-i} (\ln \lambda)^j \varphi_{ij}(x) \tag{1.24}$$

причем разложение (1.24) будет иметь смысл, по крайней мере, при

$$\lambda > \sup(\varkappa,\ 2\pi^{-1}) \tag{1.25}$$

Подставляя (1.16), (1.19), (1.21), (1.24) в уравнение (1.17) и приравнивая члены правой и левой частей при одинаковых степенях λ^{-1} и $\ln \lambda$, последовательно найдем

$$\varphi_{00}(x) = 0$$

$$\varphi_{10}(x) = -\frac{h\sqrt{1-x^2}}{\pi} \left\{\frac{1}{2} - 2\ln 2 + \frac{x-x_0}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x-x_0) - \arcsin x\right]\right\} \tag{1.26}$$

$$\varphi_{20}(x) = -\frac{h\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \left\{(4\ln 2 - 1)x_0 - 2x\ln 2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-x_0)^2}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x-x_0) - \arcsin x\right]\right\}, \qquad \varphi_{01}(x) = 0$$

$$\varphi_{11}(x) = h\pi^{-1}\sqrt{1-x^2}, \qquad \varphi_{21}(x) = h(2\pi)^{-1}\sqrt{1-x^2}\,(x-2x_0)$$

$$\varphi_{12}(x) = 0, \qquad \varphi_{02}(x) = 0, \qquad \varphi_{22}(x) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Подставляя выражения (1.26) в (1.24) и возвращаясь затем к старым обозначениям и переменным в соответствии с (1.13), получим с учетом (1.7) следующее выражение для функции $\gamma(r)$:

$$\gamma(r) = hE(r) + \frac{h}{2}\ln\frac{r}{H}\left(\ln\frac{r}{H} + 2\right) + h\left(1 - \frac{r}{H}\right) \quad (a \leqslant r \leqslant H)$$

$$\gamma(r) = hE(r) \qquad (H \leqslant r \leqslant b) \tag{1.27}$$

$$E(r) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{r}{H}\left(\ln\frac{r}{H} + 2\right)\arccos\left(\lambda\ln\frac{r}{\sqrt{ab}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[(2\ln 4\lambda - 1)\left(\ln\frac{H}{\sqrt{ab}} - 1\right) - \ln 4\lambda \ln\frac{r}{\sqrt{ab}}\right]\sqrt{\ln\frac{r}{a}\ln\frac{b}{r}}\right\} + O(\lambda^{-3})$$

Практически формулу (1.27) можно использовать при $\lambda \geqslant 4$.

2. Подставим в соотношения (1.4) $\gamma(r)$ в виде (1.27) и введем обозначения

$$\ln\frac{H}{a} = \mu, \qquad \ln\frac{b}{a} = \tau, \qquad \frac{2K}{\pi\Delta\sqrt{H}} = M \tag{2.1}$$

Разлагая затем полученные выражения в ряды по малым параметрам μ и τ и удерживая лишь члены порядка μ^2, $\mu\tau$ и τ^2, найдем

$$\mu A_1(\tau) + B_1(\tau) = 0, \qquad \mu A_2(\tau) + B_2(\tau) = -M$$

$$A_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\left[-2 + 0.5\tau\,(\ln|\tau| - 1.579)\right], \qquad A_2(\tau) = A_1(-\tau)$$

$$B_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[\tau\,(1.579 - \ln\tau) + 0.25\tau^2\,(1.079 - \ln\tau)\right] \tag{2.2}$$

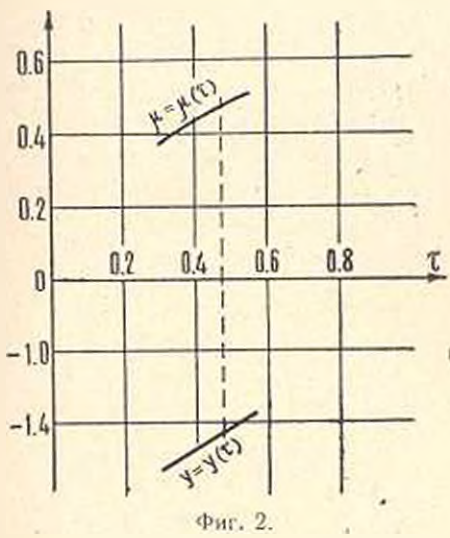
$$B_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[\tau\,(0.421 + \ln\tau) - 0.25\tau^2\,(2.079 - \ln\tau)\right]$$

Из первого соотношения (2.2) определим

$$\mu = \mu(\tau) = -B_1(\tau)\,A_1^{-1}(\tau) \tag{2.3}$$

а второе соотношение (2.2) представим в форме

$$y(\tau) = -M, \qquad y(\tau) = B_2(\tau) - A_2(\tau)\,B_1(\tau)\,A_1^{-1}(\tau) \tag{2.4}$$



Фиг. 2.

Графики функций $\mu(\tau)$ и $y(\tau)$ даны на фиг. 2. Задавая значение M, получим искомое τ, как точку пересечения кривых $y = y(\tau)$ и $y = -M$. Затем на графике $\mu = \mu(\tau)$ отыщем искомое μ. Таким образом, при заданных H и α определяются величины a и b.

Как показали численные расчеты, решение системы (2.2), удовлетворяющее очевидному условию $\mu < \tau$, возможно при $\tau > 0.47$. При этом (фиг. 2)

$$M = \frac{2K}{\alpha\Delta\sqrt{H}} < 1.46 \tag{2.5}$$

Неравенство (2.5) при заданных постоянных материала полуплоскости ν, G и K определяет значения параметров α и H клина, при которых должно происходить расклинивание полуплоскости.

В качестве примера рассмотрим расклинивание оргстекла клином с параметрами $\alpha = 1^\circ$ и $H = 0.85$ *см*. Следуя [3], положим $E = 2.45 \cdot 10^5$ *нсм*$^{-2}$, $\nu = 0.25$, $K = 1500$ *нсм*$^{-3/2}$[1].

Из системы (2.2) найдем: $\gamma = 0.52$ *см*, $b = 0.86$ *см*.

Авторы благодарят В. М. Александрова за постановку задачи и ценные советы при обсуждении настоящей работы.

НИИ механики и прикладной математики
Северо-Кавказского научного центра высшей школы

Поступила 20 X 1972

Մ. Ռ. ԳԱԼԱՋԵՎԱ, Վ. Խ. ՍԻՐՈՒՆՅԱՆ, Բ. Ի. ՍՄԵՏԱՆԻՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՍԵՊԱՎՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է նեղ, կոշտ, ողորկ եռանկյունաձև սեպով առաձգական կիսահարթության սեպավորման խնդիրը։ Սեպի գագաթի շրջակայքում առաջանում է ճաք։ Խնդիրը բերվում է առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումից ճաքի տեսքը բնութագրող ֆունկցիայի որոշմանը։

Վերլուծված է այդ հավասարման ճշգրիտ լուծումը, ըստ ինչ որ բնութագրող պարամետրի նկատմամբ լոգարիթմա-աստիճանային շարքի։

Կատարված է խնդրի թվային հետազոտումը։

ON THE WEDGING OF AN ELASTIC SEMI-PLANE

M. R. HALADGEVA, V. Kh. SIROUNIAN, B. I. SMETANIN

Summary

The problem on wedging an elastic semi-plane by a narrow tight smooth triangular wedge is considered. In the neighbourhood of the apex a crack is formed. The problem is reduced to the definition of a function, characterizing the shape of the crack, from the first order integral eguation. An expansion of the precise solution of this equation into a logarithmic-power series according to a certain characteristic parameter is obtained.

A numerical analysis of the problem is presented.

---

[1] Проведенные нами эксперименты для пластин из оргстекла дали значение для модуля сцепления K, близкое приведенному.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
2. *Светанин Б. И.* О расклинивании упругого бесконечного клина. ПММ, т. 33, вып. 5, 1969.
3. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Изд. «Наукова думка», Киев, 1968.
4. *Irwin G. K.* Fracture, Handbuch der Physik. Bd. 6, Springer. Berlin, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

К. Б. КАЗАРЯН

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТОКОНЕСУЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

При протекании электрического тока по твердому цилиндру возникают силы электромагнитного происхождения, которые необходимо учитывать при расчете такого цилиндра на прочность [1]. В работе [2] показана возможность потери устойчивости идеально проводящего соленоида, по которому протекает ток.

В настоящей работе рассматриваются колебания и устойчивость тонкой конечно-проводящей круговой цилиндрической оболочки в магнитном поле протекающего по ней по направлению образующих электрического тока. Найдены критические значения напряженности электрического поля, при которых оболочка теряет устойчивость.

1. Бесконечно длинная изотропная цилиндрическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса r отнесена к цилиндрическим ортогональным координатам (γ, θ, x). Координатная поверхность (θ, x) совпадает со срединной поверхностью и представляется размерными координатами (x—вдоль образующей, θ—по дуге поперечного сечения).

По оболочке протекает равномерно распределенный продольный ток плотностью j_0, вектор напряженности тока равен $\vec{E}_0$ и направлен по образующей

$$\vec{E}_0=\begin{cases}0 & h<\gamma<r\\ E_0\vec{i}_x & -h\leqslant\gamma\leqslant h\\ 0 & \gamma<-h\end{cases}\tag{1.1}$$

Электромагнитные и упругие свойства материала оболочки характеризуются: модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ.

Принимается следующая гипотеза магнитоупругости [3], которая для данной системы координат аналитически запишется в виде:

$$\begin{gathered}u_x=u-\gamma\frac{\partial w}{\partial x},\qquad u_\theta=v-\gamma\frac{\partial w}{\partial\theta},\qquad u_\gamma=w\\ e_x=\varphi(x,\theta,t),\qquad e_\theta=\psi(x,\theta,t),\qquad h_\gamma=f(x,\theta,t)\end{gathered}\tag{1.2}$$

где $u=u(x,\theta,t)$, $v=v(x,\theta,t)$, $w=w(x,\theta,t)$ — перемещения срединной поверхности оболочки, $(u_x, u_\theta, u_\gamma)$ — перемещения произвольной точки оболочки, ψ, φ — тангенциальные компоненты индуцированного электрического поля, f — нормальная компонента индуцированного магнитного поля.

Кроме этой гипотезы, принимаются следующие предположения: диэлектрическая и магнитная проницаемости материала оболочки равны единице; ток смещения пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости; электромагнитные и упругие возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

Токонесущая оболочка обладает магнитным полем, которое определяется из уравнений магнитостатики

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = \begin{cases} 0 & h < \gamma < r \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}_0 & -h \leqslant \gamma \leqslant h \\ 0 & \gamma < -h \end{cases} \qquad \operatorname{div} \vec{H}_0 = 0 \tag{1.3}$$

следующим образом:

$$\vec{H}_0 = H_{0\theta} \vec{J}_\theta \qquad H_{0\theta} = \begin{cases} 0 & h < \gamma < r \\ -\dfrac{2\pi\sigma E_0}{c}(r-\gamma)\left[1 - \left(\dfrac{r-h}{r-\gamma}\right)^2\right] & \gamma \leqslant |h| \\ -\dfrac{8\pi\sigma E_0}{c} \dfrac{h}{1-\gamma/r} & \gamma < -h \end{cases} \tag{1.4}$$

Электромагнитная сила, обусловленная электрическим током [4]

$$\vec{R}_0 = \int_{-h}^{h} \frac{\sigma}{c} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] \, d\gamma$$

имеет только нормальную компоненту $R_{0\gamma}$

$$R_{0\gamma} = \frac{8\pi\sigma^2 E_0^2 h^2 \left(1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{h}{r}\right)}{c^2} \tag{1.5}$$

а остальные компоненты равны нулю.

В (1.5) пренебрегается величиной h^2/r^2 по сравнению с 1. Таким образом, вследствие протекания тока на срединную поверхность оболочки действует радиальная нагрузка $R_{0\gamma}$ и под действием этой нагрузки в оболочке устанавливается безмоментное напряженное состояние.

2. Рассматривается задача устойчивости безмоментного напряженного состояния оболочки.

В возмущенном состоянии оболочки компоненты электромагнитного поля представляются в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{e}$$

С учетом того факта, что возмущения малы, линеаризированные уравнения электродинамики для области $\gamma \geqslant |h|$ примут вид

$$\text{rot}\,\vec{h} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_{0\theta}\right) \qquad \text{div}\,\vec{h} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t} \qquad \text{div}\,\vec{e} = 4\pi\rho_e \tag{2.1}$$

Вектор $\vec{u}$ представляет собой перемещение произвольной точки оболочки, ρ_e — плотность электрических зарядов.

Возмущенное состояние оболочки характеризуется силовым полем $\vec{R}$ и $\vec{m}$ электромагнитного происхождения [3]

$$\vec{R} = \int_{-h}^{h}\left[\frac{\sigma}{c}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}\right) \times \vec{H} + \vec{E}\,\text{div}\,\vec{E}\right] d\gamma \tag{2.2}$$

$$m_x = \int_{-h}^{h}\left[\frac{\sigma}{c}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}\right) \times \vec{H} + \vec{E}\,\text{div}\,\vec{E}\right]_x \gamma d\gamma$$

$$m_\theta = \int_{-h}^{h}\left[\frac{\sigma}{c}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}\right) \times \vec{H} + \vec{E}\,\text{div}\,\vec{E}\right]_\theta \gamma d\gamma$$

Линеаризированное выражение для $\vec{R}$ имеет вид

$$\vec{R} = \int_{-h}^{h}\left\{\frac{\sigma}{c}\left[\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 + \vec{E}_0 \times \vec{h} + \vec{e} \times \vec{H}_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0\right) \times \vec{H}_0 + E_0\,\text{div}\,\vec{e}\right\} d\gamma \tag{2.3}$$

Искомая задача устойчивости сводится к совместному рассмотрению следующих уравнений:

уравнений устойчивости оболочки, которые в перемещениях срединной поверхности имеют вид [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{2Eh}q_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{1-\nu^2}{2Eh}q_\theta = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{h^2}{3}\nabla^4 w + \frac{w}{r^2} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{1-\nu^2}{2Eh}q_\gamma = 0$$

где

$$q_x = -2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - rR_{0\gamma}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$q_\theta = -2\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - rR_{0\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta}$$

$$q_\gamma = -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - rR_{0\gamma}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{w}{R^2}\right) + \left(R_\gamma - R_{0\gamma}\right) + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta}$$

(Здесь величины $R_\gamma - R_{0\gamma}$, m_x, m_θ появляются вследствие изгиба оболочки и обусловлены возникшей пондеромоторной силой);

уравнений электродинамики (2.1) для области $\gamma \leqslant |h|$;

уравнений для электродинамики для областей $h < \gamma < r$, $\gamma < -h$

$$\operatorname{rot} \vec{e}^{(s)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(s)}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \vec{h}^{(s)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}^{(s)}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{e}^{(s)} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{h}^{(s)} = 0 \tag{2.5}$$

индекс $s = 1$ относится к области $\gamma < -h$, а $s = 2$ — к области $h < \gamma < r$.

Решения приведенных уравнений (2.1) и (2.5) должны удовлетворять для компонент электромагнитного поля общим граничным условиям на колеблющихся поверхностях оболочки.

С помощью принятой здесь гипотезы магнитоупругости представляется возможным выразить остальные компоненты электромагнитного поля и, следовательно, компоненты векторов $\vec{R}$ и $\vec{m}$ с помощью функций (φ, ψ, f, u, v, w) и значений компонент магнитного поля h_θ^+, h_θ^- на поверхностях оболочки $\gamma = \pm h$, а также привести разрешающие уравнения относительно функций (φ, ψ, f).

Из уравнений (2.1) согласно способу, изложенному в [3], компоненты электромагнитного поля h_x, h_θ, h_γ представляются следующим образом:

$$h_x = \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\psi\right) + \frac{h_x^+ + h_x^-}{2}$$

$$h_\theta = \frac{2r\gamma - \gamma^2 + h^2}{2(r-\gamma)}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right) +$$

$$+ \frac{8\pi\sigma^2 E_0}{c^3}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{r\gamma^2 - rh^2 - 2rh\gamma + h^2\gamma - \dfrac{\gamma^3}{3}}{r-\gamma} + \frac{(r-h)h_\theta^+ + (r+h)h_\theta^-}{2(r-\gamma)}$$

$$e_\gamma = \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{(2r\gamma - \gamma^2 + h^2)}{2(r-\gamma)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \theta} - \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \tag{2.6}$$

$$+\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{(r-h)\frac{\partial h_\theta^+}{\partial x}+(r+h)\frac{\partial h_\theta^-}{\partial x}}{2(r-\gamma)}+$$

$$+\frac{8\pi\sigma^2 E_0}{c^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{r\gamma^2-rh^2-2rh\gamma+h^2\gamma-\frac{\gamma^3}{3}}{r-\gamma}-\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_x^+-h_x^-}{2}\right)-$$

$$-\frac{c}{4\pi\sigma}\gamma\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\theta}+\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{c}H_{0\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right) \tag{2.6}$$

Осредняя уравнения (2.1) по толщине оболочки, получим следующие основные уравнения относительно функций (φ, ψ, f):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial\theta}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi=\frac{h_\theta^+-h_\theta^-}{2h}-\frac{h_\theta^++h_\theta^-}{2r}+\frac{16\pi^2\sigma^2E_0h}{c^3}\frac{\partial w}{\partial t}\left(1-\frac{1}{3}\frac{h}{r}\right)\\
&\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\\
&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\psi=\frac{h_x^+-h_x^-}{2h}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Индексы $+$ и $-$ означают значения соответствующих величин при $\gamma=+h$, $\gamma=-h$.

Компоненты сил и моментов, входящие в уравнения (2.4), согласно (1.2), (2.3), (2.2) и (2.6), (2.7) выражаются следующим образом:

$$R_\gamma=\frac{8\pi\sigma^2E_0^2h^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{h}{r}\right)}{c^2}+\frac{8\pi\sigma^2E_0h^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{h}{r}\right)\varphi}{c^2}-$$

$$-\frac{32\pi^2\sigma^3E_0^2h^2\left(1-\frac{4}{5}\frac{h}{r}\right)}{c^4}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\sigma E_0}{c}\left[\frac{(h_\theta^+-h_\theta^-)h^2}{3r}+(h_\theta^++h_\theta^-)h\right] \tag{2.8}$$

$$m_x=\frac{E_0\sigma h^3}{c}\left\{\frac{44}{3}\frac{\pi^2\sigma^2E_0h^2}{c^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\theta}(h_x^-+h_x^-)\left(1-\frac{h}{r}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\theta}(h_x^+-h_x^-)\left(1-\frac{4}{5}\frac{h}{r}\right)-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(h_\theta^++h_\theta^-)\left(1-\frac{3h}{r}\right)+$$

$$\left.+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(h_\theta^+-h_\theta^-)\left(1-\frac{9}{5}\frac{h}{r}\right)\right\}$$

$$m_\theta=0$$

При получении выражений (2.8) пренебрежено величиной h^2/r^2 по сравнению с 1.

Таким образом, задача устойчивости токонесущей оболочки свелась к совместному решению относительно функций (u, v, w, f, ψ, φ) уравнений (2.4), в которые подставлены значения $R_{0\gamma}$, R_γ, m_x, m_θ из (1.5) и (2.8), уравнений (2.7), а также уравнений электродинамики (2.5) вне областей, занимаемых оболочкой. Для совместного решения этих уравнений необходимы граничные условия относительно значений компонент возмущенного электромагнитного поля на поверхностях оболочки.

3. Решение искомой задачи приводится в частном случае, когда возмущения не зависят от x, и в приближении $h/r \ll 1$. Для простоты также пренебрегается инерционный член $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$.

В этом случае система уравнений относительно искомых функций после некоторых преобразований примет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{h^2}{3}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+\frac{(1-\nu^2)\rho}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{4\pi\sigma^2 h(1-\nu^2)E_0^2 r}{Ec^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{w}{r^2}\right)-\\
-\frac{4\pi\sigma^2 h(1-\nu^2)}{Ec^2}\varphi+\frac{16\pi^2\sigma^3 h^2 E_0^2}{Ec^4}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\sigma E_0 h(1-\nu^2)}{6rcE}(h_\theta^+-h_\theta^-)+\\
+\frac{\sigma E_0(1-\nu^2)}{Ec}(h_\theta^++h_\theta^-)=0
\end{gathered}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_\theta^+-h_\theta^-}{2h}-\frac{h_\theta^++h_\theta^-}{2r}\right)-\frac{16\pi^2\sigma^2E_0h}{c^4}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_\theta^+-h_\theta^-}{2h}-\frac{h_\theta^++h_\theta^-}{2r}\right)-\frac{16\pi^2\sigma^2E_0h}{c^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_x^+-h_x^-}{2h}\right)-\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{h_x^+-h_x^-}{2h}\right)=0$$

Как видно из рассмотрения (3.1), последнее уравнение отделяется от остальных уравнений и поэтому оно может быть опущено.

Данная система должна решаться совместно с уравнениями электродинамики вне областей, занимаемых оболочкой, и с общими граничными условиями на поверхностях $\gamma=\pm h$ оболочки.

Отметим, что из уравнений электродинамики (2.5) следует привести уравнения, определяющие *только* тангенциальную компоненту $h_\theta^{(s)}$, потому что, как уже было отмечено выше, последнее уравнение из системы (3.1), содержащее поверхностные значения другой тангенциальной компоненты магнитного поля h_x^+, h_x^-, может быть опущено.

Интересующие нас уравнения и соответствующие граничные условия следующие:

$$\frac{\partial^2 h_\gamma^{(s)}}{\partial\gamma^2}-\frac{1}{r-\gamma}\frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial\gamma}+\frac{\partial^2 h_\gamma^{(s)}}{\partial\theta^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_\gamma^{(s)}}{\partial t^2}=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial h_\theta^{(s)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r-\gamma}\frac{\partial (r-\gamma) h_\gamma^{(s)}}{\partial \gamma} = 0 \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &h_\gamma^{(1)} = f \qquad h_\theta^{(1)} = h_\theta^- \qquad \text{при} \quad \gamma = -h \\ &h_\gamma^{(2)} = f \qquad h_\theta^{(2)} = h_\theta^+ \qquad \text{при} \quad \gamma = +h \end{aligned} \tag{3.3}$$

Решения уравнений (3.1) и (3.2) ищутся в виде

$$\begin{aligned} &w = w_0 \exp i(\Omega t - k\theta) \qquad \varphi = \varphi_0 \exp i(\Omega t - k\theta) \qquad f = f_0 \exp i(\Omega - k\theta) \\ &h_\gamma^{(s)} = \alpha^{(s)}(\gamma) \exp i(\Omega t - k\theta) \qquad h_\theta^{(s)} = \beta^{(s)}(\gamma) \exp i(\Omega t - k\theta) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь функции от γ являются неизвестными и подлежат определению, k — волновое число, Ω — частота колебаний.

Подставляя (3.4) в (3.2), получим следующие уравнения относительно $\alpha^{(s)}$ и $\beta^{(s)}$:

$$\frac{d^2\alpha^{(s)}}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\alpha^{(s)}}{dz} - k_1^2 \alpha^{(s)} = 0 \tag{3.5}$$

$$\beta^{(s)} = -\frac{i}{k(r-\gamma)}\alpha^{(s)} + \frac{i}{k}\frac{d\alpha^{(s)}}{d\gamma} \tag{3.6}$$

где $z = r - \gamma$, $k_1^2 = k^2 - \dfrac{\Omega^2}{c^2}$.

Принимается, что $V^2/c^2 \ll 1$ $\left(V = \dfrac{\Omega}{k}\right.$ — фазовая скорость распространения упругих волн$\Big)$.

Тогда решение уравнения (3.5) представится в виде

$$\alpha^{(s)}(\gamma) = C_1^{(s)} J_0[k_1(r-\gamma)] + C_2^{(s)} K_0[k_1(r-\gamma)]$$

где J_0 и K_0— модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

Известно, что функция K_0 в нуле имеет особенность, а функция J_0 неограниченно возрастает при стремлении аргумента к бесконечности.

Исходя из этого, следует положить $C_1^{(2)} = C_1^{(1)} = 0$.

Остальные постоянные интегрирования определятся из граничных условий (3.3), с учетом (3.4)

$$C_2^{(1)} = \frac{f_0}{K_0[k_1(r+h)]}, \qquad C_1^{(2)} = \frac{f_0}{J_0[k_1(r-h)]}$$

Окончательно для функции $\alpha^{(s)}$ имеем

$$\alpha^{(1)} = f_0 \frac{K_0[k_1(r-\gamma)]}{K_0[k_1(r+h)]}, \qquad \alpha^{(2)} = f_0 \frac{J_0[k_1(r-\gamma)]}{J_0[k_1(r-h)]} \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (3.6), получим

$$\beta^{(1)} = \frac{i}{k} f_0 \frac{K_0'[k_1(r-\gamma)]}{K_0[k_1(r+h)]} - \frac{if_0}{k(r-\gamma)} \frac{K_0[k_1(r-\gamma)]}{K_0[k_1(r+h)]}$$
$$\beta^{(2)} = \frac{i}{k} f_0 \frac{J_0'[k_1(r-\gamma)]}{J_0[k_1(r-h)]} - \frac{if_0}{k(r-\gamma)} \frac{J_0[k_1(r-\gamma)]}{J_0[k_1(r-h)]} \tag{3.8}$$

(штрих означает дифференцирование по γ).

Удовлетворяя граничным условиям (3.3), а также и (3.4), для компонент индуцированного магнитного поля h_θ^+ и h_θ^- получим

$$h_\theta^+ = \beta^{(2)}(h) \exp i(\Omega t - k\theta), \qquad h_\theta^- = \beta^{(1)}(-h) \exp i(\Omega t - k\theta) \tag{3.9}$$

Таким образом, подставляя (3.9), (3.4) с учетом (3.8) в систему уравнений (3.1), можно получить характеристическое уравнение относительно частоты Ω. Ввиду громоздкости это уравнение здесь не приводится.

В случае $k_1 r \gg 1$ можно применить асимптотические формулы функций Бесселя.

Выражения для h_θ^+ и h_θ^- значительно упрощаются

$$h_\theta^+ = \frac{ik_1}{k} f, \qquad h_\theta^- = -\frac{ik_1}{k} f$$

Учитывая, что $V^2/c^2 \ll 1$, можно считать $k_1 = k$

$$h_\theta^+ = if, \qquad h_\theta^- = -if \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.1), получим следующую основную систему уравнений:

$$\frac{h^2}{3}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + \frac{(1-\nu^2)\rho}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma^2 hr(1-\nu^2)}{Ec^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{w}{r^2}\right) -$$
$$- \frac{4\pi\sigma^2 h(1-\nu^2)}{Ec^2}\varphi + \frac{16\pi^2\sigma^3 h^2 E_0^2}{Ec^4}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\sigma E_0 h(1-\nu^2)i}{3rcE} f = 0$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{i}{ch}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{16\pi^2\sigma^2 E_0 h}{c^4}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.11}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{i}{h}\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{16\pi^2\sigma^2 E_0 h}{c^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial t} = 0$$

Подставляя (3.4) в (3.11), придем к характеристическому уравнению, которое имеет следующий вид:

$$a_0\omega^4 + a_1\omega^3 + a_2\omega^2 + a_3\omega + a_4 = 0 \tag{3.12}$$

где $\omega = i\Omega$, а коэффиценты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4— действительные выражения

$$a_0 = \frac{16\pi^2\sigma^2\rho(1-\nu^2)}{Ec^4}$$

$$a_1 = \frac{4\pi\rho\sigma k(1-\nu^2)(1+2hk)}{Ehc^2} + \frac{512\pi^4\sigma^5 E_0^2 h^2(1-\nu^2)}{Ec^8}$$

$$a_2 = \frac{\rho k^3(1+hk)(1-\nu^2)}{Eh} + \frac{16\pi^2\sigma^2 h^2 k^4}{3c^4} - \frac{64\pi^3\sigma^4 hk^2 E_0^2(1-\nu^2)}{Ec^6}$$

$$a_3 = \frac{4\pi\sigma hk^5(1+2hk)}{3c^2} - \frac{16\pi^2\sigma^3 rk^3(1-\nu^2)(1+2hk)E_0^2}{Ec^4}$$

$$a_4 = \frac{hk^7(1+hk)}{3} - \frac{4\pi\sigma^2 k^5 r E_0^2(1+hk)(1-\nu^2)}{Ec^2}$$

Критерием устойчивости являются следующие требования:

$$\operatorname{Re}\omega_i < 0 \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

где ω_i — корни уравнения (3.12).

Используя критерий Рауса—Гурвица, получим следующее критическое значение для напряженности начального электрического поля

$$E_{0*}^2 = \frac{Ehk^2c^2}{12\pi\sigma^2(1-\nu^2)r} - \frac{\rho c^6(1+hk)k}{64\pi^3\sigma^4 h^2 r} \tag{3.13}$$

Из (3.13) найдем критическое значение для плотности $j_{0*} = \sigma E_{0*}$ начального электрического тока

$$j_{0*}^2 = \frac{Ehk^2c^2}{12\pi r(1-\nu^2)}(1-\delta) \tag{3.14}$$

где δ — безразмерная величина

$$\delta = \frac{3}{16\pi^2}\,\frac{\rho c^4(1-\nu^2)(1+hk)}{E\sigma^2 h^2 k}$$

Отметим, что для всех проводящих материалов $\delta \ll 1$.

4. Для сравнения рассмотрим задачу, аналогичную исходной, но без учета индуцированных электромагнитных полей.

В этом случае уравнение устойчивости имеет вид

$$\frac{h^2}{3}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + \frac{4\pi\sigma^2 hr(1-\nu^2)}{Ec^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{w}{r^2}\right) + \frac{(1-\nu^2)\rho}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

Решение ищется в виде

$$w = w_0 \exp i(\Omega t - k\theta)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{h^2k^4}{3} - \frac{4\pi\sigma^2 E_0^2 h(1-\nu^2)(r^2k^2-1)}{Ec^2 r} - \frac{(1-\nu^2)\rho}{E}\Omega^2 = 0$$

откуда

$$\Omega^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho}\left[\frac{h^2k^4}{3} - \frac{4\pi\sigma^2 E_0^2 h (1-\nu^2)(r^2k^2-1)}{Ec^2 r}\right]$$

Условием устойчивости является требование положительности выражения в квадратной скобке.

Таким образом, мы получаем критическое значение для компоненты начального электрического поля

$$E_{0*}^2 = \frac{Ehk^4c^2r}{12\pi\sigma^2(1-\nu^2)}\frac{1}{(r^2k^2-1)} \qquad (4.2)$$

Частота колебаний определяется из уравнения

$$\Omega = \Omega_0\left(1 - \frac{E_0^2}{E_{0*}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Критическое значение плотности начального электрического тока имеет вид

$$j_{0*}^2 = \frac{Ehk^4c^2r}{12\pi(1-\nu^2)(r^2k^2-1)} \qquad (4.3)$$

Сопоставление (4.3) с (3.14) показывает, что индуцированное электромагнитное поле при $kr \gg 1$ незначительно уменьшает критическое значение плотности электрического тока, оно влияет лишь только на частоту магнитоупругих колебаний.

То же самое можно отметить и в случае $kr \sim 1$. В задачах устойчивости токонесущей оболочки немаловажную роль играют температурные напряжения, возникающие вследствие выделения в оболочке джоулева тепла, определяемого по формуле [4]

$$Q = \frac{j^2}{\sigma}$$

Величина температуры ΔT нагрева оболочки равна [6]:

$$\Delta T = \frac{Qh}{\alpha_T} = \frac{j^2 h}{\sigma\alpha_T}$$

где α_T — коэффициент теплообмена.

Ниже приводятся численные результаты относительно температуры нагрева ΔT для оболочек, изготовленных из различных материалов и находящихся в реальных условиях теплообмена с окружающей средой, при критических значениях j_{0*}.

Для вычисления ΔT мы будем исходить из формулы (4.3)

$$\Delta T = \frac{Eh^2c^2}{12\pi(1-\nu^2)\sigma\alpha_T r^3}\frac{m^4}{m^2-1} \qquad m = kr$$

Таблица 1

Материал оболочки	E, $дин/см^2$	ν	m	σ, $\frac{1}{сек}$	α_T, $\frac{эрг}{сек\ см^2\ г}$	ΔT, °C		
						$\frac{h}{r}=\frac{1}{100}$	$\frac{h}{r}=\frac{1}{500}$	$\frac{h}{r}=\frac{1}{1000}$
Золото	$0.8\cdot10^{12}$	0.4	2	$4.5\cdot10^{17}$	$2\cdot10^{5}$	1300	10	1.3
Медь	$1.2\cdot10^{12}$	0.35	2	$5.3\cdot10^{17}$	$2\cdot10^{5}$	1600	13	2.6
Латунь	10^{12}	0.35	2	$2\cdot10^{17}$	$2\cdot10^{5}$	3500	28	3.5

Как видно из таблицы, температура нагрева оболочек, а следовательно, и температурные напряжения малы в случае $h/r=1/500$, $h/r=1/1000$.

В заключение автор выражает благодарность М. В. Белубекяну за постановку и обсуждение задачи.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 VII 1973

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է վերջավոր-հաղորդիչ հոսանքատար թաղանթի կայունության խնդիրը։

Գտնված է սկզբնական էլեկտրական դաշտի խտության կրիտիկական արժեքները, որոնց դեպքում թաղանթը կորցնում է կայունությունը։

Ցույց է տրված, որ ինդուկցված էլեկտրամագնիսական դաշտերի հաշվառումը չնչին չափով է փոփոխում սկզբնական հոսանքի խտության կրիտիկական արժեքները։

Բերված են թաղանթի տաքացման ջերմաստիճանի վերաբերյալ թվային տվյալներ կախված թաղանթում Ջոուլյան ջերմության առաջացումից։

VIBRATION AND STABILITY OF A CURRENT-CARRYING CYLINDRICAL SHELL

K. B. KAZARIAN

Summary

The problem in stability of a finite-conducting current-carrying shell is considered. The critical values of the primary current density at which the shell loses its stability are found.

It is shown that the presence of induced electromagnetic fields decreases but insignificantly the critical values of the primary current density.

The numerical data on the shell heating temperature due to the Joule heat evolved in the shell are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вандакуров Ю. В., Колесникова Э. Н.* Устойчивость твердого проводящего цилиндра в магнитном поле протекающего по нему тока. ЖТФ, т. XXXVII, вып. 11, 1967.
2. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной проводимости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 4, 1969.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
4. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. Гостехиздат, М., 1957.
5. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
6. *Овакимян Р. Н.* О нагрузках на цилиндрическую оболочку в электромагнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 5, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

Р. Е. ГЕПЗЕН

КОНСТРУКТИВНО ПОЛУБЕЗМОМЕНТНЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ. ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИН

1. В теории оболочек понятие о полубезмоментном напряженном состоянии связывается с медленным изменением основного напряженного состояния и быстрым затуханием состояния типа краевого эффекта [1]. Поскольку краевой эффект характерен только для оболочек, невозможен и предельный переход от известных соотношений для полубезмоментных оболочек к соответствующим соотношениям для пластин. Из этого, однако, не следует невозможность существования полубезмоментных напряженных состояний оболочек и пластин, связанных с какими-либо иными эффектами. В последнем нетрудно убедиться из следующего опыта. Нагрузим прямоугольную пластинку равномерно распределенной растягивающей силой в направлении одной из координатных осей и изгибающими моментами, продольным и поперечным. Предположим, что материал пластины обладает пределом текучести и последний достигнут под действием только растягивающей силы. Тогда в каждом сечении, перпендикулярном направлению силы, образуются пластические шарниры, и при последующем приложении изгибающих моментов пластина будет работать как полубезмоментная.

Можно сделать и следующий шаг, сконструировав близкую к полубезмоментной упругую пластину в виде набора продольных балок или полос, соединенных в срединной плоскости продольными шарнирами. Сравнение прогибов прямоугольной шарнирно опертой пластины с одним, двумя и т. д. продольными шарнирами под действием равномерной поперечной нагрузки показывает существенное понижение жесткости при постановке двух первых шарниров; значение прогиба асимптотически приближается к некоторому пределу, практически неизменяющемуся при числе шарниров, большем трех. Этот результат наводит на мысль о возможности «распределения» ослабления, вызванного постановкой достаточно большого количества шарниров, подобно тому, как распределяют жесткость при расчете подкрепленных пластин и оболочек. Отсюда следует также, что требование малости отношения ширины к длине сопрягаемых элементов, при котором имеет место полубезмоментное состояние, не является чрезмерно жестким. Это предопределяет и распространенность полубезмоментного напряженного состояния в ряде специальных конструкций. Укажем, прежде всего, на широко применяемые в качестве капитальных и временных сооружений пластины и оболочки в виде набора балок, соединенных между собой посредством специальных замков в шпунт; различного типа настилы и покрытия с аналогичным соединением элементов и т. п. Для анализа работы таких конструкций были получены [3] соотношения для полубезмоментных пластин и оболочек как систем с распределенными шарнирами.

Класс конструктивно полубезмоментных систем удается при определенных ограничениях расширить за счет включения сильно ортотропных систем. Можно, например, показать, что напряженное состояние пластины с малым отношением поперечной и продольной изгибных жесткостей при слабой изменяемости напряженного состояния в поперечном направлении близко к полубезмоментному. В рассмотренных случаях полубезмоментность связана с конструктивными особенностями систем, которые по этой причине предлагается называть конструктивно-полубезмоментными.

В данной работе рассматриваются задачи изгиба конструктивно полубезмоментных пластин. Необходимые исходные соотношения [3] получены из соотношений изгиба жестких ортотропных пластин путем их разложения в ряд по малому параметру, характеризующему отношение главных изгибных жесткостей. Идея введения малого параметра такого рода предложена в работе [5], где исследовались напряженные состояния подкрепленных оболочек.

В настоящей работе обращено внимание на самостоятельное значение полубезмоментных соотношений не столько в связи с математическими упрощениями, делающими их применение целесообразными, сколько на необходимость их использования в тех случаях, когда полубезмоментная система является более подходящей механической моделью реальной конструкции, чем обычная пластина и оболочка [2, 3].

2. Обычное уравнение изгиба жестких ортотропных пластин представим в виде

$$w_{,xxxx} + \alpha w_{,xxyy} + \nu w_{,yyyy} = q^{*}(x, y) \tag{1}$$

где

$$\alpha = 2D_3/D_1, \qquad \nu = D_2/D_1, \qquad q^{*} = q/D_1$$

$$D_1 = E_1h^3[12(1-\mu_1\mu_2)]^{-1}, \qquad D_2 = E_2h^3[12(1-\mu_1\mu_2)]^{-1}$$

$$D_3 = D_1\mu_2 + 2D_k = D_2\mu_1 + 2D_k, \qquad D_k = Gh^3/12$$

Рассмотрим случай сильной ортотропии, в частности при $E_1 \gg E_2$. Тогда $\nu = E_2/E_1$ — малый параметр. Из соотношения $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$ следует $\mu_2/\mu_1 = \nu$. Решения уравнения (1) представим в виде разложения в ряд по малому параметру

$$w = w_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i w_i \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях ν. Приравняв последние нулю, получим

$$Lw_0 = q^*, \qquad Lw_i = Mw_{i-1}, \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots)$$

$$L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\beta \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad M = -\left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\mu_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\right), \quad \beta = \frac{2D_3}{D_1} \tag{3}$$

Введение ряда (2) в выражение для внутренних усилий дает

$$M_1 = -D_1 \left| w_{0,xx} + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i (w_{i,xx} + \mu_1 w_{i-1,yy}) \right|$$

$$M_2 = -D_1 \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{i+1} (w_{i,yy} + \mu_1 w_{i,xx})$$

$$H = -2D_k \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i w_{i,yx} \tag{4}$$

$$Q_1 = -D_1 \left| w_{0,xxx} + \beta w_{0,xyy} + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i (w_{i,xxx} + \mu_2 w_{i-1,xyy} + \beta w_{i,xyy}) \right|$$

$$Q_2 = -D_1 \left| \beta w_{0,xxy} + \sum_{i=1}^{\infty} (w_{i-1,yyy} + \mu_1 w_{i-1,xxy} + \beta w_{i,xxy}) \right|$$

Составим теперь систему граничных условий. Для общности примем несимметричные условия упруго-податливого закрепления всех краев пластинки, а именно:

$$\begin{array}{llll} \text{при} & x = 0 & Q_1^* = -c_1^* w, & M_1 = c_2^* w_{,x} \\ & x = a & Q_1^* = c_3^* w, & M_1 = -c_4^* w_{,x} \\ & y = 0 & Q_2^* = -c_5^* w, & M_2 = c_6^* w_{,y} \\ & y = b & Q_2^* = c_7^* w. & M_2 = -c_8^* w_{,y} \end{array} \tag{5}$$

Здесь c_k^* ($k = 1, 2, \ldots, 8$) — коэффициенты жесткости упругого закрепления; $Q_1^* = Q_1 + H_{,y}$, $Q_2^* = Q_2 + H_{,x}$ — приведенные поперечные силы, объединяющие Q_1, Q_2 соответственно и дополнительные поперечные силы $H_{,y}$ и $H_{,x}$, эквивалентные действию крутящих моментов.

Вводя (4) в (5) и приравнивая в полученных выражениях коэффициенты при ν в одинаковых степенях, получим следующую систему граничных условий:

при $x = 0$

$$\begin{array}{ll} (Nw_0)_{,x} - c_1 w_0 = 0, & w_{0,xx} + c_2 w_{0,x} = 0 \\ (Nw_i)_{,x} - c_1 w_i = -\mu_1 w_{i-1,xyy} & -w_{i,xx} - c_2 w_{i,x} = \mu_1 w_{i-1,yy} \end{array} \tag{6}$$

$$N = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

при $x = a$

$$
\begin{aligned}
&(Nw_0)_{,x} + c_3 w_0 = 0, && w_{0,xx} - c_4 w_{0,x} = 0 \\
&(Nw_i)_{,x} + c_3 w_i = -\mu_1 w_{i-1,xyy}, && w_{i,xx} - c_4 w_{i,x} = -\mu_1 w_{i-1,yy}
\end{aligned} \tag{7}
$$

при $y = 0$

$$
\begin{aligned}
&2\beta w_{0,xxy} - c_5 w_0 = 0, && c_6 w_{0,y} = 0 \\
&2\beta w_{i,xxy} - c_5 w_i = -(S w_{i-1})_{,y}, && c_6 w_{i,y} = -S w_{i-1}
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
S = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}
$$

при $y = b$

$$
\begin{aligned}
&2\beta w_{0,xxy} + c_7 w_0 = 0, && c_8 w_{0,y} = 0 \\
&2\beta w_{i,xxy} + c_7 w_i = -(S w_{i-1})_{,y}, && c_8 w_{i,y} = S w_{i-1}
\end{aligned} \tag{9}
$$

В соотношениях (6)–(9) $c_k = c_k^*/D_1$ ($k = 1, 2, \ldots, 8$), $i = 1, 2, 3\ldots$ Последовательное рассмотрение уравнений (3) при условиях (6)—(9) принципиально позволяет получить результаты с заданной точностью. Однако практически можно рассчитывать лишь на получение двух первых приближений, так что принятая форма решения (2) целесообразна при $E_2/E_1 \to 0$. В последнем случае уравнение изгиба пластины совпадает с полученным ранее [2] уравнением для пластин, с часто расположенными продольными шарнирами и имеет вид

$$
L w_0 = q \tag{10}
$$

Далее будем рассматривать этот предельный случай как представляющий самостоятельный интерес. Выражения для внутренних усилий и граничных условий получим из (4), (6)—(9), удерживая нулевые приближения ($i=0$).

Внутренние усилия равны

$$
\begin{aligned}
&M_1 = -D_1 w_{0,xx}, \qquad M_2 = 0, \qquad H = -2D_k w_{0,xy} \\
&Q_1 = -D_1 (w_{0,xxx} + \beta w_{0,xyy}), \qquad Q_2 = -2D_k w_{0,xxy}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Как видно, $M_2 = 0$. Поэтому рассматриваемые пластины при $\nu = 0$ можно называть полубезмоментными. Уравнения равновесия

$$
Q_{1,x} + Q_{2,y} = -q, \qquad M_{1,x} + H_{,y} = Q_1, \qquad H_{,x} = Q_2
$$

В частности, третье отражает основную особенность их работы: взаимодействие продольных элементов осуществляется путем передачи усилий Q_2, которые уравновешиваются за счет кручения элементов. Граничные условия

$$
\begin{aligned}
&\text{при}\quad x=0 \qquad (Nw_0)_{,x}-c_1w_0=0, \qquad w_{0,xx}+c_2w_{0,x}=0 \\
&\qquad\quad\; x=a \qquad (Nw_0)_{,x}+c_3w_0=0, \qquad w_{0,xx}-c_4w_{0,x}=0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

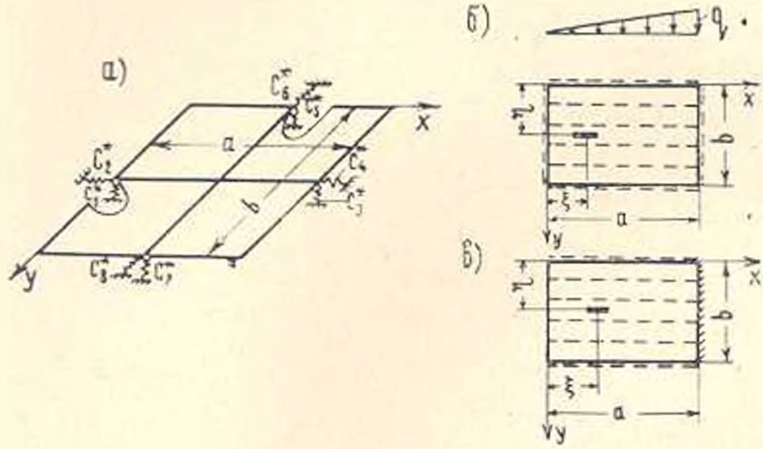
$$
\begin{aligned}
&y=0 \qquad 2\beta w_{0,xxy}-c_5w_0=0 \\
&y=b \qquad 2\beta w_{0,xxy}+c_6w_0=0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Следовательно, необходимо удовлетворить шести граничным условиям, а не восьми, как для обычной пластины. Последнее связано с равенством нулю M_2 всюду, в том числе и на краях $y=0, b$, следствием чего и явилось понижение порядка производных оператора L по координате y.

3. Рассмотрим решение задач изгиба. Заметим, что соответствующее (10) однородное уравнение

$$\gamma^2 w_{,xxxx}+w_{,xxyy}=0, \qquad \gamma^2=0.25D_1/D_k \tag{14}$$

допускает разделение переменных по методу Фурье. Благодаря этому удается построить функцию влияния, удовлетворяющую произвольным однородным граничным условиям (12), (13), а следовательно, и общем виде решить задачу изгиба при произвольной поперечной нагрузке.



Фиг. 1.

Рассмотрим прямоугольную пластину, полубезмоментную в направлении y, при действии полосовой нагрузки q только вдоль x (фиг. 1а). Штрих-пунктирные линии на рисунке условно показывают либо направление продольных шарниров, связывающих отдельные полосы в пластинчатую систему, либо направление сильно развитых ребер жесткости, так что $D_1 \gg D_2$.

При заданной нагрузке прогиб должен удовлетворять уравнению (14) и условиям (12), (13). Решение (14) запишем в виде

$$w=X(x)\,Y(y) \tag{15}$$

Вводя (15) в (14) и разделяя переменные, получим

$$X^{IV} + k^2 X = 0 \qquad (16)$$

$$\ddot{Y} - \gamma^2 Y = 0 \qquad (17)$$

Здесь штрихами обозначены производные по x, точками — по y; k=const — собственные значения уравнения (16).

Заметим, что (16) имеет вид уравнения устойчивости стержней. Следовательно, собственные функции (16), представляющие собой в данном случае формы продольного прогиба, совпадают с формами потери устойчивости балок.

Решение уравнения (16)

$$X(x) = X(0) + xX'(0) + \frac{1-\cos kx}{k^2} X''(0) + \frac{kx - \sin kx}{k^3} X'''(0) \qquad (18)$$

Вычислив производные $X(x)$ до третьего порядка включительно и объединив их с (18), получим матричное уравнение

$$\vec{X}(x) = [f_i^j(x)]\,\vec{X}(0) \qquad (19)$$

Здесь $\vec{X} = \{X, X', X'', X'''\}$ — вектор с составляющими, равными $X(x)$ и трем ее производным; $\vec{X}(0) = \{X(0), X'(0), X''(0), X'''(0)\}$ — вектор начальных параметров;

$$[f_i^j(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & \dfrac{1-\cos kx}{k^2} & \dfrac{kx-\sin kx}{k^3} \\ 0 & 1 & \dfrac{\sin kx}{k} & \dfrac{1-\cos kx}{k^2} \\ 0 & 0 & \cos kx & \dfrac{\sin kx}{k} \\ 0 & 0 & -k\sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$$

Подставив (15) в условие (12) и разделяя переменные, получим условия для функции $X(x)$:

$$\text{при } x = 0 \qquad X'''(0) - c_1 X(0) + k^2 X'(0) = 0, \qquad X''(0) + c_2 X'(0) = 0$$

$$x = a \qquad X'''(a) + c_3 X(a) - k^2 X'(0) = 0, \qquad X''(a) - c_4 X'(a) = 0 \qquad (20)$$

Подчиняя решение (19) условиям (20), в результате ряда преобразований составим уравнение для нахождения собственных значений

$$|a_{kn}| = 0, \qquad (k,\ n = 1,2) \qquad (21)$$

где

$$a_{11} = c_1 + c_3 + c_1 c_3 \frac{ka - \sin ka}{k^3}$$

$$a_{12} = ac_2 - c_1 c_4 \frac{1-\cos ka}{k^2} - c_2 \frac{ka - \sin ka}{k}$$

$$a_{21} = c_1 \frac{1 - \cos ka}{k^2} - \frac{c_1}{c_4} \frac{\sin ka}{k}$$

$$a_{22} = \cos ka + \frac{c_2}{c_4} \cos ka - c_2 \frac{\sin ka}{k} + \frac{k \sin ka}{c_4}$$

С учетом (20) решение (18) получает вид

$$X = \sum_{m=1}^{\infty} D_m X_m \tag{22}$$

Здесь

$$X_m = 1 + (c_1 + d_m k_m^2) k_m^{-3} (k_m x - \sin k_m x) - d_m [x - k_m^{-2} c_1 (1 - \cos k_m x)],$$

$$d_m = a_{11} a_{12}^{-1}.\ D_m \text{ — произвольная постоянная.}$$

Далее определяем функцию $Y(y)$ из уравнения (17); введя ее и (22) в (15), запишем

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} X_m (A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}), \qquad \alpha_m = \gamma k_m \tag{23}$$

При действии на длине u вдоль x нагрузки q с координатами центра ξ, η упругая поверхность описывается двумя выражениями вида (23)

$$w_i = \sum_{m=1}^{\infty} X_m (A_{mi} e^{\alpha_m y_i} + B_{mi} e^{-\alpha_m y_i}), \qquad (i = 1, 2)$$

$$0 \leqslant y_1 \leqslant \eta, \qquad \eta \leqslant y_2 \leqslant b \tag{24}$$

Для определения четырех произвольных постоянных имеем два неиспользованных условия (13) и два условия сопряжения:

$$\text{при} \quad y = \eta \qquad w_1 = w_2, \qquad Q_{y1}^* - Q_{y2}^* = q(x) \tag{25}$$

Согласно второму условию (25) разность между величинами приведенных поперечных сил Q_y^* на первом и втором участках при $y = \eta$ равна заданной полосовой нагрузке.

Подстановка (24) в первое условие (13) дает

$$\sum_{m=1}^{\infty} F_m(x) \alpha_m (A_{m1} - B_{m1}) - c_4 \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) (A_{m1} + B_{m1}) = 0 \tag{26}$$

где

$$F_m(x) = (c_1 + k_m^2 d_m) k_m^{-1} \sin k_m x + d_m c_2 \cos k_m x$$

Далее функции $F_m(x)$ и $X_m(x)$ раскладываются в ряд Фурье по $\sin i\pi x/a$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. После преобразований (26) приводится к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$[a_{im}]\vec{A}_{m1} - [b_{im}]\vec{B}_{m1} = 0 \tag{27}$$

где

$$a_{im} = \gamma\alpha_1(i,\ m) - c_5\alpha_2(i,\ m), \qquad b_{im} = \gamma\alpha_1(i,\ m) + c_5\alpha_2(i,\ m)$$

$$\alpha_1(i,\ m) = -\frac{k_m d_m c_2 [1 - (-1)^i \cos k_m a]}{a\left[k_m^2 - \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\right]} + \frac{(-1)^i (c_1 + d_m k_m^2) \sin k_m a}{a\left[k_m^2 - \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\right]}$$

$$\alpha_2(i,\ m) = \frac{a}{(i\pi)^2}\{[1-(-1)^i] f_1 - (-1)^i f_2 a\} +$$

$$+ \frac{(-1)^i f_1 \cos k_m a - f_4 + (-1)^i f_3 \sin k_m a}{a\left[k_m^2 - \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\right]}$$

$$f_1 = 1 + d_m c_2 k_m^{-2}, \quad f_2 = c_1 k_m^{-2} + 2d_m, \quad f_3 = -\frac{c_1 + k_m^2 d_m}{k_m^3}, \quad f_4 = d_m c_2 k_m^{-2}$$

$$\vec{A}_{m1} = \{A_{11},\ A_{21},\ A_{31}, \ldots\}, \qquad \vec{B}_{m1} = \{B_{11},\ B_{21},\ B_{31}, \ldots\}$$

Удовлетворяя второму условию (13), получаем

$$[c_{im}]\vec{A}_{m2} - [d_{im}]\vec{B}_{m2} = 0 \tag{28}$$

где

$$c_{im} = [\gamma\alpha_1(i,\ m) + c_2\alpha_2(i,\ m)]\, e^{\gamma k_m b}$$

$$d_{im} = [\gamma\alpha_1(i,\ m) - c_2\alpha_2(i,\ m)]\, e^{-\gamma k_m b}$$

После подстановки (24) в первое условие (25) имеем

$$(A_{m1} - A_{m2})\, e^{2\gamma k_m b} + B_{m1} - B_{m2} = 0 \tag{29}$$

Наконец, используем второе условие (25), которое запишем с учетом (11)

$$4D_k(w_{1,\,xxy} - w_{1,\,xxy}) = q(x)$$

Вводя сюда (24) и раскладывая в ряд

$$q(x) = 4q_0\pi^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} i^{-1} \sin i\pi\xi/a \sin\frac{i\pi u}{2a} \sin\frac{i\pi x}{a}$$

после преобразований получаем

$$[f_{im}]\Delta\vec{A}_m = \vec{q} \tag{30}$$

$$\Delta\vec{A}_m = \{A_{11} - A_{12},\ A_{21} - A_{22},\ A_{31} - A_{32}, \ldots\}$$

$$\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}, \qquad q_i = \frac{q_0}{\pi}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{i\pi u}{2a}$$

$$f_{im} = 4D_K \frac{i\pi}{a} a_1(i, m)\, e^{\lambda_m \eta}$$

Таким образом, решение задачи для случая полосовой нагрузки имеет вид рядов (24), коэффициенты которых определяются из системы уравнений (27)—(30). В случае сосредоточенной силы решение сохраняет свой вид при замене выражения для q_i на следующее:

$$q_i = \frac{P}{2a}\sin\frac{i\pi\xi}{a}, \qquad P = qu$$

Приведенное решение весьма громоздко, но легко программируется для расчетов на ЭВМ. При этом удается единым алгоритмом охватить многие частные задачи, что стало доступным благодаря разделению переменных в уравнении (14).

4. Для сравнительного анализа работы полубезмоментных пластин рассмотрим две частные задачи.

В случае шарнирного опирания граничные условия

$$w(0, y) = w(a, y) = w''(0, y) = w''(a, y) = 0$$

$$w(x, 0) = w(x, b) = 0$$

Полосовой нагрузке (фиг. 1б) соответствует решение (24), в котором

$$X_m = \sin k_m x, \qquad k_m = m\pi/a \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Выражения типа (24) для прогибов

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{m1}\left(e^{-\alpha_m y_1} - e^{\alpha_m y_1}\right)\sin k_m x \\ w_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{m1}\varphi(k_m, \eta)\left(e^{-\alpha_m y_2} - e^{\alpha_m (y_2 - 2b)}\right)\sin k_m x \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Здесь

$$B_{m1} = \frac{q\sin k_m\xi\sin\dfrac{k_m u}{2}}{2D_K m\pi\beta(k_m, \eta)}, \qquad \varphi(k_m, \eta) = \frac{1 - e^{-2\alpha_m\eta}}{e^{-2\alpha_m b} - e^{-2\alpha_m\eta}}$$

$$\beta(k_m, \eta) = k_m^2\eta\left(1 - e^{2\alpha_m b}\right)e^{-\alpha_m\eta}\left(e^{-2\alpha_m b} - e^{-2\alpha_m\eta}\right)^{-1}$$

$$0 \leqslant y_1 \leqslant \eta, \qquad \eta \leqslant y_2 \leqslant b$$

Введем в B_{m1} замены $u = d\xi$, $q = q(\xi, \eta)\, d\eta$ (вместо нагрузки q, распределенной на единичной ширине, введена нагрузка на ширине $d\eta$) и перейдем к пределу. Тогда получим функции влияния как прогиб от нагрузки $q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$ вида (31) с коэффициентом

$$B_{m1} = [4D_k a\beta(k_m, \eta)]^{-1} q(\xi, \eta) \sin k_m \xi d\xi d\eta$$

Интегрированием в пределах размещения нагрузки можно получить решение при произвольном ее распределении.

При постоянной вдоль y треугольной нагрузке $q(\xi, \eta) = q\xi/a$ получаем

$$w = \frac{qa^4}{2D_K \pi^5 \gamma^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{m-1}]}{m^5 (1 - e^{-2\alpha_m b})} [\operatorname{sh} \alpha_m y (e^{-\alpha_m y} - 2e^{-\alpha_m b} - e^{\alpha_m (y-2b)}) +$$

$$+ (\operatorname{ch} \alpha_m y - 1)(e^{-\alpha_m y} - e^{\alpha_m (y-2b)})] \sin k_m x \qquad (32)$$

Прогиб в центре квадратной пластинки $x = y = a/2$ с изотропным материалом полос $[2D_K = EI(1-\mu)^{-1}$ и $\mu = 0.3]$ при использовании лишь двух членов ряда (32) $(m = 1.3)$ равен

$$w = (EI)^{-1} qa^4 (0.003140 - 0.000026 + \cdots) = (EI)^{-1} 0.00311 qa^4 \qquad (33)$$

Соответствующие формулы для обычной пластинки и балки имеют вид [4]

$$w = 0.00203 qa^4 D^{-1}, \qquad w = 0.00651 qa^4 (EI)^{-1} \qquad (34)$$

Из сравнения (33) и (34) видны эффекты понижения жесткости полубезмоментной пластины по сравнению с обычной и существенного увеличения жесткости при объединении отдельных полос в пластинчатую систему по полубезмоментной схеме. Последний ослабляется при увеличении b/a и, как показывают расчеты, при $b/a \approx 2.5-3$ (для обычной пластины $b/a \approx 4.0$) результаты для отдельной полосы и полубезмоментной пластины практически совпадают.

Для пластины с одним защемленным, свободным противоположным и свободно опертыми двумя другими краями (фиг. 1в) граничные условия имеют вид

$$w_{,xx}(0, y) = w(a, y) = w_{,x}(a, y) = 0$$

$$D_1 w_{,xxx}(0, y) + 4D_k w_{,xyy}(0, y) = 0, \qquad w(x, 0) = w(x, b)$$

Прогиб определяется выражениями

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} F_{m2} s(\alpha_m, \eta) \operatorname{sh} \alpha_m y_1 \left(1 - \frac{\sin k_m x}{\sin k_m a}\right)$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} F_{m2} (\operatorname{sh} \alpha_m y_2 - \operatorname{th} \alpha_m b \operatorname{ch} \alpha_m y_2) \left(1 - \frac{\sin k_m x}{\sin k_m a}\right)$$

$$F_{m2} = \frac{q \sin k_m \xi \sin \dfrac{k_m a}{2} \sin k_m a}{m\pi D_k k_m^2 \alpha_m [s(\alpha_m, \eta) \operatorname{ch} \alpha_m \eta - t(\alpha_m, \eta)]}$$

$$s(\alpha_m, \eta) = 1 - \operatorname{cth} \alpha_m \eta \operatorname{th} \alpha_m b$$

$$t(\alpha_m, \eta) = \operatorname{ch} \alpha_m \eta - \operatorname{th} \alpha_m b \operatorname{sh} \alpha_m \eta$$

$$\alpha_m = \gamma k_m, \qquad k_m = \frac{m\pi}{2a}, \qquad 0 \leqslant y_1 \leqslant \eta, \qquad \eta \leqslant y_2 \leqslant b$$

В частности, для нагрузки $q(\xi, \eta) = q\xi/a$ определяем

$$w = \frac{16qa^4}{\gamma^2\pi^4 D_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi/2}{m^4} \left(\operatorname{sh} \alpha_m y \operatorname{th} \frac{\alpha_m b}{2} - \right.$$

$$\left. - 2\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_m y}{2} \right) \left(\sin k_m a - \sin k_m x \right)$$

Прогиб, например, середины свободного края, определенный по последней формуле, составляет $0.0116qa^4(EI)^{-1}$.

В заключение отметим, что полубезмоментная пластина представляет собой подходящую механическую модель комбинированных систем из нежестко соединенных полос или балок, а также пластин с сильной ортотропией. Соотношения для полубезмоментных пластин допускают их точное решение при произвольных нагрузках и произвольных однородных граничных условиях. Эти соотношения легко обобщаются на случай оболочек [2] для расчета подпорных стенок волнового очертания, больверков и других оболочечных конструкций в виде набора отдельных полос, соединенных в шпунт.

Казанский инженерно-строительный
институт

Поступила 16 XII 1971

Ռ. Ե. ՀԵՅԶԵՆ

ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԻՎ ԿԻՍԱԱՆՄՈՄԵՆՏ ՍԱԼԵՐ ԵՎ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐ: ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Միջին մակերևույթի վրա հոդակապերով միացված բավական մեծ թվով շերտերի, հեծանների կամ օղակների հավաքված տեսքով կոմբինացված սիստեմների հաշվման համար առաջարկվել է կոնստրուկտիվ կիսաանմոմենտ սալերի և թաղանթների մեխանիկական մոդել։ Լուծվել է կոնստրուկտիվ կիսաանմոմենտ սալի ճկվածքների ազդեցության ֆունկցիայի մասին խնդիրը կամայական, համասեռ եզրային պայմանների դեպքում։ Երկու մասնակի խնդիրներում և թվային հաշվումներում ցույց է տրված կոշտության էապես մեծացման էֆեկտը, երբ առանձին շերտերը միացված են սալային սիստեմով կիսաանմոմենտ սխեմայով։

CONSTRUCTIONALLY SEMIMOMENTLESS PLATES AND SHELLS. THE PROBLEM IN PLATE BENDING

R. E. HEIZEN

Summary

A mechanical model of constructionally semimomentless plates and shells is suggested for calculating combined systems having a number of strips, beams or rings connected at the median surface. The problem in bending effect for a constructionally semimomentless plate under arbitrary uniform boundary conditions is solved. The effect of essential increase in rigidity due to connection of separate strips into a plate system according to the semimomentless scheme is shown in two particular calculations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. ГИТТЛ. М., 1953.
2. *Гейзен Р. Е., Тимофеева Л. М.* О пространственном расчете шпунтовых стенок. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 4, 1972.
3. *Гейзен Р. Е., Тимофеева Л. М.* Расчет шпунтовых конструкций как пластин и оболочек с продольными шарнирами. Тр. III Всесоюзной конференции по статике и динамике пространственных конструкций. Киев. «Будівельник», 1972.
4. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. «Наука», М., 1966.
5. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* Асимптотический анализ уравнений теории эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек. Сб. Теория пластин и оболочек. «Наука», М., 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

А. Е. АЛОЯН

К ТЕОРИИ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Будем называть мезометеорологическим пограничным слоем турбулентный пограничный слой атмосферы, характерные горизонтальные размеры которого имеют порядок 100 *км*. В работах [1, 3, 4], посвященных теории мезометеорологического пограничного слоя, предполагалось, что фоновая вертикальная скорость тождественно равна нулю. Как показали расчеты, такое предположение не всегда оправдывается. Поэтому в настоящей работе предпринята попытка сформулировать и решить ту же задачу без этого предположения с тем, чтобы фоновая скорость определялась в процессе решения.

1. *Постановка задачи.* Итак, рассмотрим, следуя [1], нестационарную задачу о мезометеорологическом пограничном слое, который развивается при движении воздушной массы над термически и орографически неоднородной подстилающей поверхностью. Предположим, что свойство фонового потока также, как и неоднородности подстилающей поверхности, не зависят от одной из горизонтальных координат (пусть этой координатой будет y). Тогда можно предположить, что и в интересующем нас процессе все величины не зависят от y, и ограничимся рассмотрением двумерной задачи. Система уравнений в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \pi'}{\partial x} + lv' + \lambda\delta_x\vartheta' + \bar{\Delta}u' \tag{1}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -lu' + \bar{\Delta}v' \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta'}{\partial x} + w\frac{\partial \vartheta'}{\partial z} + S(w' + \delta_x u') = -\Theta_x u' + \bar{\Delta}\vartheta' \tag{3}$$

$$\frac{\partial \pi'}{\partial z} = \lambda\vartheta' \tag{4}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \qquad \left(\bar{\Delta} = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tag{5}$$

Здесь приняты следующие обозначения: t—время, x—криволинейная координата отсчитываемая вдоль поверхности Земли; u—составляющая вектора скорости ветра в направлении x. Наклоны рельефа предполагаются малыми. Поэтому практически x можно считать горизонтальной координатой. По той же причине в качестве u можно принимать горизонтальную составляющую вектора скорости. При этом w' будет связано с вертикальной скоростью w'_1 в декартовой системе координат соотношением

$$w' = w'_1 - u'\delta_x \tag{6}$$

где $\delta(x)$ — функция, описывающая рельеф, $\delta_x(x)$ — тангенс угла наклона рельефа к горизонту. Величина w представляет собою составляющую вектора скорости ветра, нормальную к координатным линиям z=const. Остальные обозначения: v — горизонтальная составляющая вектора скорости вдоль оси y; π — величина, пропорциональная отклонению давления воздуха от статического; ϑ — потенциальная температура; $S=\gamma_a-\gamma$=const — параметр стратификации; λ — параметр конвекции; l=const — параметр Кориолиуса; ν — вертикальный коэффициент турбулентности, предполагаемый заданной функцией высоты; μ=const — горизонтальный коэффициент турбулентности; $\Theta_x = \frac{\partial \Theta}{\partial x}$ — горизонтальный градиент фоновой потенциальной температуры.

При выводе (1) — (5) все метеоэлементы были представлены в виде

$$u = U + u', \qquad v = V + v', \qquad w = W + w'$$
$$\vartheta = \Theta + \vartheta', \qquad \pi = \Pi + \pi' \tag{7}$$

где большими буквами обозначены фоновые значения метеоэлементов, предполагаемые известными (кроме W, которое предполагается независящим от высоты и подлежит определению), а буквами со штрихом—отклонения от фоновых значений. В данной работе мы полагали, что

$$U = U(t), \qquad V = V(t), \qquad \Theta = \Theta(x, t) + Sz \tag{8}$$

Переходим теперь к постановке начальных и краевых условий. Также, как в [1], запишем

$$u' = v' = \vartheta' = 0 \qquad \text{при } t = 0 \tag{9}$$

$$u = v = w = 0, \qquad \vartheta' = f(x, t) \qquad \text{при } z = 0 \tag{10}$$

где $f(x, t)$ — заданная функция.

$$u' = v' = w' = \vartheta' = \pi' = 0 \qquad \text{при } z = h = \text{const} \tag{11}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } x = 0;\ L \tag{12}$$

где x=0; L — границы области счета по горизонтали, h=const — граница области счета по вертикали.

Так же, как и в [1], прежде чем переходить к решению задачи, несколько преобразуем уравнения. Интегрируя (4) и (5) по z с учетом (11), получим

$$w' = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u' dz \tag{13}$$

$$\pi' = -\lambda \int_z^h \vartheta' dz \tag{14}$$

Отсюда, вследствие (10)

$$W' = -w'_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u' dz \tag{15}$$

Используя (8), (13) и (14), перепишем уравнения (1)—(3) в виде

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h \vartheta' dz + lv' + \lambda\lambda_x \vartheta' + \bar{\Delta} u \tag{16}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -lu' + \bar{\Delta} v \tag{17}$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta'}{\partial x} + w\frac{\partial \vartheta'}{\partial z} = -S\frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u' dz - (S\lambda_x + \Theta_x) u' + \bar{\Delta}\vartheta' \tag{18}$$

2. *Метод решения*. Для решения задачи воспользуемся тем же методом, что и в [2]. Введем в области $D = \{|x| = L,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$ сеточную область $D^h = \{(x_i, z_k)\}$ с шагами Δx_i и Δz_k соответственно, и аппроксимируем систему (1)—(5) следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\Lambda_1^h + \Lambda_2^h)\varphi = F \tag{19}$$

где

$$\Lambda_1^h = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & -\lambda D_x \\ 0 & A_1 & 0 \\ SD_{1x} & 0 & A_1 \end{vmatrix}, \qquad \Lambda_2^h = \begin{vmatrix} A_2 & lE & -\lambda A_3 A_4 \\ -lE & A_2 & 0 \\ SA_3 A_4 & 0 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$(A_2\varphi)_{i,k} = \frac{w'_{i,k+1/2}\varphi_{i,k+1} - w'_{i,k-1/2}\varphi_{i,k-1}}{2d_k} +$$

$$+ \frac{\nu_{k+1/2}}{d_k}\left(\frac{\varphi_{i,k+1} - \varphi_{i,k}}{\Delta z_{k+1}}\right) - \frac{\nu_{k-1/2}}{d_k}\left(\frac{\varphi_{i,k} - \varphi_{i,k-1}}{\Delta z_k}\right)$$

$$(A_2\varphi)_{i,k} = \frac{u'_{i+1/2,k}\varphi_{i+1,k} - u'_{i-1/2,k}\varphi_{i-1,k}}{2\Delta_i} +$$

$$+ \frac{\mu}{\Delta_i}\left(\frac{\varphi_{i+1,k} - \varphi_{i,k}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{\varphi_{i,k} - \varphi_{i-1,k}}{\Delta x_i}\right)$$

$$(A_3\varphi)_{i,k} = \frac{\varphi_{i+1,k} - \varphi_{i-1,k}}{2\Delta_i}$$

$$(A_4\varphi)_{i,k} = \sum_{q=1}^{k-1} \varphi_{i,q} d_k + \frac{\varphi_{i,k}\Delta z_k}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, K),\ \varphi_{i,k} = \varphi(x_i, z_k)$$

$$D_x = \mathrm{diag}\,\{\delta_x\}, \qquad D_{1x} = \mathrm{diag}\left\{\delta_x + \frac{d\varphi}{dx}\right\} -$$

—диагональные матрицы.

E — тождественная матрица; $F = (F_1, F_2, F_3)$ — вектор, учитывающий неоднородности краевых условий и фоновые значения метеоэлементов.

$$\varphi = (u,\ v,\ \vartheta'), \qquad \Delta_i = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}, \qquad d_k = \frac{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}}{2}$$

$$u_{i-1/2} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}$$

Конечно-разностные аппроксимации получены с помощью интегро-интерполяционного метода («Метода баланса») [5], [6].

Решение задачи (19) найдем с помощью метода переменных направлений (6)

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^{j}}{\Delta t/2} + \Lambda_1^h \varphi^{j+1/2} + \Lambda_2^h \varphi^{j} = F^{j} \\ &\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\Delta t/2} + \Lambda_1^h \varphi^{j+1/2} + \Lambda_2^h \varphi^{j+1} = F^{j+1/2} \end{aligned} \qquad (20)$$

Конечно-разностные уравнения (19) и (20) решаются с помощью матричной прогонки. Для определения w' используется уравнение (13).

3. *Примеры расчета.* С помощью описанной выше модели было рассчитано несколько примеров мезометеорологических процессов. Не останавливаясь на интерпретации всех проведенных расчетов, приведем лишь результаты только для W, так как основной целью данной работы был расчет этого элемента.

Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров:

$$\Delta z = \begin{cases} 50\ м & \text{при} \quad z \leqslant 300\ м \\ 60\ м & \text{при} \quad 300 < z \leqslant 660\ м \\ 75\ м & \text{при} \quad 660 < z \leqslant 1100\ м \\ 100\ м & \text{при} \quad 1100 < z \leqslant 2310\ м \end{cases}$$

$$l = 10^{-4}\ сек^{-1}, \qquad \theta_z = 0, \qquad \mu = 10^{1}\ м^2/сек, \qquad \Delta t = 10\ мин$$

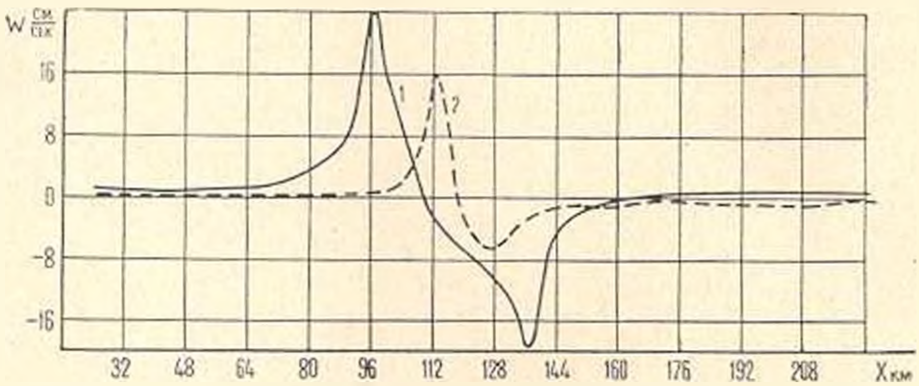
$$\lambda = 3.5 \cdot 10^{-2}\ м/сек^2\ град, \qquad S = 3 \cdot 10^{-3}\ град/м$$

Число расчетных узлов по вертикали равно 30, по горизонтали—58. Остальные входные параметры задаются в каждом примере в отдельности.

Пример 1. Стационарная задача о бризе над теплым островом на фоне внешнего потока. Рассчитывалось два варианта. В первом полагали, что внешний поток направлен перпендикулярно к тепловому источнику ($U=0$, $V=10$ *м/сек*), а во втором — вдоль теплового источника ($U=10$ *м/сек*, $V=0$). Для остальных параметров были приняты следующие значения:

$$f(x) = \begin{cases} 0^\circ, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < 96\ км \\ 10^\circ, & \text{если} \quad 96 \leqslant x < 132\ км \\ 0^\circ, & \text{если} \quad 132 < x \leqslant 232\ км \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Delta x = 4\ км \\ \delta_z = 0 \end{matrix}$$

Полученные в результате решения зависимости $W(x)$ для первого варианта (сплошная линия) и для второго варианта (пунктир) даны на фиг. 1.



Фиг. 1. Профиль фоновой вертикальной скорости W (стационарная задача). 1 — внешний поток направлен перпендикулярно к тепловому источнику, 2 — внешний поток направлен вдоль теплового источника.

Остальные примеры посвящены нестационарным задачам. В этих примерах мы приняли

$$f(x, t) = \bar{f}(x) \cos \omega t\ ,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли.

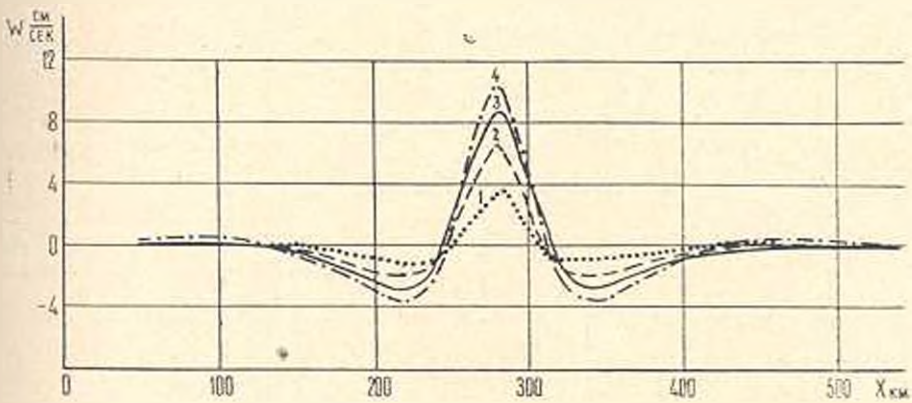
Пример 2. Нестационарная задача о бризе, развивающемся над островом, при отсутствии фонового ветра.

Полагалось:

$$U = V = \Theta_x = 0, \qquad \delta_x = 0, \qquad \Delta x = 10\ км$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0^\circ & при \quad 0 \leqslant x < 280\ км \\ 10^\circ & при \quad 280 \leqslant x < 310\ км \\ 0^\circ & при \quad x > 310\ км \end{cases}$$

На фиг. 2 приведены рассчитанные графики $W(x)$ для четырех моментов времени.



Фиг. 2. Зависимость $W(x)$ в примере 2 для четырех моментов времени. *1* — $t = 3$ час., *2* — $t = 6$ час., *3* — $t = 9$ час., *4* — $t = 12$ час.

Пример 3. Нестационарная задача о бризе над островом на фоне внешнего потока. Входные параметры имели следующие значения:

$$U = 3\ м/сек, \qquad \Theta_x = V = 0, \qquad \Delta x = 10\ км$$

Так как функция $\tilde{f}(x)$ симметрична относительно середины острова, приведем значение ее лишь для одной половины области счета (табл. 1).

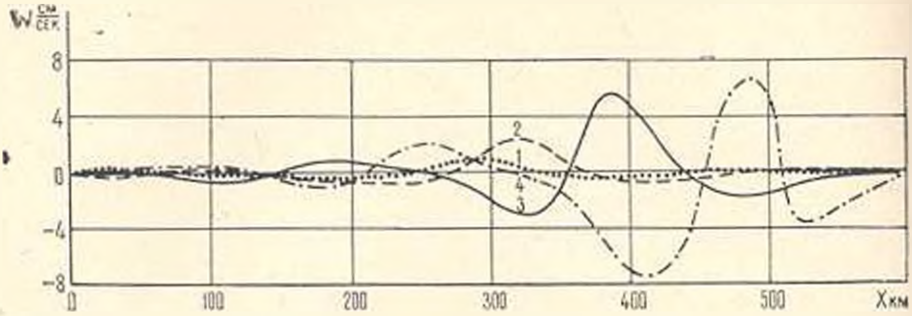
Таблица 1

Значения функции $\tilde{f}$ в интервале $0 < x < L$

x в км	0—190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
$\tilde{f}(x)\cdot 10$	0	1	3	6	10	15	20	25	30	35	40

На фиг. 3 приведен ход $W(x)$ во времени.

Пример 4. Нестационарная задача о ветре, возникающем над термически неоднородной и искривленной поверхностью, при отсутствии внешнего потока. Входные параметры задачи принимали следующие значения: $U = V = 0$, $\Delta x = 4$ *км*. Значения функций $\bar{f}(x)$ и δ_x приведены в табл. 2.



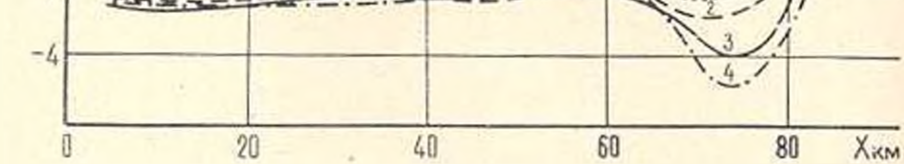
Фиг. 3. Зависимость $W(x)$ в примере 3 во времени при наличии внешнего потока: 1 — $t = 3$ *час*, 2 — $t = 6$ *час*, 3 — $t = 9$ *час*, 4 — $t = 12$ *час*.

Таблица 2

Значения функций $\bar{f}(x)$ и δ_x

x в *км*	0—28	40	52	61	76	88	100	112	124	136	148	160	172	184	200
$\delta_x \cdot 10^3$	0	3	4	4	4	4	4	4	6	6	7	7	7	7	7
$\widetilde{f}(x) \cdot 10$	0	8	17	20	20	20	29	38	41	41	41	41	41	41	41

На фиг. 4 приведен ход $W(x)$ во времени.



Фиг. 4. Зависимость $W(x)$ в примере 4 во времени над искривленной и термически неоднородной подстилающей поверхностью. 1 — $t = 1.5$ *час*, 2 — $t = 3$ *час*, 3 — $t = 4.5$ *час*, 4 — $t = 6$ *час*.

Во всех примерах счет был устойчивым. Здесь мы не придаем особого физического смысла полученным результатам, так как принятое нами предположение о том, что W не зависит от высоты, слишком огрубляет задачу. Мы рассматриваем эти результаты как противоположный предельный случай по сравнению с результатами задачи, изложенной в [1]. По-видимому, истинное решение находится где-то между решениями рассматриваемой в [1] задачи и решением, полученным в данной работе.

Автор благодарен доц. В. В. Пененко за помощь в работе.

Ереванский отдел
Зак. НИ Гидромет. Института

Поступила 29 VI 1973

Ա. Ե. ԱԼՈՅԱՆ

ՄԹՆՈԼՈՐՏԻ ՊԼԱՆԵՏԱՐ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏՈՒՄ ՄԵԶՈՄԵՏԵՈՐՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է երկչափ ոչ ստացիոնար խնդիր մթնոլորտի սահմանային շերտում մեզոմետեորոլոգիական պրոցեսների մասին, ընդ որում ընդունվում է, որ ծածկույթը ջերմաստիճանի և օրոգրաֆիայի տեսակետից անհամասեռ է։ Հոդվածում փորձ է արվում. օգտագործել թվային մեթոդները [1] այն դեպքի համար, երբ ֆոնի ուղղահայաց արագությունը նույնպես որոնելի ֆունկցիա է։ Արդյունքները ցույց են տալիս, որ նշված արագությունները կարող են էական լինել մթնոլորտի սահմանային շերտի պրոցեսների համար։

ON THE THEORY OF MESOMETEOROLOGICAL PROCESSES IN THE PLANETARY BOUNDARY LAYER OF THE ATMOSPHERE

A. E. ALOYAN

Summary

A non-stationary two-dimensional problem on the mesometeorological boundary layer over a thermally and orographically non-homogeneous underlying surface is considered. An attempt is made to use numerical methods (1) for the case where the background vertical velocity is the function sought. Some results of calculation are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алоян А. Е., Гутман Л. Н., Пененко В. В.* О возможных распределениях метеовозмущений в нижнем слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. 10, № 5, 1974.
2. *Пененко В. В.* Численный метод решения некоторых задач мезометеорологии. Инф. бюл. «Численные методы механики сплошной среды», т. 4, № 1. Новосибирск, 1973.

3. *Гутман Л. Н.* Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Гидрометеоиздат, Л., 1969.
4. *Гутман Л. Н., Пененко В. В., Сохов Т. Е., Шапошникова М. Н.* К теории мезометеорологических процессов в планетарном пограничном слое атмосферы. Тр. Зап. Сиб. РНИГМИ, вып. 1. Новосибирск, 1972
5. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1972
6. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1971.
7. *Яненко Н. Н.* Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Изд. «Наука», Новосибирск, 1967