ISSN 0321—1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXVII, № 5

1978

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ Էջ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

ԳԻՆԸ 30 կ.
ЦЕНА 30 к.

Индекс 77730

CONTENTS

MATHEMATICS P.

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04455. Подписано к печати 5.III.1979 г. Тираж 515. Изд. 4983. Заказ 1303
Формат бумаги 70×108$^1/_{16}$. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2.
Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,41.

Издательство АН АрмССР, Ереван, Барекамутян 24-г.
Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Л. В. Микаелян

Аналог формулы Кристоффеля для ортогональных многочленов на единичной окружности

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/VI 1978)

Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ система ортонормированных многочленов на единичной окружности относительно обложения $d\sigma(t)$, $(-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(z)\overline{\varphi_m(z)}d\sigma(t)=\delta_{k,m}, \qquad z=e^{it}.$$

Рассмотрим новое обложение

$$d\sigma'(t)=Q(t)d\sigma(t),$$

где

$$Q(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

неотрицательный тригонометрический многочлен. Пусть $\{\varphi_k'(z)\}_{k=0}^{\infty}$ система ортонормированных многочленов на единичной окружности относительно этого нового обложения.

Цель нашей заметки установить связь между многочленами $\{\varphi_k'(z)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. Полученная в заметке формула (5) отличается от ранее полученной формулы Б. Л. Голинского [1], который выразил многочлены $\varphi_j'^{*}(z)$, где $\varphi_j^{*}(z)=z^j\overline{\varphi}_j(z^{-1})$, через полиномиальные ядра $K_n(z,\zeta)=\sum\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}$. Формула (5) является аналогом известной формулы Кристоффеля [2], выражающей многочлены $q_k(x)$ ортогональные не отрезке (a,b) вещественной прямой относительно обложения $\rho(x)d\alpha(x)$ через многочлены ортогональные на (a,b) относительно обложения $d\alpha(x)$. Здесь $\rho(x)$ — многочлен от x.

В 1959 году В. Б. Уваров [3] обобщил последний результат на случай, когда обложение умножается на рациональную функцию от x.

1. Пусть

$$Q(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

— неотрицательный тригонометрический многочлен. Как известно, в этом случае $Q(t)$ допускает представление

$$Q(t)=|a\prod_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)|^2,\quad z=e^{it},$$

где a и α_j ($j=1, 2, \ldots, n$) некоторые числа. Чтобы укоротить записи, допустим, что $\sigma(t)$ в данном обложении абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т. е.

$$d\sigma(t)=f(t)dt,\quad f(t)\geqslant 0.$$

Сначала рассмотрим простой случай, когда

$$Q(t)=|z-\alpha|^2 \quad \text{и} \quad d\sigma'(t)=|e^{it}-\alpha|^2 f(t)dt,\quad |\alpha|\neq 1.$$

Обозначим через π_n оператор проектирования в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ на подпространство многочленов степени не выше n, т. е.

$$\pi_n\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ikt}=\sum_{k=0}^{n}c_k e^{ikt}.$$

Пусть

$$T_n'=\pi_n|e^{it}-\alpha|^2 f(t)\pi_n,$$

$$T_n=\pi_n f(t)\pi_n,$$

$$\hat{T}_n=\pi_n|e^{it}-\alpha|^2\pi_n.$$

Нетрудно проверить, что

$$T_n'=T_n\cdot\hat{T}_n-A_n,$$

где

$$A_n=\alpha(\,\cdot\,,e_0)\pi_n z^{-1}f(t)+\bar{\alpha}(\,\cdot\,,e_n)\pi_n z^{n+1}f(t),\quad z=e^{it},$$

$e_k=e^{ikt}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$.

Рассмотрим уравнения:

$$T_n H_n(z)=z^n \quad \text{и} \quad T_n' H_n'(z)=z^n.$$

Как известно ([4]),

$$H_n(z)=d(n)\varphi_n(z) \quad \text{и} \quad H_n'(z)=d'(n)\varphi_n'(z),$$

где

$$|d(n)|^2=\frac{\det T_n}{\det T_{n-1}} \quad \text{и} \quad |d'(n)|^2=\frac{\det T_n'}{\det T_{n-1}'}.$$

Решим теперь уравнение:

$$T_n' H_n'(z)=z^n. \qquad (1)$$

Полагая

$$H'_n(z) = h_0 + h_1 z + \cdots + h_n z^n, \qquad \text{имеем:}$$

$$A_n H'_n(z) = \alpha h_0 \pi_n z^{-1} f + \bar{\alpha} h_n \pi_n z^{n+1} f.$$

Поэтому уравнение (1) может быть записано в виде:

$$T_n \hat{T}_n H'_n(z) = z^n + \alpha h_0 \pi_n z^{-1} f + \bar{\alpha} h_n \pi_n z^{n+1} f$$

или

$$\hat{T}_n H'_n(z) = T_n^{-1} z^n + \alpha h_0 T_n^{-1} \pi_n z^{-1} f + \bar{\alpha} h_n T_n^{-1} \pi_n z^{n+1} f.$$

Пусть

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k z^k \quad \text{и} \quad \varphi_n^*(z) = z^n \bar{\varphi}_n(z^{-1}).$$

После некоторых расчетов, можно убедиться в том, что

$$T_n^{-1} \pi_n z^{-1} f = [z \varphi_{n+1}^*(0)]^{-1} [\varphi_{n+1}^*(0) - \varphi_{n+1}^*(z)],$$

$$T_n^{-1} \pi_n z^{n+1} f = (\varphi_{n+1}^{n+1})^{-1} [\varphi_{n+1}^{n+1} z^{n+1} - \varphi_{n+1}(z)]$$

и, стало быть, что

$$\hat{T}_n H'_n(z) = d(n) \varphi_n(z) + \alpha h_0 \frac{\varphi_{n+1}^*(0) - \varphi_{n+1}^*(z)}{z \varphi_{n+1}^*(0)} +$$

$$+ \bar{\alpha} h_n \frac{\varphi_{n+1}^{n+1} z^{n+1} - \varphi_{n+1}(z)}{\varphi_{n+1}^{n+1}}. \qquad (2)$$

Так как

$$|e^{i\theta} - \alpha|^2 = z^{-1}(z - \alpha)(1 - z\bar{\alpha}), \quad z = e^{it},$$

то

$$\hat{T}_n H'_n(z) = z^{-1}(z - \alpha)(1 - z\bar{\alpha}) H'_n(z) + \alpha h_0 z^{-1} + \bar{\alpha} h_n z^{n+1}.$$

Подставляя это значение в (2) получаем уравнение

$$H'_n(z) = \frac{1}{(z-\alpha)(1-z\bar{\alpha})} \left\{ d(n) z \varphi_n(z) - \alpha h_0 \frac{\varphi_{n+1}^*(z)}{\varphi_{n+1}^*(0)} - \bar{\alpha} h_n \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_{n+1}^{n+1}} \right\} \qquad (3)$$

Для определения h_0 и h_n потребуем, чтобы выражение в фигурных скобках имело нули в точках α и $1/\bar{\alpha}$. Это приводит к равенствам:

$$\begin{cases} \alpha h_0 \dfrac{\varphi_{n+1}^*(\alpha)}{\varphi_{n+1}^*(0)} + \bar{\alpha} h_n \dfrac{\varphi_{n+1}(\alpha)}{\varphi_{n+1}^{n+1}} = d(n) \alpha \varphi_n(\alpha) \\ \alpha h_0 \dfrac{\varphi_{n+1}^*(1/\bar{\alpha})}{\varphi_{n+1}^*(0)} + \bar{\alpha} h_n \dfrac{\varphi_{n+1}(1/\bar{\alpha})}{\varphi_{n+1}^{n+1}} = d(n) \dfrac{1}{\bar{\alpha}} \varphi_n\left(\dfrac{1}{\bar{\alpha}}\right). \end{cases}$$

Решая полученную систему, подставляя значения h_0 и h_n в (3) и обозначая $\alpha^* = 1/\bar{\alpha}$, находим

$$H_n(z)=\frac{d(n)}{\Delta(z-\alpha)(1-z\bar{\alpha})}\,[z\varphi_n(z)\varphi_{n+1}(\alpha^*)\varphi^*_{n+1}(\alpha)-$$

$$-z|\alpha|^2\varphi_n(z)\varphi_{n+1}(\alpha)\varphi^*_{n+1}(\alpha^*)-\alpha\varphi^*_{n+1}(z)\varphi_n(\alpha)\varphi_{n+1}(\alpha^*)+\alpha\varphi^*_{n+1}(z)\varphi_n(\alpha^*)\varphi_{n+1}(\alpha)-$$

$$-z\varphi_{n+1}(z)\varphi_n(\alpha^*)\varphi^*_{n+1}(\alpha)+|\alpha|^2z\varphi_{n+1}(z)\varphi_n(\alpha)\varphi^*_{n+1}(\alpha^*)],$$

где

$$\Delta=\varphi^*_{n+1}(\alpha)\varphi_{n+1}(\alpha^*)-|\alpha|^2\varphi^*_{n+1}(\alpha^*)\varphi_{n+1}(\alpha).$$

Или в компактном виде:

$$H_n^{\cdot}(z)=\frac{d(n)}{\Delta(z-\alpha)\,(1-z\bar{\alpha})}\begin{vmatrix} z\varphi_n(z) & \alpha\varphi_n(\alpha) & \alpha^*\varphi_n(\alpha^*)\\ z\varphi_{n+1}(z) & \alpha\varphi_{n+1}(\alpha) & \alpha^*\varphi_{n+1}(\alpha^*)\\ \varphi^*_{n+1}(z) & \varphi^*_{n+1}(\alpha) & \varphi^*_{n+1}(\alpha^*)\end{vmatrix}.$$

Но так как $\varphi_n^{\cdot}(z)$ отличается от $H_n^{\cdot}(z)$ постоянным множителем, то

$$\varphi_n^{\cdot}(z)=\frac{c_n}{(z-\alpha)\,(z-\alpha^*)}\begin{vmatrix} z\varphi_n(z) & \alpha\varphi_n(\alpha) & \alpha^*\varphi_n(\alpha^*)\\ z\varphi_{n+1}(z) & \alpha\varphi_{n+1}(\alpha) & \alpha^*\varphi_{n+1}(\alpha^*)\\ \varphi^*_{n+1}(z) & \varphi^*_{n+1}(\alpha) & \varphi^*_{n+1}(\alpha^*)\end{vmatrix} \tag{4}$$

Если $\alpha=\alpha^*$, то

$$\varphi_n^{\cdot}(z)=\frac{c_n}{(z-\alpha)^2}\begin{vmatrix} z\varphi_n(z) & \alpha\varphi_n(\alpha) & [z\varphi_n(z)]^{\cdot}_{z=\alpha}\\ z\varphi_{n+1}(z) & \alpha\varphi_{n+1}(\alpha) & [z\varphi_{n+1}(z)]^{\cdot}_{z=\alpha}\\ \varphi^*_{n+1}(z) & \varphi^*_{n+1}(\alpha) & [\varphi^*_{n+1}(z)]^{\cdot}_{z=\alpha}\end{vmatrix} \tag{4'}$$

В обеих формулах c_n — нормировочная постоянная.

2°. Перейдем к рассмотрению общего случая

Пусть $d\sigma'(t)=Q(t)d\sigma(t)$. Предположим, что $\sigma'(t)$ имеет бесконечное множество точек роста. Напишем $Q(t)$ в удобной для нас форме

$$Q(t)=|a|^2\prod_{j=1}^{n}|z-\alpha_j|^2=|a|^2z^{-n}\prod_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)(1-z\bar{\alpha}_j).$$

Не умаляя общности можно предполагать, что $|a|=1$. Кроме того, сначала предположим, что $\alpha_j\neq\alpha_k$, если $j\neq k$ и

$$|\alpha_j|\neq1,\ (j,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Тогда, если $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированная система многочленов относительно обложения $d\sigma(t)$, а $\{\varphi_k^{\cdot}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ относительно $d\sigma'(t)$, то для $\varphi_k^{\cdot}(z)$ справедлива следующая формула:

$$\varphi_k^{\cdot}(z)=\frac{c_k}{\prod\limits_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)(z-\alpha_j^*)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} z^n\varphi_k(z) & \alpha_1^n\varphi_k(\alpha_1) & \alpha_1^{*n}\varphi_k(\alpha_1^*) & \dots & \alpha_n^n\varphi_k(\alpha_n) & \alpha_n^{*n}\varphi_k(\alpha_n^*) \\ z^n\varphi_{k+1}(z) & \alpha_1^n\varphi_{k+1}(\alpha_1) & \alpha_1^{*n}\varphi_{k+1}(\alpha_1^*) & \dots & \alpha_n^n\varphi_{k+1}(\alpha_n) & \alpha_n^{*n}\varphi_{k+1}(\alpha_n^*) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ z^n\varphi_{k+n}(z) & \alpha_1^n\varphi_{k+n}(\alpha_1) & \alpha_1^{*n}\varphi_{k+n}(\alpha_1^*) & \dots & \alpha_n^n\varphi_{k+n}(\alpha_n) & \alpha_n^{*n}\varphi_{k+n}(\alpha_n^*) \\ z^{n-1}\varphi^*_{k+1}(z) & \alpha_1^{n-1}\varphi^*_{k+1}(\alpha_1) & \alpha_1^{*n-1}\varphi^*_{k+1}(\alpha_1^*) & \dots & \alpha_n^{n-1}\varphi^*_{k+1}(\alpha_n) & \alpha_n^{*n-1}\varphi^*_{k+1}(\alpha_n^*) \\ z^{n-2}\varphi^*_{k+2}(z) & \alpha_1^{n-2}\varphi^*_{k+2}(\alpha_1) & \alpha_1^{*n-2}\varphi^*_{k+2}(\alpha_1^*) & \dots & \alpha_n^{n-2}\varphi^*_{k+2}(\alpha_n) & \alpha_n^{*n-2}\varphi^*_{k+2}(\alpha_n^*) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ z\varphi^*_{k+n-1}(z) & \alpha_1\varphi^*_{k+n-1}(\alpha_1) & \alpha_1^*\varphi^*_{k+n-1}(\alpha_1^*) & \dots & \alpha_n\varphi^*_{k+n-1}(\alpha_n) & \alpha_n^*\varphi^*_{k+n-1}(\alpha_n^*) \\ \varphi^*_{k+n}(z) & \varphi^*_{k+n}(\alpha_1) & \varphi^*_{k+n}(\alpha_1^*) & \dots & \varphi^*_{k+n}(\alpha_n) & \varphi^*_{k+n}(\alpha_n^*) \end{vmatrix} \qquad (5)$$

где c_k — нормировочная постоянная.

Приведенное выражение для $\varphi'_k(z)$ подсказано формулой (4). Докажем справедливость формулы (5).

В самом деле из (5) следует, что

$$\varphi'_k(z)=\frac{c'_k}{\prod\limits_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)(1-z\bar{\alpha}_j)}\left\{z^n\sum_{j=0}^{n}\mu_j\varphi_{k+j}(z)+\sum_{j=1}^{n}\nu_j z^{n-j}\varphi^*_{k+j}(z)\right\}.$$

Поэтому, если $p=0,1,\dots,k-1$ и $z=e^{it}$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'_k(z)\,\bar{z}^p\,d\sigma'(t)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{k+j}(z)\,\bar{z}^p d\sigma(t)+\sum_{j=1}^{n}\nu_j\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^*_{k+j}(z)\,\bar{z}^{j+p}d\sigma(t)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\nu_j\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi_{k+j}(z)z^{k-p}}\,d\sigma(t)=0.$$

Остается доказать, что $\varphi'_k(z)$ многочлен точно степени k. Для этого достаточно убедиться, что коэффициент при $z^n\varphi_{n+k}(z)$ не обращается в нуль. Допустим противное. Тогда существуют постоянные C_j, $(j=0,1,\dots,n-1)$ и d_l $(l=1,2,\dots,n)$, не все равные нулю, такие, что выражение

$$P(z)=z^n\sum_{j=0}^{n-1}C_j\varphi_{k+j}(z)+\sum_{l=1}^{n}d_l z^{n-l}\varphi^*_{k+l}(z)$$

обращается в нуль в точках $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ и $\alpha_1^*,\alpha_2^*,\dots,\alpha_n^*$. Следовательно, $P(z)=\prod\limits_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)(z-\alpha_j^*)G(z)$, где $G(z)$ — многочлен степени не выше $k-1$.

Нетрудно проверить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(z) z^{-n} u(z) d\sigma(t) = 0,\ z = e^{it},$$

где $u(z)$—любой многочлен степени не выше $k-1$. В частности

$$\int_{-\pi}^{\pi} z^{-n} P(z)\, G(z) d\sigma(t) = 0,\ z = e^{it},$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi} |G(z)|^2 d\sigma'(t) = 0,\ z = e^{it}.$$

Отсюда $G(z)=0$ в точках роста функции $\sigma'(t)$. Но мы предполагаем, что $\sigma'(t)$ имеет бесконечное множество точек роста, поэтому $G(z)\equiv 0$, что невозможно.

Если какие-либо значения $\alpha_i=\alpha_i^*$, то в определителе (5) на месте $(2i+1)$-го столбца надо писать производные 1-го столбца в точке α_i.

Если $\alpha_i=\alpha_j$ и $\alpha_i \neq \alpha_i^*$, $\alpha_j \neq \alpha_j^*$, то на месте 2_j и (2_j+1)—их столбцов надо писать производные 1-го столбца соответственно в точках α_i и α_i^*.

И наконец, если среди α_i ($i=1,2,\ldots, n$) есть точки, совпадающие и лежащие на единичной окружности, то в определителе (5) будут участвовать производные высших порядков первого столбца в соответствующих точках.

Отметим еще, что из формулы (5) можно получить ортогональные многочлены относительно веса, являющегося положительным тригонометрическим многочленом, если положить в нем $\varphi_k(z)=z^k$.

Выражаю искреннюю благодарность В. М. Адамяну за постоянное внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Քրիստոֆելի բանաձևի անալոգը միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ բազմանդամների համար

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. արտահայտել միավոր շրջանագծի վրա $Q(t)d\sigma(t)$ կշռի նկատմամբ օրթոգոնալ բազմանդամները, որտեղ՝

$$Q(t) = a_0 + 2\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

դրական եռանկյունաչափական բազմանդամ է նույն շրջանագծի վրա $d\sigma(t)$ կշռի նկատմամբ օրթոգոնալ բազմանդամներով։ Հոդվածում ապացուցված (5) բանաձևը հանդիսանում է Քրիստոֆելի հայտնի բանաձևի անալոգը և լուծում է վերևում նշված խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Л. Голинский*, «Известия Вузов», Математика, № 1 (2) (1958) [2] *Г. Сеге*, Ортогональные многочлены, М., 1962. [3] *В. Б. Уваров*, ДАН СССР, т. 126, № 1 (1959) [4] *У. Гренандер, Г. Сеге*, Теплицевы формы и их приложения, ИЛ, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 5

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О равномерном приближении голоморфных функций в некоторых областях пространства C^n

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/VI 1978)

Пусть D—ограниченная область голоморфности в пространстве C^n, задаваемая следующим образом:

$$D=\{z:\rho(z)<0,\ |\chi(z)|<1\}. \tag{1}$$

Здесь $\chi(z)$—функция, голоморфная в некоторой окрестности Ω замыкания области D; $\rho(z)$—вещественнозначная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, строго плюрисубгармоническая в Ω, т. е. квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\,\partial\bar z_k}w_j\bar w_k$$

положительно определена при всех $z\in\Omega$. Область D предполагается невырожденной. Это означает, что

$$\operatorname{grad}\rho(z)\neq 0 \quad \text{на грани} \quad \sigma_1=\{z\in\bar D:\rho(z)=0\},$$

$$\operatorname{grad}\chi(z)\neq 0 \quad \text{на грани} \quad \sigma_2=\{z\in\bar D:|\chi(z)|=1\},$$

$$\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix}\operatorname{grad}\rho(z), & \overline{\operatorname{grad}\rho(z)}\\ \operatorname{grad}\chi(z), & \overline{\operatorname{grad}\chi(z)}\end{matrix}\right\|=2 \quad \text{на остове} \quad \sigma_1\cap\sigma_2.$$

Область D является, так сказать, областью „типа полушара“.

Через $C_A(\bar D)$ обозначается банахово пространство функций f, голоморфных в D и непрерывных на $\bar D$, с равномерной нормой

$$\|f\|=\|f\|_{\bar D}=\sup_{z\in\bar D}|f(z)|.$$

Настоящая работа посвящена доказательству следующего результата.

Теорема. *Для всякой функции $f\in C_A(\bar D)$ и числа $\varepsilon>0$ существует функция F, голоморфная в некоторой окрестности $\bar D$, такая, что*

$$\|f-F\|<\varepsilon.$$

Доказательство основано на известной схеме сведения задачи равномерного приближения к решению $\bar{\partial}$-уравнения с равномерной оценкой (см., например, [1]). Формулы для решения $\bar{\partial}$-уравнения с оценкой в случае областей рассматриваемого типа даны в работе [2].

Следующая лемма утверждает возможность локального приближения функций из $C_A(D)$.

Лемма. *Существует конечная система шаров B_k $(k=1, 2, \ldots, p)$, покрывающая границу ∂D области D $(\partial D \subset \bigcup_{k=1}^{p} B_k)$, таких, что сужение всякой функции $f \in C_A(D)$ на множество $\bar{B}_k \cap \bar{D}$ равномерно приближается функциями, голоморфными в окрестности $\bar{B}_k \cap \bar{D}$.*

Доказательство. Пусть $f \in C_A(D)$. В силу вещественной невырожденности области D для каждой точки $\zeta \in \partial D$ существуют шар B_ζ с центром в ζ и единичный вектор ν_ζ такие, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ функция $f(z+\delta\nu_\zeta)$ голоморфна в окрестности множества $\bar{B}_\zeta \cap \bar{D}$. Поскольку f равномерно непрерывна на $\bar{D}$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$|(f(z+\delta\nu_\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

при всех $\delta < \delta_0$ и $z \in \bar{B}_\zeta \cap \bar{D}$. Затем из покрытия $\{B_\zeta\}$ компакта ∂D выбираем конечное семейство $B_1, B_2, \ldots, B_p$.

Доказательство теоремы. Построим систему бесконечно дифференцируемых, неотрицательных, финитных функций $g_k(z)$, $(k=0, 1, \ldots, p)$, удовлетворяющих условиям

а). $\operatorname{Supp} g_0 \subset D$, $\operatorname{Supp} g_k \subset B_k$, $(k=1, \ldots, p)$;

б). $\sum_{k=0}^{p} g_k(z) = 1$ в некоторой окрестности множества $\bar{D}$.

Для $\varepsilon > 0$ построим области

$$D^\varepsilon = \{z : \varphi(z) < \varepsilon,\ |\chi(z)| < 1+\varepsilon\}.$$

Согласно лемме, существуют окрестности V_k^ε множеств $\bar{B}_k \cap \bar{D}$ и функции f_k^ε, голоморфные в V_k^ε такие, что

$$\|f_k^\varepsilon - f\|_{\bar{B}_k \cap \bar{D}} < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{2}$$

Обозначим, далее, $V_0^\varepsilon = D$, $f_0^\varepsilon = f$. Неравенство (2) справедливо тогда и при $k=0$. Число $\varepsilon > 0$ будем предполагать настолько малым, чтобы $\bar{D}^\varepsilon \subset \bigcup_{k=0}^{p} V_k^\varepsilon$ и чтобы условие б). выполнялось на $\bar{D}^\varepsilon$.

Рассмотрим следующие функции

$$h_{ik}^\varepsilon(z) = \begin{cases} [f_i^\varepsilon(z) - f_k^\varepsilon(z)]\, g_k(z), & z \in V_i^\varepsilon \cap V_k^\varepsilon, \\ 0, & z \in V_i^\varepsilon \setminus V_k^\varepsilon; \end{cases}$$

$$h_i'(z)=\sum_{k=0}^{p} h_{ik}'(z). \tag{3}$$

Из того, что носитель функции $g_k(z)$ принадлежит множеству $B_k\cap\bar{D}'$ (условие a), причем $B_k\cap\bar{D}'\subset V_k'\cap\bar{D}'$, следует, что функции h_{ik}' и h_i' бесконечно дифференцируемы на $V_i'\cap\bar{D}'$ и, с учетом (2), для всех $z\in V_i'\cap\bar{D}'$ удовлетворяют следующим оценкам

$$|h_{ik}'(z)|\leqslant|f_i'(z)-f_k'(z)|\leqslant|f_i'(z)-f(z)|+|f(z)-f_k'(z)|<2\varepsilon, \tag{4}$$

$$|h_i'(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{p}|h_{ik}'(z)|<2p\varepsilon. \tag{5}$$

Далее, при $z\in V_i'\cap V_j'\cap\bar{D}'$

$$h_i'(z)-h_j'(z)=\sum_{k=0}^{p}[f_i'(z)-f_k'(z)]g_k(z)-\sum_{k=0}^{p}[f_j'(z)-f_k'(z)]g_k(z)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}[f_i'(z)-f_j'(z)]g_k(z)=f_i'(z)-f_j'(z),$$

т. е.

$$h_i'(z)-f_i'(z)=h_j'(z)-f_j'(z),\ (i=0,1,\dots,p).$$

Это означает, что на $\bar{D}'$ глобально определена функция

$$h'(z)=h_i'(z)-f_i'(z),\ z\in V_i'\cap\bar{D}', \tag{6}$$

причем $h'\in C^\infty(\bar{D}')$. Используя неравенства (2) и (5), для $z\in B_i\cap\bar{D}$ имеем

$$|h'(z)-f(z)|\leqslant|h_i'(z)|+|f_i'(z)-f(z)|<(2p+1)\varepsilon.$$

Следовательно

$$\|h'-f\|_D<(2p+1)\varepsilon. \tag{7}$$

Далее, используя (6) и (3), с учетом, что функция f_i' голоморфна в V_i', имеем при $z\in V_i'\cap\bar{D}'$

$$|\bar{\partial}h'(z)|=|\bar{\partial}h_i'(z)|=|\sum_{k=0}^{p}\bar{\partial}h_{ik}'(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{p}|f_i'(z)-f_k'(z)||\bar{\partial}g_k(z)|. \tag{8}$$

Здесь

$$\bar{\partial}h'(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h'(z)}{\partial\bar{z}_k}d\bar{z}_k,$$

$$|\bar{\partial}h'(z)|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial h'(z)}{\partial\bar{z}_k}\right|.$$

Обозначив $\gamma_0=\gamma_0(D)=\max\limits_{0<k<p}\|\bar{\partial}g_k\|$, из (8) и (4) имеем

$$\|\bar{\partial}h'\|_{D'}\leqslant2\gamma_0\varepsilon. \tag{9}$$

Равенство (7) означает, что бесконечно дифференцируемая на $\overline{D'}$ функция h' приближает f с точностью $(2p+1)\varepsilon$. Теорема будет доказана, если нам удастся подобрать малую по модулю функцию u так, чтобы разность $h'-u$ была бы голоморфной в D', т. е. чтобы $\bar\partial(h'-u)=0$. Неравенство (9) означает, что $\bar\partial h'$ мало. Таким образом, задача сводится к решению с оценкой $\bar\partial$-уравнения

$$\bar\partial u=\bar\partial h' \tag{10}$$

в области D'. Правая часть в (10) — это гладкая $\bar\partial$ — замкнутая форма типа (0, 1); u — искомая функция. В работе [3] дана формула решения уравнения (10), удовлетворяющая равномерной оценке

$$\|u\|_{D'}\leqslant\gamma(D')\|\bar\partial h'\|_{D'}. \tag{11}$$

Анализ доказательства оценки (11) показывает, что константы $\gamma(D')$ ограничены, т.е.

$$\gamma(D')\leqslant\gamma=\gamma(D). \tag{12}$$

Из (11), (9) и (12) получаем

$$\|u\|_{D'}\leqslant 2\gamma_0\gamma\,\varepsilon. \tag{13}$$

Из (10) следует, что функция

$$F(z)=h'(z)-u(z)$$

голоморфна в области D'. Наконец, из (7) и (13) получается оценка

$$\|f-F\|_D\leqslant\|h'-f\|_D+\|u\|_D<(2p+1)\varepsilon+2\gamma_0\gamma\varepsilon=\gamma_1\varepsilon,$$

где постоянная γ_1 зависит только от области D.
Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

C^n տարածության մեջ որոշ տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների մոտարկման մասին

Դիցուք D-ն n-չափանի կոմպլեքս տարածության մեջ հոլոմորֆության տիրույթ է, որը որոշվում է հետևյալ պայմանով

$$D=\{z:\rho(z)<0,\ |\chi(z)|<1\},$$

որտեղ $\chi(z)$-ը հոլոմորֆ ֆունկցիա է D տիրույթի փակման որևէ շրջակայքում, իսկ $\rho(z)$-ը խիստ պլյուրիսուբհարմոնիկ է։ $C_A(D)$-ով նշանակենք

D-ում հոլոմորֆ և $\bar{D}$-ի վրա անընդհատ ֆունկցիաների տարածություն» հոդվածում ապացուցվում է, որ կամայական f ֆունկցիա, որը պատկանում է $C_1(D)$-ին, $\bar{D}$-ի վրա հավասարաչափ մոտարկվում է ֆունկցիաներով, որոնք հոլոմորֆ են $\bar{D}$-ի շրջակայքում։ Դրա համար նախ լեմայում ապացուցվում է f-ի լոկալ մոտարկման հնարավորությունը, իսկ հետո օգտագործվում է այն փաստը, որ D-ում $\bar{\partial}$—հավասարումը ունի լուծում, որը բավարարում է հավասարաչափ գնահատականին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. Lieb*, Math. Ann., v. 184, №1, (1969). [2] *А. И. Петросян*, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 1 (1978).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 5

УДК 517.512.7

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

Представление функции классов $L_p[0,1], 1\leqslant p<2$ ортогональными рядами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 26/VI 1976)

1. В работе [1] доказана следующая

Теорема А. (А. А. Талалян). *Если* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *полная в* $L_2[0,1]$ *ортонормированная система, то для любой* $f(x)\in L_p[0,1]$, $0<p<1$ *и любого натурального* N, *существует ряд*

$$\sum_{n>N} c_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

который сходится k $f(x)$ *в метрике* $L_p[0,1]$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x)-\sum_{k=N}^{n} c_k\varphi_k(x)\|_{L_p}=0. \tag{2}$$

Очевидно, эта теорема при $p\geqslant2$ не верна ни для одной ортонормированной системы, а при $1\leqslant p<2$ не верна для систем, состоящих из ограниченных функций. Тем не менее оказывается, что во втором случае, когда $1\leqslant p<2$, существуют ортонормированные системы $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которых имеет место аналог теоремы А одновременно для всех указанных p. Это утверждение получается как следствие сформулированной ниже более общей теоремы 1.

Сначала введем некоторые определения и обозначения, через

$$\{Q_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{3}$$

мы будем обозначать все алгебраические полиномы с рациональными коэффициентами.

Пересечение классов $L_p[0,1]$, $1\leqslant p<2$ будем обозначать через H, т. е.

$$H=\bigcap_{1\leqslant p<2} L_p[0,1]. \tag{4}$$

Определение 1. Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных на отрезке $[0,1]$. Ряд

$$\sum f_n(x) \tag{5}$$

называется универсальным, относительно частичных рядов в классе $L_p[0,1]$ $0<p<\infty$, соответственно в классе H, если для любой функции $f(x)\in L_p[0,1]$ (соответственно $f(x)\in H$), из ряда (5) можно выделить частичный ряд

$$\sum f_{n_k}(x) \qquad (n_1<n_2<\cdots<\cdots), \tag{6}$$

который сходится к $f(x)$ в метрике L_p $1\leqslant p<2$ (соответственно в метрике всех пространств $L_p(1\leqslant p<2)$.

Определение 2. Ряд (5) называется универсальным в классе L_p $1\leqslant p<2$ (соответственно в H), если для любой функции $f(x)\in L_p$ (соответственно $f(x)\in H$), существует последовательность возрастающих натуральных чисел $\{n_k\}$, такая, что подпоследовательность частичных сумм $S_{n_k}=\sum\limits_{j=1}^{n_k} f_j(x)$ сходится k $f(x)$ в метрике L_p, $1\leqslant p<2$ (соответственно в метрике всех пространств $L_p(1\leqslant p<2)$.

Определение 3. Система функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, определенных на $[0, 1]$, называется системой представления в L_p; $1\leqslant p<2$ соответственно в классе H, если для любой функции $f(x)\in L_p$ (соот. $f(x)\in H$) существует ряд

$$\sum a_k f_k(x), \tag{7}$$

который сходится к $f(x)$ в метрике L_p, $1\leqslant p<2$ (соответственно в метрике всех пространств L_p, $(1\leqslant p<2)$.

Имеет место

Теорема 1. *Существуют ортонормированная на $[0,1]$ система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) \tag{8}$$

обладает следующим свойством:

для любого натурального N ряд

$$\sum_{k>N} a_k f_k(x) \tag{9}$$

является универсальным относительно частичных рядов как в любом фиксированном L_p $1\leqslant p<2$, так и в H.

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Существует ортогональный ряд*

$$\sum a_k \varphi_k(x), \tag{10}$$

у которого не все коэффициенты a_k, $k=1, 2\ldots$ равны нулю и который сходится к нулю одновременно во всех метриках L_p, $1\leqslant p<2$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right\|_{L_p}=0 \tag{11}$$

для всех p, $1\leqslant p<2$.

II. При доказательстве теоремы 1 применяются две леммы.

Лемма 1. *Существует полная ортонормированная в $L_2[0,1]$ система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, обладающая следующим свойством:*

(*B*). *Для любого натурального N и действительных чисел a_1; $a_2;\ldots a_N$, где $\sum_{n=1}^{N}|a_n|\neq 0$, функция $\sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x)\bar{\in} L_q$ для всех $q>2$.*

Доказательство. Обозначим

$$\Delta_k=\left[\frac{1}{k+1};\ \frac{1}{k}\right]\quad k=1,\ 2\cdot\cdot\cdot \tag{12}$$

Легко видеть, что на каждом интервале Δ_k можно определить функцию $\eta_k(x)$; $\eta_k(x)=0$ при $x\bar{\in}\Delta_k$. Такую, что

$$\text{а)}\ \ \|\eta_k\|_{L_1}<\frac{1}{k},$$

$$\text{б)}\ \ \eta_k(x)\bar{\in}L_q(\Delta_k)\ \ \text{для всех}\ \ q>2. \tag{13}$$

Положим

$$\varphi_k(x)=Q^k(x)+\eta_k(x). \tag{14}$$

Очевидно, система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимо замкнута в $L_2[0,1]$ и обладает свойством (*B*). Поэтому система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полученная ортогонализацией методом Шмидта системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет требованиям леммы 1.

Лемма 2. *Для того, чтобы полная ортонормированная в $L_2[0,1]$, система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ оставалась замкнутой в L_p, $1\leq p<2$, после удаления из нее любого конечного числа функций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (B) при $q=p'$ (где $1/p+1/p'=1$, при $p>1$ и L_∞ пространство ограниченных функций).*

Доказательство. Необходимость.

Если система $\{f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ замкнута в L_p, $1\leq p<2$, то она полна относительно $L_{p'}$, где $1/p+1/p'=1$. Тогда из предположения

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x)\in L_{p'} \tag{15}$$

и из того, что

$$\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x)\right)f_n(x)dx=0;\ n>N \tag{16}$$

следует

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x)=0 \tag{17}$$

и, следовательно

$$a_k=0;\ k=1,\ 2\ \dots\ N. \tag{18}$$

Достаточность. Пусть система $\{f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не замкнута в L_p, тогда существует функция $g(x)\neq 0$, $g(x)\in L_{p'}$ для которой

$$\int_0^1 g(x)f_k(x)dx=0;\ k>N \tag{19}$$

Так как система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L_2, то из (19) следует, что

$$g(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k f_k(x) \tag{20}$$

где

$$\sum_{k=1}^{N}|c_k|\neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.

III. Доказательство теоремы 1.

Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная в L_2 ортонормированная система обладает свойством (B) для всех $q>2$, такая система существует согласно леммы 1. Возьмем последовательность $\{p_k\}$, где

$$1\leqslant p_1<p_2<\cdot\ \cdot\ \cdot<p_k\dots\lim_{k\to\infty}p_k=2 \tag{21}$$

Определим линейные комбинации

$$h_k(x)=\sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} c_l f_l(x) \tag{22}$$

следующим образом:
положим $m_0=N+1$; $m_1=N+2$

$$h_1(x)=\sum_{l=m_0+1}^{m_1} c_l f_l(x)=0. \tag{23}$$

Далее, предположим, что полином $h_k(x)=\sum\limits_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} c_l f_l(x)$ уже определен.

Согласно лемме 2 найдем полином

$$h_{k+1}(x)=\sum_{l=m_k+1}^{m_{k+1}} c_l f_l(x), \tag{24}$$

который удовлетворяет условию

$$\| Q_{k+1}(x)-h_{k+1}(x)\|_{L_{p_{k+1}}}<\frac{1}{k+1}. \tag{25}$$

Таким образом, определенные нами полиномы $h_k(x)$; $k=1,\ 2\ \dots$ удовлетворяют условию (25) для любого $k\geqslant 1$. Покажем, что ряд

$$\sum h_k(x) = \sum a_k f_k(x), \tag{26}$$

где

$$f_k(x) = \frac{h_k(x)}{\| h_k \|_{L_1}} \quad \text{и} \quad a_k = \| h_k \|_{L_1} \tag{27}$$

удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Пусть $f(x) \in H$.

Возьмем полином $Q_{n_1}(x)$ такой, что

$$\| f(x) - Q_{n_1}(x) \|_{L_{p_1}} < 1; \quad n_1 > N. \tag{28}$$

Тогда из (25) и (28) следует, что

$$\| f(x) - h_{n_1}(x) \|_{L_{p_1}} < 2. \tag{29}$$

Предположим теперь, что уже определены натуральные числа $N < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, для которых

$$\left\| f(x) - \sum_{s=1}^{l} h_{n_s}(x) \right\|_{L_{p_l}} < \frac{2}{l}; \quad l = 1, \cdots k. \tag{30}$$

Возьмем полином $Q_{n_{k+1}}$ такой, что

$$\left\| f(x) - \sum_{s=1}^{k} h_{n_s}(x) - Q_{n_{k+1}} \right\|_{L_{p_{k+1}}} < \frac{1}{k+1}. \tag{31}$$

Из (25) и (31) следует, что

$$\left\| f(x) - \sum_{s=1}^{k+1} h_{n_s}(x) \right\|_{L_{p_{k+1}}} < \frac{2}{k+1}. \tag{32}$$

Легко видеть, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} h_{n_s}(x) \tag{33}$$

сходится к $f(x)$ одновременно во всех метриках L_p; $1 \leq p < 2$. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$; $1 \leq p < 2$. Возьмем k_0 настолько большим, чтобы

$$1/k < \varepsilon/2; \; p < p_k \quad \text{при} \quad k > k_0. \tag{34}$$

Из (32) и (34) получаем:

$$\left\| f(x) - \sum_{s=1}^{k} h_{n_s}(x) \right\|_{L_p} \leq \left\| f(x) - \sum_{s=1}^{k} h_{n_s}(x) \right\|_{L_{p_k}} < \varepsilon. \tag{35}$$

Аналогично можно доказать, что ряд (26) является универсальным относительно частичных рядов в классе L_p; $1 \leq p < 2$.

Замечание 1. Легко видеть, что любой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)} f_{\nu(k)}(x)$ (где $\nu(k)$ — перестановка натуральных чисел) также удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что построенная нами ортонормированная система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ содержит бесконечное множество базисов пространства L_p для любого p; $1\leq p<2$.

Замечание 3. Легко видеть, что как система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, так и ее любая подсистема вида $\{f_k(x)\}_{k=N}^{\infty}$ является системой представления как в классе $L_p: 1\leq p<2$, так и в классе H.

Применяя метод доказательства теоремы 1 легко установить также следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная в L_2 ортонормированная система, обладающая свойством (B) для всех $p'>2$. Тогда существует ряд*

$$\sum_{k>N} a_k f_k(x), \tag{36}$$

(где N — любое натуральное число), который универсален как в любом фиксированном L_p, $1\leq p<2$ так и в H.

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляну за постановку задач и внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

L_p, $1\leq p<2$ դասերի ֆունկցիաների ներկայացումը օրթոգոնալ շարքերով

Կառուցված է օրթոգոնալ շարք, որը յուրաքանչյուր տեղափոխությունից և կամայական վերջավոր թվով անդամներ դուրս գցելուց հետո մնում է ունիվերսալ, ենթաշարքերի նկատմամբ, բոլոր L_p, $1\leq p<2$ դասերում միաժամանակ։

Այստեղից հետևում է օրթոնորմալ սիստեմի գոյությունը, որը յուրաքանչյուր տեղափոխությունից և կամայական վերջավոր թվով անդամներ դուրս գցելուց հետո մնում է ներկայացման սիստեմ բոլոր L_p, $1\leq p<2$ դասերում միաժամանակ։ Բերվում է նաև օրթոնորմալ սիստեմի օրինակ, որը կամայական տեղափոխության դեպքում պարունակում է անվերջ թվով L_p, $1\leq p<2$ դասի բազիսներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Талалян.* Представление функций классов L_p: $0<p<1$ ортогональными рядами Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 21(1—2), pp. 1—9 (1970). [2] *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
LXVII 1978 5

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

С. Г. Рубанович

О сингулярных интегральных уравнениях с разрывными коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 4/VII 1978)

Пусть Z^+ конечная односвязная область в комплексной плоскости, ограниченная гладким контуром l, а Z^- область, дополняющая $Z^+ \cup l$ до полной плоскости. Положительным направлением на l будем считать направление, оставляющее Z^+ слева. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений:

$$Lu(t_0) = A(t_0)u(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_l \frac{u(t)dt}{t-t_0} + \frac{a(t_0)}{2\pi i}\int_l u(t)\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)dt +$$

$$+\frac{b(t_0)}{2\pi i}\int_l u(t)\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)dt + \int_l H(t,t_0)u(t)dt = f(t_0), \qquad (1)$$

где $t_0 \in l$, $t \in l$; $u(t) = (u_1(t) \ldots u_n(t))$ искомая вектор-функция на l; $f(t) = (f_1(t) \ldots f_n(t))$ заданная вектор-функция на l; $A(t)$, $B(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $H(t, t_0)$ $n \times n$ — матрицы-функции, причем $\frac{dH(t,t_0)}{dt}$ имеет особенность при $t = t_0$ не выше логарифмического порядка. В (1) под $\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)$ соответственно под $\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)$ при заданном $t_0 \in l$ подразумевается ветвь, непрерывная в точках $t \in Z^+ \cup l$ ($t \in Z^- \cup l$) при $t \neq t_0$ и обращающаяся в нуль при $t=0$ ($t=\infty$). Можно всегда предполагать, что $0 \in Z^+$. Введем обозначения

$$A+B=P(t), \quad A-B=Q(t), \quad a\frac{dt}{ds}=p(t), \quad b\frac{dt}{ds}=q(t),$$

где $\frac{dt}{ds}$ есть производная от точки контура по его длине. Уравнение (1) называется уравнением нормального типа, если $\det P(t) \neq 0$,

$\det Q(t) \neq 0$ всюду на l. Уравнения нормального типа полностью изучены. Мы рассмотрим случай, когда $P(t)$, $Q(t)$, $p(t)$ и $q(t)$ имеют разрывы первого рода в точках $t_1, \ldots, t_N$ контура l, а на интервалах $l_1 \ldots, l_N$ между точками разрыва бесконечно дифференцируемы. Причем матрицы-функции $P(t)$ и $Q(t)$ на каждом интервале l_m сохраняют постоянные ранги $r_P^{(m)}$ и $r_Q^{(m)}$ соответственно, ($r_P^{(m)}$ и $r_Q^{(m)}$ могут и не быть равными n), $m=1,\ldots, N$. Уравнение (1) назовем нетеровым в классе функций H если однородное уравнение $Lu=0$ имеет конечное число (k_1) линейно независимых решений $u \in H$, а неоднородное с правой частью f, имеющей в точках $t_1, \ldots, t_N$ разрывы первого рода и такой, что $\frac{df}{dt} \in H$ на каждом интервале l_m, разрешимо в классе H тогда и только тогда, когда

$$\int_l (f(t),\ v_j(t))dt = 0,\ j=1, \ldots, k_2, \tag{2}$$

$$\sum_{m=1}^{N} \int_{l_m} \left| (f(t), w_j(t)) + \left(\frac{df}{dt}, \frac{dw_j}{dt}\right) \right| dt, j=1, \ldots, k_3, \tag{3}$$

где $v_1, \ldots, v_{k_2}$, $w_1, \ldots, w_{k_3}$ некоторые n-мерные вектор-функции. Причем эти условия линейно независимы, т. е. никакая нетривиальная линейная комбинация выражений (2), (3) не обращается в нуль при всех указанных вектор-функциях f. Индексом уравнения (1) назовем число: $\operatorname{ind} L = k_1 - k_2 - k_3$. При исследовании нетеровости уравнения (1) важную роль играют скалярные функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$, определяемые из равенств (при $|\xi| \to \infty$):

$$\det(\xi P + p) = p_0(t)\xi^{r_P} + o(\xi^{r_P});\ \det(\xi Q + q) = q_0(t)\xi^{r_Q} + o(\xi^{r_Q}) \tag{4}$$

где числа r_P и r_Q на каждом интервале l_m совпадают с $r_P^{(m)}$ и $r_Q^{(m)}$ соответственно, $m=1, \ldots, N$.

1. Случай гладких коэффициентов. (т. е. $N=0$, а $P(t)$ и $Q(t)$ сохраняют на l постоянные ранги r_P и r_Q соответственно). Этот случай рассмотрен в ([1]). Нами получен эквивалентный результат, только проще поддающийся проверке и вычислению:

Теорема 1. *Уравнение* (1) *с гладкими коэффициентами является нетеровым в классе Гельдера с показателем* $\alpha > 0$ *тогда и только тогда, когда* $p_0(t)$ *и* $q_0(t)$ *не обращаются в нуль на контуре* l. *Причем*

$$\operatorname{ind} L = \frac{1}{2\pi} [\arg q_0(t)]_l - \frac{1}{2\pi} [\arg p_0(t)]_l, \tag{5}$$

а в условиях разрешимости уравнения (1) *отсутствуют условия вида* (3).

Замечание. В теореме 1 класс Гельдера можно заменить на любой разумный класс, в котором сингулярный интеграл непрерывен.

2. Случай разрывных коэффициентов. (Впервые изучался в ([2])).

Ввиду трудностей исследования поведения решений в окрестности точек разрыва, будем искать решения уравнения (1) не в классе Гельдера, а в соболевском пространстве H_s, $-\frac{1}{2}<s<\frac{1}{2}$, норма $\|u\|_s$ в котором определяется следующим образом. Пусть $\tau\in l$ фиксированная точка. Обозначим через $s(t)$ длину дуги $(\tau, t)\subset l$, на которой направление от τ к t совпадает с положительным направлением на l. Положим $\bar{u}(\xi)=\int_l e^{i\xi s(t)}u(t)ds(t)$. Тогда $\|u\|_s^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\xi^s\bar{u}(\xi)|^2 d\xi$.

Очевидно, $H_0=L_2(l)$. Как известно, если выполнены условия нормальности, то для исследования решений уравнения (1), изучается жорданова форма матриц $Q^{-1}(t_m+0)P(t_m+0))\times P^{-1}(t_m-0)Q(t_m-0)$, $m=1,\ldots,N$, ([3]). В нашем случае, вместо этих матриц изучаются матрицы-функции

$$R_m(\xi)=(\xi Q(t_m+0)+q(t_m+0))^{-1}(\xi P(t_m+0)+p(t_m+0))\times$$
$$\times(\xi P(t_m-0)+p(t_m-0))^{-1}(\xi Q(t_m-0)+q(t_m-0)),\ m=1,\ldots,N \quad (6)$$
$$\rho_m(\xi)=(\xi P(t_m-0)+p(t_m-0))^{-1}(\xi Q(t_m-0)+q(t_m-0))\times$$
$$\times(\xi Q(t_m+0)+q(t_m+0))^{-1}(\xi P(t_m+0)+p(t_m+0)),\ m=1,\ldots,N \quad (7)$$

Вместо приведения к жордановой форме, $R_m(\xi)$ и $\rho_m(\xi)$ приводятся к виду:

$$K_m^{-1}(\xi)R_m(\xi)K_m(\xi)=\mathrm{diag}\{(M_{mj}+O(\xi^{-1}))\xi^{2-j}\}_{j=0}^4+O(\xi^{-3}) \quad (8)$$
$$\gamma_m^{-1}(\xi)\rho_m(\xi)\gamma_m(\xi)=\mathrm{diag}\{(\mu_{mj}+O(\xi^{-1}))\xi^{2-j}\}_{j=0}^4+O(\xi^{-3}), \quad (9)$$

где $k_m(\xi)$ и $\gamma_m(\xi)$ есть $n\times n$ — матрицы-функции, имеющие при $|\xi|\to\infty$ вид

$$k_m(\xi)=k_m+O(\xi^{-1}),\ \gamma_m(\xi)=\gamma_m+O(\xi^{-1}) \quad (10)$$

с невырожденными $n\times n$-матрицами (постоянными) k_m и γ_m diag {...} означает квадратную блочно-диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят блоки, указанные в фигурных скобках; $M_{m,j}$ и $M_{m,j}$ невырожденные матрицы (постоянные) размером $n_{mj}\times n_{mj}$ и $\nu_{mj}\times\nu_{mj}$ соответственно, приведенные к жордановой форме. Случай, когда $n_{mj}=0$ или $\nu_{mj}=0$ не исключается, в этом случае будем считать, что соответствующий блок отсутствует. Однако, если постоянную матрицу всегда можно привести к жордановой форме, то матрица-функция к виду (8), (9) приводится не всегда. А именно, имеет место следующее утверждение

Лемма 1. *Пусть задана $n\times n$-матрица-функция $R(\xi)=\sum_{j=0}^{r}\rho_j\xi^j+O(\xi^{-1})$, где $\rho_1,\ldots,\rho_r$ некоторые постоянные матрицы. Тогда существует $n\times n$-матрица-функция $K(\xi)=k+O(\xi^{-1})$ с невырожденной матрицей k, такая что*

$$R(\xi)K(\xi)=(T+O(\xi^{-1}))\,\mathrm{diag}\{I_{n_j}\xi^{r-j}\}_{j=0}^{r}$$

где T $n\times n$ — *матрица с линейно независимыми первыми* $n-n_r$ *столбцами;* I_{n_j} *единичная* $n_j\times n_j$ — *матрица;* $n_0, \ldots, n_r$ *неотрицательные целые числа, однозначно определяемые по* $R(\xi)$. *Для того, чтобы также существовала* $n\times n$ — *матрица* $\gamma(\xi)=\gamma+O(\xi^{-1})$ *с невырожденной матрицей* γ, *такая, что*

$$\gamma^{-1}(\xi)R(\xi)\gamma(\xi)=\operatorname{diag}\{(M_j+O(\xi^{-1}))\xi^{r-j}\}_{j=0}^{r}+O(\xi^{-1})$$

где M_j *невырожденная* $n_j\times n_j$ — *матрица,* $j=0, \ldots r$, *необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы* T *порядков* $\sum\limits_{j=0}^{p} n_j$, $p=0, 1, \ldots, r$ *были невырожденны.*

Заметим, что после умножения на ξ^2 матрицы (6), (7) приобретают вид, рассмотренный в лемме 1 с $r=4$. Поэтому эта лемма полностью решает вопрос о приведении к виду (8) и (9), а алгоритм приведения строится при доказательстве леммы. Нами также выяснена связь между представлениями (8) и (9):

Лемма 2. *Имеют место равенства* $n_{mj}=\nu_{mj}$, $m=1, \ldots, N$, $j=0, \ldots, 4$. *Собственные числа матриц* M_{mj} *и* μ_{mj} *совпадают, причем совпадают и кратности этих собственных чисел.*

Нами рассмотрено уравнение (1), для которого имеют место представления (8) и (9) и при каждом $m=1, \ldots, N$ матрицы $\| P(t_m+0)|Q(t_m+0) \|$ и $\| P(t_m-0)|Q(t_m-0) \|$ имеют ранг n. Для экономии места мы сформулируем соответствующие результаты лишь в случае, когда коэффициенты уравнения (1) в окрестности точек разрыва кусочно постоянны. Но в конце вкратце укажем, какие изменения будут в общем случае.

Теорема 2. *Пусть скалярные функции* $p_0(t)$ *и* $q_0(t)$, *определяемые из равенств* (4), *не обращаются в нуль на контуре* l, *и каждое собственное число* λ *матрицы* M_{mj}, $m=1, \ldots, N$, $j=0, \ldots 4$, *удовлетворяет неравенствам*

$$\arg\lambda\neq 2\pi\alpha+g\pi+\pi \tag{11}$$

где $g=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *при* $j=1, 3$, *и* $g=0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ *при* $j=0, 2, 4$. *Тогда уравнение* (1) *нетерово в* H_α, $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$.

Замечание. При $j=1, 2, 3$ можно ослабить условия теоремы 2, а именно, потребовать либо выполнения неравенств (11), либо выполнения некоторых простых условий от матриц γ_m и δ_m, определяемых из равенств:

$$(\xi P(t_m-0)+p(t_m-0))^{-1}(\xi Q(t_m-0)+q(t_m-0))=\gamma_m\xi+\delta_m+O(\xi^{-1}) \tag{12}$$

Тогда условия теоремы 2 становятся также необходимыми, а формула индекса, которую мы получим ниже, не изменится.

Теперь введем числа $\varkappa_\alpha^{(m)}$, $m=1, \ldots, N$ определяющие вклад разрывов в индекс уравнения (1). Зафиксируем m и произведем следующие построения.

1) Определим формальные элементы $f_\lambda^{(k, j)}$, где λ комплексное

число j и k неотрицательные целые числа. Обозначим через F линейное пространство конечных формальных сумм всевозможных таких элементов с комплексными коэффициентами. Пусть $\Lambda_{m1}, \ldots, \Lambda_{m\theta}$ все жордановы клетки с учетом их кратности матрицы $\operatorname{diag}\{M_{mj}\}_{j=0}^{4}$ с собственными числами $\lambda_{m1}, \ldots, \lambda_{m\theta}$ соответственно. Обозначим через ρ_{ms} размер клетки Λ_{ms}, $s=1, \ldots, \theta$. Каждой клетке Λ_{ms} противопоставим два множества ρ_{ms} — мерных формальных векторов вида

$$U_s=\begin{pmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{s,\rho_{sm}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V_s=\begin{pmatrix} v_{s,1} \\ v_{s,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{s,\rho_{sm}} \end{pmatrix}$$

с компонентами из F следующим образом.

Пусть λ_{ms} лежит в M_{mj}. Тогда если $j=1$ и $\operatorname{Im} e^{-2\pi\alpha i}\lambda_{ms}>0$ или $j=2$ и $e^{-2\pi\alpha i}\lambda_{ms}$ не есть положительное число, то полагаем

$$u_{s,k}=\sum_{\nu=0}^{\rho_{ms}-k-1} x_{k+\nu}^{(s)} f_{\nu+1}^{(\lambda_{ms},j)}, \quad k=1, \ldots, \rho_{ms}.$$

где $x_{\nu}^{(s)}$ числовые коэффициенты. Если же $j=3$ и $\operatorname{Im} e^{-2\pi\alpha i}\lambda_{ms}>0$, то полагаем

$$v_{s,k}=\sum_{\nu=0}^{\rho_{ms}-k-1} x_{k+\nu}^{(s)} f_{\nu+1}^{(\lambda_{ms},3)}, \quad k=1, \ldots, \rho_{ms}.$$

В остальных случаях U_s или V_s полагаются равными нулю.

2) Для формальных n — мерных векторов $U=\begin{pmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_\theta \end{pmatrix}$ и $V=\begin{pmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_\theta \end{pmatrix}$ равенство $\gamma_m U+\delta_m V=0$, где матрицы γ_m и δ_m определяются из (12), представляет систему уравнений относительно коэффициентов $x_{\nu}^{(s)}$. Число $\varkappa_{*}^{(m)}$ есть размерность пространства нулей этой системы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\operatorname{ind} L=\sum_{m=1}^{N}\left\{\frac{1}{2\pi}\left([\arg q_0(t)]_{l_m}-[\arg p_0(t)]_{l_m}-\sum_{s=1}^{\theta}\rho_{ms}\arg\lambda_{ms}\right)+\right.$$
$$\left.+\varkappa_{*}^{(m)}+r_Q-n-\frac{n+n_{m2}}{2}\right\}, \tag{13}$$

где $\arg\lambda_{ms}$ *выбирается в интервале* $2\pi\alpha-\pi<\arg\lambda<2\pi\alpha+\pi$; $r_Q^{(m)}$ *определяется в начале статьи;* n_{m2} *размер матрицы* M_{m2} *в* (8). *Число* k_3 *условий вида* (3) *удовлетворяет оценке:*

$$k_3 \leq \sum_{m=1}^{N} \left(4n - r_P^{(m)} - r_Q^{(m)} - 2n_{m2}\right). \qquad (14)$$

Замечание 1. Если коэффициенты уравнения (1) не кусочно постоянны в окрестности точек разрыва, то к условиям нетеровости добавится условие на производные слева и справа в точках разрыва, а член, зависящий от этих производных добавится к формуле индекса.

Замечание 2. Если условия нормальности не нарушены, то нетрудно проверить, что правая часть в (14) обращается в нуль, а (13) обращается при $\alpha = 0$ в известную формулу индекса в пространстве L_2.

Замечание 3. В случае, если в точках $t_1, \ldots, t_N$ коэффициенты фактически не терпят разрывов, то $k_3 = \sum_{m=1}^{N} (2n - r_P^{(m)} - r_Q^{(m)})$.

Этому же числу равна правая часть в (14) и на столько же отличаются формулы (5) и (13). В этом случае условия (3) являются условиями на скачки вектор-функции f в точках $t_1, \ldots, t_N$.

Ереванский политехнический институт

Ս. Գ. ՌՈՒԲԱՆՈՎԻՉ

Խզվող գործակիցներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մասին

Հոդվածում դիտարկվում է կոմպլեքս հարթության ողորկ l կոնտուրի վրա (1) հավասարումը։ Գործակիցներ A, B, a, b հանդիսանում են $n \times n$ — մատրից-ֆունկցիաները, $u = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ որոնելի վեկտոր-ֆունկցիան է, իսկ $f = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ հայտնի վեկտոր-ֆունկցիան է։ Այս հավասարման համար մտցվում է նյոտերության հասկացողությունը այն դեպքում, երբ նորմալության պայմանները $\det(A(t)+B(t)) \neq 0$, $\det(A(t)-B(t)) \neq 0$, խախտվում են, իսկ գործակիցները ունեն $t_1, \ldots, t_N$ խզման կետեր։ Աշխատանքում ստացված են (1) հավասարման նյոտերության պայմանները հաշված է նրա ինդեքսը (բանաձև (13))։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Е. Товмасян*, Дифференциальные уравнения, т. 3, вып. 1 (1967). [2] *С. Г. Рубанович*, «Известия АН Арм. ССР», т. 7, №№ 2, 3 (1972). [3] *Н. П. Векуа*, Системы сингулярных интегральных уравнений, изд. «Наука», М., 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. М. Гюлумян, К. М. Мосесян

О критических по числу вершинного k-разбиения графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 30/VII 1978)

Всюду под словом „граф" будем понимать конечный неориентированный граф, без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения не определяемые здесь, можно найти в (1).

В настоящей работе обобщаются теорема Дирака (2) и результаты работ (3,4) на случай покрытия вершин графа k-вырожденными подграфами (5).

Граф $G=(V, X)$ называется k-вырожденным, если минимальная степень любого его подграфа меньше k. Числом $\alpha_k(G)$, $k \geq 1$, вершинного k-разбиения графа G называется наименьшее число k-вырожденных подграфов, покрывающих $V(G)$. В частности, $\alpha_1(G)$ — хроматическое число, $\alpha_2(G)$ — число вершинной древесности графа G.

Граф G назовем (ν, k)-критическим, если G — не содержит изолированных вершин, $\alpha_k(G)=\nu$ и для любого ребра $x \in X(G)$ имеет место $\alpha_k(G-x) \leq \nu-1$.

Теорема 1. *Для существования (ν, k)-критического ($\nu \geq 4$ при $k=1$, $\nu \geq 3$ при $k \geq 2$) p-вершинного графа необходимо и достаточно, чтобы имело место $p \geq k(\nu-1)+1$ и $p \neq k(\nu-1)+2$.*

Необходимость. Пусть $G=(V, X)$ является (ν, k)-критическим графом. Очевидно, $p(G) \geq k(\nu-1)+1$. Покажем, что $p(G) \neq k(\nu-1)+2$.

Предположим обратное, то есть $p(G)=k(\nu-1)+2$. Так как в любом (ν, k)-критическом графе для всякой вершины $v \in V(G)$ степень $\rho(v) \geq k(\nu-1)$, то $k(\nu-1)+2=p(G) \geq 2k(\nu-1)-\varkappa(G)+2$, где $\varkappa(G)$ — связность графа G. Следовательно, $\varkappa(G) \geq k(\nu-1)$. Легко заметить, что $\varkappa(G)=k(\nu-1)$, то есть существует разрез $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_{k(\nu-1)}\} \subset V(G)$ такой, что всякая вершина из множества $\{v_1, v_2\} = V(G) \setminus Y$ смежна со всеми вершинами из Y. Значит подграф $\langle Y \rangle$ графа G, порожденный множеством вершин Y, не является полным и, следовательно, существует $Y_1 \subset Y$ такое, что Y_1 является $(k+1)$-вершинным k-вырожденным. С другой стороны, $p(\langle V(G) \setminus Y_1 \rangle)=$

$=k(\nu-2)+1$ и так как $(v_1 v_2)\bar{\in} X(G)$, то $\alpha_k(\langle V(G)\setminus Y_1\rangle)=\nu-2$. Следовательно, $\alpha_k(G)=\nu-1$, что противоречит условию (ν, k)-критичности графа G.

Достаточность. Пусть $p=k(\nu-1)+1+2t$, где $t=0, 1, 2, \ldots$ Докажем, что p-вершинный граф

$$W^{k(\nu-1)-2,2t+3}=K_{k(\nu-1)-2}+C_{2t+3},$$

где K_l — l-вершинный полный граф, C_m — m-вершинный простой цикл, является искомым.

Так как $\alpha_k(G)\geq\left\lceil\frac{\alpha_1(G)}{k}\right\rceil$ для любого графа G, то $\alpha_k(W^{k(\nu-1)-2,2t+3})\geq\nu$. Остается показать, что $\alpha_k(W^{k(\nu-1)-2,2t+3}-x)\leq\nu-1$ для любого ребра $x\in X(W^{k(\nu-1)-2,2t+3})$.

При $k\geq 3$, $x\bar{\in} X(K_{k(\nu-1)-2})$ включим x в $K_{k(\nu-2)+1}$ и граф $W^{k(\nu-1)-2,2t+3}$ представим в виде соединения $K_{k(\nu-2)+1}+W^{k-3,2t+3}$. Тогда $\alpha_k(W^{k(\nu-1)-2,2t+3}-x)\leq\alpha_k(K_{k(\nu-2)+1}-x)+\alpha_k(W^{k-3,2t+3})=\nu-1$.

При $k\geq 3$, $x\bar{\in} X(K_{k(\nu-1)-2})$ включим x в $W^{k-2,2t+3}$ и граф $W^{k(\nu-1)-2,2t+3}$ представим в виде соединения $K_{k(\nu-2)}+W^{k-2,2t+3}$. Легко заметить, что $\alpha_k(K_{k(\nu-2)})=\nu-2$, $\alpha_k(W^{k-2,2t+3}-x)=1$. Следовательно, вновь $\alpha_k(W^{k(\nu-1)-2,2t+3}-x)\leq\nu-1$.

Очевидно, $W^{k(\nu-1)-2,2t+3}$ является (ν, k)-критическим и при $k=1, 2$.

Пусть теперь $p=k(\nu-1)+4+2t$, где $t=0, 1, 2, \ldots$. Докажем, что искомым графом будет p-вершинный граф

$$G^{k,\nu,t}=K^t+K_{k(\nu-1)-3},$$

где

$$V(K^t)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{2t+7}\},$$

$$X(K^t)=\left\{\bigcup_{i=2}^{3}((v_1v_i)\cup(v_3v_i))\cup(v_1v_6)\cup(v_1v_{2t+7})\cup(v_2v_3)\cup\bigcup_{i=5}^{2t+7}(v_4v_i)\cup\right.$$

$$\left.\cup\bigcup_{i=6}^{2t+6}(v_iv_{i+1})\right\}.$$

Аналогично предыдущему случаю, легко подсчитать, что $\alpha_k(G^{k,\nu,t})\geq\nu$. Пусть $k\geq 3$ и $x=(ab)$ — произвольное ребро графа $G^{k,\nu,t}$. Покажем, что $\alpha_k(G^{k,\nu,t}-x)\leq\nu-1$. Возможны следующие случаи:

1. $x\in X(K^t)$,
2. $x\in X(K_{k(\nu-1)-3})$,
3. $a\in V(K^t)$, $b\in V(K_{k(\nu-1)-3})$.

В случае 1, очевидно $\alpha_k(K^t+K_{k-3}-x)=1$, а для оставшейся непокрытой части $K_{k(\nu-2)}$ рассматриваемого графа, $\alpha_k(K_{k(\nu-2)})=\nu-2$. Поэтому $\alpha_k(G^{k,\nu,t}-x)\leq\nu-1$.

Пусть $k=3$. В случае 2 имеем $\alpha_3(K^t-v)=1$, $\alpha_3((K_{3(\nu-2)}+K_1)-x)=\nu-2$, где $V(K_1)=\{v\}\subset V(K^t)$. Значит, $\alpha_3(G^{3,\nu,t}-x)\leq\nu-1$. Если же имеет место случай 3, то в качестве v выбираем ту вершину из K^t, которая смежна ребру x, и рассуждаем аналогичным образом.

Пусть $k \geq 4$. В случае $x \in X(K_{k(\nu-1)-3})$ включим x в $K_{k(\nu-2)+1}$ и граф $G^{k,\nu,l}$ представим в виде соединения $(K^l + K_{k-4}) + K_{k(\nu-2)+1}$. Легко заметить, что $\alpha_k(G^{k,\nu,l}-x) \leq \alpha_k(K^l+K_{k-1})+\alpha_k(K_{k(\nu-2)+1}-x)=\nu-1$. Наконец, пусть $a \in V(K^l)$, $b \in V(K_{k(\nu-1)-3})$. Тогда вершины a и b включим в $K_{k(\nu-2)+1}$ и граф $G^{k,\nu,l}$ представим в виде соединения $K_{k(\nu-2)+1} + ((K^l-a)+K_1)+K_{k-1}$, где $V(K_1) \nsubseteq V(K_{k(\nu-2)+1}) \cup V(K^l-a)$. Не трудно проверить, что при этом $\alpha_k(K_{k(\nu-2)+1}-(ab))=\nu-2$, $\alpha_k(((K^l-a)+K_1)+K_{k-4})=1$. Следовательно, $G^{k,\nu,l}$ является (ν, k)-критическим графом при $k \geq 3$.

$(\nu, 1)$-критичность графа $G^{1,\nu,l}$ очевидна. Рассмотрим случай $k=2$, которому посвящена работа [4]. Покажем $(3, 2)$-критичность графа K^l+K_1. Пусть $V(K_1)=\{v\}$, $x=(v\,v_1)$ (соответственно $x=(v\,v_4)$). Очевидно, подграфы графа K^l+K_1-x, порожденный вершинами v, v_1, v_2, v_4 (соответственно вершинами v, v_1, v_3, v_4) и порожденный остальными вершинами графа K^l+K_1-x, являются 2-вырожденными. Если же $x \in X(K^l+K_1) \setminus \{(v\,v_1), (v\,v_4)\}$, то легко заметить, что $\alpha_2(K^l+K_1-x)=2$. Так как $\alpha_1(K^l+K_1)=5$ и $\alpha_2(K^l+K_1) \geq \left\lceil \frac{\alpha_1(K^l+K_1)}{2} \right\rceil = 3$, то $(3, 2)$-критичность графа K^l+K_1 доказана. Пользуясь этим свойством графа K^l+K_1 и представлением $G^{2,\nu,l}=(K^l+K_1)+K_{2(\nu-3)}$, легко убедиться в $(\nu, 2)$-критичности графа $G^{2,\nu,l}$.

Все случаи исчерпаны, теорема доказана.

Очевидно, $(3, 1)$-критические графы — суть простые циклы нечетной длины, а K_2 — единственный $(2, 1)$-критический граф. На вопрос существования $(2, k)$-критических графов отвечает следующая

Теорема 2. *Для существования $(2, k)$-критического p-вершинного графа необходимо и достаточно, чтобы имело место $p \geq k+1$.*

Действительно, достаточно рассмотреть граф $\overline{K}_{k-2} + C_{p-k+2}$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Մ. ԳՅՈՒԼՈՒՄՅԱՆ, Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

Ըստ գագաթային k-տրոհման թվի կրիտիկական գրաֆների մասին

Դիտարկվում են վերջավոր գրաֆներ, առանց պատիկ կողերի և հանգույցների։

Ներկա աշխատանքում ընդհանրացվում են Դիրակի թեորեմը [2] և գրաֆի գագաթները k-այլասերված ենթագրաֆներով ծածկելու դեպքի համար [3,4] աշխատանքների արդյունքները։

Գրաֆը կոչվում է k-այլասերված, եթե նրա ցանկացած ենթագրաֆի մինիմալ աստիճանը փոքր է k-ից։ Գրաֆի գագաթային k-տրոհման թիվ $a_k(G)$, $k \geq 1$, կոչվում է գագաթների $V(G)$ բազմությունը ծածկող k-այլասերված ենթագրաֆների նվազագույն թիվը։ G գրաֆը կանվանենք (ν, k)-կրիտիկական, եթե G-ն չի պարունակում մեկուսացված գագաթներ, $a_k(G) = \nu$ և ցանկացած $x \in X(G)$ կողի համար տեղի ունի $a_k(G-x) \leq \nu-1$։

Թեորեմ 1. Որպեսզի գոյություն ունենա (ν, k)-կրիտիկական ($\nu \geq 4$ երբ $k=1$, $\nu \geq 3$, երբ $k \geq 2$) p-գագաթանի գրաֆ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենա $p \geq k(\nu-1)+1$ և $p \neq k(\nu-1)+2$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, Теория графов, „Мир", М., 1973. [2] *O. Ore*, The four-color problem, Academic press, New York, London, 189—191, 1967. [3] *H. V. Kronk*, J. Mitchem, Critical point-arboritic graphs, J. London Math. Soc., 9, No. 3, 459—466, 1975. [4] *B. Bollobas, F. Harary*, Point arboricity critical graphs exist, J. London Math. Soc., 12, No. 1, 97—102, 1975. [5] *D. R. Link, A. T. White*, k-degenerate graphs, Canad. J. Math., 22, 1082—1096, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 5

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

О группах полулинейных преобразований

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 6/X 1978)

Полулинейные преобразования впервые рассматривались в работах Сегре для линейных пространств.

В дальнейшем, с одной стороны изучались группы (и полугруппы) полулинейных преобразований линейных пространств, модулей и близких к ним алгебр, а с другой—категории полулинейных соответствий (вычисляются радикалы, многообразия и бимногообразия в таких категориях).

В работе (¹) рассматриваются некоторые вопросы общей теории полулинейных соответствий в рамках универсальных алгебр. Заметим еще следующий факт. Как отмечает А. И. Мальцев (²) детальная разработка теории языка второй ступени представляется одной из центральных задач алгебры и логики. А при исследовании выполнимости формул второй ступени, как правило, возникают алгебры (или модели) с разными системами операций (предикатов). Иначе говоря, формулы второй ступени порождают многообразия, или аксиоматизируемые классы алгебр (моделей) с разными системами операций (предикатов). Здесь возникают морфизмы—как пары согласованных отображений (полулинейные соответствия универсальных алгебр и моделей).

Известно, что группа полулинейных преобразований линейного пространства расщепляема. Это замечание Бэра остается в силе для любых свободных (в категории полулинейных соответствий) алгебр, а также и для их производных алгебр. Более того, этот факт справедлив для любых универсальных алгебр, обладающих (в категории полулинейных соответствий) базой в смысле Марчевского (а также и для их производных алгебр). Иначе говоря, группа $\mathrm{Aut}M$ полулинейных преобразований обладает полупрямым разложением:

$$\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M\rtimes H,$$

где Aut^0M—группа линейных преобразований (т. е. группа обычных автоморфизмов!). Однако вопрос о прямом разложении

$$\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M\times H$$

остается еще не исследованным.

Полулинейное преобразование модуля $M=\langle Q(+); R(+,\cdot)\rangle$ определяется как пара $(\varphi, \bar{\psi})$ отображений $\varphi\in \mathrm{Aut}Q$, $\bar{\psi}\in \mathrm{Aut}R$ с условием

$$\varphi(\alpha\cdot x)=\bar{\psi}(\alpha)\cdot\varphi(x)$$

для любых $x\in Q$, $\alpha\in R$.

Множество всех полулинейных преобразований модуля M образует группу $\mathrm{Aut}M$. Полулинейные преобразования вида $(\varphi, \bar{\varepsilon})$, где $\bar{\varepsilon}$ — тождественное отображение, образуют группу $\mathrm{Aut}^{(0)}M$. Это есть группа линейных преобразований модуля M и

$$\mathrm{Aut}^{(0)}M\trianglelefteq \mathrm{Aut}M.$$

Если свободный модуль M определен над кольцом R со свойством $\mathrm{Aut}R\neq(\bar{\varepsilon})$, то $\mathrm{Aut}M\neq\mathrm{Aut}^{(0)}M$ и справедливо равенство

$$\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M\rtimes \mathrm{Aut}R.$$

Для одного класса циклических модулей сформулируем следующий результат.

Предложение. Если аддитивная часть модуля M есть циклическая группа и каждый ее ненулевой элемент обладает нулевым аннулятором, то $\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M$.

Доказательство. Пусть $M=\langle Q(+); R(+;)\rangle$, $\mathrm{Ann}(x)=0$ для любого $x\in Q$, $x\neq 0$ и $a\in Q$ — образующий элемент. Если $(\varphi,\bar{\psi})\in\mathrm{Aut}M$, то для любых ненулевых $y\in Q$ и $r\in R$ имеем

$$y=ma,$$
$$ra=na,$$
$$\varphi a=la,$$

$$\varphi(ry)=\varphi[r(ma)]=\varphi[m(ra)]=\varphi(mna)=mn\varphi a=mnla=mlna=mlra=rmla,$$

где $m,n,l\in Z$. Одновременно:

$$\varphi(ry)=\bar{\psi}r\varphi y=\bar{\psi}r\varphi(ma)=\bar{\psi}r(m\varphi a)=\bar{\psi}rmla,$$

и потому

$$rmla=\bar{\psi}rmla,$$

$$(r-\bar{\psi}r)mla=0.$$

Если циклическая группа $Q(+)$ бесконечна, то $mla\neq 0$ и, следовательно, $r=\bar{\psi}r$. Если же циклическая группа $Q(+)$ — конечного порядка $|Q|=s$, то нетрудно заметить, что НОД $(s,l)=1$. Следовательно и здесь $mla\neq 0$, поскольку $m<s$. Таким образом $\bar{\psi}=\bar{\varepsilon}$.

Следствие 1. Если аддитивная часть модуля M есть бесконечная циклическая группа и некоторый ее элемент обладает нулевым аннулятором, то $\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M$.

Следствие 2. Если аддитивная часть модуля M есть циклическая группа простого порядка и некоторый ее элемент обладает нулевым аннулятором, то $\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M$.

Будем говорить, что группа $\mathrm{Aut}^{(0)}M$ обладает нормальным дополнением, если она обладает дополнением в решетке всех нормальных подгрупп группы $\mathrm{Aut}M$. Иначе говоря, группа H является нормальным дополнением группы $\mathrm{Aut}^{(0)}M$, если и только если:

$$H \triangleleft \mathrm{Aut}M,\ \mathrm{Aut}M = H \cdot \mathrm{Aut}^{(0)}M,\ H \cap \mathrm{Aut}^{(0)}M = (\varepsilon)$$

Каждое нормальное дополнение группы $\mathrm{Aut}^{(0)}M$, для свободного модуля M (определенного над кольцом R), изоморфно группе $\mathrm{Aut}R$.

Лемма. *Для линейного пространства M, определенного над телом F, группа $\mathrm{Aut}^{(0)}M$ не обладает нетривиальным нормальным дополнением.*

Если H—нормальное дополнение группы $\mathrm{Aut}^{(0)}M$ и $(\varphi, \bar{\psi}) \in H$, то для любого линейного преобразования вида

$$\varphi^{\lambda}(x) = \lambda x,\ \lambda \in F$$

справедливо равенство

$$\varphi\varphi^{\lambda} = \varphi^{\lambda}\varphi;$$

Откуда и вытекает равенство $\bar{\psi}\lambda = \lambda$ для любого $\lambda \in F$.

Для каждого автоморфизма $\bar{\psi} \in \mathrm{Aut}F$ определим морфизм $\varphi_{\bar{\psi}} \in \mathrm{Aut}Q$ по правилу:

$$\varphi_{\bar{\psi}}(x) = \bar{\psi}(\xi_1)e_1 + \ldots + \bar{\psi}(\xi_n)e_n,$$

где $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ и совокупность $\{e_i\}_{i \in I}$—база.

Теорема. *Пусть пространство M определено над полем и группа ее линейных преобразований совпадает с группой всех подобий. Если*

$$\mathrm{Aut}M \simeq \mathrm{Aut}^{(0)}M \times G$$

для некоторой нетривиальной группы G, то существует нетривиальная группа H такая, что

$$\mathrm{Aut}^{(0)}M \simeq \mathrm{Aut}^{(0)}M \times H.$$

Доказательство. По предположению существуют нормальные подгруппы $\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M} \triangleleft \mathrm{Aut}M$ и $\bar{G} \triangleleft \mathrm{Aut}M$ такие, что $\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M} \simeq \mathrm{Aut}^{(0)}M$, $\bar{G} \simeq G$, $\bar{G} \cap \overline{\mathrm{Aut}^{(0)}}M = (\varepsilon)$, $\mathrm{Aut}M = \bar{G} \cdot \overline{\mathrm{Aut}^{(0)}}M$.

Можно предполагать, что:

$$\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}}M = \{\varphi^{\lambda_1}, \ldots, \varphi^{\lambda_i}, \ldots, (\varphi_1, \bar{\psi}_1), \ldots, (\varphi_j, \bar{\psi}_j), \ldots\},$$

$$\bar{G} = \{\varphi^{\lambda^{(1)}}, \ldots, \varphi^{\lambda^{(i)}}, \ldots, (\varphi^{(1)}, \bar{\psi}^{(1)}), \ldots, (\varphi^{(j)}, \bar{\psi}^{(j)}) \ldots\}.$$

Сперва покажем, что каждое линейное преобразование φ^{λ}, $\lambda \neq 0$, обладает представлением

$$\varphi^{\lambda} = \varphi^{\lambda_i} \cdot \varphi^{\lambda^{(i)}},\ \text{где } \varphi^{\lambda_i} \in \overline{\mathrm{Aut}^{(0)}}M,\ \varphi^{\lambda^{(i)}} \in \bar{G}.$$

Разберем все четыре возможные случая:

$$1.\ \varphi^{\lambda}=\varphi^{\lambda i}\cdot(\varphi^{(i)},\bar{\psi}^{(i)}),$$

$$2.\ \varphi^{\lambda}=(\varphi_j,\bar{\psi}_j)\cdot\varphi^{\lambda(s)},$$

$$3.\ \varphi^{\lambda}=(\varphi_j,\bar{\psi}_j)\cdot(\varphi^{(i)},\bar{\psi}^{(i)}),$$

$$4.\ \varphi^{\lambda}=\varphi^{\lambda i}\cdot\varphi^{\lambda(s)};$$

Первые два случая с очевидностью отпадают. Покажем, что третий случай также не реален. Если

$$\varphi^{\lambda}=(\varphi_j,\bar{\psi}_j).(\varphi^{(i)},\bar{\psi}^{(i)}),$$

то $\bar{\psi}^{(i)}=\bar{\psi}_j^{-1}$ и $([\varphi^{(i)}]^{-1},\bar{\psi}_j)\in\bar{G}$. Поскольку $(\varphi_j,\bar{\psi}_j)\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$, то

$$(\varphi^{\lambda},\bar{\varepsilon})(\varphi_j,\bar{\psi}_j)(|\varphi^{\lambda}|^{-1},\bar{\varepsilon})=$$

$$=(\varphi^{\lambda}\varphi_j(\varphi^{\lambda})^{-1},\bar{\psi}_j)=(\varphi^{\lambda}\varphi_j\varphi^{\lambda^{-1}},\bar{\psi}_j)=(\varphi_j\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda},\bar{\psi}_j)\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$$

и следовательно, $\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda}\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$.

Аналогичным путем, исходя из условий $([\varphi^{(i)}]^{-1},\bar{\psi}_j)\in\bar{G}$, $\leq|\mathrm{Aut}M$, получаем $\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda}\in\bar{G}$.

Таким образом,

$$\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda}\in\bar{G}\cap\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$$

и потому

$$\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda}=\varepsilon,$$

$$\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda=1$$

$$\bar{\psi}_j\lambda=\lambda,$$

т. е. $\bar{\psi}_j=\bar{\varepsilon}$. Противоречие!

Теперь мы заключаем:

$$\varphi^{\lambda}=\varphi^{\lambda i}\cdot\varphi^{\lambda(s)},$$

где

$$\varphi^{\lambda i}\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M},\ \varphi^{\lambda(s)}\in\bar{G}.$$

Далее устанавливается, что все элементы группы $\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$ являются на самом деле линейными преобразованиями, т. е. если

$$(\varphi_j,\bar{\psi}_j)\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M},\ \text{то}\ \bar{\psi}_j=\bar{\varepsilon}.$$

Для $\lambda\neq0$, если $\varphi^{\lambda}\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$, то

$$\varphi^{\lambda}\varphi_j=\varphi_j\varphi^{\lambda},$$

$$\varphi_j(\lambda x) = \varphi^\lambda(\varphi_j x),$$

$$\bar\psi_j(\lambda)\varphi_j x = \lambda\,\varphi_j x,$$

$$\bar\psi_j(\lambda) = \lambda.$$

Если же $\varphi^\lambda \in \bar G$, то

$$(\varphi_j, \bar\psi_j)\,\varphi^\lambda\,(\varphi_j^{-1}, \bar\psi_j^{-1}) = \varphi_j\,\varphi^\lambda\,\varphi_j^{-1} \in \bar G.$$

С другой стороны, существует линейное преобразование φ^{τ_j}, $\tau_j \neq 0$, такое, что

$$\varphi_j = \varphi_{\bar\psi_j}\cdot\varphi^{\tau_j}.$$

Следовательно, если $\varphi^\lambda \in \bar G$, то

$$\varphi_{\bar\psi_j}\,\varphi^{\tau_j}\varphi^\lambda(\varphi^{\tau_j})^{-1}\varphi_{\bar\psi_j}^{-1} = \varphi_{\bar\psi_j}\,\varphi^\lambda\,\varphi_{\bar\psi_j}^{-1} = \varphi^{\bar\psi_j^{-1}(\lambda)} \in \bar G.$$

Одновременно, из соотношения $(\varphi_j, \bar\psi_j) \in \overline{\mathrm{Aut}^{(0)} M}$ следует

$$\varphi^\lambda\cdot(\varphi_j, \bar\psi_j)\cdot\varphi^{\lambda^{-1}} = (\varphi^\lambda\varphi_{\bar\psi_j}\,\varphi^{\tau_j}\varphi^{\lambda^{-1}}, \bar\psi_j) \in \overline{\mathrm{Aut}^{(0)} M},$$

$$\varphi^\lambda\varphi_{\bar\psi_j}\,\varphi^{\tau_j}\varphi^{\lambda^{-1}}\varphi^{\tau_j^{-1}}\,\varphi_{\bar\psi_j}^{-1} = \varphi^\lambda\varphi_{\bar\psi_j}\,\varphi^{\lambda^{-1}}\varphi_{\bar\psi_j}^{-1} = \varphi^{\lambda\bar\psi_j^{-1}(\lambda^{-1})} \in \overline{\mathrm{Aut}^{(0)} M}.$$

Из ранее доказанного факта $\varphi^{\bar\psi_j^{-1}(\lambda)} \in \bar G$ вытекает $\varphi^{\bar\psi_j^{-1}(\lambda^{-1})} \in \bar G$ и потому

$$\varphi^{\lambda\bar\psi_j^{-1}(\lambda^{-1})} = \varphi^{\bar\psi_j^{-1}(\lambda^{-1})}\cdot\varphi^\lambda \in \bar G.$$

Таким образом:

$$\varphi^{\lambda\bar\psi_j^{-1}(\lambda^{-1})} \in \bar G \cap \overline{\mathrm{Aut}^{(0)} M}$$

и потому

$$\varphi^{\lambda\bar\psi_j^{-1}(\lambda^{-1})} = \varepsilon,$$

$$\lambda\bar\psi_j^{-1}(\lambda^{-1}) = 1,$$

$$\bar\psi_j^{-1}(\lambda^{-1}) = \lambda^{-1},$$

$$\bar\psi_j^{-1}(\lambda) = \lambda,$$

$$\bar\psi_j(\lambda) = \lambda.$$

В общем случае, поскольку $\varphi^\lambda = \varphi^{\lambda_1}\cdot\varphi^{\lambda^{(s)}}$, имеем:

$$\bar\psi_j(\lambda) = \bar\psi_j(\lambda_1\cdot\lambda^{(s)}) = \bar\psi_j(\lambda_1)\cdot\bar\psi_j(\lambda^{(s)}) = \lambda_1\cdot\lambda^{(s)} = \lambda.$$

Иначе говоря, все элементы группы $\overline{\mathrm{Aut}^{(\psi)}M}$ являются линейными преобразованиями.

С другой стороны из предыдущей леммы следует, что линейная часть H группы $\overline{G}$ не является одноэлементной.

Следствие. Если $\psi\in\overline{\mathrm{Aut}^{(\psi)}M}$, то для любого автоморфизма $\overline{\psi}\in\mathrm{Aut}F$ справедливо равенство $\overline{\psi}(\lambda)=\lambda$.

Ереванский государственный
университет

Յու. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Կիսագծային ձևափոխությունների խմբերի վերաբերյալ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է կիսագծային ձևափոխությունների խմբի ճեղքման հարցը՝ ըստ ուղիղ և կիսաուղիղ արտադրյալի։ Առանձնացվում է նաև մոդուլների մի դաս, որոնց համար գծային և կիսագծային ձևափոխությունների խմբերը համընկնում են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. «Математика», т. XI, № 6 (1976). [2] *А. И. Мальцев*, Труды 4-го Всесоюзного мат. съезда, Л., I, 169—198, (1963).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. А. Барсегян

О дефектах и росте мероморфных функций конечного нижнего порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 20/X 1978)

1. В 1939 г. Тейхмюллер обнаружил ([1]), что для некоторых классов мероморфных функций, помимо соотношения дефектов $\sum\limits_{(a)} \delta(a) \leq 2$*) выполняется также соотношение $\sum\limits_{(a)} \delta^{1/2}(a) < \infty$. Хейман показал ([2]), что для мероморфной в $|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка ряд $\sum\limits_{(a)} \delta^{1/3-\varepsilon}(a)$ может расходиться, если $\varepsilon > 0$. Усиливая результаты ряда работ (обзор их см. в ([3])), Вейцман доказал ([4]), что для мероморфной в $|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка ряд $\sum\limits_{(a)} \delta^{1/3}(a)$ сходится. Поскольку показатель $\frac{1}{3}$ не может быть уменьшен, результат Вейцмана имеет окончательный характер.

В ряде работ В. П. Петренко изучает распределение величин

$$\beta(a) = \beta(a, w) = \lim_{r \to \infty} \frac{\max\limits_{|z|=r} \ln \dfrac{1}{|w(z) - a|}}{T(r)},$$

$$\beta(\infty) = \lim_{r \to \infty} \frac{\max\limits_{|z|=r} \ln^{+} |w(z)|}{T(r)}$$

для мероморфных в $|z| < \infty$ функций $w(z)$. Величины $\beta(a)$ характеризуют минимальное отклонение $w(z)$ от a, в то время как $\delta(a) = \lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^{+} \frac{1}{|w(re^{i\varphi}) - a|} \, d\varphi}{T(r)}$ характеризуют среднее отклонение $w(z)$ от a.

---

* Мы пользуемся стандартными в теории распределения значений обозначениями ([3]).

В частности В. П. Петренко получил ([5]) следующий результат, который мы приводим здесь в удобном для нас компактном виде: Для мероморфной в $|z|<\infty$ функции нижнего порядка $\lambda, (0<\lambda<\infty)$ и $\varepsilon, (0<\varepsilon<1)$
справедлива оценка

$$\sum \frac{\beta^{1/2}(a)}{\ln^{1/2+\varepsilon}\frac{1}{\beta(a)}}<\infty.$$

Он также показал, что ряд $\sum\limits_{(a)} \beta^{1/2-\varepsilon}_{(a)}$ может расходиться, если $\varepsilon>0$.

Вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{(a)} \beta^{1/2}(a)$ до сих пор оставался открытым.

Пользуясь методами доказательства теорем, анонсированных в ([6]) и теорией поверхностей наложения Л. Альфорса, нами получен результат, из которого следует сходимость ряда $\sum\limits_{(a)}\beta^{1/2}(a)$ и одновременно ряда $\sum\limits_{(a)} \delta^{1/3}(a)$.

Теорема 1. *Пусть $w(z)$ мероморфная в $|z|<\infty$ функция конечного нижнего порядка λ; $a_i \in C, (i=1,2...q)$ — конечный набор попарно различных комплексных значений; $\beta(a_i)>0, (i=1,2...q)$; 2ρ — минимальное расстояние между точками a_i; J_i — тот из интервалов $\varphi_i<\varphi<\varphi'_i$, в котором $|w(re^{i\varphi})-a_i|<\min(\rho,1)$ и в котором достигается $\max\limits_{|z|=r} \ln^+\frac{1}{|w(z)-a_i|}$; $|J_i|=\varphi'_i-\varphi_i$. Тогда существует такая постоянная K, зависящая только от λ $(K<\infty$ при $\lambda<\infty)$, что неравенство*

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\max\limits_{|z|=r} \ln^+\frac{1}{|w(z)-a_i|}}{|J_i|} \leqslant K\,T(r) \tag{1}$$

выполняется на некотором неограниченном множестве значений r.
Из (1) и неравенства Коши-Буняковского вытекает

Следствие 1. Для мероморфной в $|z|<\infty$ функции конечного нижнего порядка выполняется

$$\sum_{(a)} \beta^{1/2}(a) < \infty.$$

Пусть $m_\rho(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{J_i}} \ln^+\frac{1}{|w(z)-a_i|}d\varphi$, где $\overline{J_i}=\{z: |z|=r, |w(z)-a_i|\leqslant\min(\rho,1)\}$; $|\overline{J_i}|$ — мера $\overline{J_i}$ очевидно $m(r,a)=m_\rho(r,a)+0$ (1[1]

$$\text{и}\quad \frac{m(r,a_i)+O(1)}{|\bar{J}_i|^2} \leqslant \frac{m_r(r,a_i)}{|\bar{J}_i|\,|J_i|} \leqslant \frac{\max\limits_{|z|=r} \ln \dfrac{1}{|w(z)-a_i|}}{|J_i|}$$

Теперь из (1) и (2) и неравенства Гёльдера вытекает

Следствие 1 (Вейцман). Для мероморфной в $|z|<\infty$ функции конечного нижнего порядка выполняется

$$\sum_{(a)} \delta^{1/3}(a) < \infty.$$

11. В сборнике нерешенных задач Хеймана ([7]) приводится следующий вопрос Винклера: Пусть $w(z)$ — целая функция (достаточно большого порядка) с $n>2$ разными асимптотическими значениями a_k, $(k=1,2\ldots n)$, Γ_k — асимптотическая линия, на которой $w(z)\to a_k$, $n(r,a_k,\Gamma_k)$ — количество a_k — точек, лежащих на Γ_k и в $|z|\leqslant r$.

1) Можно ли найти такую функцию, что $b_k = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{n(r,a_k,\Gamma_k)}{n(r,a_k)} > 0$ для $k=1,2\ldots n$ 2) Можно ли взять $b_k=1$, $k=1,2\ldots n$.

Вопрос 1 и 2 можно образно перефразировать так; может ли на Γ_k лежать „достаточно много" a_k — точек и может ли на Γ_k лежать „подавляющее большинство" a_k — точек для $k=1,2\ldots n$.

Как сообщил мне А. А. Гольдберг, ответ на первый вопрос положителен. Следствие 2 из нашей теоремы 2 дает ответ на второй вопрос.

Теорема 2. *Пусть $w(z)$ — мероморфная $|z|<\infty$ функция, L_k $(k=1,2\ldots n)$ — неограниченные односвязные области, такие, что $w(z)\to a_k$ при $|z|\to\infty$ и $z\in L_k$, $n(r,a_k,L_k)$ — количество a_k — точек в $L_k \cap (|z|\leqslant r)$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \lim_{r\to\infty} \frac{n(r,a_k,L_k)}{n(r,a_k)} \leqslant 2.$$

Если дополнительно предположить, что функция $w(z)$ — целая, то

$$\sum_{k=1}^{n} \lim_{r\to\infty} \frac{n(r,a_k,L_k)}{n(r,a_k)} \leqslant 1.$$

Следствие 2. Для мероморфной в $|z|<\infty$ функции $w(z)$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant 2.$$

Для целой функции $w(z)$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant 1.$$

Последнее неравенство и содержит ответ на второй вопрос Винклера.

показывая, что для целой функции существует не более, чем одно значение, для которого $b_k=1$.

Институт математики Академии

наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Վերջավոր ստորին կարգ ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների դեֆեկտների և աճի մասին

Հայտնի է (Վ. Պետրենկո (⁵)), որ վերջավոր ստորին կարգ ունեցող մերոմորֆ $|z|<\infty$*-ում* $w(z)$ *ֆունկցիայի համար*

$$\sum_{(a)} \frac{\beta^{1/2}(a)}{\ln^{1/2+\varepsilon}\dfrac{1}{\beta(a)}} < \infty,$$

$$\text{որտեղ } \beta(a)=\lim_{r\to\infty}\frac{\max\limits_{|z|=r}\ln\dfrac{1}{|w(z-a)|}}{T(z)}, \quad 0<\varepsilon<1:$$

Մյուս կողմից (⁴) ամեն մի ε*-ի համար* $(0<\varepsilon<1)$ *կարելի է բերել այ[դ] դասից ֆունկցիայի օրինակ, որի համար* $\sum_{(a)}\beta^{1/2-\varepsilon}(a)$ *տարամետ է։*

$\sum_{(a)}\beta^{1/2}(a)$*-ի զուգամիտության հարցը մինչև հիմա բաց էր։ Ներկա աշ[-] խատանքում բերվում է մի արդյունք, որից բխում է ոչ միայն* $\sum\beta^{1/2}(a)$ *շարքի զուգամիտությունը* $w(z)$ *ֆունկցիայի համար, այլ նաև Վեյց[-] մանի հայտնի արդյունքը —* $\sum\delta^{1/2}(a)$*: Երկրորդ մասում բերվում [է] Վինկլերի մի հարցադրման պատասխանը (այդ հարցադրումը բերված է Ու[.] Հեյմանի չլուծված խնդիրների ցուցակում (⁷)):*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *O. Teichmüller*, „Deutsche Math." 4, 163—190 (1939). [2] *У. Хейман*, Мероморф[-] ные функции, изд. Мир (1966). [3] *А. А. Гольдберг*, „Математический анализ", т. [...] (1973) [4] *A. Weitzman*, Acta mathematika, 128, 1—2, 41—53 (1972). [5] *В. П. Петренко*, „Известия АН СССР", серия матем., т. 33, № 2 (1969) [6] *Г. А. Барсегян*, ДАН СС[СР], т. 238, № 4 (1978) [7] *W. K. Hayman*, New problems, Cambridge University Pre[ss], 155—180, 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. И. Лазарев, П. Н. Перлин

О решении задач пространственной теории упругости для кусочно-однородной среды

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 22/V 1978)

Метод потенциалов для первой внутренней (I^+) и второй внутренней (II^+) и внешней (II^-) задач теории упругости приводит к сингулярным интегральным уравнениям ([1]), при этом спектральные свойства уравнений позволяют находить решение методом последовательных приближений.

В настоящей работе исследуются уравнения для задачи II^+ в случае кусочно-однородной среды при совпадении коэффициентов Пуассона и доказывается сходимость метода последовательных приближений. Для численной реализации метода можно применять с естественными изменениями регулярные представления, предложенные в ([2]).

1. Пусть поверхность S_1 ограничивает тело, внутри которого имеется включение из другого материала, ограниченного поверхностью S_2 (S_1 и S_2 — ляпуновские поверхности).

Константы Ляме для D_2 ($\partial D_2 = S_2$) суть λ_2, μ_2 и для $D_1(\partial D_1 = S_1 \cup S_2) - \lambda_1$, μ_1.

Равенство коэффициентов Пуассона дает

$$\lambda_1/\lambda_2 = \mu_1/\mu_2 = k. \tag{1}$$

Пусть оператор T_{lx} оператор напряжений, определенный равенством

$$T_{lx}u(x) = 2\mu_l \frac{du}{dn} + \lambda_l n \operatorname{div} u + \mu_l [n \cdot \operatorname{rot} u] \tag{2}$$

здесь u — вектор смещений упругости среды. Из (1), (2), очевидно, имеем

$$T_{1x} = kT_{2x}.$$

Ставится задача: найти вектор смещений u при условии, что на поверхности S_1 заданы усилия

$$[T_{1x}u(x)]^+ = f(x); \quad x \in S_1,$$

а на поверхности S_2 условия сцепления

$$u^+(x)-u^-(x)=r(x)$$

$$[T_{2x}u(x)]^+-[T_{1x}u(x)]^-=\frac{1}{k}[T_{1x}u]^+-[T_{1x}u]^-=g(x);\quad x\in S_2$$

Индексы $+$, $-$ здесь означают, что предельное значение выражений берется соответственно изнутри и извне поверхности. Очевидно, один раз решая задачу I^- (II^+), мы можем прийти к условиям, в которых $r(x)=0$ ($g(x)=0$). Для дальнейших целей нам удобно рассматривать задачу при $r(x)=0$. В силу сказанного, это не является принципиальным ограничением.

2. Будем искать решение в виде потенциала простого слоя

$$u(x)=\int\limits_{S_1}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys+\int\limits_{S_2}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)d_ys$$

φ_i — плотность потенциала, распределенная на поверхности S_i ($i=1,2$).

$\Gamma(x-y)$ — тензор Кельвина—Сомильяны ([1]). В силу того, что $\Gamma(x-y)$ зависит только от коэффициента Пуассона — $u(x)$ представляет решение в обеих средах.

Рассмотрим условие на S_2. Первое условие выполняется автоматически в силу непрерывности потенциала простого слоя на поверхности S_2. Второе условие дает (нормаль здесь и далее подразумевается направленной вне D_1).

$$\varphi_2(x)+\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)d_ys+\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys+k\varphi_2(x)-$$

$$-k\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma\varphi_2ds-k\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)ds=kg(x)$$

или $\left(\alpha=\dfrac{1-k}{1+k}\right)$

$$\varphi_2(x)+\alpha\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)d_ys+\alpha\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys=\frac{k}{k+1}g(x).$$

Для главной контактной задачи (поверхность S_1 отсутствует — тело заполняет все пространство). Это уравнение получено и исследовано в ([1]). При этом интеграл по S_1 отсутствует. Объединяя это уравнение с уравнением, полученным из условия на поверхности S_1, имеем систему

$$\varphi_1(x)-\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys+\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)d_ys=f(x),\quad x\in S_1$$

$$\varphi_2(x)+\alpha\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)ds+\alpha\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys=\frac{k}{k+1}g(x);\ x\in S_2 \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:

$$K_{ji}\varphi = \int\limits_{S_j} T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi(y)ds, \quad x\in S_i;\quad K^*_{ji}\psi = \int\limits_{S_j} [T_{1y}\Gamma(x-y)]'\psi(y)d_ys,\quad x\in S_i$$

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \alpha K_{21} & \alpha K_{22} \end{pmatrix};\quad T_1 = T;\quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix};\quad F = \begin{pmatrix} f \\ \dfrac{k}{k+1}\, g \end{pmatrix}$$

H_i—гильбертово пространство функций, определенных на S_i;

$H=H_1\times H_2$ — произведение пространств.

Пусть $g_i,\ \varphi_i\in H_i$; $\varphi=(\varphi_1;\varphi_2)$; $g=(g_1;g_2)$, тогда

$$(\varphi_i, g_i)_{H_i} = \int \varphi_i g_i ds;\quad (\varphi, g)_H = (\varphi_1, g_1)_{H_1} + (\varphi_2, g_2)_{H_2}$$

$R(A)$ — область значения оператора A;
$\mathcal{N}(A)$ — подпространство нулей оператора A;
$\sum(A)$ — спектральное множество A;
$\rho(A)$ — спектральный радиус A.

Уравнения (3) в операторном виде запишутся

$$\varphi + T_\alpha\varphi = F. \tag{3^1}$$

При $\alpha=1$ уравнение (3^1) совпадает с уравнением задачи II для двусвязного тела, ограниченного поверхностями S_1 и S_2.

3. Займемся исследованием полученных уравнений. Нам потребуется еще уравнение, сопряженное (3^1)

$$\psi + T^*_\alpha\psi = 0, \tag{4}$$

где

$$T^*_\alpha = \begin{pmatrix} K^*_{11} & \alpha K^*_{21} \\ K^*_{12} & \alpha K^*_{22} \end{pmatrix}.$$

3.1. Покажем, что уравнение (3^1) нормально разрешимо и его индекс равен нулю.

Для этого подействуем на оператор $I+I_\alpha$ оператором

$$B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I+\alpha K_{22})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Это преобразование эквивалентно. Действительно, поскольку $\rho(K_{22}) = 1$ норму $\|\ \|_*$ всегда можно выбрать такой, что для любого $\varepsilon>0$ будет $1\leq\|K_{22}\|_*\leq 1+\varepsilon$, при этом $\|\ \|_*$ эквивалентна исходной норме ([4]).

Кроме того, очевидно, при любом $k\neq 0$ $|\alpha|<1$. Таким образом, при любом k существует эквивалентная исходной норме норма, такая, что

$$\alpha \| K_{22} \|_* < 1$$

и оператор B дает эквивалентное преобразование. Итак,

$$B(I + T_\alpha)\varphi = \varphi_1 + K_{11}\varphi_1 + \alpha K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1} K_{21}\varphi_1.$$

Оператор $K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1} K_{21}$ вполне непрерывен. Поскольку таковым является K_{12}.

Нормальная разрешимость уравнения с оператором $B(I + T_\alpha)$ следует из нормальной разрешимости уравнения с оператором $I + K_{11}$ ([1]). Кроме того, поскольку индекс $I + K_{11}$ равен нулю, также заключаем, что индекс оператора $B(I + T_\alpha)$ равен нулю.

Поскольку оператор B задает эквивалентное преобразование, этими свойствами обладает исходное уравнение.

3.2. Определим теперь собственные функции T_α^*.

Пусть $\Psi(x) = a + [b \times x]$, а $\psi_i(x) = \Psi(x)$ при $x \in S_i$; подстановкой в (4), пользуясь свойствами потенциала двойного слоя ([1]), с учетом выбранного направления нормали, убеждаемся, что вектор $\Psi_\alpha(x) = \left(\psi_1; \frac{2}{1+\alpha}\psi_2 \right)$ является собственной функцией оператора T_α^*.

Покажем, что шесть функций $\Psi_\alpha(x)$, определяемые векторными константами a, b, образуют полный набор собственных функций оператора T_α^*, соответствующих собственному числу -1.

Покажем предварительно, что $\| T_\alpha \| \leqslant \| T \|$. Действительно, для любого $F = (F_1; F_2) \in H$ имеем ($|\alpha| < 1$)

$$\| T_\alpha F \|_H = \| K_{11}F_1 + K_{12}F_2 \|_{H_1} + \| K_{22}F_2 + K_{21}F_1 \|_{H_2} \cdot |\alpha| \leqslant \| TF \|_H.$$

В уравнении

$$\varphi + T_\alpha\varphi = F; \quad F = \left(f; \frac{k}{k+1} g \right) \tag{5}$$

произведем замену $(\varphi_1; \varphi_2) \to \left(\varphi_1; \varphi_2 + \frac{k}{k+1} (I + \alpha K_{22})^{-1} g \right)$.

Система (5) перейдет при этом в систему

$$\varphi_1 + K_{11}\varphi_1 + K_{12}\varphi_2 = f_1 = f - \frac{k}{k+1} K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1} g,$$

$$\varphi_2 + K_{22}\varphi_2 + K_{21}\varphi_1 = 0; \tag{6}$$

При этом

$$(f_1, \psi_1)_{H_1} = (f, \psi_1)_{H_1} - \frac{k}{k+1} (\psi_1, K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1} g)_{H_1} = \tag{7}$$

$$= (f, \psi_1)_{H_1} + \frac{k}{k+1} \left(g, \frac{2}{1+\alpha}\psi_2 \right)_{H_2} = (F, \Psi)_H$$

Здесь использовались следующие равенства

$$K_{12}^{*}\psi_2 = -2\psi_2; \; K_{21}^{*}\psi_2 = \psi_2$$

и сходимость по норме ряда $\sum\limits_{0}^{\infty} \alpha^n K_{22}^{n} g$. Для пояснения знака во втором равенстве напомним, что нормаль на поверхности направлена внутрь тела D_2.

Очевидно, что из разрешимости (6) следует разрешимость (5). Покажем теперь, что условие $(f_1, \psi_1) = 0$ достаточно для разрешимости (6). Отсюда, очевидно, будет следовать, что условия

$$(F, \Psi)_H = (f, \psi_1) + \left(\frac{k}{k+1} g, \frac{2}{1+\alpha}\psi_2\right)_{H_1} = (f, \psi_1)_H + k(g, \psi_2)_{H_1} = 0 \qquad (8)$$

достаточны для разрешимости (5) и в силу нормальной разрешимости уравнения получим наше утверждение.

Отметим еще, что последнее равенство в (6) означает равенство нулю главного вектора и главного момента, приложенных к телу D_1, и как показано в (1), является достаточным условием разрешимости поставленной задачи теории упругости.

Рассмотрим пространство $\bar{H} = \{\varphi : (\varphi_1, \psi_1)_{H_1} = (\varphi_2, \psi_2)_{H_1} = 0\}$. Очевидно, $\bar{H} \subset R(I + T_\alpha) = {}^{\perp}N(I + T_\alpha^{*}) = \left\{\varphi : (\varphi_1, \psi_1) + \dfrac{2}{1+\alpha}(\varphi_2, \psi_2) = 0\right\}$. Легко проверить, что $T_\alpha \bar{H} \subset \bar{H}$ при всех $\alpha \in (0, 1]$.

Будем рассматривать сужение оператора T_α на $\bar{H}$ и обозначим это сужение $\bar{T}_\alpha$.

Покажем, что $-1, 1 \bar{\in} \sum(\bar{T})$. Если $-1 \in \sum(\bar{T})$, то $\varphi \in \bar{H} \subset R(I + T)$ и одновременно $\varphi \in N(I + T)$ и в силу простоты полюса резольвенты оператора (отсутствие присоединенных собственных функций см. ([1])) $\varphi = 0$.

Пусть $+1 \in \sum(\bar{T})$. Легко проверить, что собственными функциями уравнения $-\psi + T^{*}\psi = 0$ являются $(0; \psi_{2j})$ $(j = 1, 2, \ldots 6)$ и только они. Действительно, подстановкой убеждаемся, что эти функции являются собственными.

Кроме того, в силу теоремы единственности собственными функциями для задачи I могут быть только векторы жесткого смещения, т. е. всего 6 линейно независимых векторов.

Далее имеем, очевидно, $\bar{H} \subset {}^{\perp}N(-I + T^{*}) = \{\varphi : (\varphi_2, \psi_{2j}) = 0\}$. Тогда, если $\varphi \in \bar{H}$ и $\varphi \in N(-I + T)$, то в силу простоты полюса $\lambda = 1$, $\varphi = 0$.

Итак $1 \bar{\in} \sum(\bar{T})$.

Известно, что $\Sigma(T)\in[-1, 1]$. Кроме того, $\Sigma(T)$ дискретен. Отсюда теперь следует $\rho(\bar{T})<1$. И, следовательно, существует норма, эквивалентная исходной, в которой $\|\bar{T}\|_*=q<1$.

Имеем теперь при $F\in\bar{H}$ и при любом целом $n>0$

$$\|T_0^nF\| \leqslant \|T T_0^{n-1}F\|_{\bar{H}} \leqslant \dots \leqslant \|T^nF\|_{\bar{H}} \leqslant c_1\|T^nF\|_* \leqslant$$

$$\leqslant c_1\|T^n\|_*\|F\|_* \leqslant c_1q^n\|F\|_*.$$

Здесь c_1—константа, входящая в условие, выражающее эквивалентность норм. Из последнего неравенства следует, что при любом $F\in\bar{H}$ решение существует и представляется рядом

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} T_0^nF.$$

Итак, условие $(f_1, \psi_1)=0$ достаточно для разрешимости (8), и, следовательно, (5), а значит в силу нормальной разрешимости (5) наше утверждение доказано.

Попутно мы показали сходимость метода последовательных приближений для уравнения (3).

4. Все изложенное с очевидными модификациями может быть применено к задаче I^+ для кусочно-однородной среды с совпадающими коэффициентами Пуассона.

5. Если в постановке задачи принять $T_1=T_2=d/dn$, $\Gamma(x-y)=1/(x-y)$; u, φ, f—скалярные функции, придем к задаче Неймана для оператора Лапласа, для составной области с заданным скачком градиента на границе. Результаты справедливы и в этом случае.

НИИ СП им. Н. В. Склифосовского

Մ. Ի. ԼԱԶԱՐԵՎ, Գ. Ի. ԳԵՐԼԻՆ

Կտոր առ կտոր համասեռ միջավայրի առաձգականության տեսության տարածական խնդրի լուծման մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում է առաձգականության տեսության տարածական խնդրի լուծման սինգուլյար հավասարումները, որոնք ստացված են պոտենցիալի մեթոդով, միևնույն Պուասոնի գործակցով, կտոր առ կտոր համասեռ միջավայրի համար։

Ապացուցվում է ստացված հավասարումների լուծելիությունը և հավասարումների ինդեքսի զրո լինելու փաստը։ Համալուծ հավասարումների սիստեմի համար գտնված են սեփական ֆունկցիաները և ապացուցված է Նեյմանի շարքի զուգամիտությունը, երբ հավասարման աջ մասը բավարարվում է լուծելիության այն պայմաններին, որոնք պահանջում են Ֆրեդհոլմի տեսության հիման վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Д. Купрадзе* и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, «Наука», М., стр. 660, 1976. [2] *П. И. Перлин*, ПММ. т. 40, вып. 2 (1976). [3] *С. Г. Крейн*, Линейное уравнение в банаховом пространстве, «Наука», стр. 103, М., 1971. [4] *М. А. Красносельский* и др., Приближенное решение операторных уравнений, стр. 453, «Наука», М., 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 5

УДК 522.61

АСТРОФИЗИКА

Б. О. Карапетян, В. С. Осканян

Информационные критерий оценки эффективности астрофизических наблюдений

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 28/VII 1978)

В настоящее время астрофизические наблюдения выполняются при помощи сложного комплекса оптических приборов, приемной аппаратуры и вычислительных средств, образующих систему, по которой проходит информация об исследуемом объекте. Информативность астрофизических наблюдений, эффективность использования оборудования и времени наблюдателей зависят как от выбора и согласования параметров и режимов работы составляющих звеньев системы, так и от методики наблюдений и обработки данных. Под информативностью здесь подразумевается получение в результате наблюдений максимально возможного объема сведений об исследуемом объекте или явлении.

В данной работе не рассматриваются вопросы оценки содержания полученных при наблюдениях данных, ценность которых в большой степени определяется постановкой наблюдательной задачи, априорными сведениями, состоянием теории и другими факторами.

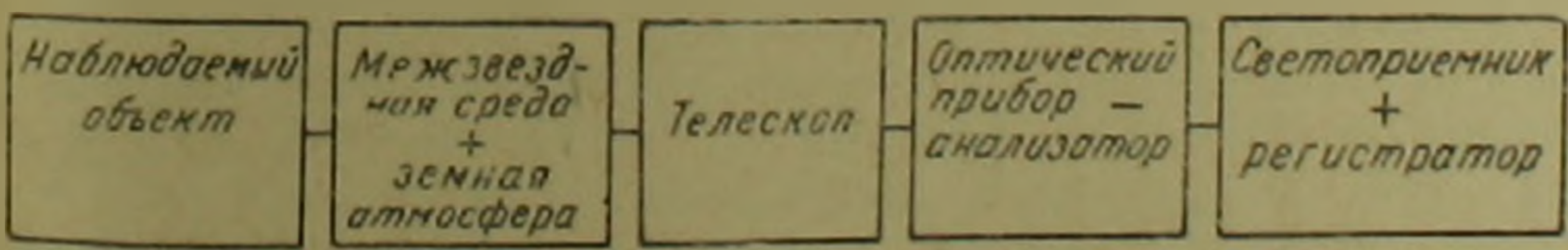
Для правильного выбора и согласования параметров надо рассматривать наблюдательную систему как единое целое, учитывая преобразования и искажения, вносимые всеми последовательными звеньями информационного тракта. Большое значение при этом приобретают критерии, по которым оцениваются, сравниваются и выбираются различные звенья системы. Обычно для оценки телескопов, оптического инструмента, приемной аппаратуры используются т. н. «паспортные» данные, относящиеся к непосредственно измеряемым величинам такие как светосила, разрешающая способность, чувствительность, коэффициент усиления и др., не дающие сами по себе представления о влиянии данного прибора на информативность системы в целом, и поэтому не всегда удобные для сравнения и выбора вариантов, особенно в тех случаях, когда наблюдательная задача может быть решена с помощью различных приборов, отличающихся по принципу действия, т. е. по размерности параметров, определяющих их качество. В таких случаях затруднительно судить об эффективном согласовании параметров последовательных звеньев системы, тем более, что нередко улучшение одного параметра достигается ценой ухудшения другого.

Это приводит к необходимости определения обобщенных критериев, применимых ко всем звеньям системы и отражающих взаимозависимость отдельных инструментальных и аппаратурных параметров. К числу обобщенных характеристик, предложенных для оценки астрономических приемников, относятся эквивалентный квантовый выход [1], скорость получения информации [2] и др. Эти величины все же не могут служить достаточно полными характеристиками информационной способности, так как в них не отражены такие важные факторы, как динамический диапазон, спектральная чувствительность и т. д. Критерием, позволяющим учитывать параметры различных звеньев системы, является проницающая способность, или предельно обнаружимая звездная величина [3,4]. Однако с помощью этого критерия можно оценивать только пороговые свойства системы, но не способность передавать полную информацию об объекте.

Единый подход ко всем звеньям системы и наиболее полный учет влияния различных параметров на работу всей системы становятся возможными при обращении к методам теории информации [5]. Развитие аппарата теории информации применительно к оценке оптического изображения, оптических систем и приемников [6–8] позволило вплотную подойти к использованию этих методов для оценки эффективности астрономических наблюдений.

В настоящей работе в общем виде рассматривается передача оптической информации при астрономических наблюдениях, определяются обобщенные информационные характеристики системы и устанавливаются выражения, связывающие эти характеристики с рабочими параметрами звеньев и условиями наблюдений.

Передача оптической информации в астрономической наблюдательной системе. В общем виде структура информационного тракта при астрономических наблюдениях может быть представлена следующим образом:



Все интересующие нас сведения о наблюдаемом объекте, содержащиеся в приходящем от него световом потоке, сводятся, в сущности, к распределению излучения по сферическим координатам α, β (в фокальной плоскости телескопа преобразующимся в линейные координаты x, y), времени t, длине волны λ, позиционному углу электрического вектора θ, фазе φ: $W = \Phi(\alpha,\beta,t,\lambda,\theta,\varphi)$. Диапазоны изменения этих аргументов определяются условиями наблюдений, возможностями инструментов и аппаратуры, поставленной задачей, и т. д. Точность измерения $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ и др. в идеальном случае должна ограничиваться принципом неопределенности. Шестимерное пространство сигналов, таким образом, может быть разбито на $n=n_\alpha \cdot n_\beta \cdot n_t \cdot n_0 \cdot n_\lambda \cdot n_\varphi$ элементарных ячеек, где $n_\alpha=\frac{\alpha_{max}-\alpha_{min}}{\Delta\alpha}$, $n_\beta=\frac{\beta_{max}-\beta_{min}}{\Delta\beta}$ и т. д.

Уровень энергии сигнала в отдельной элементарной ячейке может быть определен с конечной точностью, позволяющей с заданной вероятностью отнести ее к какому-либо интервалу ΔW_i значения энергии. Это обусловлено стохастической природой излучения. Определив величины интервалов ΔW на всем измеряемом диапазоне $W_{max}-W_{min}$, мы найдем число m различимых градаций энергии сигнала в каждой ячейке.

Таким образом, каждая из n элементарных ячеек может находиться в одном из $(m+1)$ состояний (с учетом нулевого уровня), и всего можно различить $(m+1)^n$ возможных состояний наблюдаемого объекта. При оценке информационных свойств системы будем исходить из максимальной неопределенности получаемого сообщения. Тогда все состояния равновероятны и количество информации об объекте, которую могла бы зарегистрировать идеальная наблюдательная система, равно

$$H=n\log_2(m+1), \text{ бит.} \tag{1}$$

В реальных системах при прохождении сигнала через последовательные звенья тракта происходят существенные потери информации. Во-первых, уменьшается число n элементарных объемов из-за ограниченного разрешения в пространстве, по спектру, во времени и т. д. Уменьшается также число m различимых градаций энергии как из-за поглощения и рассеяния, так и из-за конечного динамического диапазона, ограничиваемого снизу шумами, а сверху насыщением в оконечных звеньях.

К принципиальному ограничению количества передаваемой информации в реальных системах приводит сокращение числа независимых аргументов. Оконечные звенья тракта, непосредственно от которых мы получаем информацию, воспринимают и представляют ее в виде распределения интенсивности W по пространственным координатам x, y или времени t. Поэтому за телескопом в структурной схеме следует оптический прибор-анализатор (спектрограф, поляриметр, интерферометр и пр.), преобразующий функции по λ, θ или φ в функции по x, y или t. На этой стадии происходит отбор информации по определенным аргументам исходя из задачи наблюдений. При этом, разумеется теряется, информация по всем остальным аргументам, в том числе по аргументам, служащим „посредниками", т. е. по x, y или t. Шестимерное пространство сигналов сводится к одно—, двух— или трехмерному $\Phi(x,y,t)$.

Результирующее количество информации на выходе системы

$$H_p = n_p \log_2(m_p + 1), \text{ бит}, \qquad (2)$$

где n_p и m_p зависят от условий наблюдения, структуры системы и параметров ее звеньев.

Максимальное количество информации, передаваемое системой, (информационная емкость), количество информации, приходящееся на единичную площадку, (удельная информационная емкость) и количество информации, передаваемое за единицу времени, (информационная пропускная способность) являются характеристиками, обобщающими влияние отдельных звеньев системы на ее информационные свойства. При сравнении различных систем важным критерием является величина информационной чувствительности (или информационного квантового выхода), определяющая количество информации на выходе, приходящееся на единицу энергии излучения на входе (или на один приходящий квант) [7,9].

Связь обобщенных информационных характеристик с параметрами звеньев системы. Носителями информации на входе системы являются кванты излучения, а на выходе—т. н. «сигнальные события» (электрические импульсы, почерневшие зерна фотоэмульсии, деления шкалы измерительного устройства, вспышки на экране ЭЛТ и т. д.), характер которых зависит от характера преобразований, выполняемых оконечными звеньями системы.

Пусть наблюдаемый объект излучает в каждой элементарной ячейке пространства сигналов в среднем $\overline{N_0}$ квантов. Число сигнальных событий на выходе линейной системы будет равно $\overline{N_c} = C\overline{N_0}$. В коэффициент С войдут такие факторы, как экстинкция и рассеяние в атмосфере и в оптике, световая эффективность оптики, квантовый выход, чувствительность и коэффициент усиления приемника и т. д. Кроме сигнальных, на выходе появляются также шумовые события $\overline{N_ш}$, вызванные фоном излучения ночного неба, собственными шумами приемной аппаратуры и др.

Если приход сигнальных и шумовых событий описывается распределением Пуассона, то для числа m различимых градаций сигнала будем иметь [10]

$$m = \frac{\sqrt{k^2 + 8(\overline{N_c} + \overline{N_ш})} - \sqrt{k^2 + 8\overline{N_ш}}}{2k}, \qquad (3)$$

где k—коэффициент достоверности, характеризующий точность измерений.

Число n элементарных ячеек можно найти с помощью теоремы о дискретном представлении через параметры, характеризующие разрешающую способность звеньев. Рассмотрим, например, определение числа n для телескопа. Согласно критерию Рэлея [4] при диаметре изображения звезды δ, *мм* получим величины наименьшего разрешаемого расстояния $\sigma=\delta/2$, *мм* и разрешающей способности $R=1/\sigma=2/\delta$, $мм^{-1}$. В соответствии с теоремой о дискретном представлении [3,11] сигнал полностью описывается значениями интенсивности в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $1/2R$, мм; число отсчетов на единицу длины (т. е. число элементарных ячеек) $n=4/\delta$, $мм^{-1}$.

Полученные значения m и n можно подставить в выражение (2) для количества информации. При этом, однако, предполагается, что передаточная функция постоянна во всем диапазоне передаваемых пространственных частот вплоть до предельной частоты, определяемой разрешающей способностью.

В реальных системах каждое звено является фильтром пространственных (и временных) частот с неидеальной передаточной функцией. С возрастанием частоты сигнала уменьшаются контраст и отношение сигнала к шуму на выходе, и, соответственно, число градаций. Выходной сигнал получается как свертка входного сигнала с аппаратной функцией звена; произведение Фурье-преобразования входного сигнала на частотно-контрастную характеристику (ЧКХ) даст Фурье-преобразование (спектр) выходного сигнала [4,11].

Выражение для количества информации в двумерном изображении имеет вид [6,8]:

$$H'=\int\limits_0^{u_{max}}\int\limits_0^{v_{max}}\log_2\left|1+\frac{S(u,v)\,T^2(u,v)}{Q(u,v)}\right|du\,dv,\ \text{бит}\cdot мм^{-2}, \tag{4}$$

где $u=x^{-1}$; $v=y^{-1}$ — пространственные частоты, $мм^{-1}$; $S(u,v)$; $Q(u,v)$ — спектральные плотности входного сигнала и шумов соответственно; $T(u,v)$ — ЧКХ. Если входное сообщение и шумы характеризуются максимальной неопределенностью, то $S(u,v)=\mathrm{const}$ и $Q(u,v)=\mathrm{const}$. Тогда для осесимметричных систем

$$H'=2\pi\int\limits_0^{\nu_{max}}\log_2\,[1+m(0)T^2(\nu)]\,\nu\,d\nu,\ \text{бит}\cdot мм^{-2}, \tag{5}$$

где $\nu=\sqrt{u^2+v^2}$, $мм^{-1}$ и $m(0)$ — число градаций при нулевой пространственной частоте, определяемое по формуле (3).

На основе предложенной методики авторами выведены расчетные выражения для оценки информационных свойств астрономических наблюдательных систем.

Авторы выражают благодарность академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение настоящей работы и ценные замечания.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР
Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Բ. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Վ. Ս. ՕՍԿԱՆՅԱՆ

Աստղադիտական դիտումների տեղեկատվության գնահատման ինֆորմացիոն չափանիշները

Աստղադիտական դիտումների ժամանակ օպտիկական ազդանշանը անցնում է տարբեր սարքերի միջով, որոնց համատեղ կիրառմամբ է միայն հնարավոր ստանալ անհրաժեշտ տեղեկություններ դիտվող մարմնի մասին։ Ուստի աստղադիտական դիտումների ժամանակ անհրաժեշտ է սարքերն իրար այնպես հարմարեցնել, որ հնարավոր լինի ստանալ լավագույն դիտողական արդյունքներ։ Սակայն միշտ չէ, որ հնարավոր է այդ խնդիրը պատշաճ ձևով լուծել, քանի որ տարբեր սարքերի հատկությունները բնութագրող պարամետրերի չափողականությունները հաճախ տարբեր են լինում ու հնարավոր չէ նրանք անմիջականորեն իրար հետ համեմատել։

Տարբեր սարքերի իրար հարմարեցման խնդիրը լուծելու համար ներկա աշխատությունում առաջարկվում է մի մոտեցում, որը հնարավորություն է տալիս, կիրառելով ինֆորմացիայի տեսության ապարատը, երկնիշ թվանշաններով (բիտերով) գնահատել ամեն մի սարքի, ինչպես նաև բոլոր սարքերի կողմից համատեղ բաց թողնված տեղեկության քանակը։ Այդպիսով հնարավորություն է ստեղծվում համատեղ կիրառվող տարբեր սարքերը իրար այնպես հարմարեցնել, որ ուսումնասիրվող երկնային մարմիններից ստացվի առավելագույն հնարավոր տեղեկություն։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Фелладжет*, Сб. Настоящее и будущее телескопов умеренного размера, ИИЛ, М. 1960. [2] *W. A. Baum et al.*, Carnegie Inst. Wash., Year Book 64 (1965). [3] *Баум*, Сб. Методы астрономии, „Мир", М., 1967. [4] *Н. Н. Михельсон*, Оптические телескопы. Теория и конструкция, „Наука", М., 1967. [5] *Бриллюэн*, Наука и теория информации, М., 1960. [6] *P. B. Fellgett, E. H. Linfoot*, Phyl. Trans. Roy. Soc. (A) 247, 369 (1955). [7] *С. Б. Гуревич*, Эффективность и чувствительность телевизионных систем, „Энергия", М.,—Л., 1964. [8] *J. C. Dainty, R. Shaw*, Image Science, A. P., London, 1974. [9] *Б. О. Карапетян, Г. Е. Смолкин*, Сб. Физическая электроника, М., 1976. [10] *Б. О. Карапетян, В. С. Осканян*, „Оптико-механическая промышленность", № 11, 1976. [11] *О. Нейл*, Введение в статистическую оптику, „Мир", 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 5

УДК 595.768.23

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян

Новый вид жесткокрылых-скрытнохоботников из Армении (Coleoptera, Curculionidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 8/VI 1978)

Ceutorrhynchus gnom Iablokoff-Khnzorian sp. nov.

Армянская ССР: Ленинакан, селекционная станция, 10/IX 1962, Х. Арутюнян, голотип. Джрвеж, 30/IX 1951, в ущелье под кустиком Echium, паратип. Голотип в коллекциях Института зоологии АН Армянской ССР.

Тело и ноги черные. Тело покрыто густыми чешуйками, сверху желто-бурыми с резким рисунком из белых или желтоватых чешуек, снизу белыми. Усики темные со светлым жгутиком. Белый рисунок образует продольную полосу на лбу, расширенную кпереди, сложный рисунок на переднеспинке, состоящий из 3 полос, 2 дуг, соединенных у середины, и белой основной каймы, с боков имеются еще нечеткие косые полосы, отходящие от середины боковых продольных полос и направленные косо назад. На надкрыльях чешуйки образуют крестообразное прищитковое пятно с узкими косыми перекладинами, по изогнутой полосе за плечевым бугорком, от основания которого отходит короткая продольная полоса и многочисленные полосы различной длины в задней половине надкрылий, в том числе пара коротких пришовных, 3 пары длинных на следующих промежутках, местами прерванных, и по 5 коротких, совместно вырисовывающих дугу. На 3-ем промежутке полоса, загибаясь у вершины, продолжена вдоль вершинного выступа заднего края надкрылья. Длина (без хоботка) 4,5 *мм*. Рис. 1.

Глаза округленно треугольные (рис. 1), при осмотре сверху выглядят плоскими. Лоб между глазами со щеткой торчащих чешуек. Головотрубка слабо изогнута, такой же длины, как переднеспинка, ее бороздки соединены на ее вентральной стороне. Усики тонкие, их рукоять слабо и постепенно расширена к вершине, 1-й членик их жгутика удлиненный, вдвое шире и едва длиннее 2-го, вдвое длиннее удлиненных 3-го и 4-го, следующие 3 членика едва длиннее ширины, булава по длине равна члеинкам жгутика 3—7, вместе взятым. Переднеспинка с сильно приподнятым воротничком, с глубоко вырезанным сбоку передним краем, за воротничком сужена, затем расширена, с закругленным боковым краем, без бугорка или ребрышка, боковой кант закруглен и зернистый, диск очень густо крупно точечный, промежутки между точ-

Рис. 1. Ceuthorrhynchus gnom Khnz. sp. nov. паратип, габитус, голова сбоку и коготки

ками сведены к узким килям. Надкрылья с четким плечевым бугорком, с широкими бороздками, промежутки которых плоские, втрое шире бороздок, с тонкими темными и широкими ланцетовидными светлыми чешуйками, темные расположены в 3 ряда, светлые—в 2—3. Бороздки с рядом темных тонких, малозаметных чешуек, выглядят голыми. На 7-м, 8-м и 9-м промежутках имеются зубчики, более крупные и густые кзади и к боковому краю. Кзади надкрылья спадают совсем плоско, с маленьким выступом вдоль уплощенного вершинного края, перед этим выступом с поперечным рядом из 5 зерен. Пигидий равномерно покрыт белыми чешуйками. Низ и ноги обычного для этого рода строения. Все бедра и коготки с острым зубцом. Средние и задние голени с короткими корзинками.

Этот вид—типичный представитель скрытнохоботников из рода Ceutorrhynchus Schönh., принадлежит к небольшой группе видов Mogulones Reitt., насчитывающей вместе с ним 7 видов. От всех родственных легко отличается уже по рисунку тела, который своеобразен тем, что на переднеспинке соответствует нормальному рисунку этой группы, тогда как по рисунку надкрылий напоминает группу Hadroplontus Reitt. Кроме этого, у всех видов группы, кроме radula Germ., на надкрыльях скат спадает более круто, зубцов меньше и они много мельче. У radula, наоборот, зубцов много больше и они достигают 4-го промежутка бороздок надкрылий, переднеспинка без дугообразной перевязи, рисунок надкрылий тусклый и состоит из полос, крестообразный рисунок у щитка очень тонкий, с длинной перекладиной.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՅԱԲԼՈԿՈՎ-ԽՆԶՈՐՅԱՆ

Ծածկակնճիթ բզեզի նոր տեսակ Հայաստանից
(Coleoptera, Curculionidae)

Նկարագրված է երկարակնճիթ բզեզի նոր տեսակ — Ceutorrhynchus gnom Khnz., *հայտնաբերված՝ Լենինականի մոտակայքում և Ջրվեժի կիրճում։ Այս տեսակը նշված սեռի* Mogulones Rtt. *խմբի տեսակների բնորոշ ներկայացուցիչն է։*

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ LXVII ՀԱՏՈՐԻ

Էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ՏԵԿՏՈՆԻԿԱ

ԲԻՈՖԻԶԻԿԱ

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ԲԺՇԿԱԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

ԴԵՂԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

СОДЕРЖАНИЕ LXVII ТОМА

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ФИЗИКА

АСТРОФИЗИКА

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

ГЕОФИЗИКА

ТЕКТОНИКА

CONTENTS OF LXVII VOLUME