ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ISS № 0321—1339

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXVII, № 1

1978

Խմբագրական կոլեգիա

Դ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. քարտուղար), Է. Դ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԲՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), Н. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ — ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Է. Ա. Դանիելյան—*Ընդհատումներով սպասարկման միալար սիստեմների գրաֆվածության պարբերությունների մասին* 3

Ա. Ի. Պետրոսյան—*Որոշ տիրույթներում Ֆ-հավասարման գնահատականով լուծման մասին* 13

Ռ. Գ. Հայրապետյան—*Երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար Լոպատինսկու պայմանի համարժեք ձևակերպումների մասին* 18

Ա. Հ. Առաքելյան—*Ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների մասնակի կիսախմբի մինիմալ երկկողմանի իդեալ* 25

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Հ. Գալոյան—*Տարամոդուլ նյութից պատրաստված սալերի ընդլայնական տատանումների մասին* 29

ՍՈՂԲԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Ա. Սնգիբարյան—*Հաստատված սողքի ոչ գծային տեսության հարթ կոնտակտային մի խնդրի մասին Տարակցման ուժերի հաշվառումով* 34

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Ս. Պապանյան—*Սեփական ժամանակի ընդհանրացված պատկերացումը. քվանտային էլեկտրադինամիկայում փոքր հեռավորությունների համար* 41

Դ. Ա. Վարդանյան—*Երկման կետերի կապված վիճակները քվանտային բյուրեղում* . 47

ԴՆՈՖԻԶԻԿԱ

Հ. Գ. Լևման, Ա. Ա. Թամրազյան, Վ. Ա. Աբցիրայվ—*Գամմա-քվանտների թուլացման էֆեկտիվ գործակիցները բինոմալ օրենքով բաշխված անհամասեռությամբ տարակգմ միջավայրում* 51

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Վ. Ղազարյան, Ս. Հ. Զաքարյան—*Երևանի բուսաբանական այգու ձմեռվա պայմանների համար մի քանի ինտրոդուկցված փշատերևների ռեակցիայի մասին* . . 56

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յարլոկով-Խնձորյան—*Փայտափորիկ բզեզի նոր տեսակ Տաջիկստանից* (Coleoptera, Anobiidae) 61

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян—О периодах занятости одноканальных систем с прерываниями обслуживания 3

А. И. Петросян—О решении с оценкой $\bar{\partial}$- уравнения в некоторых областях . . . 13

Р. Г. Айрапетян—Об эквивалентных формах условия Лопатинского для гиперболических уравнений второго порядка 18

А. А. Аракелян—Минимальные двусторонние идеалы в частичной полугруппе гомоморфизмов релятивов 25

МЕХАНИКА

А. Г. Галоян—О поперечных колебаниях пластинок, изготовленных из разномодульного материала 29

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. А. Енгибарян—О плоской контактной задаче нелинейной установившейся ползучести с учетом сил сцепления 34

ФИЗИКА

В. О. Гапанян—Обобщенное представление собственного времени для квантовой электродинамики на малых расстояниях 41

Г. А. Варданян—Связанное состояние перегибов в квантовом кристалле . . . 47

ГЕОФИЗИКА

Е. П. Леман, А. А. Тамразян, В. А. Арцыбашев—Эффективные коэффициенты ослабления гамма-квантов в гетерогенных средах с биноминальным законом распределения неоднородностей 51

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. В. Казарян, С. О. Закарян—К вопросу о реакции хвои некоторых интродуцентов к зимним условиям Ереванского ботанического сада 56

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян—Новый вид жука-точильщика из Таджикистана (Coleoptera, Anobiidae) 61

Индекс 77730

CONTENTS

MATHEMATICS P.

E. A. Danielian On buzy periods of single server queues with service interruptions 3

A. I. Petrosyan About the solution with the estimate of the c equation in some domains. 13

R. G. Hairapetian On Equivalent forms of Lopatinsky Condition for Second Order Hyperbolic Equations 18

A. H. Arakelian Minimal uipartial ideals in partial semigroup of homomorfismes of relatives 25

MECHANICS

A. H. Galoian On transversal vibration of plates made from different modul material 29

THEORY OF CREEP

S. A. Engibarian On a plane contact problem of nonlinear nonstability creep with friction forces calculation 34

PHYSICS

V. O. Papanyan—Generalized Proper-time Representation for Quantum Electrodynamics at Short Distances 41

G. A. Vardanian—Bound states of the kinks in the quantum cristall . 47

GEOPHYSICS

E. P. Leman, A. A. Tumrazyan, V. A. Artsybashev—Effective Attenuation Coefficients of Gamma-Rays in Heterogeneous Media with Inhomogeneity Binominal Distribution Principle 51

PLANT PHYSIOLOGY

V. V. Kazaryan, S. O. Zakaryan—To the question about the reaction of conifers of some introduction to the winter conditions of Yerevan Botanical Garden 56

ENTOMOLOGY

S. M. Iablokoff-Khnzorian—A new species of Anobiid-beetles from the Tadzhikistan (Coleoptera, Anobiidae) 61

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 02806 Подписано к печати 18.10.1978 г. Тираж 545. Изд. 4883 Заказ 603

Формат бумаги 70×108 1/16. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0.
Усл. печ. л. 5,6 Уч. изд. листов 4,11.

Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин
Издательство АН Арм. ССР, Ереван, Барекамутян 24.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 1

УДК 5.19.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян

О периодах занятости одноканальных систем с прерываниями обслуживания

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28/VII 1977)

1°. В ([1]) предложен путь определения совместной функции распределения (ф. р.) периода занятости (п. з.) и числа обслуженных за п. з. вызовов в общей одноканальной системе массового обслуживания СМО с ожиданием и несколькими потоками вызовов, не прибегая к преобразованиям Лапласа. На основе результата из ([1]), который сформулируем ниже, в настоящей заметке получены аналогичные результаты для СМО с прерыванием обслуживания.

В СМО без прерывания обслуживания, с ожиданием, r независимыми пуассоновскими потоками вызовов $L_1, \ldots, L_r$ и одним прибором, параметр потока L_i i — вызовов $(i=\overline{1, r})-a_i>0$. Случайная длительность обслуживания i — вызова β_i с ф. р. $B_i(t)$ представима в виде суммы q_i независимых случайных величин (сл. в) $\beta_i^d=\beta_i^{(1)}+\ldots+\beta_i^{(q_i)}$, $P\{\beta_i^{(j)}<t\}=B_i^{(j)}(t)$ $(i=\overline{1, r};\ j=\overline{1, q_i};\ q_i\geqslant 1)$. Длительности обслуживания независимы в совокупности и не зависят от процесса поступления. Будем говорить, что сл. в. $\beta_i^{(j)}$ является j-фазой i-вызова $(i=\overline{1, r};\ j=\overline{1, q_i};\ q_i\geqslant 1)$.

Пусть с момента $t=0$, в который в системе присутствуют m_i нетронутых обслуживанием i-вызовов $(i=\overline{1, r};\ m_i\geqslant 0)$, время $x\geqslant 0$ прибор заперт для обслуживания. Обозначим через $\pi(x; m^{(r)})$, где $m^{(r)}=(m_1, \ldots, m_r)$, первый момент $\geqslant x$ отсутствия вызовов в системе. Сл. в. $\pi(x; m^{(r)})$ — п. з. со временем задержки $x\geqslant 0$, инициированный m_i i-вызовами $(i=\overline{1, r};\ m_i\geqslant 0)$.

Пусть $S(n^{(r)}; t^{(q^{(r)})})$, где $n^{(r)}=(n_1, \ldots, n_r)$, $q^{(r)}=(q_1, \ldots, q_r)$, $t^{(q^{(r)})}=(t_1^{(q_1)}, \ldots, t_r^{(q_r)})$, $t_k^{(q_k)}=(t_{k1}, \ldots, t_{kq_k})$, есть следующее событие: $\{n_k$ k-вызовов обслужено; суммарная длительность j — фаз k-вызовов $<t_{kj}$ $(k=\overline{1, r};\ j=\overline{1, q_k};\ q_k\geqslant 1)\}$ и $\Pi_{m^{(r)}}(x; n^{(r)}; t^{(q^{(r)})})$ — вероятность (вер.) осуществления события $S(n^{(r)}; t^{(q^{(r)})})$ в п. з. $\pi(x; m^{(r)})$.

Теорема 1. *Если* $n_i\geqslant m_i\geqslant 0$; $B_i^{(j)}(+0)=0$ $(i=\overline{1, r};\ j=\overline{1, q_i};\ q_i\geqslant 1)$, $|n^{(r)}|=n_1+\cdots+n_r>0$, *то*

$$d_{t^{(q^{(r)})}}\overset{*}{\Pi}_{m^{(r)}}(x;\, n^{(r)}\, t^{(q^{(r)})}) = \exp\{-\sigma\cdot t\}\, t^{|n^{(r)}|-|m^{(r)}|-1}\Big\{x+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{m_k}{n_k}\left|t_k^{(q_k)}\right|\Big\}\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_k-m_k}}{(n_k-m_k)!}\prod_{j=1}^{q_k} d_{t_{kj}}\{B_k^{(j)}(t_{kj})\}^{n_k}\right\}, \qquad (1)$$

где $\sum_{k=1}^{r}{}^{+}\left(\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\right)$ *означает, что суммирование (произведение) берется по тем* k, *для которых* $m_k>0(n_k>0)$; d *— знак дифференциала,* $*$ *— знак свертки*

$$t=x+|t_1^{(q_1)}|+\ldots+|t_r^{(q_r)}|;\ |t_i^{(q_i)}|=t_{i1}+\ldots+t_{iq_i};\ |m^{(r)}|=m_1+\ldots+m_r;$$

$$d_{t^{(q^{(r)})}}=\prod_{k=1}^{r}{}^{*}d_{t_k^{(q^k)}};\ d_{t_k^{(q_k)}}=\prod_{j=1}^{q_k}d_{t_{kj}};\ \sigma=a_1+\ldots+a_r.$$

2°. Рассмотрим класс СМО, описанный выше, при $q_1=\ldots=q_r=1$, с тем лишь отличием, что i-вызов, поступивший во время обслуживания j-вызова $(1\leqslant i<j\leqslant r)$, замещает на приборе j-вызов, который: а) при новом поступлении на прибор дообслуживается; б) теряется; в) обслуживается заново. Классы дисциплин а), б), в) включают в себя дисциплины абсолютного приоритета с дообслуживанием, потерей и обслуживанием заново прерванного вызова ([2]).

Результаты, выводимые ниже, для разновидностей СМО с абсолютным приоритетом справедливы для классов дисциплин а), б), в) соответственно.

3°. *Абсолютный приоритет с дообслуживанием.* Пусть $n_i^{(r-1)}=(n_{i2},\ldots,n_{ir})$, $t^{(r-1)}=(t_2,\ldots,t_r)$ $(i=1,2)$; $n^{(2r-2)}=(n_1^{(r-1)},\ n_2^{(r-1)})$. Определим событие: $T(n^{(2r-2)};\ \bar{t}^{(r-1)})=\{$ обслужено n_{2k} k-вызовов за время $<t_k$; обслуживание k-вызовов прерывалось n_{1k} раз $(k=\overline{2,r})\}$ и, всюду ниже, $S(n,t)=\{n$ 1-вызовов обслужено за время $<t\}$, $\pi(m_{(r)})$ — п. з., инициированный $m_{(r)}$ штук вызовами, π_{k-1} — п. з. обслуживанием $\overline{1,k-1}$-вызовов, инициированный одним $\overline{1,k-1}$-вызовом; $\Pi_{k-1}(t)=P\{\pi_{k-1}<t\}$. Обозначим через $\hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)};\ t^{(r)})$, где $n^{(2r-1)}=(n,\ n^{(2r-2)})$, $t^{(r)}=(t,\ t^{(r-1)})$, вер. осуществления события $T(n^{(2r-2)};\ \bar{t}^{(r-1)})\cap S(n,t)$ за п. з. $\pi(m_{(r)})$.

Очевидно, при $n_{2k}=0$ $(k=\overline{2,r})$ вер. $\bar{d}_t^{+(r)}\hat{\Pi}_{m_{(r)}}$ $(n^{(2r-1)};\ t^{(r)})$ распадается на произведение той же вер. (без учета поступления k-вызовов) и $\exp\{-a_k t_{(r)}\}$, где $t_{(k)}=t+t_2+\ldots+t_k$ $(k=\overline{2,r})$. Поэтому предполагаем $n_{2k}>0$ $(k=\overline{2,r})$ и, исходя из аналогичных соображений, $n>0$.

При заданных $n_i^{(r-1)}$, $n_{2k}>0$ $(i=1,2;\ k=\overline{2,r})$ и целом $m_{(r)}>0$ запишем систему уравнений.

$$0<m_k+m_{(k-1)}=m_{(k)}+n_{1k};\ m_k\leqslant\min(n_{2k},m_{(k)});\ n_{1k}\leqslant m_{(k-1)}\ (k=\overline{2,r});$$
$$m_{(1)}\leqslant n. \qquad (2)$$

Теорема 2. *При* $n_{2k}>0$, $m_{(k-1)}\geqslant n_{1k}$ $(k=\overline{2,r})$, $n>0$, $B_i(+0)=0$ $(i=\overline{1,r})$ *имеем*

$$\sigma^{m_{(r)}}d_{t^{(r)}}\hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)};\ t^{(r)})=\exp\{-\sigma t_{(r)}\}\left\{\prod_{k=2}^{r}(a_k^{n_{2k}}t_k^{n_{1k}}/n_{1k}!)d_{t_k}[B_k(t_k)]_*^{n_{2k}}\right\}\cdot$$

$$a_1^n\sum_U\prod_{k=2}^{r}(m_{(k)}!t_k^{n_{2k}-m_k-1}/m_k!(m_{(k)}-m_k)!)\{t_{(k-1)}+(m_k/n_{2k})t_k\}d_t\Pi_{m_{(1)}}(0,n,t). \quad (3)$$

где $\Pi_{m_{(1)}}(0,n,t)$ *определяется из* (1) *при* $r=1$, $q_1=1$, $B_1^{(1)}(t)=B_1(t)$.

Доказательство. Пусть внутри $\pi(m_{(r)})$ обслужено n_{2r} r-вызовов за время t_r. Число прерываний обслуживаний n_{1r} r-вызовов есть поступление n_{1r} $\overline{1,r-1}$-вызовов за время $t_{(r)}$. Эти n_{1r} и $m_{(r-1)}-n_{1r}$ (из первоначальных $m_{(r)}$) $\overline{1,r-1}$-вызовов порождают $m_{(r-1)}$ независимых п. з. типа π_{r-1}, которые переносятся в начало п. з. $\pi(m_{(r)})$ и служат промежутком накопления r-вызовов. Поскольку в начале $\pi(m_{(r)})$ имеются $m_{(r)}$ нетронутых обслуживанием r-вызовов, на основе (2) находим вер. $R^{(r)}_{(m_r,m_{(r-1)})}(n_{1r};\ n_{2r};\ y;\ t_r)$ того, что за $\pi(m_{(r)})$ обслужено n_{2r} r-вызовов за время $<t_r$; обслуживание r-вызовов прерывалось n_{2r} раз и суммарная длительность п. з. типа π_{r-1} меньше y $(t_{(r)}=y+t_r)$

$$d_yd_{t_r}R^{(r)}_{(m_r,m_{(r-1)})}(n_{1r};\ n_{2r};\ y;\ t_r)=\exp\{-a_rt_{(r)}\}t_{(r)}^{n_{2r}-m_r-1}\frac{a_r^{n_{2r}-m_r}}{(n_{2r}-m_r)!}\left\{y+\right.$$
$$\left.+\frac{m_r}{n_{2r}}t_r\right\}. \qquad (4)$$
$$\frac{(\sigma_{r-1}t_r)^{n_{1r}}}{n_{1r}!}e^{-\sigma_{r-1}t_r}d_{t_r}[B_r(t_r)]_*^{n_{2r}}d_y[\Pi_{r-1}(y)]_*^{m_{(r-1)}}.$$

Так как число $\overline{1,r-1}$-вызовов, число прерываний и суммарная длительность их обслуживания за п. з. типа π_{r-1} зависят только от длины данных п. з. типа π_{r-1}, то с помощью (4) получаем $(\sigma_k=a_1+\ldots+a_k;\ k=\overline{1,r};\ \sigma=\sigma_r)$

$$\sigma_r^{m_{(r)}}d_{t^{(r)}}\hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)};\ t^{(r)})=a_r^{n_{2r}}\exp\{-(a_rt_{(r)}+$$
$$+\sigma_{r-1}t_r)\}\frac{t_r^{n_{1r}}}{n_{1r}!}d_{t_r}[B_r(t_r)]_*^{n_{2r}}. \qquad (4)$$

$$\sum \frac{m_{(r)}!}{m_r!(m_{(r)}-m_r)!}\frac{t_r^{n_{2r}-m_r-1}}{(n_{2r}-m_r)!}\left\{t_{(r-1)}+\frac{m_r}{n_{2r}}t_r\right\}\sigma_{r-1}^{m_{(r-1)}}d_{t^{(r-1)}}\hat{\Pi}_{m_{(r-1)}}(n^{(2r-3)};\ t^{(r-1)})$$

(Здесь $d_{t^{(r-1)}}\hat{\Pi}_{m_{(r-1)}}(n^{(2r-3)};\ t^{(r-1)})$ имеет тот же смысл, что и $d_{t^{(r)}}\hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)};\ t^{(r)})$, но без учета поступлений r-вызовов), откуда и следует (3).

4°. *Абсолютный приоритет с потерей.* Пусть $n_i^{(r-1)}=(n_{i2},\ldots,n_{ir})$, $t_i^{(r-1)}=(t_{i2},\ldots,t_{ir})$ — $(r-1)$ — мерные вектора; $n\geqslant 0$, $n_{ik}\geqslant 0$ — целые числа; $t\geqslant 0$, $t_{ik}\geqslant 0$ $(i=1,\ 2;\ k=\overline{2,\ r})$; $n^{(2r-1)}=(n,\ n_1^{(r-1)},\ n_2^{(r-1)})$, $t^{(2r-1)}=(t,\ t_1^{(r-1)},\ t_2^{(r-1)})$. Определим события: $V(n^{(2r-2)};\ t^{(2r-2)})=\{$обслуживания n_{1k} k-вызовов прерваны; суммарное время пребывания этих n_{1k} k-вызовов на приборе $<t_{1k}$; n_{2k} k-вызовов закончили обслуживание без прерываний и их суммарное время обслуживания $<t_{2k}(k=\overline{2,\ r})\}$. Здесь $n^{(2r-2)}=(n_1^{(r-1)},n_2^{(r-1)})$, $t^{(2r-2)}=(t_1^{(r-1)},\ t_2^{(r-1)})$. $\hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)},\ t^{(2r-1)})$ есть вер. осуществления события $V(n^{(2r-2)},\ t^{(2r-2)})\cap S(n,\ t)$ за п. з. $\pi(m_{(r)})$: $d_t^{+}{}_{(2r-1)}=\left(\prod_{k=2}^{r}{}^{+}d_{t_{1k}}\right)\left(\prod_{k=2}^{r}{}^{+}d_{t_{2k}}\right)dt$. Здесь $\prod_{k=2}^{r}{}^{+}d_{t_{ik}}$ содержит лишь те сомножители $d_{t_{ik}}$, у которых $n_{ik}>0$.

Очевидно, $d_{t^{(2r-1)}}^{+}\hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)},\ t^{(2r-1)})$ при $n_{1k}+n_{2k}=0$ $(k=\overline{2,\ r})$ распадается на произведение той же вер. без учета поступления k-вызовов и $\exp\{-a_k t_{(r)}\}$, где $t_{(m)}=t+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{m}t_{ij}(m=\overline{1,\ r})$, $\sum_{j=2}^{1}=0$. Аналогичное утверждение справедливо при $n=0$. Поэтому предполагаем $n_{1k}+n_{2k}>0$ $(k=\overline{2,\ r})$ и $n>0$.

При заданных $n_i^{(r-1)}$, $n_{1k}+n_{2k}>0$ $(i=1,\ 2;\ k=\overline{2,\ r})$ и целом $m_{(r)}>0$ система уравнений

$$0<m_{1k}+m_{2k}+m_{(k-1)}=m_{(k)}+n_{1k};\ m_{1k}\leqslant n_{1k}\leqslant m_{(k-1)};\ 0\leqslant m_{2k}\leqslant n_{2k}(k=\overline{2,\ r});$$
$$m_{(1)}\leqslant n \tag{5}$$

определяет шаг за шагом от $k=r$ до $k=2$ множества $U_k=U_k(m_{(k-1)},\ m_{1k},\ m_{2k})$ решений $(m_{(k-1)},\ m_{1k},\ m_{2k})$ в целых неотрицательных числах. Выделяем множество решений $U(m_{(k-1)},\ m_{1k},\ m_{2k};\ k=\overline{2,\ r})$ системы уравнений (5).

Теорема 3. *При* $n_{1k}+n_{2k}>0$ $(k=\overline{2,\ r})$, $n>0$, $m_{(k-1)}\geqslant n_{1k}$, $B_l(+0)=0$ $(l=1,\ r)$ *имеем*:

$$\sigma^{m(r)} d_t^{+}{}_{(2r-1)} \bar{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)}; t^{(2r-1)}) = \exp\{-\sigma t_{(r)}\} \sum_{U} \prod_{j=2}^{r} \left\{ \frac{a_j^{n_{1j}+n_{2j}} t_{(j)}^{n_{1j}+n_{2j}-m_{1j}-m_{2j}}}{(n_{1j}-m_{1j})!(n_{2j}-m_{2j})!} \right\} \cdot \tag{6}$$

$$d_{t_{1j}} \left[\int_0^{t_{1j}} [1-B_j(u)]du \right]_*^{n_{1j}} d_{t_{2j}} [B_j(t_{2j})]_*^{n_{2j}} \left\{ \frac{m_{(j-1)}-n_{1j}+m_{1j}}{m_{(j-1)}} \frac{t_{(j-1)}}{t_{(j)}} + \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{2} + \frac{m_{ij}}{n_{ij}} \frac{t_{ij}}{t_{(j)}} \right\} \cdot \frac{m_{(j)}!}{(m_{(j-1)}-n_{1j})! m_{1j} m_{2j}!} a_1^{m_1} d_t \Pi_{m_{(1)}}(0, n, t),$$

где n_{ij} и t_{ij} одновременно равны или отличны от нуля. В первом случае для любой монотонно возрастающей функции $A(t)$, $A(+0)=0$, полагаем $d_{t_{ij}}[A(t)]_*^{n_{ij}} \equiv 1$.

Доказательство. Обозначим ($\sigma_k = a_1 + \cdots + a_k$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma = \sigma_r$)

$$C_{1k}(t) = \int_0^t e^{-\sigma_{k-1}u}[1-B_k(u)]du; \quad C_{2k}(t) = \int_0^t e^{-\sigma_{k-1}u} dB_k(u).$$

Каждый k-вызов ($k=\overline{2, r}$) теряется с вер. $p_{1k} = 1 - \int_0^\infty e^{-\sigma_{k-1}t} dB_k(t)$ и завершает обслуживание без прерывания с вер. $p_{2k} = 1 - p_{1k}$. В первом случае k-вызов ($k=\overline{2, r}$) назовем 1, k-вызовом, во втором — 2, k-вызовом. j, k-вызовы образуют пуассоновский поток с параметром $a_k p_{jk}$, причем данные потоки независимы.

Рассмотрим СМО, описанную в пункте 1°, где входящими потоками являются потоки 1, k-вызовов и 2, k-вызовов; $q_1=2$, $q_2=1$, $B_1^{(1)}(t) = p_{1k}^{-1}\sigma_{k-1}C_{1k}(t)$, $B_1^{(2)}(t) = \Pi_{k-1}(t)$, $B_2^{(1)}(t) = p_{2k}^{-1}C_{2k}(t)$, $t_{11}=t_1$, $t_{21}=t_2$ $t_{12}=y$. Воспользовавшись (1) и формулой на стр. 9 работы ([1]), найдем вер. $R^{(k)}_{(m, m^{(2)})}(n^{(2)}; y, t^{(2)})$, где $m^{(2)} = (m_1, m_2)$, $n^{(2)} = (n_1, n_2)$, $t^{(2)} = (t_1, t_2)$, осуществления события $S(n^{(2)}; t^{(q^{(2)})})$ за п. з. $\pi(x; m^{(2)})$ при условии, что время загрузки есть сумма m независимых 2-фаз 1, k-вызовов. Пусть $t = y + t_1 + t_2$; $m + m_1 + m_2 > 0$; $m_i \leqslant n_i$ ($i=1, 2$); $d^{+}_{t^{(2)}} = \prod_{k=1}^{2}{}^{+} d_{t_k}$. Тогда при $m+n_1=0$, $m_2>0$, $t_2>0$ имеем $m_1=0$ и $d_{t_2} R^{(k)}_{(m, m^{(2)})}(n^{(2)}; y; t^{(2)}) =$

$$= \exp\{-a_k t_2\} t_2^{n_2-m_2} \frac{m_2}{n_2} \frac{(a_k p_{2k})^{n_2-m_2}}{(n_2-m_2)!} d_{t_2}[p_{2k}^{-1}C_{2k}(t_2)]_*^{n_2}.$$

При $m+n_1>0$, $y>0$ имеем (δ_{mn} — символ Кронекера)

$$d_y d^{+}_{t^{(2)}} R^{(k)}_{(m, m^{(2)})}(n^{(2)}; y; t^{(2)}) = \exp\{-a_k \bar{t}\} \bar{t}^{n_1+n_2-m_2-m_1-1} \sigma_{k-1}^{n_1} \left\{ \delta_{m0} \left[\frac{m_1}{n_1}(y+t_1) + \right.\right.$$

$$+ (1-\delta_{n_2 0}) \frac{m_2}{n_2} t_2 \Big] d_y [\Pi_{k-1}(y)]_*^{n_1} + (1-\delta_{m0}) \int_{x=0}^{y} \Big[x + (1-\delta_{n_1 0}) \frac{m_1}{n_1} (y-x+t_1) +$$

$$(1-\delta_{n_2 0}) \frac{m_2}{n_2} t_2 \Big] d_y [\Pi_{k-1}(y-x)]_*^{n_1} d_x [\Pi_{k-1}(x)]_*^{m} \Big\}.$$

$$\Big\{ \prod_{i=1}^{2}{}^{+} \frac{(a_k p_{ik})^{n_i - m_i}}{(n_i - m_i)!} d_{t_i} [p_{ik}^{-1} C_{ik}(t_i)]_*^{n_i} \Big\} = \tag{7}$$

$$\exp\{-a_k \bar{t}\} \sigma_{k-1}^{n_1} \frac{n_1 + m_1}{m + n_1} \frac{y}{\bar{t}} + \sum_{i=1}^{2}{}^{+} \frac{m_i}{n_i} \frac{t_i}{\bar{t}} \Big\} d_y [\Pi_{k-1}(y)]_*^{m+n_1} \times$$

$$\times \Big\{ \prod_{i=1}^{2}{}^{+} \frac{(a_k p_{ik} \bar{t})^{n_i - m_i}}{(n_i - m_i)!} d_{t_i} [p_{ik}^{-1} C_{ik}(t_i)]_*^{n_i} \Big\}.$$

Вернемся к нашей системе, предположим прекращается доступ $\overline{m+1, r}$-вызовов в систему и вер. $d^{+}_{t^{(2m-1)}} \bar{\Pi}(n^{(2m-1)}; t^{(2m-1)})$ имеет тот же смысл, что и вер. $d^{+}_{t^{(2r-1)}} \bar{\Pi}(n^{(2r-1)}; t^{(2r-1)})$, но в системе с первыми m входящими потоками. Составим рекуррентные уравнения, связывающие эти вер. при $m = k$ и $m = k-1$. Пусть $m_{(k)}$ — целое положительное число. Принимая во внимание, что число i, j-вызовов ($i = 1, 2$; $j = \overline{1, k-1}$), обслуженных за п. з. типа π_{k-1} в п. з. системы (при $m = k$), инициированном $m_{(k)}$ $\overline{1, k}$-вызовами, и суммарная длительность обслуживания этих i, j-вызовов зависит лишь от длины данных п. з. типа π_{k-1}, то на основе (7) находим

$$\sigma_k^{m_{(k)}} d^{+}_{t^{(2k-1)}} \bar{\Pi}_{m_{(k)}}(n^{(2k-1)}; t^{(2k-1)}) = \exp\{-a_k t_{(k)}\} \sum_{U_k} \frac{a_k^{n_{1k}+n_{2k}} m_{(k)}!}{(m_{(k-1)} - n_{1k})! m_{1k}! m_{2k}!}$$

$$\times \Big\{ \frac{m_{(k-1)} - n_{1k} + m_{1k}}{m_{(k-1)}} \frac{t_{(k-1)}}{t_{(k)}} + \sum_{i=1}^{2}{}^{+} \frac{m_{ik}}{n_{ik}} \frac{t_{ik}}{t_{(k)}} \Big\} \Big\{ \prod_{i=1}^{2}{}^{+} \frac{t_{(k)}^{n_{ik}+m_{ik}}}{(n_{ik} - m_{ik})!} \times$$

$$\times d_{t_{ik}} [C_{ik}(t_{ik})]_*^{n_{ik}} \Big\} \cdot \sigma_{(k-1)}^{m_{k-1}} d^{+}_{t^{(2k-3)}} \bar{\Pi}_{m_{(k-1)}}(n^{(2k-3)}; t^{(2k-3)}). \tag{8}$$

Очевидно, рекуррентные соотношения (8) приводят к решению

$$\sigma^{m_{(r)}} d^{+}_{t^{(2r-1)}} \bar{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)}; t^{(2r-1)}) = \exp\Big\{ -\sum_{i=1}^{r} a_i t_{(i)} \Big\} \times$$

$$\times \sum_{U} \Big[\prod_{j=1}^{r} \Big\{ \prod_{i=1}^{2}{}^{+} \frac{a_{ij}^{n_{ij}} t_{(j)}^{n_{ij}-m_{ij}}}{(n_{ij} - m_{ij})!} d_{t_{ij}} [C_{ij}(t_{ij})]_*^{n_{ij}} \Big\} \times \Big\{ \frac{m_{(j-1)} - n_{1j} + m_{1j}}{m_{(j-1)}} \frac{t_{(j-1)}}{t_{(j)}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}{}^{+} \frac{m_{ij}}{n_{ij}} \frac{t_{ij}}{t_{(j)}} \Big\} \frac{m_{(j)}!}{(m_{(j-1)} - n_{1j})! m_{1j}! m_{2j}!} \Big] a_{1(1)}^{m} d_t \Pi_{m_{(1)}}(0, n, t), \tag{9}$$

где $\Pi_{m_{(1)}}(0, n, t)$ задается теоремой 1. Упрощая (9), получаем (6).

5°. *Абсолютный приоритет с обслуживанием заново.* Пусть

$n_i^{(r-1)}=(n_{i2},\cdot\cdot\cdot,n_{ir})$ и $t_i^{(r-1)}=(t_{i2},\cdot\cdot\cdot t_{ir})-(r-1)$ —мерные вектора; $n\geqslant 0$, $n_{ik}\geqslant 0$—целые числа; $t\geqslant 0$, $t_{ik}\geqslant 0$ $(i=1,\ 2;\ k=\overline{2,\ r})$; $n^{(2r-1)}=(n_1^{(r-1)},\ (n,\ n_2^{(r-1)}))$; $t^{(2r-1)}=(t_1^{(r-1)},\ (t,\ t_2^{(r-1)}))$. Определим событие: $W(n_i^{(r-1)};\ t_i^{(r-1)};\ i=1,\ 2)=\{n_{2k}$ k-вызовов обслужено; их длительности обслуживания прерывались n_{1k} раз суммарная длительность промежутков обслуживания этих n_{2k} k-вызовов, завершающихся прерыванием обслуживания, $<t_{1k}$; суммарная длительность промежутков обслуживания этих n_{2k} k-вызовов, завершающихся уходом вызова из системы, $<t_{2k}$ $(k=\overline{2,\ r})\}$. Пусть $\tilde{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)};\ t^{(2r-1)})$ есть вер. осуществления события $S(n,\ t)\cap W(n_i^{(r-1)};\ t_i^{(r-1)};\ i=1,\ 2)$ за п. з. $\pi(m_{(r)})$, инициированный $m_{(r)}$ штук вызовами.

Если для некоторого k $n_{2k}=0$ $(k=\overline{2,\ r})$, то $n_{1k}=0$, и аналогично предыдущим случаям предполагаем: $n_{2k}>0$, $n>0$.

При заданных $n_i^{(r-1)}$, $n_{2k}>0$, $n>0$ $(i=1,\ 2;\ k=\overline{2,\ r})$ и целом $m_{(r)}>0$ система уравнений $0<m_{1k}+\cdot\cdot\cdot+m_{n_{1k}+1k}+m_{(k-1)}=m_{(k)}+n_{1k}$, $r_{1k}+\cdot\cdot\cdot+r_{n_{1k}+1k}=n_{2k}$; $m_{(1)}\leqslant n$;

$$0\cdot r_{1k}+1\cdot r_{2k}+\cdot\cdot\cdot+n_{1k}\cdot r_{n_{1k}+1k}=n_{1k}<m_{(k-1)};\ 0\leqslant m_{jk}\leqslant r_{jk}$$
$$(j=\overline{1,\ n_{1k}+1};\ k=\overline{2,\ r}) \tag{10}$$

определяет шаг за шагом от $k=r$ до $k=2$ множества $U_k=U_k(m_{(k-1)};\ m_k^{(n_{1k}+1)},\ r_k^{(n_{1k}+1)}$, где $m_k^{(n_{1k}+1)}=(m_{1k},\ldots,m_{n_{1k}+1k})$, $r_k^{(n_{1k}+1)}=(r_{1k}+\ldots+r_{n_{1k}+1k})$, решений $(m_{(k-1)},\ m_k^{(n_{1k}+1)},\ r_k^{(n_{1k}+1)})$ в целых неотрицательных числах. Выделяем множество решений $U(m_{(k-1)},\ m_k^{(n_{1k}+1)},\ r_k^{(n_{1k}+1)};\ k=\overline{2,\ r})$ системы уравнений (10). Обозначим

$$v_{1k}=0\cdot m_{1k}+1\cdot m_{2k}+\cdot\cdot\cdot+n_{1k}\cdot m_{n_{1k}+1k};\ v_{2k}=m_{1k}+\cdot\cdot\cdot+m_{n_{1k}+1k};$$
$$t_{(k)}=t+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{k}t_{ij}\ (k=\overline{2,\ r}).$$

Теорема 4. *При* $n_{2k}>0$, $n_{1k}\geqslant 0$, $n>0$, $m_{(k-1)}\geqslant n_{1k}$, $B_i(+0)=0$ $(k=\overline{2,\ r};\ i=\overline{1,\ r})$ *имеем*

$$\sigma^{m_{(r)}}d_{t^{(2r-1)}}\tilde{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)};\ t^{(2r-1)})=$$
$$=\exp\{-\sigma\cdot t_{(r)}\}\sum_{U}\prod_{j=2}^{r}\left\{\prod_{k=1}^{n_{1j}+1}\frac{a_{j\,(j)}^{r_{kj}}t_{(j)}^{r_{kj}-m_{kj}}}{(r_{kj}-m_{kj})!}\right\}\times$$
$$\times d_{t_{1j}}\left[\int_0^{t_{1j}}[1-B_j(u)]du\right]_*^{n_{1j}}d_{t_{2j}}[B_j(t_{2j})]_*^{n_{2j}}\left\{\frac{m_{(j-1)}-n_{1j}+v_{1j}}{m_{(j-1)}}\frac{t_{(j-1)}}{t_{(j)}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{2}\frac{v_{ij}}{n_{ij}}\frac{t_{ij}}{t_{(j)}}\right\}\frac{m_{(j)}!}{(m_{(j-1)}-n_{1j})!m_{1j}!\ldots m_{n_j+1j}!}\Bigg]a_1^{m_{(1)}}d_t\Pi_{m_{(1)}}(0,\ n,\ t). \tag{11}$$

Доказательство. Обслуживание каждого k-вызова прерывается i раз $(i\geqslant 0;\ k=\overline{2,\ r})$ с вер. $p_{2k}p_{1k}^i$. k-вызов $(k=\overline{2,\ r})$, обслужи-

вание которого прерывается l раз ($l=\overline{0,\ n_{1k}}$, называем l, k-вызовом и называем $n_{1k}+1$, k-вызовом, если число прерываний его обслуживания $>n_{1k}$. Потоки i,k — вызовов ($i=\overline{0,\ n_{1k}+1}$; $k=\overline{2,\ r}$) независимы.

Рассмотрим СМО, описанную в пункте 1°, где входящими потоками служат потоки l, k-вызовов ($l=\overline{1,\ n_{1k}+2}$; $k=\overline{2,\ r}$); $q_1=1$; $q_j=3$ ($j=\overline{2,\ n_{1k}+1}$); $q_{n_{1k}+2}=1$; $B_1^{(1)}(t)=p_{2k}^{-1}C_{2k}(t)$; $B_j^{(1)}(t)=p_{2k}^{-1}C_{2k}(t)$; $B_j^{(2)}(t)=[p_{1k}^{-1}\sigma_{k-1}C_{1k}(t)]_*^{j-1}$; $B_j^{(3)}(t)=[\Pi_{k-1}(t)]_*^{j-1}$; $B_{n_{1k}+2}^{(1)}(t)=p_{2k}^{-1}C_{2k}(t)*$ $*\left[\sum\limits_{j\geq n_{1k}+1}\sigma_{k-1}^{j}p_{1k}^{-j}[C_{1k}(t)*\Pi_{k-1}(t)]_*^{j}\right]$.

Обозначим через $\Lambda(r^{(n_{1k}+1)};\ y;\ t^{(2)})$, где $r^{(n_{1k}+1)}=(r_1,\ \ldots,\ r_{n_{1k}+1})$, $t^{(2)}=(t_1,\ t_2)$, следующее событие: $\{r_i$ l, k-вызовов обслужено; суммарная длительность j-фаз и 3-фаз обслуженных k-вызовов $<t_j$ и $<y$ соответственно; не поступил ни один n_{1k+1}, k-вызов ($l=\overline{0,\ n_{1k}}$; $j=1,2$). Пусть $R^{(k)}_{\{m,\ m^{(n_{1k}+1)}\}}(r^{(n_{1k}+1)},\ y;\ t^{(2)})$, где $m^{(n_{1k}+1)}=(m_1,\ \ldots,\ m^{n_{1k}+1})$ есть вер. осуществления события $\Lambda(r^{(n_{1k}+1)};\ y;\ t^{(2)})$ в п. з. $\pi(x;\ m^{(n_{1k}+1)})$, со временем задержки x, представляющей из себя сумму m независимых 3-фаз 2, k-вызова, и m_j нетронутых обслуживанием j, k-вызовов. На основе теоремы 1 заключаем ($t=y+t_1+t_2$)

$$d_y d_{t^{(2)}} R^{(k)}_{\{m,\ m^{(n_{1k}+1)}\}}(r^{(n_{1k}+1)};\ y;\ t^{(2)})=\exp\{-a_k t\}t^{n_{2k}-\sigma_{2k}-1}\sigma_{k-1}^{n_{1k}}\times$$

$$\times\left\{\prod_{j=1}^{n_{1k}+1}\frac{(a_k p_{2k}p_{1k}^{j-1})^{r_j-m_j}}{(r_j-m_j)!}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{n_{1k}+1}J_j^{(k)}\right\},$$

где (чтобы не загромождать запись, положили $y>0$, $t_1>0$, $n_{ik}>0$, $m>0$)

$$J_0^{(k)}=\int\limits_{x=0}^{y}xd_x[\Pi_{k-1}(x)]_*^{m}d_y[\Pi_{k-1}(y-x)]_*^{n_{1k}}\prod_{j=1}^{2}d_{t_j}[p_{jk}^{-1}C_{jk}(t_j)]_*^{n_{jk}};$$

$$J_i^{(k)}=\frac{m_{ik}}{r_{ik}}\left\{(1-\delta_{i0})\left[\int\limits_{x=0}^{y}xd_x[\Pi_{k-1}(x)]_*^{(i-1)r_i}d_y[\Pi_{k-1}(y-x)]_*^{m+n_{1k}-(i-1)r_i}\times\right.\right.$$

$$\times\prod_{j=1}^{2}d_{t_j}[p_{jk}^{-1}C_{jk}(t_j)]_*^{n_{jk}}+\int\limits_{z=0}^{t_1}zd_z[p_{1k}^{-1}C_{1k}(z)]_*^{(i-1)r_i}d_{t_1}\times$$

$$\left.\times[p_{1k}^{-1}C_{1k}(t_1-z)]_*^{n_{1k}-(i-1)r_i}d_y[\Pi_{k-1}(y)]_*^{m+n_{1k}}d_{t_1}[p_{2k}^{-1}C_{2k}(t_2)]_*^{n_{2k}}\right]+$$

$$\int\limits_{z=0}^{t_2}zd_z[p_{2k}^{-1}C_{2k}(t)]_*^{r_i}d_{t_2}[p_{2k}^{-1}C_{2k}(t_2-z)]_*^{n_{2k}-r_i}d_y[\Pi_{k-1}(y)]_*^{m+n_{1k}}d_{t_1}[p_{1k}^{-1}C_{1k}(t_1)]_*^{n_{1k}}\Bigg\}.$$

Следовательно, используя формулу из работы ([1]), находим

$$d_y d_{t^{(2)}} R^{(k)}_{(m,m^{(n_{1k}+1)})}(r^{(n_{1k}+1)}; y; t^{(2)}) = \exp\left|-a_k t\right| t^{n_{2k}-v_{2k}} \sigma_{k-1}^{n_{1k}} d_y \left|\Pi_{k-1}(y)\right|_*^{m-n_{1k}} \cdot$$

$$\left\{\prod_{j=1}^{n_{1k}+1} \frac{a_k p_{2k} p_{1k}^{(-1)r_j-m_j}}{(r_j-m_j)!}\right\}\left\{\frac{m+v_{1k}}{m+n_{1k}}\frac{y}{t}+\frac{v_{1k}}{n_{1k}}\frac{t_{1k}}{t}+\frac{v_{2k}}{n_{2k}}\frac{t_{2k}}{t}\right\}\prod_{i=1}^{2} d_{t_i}\left[p_{ik}^{-1}C_{ik}(t_i)\right]_*^{n_{ik}-r_i}.$$

Аналогично (8) и в данном случае получаем рекуррентные уравнения

$$\sigma_k^{m_{(k)}} d_{t^{(2k-1)}} \tilde{\Pi}_{m(k)}(n^{(2k-1)}; t^{(2k-1)}) = \exp\left|-a_k t_{(k)}\right| \sum_{U_k} \frac{a_k^{n_{2k}} m_{(k)}!}{(m_{(k-1)}-n_{1k})!\, m_{1k}! \ldots m_{n_{1k}+1k}!}$$

$$\times\left\{\frac{m_{(k-1)}-n_{1k}+v_{1k}}{m_{(k-1)}}\frac{t_{(k-1)}}{t_{(k)}}+\sum_{i=1}^{2}\frac{v_{ik}}{n_{ik}}\frac{t_{ik}}{t_{(k)}}\right\}\left\{\prod_{j=1}^{n_{1k}+1}\frac{t_{(k)}^{r_{jk}-m_{jk}}}{(r_{jk}-m_{jk})!}\right\}\left\{\prod_{i=1}^{2}\times\right.$$

$$\left.\times\, d_{t_{ik}}\left[C_{ik}(t_{ik})\right]_*^{n_{ik}}\right\}\sigma_{k-1}^{m_{(k-1)}} d_{t^{(2k-3)}} \tilde{\Pi}_{m_{(k-1)}}(n^{(2k-3)}; t^{(2k-3)}),$$

которые, разрешаясь аналогично (9), влекут за собой (11).

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Է. Ա. ԳԱՆԻԵԼՅԱՆ

Ընդհատումներով սպասարկման միալար սիստեմների գրաղվածության պարբերությունների մասին

Դիտարկվում է սպասումով, r ներմտնող Պուասոնի հոսքերով և սպասարկման ժամանակների ընդհանուր բաշխումներով միալար զանգվածային սպասարկման սիստեմ, որտեղ ընդունված են բացարձակ նախապատվությամբ դիսցիպլինայի հետևյալ տարբերակները՝ ընդհատված պահանջը. ա) ընդհատման պահին անմիջապես դուրս է մղվում սիստեմից. բ) հաջորդ անգամ սարք վերադառնալիս սպասարկվում է այն կետից, որտեղ ընդհատվել էր. գ) հաջորդ անգամ սարք վերադառնալիս, սպասարկվում է որպես ընդհանրապես չսպասարկված մի պահանջ։ i-րդ հոսքի պահանջը կանվանենք i-պահանջ։

ա) Դիցուք $n^{(r-1)} = (n_{i2}, \ldots, n_{ir})$, $t_i^{(r-1)} = (t_{i2}, \ldots, t_{ir})$ $(i=1, 2)$։ *Սահմանենք հետևյալ պատահարները* $V(n_i^{(r-1)}; t_i^{(r-1)}; i=1, 2) = \{n_{1k}$ *k-պահանջների սպասարկումները ընդհատված են, այդ* n_{1k} *k-պահանջների սարքի վրա գտնվելու գումարային ժամանակը* $< t_{1k}$։ n_{2k} *k-պահանջներ սպասարկվել են առանց ընդհատումի։ Նրանց գումարային սպասարկման ժամանակը* $< t_{2k} (k=\overline{2, r})\}$ *և* $S(n, t) = \{n$ *1-պահանջները սպասարկվել են* $(0, t)$ *միջակայքում։* $\pi(m)$*-ը գրաղվածության մի պարբերություն է։ որի սկզբում կան* m *հատ պահանջներ։ Դիտված է* $V(n_i^{(r-1)}, t_i^{(r-1)}; (i=1, 2))$

$\cap S(n, t)$ պատահարի տեղի ունենալու հավանականությունը $\pi(m)$-ի ընթացքում։

բ) Դիցուք $n_i^{(r-1)} = (n_{i2}, \ldots, n_{ir})$, $t^{(r-1)} = (t_2, \ldots, t_r)$, $n^{(2r-2)} = (n_1^{(r-1)}, n_2^{(r-1)})$ $(i = 1, 2)$։ Սահմանենք հետևյալ պատահարը՝ $T(n^{(2r-2)}, t^{(r-1)}) = \{n_{2k}$ k-պահանջ սպասարկվել են $[0, t_k)$ միջակայքում. k-պահանջների սպասարկումը ընդհատվել է n_{1k} անգամ $(k = 2, r)\}$։ Գտնված է $T(n^{(2r-2)}, t^{(r-1)}) \cap S(n, t)$ պատահարի տեղի ունենալու հավանականությունը $\pi(m)$-ի ընթացքում։

գ) Դիցուք $n_i^{(r-1)} = (n_{i2}, \ldots, n_{ir})$, $t_i^{(r-1)} = (t_{i2}, \ldots t_{ir})$ $(i = 1, 2)$։ Սահմանենք հետևյալ պատահարը՝ $W(n_i^{(r-1)}; t_i^{(r-1)}; (i = 1, 2)) = \{n_{2k}$ k-պահանջ սպասարկված է, նրանց սպասարկումը ընդհատվել է n_{1k} անգամ. այն սպասարկման միջակայքների գումարային երկարությունը, որոնք ավարտվում են սպասարկման ընդհատումով, $< t_{1k}$, իսկ նրանցը, որոնք ավարտվում են պահանջների դուրս մղումով սիստեմից, $< t_{2k}$ $(k = \overline{2, r})\}$։ Գտնված է $W(n_i^{(r-1)}; t_i^{(r-1)}; (i = 1, 2)) \cap S(n, t)$ պատահարի տեղի ունենալու հավանականությունը $\pi(m)$-ի ընթացքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Даниелян*, ДАН Арм. ССР т. LXVI, № 1 (1978). [2] *Б. В. Гнеденко* и др., Приоритетные системы обслуживания, М., МГУ, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 1

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О решении с оценкой $\bar{\partial}$-уравнения в некоторых областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 24/II 1978)

Пусть D — область голоморфности в n-мерном комплексном пространстве C^n; $f(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)d\bar{z}_k$ — бесконечно дифференцируемая в $\bar{D}$, $\bar{\partial}$ — замкнутая форма типа (0,1). В случае, если D—строго псевдовыпуклая область, в ([1]) и ([2]) найдены формулы решения уравнения

$$\bar{\partial}u=f, \tag{1}$$

допускающего равномерную оценку

$$\|u\|_{C(D)}\leq\gamma\cdot\|f\|_{C(D)}, \tag{2}$$

где $\|u\|_{C(D)}=\sup_{z\in D}|u(z)|$, $\|f\|_{C(D)}=\sum_{k=1}^{n}\|f\|_{C(D)}$

и постоянная γ от f не зависит. Для невырожденного полиэдра D задача решена Г. М. Хенкиным ([3]).

В настоящей работе дана формула решения уравнения (1) с оценкой (2) для областей D, ограниченных с одной стороны аналитической гиперповерхностью, а с другой—строго псевдовыпуклой гиперповерхностью:

$$D=\left\{z:\rho(z)<0,\ |\chi(z)|<1\right\}. \tag{3}$$

Здесь $\chi(z)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности Ω замыкания области $\bar{D}$; $\rho(z)$ — вещественнозначная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, строго плюрисубгармоническая в Ω, т.е. квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial z_k}w_j\bar{w}_k$$

положительно определена при всех $z\in\Omega$. Граница ∂D области состоит из двух граней

$$\sigma_1=\{z\in D:\rho(z)=0\}\ \text{и}\ \sigma_2=\{z\in D:\ |\chi(z)|=1\}.$$

Область D будем предполагать невырожденной в смысле R^{2n} т. е.

$$\operatorname{grad}\rho(z)\neq 0,\ z\in\sigma_1;\ \operatorname{grad}\chi(z)\neq 0,\ z\in\sigma_2$$

и $\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix}\operatorname{grad}\rho, & \overline{\operatorname{grad}\rho}\\ \operatorname{grad}\chi, & \overline{\operatorname{grad}\chi}\end{matrix}\right\|=2$ на „остове" $\sigma_1\cap\sigma_2$. Пусть, далее, $\Phi(\zeta,z)$—ядро, построенное по функции $\rho(z)$ в ([3]); $P(\zeta,z)=(P_1(\zeta,z),\dots,P_n(\zeta,z))$, —соответствующая вектор-функция

$$\Phi(\zeta,z)=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)\,P_k(\zeta,z);$$

пусть $Q(\zeta,z)=(Q_1(\zeta,z),\dots,Q_n(\zeta,z))$, где $Q_k(\zeta,z)$ — коэффициенты Гефера функции χ_k /см., например, ([4])/, т. е.

$$\chi(\zeta)-\chi(z)=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)Q_k(\zeta,z).$$

При фиксированном $z\in D$ построим поверхность D_z в пространстве переменных $(\zeta,\eta)\in C^{2n}$ следующим образом:

$$\eta=(1-\lambda)\,\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}+\lambda\,\frac{P(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)},\qquad \text{если}\quad \zeta\in\sigma_1;\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1;$$

$$\eta=(1-\mu)\,\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}+\mu\,\frac{Q(\zeta,z)}{\chi(\zeta)-\chi(z)},\qquad \text{если}\quad \zeta\in\sigma_2;\ 0\leqslant\mu\leqslant 1;$$

$$\eta=(1-\lambda-\mu)\,\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}+\lambda\,\frac{P(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}+\mu\,\frac{Q(\zeta,z)}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\quad \text{если}\quad \zeta\in\sigma_1\cap\sigma_2;\ \lambda+\mu\leqslant 1.$$

Пусть $u(z)$ — гладкая на $\overline{D}$ функция. Применяя формулу Стокса к форме $u(\zeta)\omega^1(\eta)\wedge\omega(\zeta)$, где

$$\omega^1(\eta)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\eta_k\bigwedge_{j\neq k}d\eta_j,\quad \omega(\zeta)=\bigwedge_{j=1}^{n}d\zeta_j,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\zeta\in\partial D_z}u(\zeta)\omega^1(\eta)\wedge\omega(\zeta)=\int\limits_{\zeta\in D_z}\overline{\partial}u(\zeta)\wedge\omega^1(\eta)\wedge\omega(\zeta)\ ,$$

или

$$\int\limits_{\zeta\in\sigma_1}u(\zeta)\omega^1\left(\frac{P}{\varphi}\right)\wedge\omega(\zeta)+\int\limits_{\zeta\in\sigma_2}u(\zeta)\omega^1\left(\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta)+$$

$$+\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in[\sigma_1\cap\sigma_2]\times[0,1]}u(\zeta)\omega^1\left(\lambda\,\frac{P}{\Phi}+(1-\lambda)\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta)=\int\limits_{\zeta\in\partial D}u(\zeta)\omega^1\left(\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\omega(\zeta)+$$

$$+\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_1\times[0,1]}\overline{\partial}u(\zeta)\wedge\omega^1\left((1-\lambda)\,\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{P}{\Phi}\right)\wedge\omega(\zeta)+\int\limits_{(\zeta,\mu)\in\sigma_2\times[0,1]}\overline{\partial}u(\zeta)\wedge\omega^1\left((1-\mu)\right.$$

$$\left.\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}+\mu\,\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta).$$

Отсюда, с учетом формулы Мартинелли—Бохнера для гладких функций

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1!)}\,u(z)=\int\limits_{\zeta\in\partial D} u(\zeta)\omega_1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\Lambda\omega(\zeta)-\int\limits_{\zeta\in D}\bar\partial u(\zeta)\Lambda\omega^1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\Lambda\omega(\zeta)$$

следует

Теорема 1. Для всякой гладкой в $\bar D$ функции $u(z)$ имеет место представление

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}\,u(z)=\int\limits_{\zeta\in\sigma_1} u(\zeta)\omega^1\left(\frac{P}{\Phi}\right)\Lambda\omega(\zeta)+\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in[\sigma_1\cap\sigma_2]\times[0,1]} u(\zeta)\omega^1\Bigg((1-\lambda)\frac{P}{\Phi}+\lambda$$

$$\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\Bigg)\Lambda\omega(\zeta)-\int\limits_{\zeta\in D}\bar\partial u(\zeta)\Lambda\omega^1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\Lambda\omega(\zeta)-\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_1\times[0,1]}\bar\partial u(\zeta)\Lambda\omega^1\Bigg((1-\lambda)$$

$$\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{P}{\Phi}\Bigg)\Lambda\omega(\zeta)-\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_2\times[0,1]}\bar\partial u(\zeta)\Lambda\omega^1\Bigg((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\Bigg)\Lambda\omega(\zeta). \quad (4)$$

Формула (4) является многомерным аналогом формулы Коши–Грина для областей рассматриваемого типа (3).
Как и в одномерном случае, она позволяет выписать в явном виде решение $\bar\partial$—уравнения.

Теорема 2. *Функция $u(z)$, определяемая в D формулой*

$$-\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}u(z)=\int\limits_{\zeta\in D} f(\zeta)\Lambda\omega^1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\Lambda\omega(\zeta)+\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_1\times[0,1]} f(\zeta)\Lambda\omega^1\Bigg((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+$$

$$+\lambda\frac{P}{\Phi}\Bigg)\Lambda\omega(\zeta)+\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_2\times[0,1]} f(\zeta)\Lambda\omega^1\Bigg((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\Bigg)\Lambda\omega(\zeta), \quad (5)$$

является решением уравнения (1), *причем оно допускает оценку* (2).

Первые два слагаемых в правой части (5) оцениваются тем же способом, что и в ([2]). Третье слагаемое $J(z)$ имеет ядро с неинтегрируемой особенностью при $z\in\sigma_2$. Поэтому необходимо привести его к форме, более удобной для оценок. Проделаем это, для простоты, в случае, когда D—полушар в C^2:

$$D=\{\zeta\in C^2:\ |\zeta|^2<1,\ \mathrm{Im}\,\zeta_2>0\}.$$

Имеем

$$\rho(\zeta)=|\zeta|^2-1;\ \chi(\zeta)=\zeta_2,\ P=(\bar\zeta_1,\bar\zeta^2);\ Q=(0,1).$$

С учетом, что на $\sigma_2\times[0,1]$

$$\omega^1\Bigg((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\Bigg)\Lambda\omega(\zeta)=$$

$$\frac{\begin{vmatrix}\bar\zeta_1-\bar z_1 & Q_1\\ \bar\zeta_2-\bar z_2 & Q_2\end{vmatrix}}{|\zeta-z|^2[\chi(\zeta)-\chi(z)]}\omega(\zeta)\Lambda d\lambda=\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)\Lambda d\lambda,$$

будем иметь

$$J(z)=\int\limits_{\sigma_2} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta).$$

Пусть $\varepsilon>0$ и

$$T_z^\varepsilon=\{\zeta\in\bar D:\ |\zeta-z|\leqslant\varepsilon\}.$$

Применяя формулу Стокса к форме

$$f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)$$

в области $D\setminus T_z^\varepsilon$, получаем

$$\int\limits_{\sigma_2} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)+\int\limits_{\sigma_1\setminus T_z^\varepsilon} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)-$$

$$-\int\limits_{|\zeta_2-z_2|=\varepsilon|\zeta|<1} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)=\int\limits_{D\setminus T_z^\varepsilon} f(\zeta)\frac{(\bar\zeta_2-\bar z_2)d\bar\zeta_1-(\bar\zeta_1-\bar z_1)d\bar\zeta_2}{|\zeta-z|^4}.$$

Устремляя ε к нулю, отсюда получаем

$$J(z)=\int\limits_D f(\zeta)\wedge\frac{(\bar\zeta_2-\bar z_2)d\bar\zeta_1-(\bar\zeta_1-\bar z_1)d\bar\zeta_2}{|\zeta-z|^4}\wedge\omega(\zeta)-$$

$$-\int\limits_{\sigma_1} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)-\int\limits_{|\zeta_1|\leqslant\sqrt{1-|z_2|^2}} f_1(\zeta_1,z_2)\,\frac{d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}. \tag{6}$$

Все три интеграла в (6) допускают равномерную оценку (2) в силу их равномерной сходимости при $z\in D$.

Ереванский государственный университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Որոշ տիրույթներում $\bar\partial$-հավասարման գնահատականով լուծման մասին

Աշխատանքում բերվում է $\bar\partial u=f$ հավասարման լուծման բանաձևը D տիրույթում n չափանի կոմպլեքս տարածության մեջ։ Այստեղ f-ը (0,1) տիպի դիֆերենցիալ ձև է, որի համար $\bar\partial f=0$, իսկ D տիրույթը որոշվում է հետևյալ պայմանով՝

$$D=\{z:\ \rho(z)<0,\ |\chi(z)<1\},$$

որտեղ $\rho(z)$-ը երկու անգամ անընդհատ ածանցելի և խիստ պլյուրիսուբհարմոնիկ

մոնիկ է D տիրույթի փակման որևէ շրջակայքում, իսկ $\chi(z)$-ը հոլոմորֆ է նույն շրջակայքում։

Կիրառումների համար կարևոր է ունենալ $\bar{\partial}$-հավասարման այնպիսի $u(z)$ լուծում, որը թույլ է տալիս հավասարաչափ գնահատական, այսինքն, բավարարում է $\|u\| \leqslant \gamma \cdot \|f\|$ անհավասարությանը, որտեղ γ մեծությունը կախված է միայն տիրույթից։ Ապացուցվում է, որ յանաձևով բերված մեր լուծումը բավարարում է հավասարաչափ գնահատականին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Grauert H.*, Lieb J., Rice Univ. Stud., 56, № 2, 1970. [2] *Г. М. Хенкин*, Мат. сб., т. 82; 2, 1970. [3] *Г. М. Хенкин*, УМН, т. 26: 3, 1971. [4] *Б. В. Шабат*, Введение в комплексный анализ, ч. 2, М., 1976.

[illegible]

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 1

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Р. Г. Айрапетян

Об эквивалентных формах условия Лопатинского для гиперболических уравнений второго порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 5/V 1978)

Смешанные задачи для гиперболических уравнений при нарушении равномерного условия Лопатинского рассматривались в работах ([1-3]). В работах ([4,5]) был предложен подход, позволяющий свести широкий класс смешанных задач для гиперболического уравнения второго порядка к смешанной задаче с граничным условием Дирихле. При этом в работе ([5]) условие Лопатинского было заменено требованием, чтобы гиперболический оператор A был бы равен, по модулю граничного оператора, некоторому гиперболическому оператору D такому, что $\mu(t,0,y,D)=0$ (см. ниже).

В настоящей работе доказывается теорема, показывающая, что упомянутое выше требование выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие Лопатинского. Для некоторых задач такая формулировка условия Лопатинского более естественна. Важным следствием этой теоремы является корректность с потерей гладкости смешанной задачи для строго гиперболического уравнения второго порядка при выполнении условия Лопатинского.

Пусть $A=\sum\limits_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(t,x,y)D^\alpha$ — гиперболический оператор,

$$B=\sum_{|\alpha|\le 1} b_\alpha(t,y)D^\alpha, \text{ где } D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^{\alpha_0}\partial x^{\alpha_1}\partial y_1^{\alpha_2}\dots\partial y_{n-1}^{\alpha_n}}$$

Все коэффициенты предполагаются непрерывными функциями.

Характеристический полином оператора A имеет вид:

$$A_2(t,x,y,\tau,\xi,\eta)=\sum_{i+j+|\eta|\le 2} a_{i,j,\eta}(t,x,y)\tau^i\xi^j\eta^\eta,\quad a_{2,0,0}=1 \tag{1}$$

где τ,ξ,η — дуальные к t,x,y, переменные. Следуя общепринятой терминологии, будем называть оператор гиперболическим, если уравнение

$$A_2(t,x,y,\tau,\xi,\eta)=0 \tag{2}$$

имеет вещественные корни относительно τ при любых $t\in(0,T)$, $x>0$, $y\in R^{n-1}$, $\xi\in R^1$, $\eta\in R^{n-1}$, и строго гиперболическим, если эти корни

различны при $(\xi,\eta)\neq 0$. Будем говорить, что оператор A не характеристический на границе $\Gamma=\{(t,x,y);\ t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1}\}$, если $a_{0,2,0}\neq 0$ на $\bar{\Gamma}$, что же касается нехарактеристичности оператора B, характеристический полином которого имеет вид $\sum\limits_{l+j+|\nu|=1} b_{l,j,\nu}(t,y)\tau^l\xi^j\eta^\nu$, то это означает, что $b_{0,1,0}=1$. В дальнейшем предполагается, что операторы A и B не характеристические на границе.

Рассматривается задача

$$\begin{aligned} &Au=f && \text{при } t\in(0,T),\ x>0,\ y\in R^{n-1}\\ &Bu=g && \text{при } t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1}\\ &u=0,\ u_t=0 && \text{при } t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Из гиперболичности A следует, что уравнение (2) не имеет вещественных корней по ξ при $\tau=\sigma-i\gamma$, $\sigma\in R^1$, $\gamma\in R^1$, $\gamma>0$.

Определим на множестве всех гиперболических операторов второго порядка в области $[0,T]\times R^n_+$ функцию μ следующим образом: $\mu(t,x,y;A)$ есть число корней уравнения (2) относительно ξ в точке (t,x,y) с положительной мнимой частью, при $\tau=\sigma-i\gamma,\gamma>0$. Это определение корректно, так как число корней с положительной мнимой частью не зависит от $\eta,\sigma,\gamma>0$ из-за того, что полином гиперболический.

Нетрудно убедиться, что

$$\mu(t,x,y;A)=\theta(-a_{0,2,0}(t,x,y))+2\theta(a_{0,2,0}(t,x,y))\theta(a_{1,1,0}(t,x,y)). \tag{4}$$

где θ—функция Хевисайда $\theta(t)=\begin{cases}1, & \text{при } t\geqslant 0\\ 0, & \text{при } t<0\end{cases}$

В дальнейшем будем рассматривать только такие операторы A, для которых $\mu(t,0,y;A)\equiv 1$ при $t\in[0,T]$, $y\in R^{n-1}$

Известно, что для корректной постановки смешанной задачи необходимо, чтобы число граничных условий было равно $\mu(t,0,y;A)$. В вопросах корректности смешанных задач для гиперболических уравнений основную роль играет условие Лопатинского. Это условие формулируется следующим образом:

$$B_1(t,0,y,\tau,\xi^+,\eta)\neq 0, \tag{5}$$

где $t\in[0,T]$, $y\in R^{n-1}$, $\tau=\sigma-i\gamma$, $\gamma>0$, ξ^+—корень уравнения (2) с положительной мнимой частью.

Сформулируем две простые леммы.

Лемма 1. *Характеристический полином оператора A можно представить в виде*

$$A_2(t,x,y,\tau,\xi,\eta)=(\tau+\alpha_0\xi+\sum_{l=1}^{n-1}\alpha_l\eta_l)(\tau+\beta_0\xi+\sum_{l=1}^{n-1}\beta_l\eta_l)-\sum_{l,j=1}^{n-1}\gamma_{l,j}\eta_l\eta_j, \tag{6}$$

где

$$\alpha_0=\frac{1}{2}a_{1,1,0}-\sqrt{\frac{1}{4}a_{1,1,0}^2-a_{0,2,0}} \tag{7}$$

$$\beta_0=\frac{1}{2}a_{1,1,0}+\sqrt{\frac{1}{4}a_{1,1,0}^2-a_{0,2,0}},$$

при этом A—строго гиперболический тогда и только тогда, когда $\alpha_0\neq\beta_0$, $\|\gamma_{i,j}\|>0$.

Лемма 2. Если P_1 и P_2 —гиперболические операторы, то

$$\mu(t,x,y;P_1P_2)=\mu(t,x,y;P_1)+\mu(t,x,y;P_2)$$

Эквивалентность трех формулировок условия Лопатинского устанавливает следующая

Теорема. *Пусть A—гиперболический оператор второго порядка, определенный в области $[0,T]\times R^n_+$ и такой, что $\mu(t,0,y;A)=1$; B—оператор первого порядка. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(I) *Условие Лопатинского для задачи $\{A,B\}$*

(II) *Существует гиперболический оператор второго порядка D, заданный в области $[0,T]\times R^{n-1}$ и такой, что на $\bar{\Gamma}$*

а) $A=RB+D$. *R—оператор первого порядка* (8)

б) $\mu(D)=0$.

При этом, оператор D может быть выбран строго гиперболическим, если A—строго гиперболический оператор.

(III) *На $\bar{\Gamma}$ выполняются следующие условия на коэффициенты операторов A и B:*

$$\text{при } n\geqslant 3,\ \frac{1}{2}\ b_{1,0,0}\left(a_{1,1,0}+\sqrt{a_{1,1,0}^2-4a_{0,2,0}}\right)<1 \tag{9}$$

$$\text{при } n=2,\ \frac{1}{2}\ b_{1,0,0}\left(a_{1,1,0}+\sqrt{a_{1,1,0}^2-4a_{0,2,0}}\right)\neq 1$$

$$[\beta_1(1-b_{1,0,0}\alpha_0)-\alpha_1(1-b_{1,0,0}\beta_0)-b_{0,0,1}(\beta_0-\alpha_0)]^2+ \tag{10}$$
$$+4\gamma(1-b_{1,0,0}\beta_0)(1-b_{1,0,0}\alpha_0)>0$$

Доказательство. Покажем, что из условия II следует условие I. Факторизовав характеристические полиномы операторов A и D по ξ, запишем равенство (8) в следующем виде:

$$a_{0,2,0}(\xi-\xi^+)(\xi-\xi^-)=R(\tau,\xi,\eta)B(\tau,\xi,\eta)+d_{0,2,0}(\xi-\zeta_1^-)(\xi-\zeta_2^-)$$

$B(\tau,\xi^+,\eta)\neq 0$ так как из $B(\tau,\xi^+,\eta)=0$ следует $(\xi^+-\zeta_1^-)(\xi^+-\zeta_2^-)=0$, что невозможно, так как ζ_1^-, ζ_2^- —корни с отрицательной мнимой частью. Теперь докажем, что из условия III следует условие II. Рассмотрим случай $n\geqslant 3$.

Воспользовавшись леммой 1 и разложением (8), запишем характеристический полином $D_2(t,y,\tau,\xi,\eta)$ следующим образом:

$$D_2(t,y,\tau,\xi,\eta)=A_2(t,0,y,\tau,\xi,\eta)-R(t,y,\tau,\xi,\eta)\left(b_{1,0,0}\tau+\xi+\sum_{|\nu|=1}b_{0,0,\nu}\eta^\nu\right),$$

где $\alpha_0<0$, $\beta_0>0$. Будем искать оператор R в виде:

$$R=\lambda(t,\ y_1)\,(\tau+\alpha_0\xi+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\eta_i).$$

Наложив на D требования теоремы, получаем систему неравенств для нахождения λ:

$$1-\lambda b_{1,0,0}>0$$

$$\beta_0-\lambda<0$$

Эта система совместна, если $b_{1,0,0}\beta_0<1$. В случае $n=2$ единственное отличие доказательства заключается в том, что R выбирается несколько иначе:

$$R=\lambda_1(t,\ y)\,[\tau+\alpha_0\xi+\alpha_1\eta]+\lambda_2(t,\ y)\,\frac{1-b_{1,0,0}\beta_0}{2}\eta.$$

Осталось доказать, что из условия I следует условие III. Пусть не выполняется условие III. Покажем, что условие Лопатинского нарушается, т. е. существуют $\sigma\in R^1$, $\eta\in R^{n-1}$, $\gamma>0$ такие, что $B_1(t,0,y,\tau,\xi+\eta)=0$. Обозначим $z=B_1(t,0,y,\tau,\xi+\eta)$ и рассмотрим равенство $A_2(t,0,y,\tau,\xi+\eta)=0$

$$A_2(t,0,y,\tau,\xi+\eta)=[\alpha_0 z+(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\tau+\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i]\times$$

$$[\beta_0 z+(1-b_{1,0,0}\beta_0)\tau+\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i]-\sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{i,j}\eta_i\eta_j=0,$$

где $\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\eta_i-\alpha_0\sum_{|\nu|=1}b_{0,0,\nu}\eta^\nu$

$$\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\eta_i-\beta_0\sum_{|\nu|=1}b_{0,0,\nu}\eta^\nu$$

Для доказательства теоремы остается приравнять $z=0$ и показать, что существуют $\eta\in R^{n-1}$, $\tau=\sigma-i\gamma$, $\sigma\in R^1$, $\gamma>0$, для которых выполняется равенство

$$[(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\tau+\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i]\,[(1-b_{1,0,0}\beta_0)\tau+\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i]-\sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{i,j}\eta_i\eta_j=0$$

Разделив в этом равенстве вещественную и мнимую части, получим следующую систему:

$$[(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i]\,[(1-b_{1,0,0}\beta_0)\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i]-$$

$$-\gamma^2(1-b_{1,0,0}\alpha_0)(1-b_{1,0,0}\beta_0)-\sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{i,j}\eta_i\eta_j=0,$$

$$\gamma(1-b_{1,0,0}\beta_0)[(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i]+\gamma(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\times$$

$$\times[(1-b_{1,0,0}\beta_0)\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i]=0.$$

Нетрудно убедиться, что при нарушении условия III, эта система имеет решение, обладающее требуемыми свойствами.

Следствие. *Пусть коэффициенты операторов A и B—достаточно гладкие функции. Оператор A—строго гиперболический, операторы A и B—не характеристические на границе. Тогда, при выполнении условия Лопатинского, существует такое* $\gamma_0>0$, *что при* $\gamma\geqslant\gamma_0$ *для любых* $f\in H^{p,\gamma}((0,T)\times R^n_+)$, $g\in H^{p,\gamma}((0,T)\times R^{n-1})$, *удовлетворяющих определенным условиям согласования, при* $p\geqslant 3$ *существует единственное решение* $u\in H^{p,\gamma}((0,T)\times R^n_+)$ и имеет место *оценка*:

$$\gamma|u|^2_{p,\gamma}\leqslant \mathrm{const}\left(\frac{1}{\gamma}\ |Au|^2_{p,\gamma}+<Bu>^2_{p,\gamma}\right) \tag{11}$$

Относительно обозначений см. например ([6]).

Доказательство. Пусть L—продолжение на $x>0$ оператора B такое, что $A=RL+D$, где D—строго гиперболический оператор и $\mu(t,0,y,D)=0$. Можно показать, что оператор R может быть подобран так, чтобы DA был также строго гиперболический оператор.

$$ALu+[L,A]u=Lf$$

Обозначив $Lu=v$, получаем систему:

$$Av+[L,A]u=Lf$$
$$Du+Rv=f$$

Применим к обеим частям первого уравнения оператор D:

$$DAv-[L,A]Rv+[D,[L,A]]u=(DL-[L,A])f,$$
$$Du+Rv=f. \tag{12}$$

Полученная система является слабо связанной в том смысле, что в главную часть первого уравнения входит только функция v, а в главную часть второго уравнения только функция u. Для этой системы ставится следующая смешанная задача:

$$u=u_t=v=0,\ v_t=l_{1,0,0}(0,x,y)\,f(0,x,y)\ \text{при}\ t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}$$
$$v=g\ \text{при}\ t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1} \tag{13}$$

Из леммы 2 следует $\mu(DA)=\mu(D)+\mu(A)=1$. Воспользовавшись оценкой, полученной в работе ([6]), получаем следующие оценки:

$$\gamma|v|^2_{p,\gamma}\leqslant\mathrm{const}\left(\frac{1}{\gamma}|Au|^2_{p,\gamma}+<v>^2_{p,\gamma}+\frac{1}{\gamma}|u|^2_{p,\gamma}\right)$$
$$\gamma|u|^2_{p,\gamma}\leqslant\mathrm{const}\left(\frac{1}{\gamma}\ A|u|^2_{p,\gamma}+\frac{1}{\gamma}|v|^2_{p,\gamma}\right) \tag{14}$$

Выбрав γ_0 достаточно большим, получим оценку (11). Существование решения может быть получено из системы (12) методом последовательных приближений.

Пример 1. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения с числом пространственных переменных больше двух:

$$u_{tt}-u_{xx}-\sum_{i=1}^{n-1}u_{y_i\,y_i}=f \qquad \text{при}\ \ t\in(0,T),\ x>0,\ y\in R^{n-1}$$

$$u_x+\alpha u_t+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i u_{y_i}=g \quad \text{при} \quad t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1}$$
$$u=0,\ u_t=0 \quad \text{при} \quad t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1} \tag{15}$$

Тогда из теоремы и следствия следует, что для задачи (15) имеет место корректность с потерей гладкости при $\alpha<1$. Это условие совпадает с условиями, полученными в работах ([3,4]).

Пример 2. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения с двумя пространственными переменными:

$$\begin{aligned} &u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=f && \text{при} \quad t\in(0,T),\ x>0,\ y\in R^1\\ &u_x+\alpha u_t+\beta u_y=g && \text{при} \quad t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^1\\ &u=0,\ u_t=0 && \text{при} \quad t=0,\ x>0,\ y\in R^1 \end{aligned} \tag{16}$$

Условие корректности с потерей гладкости, полученное для этой задачи, несколько отличается от предыдущего и выглядит следующим образом:

$$\alpha\neq 1,\quad \alpha<\sqrt{1+\beta^2}.$$

Это условие также совпадает с условием, полученным в работе ([4]).

Пример 3. Пусть A—строго гиперболический оператор второго порядка, не характеристический на границе, и $\mu(t,0,y;A)=1$ при $t\in(0,T)$, $y\in R^{n-1}$. Рассмотрим смешанную задачу:

$$\begin{aligned} &Au=f && \text{при} \quad t\in(0,T),\ x>0,\ y\in R^{n-1}\\ &u_x+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i u_{y_i}=g && \text{при} \quad t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1}\\ &u=0,\ u_t=0 && \text{при} \quad t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1} \end{aligned}$$

Такая задача корректно поставлена, так как условие (111) для нее всегда выполняется.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար Լոպատինսկու պայմանի համարժեք ձևակերպումների մասին

Հոդվածում դիտարկվում է խառը խնդիրը երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար։ Ինչպես հայտնի է, այդպիսի խնդիրը կոռեկտ է, եթե բավարարում է Լոպատինսկու պայմանին։ Սակայն թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար խառը խնդրի կոռեկտությունը հարմար է ապացուցել մի ուրիշ պայմանի դեպքում ([5])։ Այդ պայմանը կայանում է նրանում, որ օպերատորի համար տեղի է ունենում որոշակի վերլուծություն։ Որոշ բընդիրների դեպքում այս պայմանը ավելի բնական է։

Հոդվածում ապացուցվում է, որ այդ երկու պայմանները իրար համարժեք են։ Որպես կարևոր հետևանք, Լոպատինսկու պայմանի դեպքում ապացուցվում է երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար խառը խնդրի կոռեկտությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Ykawa*, Osaka J. Math., 12,69-111 (1975). [2] *Ж. Шазарен*, "Математика" Сб. пер. ин. статей, 18, №2, 79-109 (1974). [3] *M. Tsuji*, Proc. Jap. Acad., 50, № 2, 138-142 (1974). [4] *С. К. Годунов, В. М. Гордиенко*, Труды семинара С. Л. Соболева, Дифференциальные уравнения с частными производными, № 2, 5-31, Новосибирск (1977). [5] *Р. Айрапетян*. ДАН Арм. ССР, т. 65, № 1 (1977). [6] *Р. Сакамото*, "Математика, Сб. пер. ин. статей, 16, № 1, 62-80 (1972).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

А. А. Аракелян

Минимальные двусторонние идеалы в частичной полугруппе гомоморфизмов релятивов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 14/VI 1978)

Пусть A множество элементов произвольной природы. Через 2^A обозначим множество всех подмножеств множества A, (B, ρ), где $B \in 2^A$ $\rho \subset B \times B$ релятив ([1]). Положим $A = \{(B, \rho) | B \in 2^A$, ρ—нерефлексивное бинарное отношение$\}$, $\Psi(A)$ равным множеству всех гомоморфизмов между релятивами из A. Через $\circ$ обозначим операцию суперпозиции в $\Psi(A)$. Тогда очевидно, что $\Psi(A)$ будет частичной полугруппой относительно суперпозиции.

Определение 1. Подмножество $V_\rho \subset B$ называется решением релятива (B, ρ), если

(а) $(a, b) \overline{\in} \rho$ для любых $a, b \in V_\rho$,

(б) для любого $b \overline{\in} V_\rho$ существует такой $a \in V_\rho$, что $(a, b) \in \rho$.

Положим $\Psi'(B)$ равным такому множеству гомоморфизмов из $\Psi(A)$, которые удовлетворяют следующему условию: если φ гомоморфизм между (B, ρ) и (B, σ), то (а) для любого $b \in V_\sigma$ существует такой $a \in V_\rho$, что $(a, b) \in \varphi$, (б) $V_\sigma \supset \varphi(V_\rho)$.

Из определения $\Psi'(B)$ следует, что $\Psi'(B)$ частичная полугруппа относительно операции суперпозиции. Через $K(\Psi'(B))$ обозначим множество гомоморфизмов, удовлетворяющих следующему условию: если ψ гомоморфизм из (B, ρ) в (B, σ), то $\psi = V_\rho \times V_\sigma \cup (B - V_\rho)(B - V_\sigma)$, где V_ρ, V_σ соответственно решения (B, ρ), (C, σ). Очевидно, что $K(\Psi'(B)) \subset \Psi'(B)$. Нетрудно доказать, что $K(\Psi'(B))$ двусторонний идеал $\Psi'(B)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *$K(\Psi'(B))$—минимальный двусторонний ненулевой идеал частичной полугруппы $\Psi'(B)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in K(\Psi'(B))$—гомоморфизм из (B, ρ) в (B, σ) и $\Phi \subset \Psi'(B)$ некоторый двусторонний идеал $\Psi'(B)$, отличный от $K(\Psi'(B))$. Тогда гомоморфизм $\varphi = \varphi_6 \circ \varphi_3 \circ \varphi_1 \circ \varphi_0 \circ \varphi_2 \circ \varphi_4 \circ \varphi_5$, где $\varphi_i \in \Psi'(B)$ гомоморфизмы соответственно из (B, γ) в (B, σ), из (B, δ) в (B, λ), из (B, μ) в (B, γ), из (B, λ) в (B, τ), из (B, ν) в (B, μ), из (B, ρ) в (B, ν), из (B, τ) в (B, σ) будет принадлежать Φ. Отсюда $\Phi \supset K(\Psi'(B))$. Теорема доказана.

Определение 2. Пара (B, ρ) называется топологическим релятивом ([2]), если она наделена структурой релятива и топологией, удовлетворяющей аксиоме: для любой пары $(x, y) \in \rho$ существуют такие окрестности U_x и V_y точек x и y, соответственно, что $U_x \times V_y \subset \rho$.

Пусть A_1—метрическое пространство с метрикой θ, через $(2^{A_1})_m$, согласно ([3]) обозначим множество всех замкнутых ограниченных подмножеств A_1. Тогда

$$\Theta(B, C) = \max \{ \sup_{x \in B} \theta(x, C), \sup_{y \in C} \theta(B, y) \}, \tag{1}$$

где $B, C \in (2^{A_1})_m$ будет метрикой в $(2^{A_1})_m$.

Пусть далее (B, ρ), где $B \in (2^{A_1})_m$ топологический релятив. Релятив $(B, \bar{\rho})$, где $\bar{\rho}$—замыкание ρ будем называть замыканием релятива (B, ρ). Если положить $\theta^1((x, y), (x', y')) = \max\{\theta(x, x'), \theta(y, y')\}$, то θ^1 будет метрикой в $A \times A$.

Если пространство A_1 компактное в смысле метрики θ, то согласно ([4]) пространство $(2^{A_1})_m$ так же компактное в смысле метрики Θ. Положим

$\boldsymbol{A}_1 = \{(B, \rho) | B \in (2^{A_1})_m, \rho$—нерефлексивное бинарное отношение$\}$

Если положить

$$\Theta^1((B, \bar{\rho}), (C, \bar{\sigma})) = \max \{\Theta(B, C), \Theta(\bar{\rho}, \bar{\sigma})\}, \tag{2}$$

то получим метрику в $\boldsymbol{A}_1$.

Отсюда и из ([4]) следует, что $\boldsymbol{A}_1$ компактное в смысле метрики Θ^1

Маурером ([5]) рассматривается сходимость последовательности релятивов, определенная следующим образом: последовательность релятивов $\{(A, \rho_n)\}_{n=1,2\ldots}$ сходится к релятиву (A, ρ), если для любого $a \in A$ существует такое $N(a)$, что $\rho_n(a) = \rho(a)$ для любого $n > N(a)$. Можно показать, что из сходимости в смысле метрики Θ^1 не следует сходимость в смысле Маурера.

Определение 3. Отображение φ топологического релятива (B, ρ) в топологический релятив (C, σ) называется гомоморфным, если $\sigma \supset \varphi \square \varphi(\rho)$ и φ непрерывное отображение.

Лемма 1. Если (B, ρ) топологический релятив, то $\rho(A')$ открыто для любого $A' \subset A$.

Через $\Psi(\boldsymbol{A}_1)$ обозначим множество всех гомоморфизмов между релятивами $\boldsymbol{A}_1$.

Определение 4. Подмножество $\Psi' \subset \Psi(\boldsymbol{A}_1)$ назовем равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$ что $\theta(a', a'') < \delta(\varepsilon)$ влечет $\theta(\psi(a'), \psi(a'')) < \varepsilon$ для любого $\psi \in \Psi'$.

Если для $\psi_1, \psi_2 \in \Psi(\boldsymbol{A}_1)$ положить

$$\theta^2(\psi_1, \psi_2) = \sup_{a \in A_1} \theta(\psi_1(a), \psi_2(a)), \tag{3}$$

то согласно ([3]) θ^2 будет метрикой в $\Psi(\boldsymbol{A}_1)$.

Если положить

$$\Theta^2(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2) = \sup_{a \in A_1} \Theta(\bar{\rho}_1(a), \bar{\rho}_2(a)),$$

то согласно ([6]) Θ^2 будет метрикой в $A' = \{\bar{\rho} / \bar{\rho} \subset A_1 \times A_1\}$.

Определение 5. Будем говорить, что последовательность гомоморфизмов $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \Psi(A_1)$, удовлетворяющая следующим условиям;

(а) ψ_n гомоморфизм из $(B_n, \bar{\rho}_n)$ в $(C_n, \bar{\sigma}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$,

(б) существуют такие $(B, \bar{\rho})$, $(C, \bar{\sigma})$, что $\{(B_n, \bar{\rho}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ $\{(C_n, \bar{\sigma}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ сходятся соответственно к $(B, \bar{\rho})$ и $(C, \bar{\sigma})$ в смысле метрики θ^2 слабо сходится к отображению ψ, если $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ сходится к ψ в смысле метрики θ^2.

Теорема 2. *Если отображение ψ является пределом слабо сходящейся последовательности гомоморфизмов $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \Psi(A_1)$, $\Psi(A_1)$ равностепенно непрерывно, то $\psi \in \Psi(A_1)$.*

Определение 6. Будем говорить, что последовательность гомоморфизмов $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \Psi(A_1)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(а) ψ_n гомоморфизм из $(B_n, \bar{\rho}_n)$ в $(C_n, \bar{\sigma}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$

(б) существуют такие $(B, \bar{\rho})$, $(C, \bar{\sigma})$, что $\{(B_n, \bar{\rho}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$, $\{(C_n, \bar{\sigma}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ сходятся соответственно к $(B, \bar{\rho})$, $(C, \bar{\sigma})$ в смысле метрики Θ^1 сходится равномерно к отображению ψ, если $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ сходится к ψ в смысле метрики Θ.

Теорема 3. *Если отображение ψ является пределом равномерно сходящейся последовательности гомоморфизмов $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \Psi(A_1)$, $\Psi(A_1)$ равностепенно непрерывно, то $\psi \in \Psi(A_1)$.*

Теорема 4. *Если пространство A_1 компактное, $\Psi(A_1)$ равностепенно непрерывное, то оно компактное в смысле слабой сходимости (равномерной сходимости).*

Теорема 5. *Если пространство A_1 компактное, то любая равностепенно непрерывная подполугруппа $\Psi' \subset \Psi(A_1)$ с топологией, определенной согласно слабой сходимости (равномерной сходимости) имеет минимальный двусторонний идеал.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 3 (теоремы 4) и теоремы Нумакуры ([7]).

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների մասնակի կիսախմբի մինիմալ երկկողմանի իդեալ

Աշխատանքը նվիրված է ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների մասնակի կիսախմբերի հետազոտմանը։ Բազմարժեք հոմոմորֆիզմների մի դասի համար կառուցվում է մինիմալ երկկողմանի իդեալ։

Այնուհետև սահմանվում է տոպոլոգիական ռելյատիվի գաղափարը և մետրիկան ռելյատիվների միջև։ Ապացուցվում է ռելյատիվների տարածության կոմպակտությունը։

Դիտարկվում է ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների հաջորդականության հավասարաչափ և թույլ զուգամետությունը և ապացուցվում է հոմոմորֆիզմների տարածության փակ լինելը՝ ըստ այդ զուգամետությունների։

Ապացուցվում է նաև, որ տոպոլոգիական ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների տարածությունը ունի մինիմալ երկկողմանի իդեալ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Вагнер*, Теория отношений и алгебра частичных отображений сб. «Теория полугрупп и ее приложения», изд. Саратовского ун-та, вып. 1, 3—179, (1965). [2] *Х. Никайдо*, Выпуклые структуры и математическая экономика, М., 1972. [3] *К. Куратовский*, «Топология», т. 1, М., 1966. [4] *К. Куратовский*, «Топология», т. 2, М., 1969. [5] *I. Maurer* Gy, Purdea, Despre o topologie in multimea relatiilor binare, studia Univ. Babes-Bolyai, Ser. math.—phis. 1964, 9 № 1, 21—24, 9 (1964) [6] *Хаусдорф*. Теория множеств, М.—Л., 1934. [7] Numakura, On bicompact semigroups. Math., Journ. of Okayama Univ., 1, 99—108, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 539.3

МЕХАНИКА

А. Г. Галоян

О поперечных колебаниях пластинок, изготовленных из разномодульного материала

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 6/II 1978)

Исходя из уравнения цилиндрического изгиба пластинок, изготовленных из разномодульного материала, после необходимых упрощений, получено уравнение поперечных колебаний. Решены конкретные примеры с различными краевыми условиями. Определены частоты свободных колебаний, с доведением их до числовых результатов. Показано, что частоты свободных колебаний зависят от степени разномодульности материала и эта зависимость, в основном, выражается жесткостью пластинки.

В работе ([1]), посвященной цилиндрическому изгибу пластинок, изготовленных из разномодульного материала, выявлено, что нахождение прогибов в конечном счете сводится к решению уравнений

$$D\frac{d^2w}{dx^2}=-M\pm\eta^2\frac{|Q|h}{4}(1-2\nu^+\nu^-)-\frac{3qD}{20G_0h}[8-\eta^2(1-2\nu^+\nu^-)] \qquad (1)$$

с соответствующим знаком перед вторым членом правой части, зависящим от знака произведения изгибающего момента и перерезывающей силы ($M\cdot Q$).
Здесь

$$D=\frac{h^3}{3}[\sqrt{a_{22}(1-\nu_-^2)}+\sqrt{a_{11}(1-\nu_+^2)}]^{-2},$$

$$\eta=\frac{\sqrt{a_{22}(1-\nu_-^2)}-\sqrt{a_{11}(1-\nu_+^2)}}{\sqrt{a_{22}(1-\nu_-^2)}+\sqrt{a_{11}(1-\nu_+^2)}}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{G_0}=a_{11}+a_{22}-2a_{12},\quad a_{11}=\frac{1}{E^+},\quad a_{22}=\frac{1}{E^-},\quad a_{12}=-\frac{\nu^+}{E^+}=-\frac{\nu^-}{E^-}.$$

Решение ряда конкретных примеров по изгибу показывает, что второй член правой части уравнения (1) дает незначительную поправку (порядка одного процента) на величину максимального прогиба.

Учитывая также, что именно этот член существенно осложняет ход решения конкретных примеров им будем пренебрегать.

Исходя из сказанного выше, уравнение (1) заменим следующим

$$D\frac{d^2w}{dx^2} = -M - \frac{3qD}{20G_0h}\left[8-\eta^2(1-2\nu^+\nu^-)\right], \tag{3}$$

которое дает возможность перейти к вопросу о поперечных колебаниях пластинок, изготовленных из разномодульного материала. Следует отметить, что здесь пока нет возможности ставить вопрос о поперечных колебаниях в общей постановке, так как даже уравнения поперечного изгиба пластинок в общей постановке не имеется. Поэтому здесь вопрос ставится в том смысле, что при колебаниях сохраняется цилиндрическая форма изгиба пластинки.

Для получения уравнения колебаний пластинки с использованием упрощенного уравнения изгиба (3), поступим аналогично работе ([2]). А именно, продифференцируем обе части уравнения (3) по x и пользуясь известными связями между силовыми факторами

$$\frac{dM}{dx} = Q, \qquad \frac{dQ}{dx} = -q \tag{4}$$

представим его в виде

$$D\frac{d^4w}{dx^4} = q - \frac{3D}{20G_0h}\left[8-\eta^2(1-2\nu^+\nu^-)\right]\frac{d^2q}{dx^2}. \tag{5}$$

Далее в уравнении (5) заменив q нормальной составляющей сил инерции, приходящейся на единицу площади пластинки

$$q = -\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{6}$$

при пренебрежении влиянием тангенциальных составляющих сил инерции, и учитывая, что $w = w(x, t)$, получим уравнение свободных колебаний ненагруженной пластинки

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{3\rho D}{20G_0}\left[8-\eta^2(1-2\nu^+\nu^-)\right]\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2}, \tag{7}$$

где ρ — плотность материала пластинки.

В уравнении (7) принимая

$$w(x, t) = W(x)\cos\omega t \tag{8}$$

относительно $W(x)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$W^{IV} + \frac{k_0h}{D}\omega^2 W^{II} - \frac{\rho h}{D}\omega^2 W = 0, \tag{9}$$

где

$$k_0 = \frac{3\rho D}{20 G_0 h}\left[8 - \eta^2(1 - \nu^+\nu^-)\right]. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид:

$$W(x) = C_1 \operatorname{ch}\alpha_0 x + C_2 \operatorname{sh}\alpha_0 x + C_3 \cos\beta_0 x + C_4 \sin\beta_0 x, \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{matrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{matrix}\right\} = \left[\sqrt{\left(\frac{k_0 h}{2D}\omega^2\right)^2 + \frac{\rho h}{D}\omega^2} \mp \frac{k_0 h}{2D}\omega^2\right]^{1/2}, \tag{12}$$

а C_i — постоянные интегрирования.

При решении конкретных примеров необходимо иметь также выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы, которые в принятых обозначениях имеют вид:

$$M = -D\left(W'' + \frac{k_0 h}{D}\omega^2 W\right)\cos\omega t, \tag{13}$$

$$Q = -D\left(W''' + \frac{k_0 h}{D}\omega^2 W'\right)\cos\omega t.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

а) Для бесконечной полосы шириной l, шарнирно опертой по длинным сторонам, граничные условия будут

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = l \quad W = 0,\ M = 0 \tag{14}$$

Удовлетворяя граничным условиям (14), относительно C_i получим систему однородных уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, получим

$$\sin\beta = 0, \quad \beta = \pi n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

Откуда, с учетом (12) для собственных частот свободных колебаний рассматриваемой пластинки, колеблющейся с сохранением цилиндрической формы изгиба, получим

$$\omega_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\left[\frac{\rho h}{D}(1 + k\pi^2 n^2)\right]^{-1/2}. \tag{16}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\alpha = \alpha_0 l, \quad \beta = \beta_0 l, \quad k = \frac{k_0}{\rho l^2} = \frac{3D}{20 G_0 h l^2}\left[8 - \eta^2(1 - 2\nu^+\nu^-)\right]. \tag{17}$$

б) В случае бесконечной полосы, с одной защемленной, а другой — свободной сторонами, имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}&\text{при } x = 0 \quad M = 0, \quad Q = 0\\ &\text{при } x = l \quad W = 0, \quad W' = 0\end{aligned} \tag{18}$$

После удовлетворения граничным условиям (18) и приравнивания нулю определителя получаемой системы однородных уравнений, приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$2\operatorname{ch}\alpha\cos\beta+\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)\operatorname{sh}\alpha\sin\beta+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}=0. \tag{19}$$

Следует отметить, что между α и β существуют следующие, вытекающие из (12), зависимости:

$$\alpha^2\beta^2=\frac{\rho h l^4}{D}\omega^2, \qquad \alpha=\frac{\beta}{\sqrt{1+k\beta^2}}. \tag{20}$$

Частоты собственных колебаний определяются через корни уравнения (19) следующим образом:

$$\omega_n=\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\,\frac{\beta_n^2}{\sqrt{1+k\beta_n^2}}, \tag{21}$$

где β_n—n-ый корень уравнения (19).

в) В случае бесконечной полосы, с одной защемленной, а другой—шарнирно опертой сторонами, имеем следующие граничные условия:

$$\text{при}\quad x=0,\quad W=0,\quad W'=0 \tag{22}$$
$$\text{при}\quad x=l,\quad W=0,\quad M=0$$

Здесь определение частот собственных колебаний сводится к нахождению корней следующего трансцендентного уравнения

$$\alpha\operatorname{tg}\beta-\beta\operatorname{th}\alpha=0, \tag{23}$$

В этом случае частоты собственных колебаний определяются по формуле (21), где под β_n понимается n-ый корень уравнения (23).

г) Имеем бесконечную полосу с двумя защемленными сторонами в предположении, что одно из них свободно может перемещаться по направлению x, исключая возможность появления продольной силы в этом направлении.

В этом случае граничные условия будут:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=l \quad W=0,\ W'=0, \tag{24}$$

а соответствующее трансцендентное уравнение получается в виде

$$2\operatorname{ch}\alpha\cos\beta+\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)\operatorname{sh}\alpha\sin\beta-2=0. \tag{25}$$

Здесь также частоты собственных колебаний определяются по формуле (21), где β_n—n-ый корень уравнения (25).

В последних трех примерах корни уравнений (19), (23), и (25) зависят от параметра k (17), характеризующего влияние поперечных сдвигов. Этот параметр кроме отношения h^2/l^2 зависит также и от степени разномодульности (отношения E^+/E^-) материала. Однако за-

висимость от последнего, как и в случае балки [2], весьма слабая, так как при изменении отношения E^+/E^- в достаточно большом интервале $(1 \div 10)$ параметр k изменяется в пределах $(0{,}24 \div 0{,}26)\ h^2/l^2$. Поэтому, если дальнейшее вычисление произвести при $h/l=1/5$, то можно принимать $k=0{,}01$.

В таблице приведены значения первых пяти корней уравнений (19), (23) и (25), а также соответствующие им величины

$$\omega_n^0 = l^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\ \omega_n;$$

	б		в		г	
n	β_n	ω_n^0	β_n	ω_n^0	β_n	ω_n^0
1	1,8958	3,5313	3,9628	14,5993	4,8430	21,1090
2	4,7883	20,6796	7,1716	41,7948	8,1000	50,9832
3	8,1080	51,0638	10,3892	74,8518	11,4015	85,7164
4	11,3990	85,6897	13,6024	109,5949	14,6821	121,3479
5	14,6833	121,3615	16,8061	114,4271	17,9735	158,0929

Из приведенного выше нетрудно заметить, что степень разномодульности весьма мало влияет на величину корней рассмотренных трансцендентных уравнений. Однако частоты собственных колебаний безусловно зависят от степени разномодульности материала и эта зависимость характеризуется величиной жесткости D.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Հ. ԳԱԼՈՅԱՆ

Տարամոդուլ նյութից պատրաստված սալերի ընդլայնական տատանումների մասին

Ելնելով տարամոդուլ նյութից պատրաստված սալերի գլանային ծռման հավասարումներից և որոշ պարզեցումներ հաշվի առնելուց հետո, ստացված է չբեռնավորված սալի ազատ տատանումները բնութագրող հավասարումը։ Դիտարկված են տարբեր եզրային պայմանների դեպքեր, բերված են սեփական տատանումների հաճախականության համապատասխան արտահայտությունները, որոնք արտահայտվում են համապատասխան տրանսցենդենտ հավասարման արմատների միջոցով։ Ցույց է տրված, որ նյութի տարամոդուլության ազդեցությունը սեփական տատանումների հաճախականության վրա հիմնականում բնորոշվում է սալի կոշտությունը բնութագրող արտահայտության միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Галоян*, Ученые записки ЕГУ, 3 (1977). [2] *А. Г. Галоян, А. А. Хачатрян*, ДАН Арм. ССР, т. LXIII, № 3, (1978).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. А. Ешибарян

О плоской контактной задаче нелинейной установившейся ползучести с учетом сил сцепления

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 4/III 1978)

В работе ([1]) впервые поставлена и исследована плоская контактная задача нелинейной неустановившейся теории ползучести без учета сил трения и сцепления. При этом в качестве основного физического закона принималась предложенная в ([2]) степенная зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций, обобщенная по теории ползучести для наследственно стареющих тел ([3]). В этой же работе ([1]) сформулирован обобщенный принцип суперпозиции для перемещений, позволяющий решение исходной контактной задачи свести к последовательному решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с симметричным степенным ядром и интегрального уравнения Вольтерра. В работе ([4]) рассмотрена плоская контактная задача нелинейной установившейся теории ползучести с учетом сил трения. Укажем также на работу ([5]), где дано решение контактной задачи о вдавливании клиновидного штампа в нелинейно-деформируемую по степенному закону полуплоскость.

Отметим, что достаточно полная библиография основных работ и результатов по контактным задачам теории ползучести содержится в ([6]).

В настоящей статье обсуждается плоская контактная задача нелинейной теории установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и скоростями деформаций. В рамках предложенной здесь модели, эта контактная задача описывается интегральным уравнением Фредгольма первого рода с эрмитовым положительно определенным ядром. Указанная модель основывается на обобщенном принципе суперпозиции перемещений, который проводится как для вертикальных, так и для горизонтальных перемещений граничных точек. При этом, ввиду знакопеременности некоторых компонент перемещений, этот принцип проводится для их абсолютных величин. Но в конечном итоге это свойство истинных перемещений отражается в выражениях соответствующих компонент обобщенных перемещений.

Замкнутое решение основного интегрального уравнения построено

тремя аналитическими методами—М. Г. Крейна ([7]), ортогональных многочленов ([8]) и Копсона ([8]).

В частных случаях получается известное решение М. Садовского ([9]), а также Н. Х. Арутюняна и М. М. Манукяна ([4]).

Предварительно несколько подробно излагается решение задачи о равновесии полуплоскости под действием только горизонтальной сосредоточенной силы, приложенной на ее границе.

1. Пусть имеется полуплоскость, для материала которой между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций существует степенная зависимость вида:

$$\sigma_i = K_0 \varepsilon_i^{\mu} \left(0 < \mu < 1\right), \left(K_0 = \frac{1}{A^{\mu}}, \ \mu = \frac{1}{m} \right), \tag{1.1}$$

где K_0—определенная физическая константа, μ— показатель ползучести, а σ_i и ε_i— интенсивности напряжений и скоростей деформаций, выражающиеся соответственно формулами:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + 6\tau_{r\theta}}, \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\theta)^2 + 6\gamma_{r\theta}}, \tag{1.3}$$

Пусть, далее, на границе полуплоскости действует горизонтальная сосредоточенная сила Q. Требуется определить компоненты смещений, исчезающие на бесконечности. Поместим начало цилиндрической системы координат r, θ, z в точке приложения сосредоточенной силы Q к полуплоскости и направим оси r, θ, z как показано на рис. 1.

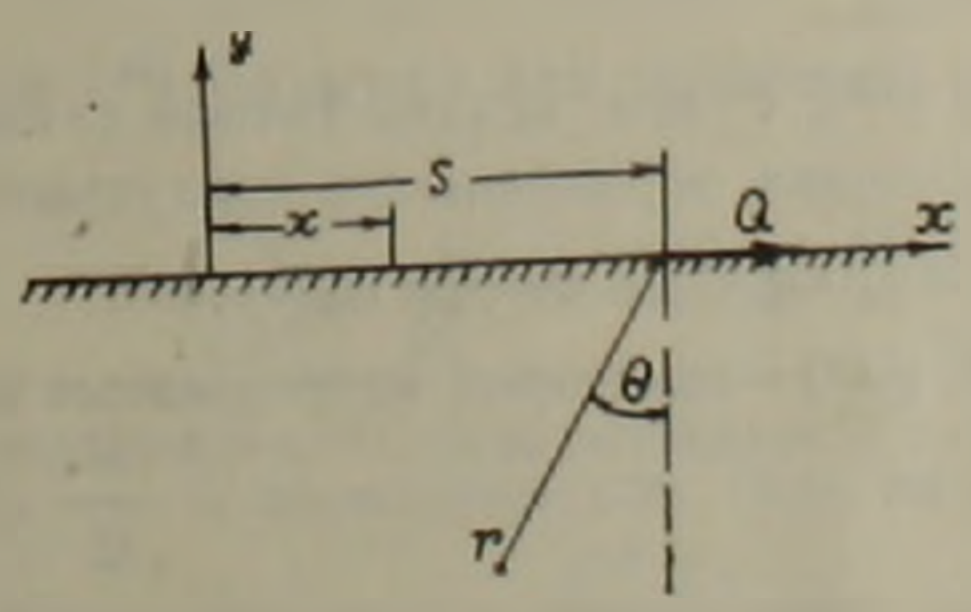


Рис. 1

Согласно нелинейной теории установившейся ползучести, в случае плоской деформации имеем ([4]):

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_r - \sigma\right), \ \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_\theta - \sigma\right), \ \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{r\theta}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) \tag{1.4}$$

Эти уравнения выведены в предположении несжимаемости материала

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta=0. \tag{1.5}$$

Уравнения равновесия будут:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_r\right)+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}-\sigma_\theta=0,\ \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+r\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+2\tau_{r\theta}=0 \tag{1.6}$$

Зависимости между компонентами скорости деформаций и компонентами вектора скорости смещений следующие:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r},\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\ 2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{1.7}$$

Дифференциальное уравнение неразрывности деформаций имеет вид:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta^2}+r^2\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial r^2}+2r\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r}-z\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r}-2r\frac{\partial^2\gamma_{r\theta}}{\partial r\partial\theta}-2\frac{\partial\gamma_{r\theta}}{\partial\theta}=0. \tag{1.8}$$

Граничными условиями задачи будут

$$\sigma_\theta=0,\tau_{r\theta}=Q\delta(r)\ \text{при}\ \theta=\pm\frac{\pi}{2}\left(0<r<\infty\right), \tag{1.9}$$

где $\delta(r)$—дельта—функция Дирака. При этом заметим, что из условия равновесия любого элемента в виде полукруга с центром в начале координат, высеченного из полуплоскости, вытекает соотношение

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\sigma_r\sin\theta d\theta=Q. \tag{1.10}$$

Следуя работам ([1,4]), будем искать точное решение в перемещениях методом разделения переменных в следующей форме.

$$u=f_1(r)\chi_1(\theta),\quad v=f_2(r)\chi_2(\theta), \tag{1.11}$$

здесь $f_1(r)$, $f_2(r)$, $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(\theta)$—некоторые непрерывные функции, подлежащие определению во всей полуплоскости $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $r>0$. С учетом предыдущих соотношений и того, что $\tau_{r\theta}=0$ во всей полуплоскости и введя следующие обозначения

$$cf_1(r)=F(r),\quad \chi_2(\theta)=\chi(\theta) \tag{1.12}$$

получим дифференциальные уравнения для определения функций $F(r)$ и $\chi(\theta)$: $r^2F''(r)+rF'(r)-(1-\lambda^2)F(r)=0,\quad \chi''(\theta)+\lambda^2\chi(\theta)=0.$ (1.13)

Принимая во внимание, что при $r\to\infty$ перемещения должны исчезать, получим

$$u=i(D_4\cos\lambda\theta-D_3\sin\lambda\theta)r^{-\sqrt{1-\lambda^2}}$$

$$v=\left(\sqrt{1-\lambda^2}-1\right)\left(D_4\sin\lambda\theta+D_3\cos\lambda\theta\right)r^{-\sqrt{1-\lambda^2}} \tag{1.14}$$

Далее заметим, что из нечетности σ_r следует:

$$\sigma_r=0 \text{ при } \theta=0 \tag{1.15}$$

Удовлетворяя граничным условиям, закону ползучести, уравнениям равновесия и пользуясь соотношениями (1.10), (1.14), (1.15), получим:

$$\sqrt{1-\lambda^2}=\frac{1}{\mu}-1,\ \sigma_3=0,\ D_4=0,\ D_3=\frac{Q^m}{K_0^m\lambda(m-1)I^m(\mu)}.$$

где

$$I(\mu)=4\int_0^{\pi/2}(\sin\lambda\theta)^\mu\sin\theta d\theta, \tag{1.16}$$

В конечном итоге перемещения граничных точек полуплоскости будут даваться формулами:

$$[u]_{\theta=-\pi/2}=-[u]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{Q^m\sin\frac{\lambda\pi}{2}}{K_0^m(m-1)I^m(\mu)}r^{1-m},$$

$$[v]_{\theta=-\pi/2}=[v]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{(m-2)Q^m\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{K_0^m(m-1)I^m(\mu)}r^{1-m} \tag{1.17}$$

В частном случае $K_0=\frac{2}{3}E$ и $\lambda^2=\mu=1$ получаются известные из теории упругости ([10]) формулы для компонент напряжений и перемещений:

$$u=\frac{3}{2\pi E}\ln\frac{1}{|r|},\ v=0,\ \sigma_r=\frac{2Q\sin\theta}{\pi r}.$$

В случае вертикальной сосредоточенной силы ([1])

$$[u]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=[u]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}=\frac{P^m\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}r^{1-m},$$

$$[v]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}=-[v]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{(2-m)P^m\sin\frac{\lambda\pi}{2}}{K_0^m(m-1)\lambda J^m(\mu)}r^{1-m}, \tag{1.18}$$

где

$$J(\mu)=4\int_0^{\pi/2}(\cos\lambda\theta)^\mu\cos\theta d\theta. \tag{1.19}$$

2. Пусть штамп, основание которого описывается функцией $y=f(x)$, под действием вертикальной силы P, приложенной в центре штампа, вдавливается в деформируемую по закону (1.1) полуплоскость. Предполагается, что штамп сцеплен с основанием. Требуется определить законы распределения нормальных $p(x)$ и тангенциальных $q(x)$ контактных напряжений. Участок контакта берется в виде отрезка $[-a,a]$. В указанной постановке рассматриваемая задача формулируется в виде граничных условий для полуплоскости

$$v=\delta-f(x),\ u=0 \quad \text{при } |x|<a,$$
$$\sigma_y=\tau_{xy}=0 \quad \text{при } |x|>a, \tag{2.1}$$

где δ — мера погружения штампа в основание.

Используя обобщенный принцип суперпозиции перемещений, решение задачи сводится к решению следующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода с эрмитовым ядром:

$$\int_{-a}^{a} \frac{1-i\nu\,\mathrm{sgn}(x-s)}{|x-s|^h}\,\chi(s)\mathrm{d}s=F(x),\quad |\nu|<\mathrm{tg}\,\frac{\pi h}{2},$$

где

$$0<h<1,\chi(s)=p(s)-i\,\frac{J(\mu)}{I(\mu)}\,q(s),\ 1-\mu=h,\ \nu=\left(\mathrm{ctg}\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{1-h} \tag{2.2}$$

Решение интегрального уравнения (2.2) должно удовлетворять соотношению

$$\int_{-a}^{a} p(s)\mathrm{d}s=P,$$

которое вытекает из условия равновесия штампа.

3. Решение этого уравнения построим методом М. Г. Крейна. По этому методу единственное решение уравнения при непрерывной правой части $F(x)$ имеет вид:

$$\chi(x)=\left[\frac{1}{M'(u)}\frac{d}{\mathrm{d}u}\int_{-a}^{u} g^*(s,u)F(s)\mathrm{d}s\right]_{u=a} g(x,a)-$$
$$-\int_{x}^{a} g(x,u)\frac{d}{\mathrm{d}u}\left[\frac{1}{M'(u)}\frac{d}{\mathrm{d}u}\int_{-a}^{u} g^*(s,u)F(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}u \tag{3.1}$$

где $g(x,u)$ и $g^*(x,u)$ решения уравнений

$$\int_{-a}^{u} K(x,s)g(s,u)\mathrm{d}s=1 \tag{3.2}$$

$$\int_{-a}^{u} K(s,x)g^*(s,u)\mathrm{d}s=1, \tag{3.3}$$

$$M(u)=\int_{-a}^{u} g(s,u)\mathrm{d}s. \tag{3.4}$$

Решения этих уравнений согласно ([11]) имеют вид:

$$g(x,u)=\frac{c_\nu}{\pi}\,(u-x)^{\alpha+i\beta}\,(a+x)^{\alpha-i\beta},$$

$$g^*(x,u)=\frac{c_\nu}{\pi}\,(u-x)^{\alpha-i\beta}\,(a+x)^{\alpha+i\beta}, \tag{3.5}$$

где

$$c_\nu=\frac{\sin\pi h}{2\sqrt{\sin^2\frac{\lambda\pi}{2}-\nu^2\cos^2\frac{\lambda\pi}{2}}},\quad \alpha+i\beta=-\frac{1}{\pi}\arcsin\left|(1+i\nu)c_\nu\right|.$$

Решение уравнения (2.2) можно построить также методом аппарата ортогональных многочленов Якоби. Согласно ([5]), решение (2.2) получим в виде:

$$\varphi(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\sin\pi h\,n!}{B\pi(1-i\nu)(h)_n}\cdot\frac{P_n^{\alpha-1,h-\alpha}(1-2\xi)}{\xi^{1-\alpha}(1-\xi)^{\alpha-h}}, \tag{3.6}$$

где

$$B=\sqrt{1-2\cos\pi h\,b_*+b_*^2}\qquad b_*=(1+i\nu)(1-i\nu)^{-1},$$

$$\alpha=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\sin\pi h}{B}.$$

При этом выбирается та однозначная ветвь арксинуса, для которой $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$.

Дадим, наконец, решение уравнения (2.2) методом Копсона, состоящим в сведении исходного уравнения Фредгольма к двум повторным интегральным уравнениям Вольтерра.

Используя известные формулы обращения операторов Абеля, согласно ([8]) решение (2.2) получим в виде:

$$\chi(x)=-\frac{N}{(x+a)^{1-\alpha}}\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_{x+a}^{2a}\frac{y^{1-h}\mathrm{d}y}{(x+a-y)^{\alpha-h}}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{F(t-a)t^{h-\alpha}}{(y-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t, \tag{3.7}$$

где

$$N=\frac{\sin\pi\alpha\cdot\Gamma(h)\cdot(1-i\nu)^{-1}}{\pi\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha+h)}.$$

В случае штампа с плоским основанием $f(x)=0$ находим следующие выражения для нормальных и тангенциальных контактных напряжений:

$$p(x)=\frac{P}{D}(a^2-x^2)^{\alpha}\cos\left(\beta\cdot\ln\frac{a+x}{a-x}\right),$$

$$q(x)=\frac{J(\mu)}{J(\mu)}\cdot\frac{P}{D}\cdot(a^2-x^2)^{\alpha}\sin\left(\beta\cdot\ln\frac{a-x}{a+x}\right). \tag{3.8}$$

где

$$D=\frac{(2a)^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha+1+i\beta)\Gamma(\alpha+1-i\beta)}{(2\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)},$$

При $\mu=1$ формулы (3.8) принимают вид:

$$p(x)=\frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}},\quad q(x)=0$$

что совпадает с известной формулой, полученной М. Садовским ([8]) для случая отсутствия сил трения.

Автор выражает свою признательность Н. Х. Арутюняну и С. М. Мхитаряну за постановку задачи и обсуждение работы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

Հաստատված սողքի ոչ գծային տեսության հարթ կոնտակտային մի խնդրի մասին հարակցման ուժերի հաշվառումով

Աշխատանքում քննարկվում է հաստատված սողքի ոչ գծային տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը հարակցման ուժերի հաշվառումով։ Ելնելով տեղափոխությունների վերադրման ընդհանրացված սկզբունքից, խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպվում է դրականորեն որոշյալ էրմիտյան կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման տեսքով։ Կառուցված է այդ ինտեգրալ հավասարման միակ լուծումը Կրեյնի, օրթոգոնալ բազմանդամների և Կոպսունի անալիտիկ մեթոդներով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 23. вып. 5 (1959). [2] *Ю. Н. Работнов*, Вестник МГУ. № 10. 1948. [3] *Н. Х. Арутюнян*. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат. М.—Л., 1952. [4] *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян*, ПММ, т. 27, вып. 5 (1963). [5] *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян*, ПММ, т. 26, вып. 1 (1962). [6] Развитие теории контактных задач в СССР. «Наука», М., 1976. [7] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. «Наука», 1967. [8] *Г. Я. Попов*. ПММ, т. 31, вып. 2, (1967). [9] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости «Наука», М., 1966. [10] *А. М. Кац*. Теория упругости. Гостехиздат, 1956. [11] *С. М. Мхитарян*, ДАН Арм. ССР, т. 48, № 2 (1969).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 539.121.

ФИЗИКА

В. О. Папанян

Обобщенное представление собственного времени для квантовой электродинамики на малых расстояниях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 6/XII 1977)

1. В квантовой электродинамике (КЭД) особенно актуален вопрос внутренней замкнутости теории, так как с одной стороны расчеты по теории возмущений (ТВ) блестяще согласуются с экспериментальными результатами, а с другой стороны успехи в изучении калибровочных теорий показали, что КЭД естественно входит в общую схему единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. В связи с этим очень важно исследовать поведение КЭД на малых расстояниях ([1-4]), в частности, вблизи точечного пробного заряда, методами ренорм—группы.

Гелл-Манном и Лоу ([1]) была введена функция $\Psi(z)$ и было показано, что существование нуля этой функции при некотором конечном $z=z_0$ означает конечность предельного затравочного заряда КЭД и возможность замкнутой теории. Так как точная функция Гелл—Манна—Лоу (ГМЛ) в настоящее время неизвестна, то исследуют ее разложение в ряд ТВ.

$$\Psi^{(a)}=z\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^a\left(\frac{z}{\pi}\right)^n. \tag{1}$$

Для различных ренорм—инвариантных зарядов ([4-6]) функции $\Psi^{(a)}$ различаются начиная с третьего члена в силу однопараметрического произвола ренорм—группы, хотя при больших значениях аргументов функция ГМЛ определяется единственным образом.

2. Исходя из представления Челлена—Лемана ([7]) для пропагатора фотона

$$d(k^2/m^2)=1+k^2\int_0^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\,\frac{\rho_{v,1}(M^2/m^2)}{M^2+k^2-i\varepsilon}, \tag{2}$$

где точный пропагатор в калибровке Ландау:

$$D_{\mu\nu}=(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/k^2)\alpha d(k^2/m^2,\alpha)/k^2, \tag{3}$$

введем новую спектральную функцию следующим образом*)

$$F_\nu(1/sm^{2\nu},\alpha)=1+\int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta}\exp[-s(m^2\zeta)^\nu]\,\rho_{\text{ч.л}}(\zeta) \tag{4}$$

Эта функция в частном случае $\nu=1/2$ совпадает с функцией плотности наведенного заряда

$$F_{1/2}(1/rm,\alpha)=\rho(mr,\alpha)=1+2\int_1^\infty \frac{dt}{t}e^{-2mrt}\,\rho_{\text{ч.л}}(4t^2), \tag{5}$$

которая связана с пропагатором известной формулой

$$\rho(mr,\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\sin krd(k^2/m^2,\alpha), \tag{6}$$

здесь $k=|\vec{k}|, r=|\vec{r}|$. А при значении параметра $\nu=1$ функция (4) совпадает со спектральной функцией в представлении собственного времени ([5,6,8])

$$d(x,\alpha)=x\int_0^\infty ds\exp(-m^2sx)F_1(1/sm^2,\alpha), \tag{7}$$

где $x=k^2/m^2$.

Поправка к кулоновскому потенциалу точечного заряда порядка $\alpha(Z\alpha)$ была вычислена Юлингом ([9]), а порядка $\alpha^2(Z\alpha)$ Калланом и Сабри ([10]). Пользуясь этими результатами можно, согласно (5), выписать функцию Челлена—Лемана в том же приближении ТВ. Асимптотическому значению пропагатора фотона при $k^2/m^2\to\infty$ соответствуют малые расстояния от центра и $sm^{2\nu}\to 0$. В этом случае интеграл (4) берется в явном виде и в результате получаем (везде ниже $Z=1$):

$$F_\nu(1/sm^{2\nu},\alpha)^{-1}=1+\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}\right)+$$
$$+\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left[\frac{5}{24}-\zeta(3)+\frac{\pi^2}{54}\left(2-\frac{1}{\nu^2}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}\right]+\ldots, \tag{8}$$

где $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}=1{,}202056\ldots$, $\ln\gamma=0{,}577215\ldots$ — постоянная Эйлера. Таким образом, на малых расстояниях от пробного заряда в рамках ТВ наша спектральная функция, аналогично другим инвариантным зарядам ([8]), разлагается в ряд по степеням константы связи и логарифма:

---

[*]Применяется система единиц, в которой $\hbar=c=1$ и $\alpha=e^2/4\pi=1/137$; метрика $pk=\vec{p}\vec{k}-p_0k_0$.

$$F_\nu\left(\frac{1}{sm^{2\nu}},\alpha\right)^{-1}=1+\frac{\alpha}{\pi}\left(a_{10}+a_{11}\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}\right)+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}a_{nk}^{(\nu)}\ln^k\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}} \tag{9}$$

В частном случае $\nu=1/2$ разложение (8) совпадает с известным разложением для наведенного заряда ([11]).

3. Обычно в методе ренормгруппы ([1–4]) вводится новая константа взаимодействия

$$\alpha_\lambda=\alpha d(\lambda^2/m^2,\alpha), \tag{10}$$

где α_λ изменяется между значением физической постоянной тонкой структуры α (при $\lambda\to 0$) и голым предельным зарядом α_0 ($\lambda\to\infty$). Соотношение инвариантности по ренормгруппе записывается в виде

$$\alpha_\lambda\, d(k^2/m^2,\lambda^2/m^2,\alpha_\lambda)=\alpha d(k^2/m^2,\alpha); \tag{11}$$

здесь в левой части введена стандартная запись пропагатора, явно показывающая точку нормировки. Благодаря свойствам линейности и подобия преобразования (4) (аналогично свойствам обычного преобразования Лапласа—Карсона (7)) можно получить из (11) следующее соотношение инвариантности

$$\alpha_\lambda F_\nu(1/sm^{2\nu},1/s_\lambda m^{2\nu},\alpha_\lambda)=\alpha F_\nu(1/sm^{2\nu},\alpha). \tag{12}$$

При этом дифференциальное уравнение Ли ренормгруппы, которое выводится с обычным условием, что теория имеет предел в асимптотике, когда массы стремятся к нулю, не изменяется

$$\lambda^2\frac{d\alpha_\lambda}{d\lambda^2}=\Psi(\alpha_\lambda). \tag{13}$$

Проинтегрировав, получим уравнение ГМЛ в нашем представлении

$$\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}=\int_{q(\alpha)}^{\alpha^*}\frac{dz}{\Psi(z)}, \tag{14}$$

где нижний предел есть первый член асимптотического разложения по степеням логарифма при $sm^{2\nu}\to 0$:

$$\alpha F_\nu\left(\frac{1}{sm^{2\nu}},\alpha\right)=q(\alpha)+p(\alpha)\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}+$$
$$+r(\alpha)\ln^2\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}+\ldots. \tag{15}$$

4. Пользуясь вычисленными нами членами ряда ТВ (8), можно получить коэффициенты разложения функции ГМЛ ([1]), с помощью функционального соотношения ([4]):

$$2\Psi(q(\alpha))=\alpha q'(\alpha)\beta(\alpha). \tag{16}$$

Здесь

$$\beta(\alpha)=2\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n=\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2-\frac{121}{144}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3+\dots \tag{17}$$

функция Каллана—Симанзика ([12]), которая универсальна при вычислениях в рамках КЭД, т. е. одна и та же для всех ренорм-инвариантных зарядов. Можно показать, что ренорм-инвариантный заряд αF_ν удовлетворяет уравнению Каллана—Симанзика:

$$\left[2\nu s\frac{\partial}{\partial s}+\alpha\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\alpha F_\nu\,(1/sm^{2\nu},\alpha)=0. \tag{18}$$

Разложение в ряд левой и правой частей (18) дает

$$\psi_1=\beta_1=\frac{1}{3},\quad \psi_2=\beta_2=\frac{1}{4},\quad \psi_3^{(\nu)}=\beta_3+\beta_2 a_{10}-\beta_1 a_{20}^{(\nu)}. \tag{19}$$

Таким образом разложение функций ГМЛ для различных ренорминвариантных зарядов, а также для различных значений ν заряда αF_ν, различаются начиная с третьего члена. Асимптотика различных инвариантных зарядов может отличаться только постоянными a_{n0}, так как коэффициенты при логарифмах в разложении (9) универсальны. Этот однопараметрический произвол по ренормгруппе, выливающийся в произвол функции ГМЛ, в нашей работе характеризуется параметром $\nu(0<\nu<\infty)$.

Подставляя в (19) значения a_{10} и a_{20} из (8), (9) и β_n из (17), получаем в результате

$$\psi_3^{(\nu)}=-\frac{101}{288}+\frac{\zeta(3)}{3}-\frac{\pi^2}{162}\left(2-\frac{1}{\nu^2}\right)=-0{,}071856\dots+\frac{0{,}060923}{\nu^2}. \tag{20}$$

Итак $\psi_3^{(\nu)}$, как функция параметра ν, имеет вид гиперболы с асимптотиками—положительной полуосью и линией $\psi_3^{(\infty)}=-0{,}071856\dots$ и пересекает ноль при $\nu_0=0{,}921\dots$.

5. Следует заметить, что мы зафиксировали два интегральных преобразования (5) и (7), а экстраполирующее их интегральное преобразование можем выбрать произвольным образом, а именно вместо (4) взять

$$F^{\varphi(\nu)}(sm^{2\varphi(\nu)},\alpha)=1+\int_0^\infty\frac{d\zeta}{\zeta}\exp[-s(m^2\zeta)^{\varphi(\nu)}]\,\rho_{11}(\zeta) \tag{21}$$

с фиксированием двух точек: $\varphi(\nu_1)=1/2$, $\varphi(\nu_2)=1$ $(\nu_1\neq\nu_2)$.

Множество всех положительно-определенных функций $\varphi(\nu)$ заполняет квадрант, ограниченный снизу линией $\psi_3^{(\infty)}$ и слева осью ординат $\nu=0$.

6. Согласно результатам работ ([4,10]) для асимптотики пропагатора фотона при $k^2/m^2\to\infty$

$$\psi_3^{(\varepsilon)} = \frac{\zeta(3)}{3} - \frac{101}{288} = 0{,}049991\ldots, \tag{22}$$

т. е. положительно, а т. к. и ψ_1, $\psi_2 > 0$, то это уменьшает надежды на существование нуля уравнения $\Psi(z)=0$. Однако, полученные в ([6]) значения ψ_3, для асимптотики лагранжевой функции постоянного поля большой интенсивности $\psi_3^{(\varepsilon)} = -0{,}079785\ldots$

и для константы перенормировки $\psi_3^{(z)} = -\frac{41}{288} - \frac{5}{36}\ln 2 = -0{,}238621\ldots$

отрицательны. Отрицательно значение ψ_3 и для представления собственного времени (7) пропагатора фотона

$$\psi_3^{(\nu-1)} = -\frac{101}{288} + \frac{\zeta(3)}{3} - \frac{\pi^2}{162} = -0{,}010932\ldots .$$

7. Итак, для введенного в настоящей работе, с помощью преобразования (4), инвариантного заряда αF, $(0<\nu<\infty)$ коэффициент $\psi_3^{(\nu)}$ в разложении (1) можно варьировать изменением параметра преобразования ν. Важно то, что в определенном интервале изменения параметра вышеуказанный коэффициент отрицателен, и это намекает на существование нуля функции Гелл—Манна—Лоу при некотором значении переменной константы связи z. Следует отметить, что коэффициент $\psi_3^{(\nu)}$, ни при каких допустимых значениях параметра ν не принимает отрицательных сколь угодно больших по абсолютной величине значений, а именно он ограничен снизу значением $\psi_3^{(\varepsilon)} = -0{,}071856\ldots$. В то же время при $\nu \to 0$ коэффициент стремится к плюс бесконечности. Этот факт говорит о том, что есть некоторые ограничения на решения уравнения $\Psi(z)=0$, которые нам в настоящее время неизвестны и которые чрезвычайно трудно получить оставаясь в рамках ТВ, хотя есть попытки продвинуться вперед с помощью анализа асимптотики диаграмм Фейнмана в бесконечном порядке для некоторых моделей теории поля ([11]). То, что изменением определенного параметра интегрального преобразования можно варьировать значение коэффициентов разложения функции Гелл—Манна—Лоу, позволяет надеяться, что изменением способа обрезания можно подойти к доказательству существования нуля (или нулей) функции Гелл—Манна—Лоу. Это поможет ответить на вопросы замкнутости как чистой КЭД, так и других теорий квантованных полей.

Автор выражает благодарность В. И. Ритусу за постановку задачи и обсуждения.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Վ. Օ. ՊԱՊԱՆՅԱՆ

Սեփական ժամանակի ընդհանրացված պատկերացումը քվանտային էլեկտրադինամիկայում փոքր հեռավորությունների համար

Սեփական ժամանակի ընդհանրացված պատկերացման մեջ ստացված են կետային լիցքի պոտենցիալի ուղղումները, հաշվված գրգռումների տեսությամբ։ Ստացված են պատկերացման մեջ ինվարիանտ լիցքին համապատասխանող Գելլ-Մանն-Լոուի ֆունկցիայի վերլուծության առաջին երեք անդամները, և ցույց է տրված, որ երրորդ անդամի գործակիցը կարող է լինել բացասական, չնայած և սահմանափակված ներքևից։ Այսպիսով, սեփական ժամանակի պատկերացումը կարող է օգտակար լինել Գելլ-Մանն-Լոուի ֆունկցիայի զրոյի գոյությունը ապացուցելու համար, որոնք անհրաժեշտ են քվանտային էլեկտրադինամիկայի նիրքին անհակասության համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Gell—Mann F. E. Low* Phys. Rev., 95, 1300(1954). [2] *M. Baker, K. Johnson*, Phys. Rev., 183, 1292, 1969; D3, 2516 (1971); D3, 2541 (1971). [3] *K. Wilson* Phys. Rev., D3, 1818 (1971). [4] *S. Adler* Phys. Rev., D5, 3021 (1972). [5] *В. И. Румус* ЖЭТФ, 69, 1517 (1975). [6] *В. И. Румус* ЖЭТФ, 73, 807 (1977). [7] *G. Kallen* Helv. Phys. Acta, 25, 417 (1952); *H. Lehman* Nuov. Cim., 11, 342 (1954). [8] В. О. Папанян Препринт № 76—43 ИФИ АН Арм. ССР (1976). [9] *E. A. Uehling* Phys. Rev., 48, 55 (1935). [10] *G. Kallen, A. Sabry*. Kgl. Dan. Vid. Selsk., 29, 17 (1955). [11] *J. Blomgvist* Nucl. Phys., B48, 95, (1972). [12] *C. Callan*, Jr. Phys. Rev., D2, 1541 (1970); *K. Symanzik*. Comm. math. Phys., 18, 227 (1970); 23, 49 (1971). [13] *C. M. Bender*, T. T. Wu. Phys. Rev. Lett., 37, 117 (1976).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 1

УДК [548.0 : 53] + 530.145

ФИЗИКА

Г. А. Варданян

Связанное состояние перегибов в квантовом кристалле

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 26/I 1978)

Состояние квазичастиц в квантовом кристалле классифицируется по значениям квазиимпульса $\vec{p}$ и соответствующей энергией E ([1,2]). В том случае, когда речь идет о квазичастицах типа перегибов на дислокациях, расположенных в плоскости скольжения под некоторым углом к кристаллографическим направлениям, согласно теории Андреева, зависимость энергии перегиба от одномерного квазиимпульса дается выражением ([3]).

$$E(p)=E_0+2\hbar J\cos\left(\frac{pa}{\hbar}\right), \tag{1}$$

где E_0—энергия локализованного перегиба в классическом пределе.

Пусть два перегиба взаимодействуют через потенциал ([3]) $\beta\delta'_{xx'}$, μ—модуль сдвига, $\mu\sim\beta a^{-4}$ и x, x'—дискретные величины. На этот процесс взаимодействия дискретность пространства оставляет яркий отпечаток, в результате возникают своеобразные особенности, которые и рассматриваются в настоящей работе. Ниже будет показано, что в спектре энергии перегиба возникает локализованный уровень, который отщепляется от зоны. Этот уровень под действием дополнительного возмущения (малого притяжения) либо сдвигается по отношению границы зоны, либо уширяется, не смещаясь.

Взаимодействия перегибов в дискретном пространстве кристалла описываются уравнением Лифшица ([4,5]):

$$\sum_{x'}A_{x-x'}\Psi(x')+\sum_{x'}U(x,x')\Psi(x')=Z\Psi(x), \tag{2}$$

где

$$E(p)=\sum_{x}A_x e^{ipx}. \tag{3}$$

Рассматриваемый потенциал удовлетворяет условию вырожденности, т. е. его можно представить в виде произведения двух функ-

ций, зависящих от x и x'. Влияние действия каждой из этих функций на Ψ дает его значение в другой точке.

Исходя из этих рассуждений и используя разложение (3), уравнение (2) запишем в импульсном представлении, интегрируя которое получим:

$$\Psi(x)=\frac{\beta}{2\hbar J}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)^{x/a}, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon=\frac{E_0-Z}{2\hbar J}.$$

Спектр энергии определяется соответствующим граничным условием налагаемым на волновую функцию, что дает:

$$1=\frac{\beta}{V}\int\frac{dp}{\varepsilon(p)-Z}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что существует отщепленный от зоны уровень Z_0:

$$Z_0=E_0+\Delta\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\Delta}\right)^2}. \tag{6}$$

С помощью уравнений Дайсона для такого уравня имеем следующую функцию Грина:

$$G_{xx'}=G^0_{xx'}+\frac{\beta G^0_{xx}G_{0x'}}{1-\beta G^0}, \tag{7}$$

где

$$G^0=\frac{1}{\Delta\cdot n}\frac{\Sigma}{p}\frac{1}{\varepsilon-\cos pa-i\delta}. \tag{8}$$

Выражение для $G_{xx'}$ позволяет найти плотность состояний в спектре $\nu(\varepsilon)$, которое связано с функцией Грина известным соотношением:

$$\nu(\varepsilon)=\frac{1}{\pi n}\,\mathrm{Im}SpG(\varepsilon)$$

Из выражений (7) и (8) для $\nu(\varepsilon)$ имеем:

$$\nu(\varepsilon)=\nu_0(\varepsilon)+\frac{1}{\pi n}\,\mathrm{Im}\frac{d}{d\varepsilon}\ln\left|1-\beta G^0(\varepsilon)\right|, \tag{9}$$

где

$$G^0(\varepsilon)=\mathrm{Re}G^0(\varepsilon)+i\mathrm{Im}G^0(\varepsilon). \tag{10}$$

Как следует из выражения (9)

$$1-\beta\mathrm{Re}G^0(\varepsilon)=0. \tag{11}$$

Это означает, что в некоторой точке плотность состояний увеличивается по отношению к уровням энергии в обычном кристалле. Следовательно, функция $\nu(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon=\pm\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\cdot n}{\beta}\right)^2}$ имеет максимум,

и вблизи этой точки

$$\nu(\varepsilon)=\nu_0(\varepsilon)+\frac{1}{\pi n}\frac{\Gamma_0}{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2+\Gamma_\varepsilon^2}, \tag{12}$$

где

$$\Gamma_0=-\frac{i\pi\Delta}{a}\frac{|\varepsilon_0|}{\varepsilon_0}$$

ширина этого максимума. Если ε_0 лежит в полосе этого спектра $E(p)$, то эту ситуацию можно трактовать как наличие в системе некоторого виртуального уровня, а в том случае, когда ε_0 лежит вне полосы этого спектра, в системе появляются дискретные уровни, соответствующие связанным состояниям ([3,7,8]).

Эти состояния, по-видимому, являются аналогами паре квазичастиц, которые могут свободно двигаться только в гексогональной плоскости кристалла ([3]).

Рассмотрим влияние малого ($v'\ll\beta$) возмущения на локализованное состояние перегиба. Разложим $\det|1-G^0(E)v'|$ определяющий спектр полюсов в (11)в ряд по степеням v':

$$\det|1-G^0v'|=\det|1-G^0v'|\left[1-G^0\beta-\beta\left(\frac{G^0v'G^0}{1-G^0v'}\right)\right] \tag{13}$$

Пусть $\det|1-\mathrm{Re}G^0v'|\neq0$ ни при каких значениях E.

Тогда:

$$\nu(\varepsilon)=\nu_0(\varepsilon)+\frac{1}{\pi n}\mathrm{Im}\frac{d}{d\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}Sp\left[G^0(\varepsilon)v'\right]^k+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\mathrm{Im}\frac{d}{d\varepsilon}\ln\left[1-\beta G^0(\varepsilon)-\beta\left(\frac{G^0v'G^0}{1-G^0v'}\right)_{\infty}\right]. \tag{14}$$

Мы видим, что несингулярный вклад порождается дальнодействующей частью v', а особенности сингулярного вклада определяются уравнением:

$$1-\beta\mathrm{Re}G^0(\varepsilon)-\beta\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-G^0v'}G^0v'G^0\right)_{\infty}=0. \tag{15}$$

Таким образом, если уравнение (11) имеет решение Z_0, то возмущение v' приводит к сдвигу этого уровня или дополнительному уширению.

Функция распределения этих перегибов получается решением одномерного уравнения Фокера—Планка, аналогично работе ([7]):

$$f=-\frac{da^2}{T}f_0\frac{\sigma_a}{da^2+laF}, \tag{16}$$

где d—коэффициент диффузии ($d\sim\hbar la^2/\beta n$), а $F=\nu_e\sigma_{em}b_m$, (ν—единичный вектор нормали к плоскости скольжения, σ_{em}—тензор напряжений, b_m—вектор Брюгерса), величина f_0—определяется числом

перегибов $|f_0 \sim |e^{\varepsilon_0/kT}-1|^{-1}|$, а $\varepsilon_d \sim \frac{\pi\Delta}{a}$.

Следовательно, поток равен:

$$j=\frac{1}{f_0}\sum_a ia\varepsilon_a f_a^* = -\frac{\pi^2 d\Delta^2}{T}\sum_a \frac{i}{da^2-iaF}, \tag{17}$$

Следует отметить, что при перемещении перегибов возникает сила торможения, зависящая от скорости движения дислокаций. Величина и зависимость от скорости дислокаций этих сил определяют в основном характер почти стационарного движения.

Объединяя члены с a_n и $-a_n$ из (17) получаем:

$$j=\frac{\pi^2\Delta^2 d}{T}\sum_n \frac{a_n F}{(da_n^2)^2+(a_n F)^2}.$$

В модели Пейералса (6), максимальная сила определяет те сдвиговые напряжения $\sigma_0=F_m/a$, которые нужно приложить к кристаллу, чтобы дислокация начала перемещаться в своей плоскости скольжения. Тогда

$$j=\frac{\pi^3\Delta^2 d}{12Tb}\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2+d^2}, \tag{18}$$

где

$$a_n=nb, \qquad (n=0,\pm 1,\cdots)$$

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность И. М. Лифшицу и А. Ф. Андрееву за полезные советы.

Ереванский государственный университет

Դ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Շրջման կետերի կապված վիճակները քվանտային բյուրեղում

Դիտարկված է միաչափ քվանտային բյուրեղում դիսլոկացիաների վրա շրջման կետերին համապատասխանող քվազիմասնիկների վարքը։ Ցույց է տրվում, որ բյուրեղի համաչափության առանցքի ուղղությամբ առաջանում են լոկալիզացված էներգետիկ մակարդակներ, որոնք համապատասխանում են կապված վիճակների առաջացմանը։ Լրացուցիչ փոքր գրգռումը բերում է այդ մակարդակի կամ շեղմանը կամ լայնացմանը։ Այդպիսի քվազիմասնիկների գույքը կարող է շարժվել միայն որոշակի ուղղությամբ, որը բնութագրվում է սիֆուզիայի գործակցով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Ф. Андреев, И. М. Лифшиц.* ЖЭТФ, 56, 2057 (1969). [2] *R. A. Guyer, L. I. Zane,* Phys. lett. 24, 660 1970). [3] *А. Ф. Андреев,* УФН, 118, 251 (1966). [4] *И. М. Лифшиц.* Nouvo Cimm. suppl, 3 716 (1956). [5] *И. М. Лифшиц. Г. А. Варданян,* ДАН Арм. ССР т. LXI. № 3 (1976). [6] *А. М. Кочевич,* Основы механики кристаллической решетки, М. 1972. [7] *А. Ф. Андреев* ЖЭТФ, 67, 1559 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 550.835

ГЕОФИЗИКА

Е. П. Леман, А. А. Тамразян, В. А. Арцыбашев

Эффективные коэффициенты ослабления гамма-квантов в гетерогенных средах с биноминальным законом распределения неоднородностей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 24/V 1978)

Определение эффективных коэффициентов взаимодействия гамма-квантов с гетерогенной средой является основной задачей теории защиты и прикладной ядерной геофизики. В частности, ее решение необходимо для развития теории гамма-методов анализа горных пород и руд, которые являются гетерогенными средами.

Известно, что при прохождении гамма-квантов через гетерогенную среду ослабление потока излучения происходит по экспоненциальному закону Бэра, согласно которому

$$N = N_0 \cdot \exp(-\bar{\mu}_{эф} \cdot \rho x), \tag{1}$$

где N_0—поток квантов с энергией E на поверхности среды, N—тот же поток на глубине x, ρ—плотность среды, а $\bar{\mu}_{эф}$—массовый эффективный коэффициент ослабления квантов в среде. Величина $\bar{\mu}_{эф}$ для гетерогенной среды определяется не только ее вещественным составом и концентрацией неоднородностей в ней, но и формой, размерами, ориентацией и, наконец, характером распределения этих неоднородностей. При решении задач прикладной ядерной геофизики, связанных с прохождением фотонов через горные породы и руды, обычно предполагают, что распределение неоднородностей, под которыми понимают рудные зерна или включения, подчиняется в гетерогенной среде закону Пуассона ([1-4]). Однако распределение Пуассона справедливо лишь в том случае, когда среднее количество рудных зерен в единице объема исследуемой среды велико, а их средняя концентрация в гетерогенной среде мала (близка к нулю). Следовательно, распределение Пуассона и получаемые с его помощью решения правильно описывают взаимодействие гамма-квантов с гетерогенными средами лишь при малых концентрациях сравнительно мелких рудных зерен.

Между тем распределение Пуассона является предельным случаем более общего, биноминального распределения, которое свободно от

указанных выше ограничений. Поэтому естественно считать, что распределение неоднородностей в гетерогенной среде подчиняется биноминальному закону, используя который можно получить наиболее общее решение.

Применяя к решению задачи подход и схему расчета, развитые в работе ([1]), рассмотрим вопрос об ослаблении потока квантов монохроматического гамма-излучения с энергией E в полубесконечной гетерогенной среде, состоящей из однородного наполнителя H и рудных зерен A, имеющих форму куба с ребром D. Будем считать поверхность среды плоской, падение излучения по отношению к ней нормальным, а ориентацию зерен в среде такой, что их грани параллельны поверхности раздела. Если поток квантов на поверхности среды через площадку D^2 равен N_0, то его ослабление в наполнителе при прохождении слоя x может быть учтено сомножителем $\exp[-\bar{\mu}_H\rho(1-q)x]$, где ρ — средняя плотность гетерогенной среды, q — средняя концентрация рудных зерен в этой среде, $(1-q)$ — средняя концентрация однородного наполнителя с массовым коэффициентом ослабления $\bar{\mu}_H$. Ослабление потока в рудных зернах зависит от их числа и учитывается сомножителем $\exp(-\bar{\mu}_A\rho_A KD)$, где ρ_A — плотность рудного вещества, из которого состоят зерна, $\bar{\mu}_A$ — его массовый коэффициент ослабления, K — число рудных зерен в гетерогенной среде, встретившихся в объеме $V=D^2x$ на пути x. Тогда поток квантов на глубине x равен

$$N=N_0\exp[-\bar{\mu}_H\rho(1-q)x]\exp(\bar{\mu}_A\rho_A KD).$$

Если считать, что распределение рудных зерен в гетерогенной среде подчиняется биноминальному закону, то вероятность появления K рудных зерен на пути x в объеме $V=D^2x$ равна

$$P_k=\frac{a!q^k(1-q)^{a-k}}{K!(a-K)!},$$

где a — максимально возможное количество рудных зерен в объеме $V=D^2x$, равное

$$a=n/q=\rho x/(\rho_A D), \tag{2}$$

а n — среднее число рудных зерен в объеме $V=D^2x$ при их средней концентрации q в гетерогенной среде, равное $n=\rho qx/(\rho_A D)$. Тогда поток квантов на глубине x равен

$$N=N_0\exp[-\bar{\mu}_H\rho(1-q)x]\sum_{k=0}^{a}\exp(-\bar{\mu}_A\rho_A KD)P_k=$$

$$=N_0\exp[-\bar{\mu}_H\rho(1-q)x]\{1-q[1-\exp(-\bar{\mu}_A\rho_A D)]\}. \tag{3}$$

Для получения равенства (3) необходимо воспользоваться выражением производящей функции биноминального распределения (5), которое в наших обозначениях имеет вид

$$P(t)=\sum_{K=0}^{a}\frac{a!}{K!(a-K)!}q^{k}(1-q)^{a-k}\cdot t^{k}=[qt+(1-q)]^{a},$$

где $t=\exp(-\bar{\mu}_A\rho_A D)$. Сравнивая формулы (1) и (3), находим выражение эффективного массового коэффициента ослабления фотонов в гетерогенной среде с кубическими рудными зернами

$$\bar{\mu}_{эф}=\bar{\mu}_H(1-q)-\frac{1}{\rho_A D}\ln[1-q[1-\exp(-\bar{\mu}_A\rho_A D)]]. \qquad (4)$$

Нетрудно убедиться, что при $D=0$ выражение (4) для эффективного массового коэффициента ослабления излучения в гетерогенной среде переходит в общеизвестную формулу для среднего массового коэффициента $\bar{\mu}_{ср}$ ослабления гомогенной среды, т. е.

$$\bar{\mu}_{эф}=\bar{\mu}_{ср}=\bar{\mu}_H(1-q)+\bar{\mu}_A q,$$

т. к. $\exp(-x)\approx 1-x$, а $\ln(1-x)\approx -x$ при $x\to 0$.

Если $a\to\infty$, $q\to 0$ так, что $aq\to n$, то биномиальное распределение переходит в распределение Пуассона. Это обстоятельство позволяет непосредственно из равенства (4), полагая $q\to 0$ и ограничиваясь первым порядком малости, получить выражение $\bar{\mu}_{эф}$ для гетерогенной среды с распределением рудных зерен, подчиняющимся закону Пуассона (1):

$$\bar{\mu}_{эф}=\bar{\mu}_H(1-q)+\frac{q}{\rho_A D}[1-\exp(-\bar{\mu}_A\rho_A D)].$$

Если в формуле (4) заменить $\bar{\mu}$ на $\bar{\tau}$ или $\bar{\sigma}$, то получим соответствующие выражения эффективных коэффициентов фотопоглощения или рассеяния для гетерогенной среды.

Аналогичным путем можно получить выражения $\bar{\mu}_{эф}$ для гетерогенных сред с частицами другой геометрической формы. Например, для двухкомпонентной среды, состоящей из однородного наполнителя и рудных зерен сферической формы с диаметром D находим

$$\bar{\mu}_{эф}=\bar{\mu}_H(1-q)-\frac{1}{\rho_A D}\ln\left\{1-\frac{3}{2}q+\frac{3q}{\mu_A^2\rho_A^2 D^2}\left[1-(1+\mu_A\rho_A D_A)\exp(-\bar{\mu}_A\rho_A D)\right]\right\}$$

Полученные решения легко обобщаются для многокомпонентной гетерогенной среды. В частности для трехкомпонентной гетерогенной среды, состоящей из гомогенного наполнителя H и кубических рудных зерен сортов A и M с размерами D_A и D_M, будем иметь

$$\bar{\mu}_{эф}=\bar{\mu}_H(1-q_A-q_M)-\frac{1}{\rho_A D_A}\ln\left\{1-q_A\left[1-\exp(-\bar{\mu}_A\rho_A D_A)\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{\rho_M D_M}\ln\left\{1-q_M[1-\exp(-\bar{\mu}_M\rho_M D_M)]\right\},$$

где q_A и q_M — концентрации зерен A и M в гетерогенной среде, ρ_A и ρ_M — плотности рудного вещества, из которого состоят зерна A и M, $\bar{\mu}_A$ и μ_M — массовые коэффициенты ослабления фотонов в зернах A и M. Нетрудно получить формулу $\bar{\mu}_{эф}$ для гетерогенной среды, в которой рудная фаза представлена зернами одной формы, но различных размеров. В общем случае если многокомпонентная гетерогенная среда состоит из гомогенного наполнителя и кубических рудных зерен различного состава и размера, то

$$\bar{\mu}_{эф} = \bar{\mu}_H\left(1 - \sum_{(i,j)} q_{i,j}\right) - \sum_{(i,j)} \frac{1}{\rho_{i,j} D_{i,j}} \cdot \ln\left\{1 - q_{i,j} \cdot \left[1 - \exp(-\bar{\mu}_{i,j} \cdot \rho_{i,j} \cdot D_{i,j})\right]\right\}, \tag{5}$$

где i — сортность частиц по составу, а j — их сортность по размерам.

Полученные решения отличаются от ранее известных [3,6] прежде всего моделью гетерогенной среды, которая в данном случае не предусматривает упаковки рудных зерен и безрудного наполнителя в регулярные однозернистые слои и, следовательно, является более общей по сравнению с ранее использованными.

Выражения, полученные для эффективных коэффициентов ослабления фотонов в гетерогенных средах, могут быть использованы при расчетах гамма-полей, а также при решении задач теории защиты или прикладной ядерной геофизики, в частности, при определении интенсивности вторичных излучений от гетерогенных сред, каковыми являются, например, горные породы и руды.

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и инженерной
сейсмологии академии наук Армянской ССР

Ե. Գ. ԼԵՄԱՆ, Ա. Ա. ԹԱՄՐԱԶՅԱՆ, Վ. Ա. ԱՐՑԻԲԱՇԵՎ

Գամմա-քվանտների թուլացման էֆեկտիվ գործակիցները բինոմալ օրենքով բաշխված անհամասեռությամբ տարակազմ միջավայրում

Տարակազմ միջավայրում գամմա-քվանտների թուլացման էֆեկտիվ գործակիցների որոշումը հանդիսանում է ռադիոակտիվ ճառագայթների պաշտպանության տեսության և կիրառական միջուկային երկրաֆիզիկայի կարևորագույն խնդիրներից մեկը։ Մասնավորապես դրա լուծումն անհրաժեշտ է լեռնային ապարների և հանքանյութերի գամմա մեթոդով անալիզի տեսության զարգացման համար։

Այդ գործակիցների հաշվման ժամանակ ընդունվել է, որ հանքային հատիկների բաշխումը միջավայրում ենթարկվում է բինոմալ օրենքին։ Այնուհետև դուրս է բերվել ընդհանուր բանաձև բազմաբաղադրիչ միջավայրում գամմա-քվանտների թուլացման էֆեկտիվ գործակիցները հաշվելու համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Арцыбашев, Е. П. Леман*, Атомная энергия, т. 44, вып. 1, 1978. [2] *Е. П. Леман, В. И. Орлов, Ю. С. Медведев*, Методы разведочной геофизики, вып. 25, 83—100, 1975. [3] *А. Г. Хиславский, Р. И. Плотников, Е. Д. Кохов*, «Заводская лаборатория», т. 39, № 6, 691—696, 1973. [4] *Л. И. Шмонин, Г. К. Потребенников, В кн.* Геофизические поиски рудных месторождений, т. 2 (ядерная геофизика), 93—100, Алма-Ата, 1971. [5] *М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт*, Теория распределений, «Наука», 588, М., 1966. [6] *G. B. Mitra, A. J. C. Wilson*, British Journal of Applied Physics, vol. 11, N° 1, p. 43–45, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 581.522.4

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. В. Казарян, С. О. Закарян

К вопросу о реакции хвои некоторых интродуцентов к зимним условиям ереванского ботанического сада

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Казаряном 20/IV 1978)

Одним из ярко выраженных приспособительных реакций растений к зимним пониженным температурным условиям является обособленность плазмы их клеток ([1]). Вместе с этим происходят глубокие количественные изменения в составе углеводов ([2,3]), воды ([4,5]) и хлорофилла ([6,7]), направленные на повышение зимостойкости растений. Это дает основание полагать, что пластичность древесных интродуцентов из разных географических широт в новых условиях существования должна выражаться в количественном изменении форм хлорофилла, углеводов, азота и фосфора. При этом, видимо, эта реакция должна проявиться энергично и рельефно у листьев, чем у клеток древесины или корней, зимостойкость которых сравнительно выше.

Для подтверждения этого предположения и выявления различия в указанных физиологических показателях у хвойных интродуцентов нами были исследованы представители местного, северного и южного происхождений произрастающих в Ереванском ботаническом саду.

В качестве объектов исследования служили из местных: Pinus hamata (stev.) D. Sosn., Juniperus oblonga M. B., Taxus Baccata L. из северных—Juniperus communis L., Pinus silvestris L. из южных—Biota orientalis Endl., Juniperus chinensis L.

В хвое вышеуказанных растений в период январь—февраль определяли содержание хлорофилла и его связь с липопротеидным комплексом по методу Осиповой ([8]), водоудерживающую способность (потеря воды в процентах от исходного содержания ее через равные интервалы времени), содержание углеводов по Хаггедорн-Иенсену, разных форм азота ([9]) и фосфора ([10]), содержание аммиака. Полученные данные были статистически обработаны.

Как видно из приведенных данных (рис. 1) наибольшее содержание растворимых углеводов обнаружено в хвое южных растений. У северных и местных видов их количество почти одинаково. Относительно содержания нерастворимых углеводов обнаружена такая же зако-

номерность, но менее выраженная. Это явление, по всей вероятности, можно объяснить тем, что растения южного происхождения менее приспособлены к нашим зимним условиям и, следовательно, менее зимостойки, в связи с чем накапливают больше растворимых углеводов в хвое. В литературе приводятся соответствующие данные, показывающие, что подготовка растений к зимовке связана с гидролизом крахмала и накоплением растворимых сахаров ([2,3] и др.), с чем и согласуются наши данные.

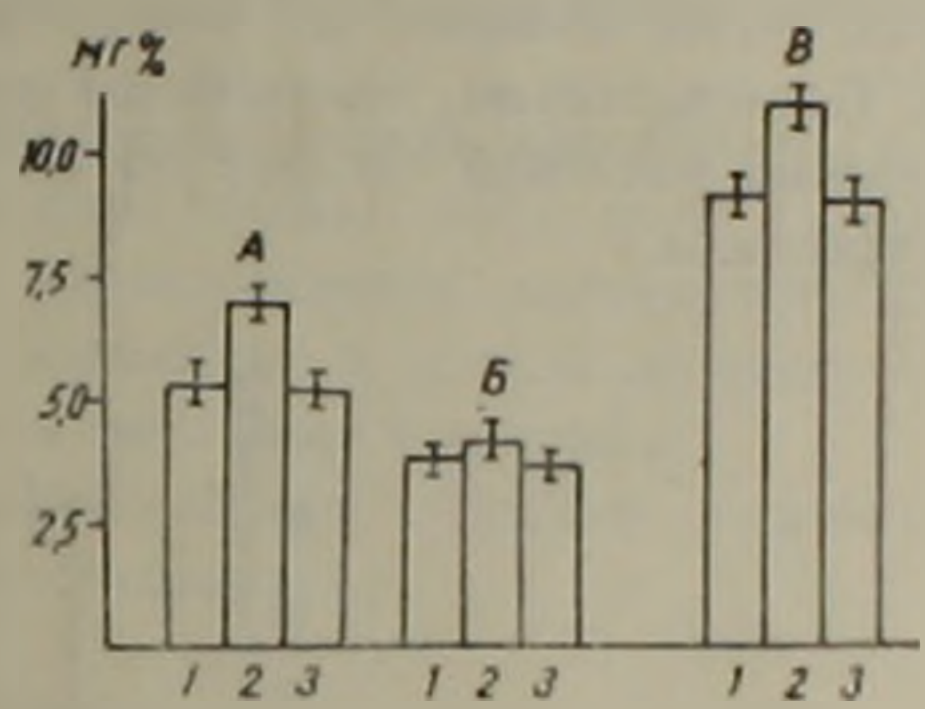


Рис. 1. Содержание растворимых (*А*), нерастворимых (*Б*) и суммы (*В*) углеводов в хвое северных (*1*), южных (*2*) и местных (*3*) растений

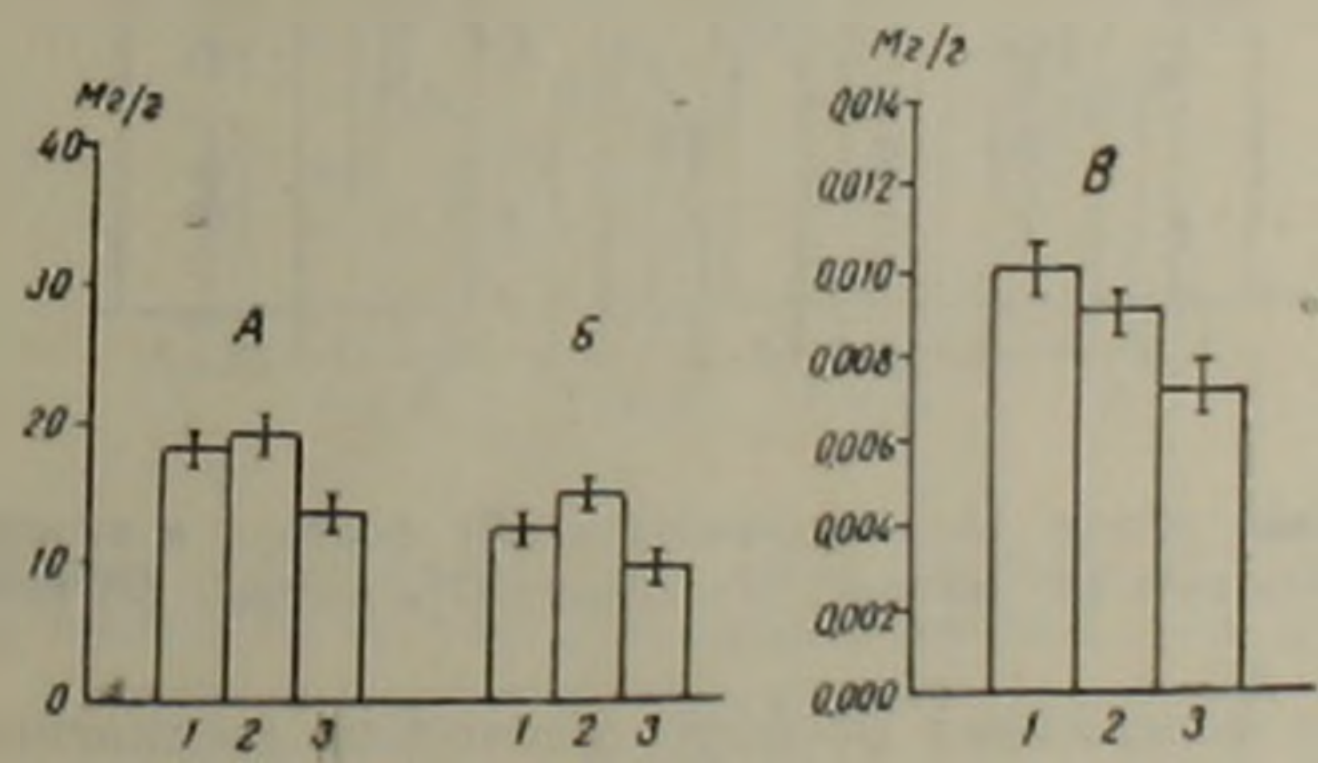


Рис. 2. Содержание общего (*А*), белкового (*Б*) азота и аммиака (*В*) в хвое северных (*1*), южных (*2*) и местных (*3*) растений

Относительно содержания разных форм азота обнаружена такая же закономерность (рис. 2). Количество общего и белкового азота в хвое южных растений несколько больше, чем северных и аборигенных. Наименьшее количество общего азота обнаружено у местных хвойных. Следовательно, в хвое менее приспособленных южных растений количество азота выше.

Более заметная убыль органического азота у северных представителей, по всей вероятности, связана с регрессивным азотным обменом вследствие ослабления обменных связей между корнями и листьями в

период зимы. Эта зависимость экспериментально установлена у листопадных форм ([11]). Учитывая это обстоятельство, мы определили также содержание аммиака в хвое и у опытных интродуцентов (рис. 2). При этом выяснилось, что его у растений местного происхождения меньше, чем у северных и южных. Этот показатель регрессивного азотного обмена растений является своего рода характеристикой приспособляемости растений к условиям существования.

Аммиак, образующийся в растительном организме, при дезаминировании аминокислот обнаруживается в растениях в весьма незначительных количествах, более высокие его концентрации ядовиты для растительных тканей. Следовательно, повышенное содержание аммиака в хвое северных и южных растений говорит об их полной приспособленности к местным условиям.

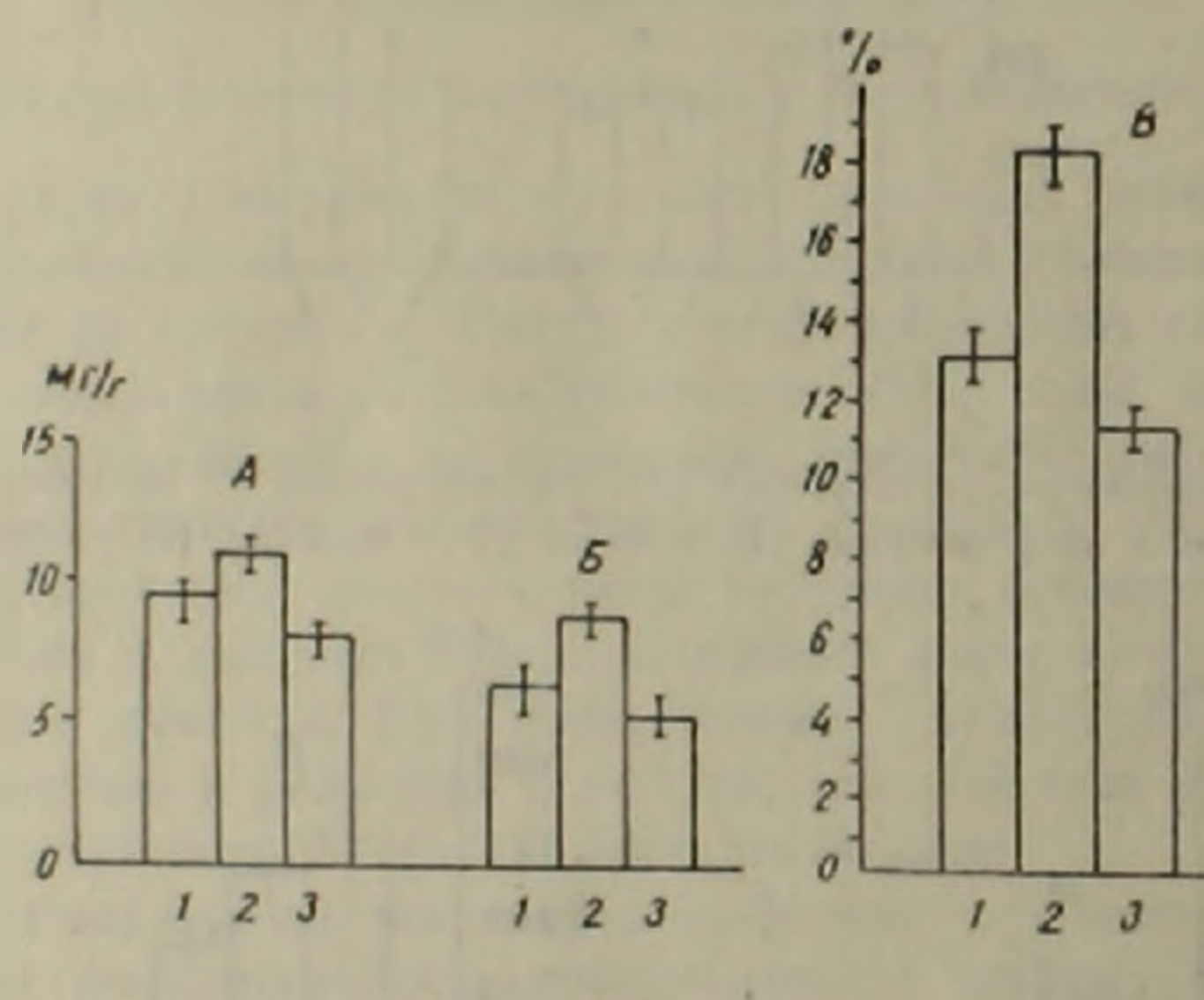


Рис. 3. Содержание общего (*А*), органического (*Б*) фосфора и водоудерживающая способность хвои (*В*) северных (*1*), южных (*2*) и местных (*3*) растений

Данные о содержании фосфорорганических соединений в хвое опытных растений (рис. 3) показывают, что максимальное количество общего и органического фосфора находится в растениях южного происхождения. Следовательно, в данном случае обнаружена такая же закономерность, как и в отношении азота.

Южные, менее приспособленные к нашим условиям виды, накапливая большое количество органических соединений, как бы аккумулируют энергию для перенесения зимних неблагоприятных климатических условий.

Интересные данные получены П. И. Таргон и др. ([12]) при изучении водного режима и содержания фосфорных соединений у древесных интродуцентов. Ими выяснено наличие прямой связи между содержанием органического фосфора и водным режимом: листья растений, содержащих большое количество органического фосфора, обладают

повышенной стойкостью к обезвоживанию. В нашем случае обнаружена такая же закономерность: хвоя растений южного происхождения, содержащая большее количество фосфорорганических соединений, обладает повышенной водоудерживающей способностью (рис. 3).

По данным ряда авторов ([13,14] и др.) водоудерживающая способность тканей связана со структурированностью воды и по этому показателю можно судить об устойчивости растений к неблагоприятным факторам среды. По нашим данным, южные растения обладают повышенной водоудерживающей способностью, что дает возможность переносить неблагоприятные для них условия Ереванского ботанического сада.

При определении содержания хлорофилла и прочности его связи с липопротеидным комплексом листа (рис. 4) выяснилось, что в хвое растений южного происхождения происходит более интенсивное накопление зеленых пигментов в период осеннего закаливания по сравнению с северными и местными растениями.

Прочная связь хлорофилла с белком—показатель его устойчивости к неблагоприятным условиям.

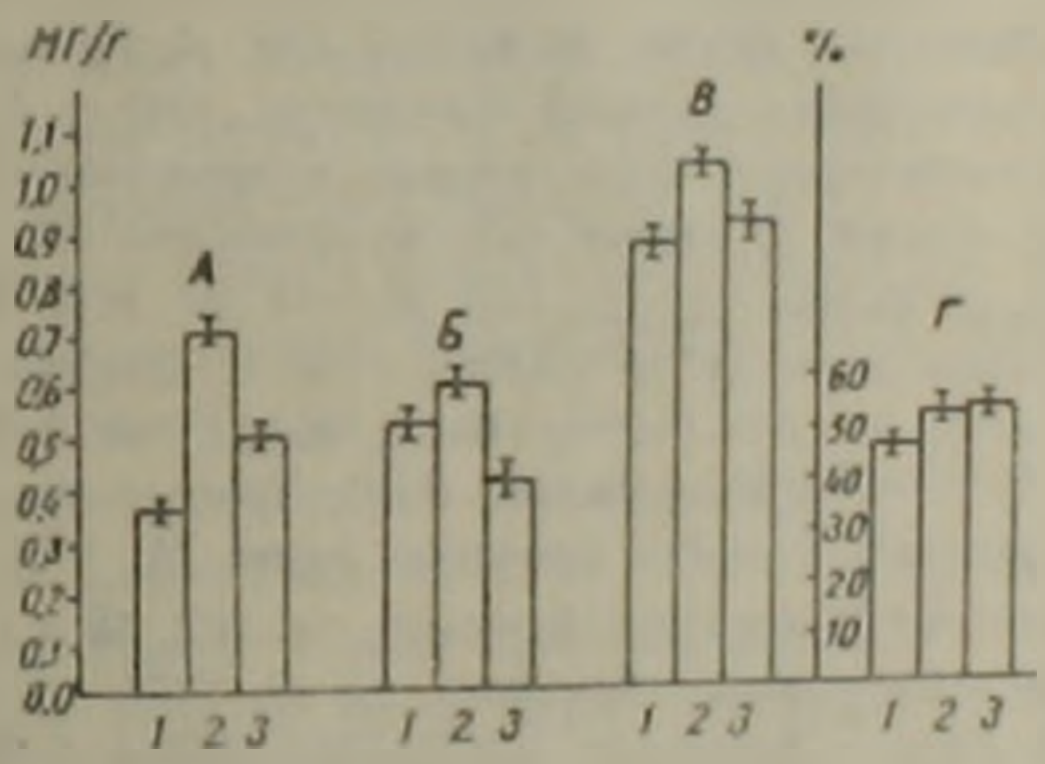


Рис. 4. Содержание слабосвязанного (*А*), прочносвязанного (*Б*), суммы (*В*) хлорофиллов и прочность ее связи с липопротеидным комплексом (*Г*) в хвое северных (*1*), южных (*2*) и местных (*3*) растений.

Таким образом, приспособительная реакция интродуцентов выражается в мобилизации внутренних возможностей, в первую очередь, высокоэнергетических соединений для поднятия устойчивости к новым неблагоприятным условиям. С этой точки зрения южные растения по сравнению с северными, будучи менее приспособленными к условиям Ереванского ботанического сада, проявляют большую пластичность в отношении подготовки к зимним неблагоприятным условиям умеренных широт. Аборигенные же виды будучи приспособленными к местным условиям не нуждаются в столь заметной физиологической перестройке.

Институт ботаники
Академии наук Армянской ССР

Վ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ս. Հ. ՁԱՓԱՐՅԱՆ

Երևանի բուսաբանական այգու ձմեռվա պայմանների հանդեպ մի քանի ինտրոդուկցված փշատերևների ռեակցիայի մասին

Ոառային և թփային տեսակների հարմարողականությունը միջավայրի նոր պայմաններին, ինչպես հայտնի է, արտահայտվում է բազմաթիվ ֆիզիոլոգիական դրսևորումներով, սկսած ածխաջրատների, վերջացրած ջրի տարբեր ձևերի քանակական փոփոխությամբ։ Ֆիզիոլոգիական ցուցանիշների փոփոխության հարմարողական բնույթը ավելի ակնհայտ է դառնում, երբ ուսումնասիրվում են միևնույն պայմաններում աճող տարբեր աշխարհագրական գոտիներից ինտրոդուկցված բույսեր։ Այս ուղղությամբ կատարված փորձերը հարավային, տեղական և հյուսիսային ծագում ունեցող մի շարք փշատերևների վրա ցույց են տվել, որ ավելի քիչ հարմարված հարավային բույսերը կուտակում են ավելի շատ մեծ էներգիա պարունակող միացություններ ձմռադիմացկանության բարձրացման նպատակով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. А. Генкель*, «Вести АН СССР», № 8, 1948. [2] *И. И. Туманов*, Физиологические основы зимостойкости культурных растений, Сельхозгиз, 1940. [3] *Л. И. Сергеева, В. К. Мельников*, Морфо-физиологическая периодичность и зимостойкость древесных растений. Уфа, 1961. [4] *Л. А. Иванов*, О водном режиме древесных пород зимой, Изд. Лесн. ин-та, в. 32, 1925. [5] *Д. В. Гирник*, Труды и-та леса, т. 27, Изд. АН СССР, М., 1955. [6] *А. Д. Тарабрин*, «Лесной журнал», № 2, 1968. [7] *М. В. Шкутко, Е. Е. Чакалипская, А. А. Чахоуска*, «Известия АН БССР», сер. биол., № 4, 1969. [8] *О. П. Осипова*, ДАН СССР, т. 57, в. 8 (1947). [9] *А. Н. Белозерский, И. И. Проскуряков*, Практическое руководство по биохимии растений, Гос. изд. Советская наука, М., 1951. [10] *O. H. Lowry, J. A. Lopez*. The Journal of Biological chemistry, v. 162, № 3 (1946). [11] *В. О. Казарян, Г. Е. Вартанян*, «Биол журн. Армении», № 10, 1977. [12] *П. Г. Таргон, М. Г. Добровольская, Ж. Ф. Грубая*, Бюллетень ГБС, в. 105 (1977). [13] *И. И. Туманов, Т. И. Трунова*, Физ. растений, т. 4, в. 5 (1957). [14] *В. В. Гриненко*, О способах регулирования водного режима растениями в связи с их устойчивостью к засухе. В кн. «Водный режим в связи с обменом веществ и продуктивностью», М., Изд. АН СССР, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 595.765 43

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хизорян

Новый вид жука-точильщика из Таджикистана (Coleoptera, Anobiidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 22/XI 1977)

Xyletinus (Calypterus) tadzhika Iablokoff-Khnzorian sp. nov.

Таджикистан: Ванч (Бадахшан), на горном склоне в полынной полупустыне на высоте около 2400 *м*, 18/VI 1975, голотип, ♀, в коллекциях Института зоологии АН Армянской ССР.

Тело одноцветно светло каштаново-желтое, усики черные, их первый членик и ротовые органы желтые, щупики и ноги бурозато-желтые, волосистость светлая. Длина 4 *мм*. Рис. 1,*а*.

Лоб выпуклый, мелко густо и поверхностно точечный на блестящем шагренированном фоне. Наличник за маленькой верхней губой с вырезанным передним краем. Глаза цельные, мелкие, невыступающие, в 6 раз уже лба (при обмере спереди). Челюстные и губные щупики узкие с косо усеченной вершиной. Усики (рис. 1,*б*) пильчатые, их первый членик с цельным продольным черным кантом, второй слегка длиннее ширины, к вершине вздут, третий вчетверо длиннее ширины, к вершине слегка зубцевидно расширен, четвертый равносторонне треугольный, последующие, каждый, с острым зубцом, края которого прямолинейные, последний узко ланцетовидный.

Переднеспинка колоколообразная с равномерно закругленным боковым кантом, ее передние углы тупые с закругленной вершиной, боковой скат спадает косо прямолинейно, диск выпуклый, очень густо и мелко точечный и тонко прилегающе, очень коротко волосистый на гладком фоне, без более крупных точек к середине. Боковой кант без бахромки волосков. Щиток треугольный, голый, густоточечный. Надкрылья (со щитком) в 1,6 раза длиннее общей ширины, в такой же точечности, как переднеспинка, очень нежно и густо поперечно штрихованные с правильными цельными тонкими неточечными бороздками (от точек местами заметны лишь следы). Волосистость густая, очень короткая, всюду зачесана назад. Ноги узкие. Задние лапки в 1,3 раза короче голеней, их первый членик втрое короче лапки. Коготки простые. Заднегрудь

с цельной продольной бороздкой без киля. Первый видимый стернит брюшка с параболически закругленной передней лопастью и плоским задним краем.

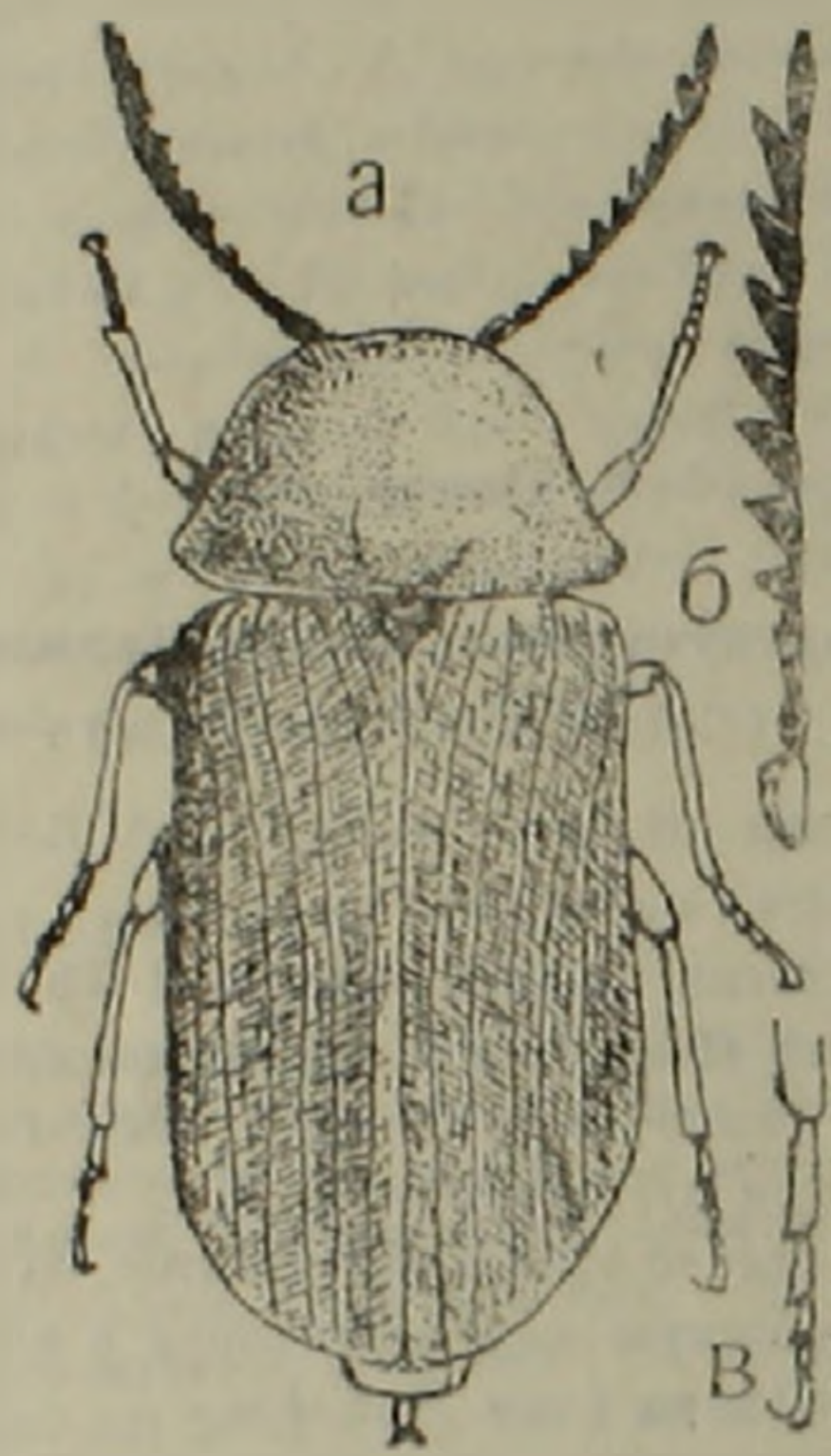


Рис. 1. Xyletinus tadzhika Khnz.
а—габитус; *б*—левый усик; *в*—левая задняя лапка

Этот вид принадлежит к подроду Calypterus Mulsant et Godart рода Xyletinus Latr., насчитывающему вместе с ним 5 палеарктических видов, в том числе 2 с Канарских островов. От 2 прочих видов новый вид можно отличить следующим образом:

1(2) На надкрыльях волосистость на двух первых промежутках вдоль шва зачесана косо, почти перпендикулярно к шву, точечность рядов крупная. Надкрылья в 1,6—2 раза длиннее общей ширины. Третий членик усиков треугольный, вдвое длиннее ширины. Длина 3,3—3,8 *мм*. Средиземноморье. . . . . bucephalus Ill.

2(1) На надкрыльях волосистость всюду зачесана назад.

3(4) Надкрылья сильно уплощенные, в 2,3 раза длиннее общей ширины, с цельными точечными рядами. Задний край первого видимого стернита брюшка по середине выпуклый. Длина 5,8 *мм*. Монголия . . . . . elongatus Logvinovskij

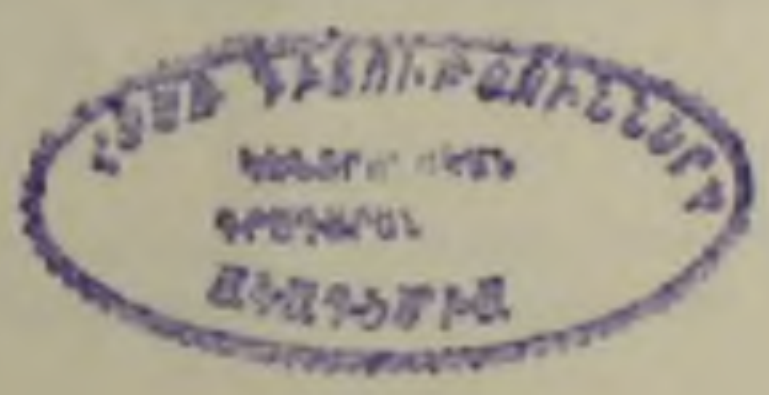
4(3) Надкрылья выпуклые, в 1,6 раза длиннее общей ширины, с тонкими цельными неточечными бороздками. Задний край первого видимого стернита брюшка плоский по всей длине. Третий чле-

чик усиков вчетверо длиннее ширины. Длина 4 *мм*. Таджикистан . . . . . tadzhika Khnz. sp. nov.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՅԱԲԼՈԿՈՎ-ԽԶՈՐՅԱՆ

Փայտափորիկ բզեզի նոր տեսակ Տաջիկստանից

(Coleoptera, Anobiidae)

Նկարագրված է Xyletinus (Calypterus) tadzhika Khnz. sp. nov. *նոր տեսակ՝ հավաքված Բադախշանի Վանչ գյուղի մոտակայքից։ Այս տեսակը* Calypterus *ենթասեռի առաջին ներկայացուցիչն է ՍՍՀՄ-ում։*