

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
 Д О К Л А Д Ы

LXVII, № 5

1978

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. քեկնա-
 ծու (պատ. Բարտուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻՃՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱՐԱ-
 ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
 ՅԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
 ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ,
 Վ. Մ. ԹՎՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-ան-
 դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
 Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
 (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱՔ-
 ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր),
 Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ,
 Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ
 ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
 АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
 мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
 демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),
 И. Г. МАГАКЪЯН, академик АН Арм.
 ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
 АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
 чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
 ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
 ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
 ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
 ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
 В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

Բ Ո Վ Ա Ն Կ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

12

Լ. Վ. Միֆայելյան—Քրիստոֆելի բանաձևի անալոգը միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ բազմանդամների համար	257
Ա. Ի. Պետրոսյան— C^n տարածության մեջ որոշ տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների մոտորկման մասին	264
Մ. Ժ. Գրիգորյան— $L^p, 1 \leq p < 2$ դասերի ֆունկցիաների ներկայացումը օրթոգոնալ շարքերով	269
Ս. Գ. Ռոբարեովիչ—Խզվող գործակիցներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մասին	275
Ս. Մ. Գյուլումյան, Կ. Մ. Մոսեսյան—Ընտ գագաթային k -տրոհման թվի կրիտիկական գրաֆների մասին	281
Յու. Մ. Մովսիսյան—Կիսադձային ձևափոխությունների խմբերի վերաբերյալ	285
Գ. Ա. Բարսեղյան—Վերջավոր ստորին կարգ ունեցող սարմորֆ ֆուկցիաների դեֆեկտների և աճի մասին	291

ԱՌՄԱԳՈՒԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՄՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Ի. Լազարեվ, Պ. Ի. Պերլին—Կտոր առ կտոր համառես միջավայրի առաձգականության տեսության տարածական խնդրի լուծման մասին	295
--	-----

ԱՍՏՐՈՆՈՄԻԱ

Բ. Հ. Կարապետյան, Վ. Ս. Օսկանյան—Աստղապիտան դիտումների տեղեկատվությունը գնահատելու իմֆորմացիոն շափանիշները	302
--	-----

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յաբլոկով-Խենդրյան—Ծածկակնճիթ բզեզ(ը նոր տեսակ Հայաստանից (Coleoptera, Curculionidae)	308
Բովանդակություն LXVII հատորի	311

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
<i>Л. В. Микаелян</i> —Аналог формулы Кристоффеля для ортогональных многочленов на единичной окружности S^n	257
<i>А. И. Петросян</i> —О равномерном приближении голоморфных функций в некоторых областях пространства	264
<i>М. Ж. Григорян</i> —Представление функций классов $L^p[0,1]$, $1 \leq p < 2$ ортогональными рядами	269
<i>С. Г. Рубинович</i> —О сингулярных интегральных уравнениях с разрывными коэффициентами	275
<i>С. М. Гюлумян, К. М. Мосесян</i> —О критических по числу вершинного k -разбиения графах	281
<i>Г. А. Барсегян</i> —О дефектах и росте мероморфных функций конечного нижнего порядка	291
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ	
<i>М. И. Лазарев, П. И. Перлин</i> —О решении задач пространственной теории упругости для кусочнооднородной среды	295
АСТРОФИЗИКА	
<i>Б. О. Карапетян, В. С. Осканян</i> —Информационные критерии оценки эффективности астрофизических наблюдений	302
ЭТНОМОЛОГИЯ	
<i>С. М. Яблоков-Хнзорян</i> —Новый вид жесткокрылых—скрытнохоботников из Армении (<i>Coleoptera, Curculionidae</i>)	308
Содержание LXVII тома	311

1978 h. 67. N 5

CONTENTS

MATHEMATICS	P.
<i>L. V. Mikaelian</i> —The analogue of the formula of Kristeffel for orthogonal polynomials on the unit circle C^n	257
<i>A. I. Petrosian</i> —On equal holomorphic approximation on some domains in C^n	264
<i>M. G. Grigorian</i> —On the representation of functions from the L_p , $1 < p < 2$ spaces by orthogonal series	269
<i>S. G. Rubanovich</i> —On singular integral equations possessing discontinuous coefficients	275
<i>S. M. Gyulumian, K. M. Mosesian</i> —On critical graphs upon vertex number of k -partition	281
<i>Yu. M. Movsisian</i> —About the groups of semilinear transformations	285
<i>G. A. Barsegian</i> —On the defects and growth of the meromorphic functions of the finite lower order	291
 THEORY OF ELASTICITY	
<i>M. I. Lazarev, P. I. Perlin</i> —On the solution of the problem of the space theory of elasticity for a piece-homogeneous medium	295
 ASTROPHYSICS	
<i>B. H. Karapetian, V. S. Oskanian</i> —Efficiency estimation of astrophysical observations by information criteria	302
 ENTOMOLOGY	
<i>A. M. Iablokov-Khinzorian</i> —A new species of Curculionidae—beetles from Armenia	308
Contents of volume LXVII	311

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04455. Подписано к печати 5.III.1979 г. Тираж 545. Изд. 4983. Заказ 1303
 Формат бумаги $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2.
 Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,41.

Издательство АН АрмССР, Ереван, Барекамутян 24-г.
 Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Л. В. Микаелян

**Аналог формулы Кристоффеля для ортогональных
 многочленов на единичной окружности**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/VI 1978)

Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ система ортонормированных многочленов на единичной окружности относительно обложения $d\alpha(t)$, $(-\pi \leq t \leq \pi)$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(z) \overline{\varphi_m(z)} d\alpha(t) = \delta_{k,m}, \quad z = e^{it}.$$

Рассмотрим новое обложение

$$d\alpha'(t) = Q(t) d\alpha(t),$$

где

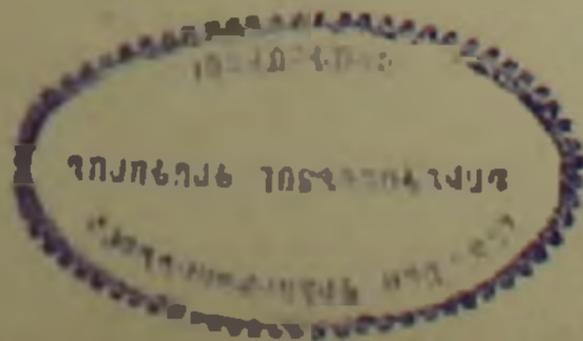
$$Q(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

неотрицательный тригонометрический многочлен. Пусть $\{\varphi'_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ система ортонормированных многочленов на единичной окружности относительно этого нового обложения.

Цель нашей заметки установить связь между многочленами $\{\varphi'_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. Полученная в заметке формула (5) отличается от ранее полученной формулы Б. Л. Голинского (1), который выразил многочлены $\varphi'_j(z)$, где $\varphi'_j(z) = z^j \varphi_j(z^{-1})$, через полиномиальные ядра $K_n(z, \bar{z}) = \sum \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\bar{z})}$. Формула (5) является аналогом известной формулы Кристоффеля (2), выражающей многочлены $q_k(x)$ ортогональные на отрезке (a, b) вещественной прямой относительно обложения $\rho(x) dx(x)$ через многочлены ортогональные на (a, b) относительно обложения $dx(x)$. Здесь $\rho(x)$ — многочлен от x .

В 1959 году В. Б. Уваров (3) обобщил последний результат на случай, когда обложение умножается на рациональную функцию от x .

1. Пусть



$$Q(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

— неотрицательный тригонометрический многочлен. Как известно, в этом случае $Q(t)$ допускает представление

$$Q(t) = |a \prod_{j=1}^n (z - z_j)|^2, \quad z = e^{it},$$

где a и a_j ($j=1, 2, \dots, n$) некоторые числа. Чтобы укоротить записи, допустим, что $z(t)$ в данном обложении абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т. е.

$$d\sigma(t) = f(t)dt, \quad f(t) \geq 0.$$

Сначала рассмотрим простой случай, когда

$$Q(t) = |z - a|^2 \quad \text{и} \quad d\sigma'(t) = |e^{it} - a|^2 f(t)dt, \quad |a| \neq 1.$$

Обозначим через π_n оператор проектирования в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ на подпространство многочленов степени не выше n , т. е.

$$\pi_n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt}.$$

Пусть

$$T_n' = \pi_n |e^{it} - a|^2 f(t) \pi_n,$$

$$T_n = \pi_n f(t) \pi_n,$$

$$\hat{T}_n = \pi_n |e^{it} - a|^2 \pi_n.$$

Нетрудно проверить, что

$$T_n' = T_n \cdot \hat{T}_n - A_n,$$

где

$$A_n = a(\cdot, e_0) \pi_n z^{-1} f(t) + \bar{a}(\cdot, e_n) \pi_n z^{n+1} f(t), \quad z = e^{it},$$

$e_k = e^{ikt}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $a(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$.

Рассмотрим уравнения:

$$T_n H_n(z) = z^n \quad \text{и} \quad T_n' H_n'(z) = z^n.$$

Как известно (*),

$$H_n(z) = d(n) \varphi_n(z) \quad \text{и} \quad H_n'(z) = d'(n) \varphi_n'(z),$$

где

$$|d(n)|^2 = \frac{\det T_n}{\det T_{n-1}} \quad \text{и} \quad |d'(n)|^2 = \frac{\det T_n'}{\det T_{n-1}'}$$

Решим теперь уравнение:

$$T_n' H_n'(z) = z^n. \tag{1}$$

Полагая

$$H_n(z) = h_0 + h_1 z + \dots + h_n z^n, \quad \text{имеем:}$$

$$A_n H_n(z) = \alpha h_0 \pi_n z^{-1} f + \bar{\alpha} h_n \pi_n z^{n+1} f.$$

Поэтому уравнение (1) может быть записано в виде:

$$T_n \hat{T}_n H_n(z) = z^n + \alpha h_0 \pi_n z^{-1} f + \bar{\alpha} h_n \pi_n z^{n+1} f$$

или

$$\hat{T}_n H_n(z) = T_n^{-1} z^n + \alpha h_0 T_n^{-1} \pi_n z^{-1} f + \bar{\alpha} h_n T_n^{-1} \pi_n z^{n+1} f.$$

Пусть

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^n \varphi_n^k z^k \quad \text{и} \quad \varphi_n^*(z) = z^n \bar{\varphi}_n(z^{-1}).$$

После некоторых расчетов, можно убедиться в том, что

$$T_n^{-1} \pi_n z^{-1} f = [z \varphi_{n+1}^*(0)]^{-1} |\varphi_{n+1}^*(0) - \varphi_{n+1}^*(z)|,$$

$$T_n^{-1} \pi_n z^{n+1} f = (\varphi_{n+1}^{n+1})^{-1} |\varphi_{n+1}^{n+1} z^{n+1} - \varphi_{n+1}(z)|$$

и, стало быть, что

$$\begin{aligned} \hat{T}_n H_n(z) = & d(n) \varphi_n(z) + \alpha h_0 \frac{\varphi_{n+1}^*(0) - \varphi_{n+1}^*(z)}{z \varphi_{n+1}^*(0)} + \\ & + \bar{\alpha} h_n \frac{\varphi_{n+1}^{n+1} z^{n+1} - \varphi_{n+1}(z)}{\varphi_{n+1}^{n+1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как

$$|e^{i\theta} - \alpha|^2 = z^{-1}(z - \alpha)(1 - z\bar{\alpha}), \quad z = e^{i\theta},$$

то

$$\hat{T}_n H_n(z) = z^{-1}(z - \alpha)(1 - z\bar{\alpha}) H_n(z) + \alpha h_0 z^{-1} + \bar{\alpha} h_n z^{n+1}.$$

Подставляя это значение в (2) получаем уравнение

$$H_n(z) = \frac{1}{(z - \alpha)(1 - z\bar{\alpha})} \left[d(n) z \varphi_n(z) - \alpha h_0 \frac{\varphi_{n+1}^*(z)}{\varphi_{n+1}^*(0)} - \bar{\alpha} h_n \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_{n+1}^{n+1}} \right] \quad (3)$$

Для определения h_0 и h_n потребуем, чтобы выражение в фигурных скобках имело нули в точках α и $1/\bar{\alpha}$. Это приводит к равенствам:

$$\begin{cases} \alpha h_0 \frac{\varphi_{n+1}^*(\alpha)}{\varphi_{n+1}^*(0)} + \bar{\alpha} h_n \frac{\varphi_{n+1}(\alpha)}{\varphi_{n+1}^{n+1}} = d(n) \alpha \varphi_n(\alpha) \\ \alpha h_0 \frac{\varphi_{n+1}^*(1/\bar{\alpha})}{\varphi_{n+1}^*(0)} + \bar{\alpha} h_n \frac{\varphi_{n+1}(1/\bar{\alpha})}{\varphi_{n+1}^{n+1}} = d(n) \frac{1}{\alpha} \varphi_n\left(\frac{1}{\alpha}\right). \end{cases}$$

Решая полученную систему, подставляя значения h_0 и h_n в (3) и обозначая $\alpha^* = 1/\bar{\alpha}$, находим

$$H_n(z) = \frac{d(n)}{\Delta(z-a)(1-z\bar{a})} \left[z\varphi_n(z)\varphi_{n+1}(a^*)\varphi_{n+1}^*(a) - \right. \\ \left. - z|a|^2\varphi_n(z)\varphi_{n+1}(z)\varphi_{n+1}^*(a^*) - a\varphi_{n+1}^*(z)\varphi_n(a)\varphi_{n+1}(a^*) + a\varphi_{n+1}^*(z)\varphi_n(a^*)\varphi_{n+1}(z) - \right. \\ \left. - z\varphi_{n+1}(z)\varphi_n(a^*)\varphi_{n+1}^*(a) + |a|^2z\varphi_{n+1}(z)\varphi_n(a)\varphi_{n+1}^*(a^*) \right],$$

где

$$\Delta = \varphi_{n+1}^*(a)\varphi_{n+1}(a^*) - |a|^2\varphi_{n+1}^*(a^*)\varphi_{n+1}(a).$$

Или в компактном виде:

$$H_n(z) = \frac{d(n)}{\Delta(z-a)(1-z\bar{a})} \begin{vmatrix} z\varphi_n(z) & a\varphi_n(a) & a^*\varphi_n(a^*) \\ z\varphi_{n+1}(z) & a\varphi_{n+1}(a) & a^*\varphi_{n+1}(a^*) \\ \varphi_{n+1}^*(z) & \varphi_{n+1}^*(a) & \varphi_{n+1}^*(a^*) \end{vmatrix}.$$

Но так как $\varphi_n(z)$ отличается от $H_n(z)$ постоянным множителем, то

$$\varphi_n(z) = \frac{c_n}{(z-a)(z-a^*)} \begin{vmatrix} z\varphi_n(z) & a\varphi_n(a) & a^*\varphi_n(a^*) \\ z\varphi_{n+1}(z) & a\varphi_{n+1}(a) & a^*\varphi_{n+1}(a^*) \\ \varphi_{n+1}^*(z) & \varphi_{n+1}^*(a) & \varphi_{n+1}^*(a^*) \end{vmatrix} \quad (4)$$

Если $a = a^*$, то

$$\varphi_n(z) = \frac{c_n}{(z-a)^2} \begin{vmatrix} z\varphi_n(z) & a\varphi_n(a) & [z\varphi_n(z)]'_{z=a} \\ z\varphi_{n+1}(z) & a\varphi_{n+1}(a) & [z\varphi_{n+1}(z)]'_{z=a} \\ \varphi_{n+1}^*(z) & \varphi_{n+1}^*(a) & [\varphi_{n+1}^*(z)]'_{z=a} \end{vmatrix} \quad (4')$$

В обеих формулах c_n — нормировочная постоянная.

2°. Перейдем к рассмотрению общего случая

Пусть $d\sigma'(t) = Q(t)d\sigma(t)$. Предположим, что $\sigma'(t)$ имеет бесконечное множество точек роста. Напишем $Q(t)$ в удобной для нас форме

$$Q(t) = |a|^2 \prod_{j=1}^n |z-a_j|^2 = |a|^2 z^{-n} \prod_{j=1}^n (z-a_j)(1-z\bar{a}_j).$$

Не умаляя общности можно предполагать, что $|a|=1$. Кроме того, сначала предположим, что $a_j \neq a_k$, если $j \neq k$ и

$$|a_j| \neq 1, \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда, если $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированная система многочленов относительно обложения $d\sigma(t)$, а $\{\varphi_k^*(z)\}_{k=0}^{\infty}$ относительно $d\sigma'(t)$, то для $\varphi_k(z)$ справедлива следующая формула:

$$\varphi_k^*(z) = \frac{c_k}{\prod_{j=1}^n (z-a_j)(z-a_j^*)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} z^n \varphi_k(z) & a_1^n \varphi_k(a_1) & a_1^{*n} \varphi_k(a_1^*) & \dots & a_n^n \varphi_k(a_n) & a_n^{*n} \varphi_k(a_n^*) \\ z^{n-1} \varphi_{k+1}(z) & a_1^{n-1} \varphi_{k+1}(a_1) & a_1^{*(n-1)} \varphi_{k+1}(a_1^*) & \dots & a_n^{n-1} \varphi_{k+1}(a_n) & a_n^{*(n-1)} \varphi_{k+1}(a_n^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^n \varphi_{k+n}(z) & a_1^n \varphi_{k+n}(a_1) & a_1^{*n} \varphi_{k+n}(a_1^*) & \dots & a_n^n \varphi_{k+n}(a_n) & a_n^{*n} \varphi_{k+n}(a_n^*) \\ z^{n-1} \varphi_{k+1}^*(z) & a_1^{n-1} \varphi_{k+1}^*(a_1) & a_1^{*(n-1)} \varphi_{k+1}^*(a_1^*) & \dots & a_n^{n-1} \varphi_{k+1}^*(a_n) & a_n^{*(n-1)} \varphi_{k+1}^*(a_n^*) \\ z^{n-2} \varphi_{k+2}^*(z) & a_1^{n-2} \varphi_{k+2}^*(a_1) & a_1^{*(n-2)} \varphi_{k+2}^*(a_1^*) & \dots & a_n^{n-2} \varphi_{k+2}^*(a_n) & a_n^{*(n-2)} \varphi_{k+2}^*(a_n^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z \varphi_{k+n-1}^*(z) & a_1 \varphi_{k+n-1}^*(a_1) & a_1^* \varphi_{k+n-1}^*(a_1^*) & \dots & a_n \varphi_{k+n-1}^*(a_n) & a_n^* \varphi_{k+n-1}^*(a_n^*) \\ \varphi_{k+n}^*(z) & \varphi_{k+n}^*(a_1) & \varphi_{k+n}^*(a_1^*) & \dots & \varphi_{k+n}^*(a_n) & \varphi_{k+n}^*(a_n^*) \end{vmatrix} \quad (5)$$

где c_k — нормировочная постоянная.

Приведенное выражение для $\varphi_k(z)$ подсказано формулой (4). Докажем справедливость формулы (5).

В самом деле из (5) следует, что

$$\varphi_k(z) = \frac{c_k}{\prod_{j=1}^n (z - a_j)(1 - z \bar{a}_j)} \left\{ z^n \sum_{j=0}^n \mu_j \varphi_{k+j}(z) + \sum_{j=1}^n \nu_j z^{n-j} \varphi_{k+j}^*(z) \right\}$$

Поэтому, если $p=0, 1, \dots, k-1$ и $z=e^{it}$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(z) \bar{z}^p ds'(t) &= \sum_{j=0}^n \mu_j \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{k+j}(z) \bar{z}^p ds(t) + \sum_{j=1}^n \nu_j \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{k+j}^*(z) \bar{z}^{j+p} ds(t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \nu_j \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_{k+j}(z)} z^{k-p} ds(t) = 0. \end{aligned}$$

Остается доказать, что $\varphi_k(z)$ — многочлен точно степени k . Для этого достаточно убедиться, что коэффициент при $z^n \varphi_{k+n}(z)$ не обращается в нуль. Допустим противное. Тогда существуют постоянные C_j ($j=0, 1, \dots, n-1$) и d_l ($l=1, 2, \dots, n$), не все равные нулю, такие, что выражение

$$P(z) = z^n \sum_{j=0}^{n-1} C_j \varphi_{k+j}(z) + \sum_{l=1}^n d_l z^{n-l} \varphi_{k+l}^*(z)$$

обращается в нуль в точках a_1, a_2, \dots, a_n и $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$. Следовательно,

$$P(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)(z - a_j^*) G(z), \quad \text{где } G(z) \text{ — многочлен степени не выше } k-1.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} P(z) z^{-n} u(z) d\sigma(t) = 0, \quad z = e^{it},$$

где $u(z)$ — любой многочлен степени не выше $k-1$. В частности

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} z^{-n} P(z) G(z) d\sigma(t) = 0, \quad z = e^{it},$$

или

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |G(z)|^2 d\sigma'(t) = 0, \quad z = e^{it}.$$

Отсюда $G(z) = 0$ в точках роста функции $\sigma'(t)$. Но мы предполагаем, что $\sigma'(t)$ имеет бесконечное множество точек роста, поэтому $G(z) \equiv 0$, что невозможно.

Если какие-либо значения $\alpha_j = z_j^*$, то в определителе (5) на месте $(2j+1)$ -го столбца надо писать производные 1-го столбца в точке α_j .

Если $\alpha_i = \alpha_j$ и $\alpha_i \neq z_i^*$, $\alpha_j \neq z_j^*$, то на месте $2j$ и $(2j+1)$ -их столбцов надо писать производные 1-го столбца соответственно в точках α_i и z_i^* .

И наконец, если среди z_i ($i=1, 2, \dots, n$) есть точки, совпадающие и лежащие на единичной окружности, то в определителе (5) будут участвовать производные высших порядков первого столбца в соответствующих точках.

Отметим еще, что из формулы (5) можно получить ортогональные многочлены относительно веса, являющегося положительным тригонометрическим многочленом, если положить в нем $\varphi_k(z) = z^k$.

Выражаю искреннюю благодарность В. М. Адамян за постоянное внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Վ. ԿՐԻՓԱՅԵԼՅԱՆ

Քրիստոֆելի բանաձևի անսլոգր միավոր շրջանագծի վրա սերոգոնայ բազմանդամների համար

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. արտահայտել միավոր շրջանագծի վրա $Q(t) d\sigma(t)$ կշոի նկատմամբ սրիտոգոնայ բազմանդամները. որտեղ՝

$$Q(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

դրական եռանկյունաչափական բազմանդամ է նույն շրջանագծի վրա $d_2(t)$ կշռի նկատմամբ օրթոգոնալ բազմանդամներով: Հոդվածում ապացուցված (5) բանաձևը հանդիսանում է Քրիստոֆելի հայտնի բանաձևի անալոգը և լուծում է վերևում նշված խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. Л. Голинский, «Известия Вузов», Математика, № 1 (2) (1958) ² Г. Сеге, Ортогональные многочлены, М., 1962. ³ В. Б. Уваров, ДАН СССР, т. 126, № 1 (1959).
⁴ У. Гренандер, Г. Сеге, Теплицевы формы и их приложения, ИЛ, 1961.

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О равномерном приближении голоморфных функций в
 некоторых областях пространства C^n

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/VI 1978)

Пусть D — ограниченная область голоморфности в пространстве C^n , задаваемая следующим образом:

$$D = \{z : \rho(z) < 0, |\chi(z)| < 1\}. \quad (1)$$

Здесь $\chi(z)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности Ω замыкания области D ; $\rho(z)$ — вещественнозначная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, строго плюрисубгармоническая в Ω , т. е. квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k$$

положительно определена при всех $z \in \Omega$. Область D предполагается невырожденной. Это означает, что

$$\text{grad } \rho(z) \neq 0 \text{ на грани } \sigma_1 = \{z \in \bar{D} : \rho(z) = 0\},$$

$$\text{grad } \chi(z) \neq 0 \text{ на грани } \sigma_2 = \{z \in \bar{D} : |\chi(z)| = 1\},$$

$$\text{rang} \begin{vmatrix} \text{grad } \rho(z), \overline{\text{grad } \rho(z)} \\ \text{grad } \chi(z), \overline{\text{grad } \chi(z)} \end{vmatrix} = 2 \text{ на остове } \sigma_1 \cap \sigma_2.$$

Область D является, так сказать, областью „типа полушара“.

Через $C_A(D)$ обозначается банахово пространство функций f , голоморфных в D и непрерывных на \bar{D} , с равномерной нормой

$$\|f\| = \|f\|_D = \sup_{z \in \bar{D}} |f(z)|.$$

Настоящая работа посвящена доказательству следующего результата

Теорема. Для всякой функции $f \in C_A(\bar{D})$ и числа $\varepsilon > 0$ существует функция F , голоморфная в некоторой окрестности \bar{D} , такая, что

$$\|f - F\| < \varepsilon.$$

Доказательство основано на известной схеме сведения задачи равномерного приближения к решению $\bar{\partial}$ -уравнения с равномерной оценкой (см., например, (1)). Формулы для решения $\bar{\partial}$ -уравнения с оценкой в случае областей рассматриваемого типа даны в работе (2).

Следующая лемма утверждает возможность локального приближения функций из $C_A(D)$.

Лемма. Существует конечная система шаров B_k ($k=1, 2, \dots, \dots, p$), покрывающая границу ∂D области D ($\partial D \subset \bigcup_{k=1}^p B_k$), таких, что сужение всякой функции $f \in C_A(D)$ на множество $\bar{B}_k \cap \bar{D}$ равномерно приближается функциями, голоморфными в окрестности $\bar{B}_k \cap \bar{D}$.

Доказательство. Пусть $f \in C_A(D)$. В силу вещественной невырожденности области D для каждой точки $\zeta \in \partial D$ существуют шар B_ζ с центром в ζ и единичный вектор ν_ζ такие, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ функция $f(z + \delta \nu_\zeta)$ голоморфна в окрестности множества $\bar{B}_\zeta \cap \bar{D}$. Поскольку f равномерно непрерывна на \bar{D} , для произвольного $\epsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$|f(z + \delta \nu_\zeta) - f(z)| < \epsilon$$

при всех $\delta < \delta_0$ и $z \in \bar{B}_\zeta \cap \bar{D}$. Затем из покрытия $|\partial D|$ компакта ∂D выбираем конечное семейство B_1, B_2, \dots, B_p .

Доказательство теоремы. Построим систему бесконечно дифференцируемых, неотрицательных, финитных функций $g_k(z)$, ($k=0, 1, \dots, p$), удовлетворяющих условиям

$$a). \text{Supp } g_0 \subset D, \text{Supp } g_k \subset B_k, (k=1, \dots, p);$$

$$b). \sum_{k=0}^p g_k(z) = 1 \text{ в некоторой окрестности множества } \bar{D}.$$

Для $\epsilon > 0$ построим области

$$D^\epsilon = \{z : \rho(z) < \epsilon, |\chi(z)| < 1 + \epsilon\}.$$

Согласно лемме, существуют окрестности V_k^ϵ множеств $\bar{B}_k \cap \bar{D}$ и функции f_k^ϵ , голоморфные в V_k^ϵ такие, что

$$\|f_k^\epsilon - f\|_{\bar{B}_k \cap \bar{D}} < \epsilon, k=1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

Обозначим, далее, $V_0^\epsilon = D, f_0^\epsilon = f$. Неравенство (2) справедливо тогда и при $k=0$. Число $\epsilon > 0$ будем предполагать настолько малым, чтобы

$D^\epsilon \subset \bigcup_{k=0}^p V_k^\epsilon$ и чтобы условие б). выполнялось на \bar{D}^ϵ .

Рассмотрим следующие функции

$$h_{ik}^\epsilon(z) = \begin{cases} |f_i^\epsilon(z) - f_k^\epsilon(z)| g_k(z), & z \in V_i \cap V_k, \\ 0, & z \in V_i \setminus V_k; \end{cases}$$

$$h_i^0(z) = \sum_{k=0}^p h_{ik}^0(z). \quad (3)$$

Из того, что носитель функции $g_k(z)$ принадлежит множеству $B_k \cap \bar{D}^i$ (условие a), причем $B_k \cap \bar{D}^i \subset V_k^i \cap \bar{D}^i$, следует, что функции h_{ik}^0 и h_i^0 бесконечно дифференцируемы на $V_i^0 \cap \bar{D}^i$ и, с учетом (2), для всех $z \in V_i^0 \cap \bar{D}^i$ удовлетворяют следующим оценкам

$$|h_{ik}^0(z)| \leq |f_i^0(z) - f_k^0(z)| \leq |f_i^0(z) - f(z)| + |f(z) - f_k^0(z)| < 2\varepsilon, \quad (4)$$

$$|h_i^0(z)| \leq \sum_{k=0}^p |h_{ik}^0(z)| < 2p\varepsilon. \quad (5)$$

Далее, при $z \in V_i^0 \cap V_j^0 \cap \bar{D}^i$

$$\begin{aligned} h_i^0(z) - h_j^0(z) &= \sum_{k=0}^p |f_i^0(z) - f_k^0(z)| g_k(z) - \sum_{k=0}^p |f_j^0(z) - f_k^0(z)| g_k(z) = \\ &= \sum_{k=0}^p |f_i^0(z) - f_j^0(z)| g_k(z) = f_i^0(z) - f_j^0(z). \end{aligned}$$

т. е.

$$h_i^0(z) - f_i^0(z) = h_j^0(z) - f_j^0(z), \quad (i=0, 1, \dots, p).$$

Это означает, что на \bar{D}^i глобально определена функция

$$h^i(z) = h_i^0(z) - f_i^0(z), \quad z \in V_i^0 \cap \bar{D}^i, \quad (6)$$

причем $h^i \in C^\infty(\bar{D}^i)$. Используя неравенства (2) и (5), для $z \in B_i \cap \bar{D}^i$ имеем

$$|h^i(z) - f(z)| \leq |h_i^0(z)| + |f_i^0(z) - f(z)| < (2p+1)\varepsilon.$$

Следовательно

$$\|h^i - f\|_D < (2p+1)\varepsilon. \quad (7)$$

Далее, используя (6) и (3), с учетом, что функция f_i^0 голоморфна в V_i^0 , имеем при $z \in V_i^0 \cap \bar{D}^i$

$$|\bar{\partial} h^i(z)| = |\bar{\partial} h_i^0(z)| = \left| \sum_{k=0}^p \bar{\partial} h_{ik}^0(z) \right| \leq \sum_{k=0}^p |f_i^0(z) - f_k^0(z)| |\bar{\partial} g_k(z)|. \quad (8)$$

Здесь

$$\bar{\partial} h^i(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h^i(z)}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

$$|\bar{\partial} h^i(z)| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial h^i(z)}{\partial \bar{z}_k} \right|.$$

Обозначив $\gamma_0 = \gamma_0(D) = \max_{0 \leq k < p} \|\bar{\partial} g_k\|$, из (8) и (4) имеем

$$\|\bar{\partial} h^i\|_D \leq 2\gamma_0\varepsilon. \quad (9)$$

Равенство (7) означает, что бесконечно дифференцируемая на \bar{D}' функция h' приближает f с точностью $(2p+1)\varepsilon$. Теорема будет доказана, если нам удастся подобрать малую по модулю функцию u так, чтобы разность $h'-u$ была бы голоморфной в D' , т. е. чтобы $\bar{\partial}(h'-u)=0$. Неравенство (9) означает, что $\bar{\partial}h'$ мало. Таким образом, задача сведется к решению с оценкой $\bar{\partial}$ -уравнения

$$\bar{\partial}u = \bar{\partial}h' \quad (10)$$

в области D' . Правая часть в (10) — это гладкая $\bar{\partial}$ -замкнутая форма типа $(0, 1)$; u — искомая функция. В работе (2) дана формула решения уравнения (10), удовлетворяющая равномерной оценке

$$\|u\|_{D'} \leq \gamma(D') \|\bar{\partial}h'\|_{D'}. \quad (11)$$

Анализ доказательства оценки (11) показывает, что константы $\gamma(D')$ ограничены, т. е.

$$\gamma(D') \leq \gamma_0 \gamma_1(D). \quad (12)$$

Из (11), (9) и (12) получаем

$$\|u\|_{D'} \leq 2\gamma_0\gamma_1\varepsilon. \quad (13)$$

Из (10) следует, что функция

$$F(z) = h'(z) - u(z)$$

голоморфна в области D' . Наконец, из (7) и (13) получается оценка

$$\|f - F\|_D \leq \|h' - f\|_D + \|u\|_D < (2p+1)\varepsilon + 2\gamma_0\gamma_1\varepsilon = \gamma_2\varepsilon,$$

где постоянная γ_2 зависит только от области D .

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Ա. Բ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

C^n տարածության մեջ որոշ տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների մոտարկման մասին

Դիցուք D -ն n -չափանի կոմպակտ տարածության մեջ հոլոմորֆության տիրույթ է, որը որոշվում է հետևյալ պայմանով՝

$$D = \{z : \rho(z) < 0, |\chi(z)| < 1\},$$

որտեղ $\chi(z)$ -ը հոլոմորֆ ֆունկցիա է D տիրույթի փակման որևէ շրջակայքում, իսկ $\rho(z)$ -ը խիստ պլլարիստորհարմունիկ է $C_A(D)$ -ով նշանակենք

D -ում հոլոմորֆ և \bar{D} -ի վրա անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունը
 չօղակավորում ապացուցվում է, որ կամայական f ֆունկցիա, որը պատկանում է
 $C_1(D)$ -ին, \bar{D} -ի վրա հավասարաչափ մոտարկվում է ֆունկցիաներով, որոնք
 հոլոմորֆ են \bar{D} -ի շրջակայքում: Երա համար նախ լեմայում ապացուց-
 վում է f -ի լոկալ մոտարկման հնարավորությունը, իսկ հետո սղտագործվում
 է այն փաստը, որ D -ում \bar{D} -հավասարումը ունի լուծում, որը բավարարում
 է հավասարաչափ զնահատականին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ J. Lieb, Math. Ann., v. 184, №1, (1969). ² А. И. Петросян, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 1 (1978).

УДК 517.512.7

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

Представление функции классов $L_p[0,1], 1 \leq p < 2$
 ортогональными рядами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 26/VI 1976)

1. В работе (1) доказана следующая

Теорема А. (А. А. Талалян). Если $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система, то для любой $f(x) \in L_p[0,1], 0 < p < 1$ и любого натурального N , существует ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (1)$$

который сходится к $f(x)$ в метрике $L_p[0,1]$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{k=N}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p} = 0. \quad (2)$$

Очевидно, эта теорема при $p \geq 2$ не верна ни для одной ортонормированной системы, а при $1 \leq p < 2$ не верна для систем, состоящих из ограниченных функций. Тем не менее оказывается, что во втором случае, когда $1 \leq p < 2$, существуют ортонормированные системы $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которых имеет место аналог теоремы А одновременно для всех указанных p . Это утверждение получается как следствие сформулированной ниже более общей теоремы 1.

Сначала введем некоторые определения и обозначения, через

$$\{Q_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad (3)$$

мы будем обозначать все алгебраические полиномы с рациональными коэффициентами.

Пересечение классов $L_p[0,1], 1 \leq p < 2$ будем обозначать через H , т. е.

$$H = \bigcap_{1 \leq p < 2} L_p[0,1]. \quad (4)$$

Определение 1. Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных на отрезке $[0,1]$.
 Ряд

$$\sum f_n(x) \quad (5)$$

называется универсальным, относительно частичных рядов в классе $L_p[0,1]$ $0 < p < \infty$, соответственно в классе H , если для любой функции $f(x) \in L_p[0,1]$ (соответственно $f(x) \in H$), из ряда (5) можно выделить частичный ряд

$$\sum f_{n_k}(x) \quad (n_1 < n_2 < \dots < \dots), \quad (6)$$

который сходится к $f(x)$ в метрике L_p , $1 \leq p < 2$ (соответственно в метрике всех пространств L_p ($1 \leq p < 2$)).

Определение 2. Ряд (5) называется универсальным в классе L_p , $1 \leq p < 2$ (соответственно в H), если для любой функции $f(x) \in L_p$ (соответственно $f(x) \in H$), существует последовательность возрастающих натуральных чисел $\{n_k\}$, такая, что подпоследовательность частичных сумм $S_{n_k} = \sum_{j=1}^{n_k} f_j(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике L_p , $1 \leq p < 2$

(соответственно в метрике всех пространств L_p ($1 \leq p < 2$)).

Определение 3. Система функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, определенных на $[0,1]$, называется системой представления в L_p ; $1 \leq p < 2$ соответственно в классе H , если для любой функции $f(x) \in L_p$ (соот. $f(x) \in H$) существует ряд

$$\sum a_k f_k(x), \quad (7)$$

который сходится к $f(x)$ в метрике L_p , $1 \leq p < 2$ (соответственно в метрике всех пространств L_p , ($1 < p < 2$)).

Имеет место

Теорема 1. Существуют ортонормированная на $[0,1]$ система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) \quad (8)$$

обладает следующим свойством:

для любого натурального N ряд

$$\sum_{k>N} a_k f_k(x) \quad (9)$$

является универсальным относительно частичных рядов как в любом фиксированном L_p , $1 \leq p < 2$, так и в H .

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. Существует ортогональный ряд

$$\sum a_k \varphi_k(x), \quad (10)$$

у которого не все коэффициенты a_k , $k = 1, 2, \dots$ равны нулю и который сходится к нулю одновременно во всех метриках L_p , $1 \leq p < 2$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p} = 0 \quad (11)$$

для всех p , $1 \leq p < 2$.

II. При доказательстве теоремы 1 применяются две леммы.

Лемма 1. Существует полная ортонормированная в $L_2[0, 1]$ система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, обладающая следующим свойством:

(B). Для любого натурального N и действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_N , где $\sum_{n=1}^N |a_n| \neq 0$, функция $\sum_{n=1}^N a_n f_n(x) \in L_q$ для всех $q > 2$.

Доказательство. Обозначим

$$\Delta_k = \left[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right] \quad k=1, 2, \dots \quad (12)$$

Легко видеть, что на каждом интервале Δ_k можно определить функцию $\tau_k(x)$; $\tau_k(x) = 0$ при $x \in \Delta_k$. Таковую, что

$$\begin{aligned} \text{а) } & \|\tau_k\|_{L_1} < \frac{1}{k}, \\ \text{б) } & \tau_k(x) \in L_q(\Delta_k) \text{ для всех } q > 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Положим

$$\varphi_k(x) = Q_k(x) + \tau_k(x). \quad (14)$$

Очевидно, система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимо замкнута в $L_2[0, 1]$ и обладает свойством (B). Поэтому система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, полученная ортогонализацией методом Шмидта системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяет требованиям леммы 1.

Лемма 2. Для того, чтобы полная ортонормированная в $L_2[0, 1]$, система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ оставалась замкнутой в L_p , $1 \leq p < 2$, после удаления из нее любого конечного числа функций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (B) при $q = p'$ (где $1/p + 1/p' = 1$, при $p > 1$ и L_2 пространство ограниченных функций).

Доказательство. Необходимость.

Если система $\{f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ замкнута в L_p , $1 \leq p < 2$, то она полна относительно L_p , где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда из предположения

$$\sum_{k=1}^N a_k f_k(x) \in L_p \quad (15)$$

и из того, что

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^N a_k f_k(x) \right) f_n(x) dx = 0; \quad n > N \quad (16)$$

следует

$$\sum_{k=1}^N a_k f_k(x) = 0 \quad (17)$$

и, следовательно

$$a_k=0; k=1, 2 \dots N. \quad (18)$$

Достаточность. Пусть система $\{f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не замкнута в L_p , тогда существует функция $g(x) \neq 0$, $g(x) \in L_p$ для которой

$$\int_0^1 g(x) f_k(x) dx = 0; k > N \quad (19)$$

Так как система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L_2 , то из (19) следует, что

$$g(x) = \sum_{k=1}^N c_k f_k(x) \quad (20)$$

где

$$\sum_{k=1}^N |c_k| \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.

III. Доказательство теоремы 1.

Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная в L_2 ортонормированная система обладает свойством (B) для всех $q > 2$, такая система существует согласно леммы 1. Возьмем последовательность $\{p_k\}$, где

$$1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k \dots \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 2 \quad (21)$$

Определим линейные комбинации

$$h_k(x) = \sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} c_l f_l(x) \quad (22)$$

следующим образом:

положим $m_0 = N + 1$; $m_1 = N + 2$

$$h_1(x) = \sum_{l=m_0+1}^{m_1} c_l f_l(x) = 0. \quad (23)$$

Далее, предположим, что полином $h_k(x) = \sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} c_l f_l(x)$ уже определен.

Согласно лемме 2 найдем полином

$$h_{k+1}(x) = \sum_{l=m_k+1}^{m_{k+1}} c_l f_l(x), \quad (24)$$

который удовлетворяет условию

$$\| Q_{k+1}(x) - h_{k+1}(x) \|_{L_{p_{k+1}}} < \frac{1}{k+1}. \quad (25)$$

Таким образом, определенные нами полиномы $h_k(x)$; $k=1, 2 \dots$ удовлетворяют условию (25) для любого $k \geq 1$. Покажем, что ряд

$$\sum h^k(x) = \sum a_k f_k(x), \quad (26)$$

где

$$f_k(x) = \frac{h_k(x)}{\|h_k\|_{L_1}} \quad \text{и} \quad a_k = \|h_k\|_{L_1} \quad (27)$$

удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Пусть $f(x) \in H$.

Возьмем полином $Q_{n_1}(x)$ такой, что

$$\|f(x) - Q_{n_1}(x)\|_{L_{p_1}} < 1; \quad n_1 > N. \quad (28)$$

Тогда из (25) и (28) следует, что

$$\|f(x) - h_{n_1}(x)\|_{L_{p_1}} < 2. \quad (29)$$

Предположим теперь, что уже определены натуральные числа $N < n_1 < n_2 < \dots < n_k$, для которых

$$\left\| f(x) - \sum_{s=1}^l h_{n_s}(x) \right\|_{L_{p_l}} < \frac{2}{l}; \quad l = 1, \dots, k. \quad (30)$$

Возьмем полином $Q_{n_{k+1}}$ такой, что

$$\left\| f(x) - \sum_{s=1}^k h_{n_s}(x) - Q_{n_{k+1}} \right\|_{L_{p_{k+1}}} < \frac{1}{k+1}. \quad (31)$$

Из (25) и (31) следует, что

$$\left\| f(x) - \sum_{s=1}^{k+1} h_{n_s}(x) \right\|_{L_{p_{k+1}}} < \frac{2}{k+1}. \quad (32)$$

Легко видеть, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} h_{n_s}(x) \quad (33)$$

сходится к $f(x)$ одновременно во всех метриках L_p ; $1 \leq p < 2$. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$; $1 \leq p < 2$. Возьмем k_0 настолько большим, чтобы

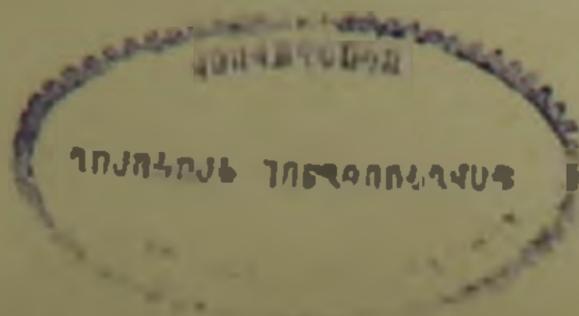
$$1/k < \varepsilon/2; \quad p < p_k \quad \text{при} \quad k > k_0. \quad (34)$$

Из (32) и (34) получаем:

$$\left\| f(x) - \sum_{s=1}^k h_{n_s}(x) \right\|_{L_p} \leq \left\| f(x) - \sum_{s=1}^k h_{n_s}(x) \right\|_{L_{p_k}} < \varepsilon. \quad (35)$$

Аналогично можно доказать, что ряд (26) является универсальным относительно частичных рядов в классе L_p ; $1 \leq p < 2$.

Замечание 1. Легко видеть, что любой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)} f_{\nu(k)}(x)$ (где $\nu(k)$ — перестановка натуральных чисел) также удовлетворяет требованиям теоремы 1.



Замечание 2. Нетрудно видеть, что построенная нами ортонормированная система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ содержит бесконечное множество базисов пространства L_p для любого p ; $1 \leq p < 2$.

Замечание 3. Легко видеть, что как система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, так и ее любая подсистема вида $\{f_k(x)\}_{k=N}^{\infty}$ является системой представления как в классе L_p : $1 \leq p < 2$, так и в классе H .

Применяя метод доказательства теоремы 1 легко установить также следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная в L_2 ортонормированная система, обладающая свойством (B) для всех $p' > 2$. Тогда существует ряд

$$\sum_{k > N} a_k f_k(x), \quad (36)$$

(где N — любое натуральное число), который универсален как в любом фиксированном L_p , $1 \leq p < 2$ так и в H .

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалаю за постановку задач и внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

L_p , $1 \leq p < 2$ դասերի ֆունկցիաների ներկայացումը օրթոգոնալ շարքերով

Կառուցված է օրթոգոնալ շարք, որը յուրաքանչյուր տեղափոխությունից և կամայական վերջավոր թվով անդամներ դուրս դրելուց հետո մնում է ունիվերսալ, ենթաշարքերի նկատմամբ, բոլոր L_p , $1 \leq p < 2$ դասերում միաժամանակ:

Այստեղից հետևում է օրթոնորմալ սիստեմի դոյությունը, որը յուրաքանչյուր տեղափոխությունից և կամայական վերջավոր թվով անդամներ դուրս դրելուց հետո մնում է ներկայացման սիստեմ բոլոր L_p , $1 \leq p < 2$ դասերում միաժամանակ: Իերվում է նաև օրթոնորմալ սիստեմի օրինակ, որը կամայական տեղափոխության դեպքում պարունակում է անվերջ թվով, L_p , $1 \leq p < 2$ դասի, բաղիսներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Талалай. Представление функций классов L_p , $0 < p < 1$ ортогональными рядами. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 21(1-2), pp. 1-9 (1970). ² С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., 1958.

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

С. Г. Рубанович

О сингулярных интегральных уравнениях с разрывными коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 4/VII 1978)

Пусть Z^+ конечная односвязная область в комплексной плоскости, ограниченная гладким контуром l , а Z^- область, дополняющая $Z^+ \cup l$ до полной плоскости. Положительным направлением на l будем считать направление, оставляющее Z^+ слева. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений:

$$Lu(t_0) = A(t_0)u(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_l \frac{u(t)dt}{t-t_0} + \frac{a(t_0)}{2\pi i} \int_l u(t) \ln\left(1 - \frac{t_0}{t}\right) dt + \\ + \frac{b(t_0)}{2\pi i} \int_l u(t) \ln\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) dt + \int_l H(t, t_0)u(t)dt = f(t_0), \quad (1)$$

где $t_0 \in l$, $t \in l$; $u(t) = (u_1(t) \dots u_n(t))$ искомая вектор-функция на l ; $f(t) = (f_1(t) \dots f_n(t))$ заданная вектор-функция на l ; $A(t)$, $B(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $H(t, t_0)$ $n \times n$ — матрицы-функции, причем $\frac{dH(t, t_0)}{dt}$ имеет особенность при $t = t_0$ не выше логарифмического порядка. В (1) под $\ln\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$ соответственно под $\ln\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)$ при заданном $t_0 \in l$ подразумевается ветвь, непрерывная в точках $t \in Z^+ \cup l$ ($t \in Z^- \cup l$) при $t \neq t_0$ и обращающаяся в нуль при $t = 0$ ($t = \infty$). Можно всегда предполагать, что $0 \in Z^+$. Введем обозначения

$$A + B = P(t), \quad A - B = Q(t), \quad a \frac{dt}{ds} = p(t), \quad b \frac{dt}{ds} = q(t),$$

где $\frac{dt}{ds}$ есть производная от точки контура по его длине. Уравнение (1) называется уравнением нормального типа, если $\det P(t) \neq 0$,

$\det Q(t) \neq 0$ всюду на l . Уравнения нормального типа полностью изучены. Мы рассмотрим случай, когда $P(t)$, $Q(t)$, $p(t)$ и $q(t)$ имеют разрывы первого рода в точках t_1, \dots, t_N контура l , а на интервалах l_1, \dots, l_N между точками разрыва бесконечно дифференцируемы. Причем матрицы-функции $P(t)$ и $Q(t)$ на каждом интервале l_m сохраняют постоянные ранги $r_p^{(m)}$ и $r_q^{(m)}$ соответственно, ($r_p^{(m)}$ и $r_q^{(m)}$ могут и не быть равными n), $m=1, \dots, N$. Уравнение (1) назовем нетеровым в классе функций H если однородное уравнение $Lu=0$ имеет конечное число (k_1) линейно независимых решений $u \in H$, а неоднородное с правой частью f , имеющей в точках t_1, \dots, t_N разрывы первого рода и такой, что $\frac{df}{dt} \in H$ на каждом интервале l_m , разрешимо в классе

H тогда и только тогда, когда

$$\int_l (f(t), v_j(t)) dt = 0, \quad j=1, \dots, k_2, \quad (2)$$

$$\sum_{m=1}^N \int_{l_m} \left| (f(t), w_j(t)) + \left(\frac{df}{dt}, \frac{dw_j}{dt} \right) \right| dt, \quad j=1, \dots, k_3, \quad (3)$$

где v_1, \dots, v_{k_2} , w_1, \dots, w_{k_3} некоторые n -мерные вектор-функции. Причем эти условия линейно независимы, т. е. никакая нетривиальная линейная комбинация выражений (2), (3) не обращается в нуль при всех указанных вектор-функциях f . Индексом уравнения (1) назовем число: $\text{ind } L = k_1 - k_2 - k_3$. При исследовании нетеровости уравнения (1) важную роль играют скалярные функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$, определяемые из равенств (при $|\xi| \rightarrow \infty$):

$$\det(\xi P + p) = p_0(t) \xi^{r_p} + o(\xi^{r_p}); \quad \det(\xi Q + q) = q_0(t) \xi^{r_q} + o(\xi^{r_q}) \quad (4)$$

где числа r_p и r_q на каждом интервале l_m совпадают с $r_p^{(m)}$ и $r_q^{(m)}$ соответственно, $m=1, \dots, N$.

1. Случай гладких коэффициентов. (т. е. $N=0$, а $P(t)$ и $Q(t)$ сохраняют на l постоянные ранги r_p и r_q соответственно). Этот случай рассмотрен в (1). Нами получен эквивалентный результат, только проще поддающийся проверке и вычислению:

Теорема 1. Уравнение (1) с гладкими коэффициентами является нетеровым в классе Гельдера с показателем $\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $p_0(t)$ и $q_0(t)$ не обращаются в нуль на контуре l . Причем

$$\text{ind } L = \frac{1}{2\pi} [\arg q_0(t)]_l - \frac{1}{2\pi} [\arg p_0(t)]_l, \quad (5)$$

а в условиях разрешимости уравнения (1) отсутствуют условия вида (3).

Замечание. В теореме 1 класс Гельдера можно заменить на любой разумный класс, в котором сингулярный интеграл непрерывен.

2. Случай разрывных коэффициентов. (Впервые изучался в (2)).

Ввиду трудностей исследования поведения решений в окрестности точек разрыва, будем искать решения уравнения (1) не в классе Гельдера, а в соболевском пространстве H_0 , $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, норма

$\|u\|_0$, в котором определяется следующим образом. Пусть $\tau \in l$ фиксированная точка. Обозначим через $s(t)$ длину дуги $(\tau, t) \subset l$, на которой направление от τ к t совпадает с положительным направлением на l . Положим $\bar{u}(\xi) = \int_{\tau}^{\xi} e^{i(t-\tau)\xi} u(t) ds(t)$. Тогда $\|u\|_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi^\alpha u(\xi)|^2 d\xi$.

Очевидно, $H_0 = L_2(l)$. Как известно, если выполнены условия нормальности, то для исследования решений уравнения (1), изучается жорданова форма матриц $Q^{-1}(t_m+0)P(t_m+0) \times P^{-1}(t_m-0)Q(t_m-0)$, $m = 1, \dots, N$, (2). В нашем случае, вместо этих матриц изучаются матрицы-функции

$$R_m(\xi) = (\xi Q(t_m+0) + q(t_m+0))^{-1} (\xi P(t_m+0) + p(t_m+0)) \times \\ \times (\xi P(t_m-0) + p(t_m-0))^{-1} (\xi Q(t_m-0) + q(t_m-0)), \quad m = 1, \dots, N \quad (6)$$

$$\rho_m(\xi) = (\xi P(t_m-0) + p(t_m-0))^{-1} (\xi Q(t_m-0) + q(t_m-0)) \times \\ \times (\xi Q(t_m+0) + q(t_m+0))^{-1} (\xi P(t_m+0) + p(t_m+0)), \quad m = 1, \dots, N \quad (7)$$

Вместо приведения к жордановой форме, $R_m(\xi)$ и $\rho_m(\xi)$ приводятся к виду:

$$K_m^{-1}(\xi) R_m(\xi) K_m(\xi) = \text{diag} \{ (M_{mj} + O(\xi^{-1}))_{j=0}^{\nu_{mj}-1} + O(\xi^{-3}) \} \quad (8)$$

$$\gamma_m^{-1}(\xi) \rho_m(\xi) \gamma_m(\xi) = \text{diag} \{ (\nu_{mj} + O(\xi^{-1}))_{j=0}^{\nu_{mj}-1} + O(\xi^{-3}) \}, \quad (9)$$

где $K_m(\xi)$ и $\gamma_m(\xi)$ есть $n \times n$ — матрицы-функции, имеющие при $|\xi| \rightarrow \infty$ вид

$$K_m(\xi) = k_m + O(\xi^{-1}), \quad \gamma_m(\xi) = \gamma_m + O(\xi^{-1}) \quad (10)$$

с невырожденными $n \times n$ -матрицами (постоянными) k_m и γ_m . $\text{diag} \{ \dots \}$ означает квадратную блочно-диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят блоки, указанные в фигурных скобках; M_{mj} и M_{mj} невырожденные матрицы (постоянные) размером $n_{mj} \times n_{mj}$ и $\nu_{mj} \times \nu_{mj}$ соответственно, приведенные к жордановой форме. Случай, когда $n_{mj} = 0$ или $\nu_{mj} = 0$ не исключается, в этом случае будем считать, что соответствующий блок отсутствует. Однако, если постоянную матрицу всегда можно привести к жордановой форме, то матрица-функция к виду (8), (9) приводится не всегда. А именно, имеет место следующее утверждение

Лемма 1. Пусть задана $n \times n$ -матрица-функция $R(\xi) = \sum_{j=0}^r \rho_j \xi^j + O(\xi^{-1})$, где ρ_1, \dots, ρ_r некоторые постоянные матрицы.

Тогда существует $n \times n$ -матрица-функция $K(\xi) = k + O(\xi^{-1})$ с невырожденной матрицей k , такая что

$$R(\xi)K(\xi) = (T + O(\xi^{-1})) \text{diag} \{ I_{n_j} \xi^{r-1} \}_{j=0}^r$$

где T $n \times n$ — матрица с линейно независимыми первыми $n-p$ столбцами; I_{n_j} единичная $n_j \times n_j$ — матрица; n_0, \dots, n_r неотрицательные целые числа, однозначно определяемые по $R(\xi)$. Для того, чтобы также существовала $n \times n$ — матрица $\gamma(\xi) = \gamma + O(\xi^{-1})$ с невырожденной матрицей γ , такая, что

$$\gamma^{-1}(\xi)R(\xi)\gamma(\xi) = \text{diag} \{ (M_j + O(\xi^{-1}))\xi^{n_j} \}_{j=0}^r + O(\xi^{-1})$$

где M_j невырожденная $n_j \times n_j$ — матрица, $j=0, \dots, r$, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы T порядков $\sum_{j=0}^r n_j$, $r=0, 1, \dots, r$ были невырожденны.

Заметим, что после умножения на ξ^2 матрицы (6), (7) приобретают вид, рассмотренный в лемме 1 с $r=4$. Поэтому эта лемма полностью решает вопрос о приведении к виду (8) и (9), а алгоритм приведения строится при доказательстве леммы. Нами также выяснена связь между представлениями (8) и (9):

Лемма 2. *Имеют место равенства $n_{mj} = v_{mj}$, $m=1, \dots, N$, $j=0, \dots, 4$. Собственные числа матриц M_{mj} и μ_m совпадают, причем совпадают и кратности этих собственных чисел.*

Нами рассмотрено уравнение (1), для которого имеют место представления (8) и (9) и при каждом $m=1, \dots, N$ матрицы $\|P(t_m+0)|Q(t_m+0)\|$ и $\|P(t_m-0)|Q(t_m-0)\|$ имеют ранг n . Для экономии места мы сформулируем соответствующие результаты лишь в случае, когда коэффициенты уравнения (1) в окрестности точек разрыва кусочно постоянны. Но в конце вкратце укажем, какие изменения будут в общем случае.

Теорема 2. *Пусть скалярные функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$, определяемые из равенств (4), не обращаются в нуль на контуре L , и каждое собственное число λ матрицы M_{mj} , $m=1, \dots, N$, $j=0, \dots, 4$, удовлетворяет неравенству*

$$\arg \lambda \neq 2\pi z + g\pi + \pi \quad (11)$$

где $g=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ при $j=1, 3$, и $g=0, \pm 2, \pm 4, \dots$ при $j=0, 2, 4$.

4. Тогда уравнение (1) нетерово в H_α , $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Замечание. При $j=1, 2, 3$ можно ослабить условия теоремы 2, а именно, потребовать либо выполнения неравенств (11), либо выполнения некоторых простых условий от матриц γ_m и δ_m , определяемых из равенств:

$$(\xi P(t_m-0) + p(t_m-0))^{-1}(\xi Q(t_m-0) + q(t_m-0)) = \gamma_m \xi + \delta_m + O(\xi^{-1}) \quad (12)$$

Тогда условия теоремы 2 становятся также необходимыми, а формула индекса, которую мы получим ниже, не изменится.

Теперь введем числа $\alpha_c^{(m)}$, $m=1, \dots, N$ определяющие вклад разрывов в индекс уравнения (1). Зафиксируем m и произведем следующие построения.

1) Определим формальные элементы $f_\lambda^{c,0}$, где λ комплексное

число j и k неотрицательные целые числа. Обозначим через F линейное пространство конечных формальных сумм всевозможных таких элементов с комплексными коэффициентами. Пусть $\Lambda_{m_1}, \dots, \Lambda_{m_k}$ все жордановы клетки с учетом их кратности матрицы $\text{diag}\{M_{m_j}\}_{j=1}^k$ с собственными числами $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_k}$ соответственно. Обозначим через ρ_{ms} размер клетки Λ_{ms} , $s=1, \dots, \theta$. Каждой клетке Λ_{ms} противопоставим два множества ρ_{ms} -мерных формальных векторов вида

$$U_s = \begin{pmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \\ \vdots \\ u_{s,\rho_{ms}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V_s = \begin{pmatrix} v_{s,1} \\ v_{s,2} \\ \vdots \\ v_{s,\rho_{ms}} \end{pmatrix}$$

с компонентами из F следующим образом.

Пусть λ_{ms} лежит в M_{m_j} . Тогда если $j=1$ и $\text{Im} e^{-2\pi i \lambda_{ms}} > 0$ или $j=2$ и $e^{-2\pi i \lambda_{ms}}$ не есть положительное число, то полагаем

$$u_{s,k} = \sum_{r=0}^{\rho_{ms}-k-1} x_{k+r}^{(s)} f_{r+1}^{(\lambda_{ms}, j)}, \quad k=1, \dots, \rho_{ms}.$$

где $x_{k+r}^{(s)}$ числовые коэффициенты. Если же $j=3$ и $\text{Im} e^{-2\pi i \lambda_{ms}} > 0$, то полагаем

$$v_{s,k} = \sum_{r=0}^{\rho_{ms}-k-1} x_{k+r}^{(s)} f_{r+1}^{(\lambda_{ms}, 3)}, \quad k=1, \dots, \rho_{ms}.$$

В остальных случаях U_s или V_s полагаются равными нулю.

2) Для формальных n -мерных векторов $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_\theta \end{pmatrix}$ и $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_\theta \end{pmatrix}$ равенство $\gamma_m U + \delta_m V = 0$, где матрицы γ_m и δ_m опреде-

ляются из (12), представляет систему уравнений относительно коэффициентов $x_{k+r}^{(s)}$. Число $x_{k+r}^{(s)}$ есть размерность пространства нулей этой системы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$\text{ind } L = \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \left([\arg q_0(t)]_{t_m} - [\arg p_0(t)]_{t_m} - \sum_{s=1}^{\theta} \rho_{ms} \arg \lambda_{ms} \right) + \right. \\ \left. + x_{k+r}^{(s)} + r_0 - n - \frac{n + n_{m_2}}{2} \right\}, \quad (13)$$

где $\arg \lambda_{ms}$ выбирается в интервале $2\pi z - \pi < \arg i < 2\pi z + \pi$; $r_0^{(m)}$ определяется в начале статьи; n_{m_2} размер матрицы M_{m_2} в (8). Число k , условий вида (3) удовлетворяет оценке:

$$k_2 \leq \sum_{m=1}^N (4n - r_p^{(m)} - r_q^{(m)} - 2n_{m_2}). \quad (14)$$

З а м е ч а н и е 1. Если коэффициенты уравнения (1) не кусочно постоянны в окрестности точек разрыва, то к условиям нетеровости добавится условие на производные слева и справа в точках разрыва, а член, зависящий от этих производных добавится к формуле индекса.

З а м е ч а н и е 2. Если условия нормальности не нарушены, то нетрудно проверить, что правая часть в (14) обращается в нуль, а (13) обращается при $\alpha = 0$ в известную формулу индекса в пространстве L_2 .

З а м е ч а н и е 3. В случае, если в точках t_1, \dots, t_N коэффициенты фактически не терпят разрывов, то $k_2 = \sum_{m=1}^N (2n - r_p^{(m)} - r_q^{(m)})$.

Этому же числу равна правая часть в (14) и на столько же отличаются формулы (5) и (13). В этом случае условия (3) являются условиями на скачки вектор-функции f в точках t_1, \dots, t_N .

Ереванский политехнический институт

II. Գ. ՌՈՒՐԱՆՈՎԻՉ

Խզվող գործակիցներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մասին

Հոդվածում զիտարկվում է կոմպլեքս հարթության ողորկ l կոնտուրի վրա (1) հավասարումը: Դործակիցներ A, B, a, b հանդիսանում են $n \times n$ — մատրից-ֆունկցիաները, $u = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ որոնելի վեկտոր-ֆունկցիան է, իսկ $f = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ հայտնի վեկտոր-ֆունկցիան է: Այս հավասարման համար մտցվում է նյութերութիան հասկացողութունը այն դեպքում, երբ նորմալութիան պայմանները $\det(A(t) + B(t)) \neq 0$, $\det A(t) - B(t) \neq 0$, խախտվում են, իսկ գործակիցները ունեն t_1, \dots, t_N խզման կետեր: Աշխատանքում ստացված են (1) հավասարման նյութերութիան պայմանները հաշված է նրա ինդեքսը (բանաձև (13)):

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ե Լ Ե Ր Յ Ո Ւ Ն

1 Н. Е. Томасян, Дифференциальные уравнения, т. 3, вып. 1 (1967) 2 С. Г. Рыбакович, «Известия АН Арм. ССР», т. 7, №№ 2, 3 (1972) 3 Н. П. Веква, Системы сингулярных интегральных уравнений, изд. «Наука», М., 1970.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. М. Гюлумян, К. М. Мосесян

О критических по числу вершинного k -разбиения графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 30/VII 1978)

Всюду под словом „граф“ будем понимать конечный неориентированный граф, без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения не определяемые здесь, можно найти в (1).

В настоящей работе обобщаются теорема Дирака (2) и результаты работ (3,4) на случай покрытия вершин графа k -вырожденными подграфами (5).

Граф $G = (V, X)$ называется k -вырожденным, если минимальная степень любого его подграфа меньше k . Числом $\alpha_k(G)$, $k \geq 1$, вершинного k -разбиения графа G называется наименьшее число k -вырожденных подграфов, покрывающих $V(G)$. В частности, $\alpha_1(G)$ — хроматическое число, $\alpha_2(G)$ — число вершинной древесности графа G .

Граф G назовем (v, k) -критическим, если G — не содержит изолированных вершин, $\alpha_k(G) = v$ и для любого ребра $x \in X(G)$ имеет место $\alpha_k(G-x) \leq v-1$.

Теорема 1. Для существования (v, k) -критического ($v \geq 4$ при $k = 1$, $v \geq 3$ при $k \geq 2$) p -вершинного графа необходимо и достаточно, чтобы имело место $p \geq k(v-1) + 1$ и $p \neq k(v-1) + 2$.

Необходимость. Пусть $G = (V, X)$ является (v, k) -критическим графом. Очевидно, $p(G) \geq k(v-1) + 1$. Покажем, что $p(G) \neq k(v-1) + 2$.

Предположим обратное, то есть $p(G) = k(v-1) + 2$. Так как в любом (v, k) -критическом графе для всякой вершины $v \in V(G)$ степень $p(v) \geq k(v-1)$, то $k(v-1) + 2 = p(G) \geq 2k(v-1) - x(G) + 2$, где $x(G)$ — связность графа G . Следовательно, $x(G) \geq k(v-1)$. Легко заметить, что $x(G) = k(v-1)$, то есть существует разрез $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{k(v-1)}\} \subset V(G)$ такой, что всякая вершина из множества $\{v_1, v_2\} = V(G) \setminus Y$ смежна со всеми вершинами из Y . Значит подграф $\langle Y \rangle$ графа G , порожденный множеством вершин Y , не является полным и, следовательно, существует $Y_1 \subset Y$ такое, что $\langle Y_1 \rangle$ является $(k+1)$ -вершинным k -вырожденным. С другой стороны, $p(\langle V(G) \setminus Y_1 \rangle) =$

$= k(v-2) + 1$ и так как $(v_1, v_2) \in X(G)$, то $\alpha_k(\langle V(G) \setminus Y_1 \rangle) = v-2$. Следовательно, $\alpha_k(G) = v-1$, что противоречит условию (v, k) -критичности графа G .

Достаточность. Пусть $p = k(v-1) + 1 + 2t$, где $t = 0, 1, 2, \dots$. Докажем, что p -вершинный граф

$$W^{k(v-1)-2, 2t+3} = K_{k(v-1)-2} + C_{2t+3},$$

где K_l — l -вершинный полный граф, C_m — m -вершинный простой цикл, является искомым.

Так как $\alpha_k(G) \geq \left\lfloor \frac{\alpha_1(G)}{k} \right\rfloor$ для любого графа G , то $\alpha_k(W^{k(v-1)-2, 2t+3}) \geq$

$\geq v$. Остается показать, что $\alpha_k(W^{k(v-1)-2, 2t+3} - x) \leq v-1$ для любого ребра $x \in X(W^{k(v-1)-2, 2t+3})$.

При $k \geq 3$, $x \in X(K_{k(v-1)-2})$ включим x в $K_{k(v-2)+1}$ и граф $W^{k(v-1)-2, 2t+3}$ представим в виде соединения $K_{k(v-2)+1} + W^{k-3, 2t+3}$. Тогда $\alpha_k(W^{k(v-1)-2, 2t+3} - x) \leq \alpha_k(K_{k(v-2)+1} - x) + \alpha_k(W^{k-3, 2t+3}) = v-1$.

При $k \geq 3$, $x \in X(K_{k(v-1)-2})$ включим x в $W^{k-2, 2t+3}$ и граф $W^{k(v-1)-2, 2t+3}$ представим в виде соединения $K_{k(v-2)} + W^{k-2, 2t+3}$. Легко заметить, что $\alpha_k(K_{k(v-2)}) = v-2$, $\alpha_k(W^{k-2, 2t+3} - x) = 1$. Следовательно, вновь $\alpha_k(W^{k(v-1)-2, 2t+3} - x) \leq v-1$.

Очевидно, $W^{k(v-1)-2, 2t+3}$ является (v, k) -критическим и при $k = 1, 2$.

Пусть теперь $p = k(v-1) + 4 + 2t$, где $t = 0, 1, 2, \dots$. Докажем, что искомым графом будет p -вершинный граф

$$G^{k, v, t} = K^t + K_{k(v-1)-3},$$

где

$$V(K^t) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2t+7}\},$$

$$X(K^t) = \left\{ \bigcup_{i=2}^3 ((v_1, v_i) \cup (v_5, v_i)) \cup (v_1, v_6) \cup (v_1, v_{2t+7}) \cup (v_2, v_3) \cup \bigcup_{i=5}^{2t+7} (v_i, v_i) \cup \bigcup_{i=6}^{2t+6} (v_i, v_{i+1}) \right\}.$$

Аналогично предыдущему случаю, легко подсчитать, что $\alpha_k(G^{k, v, t}) \geq v$. Пусть $k \geq 3$ и $x = (ab)$ — произвольное ребро графа $G^{k, v, t}$. Покажем, что $\alpha_k(G^{k, v, t} - x) \leq v-1$. Возможны следующие случаи:

1. $x \in X(K^t)$,
2. $x \in X(K_{k(v-1)-3})$,
3. $a \in V(K^t)$, $b \in V(K_{k(v-1)-3})$.

В случае 1, очевидно $\alpha_k(K^t + K_{k(v-1)-3} - x) = 1$, а для оставшейся непокрытой части $K_{k(v-2)}$ рассматриваемого графа, $\alpha_k(K_{k(v-2)}) = v-2$. Поэтому $\alpha_k(G^{k, v, t} - x) \leq v-1$.

Пусть $k = 3$. В случае 2 имеем $\alpha_3(K^t - v) = 1$, $\alpha_3((K_{3(v-2)} + K_1) - x) = v-2$, где $V(K_1) = \{v\} \subset V(K^t)$. Значит, $\alpha_3(G^{3, v, t} - x) \leq v-1$. Если же имеет место случай 3, то в качестве v выбираем ту вершину из K^t , которая смежна ребру x , и рассуждаем аналогичным образом.

Пусть $k \geq 4$. В случае $x \in X(K_{k(v-1)-3})$ включим x в $K_{k(v-2)+1}$ и граф $G^{k,v}$ представим в виде соединения $(K^l + K_{k-1}) + K_{k(v-2)+1}$. Легко заметить, что $\alpha_k(G^{k,v} - x) \leq \alpha_k(K^l + K_{k-1}) + \alpha_k(K_{k(v-2)+1} - x) = v - 1$. Наконец, пусть $a \in V(K^l)$, $b \in V(K_{k(v-1)-3})$. Тогда вершины a и b включим в $K_{k(v-2)+1}$ и граф $G^{k,v}$ представим в виде соединения $K_{k(v-2)+1} + ((K^l - a) + K_1) + K_{k-1}$, где $V(K_1) \subseteq V(K_{k(v-2)+1}) \cup V(K^l - a)$. Не трудно проверить, что при этом $\alpha_k(K_{k(v-2)+1} - (ab)) = v - 2$, $\alpha_k(((K^l - a) + K_1) + K_{k-1}) = 1$. Следовательно, $G^{k,v}$ является (v, k) -критическим графом при $k \geq 3$.

$(v, 1)$ -критичность графа $G^{k,v}$ очевидна. Рассмотрим случай $k = 2$, которому посвящена работа (4). Покажем $(3, 2)$ -критичность графа $K^l + K_1$. Пусть $V(K_1) = |v|$, $x = (v v_1)$ (соответственно $x = (v v_4)$). Очевидно, подграфы графа $K^l + K_1 - x$, порожденные вершинами v, v_1, v_2, v_4 (соответственно вершинами v, v_1, v_3, v_4) и порожденные остальными вершинами графа $K^l + K_1 - x$, являются 2-вырожденными. Если же $x \in X(K^l + K_1) \setminus \{(v v_1), (v v_4)\}$, то легко заметить, что $\alpha_2(K^l + K_1 - x) = 2$. Так как $\alpha_1(K^l + K_1) = 5$ и

$$\alpha_2(K^l + K_1) > \left\lfloor \frac{\alpha_1(K^l + K_1)}{2} \right\rfloor = 3, \text{ то } (3, 2)\text{-критичность графа } K^l + K_1$$

доказана. Пользуясь этим свойством графа $K^l + K_1$ и представлением $G^{2,v} = (K^l + K_1) + K_{2(v-3)}$, легко убедиться в $(v, 2)$ -критичности графа $G^{2,v}$.

Все случаи исчерпаны, теорема доказана.

Очевидно, $(3, 1)$ -критические графы — суть простые циклы нечетной длины, а K_2 — единственный $(2, 1)$ -критический граф. На вопрос существования $(2, k)$ -критических графов отвечает следующая

Теорема 2. Для существования $(2, k)$ -критического p -вершинного графа необходимо и достаточно, чтобы имело место $p \geq k + 1$.

Действительно, достаточно рассмотреть граф $\overline{K_{k-2}} + C_{p-k+2}$.

Вычислительный центр

Академии наук Армянской ССР и

Ереванского государственного университета

ՈՒՄԱՆԻԿԱՆ ԳՐԱԳՐԱՐԱՆ, Կ. Մ. ՄՈՍԿՈՎԱ

Ըստ գաղափարյի k -տրոհման բվի կրիտիկական
գրաֆների մասին

Դիտարկում են վերջավոր գրաֆներ, առանց գաղափար կողերի և հան-
գույցների:

Ներկա աշխատանքում ընդհանրացվում են Դիրակի թեորեմը (2) և
գրաֆի դադաթները k -ալլասերված ենթագրաֆների մասին, զեպրի հա-
մար (2A) աշխատանքների արդյունքները:

Գրաֆը կոչվում է k -ալլասերված, եթե նրա ցանկացած ենթադրաֆի մինիմալ աստիճանը փոքր է k -ից: Իրաֆի դազաթային k -տրոհման թիվ՝ $\alpha_k(G)$, $k \geq 1$, կոչվում է դազաթների $V(G)$ բազմությունը ժամկող k -ալլասերված ենթադրաֆների նվազագույն թիվը: G գրաֆը կանվանենք (ν, k) -կրիտիկական, եթե G -ն չի պարունակում մեկուսացված դազաթներ:

$\alpha_k(G) = \nu$ և ցանկացած $x \in X(G)$ կողի համար տեղի ունի $\alpha_k(G-x) \leq \nu - 1$:

Թեորեմ 1. Որպեսզի գոյություն ունենա (ν, k) -կրիտիկական ($\nu \geq 4$ երբ $k = 1$, $\nu \geq 3$, երբ $k \geq 2$) p -զազաթանի գրաֆ, անհրաժեշտ է և բավարար. որպեսզի տեղի ունենա $p \geq k(\nu - 1) + 1$ և $p \neq k(\nu - 1) + 2$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ф. Харари, Теория графов, „Мир“, М., 1973. ² O. Ore, The four-color problem, Academic press, New York, London, 189—191, 1967. ³ H. V. Kronk, J. Mitchem, Critical point-arboritic graphs, J. London Math. Soc., 9, No. 3, 459—466, 1975. ⁴ B. Bollobas, F. Harary, Point arboritically critical graphs exist, J. London Math. Soc., 12, No. 1, 97—102, 1975. ⁵ D. R. Link, A. T. White, k-degenerate graphs, Canad. J. Math., 22, 1082—1096, 1970.

УДК 519.18

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

О группах полулинейных преобразований

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 6/X 1978)

Полулинейные преобразования впервые рассматривались в работах Сегре для линейных пространств.

В дальнейшем, с одной стороны изучались группы (и полугруппы) полулинейных преобразований линейных пространств, модулей и близких к ним алгебр, а с другой — категории полулинейных соответствий (вычисляются радикалы, многообразия и бимногообразия в таких категориях).

В работе (1) рассматриваются некоторые вопросы общей теории полулинейных соответствий в рамках универсальных алгебр. Заметим еще следующий факт. Как отмечает А. Н. Мальцев (2) детальная разработка теории языка второй степени представляется одной из центральных задач алгебры и логики. А при исследовании выполнимости формул второй степени, как правило, возникают алгебры (или модели) с разными системами операций (предикатов). Иначе говоря, формулы второй степени порождают многообразия, или аксиоматизируемые классы алгебр (моделей) с разными системами операций (предикатов). Здесь возникают морфизмы — как пары согласованных отображений (полулинейные соответствия универсальных алгебр и моделей).

Известно, что группа полулинейных преобразований линейного пространства расщепляема. Это замечание Бэра остается в силе для любых свободных (в категории полулинейных соответствий) алгебр, а также и для их производных алгебр. Более того, этот факт справедлив для любых универсальных алгебр, обладающих (в категории полулинейных соответствий) базой в смысле Марчевского (а также и для их производных алгебр). Иначе говоря, группа $\text{Aut} M$ полулинейных преобразований обладает полупрямым разложением:

$$\text{Aut} M = \text{Aut}^{(0)} M \rtimes H,$$

где $\text{Aut}^{(0)} M$ — группа линейных преобразований (т. е. группа обычных автоморфизмов!). Однако вопрос о прямом разложении

$$\text{Aut} M = \text{Aut}^{(0)} M \times H$$

остается еще не исследованным.

Полулинейное преобразование модуля $M = \langle Q(+); R(+, \cdot) \rangle$ определяется как пара $(\varphi, \bar{\psi})$ отображений $\varphi \in \text{Aut} Q$, $\bar{\psi} \in \text{Aut} R$ с условием

$$\varphi(z \cdot x) = \bar{\psi}(z) \cdot \varphi(x)$$

для любых $x \in Q$, $z \in R$.

Множество всех полулинейных преобразований модуля M образует группу $\text{Aut} M$. Полулинейные преобразования вида $(\varphi, \bar{\epsilon})$, где $\bar{\epsilon}$ — тождественное отображение, образуют группу $\text{Aut}^{(0)} M$. Это есть группа линейных преобразований модуля M и

$$\text{Aut}^{(0)} M \leq |\text{Aut} M.$$

Если свободный модуль M определен над кольцом R со свойством $\text{Aut} R \neq (\bar{\epsilon})$, то $\text{Aut} M \neq \text{Aut}^{(0)} M$ и справедливо равенство

$$\text{Aut} M \cong \text{Aut}^{(0)} M \rtimes \text{Aut} R.$$

Для одного класса циклических модулей сформулируем следующий результат.

Предложение. Если аддитивная часть модуля M есть циклическая группа и каждый ее ненулевой элемент обладает нулевым аннулятором, то $\text{Aut} M = \text{Aut}^{(0)} M$.

Доказательство. Пусть $M = \langle Q(+); R(+, \cdot) \rangle$, $\text{Ann}(x) = 0$ для любого $x \in Q$, $x \neq 0$ и $a \in Q$ — образующий элемент. Если $(\varphi, \bar{\psi}) \in \text{Aut} M$, то для любых ненулевых $y \in Q$ и $r \in R$ имеем

$$\begin{aligned} y &= ma, \\ ra &= na, \\ za &= la, \end{aligned}$$

$\varphi(ry) = \varphi[r(ma)] = \varphi[m(ra)] = \varphi(mna) = mnza = mnl a = mlra = rml a$, где $m, n, l \in Z$. Одновременно:

$$\varphi(ry) = \bar{\psi} r \varphi y = \bar{\psi} r \varphi(ma) = \bar{\psi} r(m\varphi a) = \bar{\psi} rml a,$$

и потому

$$rml a = \bar{\psi} rml a,$$

$$(r - \bar{\psi} r)ml a = 0.$$

Если циклическая группа $Q(+)$ бесконечна, то $ml a \neq 0$ и, следовательно, $r = \bar{\psi} r$. Если же циклическая группа $Q(+)$ — конечного порядка $|Q| = s$, то нетрудно заметить, что $\text{НОД}(s, l) = 1$. Следовательно и здесь $ml a \neq 0$, поскольку $m < s$. Таким образом $\bar{\psi} = \bar{\epsilon}$.

Следствие 1. Если аддитивная часть модуля M есть бесконечная циклическая группа и некоторый ее элемент обладает нулевым аннулятором, то $\text{Aut} M = \text{Aut}^{(0)} M$.

Следствие 2. Если аддитивная часть модуля M есть циклическая группа простого порядка и некоторый ее элемент обладает нулевым аннулятором, то $\text{Aut} M = \text{Aut}^{(0)} M$.

Будем говорить, что группа $\text{Aut}^{(0)}M$ обладает нормальным дополнением, если она обладает дополнением в решетке всех нормальных подгрупп группы $\text{Aut}M$. Иначе говоря, группа H является нормальным дополнением группы $\text{Aut}^{(0)}M$, если и только если:

$$H \leq \text{Aut}M, \text{Aut}M = H \cdot \text{Aut}^{(0)}M, H \cap \text{Aut}^{(0)}M = (\epsilon)$$

Каждое нормальное дополнение группы $\text{Aut}^{(0)}M$, для свободного модуля M (определенного над кольцом R), изоморфно группе $\text{Aut}R$.

Лемма. Для линейного пространства M , определенного над телом F , группа $\text{Aut}^{(0)}M$ не обладает нетривиальным нормальным дополнением.

Если H — нормальное дополнение группы $\text{Aut}^{(0)}M$ и $(\varphi, \bar{\psi}) \in H$, то для любого линейного преобразования вида

$$\varphi^\lambda(x) = \lambda x, \lambda \in F$$

справедливо равенство

$$\varphi \varphi^\lambda = \varphi^\lambda \varphi;$$

Откуда и вытекает равенство $\bar{\psi}(\lambda) = \lambda$ для любого $\lambda \in F$.

Для каждого автоморфизма $\bar{\psi} \in \text{Aut}F$ определим морфизм $\varphi_{\bar{\psi}} \in \text{Aut}Q$ по правилу:

$$\varphi_{\bar{\psi}}(x) = \bar{\psi}(\xi_1)e_1 + \dots + \bar{\psi}(\xi_n)e_n,$$

где $x = \xi_1e_1 + \dots + \xi_ne_n$ и совокупность $\{e_i\}_{i \in I}$ — база.

Теорема. Пусть пространство M определено над полем и группа ее линейных преобразований совпадает с группой всех подобий. Если

$$\text{Aut}M \cong \text{Aut}^{(0)}M \times G$$

для некоторой нетривиальной группы G , то существует нетривиальная группа H такая, что

$$\text{Aut}^{(0)}M \cong \text{Aut}^{(0)}M \times H.$$

Доказательство. По предположению существуют нормальные подгруппы $\overline{\text{Aut}^{(0)}M} \leq \text{Aut}M$ и $\bar{G} \leq \text{Aut}M$ такие, что $\overline{\text{Aut}^{(0)}M} \cong \text{Aut}^{(0)}M, \bar{G} \cong G, \bar{G} \cap \overline{\text{Aut}^{(0)}M} = (\epsilon), \text{Aut}M = \bar{G} \cdot \overline{\text{Aut}^{(0)}M}$.

Можно предполагать, что:

$$\overline{\text{Aut}^{(0)}M} = \{\varphi^{\lambda_1}, \dots, \varphi^{\lambda_l}, \dots, (\varphi_1, \bar{\psi}_1), \dots, (\varphi_j, \bar{\psi}_j), \dots, 1\},$$

$$\bar{G} = \{\varphi^{\lambda^{(1)}}, \dots, \varphi^{\lambda^{(k)}}, \dots, (\varphi^{(1)}, \bar{\psi}^{(1)}), \dots, (\varphi^{(l)}, \bar{\psi}^{(l)}) \dots, 1\}.$$

Сперва покажем, что каждое линейное преобразование $\varphi^\lambda, \lambda \neq 0$, обладает представлением

$$\varphi^\lambda = \varphi^{\lambda^{(i)}} \cdot \varphi^{\lambda^{(j)}}, \text{ где } \varphi^{\lambda^{(i)}} \in \overline{\text{Aut}^{(0)}M}, \varphi^{\lambda^{(j)}} \in \bar{G}.$$

Разберем все четыре возможные случая:

1. $\varphi^\lambda = \varphi^{\lambda_1} \cdot (\varphi^{(1)}, \bar{\psi}^{(1)})$,
2. $\varphi^\lambda = (\varphi_j, \bar{\psi}_j) \cdot \varphi^{\lambda^{(1)}}$,
3. $\varphi^\lambda = (\varphi_j, \bar{\psi}_j) \cdot (\varphi^{(1)}, \bar{\psi}^{(1)})$,
4. $\varphi^\lambda = \varphi^{\lambda_1} \cdot \varphi^{\lambda^{(s)}}$;

Первые два случая с очевидностью отпадают. Покажем, что третий случай также не реален. Если

$$\varphi^\lambda = (\varphi_j, \bar{\psi}_j) \cdot (\varphi^{(1)}, \bar{\psi}^{(1)}),$$

то $\bar{\psi}^{(1)} = \bar{\psi}_j^{-1}$ и $(|\varphi^{(1)}|^{-1}, \bar{\psi}_j) \in \bar{G}$. Поскольку $(\varphi_j, \bar{\psi}_j) \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M$, то

$$(\varphi^\lambda, \varepsilon)(\varphi_j, \bar{\psi}_j)(|\varphi^\lambda|^{-1}, \varepsilon) =$$

$$= (\varphi_j \varphi_j (\varphi^\lambda)^{-1}, \bar{\psi}_j) = (\varphi_j \varphi_j \varphi^{\lambda^{-1}}, \bar{\psi}_j) = (\varphi_j \varphi^{\lambda^{-1}} \bar{\psi}_j^\lambda, \bar{\psi}_j) \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M$$

и следовательно, $\varphi^{\lambda^{-1}} \bar{\psi}_j^\lambda \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M$.

Аналогичным путем, исходя из условий $(|\varphi^{(1)}|^{-1}, \bar{\psi}_j) \in \bar{G}, \in |\text{Aut} M$, получаем $\varphi^{\lambda^{-1}} \bar{\psi}_j^\lambda \in \bar{G}$.

Таким образом,

$$\varphi^{\lambda^{-1}} \bar{\psi}_j^\lambda \in \bar{G} \cap \overline{\text{Aut}}^{(0)} M$$

и потому

$$\varphi^{\lambda^{-1}} \bar{\psi}_j^\lambda = \varepsilon,$$

$$\lambda^{-1} \bar{\psi}_j^\lambda = 1$$

$$\bar{\psi}_j^\lambda = \lambda,$$

т. е. $\bar{\psi}_j = \varepsilon$. Противоречие!

Теперь мы заключаем:

$$\varphi^\lambda = \varphi^{\lambda_1} \cdot \varphi^{\lambda^{(s)}},$$

где

$$\varphi^{\lambda_1} \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M, \varphi^{\lambda^{(s)}} \in \bar{G}.$$

Далее устанавливается, что все элементы группы $\overline{\text{Aut}}^{(0)} M$ являются на самом деле линейными преобразованиями, т. е. если

$$(\varphi_j, \bar{\psi}_j) \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M, \text{ то } \bar{\psi}_j = \varepsilon.$$

Для $\lambda \neq 0$, если $\varphi^\lambda \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M$, то

$$\varphi^\lambda \varphi_j = \varphi_j \varphi^\lambda,$$

$$\varphi_j(\lambda x) = \varphi'(\varphi_j x),$$

$$\bar{\psi}_j(\varphi_j x) = \lambda \varphi_j x,$$

$$\bar{\psi}_j(\lambda) = \lambda.$$

Если же $\varphi' \in \bar{G}$, то

$$(\varphi_j, \bar{\psi}_j) \varphi' (\varphi_j^{-1}, \bar{\psi}_j^{-1}) = \varphi_j \varphi' \varphi_j^{-1} \in \bar{G}.$$

С другой стороны, существует линейное преобразование φ' , $\gamma \neq 0$, такое, что

$$\varphi_j = \varphi_{\bar{\psi}_j} \cdot \varphi'.$$

Следовательно, если $\varphi' \in \bar{G}$, то

$$\varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} \varphi' \varphi'^{-1} (\varphi')^{-1} \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} = \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} \varphi' \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} = \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} \in \bar{G}.$$

Одновременно, из соотношения $(\varphi_j, \bar{\psi}_j) \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M$ следует

$$\varphi^{\lambda} \cdot (\varphi_j, \bar{\psi}_j) \cdot \varphi'^{-1} = (\varphi^{\lambda} \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} \varphi'^{-1} \varphi^{\lambda^{-1}}, \bar{\psi}_j) \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M,$$

$$\varphi^{\lambda} \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} \varphi'^{-1} \varphi^{\lambda^{-1}} \varphi'^{-1} \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} = \varphi^{\lambda} \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} \varphi'^{-1} \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} = \varphi^{\lambda} \bar{\psi}_j^{-1} (\lambda^{-1}) \in \overline{\text{Aut}}^{(0)} M.$$

Из ранее доказанного факта $\varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} \in \bar{G}$ вытекает $\varphi^{\lambda} \bar{\psi}_j^{-1} (\lambda^{-1}) \in \bar{G}$ и потому

$$\varphi^{\lambda} \bar{\psi}_j^{-1} (\lambda^{-1}) = \varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} (\lambda^{-1}) \cdot \varphi^{\lambda} \in \bar{G}.$$

Таким образом:

$$\varphi^{\lambda} \bar{\psi}_j^{-1} (\lambda^{-1}) \in \bar{G} \cap \overline{\text{Aut}}^{(0)} M$$

и потому

$$\varphi^{\lambda} \bar{\psi}_j^{-1} (\lambda^{-1}) = \varepsilon,$$

$$\lambda \bar{\psi}_j^{-1} (\lambda^{-1}) = 1,$$

$$\bar{\psi}_j^{-1} (\lambda^{-1}) = \lambda^{-1},$$

$$\bar{\psi}_j^{-1} (\lambda) = \lambda,$$

$$\bar{\psi}_j (\lambda) = \lambda.$$

В общем случае, поскольку $\varphi^{\lambda} = \varphi^{\lambda_1} \cdot \varphi^{\lambda^{(s)}}$, имеем:

$$\bar{\psi}_j (\lambda) = \bar{\psi}_j (\lambda_1 \cdot \lambda^{(s)}) = \bar{\psi}_j (\lambda_1) \cdot \bar{\psi}_j (\lambda^{(s)}) = \lambda_1 \cdot \lambda^{(s)} = \lambda.$$

Иначе говоря, все элементы группы $\overline{\text{Aut}}^{(\omega)} M$ являются линейными преобразованиями.

С другой стороны из предыдущей леммы следует, что линейная часть H группы \overline{G} не является одноэлементной.

Следствие. Если $\varphi \in \overline{\text{Aut}}^{(\omega)} M$, то для любого автоморфизма $\bar{\psi} \in \text{Aut} F$ справедливо равенство $\bar{\psi}(\lambda) = \lambda$.

Ереванский государственный
университет

Յու. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Կիսագծային ձևափոխությունների խմբերի վերաբերյալ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է կիսագծային ձևափոխությունների խմբերի ձեղքման հարցը՝ ըստ ուղիղ և կիսաուղիղ արտադրյալի և նաև մոդուլների մի դաս, որոնց համար գծային և կիսագծային ձևափոխությունների խմբեր համընկնում են:

ЛИТЕРАТУРА — ՓՐԱՇԱԿՆԵՐՔՆԵՐ

- ¹ Ю. М. Мовсисян, «Известия АН Арм. ССР», сер. «Математика», т. XI, № 6 (1976). ² А. И. Мальцев, Труды 4-го Всесоюзного мат. съезда, Л., I, 169—198, (1963).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. А. Барсегян

О дефектах и росте мероморфных функций конечного нижнего порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 20/X 1978)

1. В 1939 г. Тейхмюллер обнаружил ⁽¹⁾, что для некоторых классов мероморфных функций, помимо соотношения дефектов $\sum_{(a)} \delta(a) \leq 2^*$ выполняется также соотношение $\sum_{(a)} \delta^{1/2}(a) < \infty$. Хейман показал ⁽²⁾, что для мероморфной в $|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка ряд $\sum_{(a)} \delta^{1/\beta}(a)$ может расходиться, если $\epsilon > 0$. Усиливая результаты ряда работ (обзор их см. в ⁽³⁾), Вейцман доказал ⁽⁴⁾, что для мероморфной в $|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка ряд $\sum_{(a)} \delta^{1/3}(a)$ сходится. Поскольку показатель $\frac{1}{3}$ не может быть уменьшен, результат Вейцмана имеет окончательный характер.

В ряде работ В. П. Петренко изучает распределение величины

$$\beta(a) = \beta(a, \omega) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \ln \frac{1}{|\omega(z) - a|}}{T(r)}$$

$$\beta(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \ln |\omega(z)|}{T(r)}$$

для мероморфных в $|z| < \infty$ функций $\omega(z)$. Величины $\beta(a)$ характеризуют минимальное отклонение $\omega(z)$ от a , в то время как $\delta(a) =$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|\omega(re)^{i\varphi} - a|} d\varphi}{T(r)}$$

характеризуют среднее отклонение $\omega(z)$ от a .

* Мы пользуемся стандартными в теории распределения значений обозначениями ⁽²⁾.

В частности В. П. Петренко получил ⁽³⁾ следующий результат, который мы приводим здесь в удобном для нас компактном виде: Для мероморфной в $|z| < \infty$ функции нижнего порядка $\lambda, (0 < \lambda < \infty)$ и $\varepsilon, (0 < \varepsilon < 1)$ справедлива оценка

$$\sum \frac{\beta^{1/2}(a)}{\ln^{1/2+\varepsilon} \frac{1}{\beta(a)}} < \infty.$$

Он также показал, что ряд $\sum_{(a)} \beta^{1/2-\varepsilon}(a)$ может расходиться, если $\varepsilon > 0$.

Вопрос о сходимости ряда $\sum_{(a)} \beta^{1/2}(a)$ до сих пор оставался открытым.

Пользуясь методами доказательства теорем, анонсированных в ⁽⁵⁾ и теорией поверхностей наложения Л. Альфорса, нами получен результат, из которого следует сходимость ряда $\sum_{(a)} \beta^{1/2}(a)$ и одновременно ряда $\sum_{(a)} \delta^{1/3}(a)$.

Теорема 1. Пусть $w(z)$ мероморфная в $|z| < \infty$ функция конечного нижнего порядка $\lambda; a_i \in \mathbb{C}, (i=1, 2, \dots, q)$ — конечный набор попарно различных комплексных значений; $\beta(a_i) > 0, (i=1, 2, \dots, q)$; 2ρ — минимальное расстояние между точками a_i ; J_i — тот из интервалов $\varphi_i < \varphi < \varphi_i$, в котором $|w(re^{i\varphi}) - a_i| < \min(\rho, 1)$ и в котором достигается $\max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a_i|}$; $|J_i| = \varphi_i - \varphi_i$. Тогда существует такая постоянная K , зависящая только от λ . ($K < \infty$ при $\lambda < \infty$), что неравенство

$$\sum_{i=1}^q \frac{\max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a_i|}}{|J_i|} \leq K T(r) \quad (1)$$

выполняется на некотором неограниченном множестве значений r . Из (1) и неравенства Коши-Буняковского вытекает

Следствие 1. Для мероморфной в $|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка выполняется

$$\sum_{(a)} \beta^{1/2}(a) < \infty.$$

Пусть $m_\rho(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{J_i} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a_i|} d\varphi$, где $J_i = \{z: |z| = r, |w(z) - a_i| \leq \min(\rho, 1)\}$; $|J_i|$ — мера J_i очевидно $m(r, a) = m_\rho(r, a) + 0$ (1)

$$n \frac{m(r, a_i) + o(1)}{|J_i|^2} \leq \frac{m_p(r, a_i)}{|J_i| |J_i|} \leq \frac{\max_{|z|=r} \ln \frac{1}{|\psi(z) - a_i|}}{|J_i|}$$

Теперь из (1) и (2) и неравенства Гёльдера вытекает Следствие 1 (Вейцман). Для мероморфной $b|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка выполняется

$$\sum_{(a)} \delta^{1/3}(a) < \infty.$$

11. В сборнике нерешенных задач Хеймана (7) приводится следующий вопрос Винклера: Пусть $\psi(z)$ — целая функция (достаточно большого порядка) с $n \geq 2$ разными асимптотическими значениями $a_k, (k=1, 2, \dots, n)$, Γ_k — асимптотическая линия, на которой $\psi(z) \rightarrow a_k, n(r, a_k, \Gamma_k)$ — количество a_k — точек, лежащих на Γ_k и в $|z| \leq r$.

1) Можно ли найти такую функцию, что $b_k \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a_k, \Gamma_k)}{n(r, a_k)} > 0$ для $k=1, 2, \dots, n$ 2) Можно ли взять $b_k = 1, k=1, 2, \dots, n$.

Вопрос 1 и 2 можно образно перефразировать так; может ли на Γ_k лежать „достаточно много“ a_k — точек и может ли на Γ_k лежать „подавляющее большинство“ a_k — точек для $k=1, 2, \dots, n$.

Как сообщил мне А. А. Гольдберг, ответ на первый вопрос положителен. Следствие 2 из нашей теоремы 2 дает ответ на второй вопрос.

Теорема 2. Пусть $\psi(z)$ — мероморфная $|z| < \infty$ функция, $L_k (k=1, 2, \dots, n)$ — неограниченные односвязные области, такие, что $\psi(z) \rightarrow a_k$ при $|z| \rightarrow \infty$ и $z \in L_k, n(r, a_k, L_k)$ — количество a_k — точек в $L_k \cap \{|z| \leq r\}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a_k, L_k)}{n(r, a_k)} \leq 2.$$

Если дополнительно предположить, что функция $\psi(z)$ — целая, то

$$\sum_{k=1}^n \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a_k, L_k)}{n(r, a_k)} \leq 1.$$

Следствие 2. Для мероморфной $b|z| < \infty$ функции $\psi(z)$ выполняется

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq 2.$$

Для целой функции $\psi(z)$ выполняется

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq 1.$$

Последнее неравенство и содержит ответ на второй вопрос Винклера.

показывая, что для целой функции существует не более, чем одно значение, для которого $h_k = 1$.

Институт математики Академии
наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Վերջավոր ստորին կարգ ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների
դեֆեկտների և ածի մասին

Հայտնի է (Վ. Պետրենկո⁽²⁾), որ վերջավոր ստորին կարգ ունեցող
մերոմորֆ $|z| < \infty$ — ում $\omega(z)$ ֆունկցիայի համար

$$\sum_{(a)} \frac{\vartheta^{1/2}(a)}{\ln^{1/2+} \frac{1}{\vartheta(a)}} < \infty,$$

$$\text{որտեղ } \vartheta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \ln \frac{1}{|\omega(z-a)|}}{T(z)}, \quad 0 < \varepsilon < 1:$$

Մյուս կողմից⁽³⁾ ամեն մի ε — ի համար ($0 < \varepsilon < 1$) կարելի է բերել այն
դասից ֆունկցիայի օրինակ, որի համար $\sum_{(a)} \vartheta^{1/2-\varepsilon}(a)$ տարամետ է:

$\sum_{(a)} \vartheta^{1/2}(a)$ — ի դուգամիտություն հարցը մինչև հիմա բաց էր: Ենթյա աշ
խատանքում բերվում է մի արդյունք, որից բխում է ոչ միայն $\sum \vartheta^{1/2}(a)$
չարքի դուգամիտությունը $\omega(z)$ ֆունկցիայի համար, այլ նաև վելց
մանի հայտնի արդյունքը — $\sum \vartheta^{1/2}(a)$: Երկրորդ մասում բերվում է
Վինկլերի մի հարցադրման սխառասխանը (այդ հարցադրումը բերված է ՈՒ
Հեյմանի չլուծված խնդիրների ցուցակում⁽⁴⁾):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ O. Teichmüller, „Deutsche Math.“ 4, 163—190 (1939). ² У. Хейман, Мероморфные функции, изд. Мир (1966). ³ А. А. Гольдберг, „Математический анализ“, т. 1 (1973). ⁴ A. Weitzman, Acta mathematica, 128, 1—2, 41—53 (1972). ⁵ В. П. Петренко „Известия АН СССР“, серия матем., т. 33, № 2 (1989). ⁶ Г. А. Барсегян, ДАН ССР т. 238, № 4 (1978). ⁷ W. K. Hayman, New problems, Cambridge University Press 155—180, 1974.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. И. Лазарев, П. И. Перлин

О решении задач пространственной теории упругости
 для кусочно-однородной среды

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 22/V 1978)

Метод потенциалов для первой внутренней (I^+) и второй внутренней (II^+) и внешней (II^-) задач теории упругости приводит к сингулярным интегральным уравнениям (I^+), при этом спектральные свойства уравнений позволяют находить решение методом последовательных приближений.

В настоящей работе исследуются уравнения для задачи II^+ в случае кусочно-однородной среды при совпадении коэффициентов Пуассона и доказывается сходимость метода последовательных приближений. Для численной реализации метода можно применять с естественными изменениями регулярные представления, предложенные в (2^+).

1. Пусть поверхность S_1 ограничивает тело, внутри которого имеется включение из другого материала, ограниченного поверхностью S_2 (S_1 и S_2 — ляпуновские поверхности).

Константы Ляме для D_2 ($\sigma D_2 = S_2$) суть λ_2, μ_2 и для D_1 ($\sigma D_1 = S_1 \cup S_2$) — λ_1, μ_1 .

Равенство коэффициентов Пуассона дает

$$\lambda_2/\mu_2 = \lambda_1/\mu_1 = k. \tag{1}$$

Пусть оператор T_{1x} оператор напряжений, определенный равенством

$$T_{1x}u(x) = 2\mu_1 \frac{du}{dn} + \lambda_1 n \operatorname{div} u + \mu_1 [n \cdot \operatorname{rot} u] \tag{2}$$

здесь u — вектор смещений упругости среды. Из (1), (2), очевидно, имеем

$$T_{1x} = kT_{2x}.$$

Ставится задача: найти вектор смещений u при условии, что на поверхности S_1 заданы усилия

$$[T_{1x}u(x)]' = f(x); \quad x \in S_1,$$

а на поверхности S_2 условия сцепления

$$u^+(x) - u^-(x) = r(x)$$

$$[T_{2,x}u(x)]^+ - [T_{1,x}u(x)]^- = \frac{1}{k} [T_{1,x}u]^+ - [T_{1,x}u]^- = g(x); \quad x \in S_2$$

Индексы $+$, $-$ здесь означают, что предельное значение выражений берется соответственно изнутри и извне поверхности. Очевидно, один раз решая задачу I^+ (II^+), мы можем прийти к условиям в которых $r(x) = 0$ ($g(x) = 0$). Для дальнейших целей нам удобно рассматривать задачу при $r(x) = 0$. В силу сказанного, это не является принципиальным ограничением.

2. Будем искать решение в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_{S_1} \Gamma(x-y) \varphi_1(y) d_y s + \int_{S_2} \Gamma(x-y) \varphi_2(y) d_y s$$

φ_i — плотность потенциала, распределенная на поверхности S_i ($i=1,2$).

$\Gamma(x-y)$ — тензор Кельвина—Соммильяны ⁽¹⁾. В силу того, что $\Gamma(x-y)$ зависит только от коэффициента Пуассона— $\mu(x)$ представляет решение в обеих средах.

Рассмотрим условие на S_2 . Первое условие выполняется автоматически в силу непрерывности потенциала простого слоя на поверхности S_2 . Второе условие дает (нормаль здесь и далее подразумевается направленной вне D_1).

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) + \int_{S_2} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_2(y) d_y s + \int_{S_1} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_1(y) d_y s + k \varphi_2(x) - \\ - k \int_{S_2} T_{1,x} \Gamma \varphi_2 ds - k \int_{S_1} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_1(y) ds = k g(x) \end{aligned}$$

или $\left(\alpha = \frac{1-k}{1+k} \right)$

$$\varphi_2(x) + \alpha \int_{S_2} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_2(y) d_y s + \alpha \int_{S_1} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_1(y) d_y s = \frac{k}{k+1} g(x).$$

Для главной контактной задачи (поверхность S_1 отсутствует — тело заполняет все пространство). Это уравнение получено и исследовано в ⁽¹⁾. При этом интеграл по S_1 отсутствует. Объединяя это уравнение с уравнением, полученным из условия на поверхности S_1 , имеем систему

$$\varphi_1(x) = \int_{S_1} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_1(y) d_y s + \int_{S_2} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_2(y) d_y s = f(x), \quad x \in S_1 \quad (3)$$

$$\varphi_2(x) + \alpha \int_{S_2} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_2(y) ds + \alpha \int_{S_1} T_{1,x} \Gamma(x-y) \varphi_1(y) d_y s = \frac{k}{k+1} g(x); \quad x \in S_2$$

Введем следующие обозначения:

$$K_{ji}\varphi = \int_{S_j} T_{ix}\Gamma(x-y)\varphi(y)ds, \quad x \in S_i; \quad K_{ji}^*\psi = \int_{S_j} |T_{iy}\Gamma(x-y)|'\psi(y)d_y s, \quad x \in S_i$$

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \alpha K_{21} & \alpha K_{22} \end{pmatrix}; \quad T_1 \equiv T; \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f \\ k \\ \frac{f}{k+1} & g \end{pmatrix}$$

H_i — гильбертово пространство функций, определенных на S_i ;

$H = H_1 \times H_2$ — произведение пространств.

Пусть $\varphi_i \in H_i$; $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2)$; $g = (g_1; g_2)$, тогда

$$(\varphi_i, g_i)_{H_i} = \int \varphi_i g_i ds; \quad (\varphi, g)_H = (\varphi_1, g_1)_{H_1} + (\varphi_2, g_2)_{H_2}$$

$R(A)$ — область значения оператора A ;

$N(A)$ — подпространство нулей оператора A ;

$\Sigma(A)$ — спектральное множество A ;

$\rho(A)$ — спектральный радиус A .

Уравнения (3) в операторном виде запишутся

$$\varphi + T_\alpha \varphi = F. \quad (3')$$

При $\alpha = 1$ уравнение (3') совпадает с уравнением задачи II для двусвязного тела, ограниченного поверхностями S_1 и S_2 .

3. Займемся исследованием полученных уравнений. Нам требуется еще уравнение, сопряженное (3')

$$\psi + T_\alpha^* \psi = 0, \quad (4)$$

где

$$T_\alpha^* = \begin{pmatrix} K_{11}^* & \alpha K_{21}^* \\ K_{12}^* & \alpha K_{22}^* \end{pmatrix}.$$

3.1. Покажем, что уравнение (3') нормально разрешимо и его индекс равен нулю.

Для этого подействуем на оператор $I + T_\alpha$ оператором

$$B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I + \alpha K_{22})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Это преобразование эквивалентно. Действительно, поскольку $\rho(K_{22}) = 1$ норму $\|\cdot\|_*$ всегда можно выбрать такой, что для любого $\varepsilon > 0$ будет $1 - \varepsilon \leq \|K_{22}\|_* \leq 1 + \varepsilon$, при этом $\|\cdot\|_*$ эквивалентна исходной норме (*).

Кроме того, очевидно, при любом $k \neq 0$ $|\alpha| < 1$. Таким образом, при любом k существует эквивалентная исходной норме норма, такая, что

$$|\alpha| \|K_{22}\| < 1$$

и оператор B дает эквивалентное преобразование. Итак,

$$B(I + T_\alpha)\varphi = \varphi_1 + K_{11}\varphi_1 + \alpha K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1}K_{21}\varphi_1.$$

Оператор $K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1}K_{21}$ вполне непрерывен. Поскольку таковым является K_{12} .

Нормальная разрешимость уравнения с оператором $B(I + T_\alpha)$ следует из нормальной разрешимости уравнения с оператором $I + K_{11}$ (1). Кроме того, поскольку индекс $I + K_{11}$ равен нулю, также заключаем, что индекс оператора $B(I + T_\alpha)$ равен нулю.

Поскольку оператор B задает эквивалентное преобразование, этими свойствами обладает исходное уравнение.

3.2. Определим теперь собственные функции T_α^* .

Пусть $\Psi(x) = a + [b \times x]$, а $\psi_i(x) = \Psi(x)$ при $x \in S_i$; подстановкой в (4), пользуясь свойствами потенциала двойного слоя (1), с учетом выбранного направления нормали, убеждаемся, что вектор $\Psi_\alpha(x) = \left(\psi_1; \frac{2}{1+\alpha} \psi_2 \right)$ является собственной функцией оператора T_α^* .

Покажем, что шесть функций $\Psi_\alpha(x)$, определяемые векторными константами a, b , образуют полный набор собственных функций оператора T_α^* , соответствующих собственному числу -1 .

Покажем предварительно, что $\|T_\alpha\| \leq \|T\|$. Действительно, для любого $F = (F_1; F_2) \in H$ имеем ($|\alpha| < 1$)

$$\|T_\alpha F\|_H = \|K_{11}F_1 + K_{12}F_2\|_{H_1} + \|K_{22}F_2 + K_{21}F_1\|_{H_2} \cdot |\alpha| \leq \|TF\|_H.$$

В уравнении

$$\varphi + T_\alpha \varphi = F; \quad F = \left(f; \frac{k}{k+1} g \right) \quad (5)$$

произведем замену $(\varphi_1; \varphi_2) \rightarrow \left(\varphi_1; \varphi_2 + \frac{k}{k+1} (I + \alpha K_{22})^{-1} g \right)$.

Система (5) перейдет при этом в систему

$$\varphi_1 + K_{11}\varphi_1 + K_{12}\varphi_2 = f_1 = f - \frac{k}{k+1} K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1}g,$$

$$\varphi_2 + K_{22}\varphi_2 + K_{21}\varphi_1 = 0; \quad (6)$$

При этом

$$(f_1, \varphi_1)_{H_1} = (f, \varphi_1)_{H_1} - \frac{k}{k+1} (\varphi_1, K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1}g)_{H_1} = \quad (7)$$

$$= (f, \varphi_1)_{H_1} + \frac{k}{k+1} \left(g, \frac{2}{1+\alpha} \varphi_2 \right)_{H_2} = (F, \Psi)_H$$

Здесь использовались следующие равенства

$$K_{12}^* \psi_2 = -2\psi_2; \quad K_{21}^* \psi_2 = \psi_2$$

и сходимость по норме ряда $\sum_0^{\infty} \alpha^n K_{21}^* g$. Для пояснения знака во втором равенстве напомним, что нормаль на поверхности направлена внутрь тела D_2 .

Очевидно, что из разрешимости (6) следует разрешимость (5). Покажем теперь, что условие $(f_1, \psi_1) = 0$ достаточно для разрешимости (6). Отсюда, очевидно, будет следовать, что условия

$$(F, \Psi)_H = (f, \psi_1) + \left(\frac{k}{k+1} g, \frac{2}{1+\alpha} \psi_2 \right)_{H_1} = (f, \psi_1)_H + k(g, \psi_2)_{H_1} = 0 \quad (8)$$

достаточны для разрешимости (5) и в силу нормальной разрешимости уравнения получим наше утверждение.

Отметим еще, что последнее равенство в (6) означает равенство нулю главного вектора и главного момента, приложенных к телу D_1 , и как показано в (1), является достаточным условием разрешимости поставленной задачи теории упругости.

Рассмотрим пространство $\bar{H} = \{ \varphi : (\varphi_1, \psi_1)_{H_1} = (\varphi_2, \psi_2)_{H_1} = 0 \}$. Очевидно, $\bar{H} \subset R(I + I_*) = {}^{\perp} N(I + T_*) = \left\{ \varphi : (\varphi_1, \psi_1) + \frac{2}{1+\alpha} (\varphi_2, \psi_2) = 0 \right\}$. Легко проверить, что $T_* \bar{H} \subset \bar{H}$ при всех $z \in (0, 1]$.

Будем рассматривать сужение оператора T_* на \bar{H} и обозначим это сужение \bar{T}_* .

Покажем, что $-1, 1 \in \Sigma(\bar{T}_*)$. Если $-1 \in \Sigma(\bar{T}_*)$, то $\varphi \in \bar{H} \subset R(I + T)$ и одновременно $\varphi \in N(I + T)$ и в силу простоты полюса резольвенты оператора (отсутствие присоединенных собственных функций см. (1)) $\varphi = 0$.

Пусть $+1 \in \Sigma(\bar{T}_*)$. Легко проверить, что собственными функциями уравнения $-\psi + T^* \psi = 0$ являются $(0; \psi_{2j})$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) и только они. Действительно, подстановкой убеждаемся, что эти функции являются собственными.

Кроме того, в силу теоремы единственности собственными функциями для задачи I могут быть только векторы жесткого смещения, т. е. всего 6 линейно независимых векторов.

Далее имеем, очевидно, $\bar{H} \subset {}^{\perp} N(-I + T^*) = \{ \varphi : (\varphi_1, \psi_{2j}) = 0 \}$. Тогда, если $z \in \bar{H}$ и $\varphi \in N(-I + T)$, то в силу простоты полюса $i = 1$, $\varphi = 0$. Итак $1 \in \Sigma(\bar{T}_*)$.

Известно, что $\Sigma(T) \in [-1, 1]$. Кроме того, $\Sigma(T)$ дискретен. Отсюда теперь следует $\rho(\bar{T}) < 1$. И, следовательно, существует норма, эквивалентная исходной, в которой $\|\bar{T}\|_* = q < 1$.

Имеем теперь при $F \in \bar{H}$ и при любом целом $n > 0$

$$\begin{aligned} \|T_0^n F\| &\leq \|T T_0^{n-1} F\|_{\bar{H}} \leq \dots \leq \|T^n F\|_{\bar{H}} \leq c_1 \|T^n F\|_* \leq \\ &\leq c_1 \|T^n\|_* \|F\|_* \leq c_1 q^n \|F\|_*. \end{aligned}$$

Здесь c_1 — константа, входящая в условие, выражающее эквивалентность норм. Из последнего неравенства следует, что при любом $F \in \bar{H}$ решение существует и представляется рядом

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} T_0^n F.$$

Итак, условие $(f_1, \psi_1) = 0$ достаточно для разрешимости (8), и, следовательно, (5), а значит в силу нормальной разрешимости (5) наше утверждение доказано.

Попутно мы показали сходимость метода последовательных приближений для уравнения (3).

4. Все изложенное с очевидными модификациями может быть применено к задаче I^+ для кусочно-однородной среды с совпадающими коэффициентами Пуассона.

5. Если в постановке задачи принять $T_1 = T_2 = d/dn$, $\Gamma(x-y) = 1/(x-y)$; u, φ, f — скалярные функции, приходим к задаче Неймана для оператора Лапласа, для составной области с заданным скачком градиента на границе. Результаты справедливы и в этом случае.

НИИ СП им. Н. В. Склифосовского

Մ. Ի. ԼԱԶԱՐԻՎ, Պ. Ի. ՊԵՐԼԻՆ

Կտոր առ կտոր համասեռ միջավայրի առաձգականության տեսության տարածական խնդրի լուծման մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում է առաձգականության տեսության տարածական խնդրի լուծման սինդուլյար հավասարումները, որոնք ստացված են պոտենցիալի մեթոդով, միևնույն Պուասոնի գործակցով, կտոր առ կտոր համասեռ միջավայրի համար

Ապացուցվում է ստացված հավասարումների լուծելիությունը և հավասարումների ինդեքսի պրո լինելու փաստը: Համալուծ հավասարումների սխտեմի համար գտնված են սեփական ֆունկցիաները և ապացուցված է նեյմանի շարքի զուգամետությունը, երբ հավասարման աջ մասը բավարարվում է լուծելիության այն պայմաններին, որոնք պահանջում են Ֆրեդհոլմի տեսության հիման վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ս Ի Ք Յ ՈՒ Ն

- ¹ В. Д. Купрадзе и др., Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, «Наука», М., стр. 660, 1976. ² П. И. Перлин, ПММ. т. 40, вып. 2 (1976).
³ С. Г. Крейн, Линейное уравнение в банаховом пространстве, «Наука», стр. 103, М., 1971. ⁴ М. А. Красносельский и др., Приближение решения операторных уравнений, стр. 453, «Наука», М., 1969.

УДК 522.61

АСТРОФИЗИКА

Б. О. Карапетян, В. С. Осканян

**Информационные критерии оценки эффективности
астрофизических наблюдений**

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 28/VII 1978)

В настоящее время астрофизические наблюдения выполняются при помощи сложного комплекса оптических приборов, приемной аппаратуры и вычислительных средств, образующих систему, по которой проходит информация об исследуемом объекте. Информативность астрофизических наблюдений, эффективность использования оборудования и времени наблюдателей зависят как от выбора и согласования параметров и режимов работы составляющих звеньев системы, так и от методики наблюдений и обработки данных. Под информативностью здесь подразумевается получение в результате наблюдений максимально возможного объема сведений об исследуемом объекте или явлении.

В данной работе не рассматриваются вопросы оценки содержания полученных при наблюдениях данных, ценность которых в большой степени определяется постановкой наблюдательной задачи, априорными сведениями, состоянием теории и другими факторами.

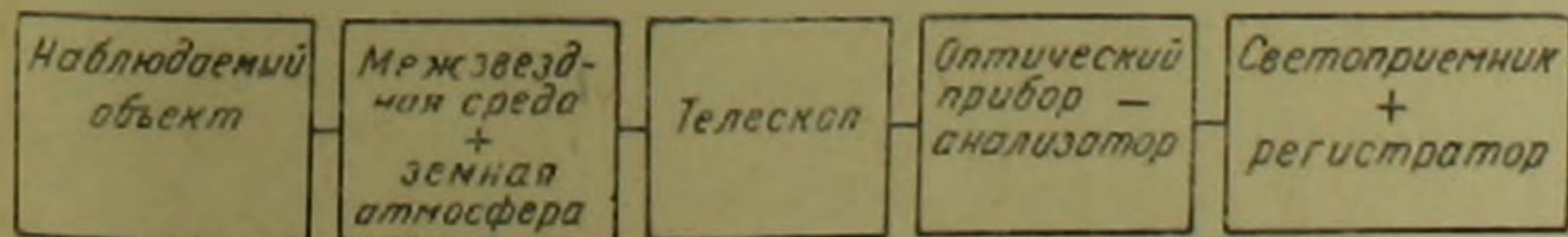
Для правильного выбора и согласования параметров надо рассматривать наблюдательную систему как единое целое, учитывая преобразования и искажения, вносимые всеми последовательными звеньями информационного тракта. Большое значение при этом приобретают критерии, по которым оцениваются, сравниваются и выбираются различные звенья системы. Обычно для оценки телескопов, оптического инструмента, приемной аппаратуры используются т. н. «паспортные» данные, относящиеся к непосредственно измеряемым величинам такие как светосила, разрешающая способность, чувствительность, коэффициент усиления и др., не дающие сами по себе представления о влиянии данного прибора на информативность системы в целом, и поэтому не всегда удобные для сравнения и выбора вариантов, особенно в тех случаях, когда наблюдательная задача может быть решена с помощью различных приборов, отличающихся по принципу действия, т. е. по размерности параметров, определяющих их качество. В таких случаях затруднительно судить об эффективном согласовании параметров последовательных звеньев системы, тем более, что нередко улучшение одного параметра достигается ценой ухудшения другого.

Это приводит к необходимости определения обобщенных критериев, применимых ко всем звеньям системы и отражающих взаимозависимость отдельных инструментальных и аппаратурных параметров. К числу обобщенных характеристик, предложенных для оценки астрономических приемников, относятся эквивалентный квантовый выход ⁽¹⁾, скорость получения информации ⁽²⁾ и др. Эти величины все же не могут служить достаточно полными характеристиками информационной способности, так как в них не отражены такие важные факторы, как динамический диапазон, спектральная чувствительность и т. д. Критерием, позволяющим учитывать параметры различных звеньев системы, является пронизывающая способность, или предельно обнаружимая звездная величина ^(3,4). Однако с помощью этого критерия можно оценивать только пороговые свойства системы, но не способность передавать полную информацию об объекте.

Единый подход ко всем звеньям системы и наиболее полный учет влияния различных параметров на работу всей системы становятся возможными при обращении к методам теории информации ⁽⁵⁾. Развитие аппарата теории информации применительно к оценке оптического изображения, оптических систем и приемников ⁽⁶⁻⁸⁾ позволило вплотную подойти к использованию этих методов для оценки эффективности астрономических наблюдений.

В настоящей работе в общем виде рассматривается передача оптической информации при астрономических наблюдениях, определяются обобщенные информационные характеристики системы и устанавливаются выражения, связывающие эти характеристики с рабочими параметрами звеньев и условиями наблюдений.

Передача оптической информации в астрономической наблюдательной системе. В общем виде структура информационного тракта при астрономических наблюдениях может быть представлена следующим образом:



Все интересующие нас сведения о наблюдаемом объекте, содержащиеся в приходящем от него световом потоке, сводятся, в сущности, к распределению излучения по сферическим координатам α, β (в фокальной плоскости телескопа преобразующимся в линейные координаты x, y), времени t , длине волны λ , позиционному углу электрического вектора θ , фазе φ : $W = \Phi(\alpha, \beta, t, \lambda, \theta, \varphi)$. Диапазоны изменения этих аргументов определяются условиями наблюдений, возможностями инструмен-

тов и аппаратуры, поставленной задачей, и т. д. Точность измерения Δx , $\Delta \beta$ и др. в идеальном случае должна ограничиваться принципом неопределенности. Шестимерное пространство сигналов, таким образом, может быть разбито на $n = n_x \cdot n_y \cdot n_z \cdot n_0 \cdot n_\lambda \cdot n_\tau$ элементарных ячеек, где $n_x = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{\Delta x}$, $n_y = \frac{\beta_{\max} - \beta_{\min}}{\Delta \beta}$ и т. д.

Уровень энергии сигнала в отдельной элементарной ячейке может быть определен с конечной точностью, позволяющей с заданной вероятностью отнести ее к какому-либо интервалу ΔW , значения энергии. Это обусловлено стохастической природой излучения. Определив величины интервалов ΔW на всем измеряемом диапазоне $W_{\max} - W_{\min}$, мы найдем число m различных градаций энергии сигнала в каждой ячейке.

Таким образом, каждая из n элементарных ячеек может находиться в одном из $(m+1)$ состояний (с учетом нулевого уровня), и всего можно различить $(m+1)^n$ возможных состояний наблюдаемого объекта. При оценке информационных свойств системы будем исходить из максимальной неопределенности получаемого сообщения. Тогда все состояния равновероятны и количество информации об объекте, которую могла бы зарегистрировать идеальная наблюдательная система, равно

$$H = n \log_2(m+1), \text{ бит.} \quad (1)$$

В реальных системах при прохождении сигнала через последовательные звенья тракта происходят существенные потери информации. Во-первых, уменьшается число n элементарных объемов из-за ограниченного разрешения в пространстве, по спектру, во времени и т. д. Уменьшается также число m различных градаций энергии как из-за поглощения и рассеяния, так и из-за конечного динамического диапазона, ограничиваемого снизу шумами, а сверху насыщением в окончательных звеньях.

К принципиальному ограничению количества передаваемой информации в реальных системах приводит сокращение числа независимых аргументов. Оконечные звенья тракта, непосредственно от которых мы получаем информацию, воспринимают и представляют ее в виде распределения интенсивности W по пространственным координатам x , y или времени t . Поэтому за телескопом в структурной схеме следует оптический прибор-анализатор (спектрограф, поляриметр, интерферометр и пр.), преобразующий функции по λ , θ или φ в функции по x , y или t . На этой стадии происходит отбор информации по определенным аргументам исходя из задачи наблюдений. При этом, разумеется, теряется информация по всем остальным аргументам, в том числе по аргументам, служащим „посредниками“, т. е. по x , y или t . Шестимерное пространство сигналов сводится к одно-, двух- или трехмерному $\Phi(x, y, t)$.

Результирующее количество информации на выходе системы

$$H_p = n_p \log_2(m_p + 1), \text{ бит}, \quad (2)$$

где n_p и m_p зависят от условий наблюдения, структуры системы и параметров ее звеньев.

Максимальное количество информации, передаваемое системой, (информационная емкость), количество информации, приходящееся на единичную площадку, (удельная информационная емкость) и количество информации, передаваемое за единицу времени, (информационная пропускная способность) являются характеристиками, обобщающими влияние отдельных звеньев системы на ее информационные свойства. При сравнении различных систем важным критерием является величина информационной чувствительности (или информационного квантового выхода), определяющая количество информации на выходе, приходящееся на единицу энергии излучения на входе (или на один приходящий квант) ^(2,9).

Связь обобщенных информационных характеристик с параметрами звеньев системы. Носителями информации на входе системы являются кванты излучения, а на выходе — т. н. «сигнальные события» (электрические импульсы, почерневшие зерна фотоэмульсии, деления шкалы измерительного устройства, вспышки на экране ЭЛТ и т. д.), характер которых зависит от характера преобразований, выполняемых оконечными звеньями системы.

Пусть наблюдаемый объект излучает в каждой элементарной ячейке пространства сигналов в среднем \bar{N}_0 квантов. Число сигнальных событий на выходе линейной системы будет равно $\bar{N}_c = C\bar{N}_0$. В коэффициент C войдут такие факторы, как экстинкция и рассеяние в атмосфере и в оптике, световая эффективность оптики, квантовый выход, чувствительность и коэффициент усиления приемника и т. д. Кроме сигнальных, на выходе появляются также шумовые события $\bar{N}_ш$, вызванные фоном излучения ночного неба, собственными шумами приемной аппаратуры и др.

Если приход сигнальных и шумовых событий описывается распределением Пуассона, то для числа m различных градаций сигнала будем иметь ⁽¹⁰⁾

$$m = \frac{\sqrt{k^2 + 8(\bar{N}_c + \bar{N}_ш)} - \sqrt{k^2 + 8\bar{N}_ш}}{2k}, \quad (3)$$

где k — коэффициент достоверности, характеризующий точность измерений.

Число n элементарных ячеек можно найти с помощью теоремы о дискретном представлении через параметры, характеризующие разрешающую способность звеньев. Рассмотрим, например, определение числа n для телескопа. Согласно критерию Рэля ⁽⁴⁾ при диаметре

изображения звезды δ , мм получим величины наименьшего разрешаемого расстояния $\sigma = \delta/2$, мм и разрешающей способности $R = 1/\sigma = 2/\delta$, мм⁻¹. В соответствии с теоремой о дискретном представлении (3.11) сигнал полностью описывается значениями интенсивности в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $1/2R$, мм; число отсчетов на единицу длины (т. е. число элементарных ячеек) $n = 4/\delta$, мм⁻¹.

Полученные значения m и n можно подставить в выражение (2) для количества информации. При этом, однако, предполагается, что передаточная функция постоянна во всем диапазоне передаваемых пространственных частот вплоть до предельной частоты, определяемой разрешающей способностью.

В реальных системах каждое звено является фильтром пространственных (и временных) частот с неидеальной передаточной функцией. С возрастанием частоты сигнала уменьшаются контраст и отношение сигнала к шуму на выходе, и, соответственно, число градаций. Выходной сигнал получается как свертка входного сигнала с аппаратной функцией звена; произведение Фурье-преобразования входного сигнала на частотно-контрастную характеристику (ЧКХ) дает Фурье-преобразование (спектр) выходного сигнала (4.11).

Выражение для количества информации в двумерном изображении имеет вид (4.8):

$$H' = \int_0^{u_{\max}} \int_0^{v_{\max}} \log_2 \left| 1 + \frac{S(u, v) T^2(u, v)}{Q(u, v)} \right| dudv, \text{ бит} \cdot \text{мм}^{-2}, \quad (4)$$

где $u = x^{-1}$; $v = y^{-1}$ — пространственные частоты, мм⁻¹; $S(u, v)$; $Q(u, v)$ — спектральные плотности входного сигнала и шумов соответственно; $T(u, v)$ — ЧКХ. Если входное сообщение и шумы характеризуются максимальной неопределенностью, то $S(u, v) = \text{const}$ и $Q(u, v) = \text{const}$. Тогда для осесимметричных систем

$$H' = 2\pi \int_0^{v_{\max}} \log_2 [1 + m(0) T^2(v)] v dv, \text{ бит} \cdot \text{мм}^{-2}, \quad (5)$$

где $v = \sqrt{u^2 + v^2}$, мм⁻¹ и $m(0)$ — число градаций при нулевой пространственной частоте, определяемое по формуле (3).

На основе предложенной методики авторами выведены расчетные выражения для оценки информационных свойств астрономических наблюдательных систем.

Авторы выражают благодарность академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение настоящей работы и ценные замечания.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР
Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Աստղագիտական դիտումների տեղեկատվությունը գնահատելու
ինֆորմացիոն շափանիչները

Աստղագիտական դիտումների ժամանակ օպտիկական աղղանշանը անցնում է տարբեր սարքերի միջով, որոնց համատեղ կիրառմամբ է միայն հնարավոր ստանալ անհրաժեշտ տեղեկությունը դիտվող մարմնի մասին: Ուստի աստղագիտական դիտումների ժամանակ անհրաժեշտ է սարքերն իրար այնպես հարմարեցնել, որ հնարավոր լինի ստանալ լավագույն դիտողական արդյունքներ: Սակայն միշտ չէ, որ հնարավոր է այդ խնդիրը պատշաճ ձևով լուծել, քանի որ տարբեր սարքերի հատկությունները բնութագրող պարամետրերի շափողականությունները հաճախ տարբեր են լինում ու հնարավոր չէ նրանք անմիջականորեն իրար հետ համեմատել:

Տարբեր սարքերի իրար հարմարեցման խնդիրը լուծելու համար ներկա աշխատությունում առաջարկվում է մի մոտեցում, որը հնարավորություն է տալիս, կիրառելով ինֆորմացիայի տեսության աղարատը, երկնիչ թվանշաններով (քիտերով) գնահատել ասեն մի սարքի, ինչպես նաև բոլոր սարքերի կողմից համատեղ բաց թողնված տեղեկության քանակը: Այդպիսով հնարավորություն է ստեղծվում համատեղ կիրառվող տարբեր սարքերը իրար այնպես հարմարեցնել, որ ուսումնասիրվող երկնային մարմիններից ստացվի առավելագույն հնարավոր տեղեկությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ЧРԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Фелджет, Сб Настоящее и будущее телескопов умеренного размера, ИИЛ, М. 1960. ² W. A. Baum et al., Carnegie Inst. Wash., Year Book 64 (1965). ³ Баум, Сб. Методы астрономии, „Мир“, М., 1967. ⁴ Н. Н. Михельсон, Оптические телескопы. Теория и конструкция, „Наука“, М., 1967. ⁵ Бриллиэн, Наука и теория информации, М., 1960. ⁶ P. V. Fellgett, E. H. Linfoot, Phil. Trans. Roy. Soc. (A) 247, 369 (1955). ⁷ С. Б. Гуревич, Эффективность и чувствительность телевизионных систем, „Энергия“, М.,—Л., 1963. ⁸ J. C. Dainty, R. Shaw, Image Science, A. P., London, 1974. ⁹ Б. О. Карапетян, Г. Е. Смоляки, Сб. Физическая электроника, М., 1976. ¹⁰ Б. О. Карапетян, В. С. Осканян, „Оптико-механическая промышленность“, № 11, 1976. ¹¹ О. Нейл, Введение в статистическую оптику, „Мир“, 1966.

УДК 595.768.23

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хизорян

**Новый вид жесткокрылых-скрытнохоботников из Армении
 (Coleoptera, Curculionidae)**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 8/VI 1978)

Ceutorrhynchus gnom lablokoiff-Khinzorian sp. nov.

Армянская ССР: Ленинакан, селекционная станция, 10/IX 1962, Х. Арутюнян, голотип. Джрвезж, 30/IX 1951, в ущелье под кустиком *Echium*, паратип. Голотип в коллекциях Института зоологии АН Армянской ССР.

Тело и ноги черные. Тело покрыто густыми чешуйками, сверху желто-бурыми с резким рисунком из белых или желтоватых чешуек, снизу белыми. Усики темные со светлым жгутиком. Белый рисунок образует продольную полосу на лбу, расширенную кпереди, сложный рисунок на переднеспинке, состоящий из 3 полос, 2 дуг, соединенных у середины, и белой основной каймы, с боков имеются еще нечеткие косые полосы, отходящие от середины боковых продольных полос и направленные косо назад. На надкрыльях чешуйки образуют крестообразное прищитковое пятно с узкими косыми перекладинами, по изогнутой полосе за плечевым бугорком, от основания которого отходит короткая продольная полоса и многочисленные полосы различной длины в задней половине надкрылий, в том числе пара коротких пришовных, 3 пары длинных на следующих промежутках, местами прерванных, и по 5 коротких, совместно вырисовывающих дугу. На 3-ем промежутке полоса, загибаясь у вершины, продолжена вдоль вершинного выступа заднего края надкрылья. Длина (без хоботка) 4,5 мм. Рис. 1.

Глаза округленно треугольные (рис. 1), при осмотре сверху выглядят плоскими. Лоб между глазами со щеткой торчащих чешуек. Головотрубка слабо изогнута, такой же длины, как переднеспинка, ее бо-роздки соединены на ее вентральной стороне. Усики тонкие, их рукоять слабо и постепенно расширена к вершине, 1-й членик их жгутика удлиненный, вдвое шире и едва длиннее 2-го, вдвое длиннее удлиненных 3-го и 4-го, следующие 3 членика едва длиннее ширины, булава по длине равна членикам жгутика 3—7, вместе взятым. Переднеспинка с

сильно приподнятым воротничком, с глубоко вырезанным сбоку передним краем, за воротничком сужена, затем расширена, с закругленным боковым краем, без бугорка или ребрышка, боковой кант закруглен и зернистый, диск очень густо крупно точечный, промежутки между точ-

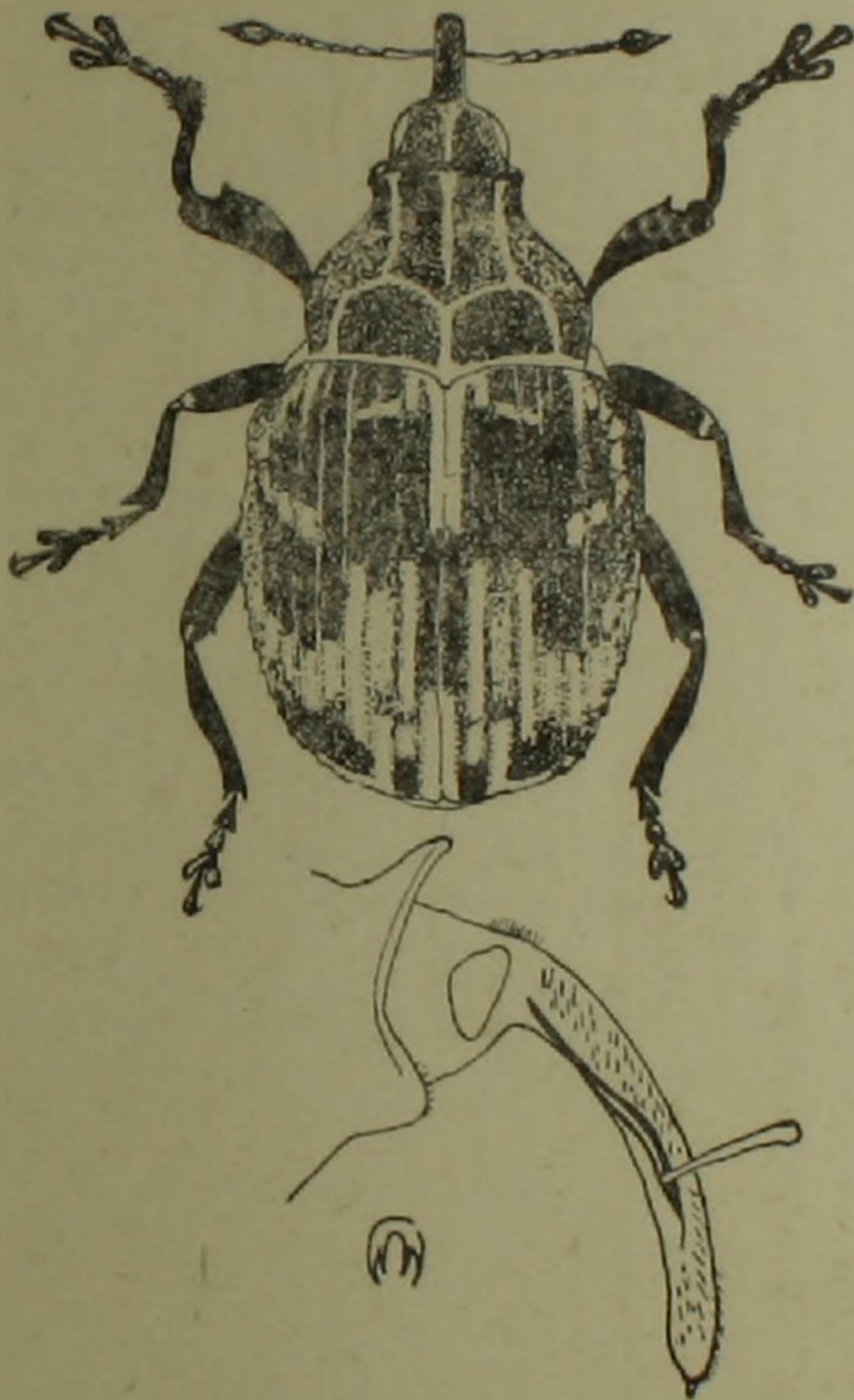


Рис. 1. *Ceuthorrhynchus gnom*, Khnz. sp. nov.
паратип, габитус, голова сбоку и коготки

ками сведены к узким килям. Надкрылья с четким плечевым бугорком, с широкими бороздками, промежутки которых плоские, втрое шире бороздок, с тонкими темными и широкими ланцетовидными светлыми чешуйками, темные расположены в 3 ряда, светлые—в 2—3. Бороздки с рядом темных тонких, малозаметных чешуек, выглядят голыми. На 7-м, 8-м и 9-м промежутках имеются зубчики, более крупные и густые кзади и к боковому краю. Кзади надкрылья спадают совсем плоско, с

маленьким выступом вдоль уплощенного вершинного края, перед этим выступом с поперечным рядом из 5 зерен. Пигидий равномерно покрыт белыми чешуйками. Низ и ноги обычного для этого рода строения. Все бедра и коготки с острым зубцом. Средние и задние голени с короткими корзинками.

Этот вид—типичный представитель скрытнохоботников из рода *Ceutorrhynchus* Schönh., принадлежит к небольшой группе видов *Mogulones* Reitt., насчитывающей вместе с ним 7 видов. От всех родственных легко отличается уже по рисунку тела, который своеобразен тем, что на переднеспинке соответствует нормальному рисунку этой группы, тогда как по рисунку надкрылий напоминает группу *Hadroplontus* Reitt. Кроме этого, у всех видов группы, кроме *gadula* Germ., на надкрыльях скат спадает более круто, зубцов меньше и они много мельче. У *gadula*, наоборот, зубцов много больше и они достигают 4-го промежутка бороздок надкрылий, переднеспинка без дугообразной перевязи, рисунок надкрылий тусклый и состоит из полос, крестособразный рисунок у щитка очень тонкий, с длинной перекладиной.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՅԱՐԼՈՎՈՎ-ԿՆՉՈՐՅԱՆ

Մածկակների ըզեզի նոր տեսակ Հայաստանից
(Coleoptera, Curculionidae)

Նկարագրվում է երկարակնճիթ ըզեզի նոր տեսակ—*Ceutorrhynchus* *gnom* Klinz., հայտնաբերված Լենինականի մոտակայքում և Ջրվեժի կիրճում: Այս տեսակը նշված սեռի *Mogulones* Reitt. խմբի տեսակների լսթնեբորդ ճեբկալացուցիչն է:

Բ Ո Վ Ա Ն Կ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն LXVII Հ Ա Տ ՈՐ Ի

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

62

Է. Ա. Դանիելյան—ընդհատումներով սպասարկման միայն սիստեմների զրգովածության պարբերությունների մասին 3

Ա. Ի. Պետրոսյան—Որոշ տիրույթներում π -հավասարման զննատանկանով լուծման մասին 13

Ի. Գ. Հայրապետյան—Երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար լուծարարական պայմանի համարածեք ձևակերպումների մասին 18

Ա. Հ. Առաքելյան—Ռեկյատիվների հոմոմորֆիզմների մասնակի կիսախմբի միեմալ տրեկոզմանի իզոմալ 25

Վ. Ն. Վարդազարյան—Դիրակի միաշափ պատահական մոդելային պոտենցիալներով սիստեմի վիճակի խտություն մասին 65

Մ. Վ. Ղազարյան—Սեպարատ մերոմորֆ ֆունկցիաների մասին 69

Ո. Խ. Մկրտչյան—Բաշխումների բնութագրման կայունությունը և նորմալ բաշխման որոշ լայն իմաստով բնութագրական հատկությունները 129

Ջ. Ա. Կարեյան—Կոդմենորոշված գրաֆի տրոհումը նվազագույն թվով կոդմենորոշված անտառներ 193

Մ. Հ. Խաչատրյան—Արտածման բարդությունը հատույթով և առանց հատույթի ձևային համակարգերում 198

Յու. Մ. Մովսիսյան—Խմբակերպեր, որոնք հանդիսանում են խմբերի գումարներ 203

Ս. Խ. Դարբինյան, Կ. Մ. Մուսսյան—Պանցիկիկ համասեռ կոդմենորոշված գրաֆների մասին 208

Ա. Հ. Մաքսիմովյան, Է. Մ. Պողոսյան—Համաձայնեցնող ինդուկտորների համեմատական բնութագրերի կայունության մասին 212

Ա. Գ. Գրիգորյան—Փոքր պրեդատորի կատեգորիաների վրայի մոդուլների լեդոմորֆիզմների օղակներ 216

Լ. Վ. Միխայելյան—Քրիստոֆելի բանաձևի անալոզը միավոր շրջանագծի վրա սրբոգոնալ բազմանդամների համար 257

Ա. Ի. Պետրոսյան— C^* տարածության մեջ որոշ տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների մոտարկման մասին 264

Մ. Ժ. Գրիգորյան— $LP, 1 < p < 2$ դասերի ֆունկցիաների ներկայացումը սրբոգոնալ շարքերով 269

Ո. Գ. Ռուբանովիչ—Խզվող գործակիցներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մասին 275

Ս. Մ. Գյուլումյան, Կ. Մ. Մուսսյան—Ըստ գազաթային k -տրոհման թվի կրիտիկական գրաֆների մասին 281

Յու. Մ. Մովսիսյան—Կիսագծային ձևափոխությունների խմբերի վերաբերյալ 285

Դ. Ա. Բարսեղյան—Վերջավոր ստորին կարգ ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների գեներատորներ և աճի մասին 291

ԿՐԻՍՏԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ի. Ս. Միլասյան—Գեոմետրիկ համար ջերմահաղորդականության խառը եզրային խեղդի մասին 132

ՄԻՆԱՆԻԿԱ

Ա. Հ. Գալոյան—Տարամոդուլ նյութից պատրաստված սալերի ընդլայնական առանձնությունների մասին 29

Մ. Վ. Ալյուրեկյան—Գերձայնային զազի հոսանքում մեմբրանի տատանումների
խնդրի մասին 74

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Վ. Ուստաևյան—Առաձգական շերտի եզրերով հաստատուն արագությամբ շարժվող
կենտրոնացած ուժերից և շերտային աղբյուրներից ազդեցության ֆունկցիաների կառուցումը 76

Ա. Հ. Բարյոյան, Ա. Գ. Մելիֆոնյան—Պարբերական գլանային ճեղքերով թուլացված
պտտվող գլանի առանցքասիմետրիկ խնդիրը 133

Վ. Ս. Ուստաևյան—Գրամաձև ճառով թուլացված առաձգական շերտի համար մի
առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդրի մասին 145

Մ. Ի. Լուգանով, Գ. Ի. Պերլին—Կտոր առ կտոր համառոտ միջավայրի առաձգա-
կանության տեսության տարածական խնդրի լուծման մասին 255

ՍՈՂՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ո. Ա. Ինգիրաբյան—Հաստատված սողոր ոչ գծային տեսության հարթ կոնտակտային
մի խնդրի մասին հարակցման ուժերի հաշվառումով 24

Լ. Ա. Շեկյան—Ազատ հենված առաձգական հեծանին մարմնի հարվածի վերաբերյալ
կոնտակտային խնդիրը 65

ԷԼԵԿՏՐԱԿՈՆՍՏՐԱԿՏԻՎ

Ա. Ղ. Լուսինյան—Էլեկտրամագնիսական օսցիլյատորում (L.C-կոնտուր) կներգափո-
խանակման հիմունքների մասին 221

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Ս. Պուլյանյան—Ունիակալ մամանակի ընդհանրացված պատկերացումը քվանտային
էլեկտրադինամիկայում փոքր հեռավորությունների համար 41

Գ. Ա. Վարդանյան—Շրջման կետերի կապված վիճակները քվանտային բյուրեղում 47

ԱՍՏՐՈՆՈՄԻԿԱ

Ո. Գ. Լուկոնով—[ԸԸ] տիպի զայակտիկաների վիճակագրական ուսումնասիրու-
թյան նախնական տվյալներ 93

Հ. Վ. Պիկիչյան—Գիթուգ անդրադարձման խնդիրն ըստ հաճախականությունների ճա-
ռագայթման վերաբաշխման կամայական օրենքի դեպքում 131

Բ. Հ. Կաբալյուսյան, Վ. Ո. Օսկանյան—Աստղագիտական դիտումների տեղեկատվու-
թյունը գնահատելու իմֆորմացիոն չափանիշները 202

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ո. Բ. Ղուկասյան, Կ. Ա. Կոստանյան— $Na_2O-Al_2O_3$ (SiO_2, GeO_2, B_2O_3) համա-
կարգերի ապակիների էլեկտրահաղորդականությունը 101

ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ո. Գ. Մացոյան, Ո. Լ. Էնֆիարյան, Վ. Հ. Գանիկյան, Լ. Հ. Սարգսյան—Բինար սիս-
տեմի ռադիկալ սուպուիմերման և տելոմերման պրոցեսի ուսումնասիրության շղթայի փո-
խանցումով ստեղծելու վիճակագրական հարաբերությունները օրինակի վրա 162

ԻՆՈՑԻԴԻԱ

Կ. Գ. Աման, Ա. Ա. Թամբալյան, Վ. Ա. Արցիբաշևիչ—Գամմա-քվանտների թուլացման
էֆեկտիվ գործակիցները բինոմալ օրենքով բաշխված անհամառոտությամբ տարակազմ
միջավայրում 51

Գ. Ո. Գրիգորյան—Իրկաթահանքերի սպաշարների գնահատումն ըստ մագնիսական
հանույթի տվյալների 157

ՏՆԿՏՈՆԻԿԱ

- Ս. Ն. Նազարբեյյան—Հայկական ՍՍՀ և Նախիջևանի ԻՍՍՀ տարածքների սեյսմաակտիվ խորքային բեկվածքների սեյսմիկականության գնահատում և ութ բալանոց սեյսմիկ գոտու անջատման փորձ 106
- Ս. Ն. Նազարբեյյան—Հայկական ՍՍՀ և Նախիջևանի ԻՍՍՀ տարածքների խորքային բեկվածքների տեղարաշխման ընդհանուր օրինաչափությունները 232

ՌԻՈՅԻՋԻԿԱ

- Ս. Ա. Ռաբինյան, Մ. Ի. Աղաբաևով, Վ. Դ. Մխիթարյան—Առնետների լյարդաբջիչների թաղանթային պոտենցիալի հետազոտությունը այրվածքային վնասվածքից հետո 168

ԲԻՈԲԻՄԻԱ

- Ռ. Ա. Զաբաբյան, Ռ. Կ. Պոզոսյան—Գլյուկոկորտիկոիդներով լիմֆոցիտների թրոմբոցիտների ԴՆԹ-ի դեզրադացիան կանոնավոր կրկնվող հատվածների 110
- Ա. Ա. Դալոյան, Ա. Կ. Անտոնյան, Վ. Վ. Ռաբով, Ռ. Հ. Գալստյան—Հիպոթալամուսային նոր հեքսապեպտիդի ազդեցությունը առնետների մոտ ինսուլինի սեկրեցիայի վրա 172
- Ա. Ա. Գալոյան, Ռ. Մ. Սրապիոնյան, Ռ. Օ. Կարապետյան, Ֆ. Մ. Սանակյան, Ս. Ա. Սանակյան, Գ. Ա. Սարիբեկյան—Գլխիկամախիզացված սեֆաղեթս (1-10-ի միջոցով դիօոցված նեյրոհոմոն «C»-ի երկու իզոմերի հայտնաբերման մասին 176

ԲՈՒՅՍՆԵՐԻ ՅԻՋԻՈՒՈՒԻԱ

- Վ. Վ. Ղազարյան, Ս. Հ. Զաբաբյան—Նրևանի բուսաբանական այգու ձմեռվա պայմանների հանդեպ մի քանի ինտրոդուկցված փշատերևների ոռակցիայի մասին 56
- Վ. Հ. Ղազարյան, Ժ. Մ. Ակոպովա—Մեկուսացված տերևների ջլորոֆիլի կազմավորման, ֆոտոսինթեզի ակտիվության և կյանքի տևողության վրա վիտամինների և հիբերինի ազդեցության մասին 237

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ա. Մ. Յարյուկով-Խենձորյան—Փայտափորիկ բզեզի նոր տեսակ *Տաչիկստանից* (Coleoptera, Anobiidae) 61
- Ա. Մ. Յարյուկով-Խենձորյան—Ձատիկ բզեզների նոր տեսակ և սեռ *Արալից* (Coleoptera, Coccinellidae) 715
- Ե. Կ. Հերբեկցյան—Էնցիֆորիդների (Hymenoptera, Encyrtidae) նոր տեսակներ *Հայաստանից* 118
- Ա. Մ. Յարյուկով-Խենձորյան—Ձատիկ բզեզների էրկու նոր տեսակ *Արևելյան Ասիայից* 189
- Ա. Մ. Յարյուկով-Խենձորյան—Գազիտիդ բզեզների նոր տեսակ *Հայկական ՍՍՀ-ից* (Coleoptera, Dasytidae) 243
- Ա. Մ. Յարյուկով-Խենձորյան—Սածկակների թ բզեզի նոր տեսակ *Հայաստանից* (Coleoptera, Curculionidae) 308

ՌՃՆԿԱԴԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

- Վ. Մ. Հաբուբյունյան, Մ. Գ. Միլայեյյան—Հիպոֆիզի թիրեոտրոպ ֆունկցիան բրուցիլոզի դեպքում 184

ԿՆՂԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ս. Հ. Միրզոյան, Ս. Ի. Մովսեսյան, Ռ. Ա. Ռևկյան—էուֆիլինի ազդեցությունը զլխուղեղում ամոնիակի գոյացման և չեզոքացման մեխանիզմների վրա ուղեղային արյան շրջանառության խանգարումների պայմաններում 246

ՅԻՋԻՈՒՈՒԻԱ

- Ա. Ա. Հեմիմյան, Գ. Ն. Գրիգորյան, Ռ. Ա. Հաբուբյունյան-Վոզակ—Պուլվինարի ենյրոնների ունկապով դաշտերի կառուցվածքային առանձնահատկությունները 123
- Վ. Լ. Կոբոզնով, Վ. Վ. Ֆանաբոյան—Կարմիր կորիզի ենյրոնների կեղևային սինապտիկ մուտքերը 188
- Ա. Ա. Անդրեասյան—Հիպոթալամուսի գերը ողնուղեղի վնասվածքների հետևանքով առաջացած խանգարված ֆունկցիաների վերականգման պրոցեսում 251

СОДЕРЖАНИЕ LXVII ТОМА

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
Э. А. Даниелян—О периодах занятости одноканальных систем с прерываниями обслуживания	3
А. И. Петросян—О решении с оценкой ϵ - уравнения в некоторых областях.	13
Р. Г. Айрапетян—Об эквивалентных формах условия Лопатинского для гиперболических уравнений второго порядка	18
А. А. Аракелян—Минимальные двусторонние идеалы в частичной полугруппе гомоморфизмов релятивов	25
В. И. Вардазарян—О плотности состояний в одномерных системах Дирака с модельными случайными потенциалами	65
М. В. Казарян—О сепаратно мероморфных функциях	69
С. Т. Мкртчян—Устойчивость характеристик распределений и некоторые характеристические, в широком смысле, свойства нормального распределения.	129
З. А. Кареян—Минимальное разложение орграфа на орлеса	193
М. А. Хачатрян—О сложности по выводимости некоторых формул в секвенциальных исчислениях	198
Ю. М. Мовсисян—Группонды, являющиеся объединениями групп.	203
С. Х. Дарбинян, К. М. Мосесян—О панцикличности регулярных орграфов.	208
А. А. Мартиросян, Э. М. Погосян—Исследование устойчивости сравнительных характеристик согласующих индукторов	212
А. Г. Григорян—Кольца эндоморфизмов модулей над малыми предаддитивными категориями	216
Л. В. Микаелян—Аналог формулы Кристоффеля для ортогональных многочленов на единичной окружности S^1	257
А. И. Петросян—О равномерном приближении голоморфных функций в некоторых областях пространства	264
М. Ж. Григорян—Представление функций классов $L^p[0,1]$, $1 < p < 2$ ортогональными рядами	269
С. Г. Рубанович—О сингулярных интегральных уравнениях с разрывными коэффициентами	275
С. М. Гюлумян, К. М. Мосесян—О критических по числу вершинного k -разбиения графах	281
Г. А. Барсегян—О дефектах и росте мероморфных функций конечного нижнего порядка	291
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА	
Р. С. Минасян—О смешанной граничной задаче теплопроводности для шара.	132
МЕХАНИКА	
А. Г. Галоян—О поперечных колебаниях пластинок, изготовленных из разномодульного материала	29
М. В. Белубекян—О задаче колебаний мембраны в сверхзвуковом потоке газа	74

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- А. В. Саакян*—Построение функций влияния для упругой полосы от движущихся по ее краям с постоянной скоростью сосредоточенных сил и тепловых источников 78
- А. А. Баблоян, А. П. Мелконян*—Осесимметричная задача для вращающегося цилиндра, ослабленного периодическими цилиндрическими трещинами 138
- В. С. Макарян*—Об одной осесимметричной контактной задаче для упругого слоя, расслабленного монетообразной трещиной 145
- М. Н. Лазарев, П. И. Перлин*—О решении задач пространственной теории упругости для кусочно-однородной среды 295

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

- С. А. Енгибарян*—О плоской контактной задаче нелинейной установившейся ползучести с учетом сил сцепления 34
- Л. А. Шемян*—К контактной задаче об ударе тела по свободно опертой упругой балке 86

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

- А. Г. Носифьян*—О принципах энергообмена в электромагнитном осцилляторе (LC-контур) 221

ФИЗИКА

- В. О. Пипаян*—Обобщенное представление собственного времени для квантовой электродинамики на малых расстояниях 41
- Г. А. Варданян*—Связанное состояние перегибов в квантовом кристалле 47

АСТРОФИЗИКА

- С. Г. Искусдарян*—Предварительные данные статистического исследования IggII галактик 93
- О. В. Пикичян*—Задача диффузного отражения при произвольном законе перераспределения излучения по частотам 151
- Б. О. Крпалетян, В. С. Осканян*—Информационные критерии оценки эффективности астрофизических наблюдений 302

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- С. Б. Гукасян, К. А. Костанян*—Об электропроводности стекол системы $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-(\text{SiO}_2, \text{GeO}_2, \text{V}_2\text{O}_5)$ 101

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- С. Г. Моцоян, С. Л. Энфиаджян, В. А. Даниелян, Л. А. Саркисян*—Изучение процесса радикальной сополимеризации и теломеризации бинарной системы с передачей цепи на сомономер на примере винилацетат—гексахлорбутадиев 162

ГЕОФИЗИКА

- Е. П. Леман, А. А. Тамразян, В. А. Арцубашев*—Эффективные коэффициенты ослабления гамма квантов в гетерогенных средах с биноминимальным законом распределения неоднородностей 51
- Д. С. Григорян*—Об оценке запасов железорудных месторождений по данным магнитной съемки 157

ТЕКТОНИКА

- С. П. Назаретян*—Оценка сейсмичности сейсмоактивных глубинных разломов на территориях Армянской ССР и Нахичеванской АССР и попытка выделения восьмибалльной сейсмической зоны 106

С. И. Назаретян—Общие закономерности размещения глубоких разломов на территориях Армянской ССР и Нахичеванской АССР 232

БИОФИЗИКА

С. А. Баджиян, М. И. Агаджанов, В. Г. Мхитарян—Исследование мембранного потенциала гепатоцитов крыс после ожоговой травмы 168

БИОХИМИЯ

Р. А. Захарян, Р. Г. Погосян—Индукция глюкокортикоидами деградации ДНК хроматина лимфоцитов в регулярно повторяющиеся участки, *in vivo* 110

БИОХИМИЯ

А. А. Галоян, А. К. Антомян, В. В. Басев, Р. Г. Галстян—Влияние нового гипоталамического полипептида на секрецию инсулина у крыс 172

А. А. Галоян, Р. М. Срапионян, Р. О. Карапетян, Ф. М. Саакян, С. А. Саакян, Г. А. Сарибекян—Модифицированный способ выявления двух изоформ нейrogормона «С» путем диссоциации на глицинамидированном сефадексе G—10 176

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. В. Казарян, С. О. Закарян—К вопросу о реакции хвои некоторых интродуцентов к зимним условиям Ереванского ботанического сада 56

В. О. Казарян, Ж. М. Аколова—О влиянии витаминов и гиббереллина на образование хлорофилла, активность фотосинтеза и продолжительность жизни изолированных листьев 237

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хизорян—Новый вид жука-точильщика из Таджикистана (Coleoptera, Anobiidae) 61

С. М. Яблоков-Хизорян—Новый род и вид жесткокрылых-кокциnellид с Арала (Coleoptera, Coccinellidae) 115

Е. К. Эртевцян—Новые виды энциртид (Hymenoptera, Encyrtidae) из Армении 118

С. М. Яблоков-Хизорян—Два новых вида жесткокрылых-кокциnellид из Восточной Азии 180

С. М. Яблоков-Хизорян—Новый вид жесткокрылых-малашек из Армянской ССР (Coleoptera, Dasytidae) 243

С. М. Яблоков-Хизорян—Новый вид жесткокрылых-скрытнохоботников из Армении (Coleoptera, Curculionidae) 308

МЕДИЦИНА

В. М. Арутюнян, М. Г. Микаелян—Тиреотропная функция гипофиза при бруцеллезе 184

ФАРМАКОЛОГИЯ

С. А. Мирзоян, С. Г. Мовсесян, Р. С. Бекян—Влияние эуфиллина на механизмы образования и устранения аммака в мозге при нарушениях церебральной гемодинамики 246

ФИЗИОЛОГИЯ

А. А. Экимян, Г. Е. Григорян, Б. А. Арутюнян-Козак—Особенности строения зрительных рецептивных полей нейронов пульвинара 123

В. Л. Городнов, В. В. Фанирджян—Корковые синаптические входы нейронов красного ядра 183

А. С. Андреасян—Роль гипоталамуса в процессе восстановления нарушенных функций при повреждении спинного мозга 251

CONTENTS OF LXVII VOLUME

MATHEMATICS

	P.
<i>E. A. Daniellian</i> On busy periods of single server queues with service interruptions	3
<i>A. I. Petrosyan</i> About the solution with the estimate of the Δ equation in some domains	13
<i>R. G. Hairapetian</i> On Equivalent forms of Lopatinsky Condition for second order hyperbolic equations	18
<i>A. H. Arakelian</i> Minimal bipartial ideals in partial semigroup of homomorphisms of relatives	25
<i>V. N. Vardazarian</i> —On the state of density of one—dimensional Dirac systems with model random potentials	65
<i>M. V. Kazarian</i> —On separate meromorphic functions	69
<i>S. T. Mkrtchian</i> —Stability of characterizations of distributions and some characteristic properties of normal distribution in a wide sense	129
<i>Z. A. Kareyan</i> —Minimum partition of a digraph into diforests	193
<i>M. H. Khuchatrian</i> —On the deductional complexity of some formulas in the calculi of sequences	198
<i>Yu. M. Movsisian</i> —Groupoids representing sums of groups	201
<i>S. Kh. Darbinian, K. M. Mosesian</i> —On pancyclic regular digraphs	208
<i>A. A. Murtirosian, E. M. Pogossian</i> —The investigations of the concordant inductor comparative characteristic stability	212
<i>A. G. Grigorian</i> —Endomorphism rings of modules over small preadditive categories	216
<i>L. V. Mikaellan</i> —The analogue of the formula of Kristoffell for orthogonal polynomials on the unit circle	257
<i>A. I. Petrosian</i> —On holomorphic approximation on some domains in C^n	264
<i>M. G. Grigorian</i> —On the representation of functions from the $L_p, 1 < p < 2$ spaces by orthogonal series	269
<i>S. G. Rubanovich</i> —On singular integral equations possessing discontinuous coefficients	275
<i>S. M. Gyulumian, K. M. Mosession</i> —On critical graphs upon vertex number of k -partition	281
<i>Yu. M. Movsisian</i> —About the groups of semilinear Transformations	285
<i>G. A. Barsegian</i> —On the defect and growth of the meromorphic function of the finite lower order	291

APPLIED MATHEMATICS

<i>R. S. Minassian</i> —On the mixed boundary-value heat conduction problem on the sphere	132
---	-----

MECHANICS

<i>A. H. Galoyan</i> On transversal vibration of plates made from different modul material	29
<i>M. V. Belubekian</i> —On the membrane vibration problem in the supersonic gas flow	74

THEORY OF ELASTICITY

A. V. Sahakian—Construction of the functions of influence for an elastic strip from moving along its edges with permanent velocity of concentrated forces and thermal sources 7

A. A. Bubloyan, A. P. Melkonian—The axisymmetric problem for a rotating cylinder weakened by the periodical cylindrical cracks 13

W. S. Macarian—On an axisymmetric contact problem for the elastic layer, weakened by coin-shaped crack 1

M. I. Lazarev, P. I. Pertin—On the solution of the problem of the space theory of elasticity for a piece-homogeneous medium 29

THEORY OF CREEP

S. A. Engharian On a plane contact problem of nonlinear nonstability creep with friction forces calculation 34

L. A. Shekian—On the contact problem of nonlinear theory of stable creep on the impact of the body along the free—supported elastic beam 8

ELECTRODYNAMICS

A. G. Iossiphian—On the principles of the power exchange in electromagnetic oscillators (LC—contur) 21

PHYSICS

V. O. Papanyan—Generalized Proper-time Representation for Quantum Electrodynamics at Short Distances 41

G. A. Vardanian—Bound states of the kinks in the quantum crystal 47

ASTROPHYSICS

S. G. Iskudarian—The preliminary data of statistical research of the Irril type galaxies 9

H. V. Ptkidjian—The problem of diffuse reflection of radiation in the case of arbitrary law of frequency redistribution 151

B. H. Karapettian, V. S. Oskanian—Efficiency estimation of astrophysical observations by information criteria 302

PHYSICAL CHEMISTRY

S. B. Gukaslan, K. A. Kostanian—The electrical conductivity of the glass systems $\text{Na}_2\text{O}-\text{Al}_2\text{O}_3-(\text{SiO}_2, \text{GeO}_2, \text{B}_2\text{O}_3)$ 101

ORGANIC CHEMISTRY

S. G. Matsoyan, S. L. Enflajlan, V. H. Danellian, L. A. Sarkisian—Investigation of radical copolymerization and telomerization of binary system followed by transferring the chain on comonomer in the case of vinylacetate-hexachlorbutadiene 162

GEOPHYSICS

E. P. Leman, A. A. Tamrazyan, V. A. Artsybashev—Effective Attenuation Coefficients of Gamma-Rays in Heterogeneous Media with Inhomogenety Binominal Distribution Principle 61

D. C. Grigorian—On estimate of iron-ore deposit reserves from magnetic survey data 157

TECTONICS

S. N. Nasaretian—Seismicity evaluation of seismo—active deep faults on Armenian SSR and Nakhichevan ASSR territories and an attempt to single out intensity VIII seismic zone 107

S. N. Nazarelian — Common rules of placing deep faults in the territory of Armenia and the Nachichevantan Autonomy Republic 232

BIOPHYSICS

S. A. Badjlnian, M. I. Aghudjanov, V. G. Mkhitarlan — A study of membrane potential of rat hepatocytes after traumatic burns 168

BIOCHEMISTRY

R. A. Zakharian, R. G. Pogosian — DNA in chromatin of lymphoid tissues degrading into regular fragments, in vivo, after the effect of glucocorticoids 110

A. A. Galoyan, A. K. Antonian, V. V. Baev and R. G. Galstian — The influence of new hypothalamic polypeptide on rat insulin secretion 172

A. A. Galoyan, R. M. Sraplonian, R. O. Karapetian, F. M. Sahakian, S. A. Sahakian, G. A. Saribekian — Modified method of isolation of two isoforms of neurohormone „C“ by dissociation on glycinamidated sefadex G-10 176

PLANT PHYSIOLOGY

V. V. Kazaryan, S. O. Zakaryan — To the question about the reaction of conifers of some introduction to the winter conditions of Yerevan Botanical Garden 56

V. O. Kazarian, J. M. Akopova — About the influence of vitamin and gibberellin on formation of the chlorophyll activity of photosynthesis and duration life of leaves 237

ENTOMOLOGY

S. M. Iablokoff-Khuzorian — A new species of Anobid-beetles from the Tadzhikistan (Coleoptera, Anobiidae) 61

S. M. Iablokoff-Khuzorian — A new genus and species of Ladybeetles from the Aral (Coleoptera, Coccinellidae) 115

E. K. Herthvezian — New encyrtid species (Hymenoptera, Encyrtidae) from Armenia 118

S. M. Iablokoff-Khuzorian — Two new species of ladybeetles from Eastern Asia (Coleoptera, Coccinellidae) 180

S. M. Iablokoff-Khuzorian — A new species of Dasytidae-beetles from the Armenian Soviet Socialist Republic 243

S. M. Iablokoff-Khuzorian — A new species of Curculionidae-beetles from Armenia 308

MEDICINE

V. M. Haroutunian, M. G. Mikaelian — Thyreotropic function of hypophys in brucellosis 184

PHARMACOLOGY

S. A. Mirzoyan, S. G. Moosaxstan, R. S. Bekyan — The influence of eupylline on the ammonia releasing and removing mechanisms in the brain at the cerebral hemodynamic disturbances 246

PHYSIOLOGY

A. A. Hekimian, G. E. Grigorian, B. A. Harutiunian-Kozak — The properties of the visual receptive field structure of neurons in the pulvinar 123

V. L. Gorodnov, V. V. Fanardjan — Cortical synaptic inputs of the red nucleus neurones 188

A. S. Andreastan — The influence of destruction of different parts of hypothalamus on the plasticity in injuries of the spinal cord 251

