

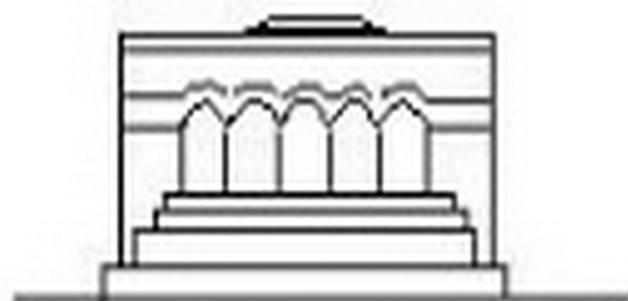
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1974

Э. Х. ГРИГОРЯН

### К ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ, СОЕДИНЁННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ УПРУГОЙ НАКЛАДКОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Рассматривается динамическая контактная задача для двух полу- плоскостей, сцепленных между собой на конечном отрезке своих границ посредством упругой накладки малой толщины. Решение задачи сводится к решению системы интегральных уравнений, которая при помощи многочленов Якоби затем сводится к бесконечной системе линейных уравнений. Доказывается, что эта бесконечная система уравнений квазивполне регулярна. Одновременно с этим для ядер интегральных уравнений получены простые аналитические выражения, вполне допустимые для практических целей и сколь угодно мало отличающиеся от истинного.

Рассматриваемая задача связана с важными для инженерной практики задачами о передаче нагрузки к упругим телам.

#### 1. Постановка задачи. Вывод разрешающего уравнения

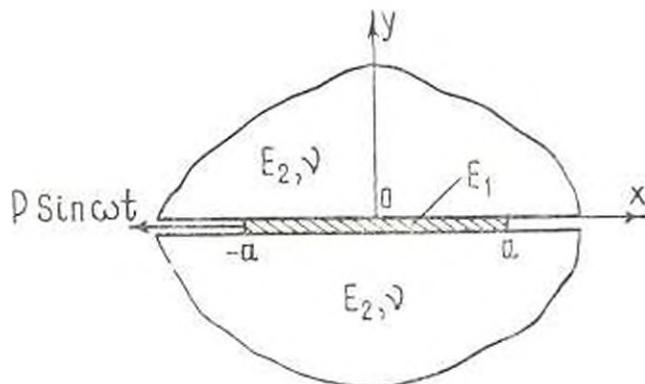
Пусть две полуплоскости с одинаковыми упругими постоянными сцеплены между собой на конечном отрезке  $[-a, a]$  своих границ упругой накладкой малой толщины  $h$  и находятся в условиях плоской деформации. Требуется определить закон распределения контактных напряжений вдоль отрезка соединения упругой накладки с полуплоскостями, когда к одному из концов накладки приложена сосредоточенная горизонтальная гармоническая сила  $P \sin \omega t$  (фиг. 1). Для простоты выкладок в дальнейшем эту силу возьмем в виде  $P e^{-i \omega t}$ . Очевидно, что нужное решение затем можно получить элементарным способом.

Вследствие малости толщины накладки, как в [1, 2], считается, что ее толщина в процессе деформации не изменяется. В рамках этого предположения здесь учитываются нормальные контактные напряжения. С другой стороны, считается, что под действием только горизонтальных сил накладка находится в одноосном напряженном состоянии.

Тогда, как и в работе [3], для определения амплитуды горизонтальных перемещений  $u_0^{(1)}(x)$  получим граничную задачу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_0^{(1)}(x)}{dx^2} + k^2 u_0^{(1)}(x) &= -\frac{2\tau_0(x)}{E_1 h}, & k = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, & -a < x < a \\ \frac{du_0^{(1)}(x)}{dx} \Big|_{x=-a} &= \frac{P}{E_1 h}, & \frac{du_0^{(1)}(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\tau_0(x)$  — амплитуда неизвестных тангенциальных контактных напряжений,  $E_1$  — модуль упругости материала накладки,  $\rho_1$  — плотность материала накладки.



Фиг. 1.

Для амплитуды же вертикальных перемещений, согласно сделанному предположению, будем иметь условие

$$v^{(1)}(x) = 0$$

Следует отметить, что при этом предполагалось наличие режима установившихся колебаний накладки, а именно:

$$u^{(1)}(t, x) = u^{(1)}(x) e^{-i\omega t}, \quad v^{(1)}(t, x) = v^{(1)}(x) e^{-i\omega t}$$

Следуя методике, указанной в работах [3, 4], для амплитуд горизонтальных и вертикальных перемещений точек границы упругой полуплоскости, когда на конечном отрезке  $[-a, a]$  границы полуплоскости одновременно действуют горизонтальные и вертикальные гармонические силы интенсивностей амплитуд  $\tau_0(x)$  и  $q_0(x)$  соответственно, можно получить следующие выражения:

$$u^{(2)}(ax) = \frac{a}{\rho_2} \int_{-1}^1 K(k_2 a |x-s|) \tau_0(as) ds - \frac{a}{\rho_2} \int_{-1}^1 \Pi[k_2 a |x-s|] q_0(as) ds \quad (1.2)$$

$$v^{(2)}(ax) = \frac{a}{\rho_2} \int_{-1}^1 K^3(k_2 a |x-s|) q_0(as) ds + \frac{a}{\rho_2} \int_{-1}^1 \Pi[k_2 a |x-s|] \tau_0(as) ds$$

где

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - s^2 - 1 e^{-i\omega s}}{(2s^2 - 1)^2 - 4s^2 |1 - s^2 - 1| (s^2 - \epsilon^2)} ds, \quad k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}$$

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{is(2s^2 - 1 - 2i) \sqrt{(s^2 - 1)(s^2 - z^2)} e^{-isz} ds}{(2s^2 - 1)^2 - 4s^2 + (s^2 - 1)(s^2 - z^2)}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2 - 2\nu_2}}$$

$$K^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 \sqrt{s^2 - z^2} e^{-isz} ds}{(2s^2 - 1)^2 - 4s^2 + (s^2 - 1)(s^2 - z^2)} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu_2}{2(1 - \nu_2)}}$$

а  $\nu_1, \nu_2$  — постоянные Ляме упругой полуплоскости,  $\rho_1$  — плотность материала упругой полуплоскости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Далее, на отрезке соединения накладки с полуплоскостями должно выполняться условие

$$u_1^{(1)}(ax) = u_1^{(2)}(ax), \quad u_2^{(1)}(ax) = u_2^{(2)}(ax), \quad -1 \leq x \leq 1$$

которое в сочетании с соотношениями (1.1) и (1.2) задачу определения амплитуд  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$  неизвестных тангенциальных и нормальных контактных напряжений сводит к решению системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 [K(k_2^* |x-s|) - 2\nu^* G(k^*x, k^*s)] z(s) ds \\ &= \int_{-1}^1 \Pi[k_2^*(x-s)] z(s) ds = \frac{\cos[k^*(x-1)]}{k^* \sin 2k^*} \quad (1.3) \\ & \int_{-1}^1 K^*(k_2^* |x-s|) z(s) ds - \int_{-1}^1 \Pi[k_2^*(x-s)] z(s) ds = 0 \end{aligned}$$

где положено

$$z(x) = \frac{\tau_0(ax)u}{\lambda^* \rho}, \quad \nu(x) = \frac{q_0(ax)u}{\lambda^* \rho}, \quad \nu^* = \frac{\nu_2 \nu}{E_1 h}, \quad k_2^* = ak_1, \quad k^* = ak$$

$$G(k^*x, k^*s) = \begin{cases} \frac{1}{k^* \sin 2k^*} \cos[k^*(x-1)] \cos[k^*(s-1)] & x < s \\ \frac{1}{k^* \sin 2k^*} \cos[k^*(s-1)] \cos[k^*(x-1)] & x > s \end{cases}$$

Структуры ядер, которые можно получить изложенным в работе [4] способом, даются формулами

$$\begin{aligned}
 K(x) = & \frac{1}{2(1-z^2)\pi} \ln \frac{1}{|k_2 x|} - \frac{A}{2(1-z^2)} - \\
 & - \frac{1+z^2}{16(1-z^2)^2} (k_2 x)^2 \left( \frac{1}{\pi} \ln |k_2 x| - A \right) - \frac{1+z^2}{32\pi(1-z^2)^2} (k_2 x)^3 - \\
 & - \frac{z^2 - 2(z^2 + z^4 + z^2) - 3}{768(1-z^2)^2} (k_2 x)^4 \left( \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|k_2 x|} + A + \frac{25}{12\pi} \right) - \\
 & - \frac{i(k_2 x)^5}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_1(s) e^{-ik_2 x s} ds. \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K^*(x) = & \frac{1}{2(1-z^2)\pi} \ln \frac{1}{|k_2^* x|} - \frac{B}{2(1-z^2)} - \\
 & - \frac{3-4z^2-3z^4}{16(1-z^2)^2} (k_2^* x)^2 \left( \frac{1}{\pi} \ln |k_2^* x| - B \right) - \frac{3(3-4z^2+3z^4)}{32\pi(1-z^2)^2} (k_2^* x)^3 - \\
 & + \frac{z^2 - 2z^4 - 22z^2 - 18z^4 - 11}{768(1-z^2)^2} (k_2^* x)^4 \left( \frac{1}{\pi} \ln |k_2^* x| + B + \frac{25}{12\pi} \right) + \\
 & + \frac{i(k_2^* x)^5}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_2(s) e^{-ik_2^* x s} ds. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi(k_2 x) = & - \frac{z^2}{4(1-z^2)} \operatorname{sign} x - \frac{1-z^2-3z^2+z^4}{16(1-z^2)^2} (k_2 x)^2 \operatorname{sign} x + \\
 & + \frac{2z^{10}-5z^2-2z^2-3}{1536(1-z^2)^2} (k_2 x)^4 \operatorname{sign} x - \frac{i(k_2 x)^5}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_3(s) e^{-ik_2 x s} ds. \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Здесь  $q_1(x)$ ,  $q_2(x)$  и  $q_3(x)$  — функции, суммируемые на вещественной оси ( $-\infty, \infty$ ), а

$$A = -\frac{C}{\pi} - \frac{2(1-z^2)}{\pi} \int_0^{\infty} k(s) ds - \frac{2(1-z^2)}{\pi} \int_0^{\infty} \left| k(s) - \frac{1}{2(1-z^2)} \frac{1}{s} \right| ds$$

$$B = -\frac{C}{\pi} - \frac{2(1-z^2)}{\pi} \int_0^{\infty} k^*(s) ds - \frac{2(1-z^2)}{\pi} \int_0^{\infty} \left| k^*(s) - \frac{1}{2(1-z^2)} \frac{1}{s} \right| ds$$

$$k(s) = \frac{1}{(2s^2-1)^2-4s^2} \sqrt{(s^2-1)(s^2-z^2)}$$

$$k^*(s) = \frac{1}{(2s^2-1)^2-4s^2} \sqrt{(s^2-1)(s^2-z^2)}$$

$C$  — известная постоянная Эйлера.

Таким образом, на основании этих формул имеем следующие представления:

$$K(k_2^*x) = -\frac{1}{2(1-\epsilon^2)\pi} \ln \frac{1}{|k_2^*x|} + R(k_2^*x)$$

$$\Pi(k_2^*x) = -\frac{\epsilon^2}{4(1-\epsilon^2)} \operatorname{sign} x - D(k_2^*x)$$

$$K^*(k_2^*x) = -\frac{1}{2(1-\epsilon^2)\pi} \ln \frac{1}{|k_2^*x|} + R^*(k_2^*x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.7)$$

где функции  $R(k_2^*x)$ ,  $R^*(k_2^*x)$  и  $D(k_2^*x)$  обладают тем свойством, что вторые производные этих функций квадратично суммируемы на интервале  $[-1, 1]$ .

Отметим, что в этих формулах функции  $K(k_2^*x)$ ,  $K^*(k_2^*x)$  и  $\Pi(k_2^*x)$  представлены в виде суммы своих сингулярных и регулярных частей.

Далее имеем

$$\frac{\partial G(k^*x, k^*s)}{\partial x} = G^*(k^*x, k^*s) \cdot H(x-s) \quad (1.8)$$

$$G^*(k^*x, k^*s) = \begin{cases} \frac{1}{\sin 2k^*} \sin [k^*(x-1)] \cos [k^*(s+1)], & x < s \\ \frac{1}{\sin 2k^*} \cos [k^*(s-1)] \sin [k^*(x-1)] - 1, & x > s \end{cases}$$

где  $H(x)$  — известная функция Хевисайда.

Последняя функция непрерывна в квадрате  $1 < x, s < 1$  и имеет по переменным  $x$  и  $s$  непрерывные в том же квадрате частные производные.

Приняв во внимание (1.7), (1.8) и дифференцируя обе части системы уравнений (1.3), относительно неизвестных функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{s-x} - \epsilon^2 \psi(x) - 2(1-\epsilon^2) \int_{-1}^1 \frac{\partial R[k_2^*(x-s)]}{\partial x} \varphi(s) ds - \\ - 2(1-\epsilon^2) \int_{-1}^1 \frac{\partial D[k_2^*(x-s)]}{\partial x} \psi(s) ds - \\ - 2(1-\epsilon^2) \epsilon^2 \int_{-1}^1 G^*(k^*x, k^*s) \varphi(s) ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2(1-\varepsilon^2)\varepsilon^2 \int_{-1}^1 z(s) ds = 2(1-\varepsilon^2) \frac{\sin[k^*(x-1)]}{\sin 2k^*} \\
 & \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{z(s) ds}{s-x} = z_1(x) - 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 \frac{\partial R^* [k^*(x-s)]}{\partial x} z(s) ds = \\
 & = 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 \frac{\partial D[k^*(x-s)]}{\partial x} z(s) ds = 0 \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Входящие в эту систему первые интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, решение динамической контактной задачи для двух полуплоскостей, сцепленных между собой на конечной части своих границ упругой накладкой малой толщины, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.9).

## 2. Сведение системы уравнений (1.9) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

Чтобы систему уравнений (1.9) свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, предварительно придадим ей удобный вид. С этой целью упомянутую систему запишем относительно действительных и мнимых частей неизвестных функций, положим

$$z = z_1 + iz_2, \quad \bar{z} = z_1 - iz_2.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{z_2(s) ds}{s-x} = z_2(x) - 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 [r_1(x-s) z_1(s) - r_2(x-s) z_2(s)] ds + \\
 & + 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 [d_1(x-s) z_1(s) - d_2(x-s) z_2(s)] ds = \\
 & = 4(1-\varepsilon^2) r^* \int_{-1}^1 (i^* (k^* x, k^* s) z_1(s)) ds - 4(1-\varepsilon^2) r^* \int_{-1}^1 z_2(s) ds = \\
 & = 2(1-\varepsilon^2) \frac{\sin[k^*(x-1)]}{\sin 2k^*} \\
 & \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{z_1(s) ds}{s-x} = z_1(x) - 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 [r_1'(x-s) z_1(s) -
 \end{aligned}$$

$$-r_2^*(x-s)z_2(s)] ds - 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 [d_1(x-s)z_1(s) - d_2(x-s)z_2(s)] ds = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{z_2(s) ds}{s-x} = \varepsilon^2 z_2(x) - 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 [r_2(x-s)z_1(s) +$$

$$+ r_1(x-s)z_2(s)] ds + 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 [d_1(x-s)z_2(s) +$$

$$+ d_2(x-s)z_1(s)] ds = 4(1-\varepsilon^2)\varepsilon \int_{-1}^1 G^*(k^*x, k^*s) z_2(s) ds$$

$$= 4\varepsilon^2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 \varphi_2(s) ds$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{z_2(s) ds}{s-x} = \varepsilon^2 z_2(x) - 2(1-\varepsilon^2)$$

$$\int_{-1}^1 [r_2^*(x-s)z_1(s) - r_1^*(x-s)z_2(s)] ds +$$

$$+ 2(1-\varepsilon^2) \int_{-1}^1 [d_1(x-s)z_2(s) + d_2(x-s)z_1(s)] ds = 0$$

где

$$r_1(x) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial R(k_1^*x)}{\partial x} \right], \quad r_2(x) = \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial R(k_2^*x)}{\partial x} \right], \quad r_1^*(x) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial R^*(k_1^*x)}{\partial x} \right]$$

$$r_2^*(x) = \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial R^*(k_2^*x)}{\partial x} \right], \quad d_1(x) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial D(k_1^*x)}{\partial x} \right], \quad d_2(x) = \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial D(k_2^*x)}{\partial x} \right]$$

Теперь умножим первое уравнение на мнимую единицу  $i$  и сложим со вторым, а третье уравнение после умножения на  $i$  сложим с четвертым. В результате получим уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(s) ds}{s-x} = iz^2\Phi(x) - \int_{-1}^1 p_1(x,s)\Phi(s) ds - \int_{-1}^1 p_2(x,s)\bar{\Phi}(s) ds +$$

$$+ 2(1-\varepsilon^2)\varepsilon \int_{-1}^1 \bar{\Phi}(s) ds - 2(1-\varepsilon^2)\varepsilon^* \int_{-1}^1 \Phi(s) ds +$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 p_1(x, s) W(s) ds - \int_{-1}^1 p_1(x, s) \bar{W}(s) ds = L(x) \quad (2.1) \\
 &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{W(s) ds}{s-x} - iz^2 W(x) - \int_{-1}^1 p_2(x, s) W(s) ds - \int_{-1}^1 p_2(x, s) \bar{W}(s) ds + \\
 &+ 2(1-z^2) \int_{-1}^1 \bar{W}(s) ds - 2(1-z^2) \int_{-1}^1 W(s) ds - \\
 &- \int_{-1}^1 p_3(x, s) W(s) ds - \int_{-1}^1 p_3(x, s) \bar{W}(s) ds = 0
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi(x) &= \varphi_1(x) - \bar{\varphi}_2(x), \quad W(x) = \varphi_1(x) - \bar{\varphi}_2(x) \\
 p_1(x, s) &= -(1-z^2)[r_1^*(x-s) - r_1(x-s) - 2i^2 G^*(k^*x, k^*s) - 2id_1(x-s)] \\
 p_2(x, s) &= (1-z^2)[r_1^*(x-s) - r_1(x-s) - 2i^2 G^*(k^*x, k^*s)] \\
 p_3(x, s) &= (1-z^2)[r_2^*(x-s) - r_2(x-s) - 2id_2(x-s)] \\
 p_4(x, s) &= (1-z^2)[r_2^*(x-s) - r_2(x-s)] \\
 L(x) &= i \frac{2(1-z^2)}{\sin 2k^*} \sin[k^*(x-1)]
 \end{aligned}$$

Очевидно, что последняя система сингулярных интегральных уравнений эквивалентна системе (1.9).

Решения системы уравнений (2.1) ищем в виде

$$\Phi(x) = w(x) \left( a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right)$$

$$W(x) = w(x) \left( b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - i, \quad \beta = \frac{1}{2} - i, \quad w = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-z}{1-z^2} \quad (2.2)$$

где  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  — полиномы Якоби, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $w(x) = (1-x)(1+x)$ .

Подставив выражения  $\Phi(x)$  и  $W(x)$  из (2.2) в (2.1) и пользуясь соотношением [4, 5]

$$-i \operatorname{th} \pi \gamma w(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(s)}{s-x} P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \pi \gamma} P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)$$

известным способом относительно коэффициентов  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\bar{b}_n\}_{n=1}^{\infty}$  получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_m a_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{mn}^{(1)} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{mn}^{(2)} \bar{a}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{mn}^{(3)} b_n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{mn}^{(4)} \bar{b}_n = a_0 \gamma_m^{(1)} + \bar{a}_0 \gamma_m^{(2)} - b_0 \gamma_m^{(3)} - \bar{b}_0 \gamma_m^{(4)} + \gamma_m \\ \xi_m b_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{mn}^{(1)} b_n &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{mn}^{(2)} \bar{b}_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{mn}^{(3)} a_n - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{mn}^{(4)} \bar{a}_n = b_0 \gamma_m^{(1)} + \bar{b}_0 \gamma_m^{(2)} + a_0 \gamma_m^{(3)} + \bar{a}_0 \gamma_m^{(4)} \\ \xi_m \bar{a}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{K}_{mn}^{(1)} \bar{a}_n &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{K}_{mn}^{(2)} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{K}_{mn}^{(3)} b_n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{K}_{mn}^{(4)} \bar{b}_n = \bar{a}_0 \gamma_m^{(1)} + a_0 \gamma_m^{(2)} - b_0 \gamma_m^{(3)} - \bar{b}_0 \gamma_m^{(4)} + \gamma_m \\ \xi_m \bar{b}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{K}_{mn}^{(1)} \bar{b}_n &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{K}_{mn}^{(2)} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{K}_{mn}^{(3)} a_n - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{K}_{mn}^{(4)} \bar{a}_n = \bar{b}_0 \gamma_m^{(1)} + b_0 \gamma_m^{(2)} + a_0 \gamma_m^{(3)} + \bar{a}_0 \gamma_m^{(4)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi_m = \frac{\Gamma(m-1+\alpha) \Gamma(m+1+\beta)}{(m!)^2 \operatorname{ch} \pi \gamma}$$

$$K_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-s^2) w(s) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(s) \frac{\partial P_1(x, s)}{\partial x} ds \Big|_{w^{-1}(x)}$$

$$\times P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) dx - (1-x^2) x \int_{-1}^1 (1-x^2) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) dx$$

$$\begin{aligned}
K_{mn}^{(2)} &= (1-s^2)^k \int_{-1}^1 w^{-2}(x) P_{n-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) P_{m-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) dx - \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w^{-1}(s) P_{n-1}^{(\alpha-2\beta)}(s) \frac{\partial p_1(x, s)}{\partial s} ds \Big| w^{-1}(x) P_{n-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) dx \\
K_{mn}^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-s^2) w(s) P_{n-1}^{(\alpha-2\beta)}(s) \frac{\partial p_2(x, s)}{\partial s} ds \Big| w^{-1}(x) P_{n-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) dx \\
K_{mn}^{(4)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w^{-1}(s) P_{n-1}^{(\alpha-2\beta)}(s) \frac{\partial p_1(x, s)}{\partial s} ds \Big| w^{-1}(x) P_{n-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) dx \\
\mathcal{L}_m^{(1)} &= \int_{-1}^1 \left[ 2(1-s^2)^k \int_{-1}^1 w(s) ds - \int_{-1}^1 w(s) p_1(x, s) ds \right] w^{-1}(s) P_{m-1}^{(\alpha-2\beta)}(s) dx \\
\mathcal{L}_m^{(2)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-s)^k (1-s)^k p_2(x, s) ds - 2(1-s^2)^k \\
&= \int_{-1}^1 (1-s)^k (1-s)^k ds \Big| w^{-1}(x) P_{m-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) dx \\
\mathcal{L}_m^{(3)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w(s) p_2(x, s) ds \Big| w^{-1}(x) P_{m-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) dx \\
\mathcal{L}_m^{(4)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-s)^k (1-s)^k p_4(x, s) \Big| w^{-1}(x) P_{m-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) dx \\
\gamma_m &= \int_{-1}^1 \frac{2(1-s^2) \sin[k^2(x-1)]}{\sin 2k} w^{-1}(x) P_{m-1}^{(\alpha-2\beta)}(x) dx
\end{aligned}$$

Теперь произведем замену переменных в (2.3), положим

$$a_m = m^{2-\varepsilon} X_m, \quad b_m = m^1 Y_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число. После некоторых простых выкладок получим

$$\begin{aligned}
 X_m + \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} K_{mn}^{(1)} X_n - \frac{1}{n^2} K_{mn}^{(2)} \bar{X}_n + \frac{1}{n^2} K_{mn}^{(3)} Y_n + \frac{1}{n^2} K_{mn}^{(4)} \bar{Y}_n \right) = \\
 = \zeta_m m^2 (a_0 \gamma_m^{(1)} + \bar{a}_0 \gamma_m^{(2)} - b_0 \gamma_m^{(3)} - \bar{b}_0 \gamma_m^{(4)} + \gamma_m) \\
 Y_m + \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} K_{mn}^{(1)} Y_n - \frac{1}{n^2} K_{mn}^{(2)} \bar{Y}_n - \frac{1}{n^2} K_{mn}^{(3)} X_n - \frac{1}{n^2} K_{mn}^{(4)} \bar{X}_n \right) = \\
 = \zeta_m m^2 (b_0 \gamma_m^{(1)} + \bar{b}_0 \gamma_m^{(2)} + a_0 \gamma_m^{(3)} + \bar{a}_0 \gamma_m^{(4)}) \quad (2.4) \\
 \bar{X}_m + \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \bar{K}_{mn}^{(1)} \bar{X}_n + \frac{1}{n^2} \bar{K}_{mn}^{(2)} X_n + \frac{1}{n^2} \bar{K}_{mn}^{(3)} \bar{Y}_n + \frac{1}{n^2} \bar{K}_{mn}^{(4)} Y_n \right) = \\
 = \zeta_m m^2 (\bar{a}_0 \bar{\gamma}_m^{(1)} + a_0 \bar{\gamma}_m^{(2)} - \bar{b}_0 \bar{\gamma}_m^{(3)} - b_0 \bar{\gamma}_m^{(4)} + \bar{\gamma}_m) \\
 \bar{Y}_m + \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \bar{K}_{mn}^{(1)} \bar{Y}_n - \frac{1}{n^2} \bar{K}_{mn}^{(2)} Y_n - \frac{1}{n^2} \bar{K}_{mn}^{(3)} \bar{X}_n - \frac{1}{n^2} \bar{K}_{mn}^{(4)} X_n \right) = \\
 = \zeta_m m^2 (\bar{b}_0 \bar{\gamma}_m^{(1)} + b_0 \bar{\gamma}_m^{(2)} + a_0 \bar{\gamma}_m^{(3)} + a_0 \bar{\gamma}_m^{(4)})
 \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\zeta_m = (\zeta_m m)^{-1} = O(1)$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Оказывается, что полученная бесконечная система линейных уравнений (2.4) квазиполне регулярна. Действительно, имея в виду асимптотическую формулу для многочленов Якоби [7]

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = \frac{1}{\Gamma(n)} K(\theta) \cos(N\theta + \delta) = O(n^{-\beta-1/2}), \quad n \rightarrow \infty$$

$$K(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-1/2} \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-1/2}$$

$$N(\theta) = n + \frac{\alpha - \beta + i}{2}, \quad \delta = -\frac{\pi}{2} \left( \alpha + \frac{1}{2} \right), \quad 0 < \theta < \pi$$

которая имеет место также при  $\text{Re}(\alpha, \beta) > -1$ , известным способом [8, 9, 4] можно показать, что суммы

$$S_m = \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (|K_{mn}^{(1)}| + |K_{mn}^{(2)}| + |K_{mn}^{(3)}| + |K_{mn}^{(4)}|)$$

при  $m \rightarrow \infty$  имеют порядок  $O(m^{-1/2-1})$ . Отсюда вытекает, что рассматриваемая бесконечная система линейных уравнений квазиполне регулярна.

Теперь отметим, что для определения  $a_0, b_0$  следует в выражении, полученном после подстановки (2.2) в первое уравнение системы (2.1), положить  $x = -1$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(1)} a_n - E_n^{(2)} \bar{a}_n + E_n^{(3)} b_n + E_n^{(4)} \bar{b}_n) = \\
& = -2i(1-z^2) - E_0^{(1)} a_0 - E_0^{(2)} \bar{a}_0 - E_0^{(3)} b_0 - E_0^{(4)} \bar{b}_0 \quad (2.5) \\
& \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{E}_n^{(1)} \bar{a}_n - \bar{E}_n^{(2)} a_n + \bar{E}_n^{(3)} \bar{b}_n - \bar{E}_n^{(4)} b_n) = \\
& = 2i(1-z^2) - \bar{E}_0^{(1)} \bar{a}_0 + \bar{E}_0^{(2)} a_0 - \bar{E}_0^{(3)} \bar{b}_0 + \bar{E}_0^{(4)} b_0
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
E_n^{(1)} &= \varepsilon_n P_n^{(\varepsilon, -\varepsilon)}(-1) + \int_{-1}^1 p_1(-1, s) w(s) P_n^{(\varepsilon, -\varepsilon)}(s) ds \\
E_n^{(2)} &= \int_{-1}^1 p_2(-1, s) (1-s)^{\varepsilon} (1+s)^{-\varepsilon} P_n^{(\varepsilon, -\varepsilon)}(s) ds \\
E_n^{(3)} &= \int_{-1}^1 p_3(-1, s) w(s) P_n^{(\varepsilon, \varepsilon)}(s) ds \\
E_n^{(4)} &= \int_{-1}^1 p_4(-1, s) (1-s)^{\varepsilon} (1+s)^{-\varepsilon} P_n^{(\varepsilon, \varepsilon)}(s) ds
\end{aligned}$$

Очевидно, что второе уравнение является сопряженным к первому уравнению.

После того как определены коэффициенты  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , неизвестные коэффициенты  $a_0$  и  $b_0$  определяются из уравнений (2.5).

### 3. Случай малого параметра $k_2$

В этом случае в представлениях (1.4), (1.5) и (1.6) пренебрегая членами порядка  $(k_2)^2 \ln k_2$  и имея в виду (1.3), для определения  $\varphi$  и  $\bar{\varphi}$  получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{s-x} = \varepsilon^{\varepsilon} \cdot (x) + \int_{-1}^1 [x_1(x-s) \ln|x-s| + x_2(x-s) |x-s|] \varphi(s) ds + \\
& + x_3 \int_{-1}^1 |x-s| \varphi(s) ds - 4(1-z^2) \varepsilon^{\varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{\partial G(k^{\varepsilon} x, k^{\varepsilon} s)}{\partial x} \varphi(s) ds = \\
& = \frac{2(1-z^2)}{\sin 2k^{\varepsilon}} \sin[k^{\varepsilon}(x-1)]
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{s-x} + i z^2 \varphi(x) - \int_{-1}^1 [a_1^*(x-s) \ln|x-s| + a_2^*(x-s)] \varphi(s) ds - \\ - z_2 \int_{-1}^1 |x-s| \varphi(s) ds = 0$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{1+z^2}{1-z^2} (k_2^*)^2, \quad \alpha_2 = d_1 + i d_2, \quad d_1 = z_1 (\pi A_1 + \ln|k_2^*| - 1) \\ d_2 = z_2 \pi A_2, \quad A_1 = \operatorname{Re} A, \quad A_2 = \operatorname{Im} A, \quad z_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{3-4z^2-3z^4}{1-z^2} (k_2^*)^2 \\ z_2 = d_1' + i d_2', \quad d_1' = z_1' (\pi B_1 + \ln|k_2^*| - 1) \\ d_2' = z_2' \pi B_2, \quad B_1 = \operatorname{Re} B, \quad B_2 = \operatorname{Im} B$$

Поступим совершенно аналогично изложенному выше, для  $\Phi$  и  $\Psi$  получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(s) ds}{s-x} - i z^2 \Phi(x) - \int_{-1}^1 F(x-s) \Phi(s) ds - \int_{-1}^1 F^*(x-s) \Phi(s) ds - \\ - \frac{d_2 - d_2'}{2} \int_{-1}^1 (x-s) \Phi(s) ds + \frac{d_2 - d_2'}{2} \int_{-1}^1 (x-s) \bar{\Psi}(s) ds - \\ - i \frac{2(1-z^2)}{\sin 2k^*} \sin[k^*(x-1)] \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi(s) ds}{s-x} - i z^2 \Psi(x) - \int_{-1}^1 F(x-s) \Psi(s) ds - \int_{-1}^1 F^*(x-s) \bar{\Psi}(s) ds - \\ + \frac{d_2 - d_2'}{2} \int_{-1}^1 (x-s) \Psi(s) ds - \frac{d_2' - d_2}{2} \int_{-1}^1 (x-s) \bar{\Phi}(s) ds = 0$$

где

$$F(x-s) = \frac{z_1 + z_2}{2} (x-s) \ln|x-s| + i z_1 |x-s| - \frac{d_1 - d_1'}{2} (x-s) - \\ - 2(1-z^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} G(k^* x, k^* s) \\ F^*(x-s) = \frac{z_1' - z_2'}{2} (x-s) \ln|x-s| - \frac{d_1' - d_1'}{2} (x-s) + \\ + 2(1-z^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} G(k^* x, k^* s)$$

Теперь, как и выше, можно получить квазиполне регулярную бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов разложения функций  $\Phi$  и  $\Psi$  по многочленам Якоби. Отметим, что вследствие простоты выражений ядер в этом случае можно получить численные результаты при  $0 < k_1 < \frac{1}{4}$  на ЭВМ.

В заключение автор сердечно благодарит Н. Х. Арутюняна за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт математики АН  
Армянской ССР

Поступила 11 VII 1974

Է. Խ. ԳՐԻԳՐԻԱՆ

ՎԵՐՉՈՒՄ ԳԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՎԵՐԱԳՐՈՎ ԻՄԵՅՈՒՆՑ ՇԵՏ ԻՄՔՏՎԱՆ ԵՐԿՈՒ  
ԿՐՈՆԱՐԲՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳԻՆՈՒԹՎԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՆԵ  
ԽՆՊԻՐ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկվում է դինամիկական կոնտակտային խնդիր երկու կիսաշարժվող թլուսների շամար, որոնք իրենց եզրագծերի վերջավոր շաղկապում միացված են միմյանց նեոֆորը շատաթվյան առաձգական վերադիրի միջոցով երկրի լուծումը բերվում է ինտեգրալ շաղաարումների սխեմայի լուծմանը, որը այնուհետև ճակդիրի բազմանդամների օգնությամբ բերվում է զծային շաղաարումների անվերջ սխեմայի կապացուցվում է, որ այդ անվերջ շաղաարումների սխեմայը բիպարիթոմիկ սեղսույլար է: Իրա նեո միաժամանակ ինտեգրալ շաղաարումների կարիզների շամար ստացված են պարզ անալիտիկ սրտաշաղաարվածներ, որոնք ցանկացած շաղապ սի: են ասարբերվում ճշմարիտ արժեքներից և լիովին թալպատելի են զործնականում օգտագործելու շամար:

ON A DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR TWO SEMI-PLANES  
CONNECTED TO EACH OTHER WITH AN ELASTIC  
STRAP OF FINITE LENGTH

E. X. GRIGORIAN

S u m m a r y

A dynamic contact problem for two semi-planes connected to each other on a finite length of their boundaries with an elastic strap of small thickness is considered.

The solution to the problem is reduced to that of a system of integral equations which is later reduced to an infinite system of linear equations by means of Jacobi polynomials.

This infinite system is proved to be quasi-quite regular.

Simultaneously, for the kernels of integral equations some simple analytical expressions are obtained quite suitable for practical purposes and the least differing from the real.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ingr-Arch. Bd. 3, No. 2, 1932, S. 123.
2. *Bufler H.* Scheibe mit endlicher, elastischer Versteifung. VDI-Forschungsheft 485 Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens“ Ausgabe B, Band 27, 1961, 5–44.
3. *Григорян Э. X.* О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. Изв. АН СССР, МТТ, вып. 5, 1972.
4. *Григорян Э. X.* О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. ПММ, т. 38, в. 2, 1974.
5. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, т. 30, вып. 3, 1966.
6. *Карпенко А. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, т. 30, вып. 3, 1966.
7. *Сейд Г.* Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
8. *Арутюнян Н. X., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 25, вып. 2, 1972.
9. *Арутюнян Н. X., Мхитарян С. М.* К контактной задаче для двух полубесконечных пластин, соединенных между собой полубесконечной упругой накладкой. Сб. „Механика деформируемых тел и конструкций“, посвященный 60-летию акад. Ю. Н. Работнова.

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ  
 В ЗАДАЧЕ ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ  
 ПЛАСТИНКИ В ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ  
 ПОСТАНОВКЕ

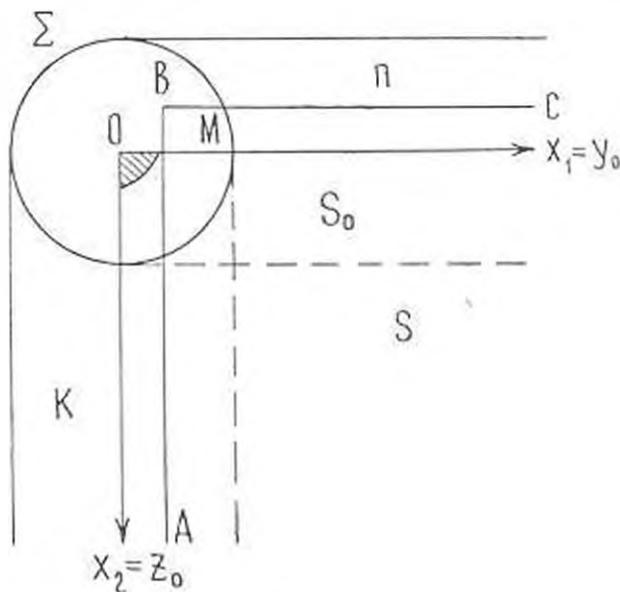
В настоящей работе рассматривается задача об отражении плоской слабой ударной волны от экрана в форме бесконечной треугольной пластинки с прямым углом в вершине, плоскость которого параллельна фронту ударной волны. Определено в линеаризованной задаче избыточное давление позади отраженной от пластинки волны. Найдено решение нелинейных уравнений коротких волн, описывающих окрестность точки  $B$  касания отраженной от экрана плоской волны  $S$ , сферической волны  $\Sigma$ , возникшей в момент  $t = 0$  начала отражения в вершине угла, и цилиндрических волн  $K$  и  $\Pi$ , произведенных сторонами угла.

Пусть избыточное давление  $P$  позади падающей плоской волны равно  $P_1$ . Тогда в области перед пластинкой получится отраженная плоская волна  $S$ , параллельная экрану, позади которой течение постоянно и  $P = 2P_1$ , согласно линейной теории. Волна  $S$  касается сферической волны  $\Sigma$  с центром в вершине  $O$  экрана и радиусом  $at$  и двух цилиндрических волн  $K$  и  $\Pi$  радиусом  $at$  и осями, направленными по сторонам угла, причем  $t$  есть время от начала отражения,  $a$  — скорость звука невозмущенной жидкости (перед фронтом отраженной волны). Для однородной жидкости в линеаризованной задаче избыточное по отношению к  $P_1$  давление  $P - P' = P_1$  позади отраженных от пластинки волн удовлетворяет волновому уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

Пусть требуется определить решение задачи поблизи волн, а точнее поблизи точки  $B$ , фиг. 1, касания волн  $K$ ,  $\Pi$ ,  $\Sigma$  и  $S$ . Поскольку полное решение задачи с начальными и граничными условиями представляет значительные трудности, здесь предположено, что при определении решения уравнения (1) для сформулированной выше задачи в окрестности точки касания волн можно заменить указанную задачу с граничными и начальными условиями задачей с начальными условиями, заданными на начальном положении отраженной от пластинки волновой картины. Формально возвращая волны  $\Sigma$ ,  $K$ ,  $\Pi$  и  $S$  к моменту начала отражения, убеждаемся, что начальным положением для  $\Sigma$  будет

точка  $O$ , для  $\Pi$  и  $K$  будут стороны угла, а начальным положением  $S_0$  волны  $S$  будет экран. Таким образом, взяв экран в качестве начальной волны  $S_0$ , получим из него в момент  $t$  нужную систему волн,



Фиг. 1.

фиг. 1, причем, полагая, что непосредственно позади  $S_0$   $P = P_1$ , а в остальной области позади плоскости экрана  $P = 0$ , получим, как показано далее из решения задачи о начальных условиях позади волны  $S_0$   $P = P_1$ , то есть нужное значение, а позади волн  $K$  и  $\Pi$  значения  $P$  совпадают с известными решениями плоской задачи, что подтверждает законность указанной выше замены постановки задачи. Заметим, что метод интегрирования по экрану при определении интенсивности волны известен в оптике, а использование постановки задачи о начальных условиях при определении лучевого решения на волне применялось в [1] и [3]. Указанная эквивалентность решения граничной задачи и решения задачи о начальных условиях при определении решения в окрестности волны проверена непосредственным вычислением в плоской задаче [2].

Решение задачи о начальных условиях может быть, как и в [1], найдено по формуле Пуассона

$$P = tM_{,t}[\Phi_1] + \frac{\partial M_{,t}[\Phi_0]}{\partial t} \quad (2)$$

где  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  — значения  $P$ ,  $\frac{\partial P}{\partial t}$  при  $t = 0$ ,  $M_{,t}[\Phi]$  — поделенный на  $4\pi a^2 t^2$  интеграл от  $\Phi$ , взятый по поверхности сферы  $T$  радиуса  $at$  с центром в точке  $M(x, y, z)$ , в которой определяется решение.

Предположим для простоты, что экран образует прямой угол в точке  $O$ , фиг. 1, и выберем оси  $x_1 = y$ ,  $x_2 = z$  по сторонам угла, а ось  $x_3 = x$  направим по нормали к экрану в сторону движения плоской волны  $S$ . Возвращая волну  $S$  в моменту  $t = 0$  начала отражения, можно убедиться в том, что начальное положение волны  $S$ , то есть  $S_0$ , совпадает с экраном. При определении решения в точке  $M$ , находящейся вблизи волны  $S$ , а точнее, вблизи точки  $B$ , фиг. 1, следует интегрировать по поверхности упомянутой сферы  $T$ , отсекаемой начальной волной  $S_0$ . Проведем через точку  $M(y_0, z_0, x_0)$  луч, нормальный волне  $S_0$ , обозначим точку пересечения луча с  $S_0$  через  $O'$  и проведем оси новой системы координат  $y', z', x_3$ , причем оси  $y', z'$  параллельны осям  $y, z$  соответственно. Тогда уравнение сферы  $T$  примет вид

$$(x_3 - x_0)^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 t^2$$

причем  $y' = x_1 - y_0$ ,  $z' = x_2 - z_0$ . Для малых  $x_3$  и  $at - x_3 = a^2$  [1]

$$x_3 = -a^2 + \frac{y'^2 + z'^2}{2at}$$

и уравнение волны  $S_0$  относительно сферы имеет вид

$$Z = a^2 - \frac{(x_1 - y_0)^2}{2at} - \frac{(x_2 - z_0)^2}{2at} \quad (3)$$

Взяв более общую задачу для неплоского экрана и для более общего вида уравнения или системы уравнений гиперболического типа и обозначая через  $k_1, k_2$  и  $k_3, k_4$  соответственно кривизны линий кривизны квазисферы  $T$  и начальной волны  $S_0$ , можно показать [2], что формула для эйконала  $\frac{1}{c}Z$ , представляющая время пробега вдоль луча от квазисферы до  $S_0$ , имеет вид

$$Z = ct^2 - \frac{1}{2}(k_2 - k_1)(x_1 - y_0)^2 - \frac{1}{2}(k_3 - k_4)(x_2 - z_0)^2 \quad (4)$$

где  $c$  есть нормальная скорость волны в точке  $O$ .

Для общности, далее рассматриваем запись  $Z$  в форме (4). Поскольку в момент  $t = 0$  начальное положение  $S$  совпадает с экраном, условия позади волны  $S_0$  можно взять в виде

$$\psi_0 = P_1 \varepsilon(Z) \varepsilon(x_1) \varepsilon(x_2), \quad \psi_1 = P_1 c^2 \varepsilon(Z) \varepsilon(x_1) \varepsilon(x_2) \quad (4')$$

где  $\varepsilon(x) = 1$  при  $x > 0$ ,  $\varepsilon(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $\delta(x) = \varepsilon'(x)$ .

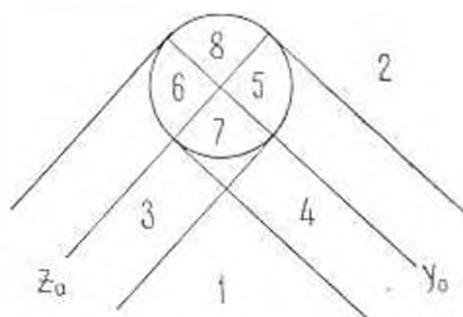
Подставляя (4') в (2), получим решение в окрестности точки  $B$  фиг. 1 в виде

$$P = \frac{1}{2-at} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_1 \delta(Z) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

где на область интегрирования в плоскости экрана  $S_0$  наложены условия

$$Z = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad (6)$$

Разумеется, можно вместо (4) взять и более общие начальные условия [2]. Кроме того, можно показать, что (5) имеет место для произвольной системы уравнений [2], где перед интегралом следует поставить интенсивность лучевого решения.



Фиг. 2

Вводя новые переменные  $x, y$ , причем

$$x_1 - y_0 = \sqrt{\frac{2}{k_2 - k_1}} z c^2, \quad x_2 - z_0 = \sqrt{\frac{2}{k_3 - k_1}} z c^2 \quad (7)$$

можно записать для области интегрирования (5)

$$1 - x^2 - y^2 > 0, \quad y > -y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right|, \quad x > -z_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_3}{2c^2}} \right| \quad (8)$$

В зависимости от расположения точки  $M(y_0, z_0, x)$  получится различный вид области интегрирования.

$$1. \quad -y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < -1, \quad z_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_3}{2c^2}} \right| < -1 \quad (9)$$

Обозначая  $\xi_0 = t - t_{\text{нач}}$ , где  $\xi_0 \neq 0$  есть уравнение волны  $\Sigma$  (фиг. 1), можно показать, что в (4) при  $x_1 = 0, x_2 = 0, Z = c\xi_0$ , откуда следует уравнение волны  $S$  относительно  $\Sigma$  [3]

$$y = y_0 + \frac{k_1 - k_2}{2c} y', \quad z = z_0 + \frac{k_1 - k_3}{2c} z', \quad y' > 0 \quad (10)$$

Кроме того, можно ввести величины

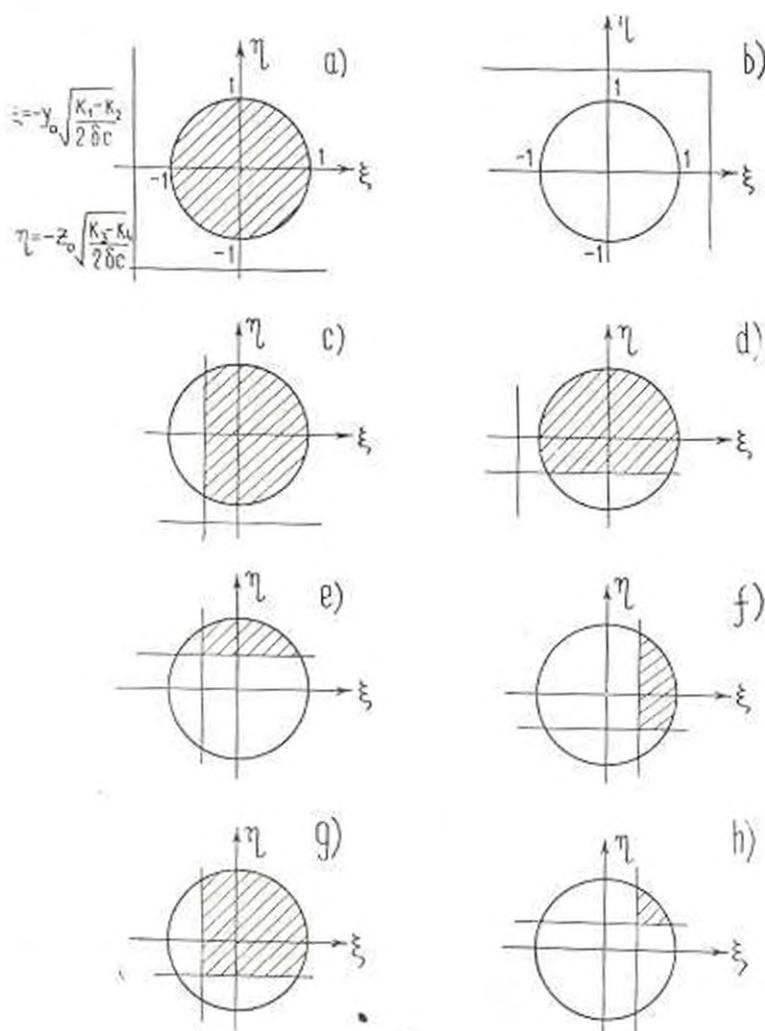
$$K_1 = z_0 - \frac{k_2 - k_3}{2c} z', \quad H_1 = y_0 - \frac{k_2 - k_1}{2c} y' \quad (11)$$

и условие (8) примет вид

$$y_0 > 0, \quad z_0 > 0, \quad K_1 < 0, \quad H_1 < 0$$

Здесь  $K_1 = 0$  есть уравнение цилиндра  $K$  (фиг. 1), поскольку уравнение его образующих (в плоскостях  $y = \text{const}$ ) относительно сферы ( $\xi_0 = 0$ ) вблизи линии касания поверхностей  $K$  и  $\Sigma$  (на которой  $z_0 = 0$ ,

$\xi_0 = 0$ ) имеет вид  $K_3 = 0$ . Подобным же образом  $\Pi_1 = 0$  представляет уравнение цилиндрической поверхности  $\Pi$ , касающейся сферы  $\Sigma$  вдоль линии  $y_c = 0$ , проходящей через точку  $B$ .



Фиг. 3.

Решение в указанной области (9) согласно (5) имеет вид

$$P = \frac{A}{\pi} \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta \quad (12)$$

где

$$A = \frac{P_1}{a^2} \sqrt{\frac{1}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_4)}} \quad (13)$$

причем интегрирование ведется по области (8), которой в данном случае будет весь круг фиг. 3а.

Используя свойство дельта-функции

$$\delta\{F(x)\} = \sum \frac{\delta(x-a_i)}{|F'(a_i)|}, \quad \text{где } F'(a_i) \neq 0,$$

можно получить, что в этой области решение постоянно и по (12) имеет вид  $P = A$ . Для волнового уравнения в плоской волне  $S$  имеет место

$$c = a, \quad k_2 = k_1 = 0, \quad k_3 = k_4 = \frac{1}{at}, \quad \text{и } P = P_1$$

Таким образом, указанная область (1) есть область постоянного решения и ограничена плоскостью отраженной волны  $S$ , поверхностями  $K$  и  $\Pi$ .

$$2. \quad -y_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} > 1, \quad -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} > 1$$

Тогда  $y_0 < 0$ ,  $z_0 < 0$ ,  $K_1 < 0$ ,  $\Pi_1 < 0$ , причем по (8) и (12) из фиг. 3в следует, что  $P = 0$ . Указанная область находится вне сферы  $\Sigma$  фиг. 1.

$$3. \quad \sqrt{\bar{\delta}} > -y_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} > -|\bar{\delta}|, \quad -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} < -|\bar{\delta}|$$

Отсюда следует  $z_0 > 0$ ,  $\Pi_1 < 0$ ,  $K_1 > 0$ . Область интегрирования дается (8) и фиг. 3с, причем из (12) получится

$$P = \frac{1}{\pi} A \int_{-y_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}}}^1 \frac{d\bar{\delta}}{\sqrt{1 - \bar{\delta}^2}} = \frac{A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{|\bar{K}_1 c}{-y_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2}}} \quad (14)$$

Полученное решение верно в области внутри цилиндра  $K$  и вне поверхности  $\Pi$  (а также вне сферы  $\Sigma$ ,  $\bar{z}_0 = 0$ ).

$$4. \quad -y_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} < -\sqrt{\bar{\delta}}, \quad |\bar{\delta}| > -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} > -|\bar{\delta}|$$

Отсюда следует  $y_0 = 0$ ,  $K_1 < 0$ ,  $\Pi_1 > 0$ . Область интегрирования дается (8) и фиг. 3д, причем из (12) получится

$$P = \frac{1}{\pi} A \int_{-z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}}}^1 \frac{d\bar{\delta}}{\sqrt{1 - \bar{\delta}^2}} = \frac{A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{|\bar{\Pi}_1 c}{-z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}}} \quad (15)$$

Полученное решение верно в области внутри цилиндра  $\Pi$  и вне цилиндра  $K$  и сферы  $\Sigma$ . Следует отметить, что в (14) и (15) при  $y_0 < 0$  и  $z_0 < 0$  решение на  $K$  и  $\Pi$  соответственно обращается в нуль, тогда

как при  $y_0 > 0$  и  $z_0 > 0$ , согласно соотношению  $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$ , решение на  $K$  и  $\Pi$  равно  $A$ , что соответствует части поверхностей  $K$  и  $\Pi$ , граничащей с областью (9).

$$5. \quad \left| -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < 1, \quad \left| -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < 1$$

$$y_0 > 0, \quad z_0 < 0$$

Отсюда следует  $K_1 > 0$ ,  $\Pi_1 > 0$ . Область интегрирования дается (8) и фиг. 3е, причем из (12) получится

$$P = \frac{A}{2\pi} \int_{-y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}}}^{\sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{A}{2\pi} \left\{ \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arcsin} \left( -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right) \right\} \quad (16)$$

$$6. \quad \left| -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < 1, \quad \left| -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < 1, \quad y_0 < 0, \quad z_0 > 0$$

Отсюда  $K_1 > 0$ ,  $\Pi_1 < 0$ . Область интегрирования дается (8), а также фиг. 3г, причем по (12) получится

$$P = \frac{A}{2\pi} \int_{-z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}}}^{\sqrt{\frac{K_1}{\delta}}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{A}{2\pi} \left\{ \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{K_1}{\delta}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arcsin} \left( z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right) \right\} \quad (17)$$

$$7. \quad \left| -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < 1, \quad \left| -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < 1$$

$$y_0 > 0, \quad z_0 > 0, \quad \delta > 0$$

Отсюда  $K_1 > 0$ ,  $\Pi_1 > 0$ .

Из (8) и фиг. 3г, а также по (12) имеет место

$$P = -\frac{A}{2\pi} \operatorname{arcsin} \frac{|\Pi_1|}{\delta} - \frac{A}{2\pi} \operatorname{arcsin} \left( y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right) - \frac{1}{2} A \quad (18)$$

$$8. \quad \left| y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < 1, \quad \left| -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < 1, \quad y_0 < 0, \quad z_0 < 0$$

Здесь  $K_1 > 0$ ,  $\Pi_1 > 0$ . Из фиг. 3л и (12)

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{A}{2\pi} \int_{-y_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}}}^{\sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{A}{2\pi} \operatorname{arcsin} \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arcsin} \left( -y_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \right| \right) \right. \\
 &= \frac{A}{2\pi} \operatorname{arcsin} \frac{|\bar{K}_1| \sqrt{\Pi_1} - \frac{y_0 z_0}{2c} \sqrt{(k_3 - k_1)(k_2 - k_1)}}{\delta} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Точки  $M$ , в которой находится решение, находится вблизи участка сферы  $\Sigma$ , граничащего с постоянным течением  $P = 0$  за надвигающейся волной, решение на  $\Sigma$  равно нулю, а вблизи нее

$$P = \frac{A}{2\pi} z_0 \frac{c}{y_0 z_0 \sqrt{(k_3 - k_1)(k_2 - k_1)}}$$

Как показывает фиг. 3е, решение (16) имеет место при

$$-z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} < \left| \sqrt{\frac{\bar{K}_1}{\delta}} \right., \quad y_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \right| < \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right. \quad \text{то есть } z_0 > 0.$$

Точно так же решение (17) имеет место при  $-y_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \right| < \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right.$ ,

$z_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \right| < \left| \sqrt{\frac{\bar{K}_1}{\delta}} \right.$ ,  $z_0 > 0$ . Можно получить решение в областях,

где знаки неравенств обратные, а именно:

$$4'. \quad -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} > \left| \sqrt{\frac{\bar{K}_1}{\delta}} \right., \quad y_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \right| > \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right., \quad z_0 < 0,$$

где

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}}}^{\sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{A}{\pi} \operatorname{arcsin} \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right. \\
 &= \frac{A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right.}{z_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \right.}
 \end{aligned}$$

то есть решение совпадает с (15), и

$$3'. \quad z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} > \left| \sqrt{\frac{\bar{K}_1}{\delta}} \right., \quad -y_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \right| > \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right., \quad z_0 < 0$$

где решение совпадает с (14). Наконец, решение (7), согласно фиг. 3г, имеет место при  $-z_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} > - \left| \sqrt{\frac{K_1}{2}} \right|$ ,  $z_0 > 0$ , причем при  $-z_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} < - \left| \sqrt{\frac{K_1}{2}} \right| - y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} < - \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{2}} \right|$ ,  $z_0 < 0$  получится решение в области 7' фиг. 2

$$P = \frac{A}{\pi} \int_{-y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right|}^{\left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{2}} \right|} \frac{d\xi}{1 - \xi^2} = \frac{A}{\pi} \int_{-y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right|}^{\left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{2}} \right|} \frac{d\xi}{1 - \xi^2} =$$

$$= \frac{A}{2} = \frac{A}{\pi} \left( \operatorname{arcsin} \xi \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| - \operatorname{arcsin} \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{2}} \right| \right) =$$

$$= \frac{A}{2} = \frac{A}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right|}{1 - 2cK_1} - \operatorname{arctg} \frac{\left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{2}} \right|}{z_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right|} \right) \quad (20)$$

Таким образом, получаются 6 различных областей решения: 1; 2; 3; 3'; 4; 4'; 5-8; 7.

Таким образом, определено линейное решение для однородной сжимаемой жидкости (годное для произвольной недиссипативной среды) в окрестности точки *B* касания волн, фиг. 1.

Для определения нелинейного решения в указанной окрестности вначале можно рассмотреть определение нелинейного решения в областях 3 и 4 вблизи цилиндрических волн, где решение двумерное, причем в области 3 оно определяется переменными  $K_1, y_0$ , а в области 4 —  $\Pi_1, z_0$ . Нелинейное решение в области 3, то есть вблизи линии *AB* касания волн *K* и *S*, можно найти из решения коротких волн [4], заменяя в нем

$$\xi = \frac{K_1}{t} \frac{1}{\frac{n-1}{2}}, \quad \gamma = \frac{y_0}{- \left| \sqrt{\frac{n-1}{2}} \right|}$$

$$\eta = \frac{y_0}{-a \left| \sqrt{\frac{n-1}{2}} \right|}, \quad \tau = \frac{y_0}{\tau a}, \quad z = \frac{P_1}{\tau a^2}$$

Здесь  $v_n, v_\tau$  — проекции скорости частицы на нормаль и касательную к волне  $K, S$ ,  $a$  — плотность и скорость звука в жидкости. Через  $y_0$  и  $z_0$  обозначены  $\frac{H_0}{at}, \frac{z_0}{at}$ , причем на линии касания *K* и *S* в нелинейной задаче имеет место

$$y_0 = \left| \sqrt{\frac{n-1}{2}} \right| \cdot \frac{K_1}{t} \frac{1}{\frac{n-1}{2}}, \quad z_0 = \frac{z_0^2}{2} - \frac{n-1}{2}, \quad z = \frac{z_0}{t} \quad (21)$$

Здесь  $n$  есть показатель адиабаты.

Решение [4] вблизи линии  $AB$  имеет вид

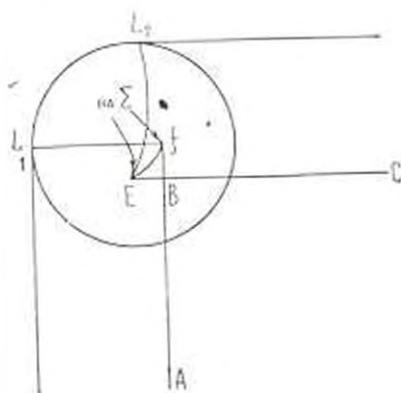
$$-\frac{K_1}{t} = -\frac{y_0^2}{2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{v_x}{\gamma a}\right) + \frac{n+1}{2} \gamma \left(\frac{v_x}{\gamma a} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi v_x}{\gamma a} + B \sin^2 \frac{\pi v_x}{\gamma a}\right) \\ v_x = \left(\frac{1}{2} \gamma a \operatorname{tg} \frac{\pi v_x}{\gamma a} - v_x\right) y_0 \quad (22)$$

где  $B$  постоянная. Условие на ударной волне в области 3 имеет вид [4]  $\frac{d\tilde{v}}{dy} = -\sqrt{\frac{n-1}{2}}$  и дает вблизи линии  $AB$   $\frac{K_1}{t} = -\sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma y_0$ , а решение (22) имеет вид

$$y_0 \sim \sqrt{\frac{n-1}{2}}, \quad z_0 = -\frac{z_0^2}{2} - \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma y_0 \\ v_x = \gamma a \sqrt{\frac{\frac{n-1}{2} \gamma y_0}{2 \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma}}, \quad v_y \approx -\gamma a y_0, \quad v_z = -z_0 v_x \quad (23)$$

Подобно этому решение в области 4 вблизи линии  $BC$  касания нелинейных волн II и S, вблизи которой  $z_0 \approx \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma$ ,  $\tau = -\frac{y^2}{2} - \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma z_0$ , имеет вид

$$v_x = \gamma a \sqrt{\frac{\frac{n-1}{2} \gamma + z_0}{2 \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma}}, \quad v_y \approx -\gamma a z_0, \quad v_z = -y_0 v_x \quad (24)$$



Фиг. 4.

Линии  $L_1, L_2$  фиг. 4 пересечения волн (23), (24) с точечной нелинейной волной  $\Sigma$  или параболической поверхностью, на которой

$$\tau = -\frac{n+1}{2} \frac{v_x}{a}, \text{ имеют вид}$$

$$\begin{aligned}
 z_0^2 &= \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} \left( \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} - y_0 \right) \\
 z &= -\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} + y_0 \right) \\
 y_0^2 &= \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} \left( \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} - z_0 \right) \\
 z &= -\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} - z_0 \right)
 \end{aligned} \quad (25)$$

Эти линии проходят соответственно через точки

$$y_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}, \quad z_0 = 0, \quad z = -\frac{n+1}{2}\gamma$$

и

$$z_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}, \quad y_0 = 0, \quad z = -\frac{n+1}{2}\gamma \quad (25')$$

Уравнения движения однородной жидкости вблизи точки  $B$  касания волн в нелинейной задаче могут быть получены из уравнений коротких волн [5, 6, 7] для трехмерной постановки в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial z_0} + \frac{n-1}{2} \frac{v_x}{a^2} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{v_x}{at} &= 0 \\
 \frac{\partial v_x}{\partial y_0} = \frac{\partial v_y}{a\partial \tau}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z_0} = \frac{\partial v_z}{a\partial \tau}
 \end{aligned} \quad (26)$$

причем  $y_0, z_0$  имеют первоначальный смысл,  $at\tau = dx$ ,  $x$  — координата по нормали к волне. Введя, как и ранее, обозначения  $\frac{y_0}{at} = y_0$ ,

$\frac{z_0}{at} = z_0, \frac{\tau}{t} = \tau$ , и учитывая соотношения однородности решения

по  $t$   $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\tau}{t} \frac{\partial v_x}{\partial \tau}$ , уравнения (26) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial y_0} - \frac{\partial v_z}{\partial z_0} \right) + v_x - \frac{n-1}{2} \frac{v_x}{a} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} &= 0 \\
 \frac{\partial v_x}{\partial y_0} = \frac{\partial v_y}{a\partial \tau}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z_0} = \frac{\partial v_z}{a\partial \tau}
 \end{aligned} \quad (27)$$

а уравнение ударной волны для (27) — в виде

$$\left( \frac{\partial \tau}{\partial y_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau}{\partial z_0} \right)^2 = -2\tau - \frac{n+1}{2} \frac{v_x}{a} \quad (28)$$

причем условия на ударной волне с учетом того, что впереди нее решение равно нулю, будут

$$v_y = v, \quad \frac{\partial z}{\partial y_0}, \quad v_z = v, \quad \frac{\partial z}{\partial z_0} \quad (24)$$

Ударная волна  $S$ , ограничивающая область 1, есть плоскость с уравнением

$$\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = \frac{n-1}{4} \quad (30)$$

В точке  $B$  имеет место

$$y_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma, \quad z_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma, \quad z = -\frac{3}{4}(n-1)\gamma, \quad \frac{\partial z}{\partial a} \quad (31)$$

Теперь нужно найти решение на ударной волне  $S$ , непрерывно переходящее в решение на цилиндрических ударных волнах вдоль линий  $L_1$  и  $L_2$  (фиг. 4). Определим нелинейное решение вблизи  $S$  с помощью линейного решения в области 8, которое в новых обозначениях имеет вид

$$v_r = \frac{\gamma a}{2\pi} \arcsin \frac{\sqrt{z + \frac{y_0^2}{2}} \sqrt{z - \frac{z_0^2}{2}} - \frac{1}{2} y_0 z_0}{\frac{y_0^2}{2} - \frac{z_0^2}{2}} \quad (32)$$

Из (32) и (29) получится с использованием условий  $z = 0, v_r = 0, v_z = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi}{\gamma a} v_y &= y_0 \arctg \frac{\sqrt{z - \frac{y_0^2}{2}} + \sqrt{z}}{-z_0} + \sqrt{2} \sqrt{z + \frac{z_0^2}{2}} \\ &- y_0 \arctg \frac{\sqrt{z - \frac{z_0^2}{2}} + \sqrt{z}}{-y_0} + z_0 - y_0 \frac{\pi}{2} \quad (33) \\ -\frac{2\pi}{\gamma a} v_z &= z_0 \arctg \frac{\sqrt{z + \frac{z_0^2}{2}} + \sqrt{z}}{-z_0} + \sqrt{2} \sqrt{z - \frac{y_0^2}{2}} \\ &+ z_0 \arctg \frac{\sqrt{z + \frac{z_0^2}{2}} + \sqrt{z}}{-y_0} + y_0 - z_0 \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Определяя из (32)  $v$  в виде

$$v = \frac{2\pi}{\gamma a} \cos^2 v, \quad \frac{2\pi}{\gamma a} = (y_0^2 - z_0^2) \sin^2 v, \quad \frac{2\pi}{\gamma a} + 2y_0 z_0 \sin v, \quad \frac{2\pi}{\gamma a}$$

и подставляя в (33), можно получить

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\gamma a} v_x - y_0 v_x \frac{2\pi}{\gamma a} - \frac{z_0 - y_0 \sin v_1}{\cos v_1} \frac{2\pi}{\gamma a} &= z_0 \\ - \frac{2\pi}{\gamma a} v_z - z_0 v_z \frac{2\pi}{\gamma a} - \frac{y_0 - z_0 \sin \left( v_1, \frac{2\pi}{\gamma a} \right)}{\cos \left( v_1, \frac{2\pi}{\gamma a} \right)} &= y_0 \end{aligned} \quad (34)$$

Далее предполагается, что (34) верны и для нелинейной задачи [4]. В уравнениях (27) меняются ролями переменные  $\tau$ ,  $v$ , и получаются уравнения

$$\begin{aligned} -\tau - \frac{n-1}{2} \frac{v_1}{a} - v_1 \frac{\partial \tau}{\partial v_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \frac{\partial \tau}{\partial v_1} - \frac{\partial v_x}{\partial v_1} \frac{\partial \tau}{\partial y_0} \right) &= \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z_0} \frac{\partial \tau}{\partial v_1} - \frac{\partial v_z}{\partial v_1} \frac{\partial \tau}{\partial z_0} \right) &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial v_1} = \frac{\partial \tau}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial v_1} = \frac{\partial \tau}{\partial z_0} \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя (34) во второе и третье уравнения (35), можно получить решение через произвольную функцию  $\tau = z_0 = F(v_1)$  и после подстановки в первое уравнение (35) получится уравнение для  $F'(v_1)$  в виде

$$F'(v_1) - \frac{n-1}{2} v_1 - F'(v_1) \frac{\gamma a}{2\pi} \operatorname{tg} \left( v_1, \frac{2\pi}{\gamma a} \right) = 0$$

и окончательное решение примет вид (34), к которому следует присоединить уравнение

$$\tau = z_0 = \frac{n-1}{2a} v_1 - \frac{n-1}{2} \frac{\gamma}{2\pi} \sin \frac{2\pi v_1}{\gamma a} \ln \operatorname{tg} \frac{2\pi v_1}{\gamma a} + C \sin \frac{2\pi v_1}{\gamma a} \quad (36)$$

где  $C$  — постоянная. Такие же решения получаются из линейного решения в областях  $\bar{7}$  и  $\bar{7}'$  с заменой  $\sin \frac{2\pi v_1}{\gamma a}$  на  $\cos \frac{2\pi v_1}{\gamma a}$  и  $\cos \frac{\pi v_1}{\gamma a}$  соответственно.

При  $y_0 = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma$ ,  $z_0 = -\frac{z_0^2}{2} - \frac{n-1}{2} \gamma$ ,  $v_1 = \gamma a$  и решение (36) дает  $\tau = -\frac{n-1}{2} \gamma$ . При  $z_0 = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma$ ,  $z_0 = -\frac{y_0^2}{2} - \frac{n-1}{2} \gamma$ ,  $v_1 = \gamma a$  решение (36) дает  $\tau = -\frac{n-1}{2} \gamma$ .

Таким образом, решение (36) приближенно удовлетворяет условиям перехода к решениям (23), (24) около волн  $K$  и  $\Pi$  вдоль линий (25), причем в точках этих линий  $E$  и  $F$  (фиг. 4), определяемых по (25), имеет место  $v_1 = \gamma a$ . Вместо удовлетворения условий в точке  $B$  можно взять условия на линии  $EF$ , принадлежащей волне  $S$  и определяемой уравнениями  $y_0^2 + z_0^2 = \frac{n-1}{2} \gamma$ ,  $z_0 = -\frac{n-1}{2} \gamma$ . На линии  $EF$

положено  $v_1 = \gamma a$ , что дает непрерывный переход к постоянному течению позади волны  $S$ , в котором имеет место  $\Phi_1 = -\gamma a \omega$ ,  $v_1 = -\gamma a z_0$ . Из решения (34), (36) видно, что эти условия удовлетворяются.

Таким образом, получено нелинейное решение (34), (36), удовлетворяющее приближенно условиям перехода вдоль линии  $EF$  фиг. 4 в постоянное течение позади волны  $S$ , условиям перехода (25) в решение на цилиндрических ударных волнах и условиям (28), (29) на ударной волне  $\Sigma$ . Точное решение можно находить, численно решая систему уравнений (27) при условиях (28), (29) на ударной волне  $\Sigma$ , при условиях сопряжения с решениями двумерных уравнений, определяемых вблизи волн  $K$  и  $II$ , и при условии асимптотического перехода в линейное решение или в решения вида (32).

Отметим, что полученное здесь линейное решение годится также для описания окрестности точки касания плоской, цилиндрической и конической волн в задаче отражения плоской волны от вершины многогранного угла.

Таким образом, можно обобщением полученных результатов на случай волны произвольного профиля получить более общие по сравнению с [2, 4] соотношения, поскольку в указанных работах определяется решение линейной системы уравнений в окрестности точки (линии) касания волн при наличии особенности в двух (в трех) направлениях. Ряд линейных задач по определению структуры решения в окрестности волн при дифракции от углов решен в [7].

Институт механики АН

Армянской ССР

Поступила 10 XII 1973

#### Ս Գ Ն Ո Ւ Յ Ո Ւ Մ

ՀԵՂՈՒԹՅՈՒ ՇԱՐԿԻՄԸ ՓԱՐԱԲԵՏՔՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԹԵՐԵՎՈՅ ՀԱՐԿԱՅԻՆ ԱՇԽԵՒ ԱՆԳՐԱԲԱՐՁՈՒՆ ԵՆԹՐՈՒՄ ԳՆԱՅԻՆ ԵՎ ԱՉ ԳՆԱՅԻՆ ԿԵՐԱՆՔՆԵՐՈՎ

#### Ս Վ Ր Ո Փ Ո Ւ Մ

Արտիվում է ներման բաշխումը տիրույթի աչիրի շրջափախում ուղղանկյան թիթեղի հարթ աչիրի տեղադրվածման խնդրում: Արտիվում է նաև մատավոր ոչ բնական լուծումը նշված շրջափախում: Հարվածային աչիրի սլաքմանները բաժարարվում են մատավոր ձևով:

# DETERMINATION OF PARAMETERS OF FLUID MOTION IN THE PROBLEM ON REFLECTION OF SHOCK WAVE FROM A PLATE IN LINEAR AND NON-LINEAR STATEMENT

A. G. BAGDOYAN

S u m m a r y

A problem on reflection of a plane acoustic wave from a rectangle screen is considered. The distribution of pressure in the vicinity of junction point of the reflected plane wave, cylindrical wave and spherical wave is determined. The solution to the linear problem is of different form in different parts of the above vicinity. The non-linear solution in the vicinity is found for weak shock waves both in the vicinity of cylindrical shock waves and in that of a point wave, approximately satisfying the shock wave conditions.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фреддхольдер Ш. Звуковые импульсы. ИЛ, М., 1962.
2. Багдоян А. Г., Давыдов З. Н. Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. „Ж. вычисл. матем. и матем. физ.“, т. 12, № 6, 1972, 1512-1529.
3. Яковлев В. М. Ряд пространств нестационарных волн и акустики. Ученые записки АГУ, № 32, 1958.
4. Багдоян А. Г. Некоординатные нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1967.
5. Рыжков Ю. С., Христенко И. С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, т. 22, № 5, 1958, 586-599.
6. Шедлер Г. М. Учет вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости. ПММ, т. 33, № 1, 1969, 162-168.
7. Борн Л. В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. Изд. „Мир“, М., 1966.

А. В. МАРТИРОСЯН

### РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В работе рассматривается решение задачи о движении магнитоупругой среды под действием нестационарных нагрузок.

В динамических задачах теории упругости для однородной изотропной среды наиболее употребительным является метод Смирнова-Соболева [1], который применен к решению ряда граничных задач [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Для анизотропной упругой плоскости методом [1] ряд граничных задач решен в работах [8, 9]. В последнее время при решении динамических задач большее распространение получила метод интегральных преобразований в сочетании с методом Винера-Хопфа [10, 11, 12]. Следует отметить, что деформацией контура в обратном преобразовании Фурье можно для широкого класса задач решение, полученное методом интегральных преобразований, привести к эффективной записи решения в форме Смирнова-Соболева. Этот аппарат применяется в настоящей работе в применении к задаче магнитоупругости. Решение находится с помощью интегральных преобразований с последующим применением метода Винера-Хопфа и затем в нестационарном случае приводится к форме Смирнова-Соболева, что по идее близко к методу работ [13, 14].

Рассматривается задача о движении однородной изотропной магнитоупругой плоскости с разрезом, занимающим отрицательную полуось  $x$ , на границе которого приложены произвольные нормальные и касательные импульсы.

Уравнения движения магнитоупругой среды при начальном однородном магнитном поле  $B_0$ , перпендикулярном плоскости движения  $(x, y)$ , имеют вид [15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \bar{a}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u, v$  — компоненты вектора перемещения по осям  $x, y$ ,  $a^2 = a^2 + \frac{B_0^2}{4\pi\rho}$ ,  $\rho$  — плотность,  $a, b$  — скорости упругих волн. Для индуцированного магнитного поля имеется лишь составляющая  $b = B_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ .

Составляющие тензора магнитоупругих напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{yy} + \Pi_{yy} &= \gamma \left[ a^2 \frac{\partial v}{\partial y} + (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ \tau_{xy} - \Pi_{xy} &= \gamma b^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Pi_{yy}$ ,  $\Pi_{xy}$  — составляющие тензора максвелловских напряжений, причем в данной задаче  $\Pi_{xy} = 0$ .

Пусть на берегах разреза имеются нормальные и касательные импульсы  $P_1^{\pm}(x \pm l) \exp(-i\omega t)$ ,  $Q_1^{\pm}(x \pm l) \exp(-i\omega t)$  на верхнем и  $P_2^{\pm}(x \pm l) \exp(-i\omega t)$ ,  $Q_2^{\pm}(x \pm l) \exp(-i\omega t)$  на нижнем берегу разреза. Запишем

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{P_1^+ - P_1^-}{2}, & P_1' &= \frac{P_1^+ + P_1^-}{2} \\ Q_1 &= \frac{Q_1^+ - Q_1^-}{2}, & Q_1' &= \frac{Q_1^+ + Q_1^-}{2} \end{aligned}$$

Тогда задача распадается на две задачи — симметричную и антисимметричную, причем в первой задаче заданы импульсы  $-P_1 = \frac{P_1^+ - P_1^-}{2}$

$-Q_1 = \frac{Q_1^+ - Q_1^-}{2}$  на верхнем и  $-P_1, Q_1$  на нижнем берегу, а во вто-

рой задаче импульсы будут  $-P_1 = \frac{P_1^+ + P_1^-}{2}$ ,  $-Q_1 = \frac{Q_1^+ + Q_1^-}{2}$  на верх-

нем и  $P_1, Q_1$  на нижнем берегу разреза. Так как в первой задаче  $\tau_{yy} + \Pi_{yy}$  — четная,  $\tau_{xy}$  — нечетная функция  $y$ , можно считать  $u_1$  четной,  $v_1$  — нечетной функцией  $y$ , где  $u_1, v_1$  — вектор перемещений для симметричной задачи. Граничные условия симметричной задачи имеют вид ( $y = 0$ )

$$\begin{aligned} \tau_{yy} + \Pi_{yy} &= -P_1 \delta(x-l) \exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0 \\ \tau_{xy} &= -Q_1 \delta(x-l) \exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0 \\ u_1 &= 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty \end{aligned} \quad (3)$$

$u_2 = O(r^{1/2}), v_2 = O(r^{1/2})$  при  $r = |x^2 + y^2| \rightarrow 0$  (условие на ребре).

Для антисимметричной задачи получим

$$\begin{aligned} \tau_{yy} + \Pi_{yy} &= -P_1 \delta(x-l) \exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0 \\ \tau_{xy} &= -Q_1 \delta(x-l) \exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad \infty < x < 0 \\ u &= 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty \end{aligned} \quad (4)$$

$u = O(r^{1/2}), v = O(r^{1/2})$  при  $r = |x^2 + y^2| \rightarrow 0$  (условие на ребре).

Здесь  $\delta(x)$  есть дельта-функция Дирака,  $\omega$  — частота,  $t$  — время.

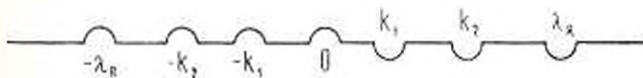
Вначале рассмотрим вторую задачу. Полагаем

$$u(x, y, t) = \bar{u}(x, y) \exp(-i\omega t), \quad v(x, y, t) = \bar{v}(x, y) \exp(-i\omega t) \quad (5)$$

Решение задачи (1), (4), (5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{i(\lambda x + y^2)} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(k_1^2 - 2i^2)}{2i^2} A - \frac{iP_1 e^{i\lambda t}}{4\pi\gamma b^2 \beta_1} \right] e^{i(\lambda x - y^2 \beta_1)} d\lambda \\ \bar{v} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_2}{i} A e^{i(\lambda x - y^2 \beta_2)} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{iP_1 e^{i\lambda t}}{4\pi\gamma b^2 \beta_2} - \frac{k_2^2 - 2i^2}{2i\beta_2} \right] e^{i(\lambda x - y^2 \beta_2)} d\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\beta_1 = |k_1^2 - i^2|$ ,  $k_1 = \omega a$ ,  $k_2 = \omega b$ ,  $A(i)$  — неизвестная функция, функция  $\sqrt{k^2 - i^2}$  аналитична в комплексной плоскости  $i$  с двумя полубесконечными разрезами вдоль действительной оси  $(-\infty, -k)$  и  $(k, \infty)$ , подразумевается ветвь этой функции, действительная и положительная при  $-k < i < k$ , то есть положительно мнимая на верхнем берегу левого разреза и на нижнем берегу правого разреза. Контур интегрирования в (6) показан на фиг. 1. Учитывая что  $u$  есть нечетная функция  $y$ , можем в (1) заменить одновременно  $y$  на  $|y|$  и  $u$  на  $|u|$ , что позволяет брать решение для всех  $y$  в виде (6), причем далее знак модуля отброшен.



Фиг. 1.

Решение в виде (6) удовлетворяет уравнениям (1) и граничному условию  $\sigma_{xy} - \bar{\Pi}_{xy} = -P_3 \delta(x + l)$  при  $y = 0$ . Остальные граничные условия и условия на ребре определяют функцию  $A(i)$ . Подставляя (6) в (4), имеем при  $y = 0$  уравнения, которые после применения обратного преобразования Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{i b^2 R(i) A(i)}{2i^2 \beta_2} - \frac{P_1 (k_1^2 - 2i^2)}{4\pi\gamma \beta_2} e^{i\lambda t} &= \Omega^-(i) \\ \frac{k_2^2 A(i)}{2i^2} - \frac{i^2 \beta_2 e^{i\lambda t}}{4\pi\gamma b^2 \beta_2} &= \Omega^+(i) \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Omega^-(i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sigma_{xy}}{i} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx, \quad \Omega^+(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (\bar{u})_{y=0} e^{-i\lambda x} dx$$

$R(i) = 4i^2 \beta_1 \beta_2 + (k_1^2 - 2i^2)^2$  — функция Ралей, причем искомые функции  $\Omega^-(i)$  и  $\Omega^+(i)$  аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскости комплексного переменного  $i$ .

Исключая из (7)  $A(t)$ , приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$2ib^2 \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \beta_1 F(t) U^-(t) - \frac{P_1 [\bar{a}^2 \beta_1 - (\bar{a}^2 - 2b^2) \beta_2] e^{i\bar{a}t}}{2\pi \bar{a}^2 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)} + \frac{Q_1 e^{i\bar{a}t}}{2\pi \beta_2} = \Omega^-(t) \quad (8)$$

где

$$F(t) = \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \left[ i^2 + \frac{(k_2^2 - 2t^2)^2}{4\beta_1 \beta_2} \right]$$

Функции  $F(t)$  и  $i \overline{k_1^2 - t^2}$  представим в виде

$$F(t) = F^+(t) F^-(t), \quad i \overline{k_1^2 - t^2} = i \overline{k_1 - t} | \overline{k_1 - t} \quad (9)$$

где функции  $F^+(t)$  и  $F^-(t)$  — аналитические и отличные от нуля соответственно в полуплоскостях  $\text{Im } t > 0$  и  $\text{Im } t < 0$ . Согласно выбору ветви функции  $i \overline{k_1^2 - t^2}$  и контура, разделяющего нижнюю и верхнюю полуплоскости  $t$ -плоскости,  $i \overline{k_1 - t}$  будет аналитической функцией в верхней полуплоскости (разрез вдоль  $y = 0$ ,  $-k > x > -\infty$ ),  $i \overline{k_1 - t}$  — в нижней полуплоскости (разрез вдоль  $y = 0$ ,  $k < x < \infty$ ). Воспользуемся результатом факторизации функции  $F(t)$ , приведенным в [16]

$$F^-(t) = \frac{e^{i\bar{a}t}}{|k_2 - t| |k_1 - t|} \exp \left[ \frac{i}{2\pi i} \int_{k_1}^{k_2} \ln \frac{F(z)}{F(z) \pm i} dz \right] \quad (10)$$

$$\left( t_R = \frac{a}{c_R}; \quad c_R \leq b \right)$$

Здесь  $c_R^{-1}$  — корень функции Рэлея, и выбираются одновременно либо верхние, либо нижние знаки. Подставляя (10) и (9) в (8), получим

$$2b^2 i \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) i \overline{k_1 - t} F^-(t) U^-(t) + \frac{f(t) e^{i\bar{a}t}}{t - t_R} = \frac{\Omega^-(t) \sqrt{k_2 - t}}{(t_R - t) \chi(t)} \quad (11)$$

где

$$f(t) = \frac{P_1 [\bar{a}^2 \beta_1 - (\bar{a}^2 - 2b^2) \beta_2] - Q_1 \bar{a}^2 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{2\pi \bar{a}^2 (\beta_1 + \beta_2) \chi(t) |k_2 - t|}$$

$$\chi(t) = \frac{F^-(t) \sqrt{(k_2 - t)(k_1 - t)}}{t_R - t}$$

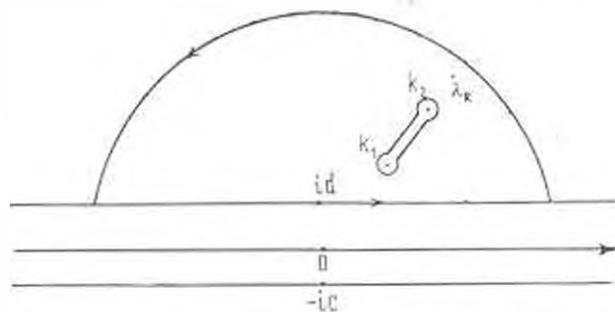
Для того, чтобы применить метод Винера-Хопфа, необходимо второй член левой части уравнения (11) представить как сумму двух функций, одна из которых аналитична в верхней полуплоскости плоскости  $t$ , а другая — в нижней полуплоскости:

$$f_1(i) = \frac{f(\lambda) \exp(i\lambda t)}{i - i_R} = f_1^+(i) + f_1^-(i) \quad (12)$$

Допустим, что  $\lambda$  — комплексное число, тогда легко показать, что  $f_1(i)$  — аналитическая функция  $i = z + it$  в полосе  $-\operatorname{Im} k_1 < i < \operatorname{Im} k_2$  и такая, что  $|f_1(z - it)| < C|z|^{-1/2}$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , причем это неравенство выполняется равномерно для всех  $t$  в полосе  $-\operatorname{Im} k_1 + \varepsilon < z < \operatorname{Im} k_2 - \varepsilon; \varepsilon > 0$ . Тогда можно утверждать [10], что при  $-\operatorname{Im} k_1 < i < -\varepsilon < z < d < \operatorname{Im} k_2$

$$f_1^+(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-ic-\infty}^{id+\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - i} d\xi, \quad f_1^-(i) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{-ic-\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - i} d\xi \quad (13)$$

Теперь вычислим  $f_1^-(i)$ . Для этого применим теорему Коши в разрезанной области фиг. 2, где разрез проведен между точками  $k_1$ ,



Фиг. 2.

Отметим, что подынтегральное выражение (13) в этой области имеет единственный простой полюс в точке  $i = i_R$ . Тогда имеем

$$f_1^-(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-ic-\infty}^{id+\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - i} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{k_1-\infty}^{k_2+\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - i} d\xi - \frac{f(i_R) e^{i_R t}}{i_R - i} \quad (14)$$

Рассмотрим предельный случай равенства (14). Когда  $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow 0$ , разрез проведен уже вдоль вещественной оси от точки  $k_1$  до  $\infty$ . Считая, что на верхнем берегу разреза  $|\frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i} - -i| \frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i}$ , а на нижнем берегу разреза  $|\frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i} - i| \frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i}$  и подставляя выражение  $f_1(\xi)$  в (14), получим

$$f_1^-(i) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i} d\xi - \frac{f(i_R) e^{i_R t}}{i_R - i} \quad (15)$$

где

$$f(\xi) = \frac{P_1}{2\pi \alpha} \frac{1}{X(\xi)} \quad \text{при } k_1 < \xi < \infty, \quad \text{а при } k_2 < \xi < k_1$$

$$z(z) = \frac{[P_1(k_2^2 - 2z^2) - 2Q_1z]z | \overline{k_2 - z} | \overline{z^2 - k_1^2}}{2\gamma b^2 R(z) X^+(z) (z - z_R)}$$

а  $X^+(z)$  суть граничные значения функции  $X(z)$  сверху на участке  $k_2 < z < k_1$ . Из (15), (12), (11) имеем

$$2b^2 i \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) | \overline{k_2 - z} | F^-(z) U^+(z) - f_1^-(z) = \frac{z(z) | \overline{k_2 - z} |}{(z_R - z) X^+(z)} - f_1^-(z) \quad (16)$$

Так как точки  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $z_R$  не принадлежат к нижней полуплоскости  $z$ , то правая часть уравнения (16) представляет собой функцию, аналитическую в нижней полуплоскости, а левая часть того же уравнения — функцию, аналитическую в верхней полуплоскости. По принципу непрерывного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями друг друга. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической по всей плоскости  $z$ , в бесконечно удаленной точке. Используя теорему абелева типа [10] и условие на ребре, нетрудно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда в силу теоремы Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости  $z$ .

Таким образом, получим

$$z^-(z) = \frac{f(z_R) X(z) e^{iRz}}{| \overline{k_2 - z} |} - \frac{(z_R - z) X(z)}{| \overline{k_2 - z} |} \int_{k_1}^{\infty} \frac{z(z) e^{i\lambda z}}{z - z} d\lambda \quad (17)$$

Из формул (17), (7) имеем

$$A(z) = i \left( a_1^{(1)} e^{i\lambda z} + a_2^{(1)} e^{i\lambda z} + a_3^{(1)} \int_{k_1}^{\infty} \frac{z(z) e^{i\lambda z}}{z - z} d\lambda \right) \quad (18)$$

где

$$a_1^{(1)} = \frac{z [P_1(k_2^2 - 2z^2) - 2zQ_1]}{2\gamma b^2 R(z)}, \quad a_2^{(1)} = \frac{2f(z_R) z^2 X(z) | \overline{k_2 - z} |}{b^2 R(z)}$$

$$a_3^{(1)} = \frac{2z^2 (z_R - z) X(z) | \overline{k_2 - z} |}{b^2 R(z)}$$

Подставляя (18) в (6), получим

$$\bar{u} = i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| a_n^{(m)} e^{i\tau_n^{(m)}(z)} - \frac{1}{2} \int_{\frac{z}{a}}^{\infty} \frac{a_n^{(m)}(z) z(\tau) e^{i\tau_3^{(m)}(\tau, z)}}{\tau - \frac{z}{a}} d\tau \right| dz$$

$$\bar{v} = i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| b_n^{(m)} e^{i\tau_n^{(m)}(z)} + \frac{1}{2} \int_{\frac{z}{a}}^{\infty} \frac{b_n^{(m)}(z) z(\tau) e^{i\tau_3^{(m)}(\tau, z)}}{\tau - \frac{z}{a}} d\tau \right| dz \quad (19)$$

$$a_1^{(2)} = \frac{[Q_1(k_2^2 - 2i^2) - 2P_1 \nu_{\alpha 1}^2] \xi_2}{2\pi i b^2 R(i)}$$

$$a_2^{(2)} = \frac{f(i, \alpha) (k_2^2 - 2i^2) X(i) |k_2 + i|}{b^2 R(i)} \tag{19}$$

$$a_3^{(2)} = \frac{(k_2^2 - 2i^2) (i_2 - i) X(i) |k_2 + i|}{b^2 R(i)}, \quad b_n^{(2)} = \frac{\xi_1}{i} a_n^{(1)}$$

$$y_1^{(2)} = -\frac{i}{\xi_2} a_1^{(2)}, \quad y_2^{(2)} = i(l - x) - y_1^{(2)}, \quad y_3^{(2)} = i_2 l - i x + y_2^{(2)}$$

$$y_4^{(2)} = -i_2 l - i x - y_3^{(2)}$$

Таким образом, получено решение второй задачи, периодическое по времени. Обратное преобразование по  $t$ , соответствующее решение нестационарной задачи, для которой в (4) вместо  $\exp(-i\omega t)$  стоит  $\delta(t)$ , имеет вид

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{i\omega t} u ds, \quad v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{i\omega t} v ds \tag{20}$$

где  $s = -i\omega$ .

При применении обратного преобразования Лапласа по  $t$  введем вместо  $i$  переменную  $\xi$ ,  $i = \xi - i\epsilon$ , где  $\epsilon > 0$  и мало. Существенными оказываются окрестности точек  $\xi = \xi_n^{(m)}$ , для которых выражения в экспонентах обращаются в нуль

$$f_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}) = t - \frac{\xi_n^{(m)}}{i} (\xi_n^{(m)}) = 0, \quad (n = 1, 2, 3; m = 1, 2) \tag{21}$$

причем сопряженные значения  $\bar{\xi}_n^{(m)}$  также удовлетворяют (21). Для определенности вычислим один из шести интегралов, содержащих указанные экспоненты

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} i a_1^{(1)}(\xi) e^{s f_1^{(1)}(\xi)} d\xi \tag{22}$$

где в силу однородности произведено сокращение на  $\omega$ , причем  $\omega$  множителе при экспоненте в подынтегральной функции всюду положено  $\omega = 1$ , что даст новые формулы для  $a_1^{(1)}(\xi)$ ,  $f_1^{(1)}(\xi)$ .

Пусть  $\omega > 0$ .

В силу малости  $\epsilon$ , можно условно контуры по  $\xi$  проводить по действительной оси  $\xi$  с обходом особых точек в верхней и соответственно нижней полуплоскости [10].

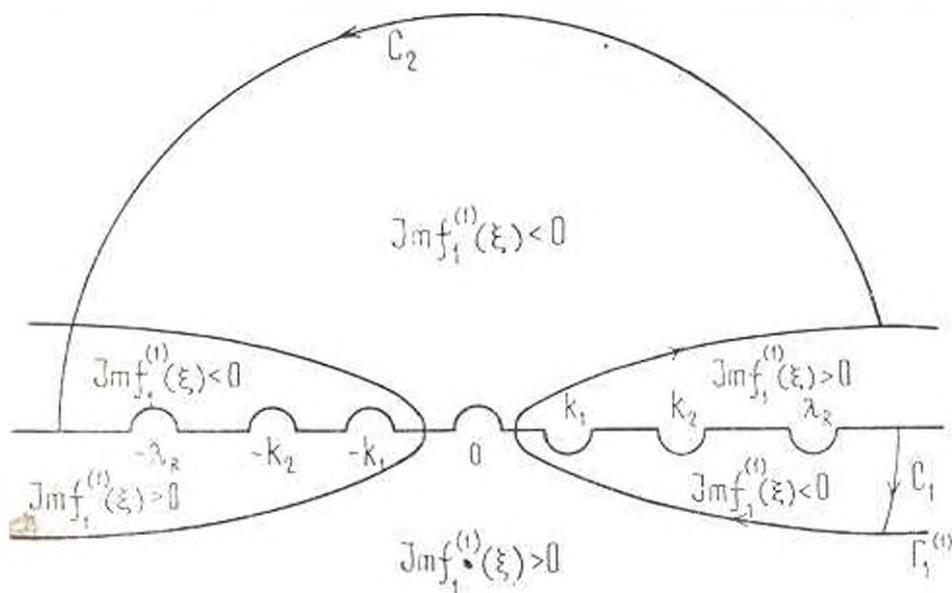
Заменим контур интегрирования  $-\infty < \xi < \infty$  на контур  $\Gamma_1^{(1)}$ , проходящий через указанные точки  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_1^{(1)}$  в направлении  $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\xi) = 0$ . Для этого нужно найти области постоянного знака  $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\xi)$ . Обозна-

чая  $f_1^{(1)}(\xi) = B$ , где величина  $B$  вещественна,  $\xi = z + i0$ , можно убедиться, что в плоскости  $(\xi, \eta)$  линия  $f_1^{(1)}(\xi) = B$  состоит из двух ветвей гиперболы

$$\frac{a^2 \xi^2}{x_1^2} - \frac{a^2 \eta^2}{y^2} = 1, \quad \xi_1^2 = x_1^2 + y^2, \quad x_1 = x + l$$

а также из отрезков действительной оси  $|\xi| < a^{-1}$ .

Пусть  $x > 0$ . Тогда, предполагая, что на мнимой оси  $|\alpha^{-2} - \xi^2| > 0$ , можно показать, что  $\text{Im} f_1^{(1)}(\xi) < 0$  в областях фиг. 3, где проходят дуги окружностей  $c_1$  и  $c_2$ . Тогда при  $\mu > 0$ , можно заменить интегрирование по действительной оси  $\xi$  на интегрирование по  $\Gamma_1^{(1)}$ . При  $\mu < 0$  вместо  $c_1, c_2$  берутся их дополнения до верхней и соответственно нижней полуокружностей, на которых  $\text{Im} f_1^{(1)}(\xi) > 0$ . Тогда интегрирование по действительной оси  $\xi$  заменится на интегрирование по  $\Gamma_1^{(1)}$  в обратном предыдущему направлении. Весь внутренний интеграл в (22) поменяет знак на обратный, а решение будет таким же, как при  $\mu > 0$ . При



Фиг. 3.

$x < 0$  точки  $\lambda_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}$  лежат на левых ветвях гиперболы фиг. 3. Контуры  $c_1, c_2$  заменяются симметричными относительно начала координат, и решение не изменяется. Итак, при любых  $\mu, x, y$  из (22) получим

$$H_1^{(1)} = \frac{1}{2-j} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{\Gamma_1^{(1)}} a_1^{(1)}(\xi) e^{sf_1^{(1)}(\xi)} d\xi \quad (23)$$

Вычисляя интеграл по  $z$ , окончательно получим

$$f_1^{(1)} = i \int_{\Gamma^{(1)}} a_1^{(1)}(\xi) \delta(f_1^{(1)}(\xi)) d\xi \quad (24)$$

Полагая вблизи точки  $\xi_1^{(1)}$   $f_1^{(1)}(\xi) = f_1^{(1)'}(\xi_1^{(1)}) (\xi - \xi_1^{(1)})$  и вычисляя интеграл от дельта-функции в точках  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_1^{(1)}$ , получим

$$f_1^{(1)} = 2 \operatorname{Re} i \frac{a_1^{(1)}(\xi_1^{(1)})}{f_1^{(1)'}(\xi_1^{(1)})} \quad (25)$$

При  $t < \frac{r_1}{a}$  решение  $f_1^{(1)}$  равно нулю. Аналогично (22) вычисляя остальные интегралы и подставляя в (20), получим

$$u = 2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \frac{a_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{n-1}}^{\infty} \frac{a_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) \delta(\gamma) d\gamma}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) (\gamma - \xi_n^{(m)}(\gamma))} \right]$$

$$v = 2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \frac{b_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{n-1}}^{\infty} \frac{b_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) \delta(\gamma) d\gamma}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) (\gamma - \xi_n^{(m)}(\gamma))} \right] \quad (26)$$

Аналогичным образом решается первая задача, решение которой дается формулами

$$u_1 = 2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \frac{A_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{n-1}}^{\infty} \frac{A_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) \delta(\gamma) d\gamma}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) (\gamma - \xi_n^{(m)}(\gamma))} \right]$$

$$v_1 = 2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \frac{B_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{n-1}}^{\infty} \frac{B_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) \delta(\gamma) d\gamma}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) (\gamma - \xi_n^{(m)}(\gamma))} \right] \quad (27)$$

где

$$A_1^{(1)} = \frac{Q_1 \xi_2}{b^2 R(t)}, \quad A_2^{(1)} = -\frac{f_1(t, x) X(t) (k_2^2 - 2t^2)}{b^2 R(t) |k_1 - t|}$$

$$A_1^{(2)} = \frac{(t_R - t) (k_2^2 - 2t^2) X(t)}{b^2 R(t) |k_1 - t|}, \quad A_2^{(2)} = \frac{Q_1 \xi_2 (k_2^2 - 2t^2)}{2ab^2 R(t)}$$

$$A_3^{(1)} = -\frac{2\xi_1 \xi_2 A_1^{(1)}}{k_1^2 - 2t^2}, \quad A_3^{(2)} = -\frac{2\xi_1 \xi_2 A_3^{(1)}}{k_2^2 - 2t^2}, \quad B_1^{(1)} = \frac{\xi_1 A_1^{(1)}}{t} \quad (28)$$

$$B_2^{(1)} = -\frac{t}{2} A_2^{(2)}, \quad B_1^{(2)} = \frac{[2Q_1 \xi_2 + P, (k_2^2 - 2t^2) |k_2^2 - 2t^2|, \sqrt{k_1}]}{2ab^2 (t - \lambda_R) R(t) X'(t)}$$

$$f_1(t) = \frac{Q_1(2\bar{z}_1^2 - k_1^2 - 2\bar{z}_1) + P_1 k_1^2 \bar{z}_1}{2\bar{z}_1 k_1^2 |k_1 - i| X(t)} \quad (29)$$

Легко убедиться, что решение общей задачи будет записываться в виде суммы полученных решений

$$U = u + u_1, \quad V = v + v_1$$

и будет удовлетворять всем граничным условиям.

Теперь определим коэффициенты интенсивности нормальных и касательных напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$ . Так как при  $x \rightarrow +0$ ,  $y = 0$ ,  $\sigma_{yy} + P_{yy} = K_I |2\bar{x}$ ,  $\tau_{xy} = K_{II} |2\bar{x}$ , то из (2) можно получить

$$k_I = |2\bar{z}| \operatorname{Re} \left( -\frac{f_1(e\bar{z}^{-1})}{(t - \sigma\bar{z}^{-1})^{3/2}} - \int_{\frac{t}{a}}^{\bar{z}} \frac{\sigma(z) dz}{(t - z)^{3/2}} \right) \quad \text{при } t > \frac{l}{a}$$

$$k_{II} = |2\bar{z}| \operatorname{Re} \left( \frac{f_1(e\bar{z}^{-1})}{(t - \sigma\bar{z}^{-1})^{3/2}} + \int_{\frac{t}{a}}^{\bar{z}} \frac{\sigma(z) dz}{(t - z)^{3/2}} \right) \quad \text{при } t > \frac{l}{a}$$

где функции  $f_1$ ,  $\sigma$ ,  $f_{II}$  даются формулами (11), (15), (28), (29).

Первая задача при  $l = 0$ ,  $P_1 = 0$ ,  $\bar{a} = a$  решена другим методом в [7], при этом решение совпадает с решениями (27), а при  $l = 0$ ,  $Q_1 = 0$ ,  $\bar{a} = a$  в работе [12].

Автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский педагогический институт  
им. Х. Абовяна

Получено 12 II 1974

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՅԱՆ

ՄԱՏԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՐԱԳՎԱՅԻՐ ԶՈՒՄԻ ԱԶ ԽՅՅՅՐՈՂԱՐ  
ԵՊԻՍՏՈՒ ԿՆԻՒՐ ԼԻՆԵՆՈՒՐԸ

Ա Վ Փ Ո Ւ Ո Վ

Գրատեղեկում է ներդրանքով համաստեփանցող մաթեմատիկական հարթության շարժման խնդիրը, երբ ներքի եզրի վրա կիրառված են կամուրջային նորմալ և շոշափող ֆունկցիաներ: Լուծումը զանգված է ինտեգրալ մեթոդախաբայանների օգնությամբ Վերնը-Շոֆի մեթոդի նախապես կիրառումով, իսկ աշխուհեան ոչ ստացիոնար դեպքում լուծումը բերվում է Մեյրնոփ-Մարտիկ տեսքի:

Ստացվել են բունաձևեր լարումների բաշխման համար: Որոշվել է նաև լարումների ինտենսիվության գործակիցը

## A SOLUTION TO THE UNSTEADY BOUNDARY PROBLEM FOR MAGNETOELASTIC MEDIUM

A. N. MARTIROSIAN

## S u m m a r y

The problem on motion of a homogeneous isotropic magnetoelastic plane with a cut, to whose boundaries are applied certain arbitrary normal and tangential impulses, is considered. The solution is found by integral transformations with subsequent application of the Winner-Hopf technique and later, for the unsteady case, it is reduced to the Smirnov-Sobolev form. The formulae for stress distribution throughout the medium as well as the coefficient of stress intensity are derived.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фрэнк Ф., Миесс Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, А.—М., 1937.
2. Зволлинский Н. В. Отраженные и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. Изв. АН СССР, серия геофизическая, № 10, 1957.
3. Бабич В. М. и др. Линейные уравнения математической физики. М., Наука, 1964.
4. Афанасьев Е. Е., Черенинов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости, ПММ, т. 37, № 4, 1973.
5. Зволлинский и др. Некоторые задачи дифракции упругих волн. Приложения теории функций и механике сплошной среды. Изд. Наука, М., 1965.
6. Кистров В. М. Асимптотические динамические задачи о взаимодействии жесткого штампа в упругом полупространстве. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 6, 1964.
7. Свекло В. А. Задача Лэмба при смешанных граничных условиях. Докл. АН СССР, т. XCV, № 4, 1954.
8. Свекло В. А. Смешанные задачи для упругой анизотропной полуплоскости. ПММ, т. XXVI, вып. 5, 1962.
9. Осипов И. О. О волновых полях и остроугольных краях на волновых фронтах. ПММ, т. 36, вып. 5, 1972.
10. Дуба Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.
11. Черенинов Г. П. Дифракция упругих волн на разрезе. В кн. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (К 50-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., Наука, 1972.
12. Baker B. R. Dynamic stresses created by a moving crack. Trans ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., vol. 29, № 3, 1962.
13. Флитман А. М. Волны, вызванные мгновенным разрывом сплошности упругой среды. ПММ, т. 27, № 4, 1963.
14. Cagniard L. Reflexion et réfraction des ondes sismiques progressives. Paris, Gauthier Villars, 1939.
15. Kuliski S. and Pelgketeletz I. Dynamical equations for elastic and inelastic, anisotropic bodies in magnetic field. Proc. Vibr. probl., 1959, № 2, Warsaw.
16. Münn A. W. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. ZAMM, Bd. 34, H. 1-2, 1954.

Ա. Գ. ՍԵՏՐՈՍՅԱՆ

### ՕՒ ԵԴՈՒ ԶԱԴՈՒ ԱՏԻՄԵՏՐԻՇԵՍԿՈՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ԿԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԻ

Իււոնաւոյս օճոճնաւոյս աՏԻՄԵՏՐԻՇԵՍԿՈՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ԿԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԻ: ՏՐՈՒՅԵՆ ԱՐԱՄԵՆԱՅԻՆ ՍԼՈՒՍՆԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՍՐՈՎՈՅԴԱՅԻՆ ԿԻԴՐՈՒՄ ԵՒ ԲՈՅՈՒՄ ԵՒ ԲԵՏՈՒՆԵՄԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՍՐՈՎՈՅԴՈՒՄ: ՍՐԻ ԷՏՈՒ ԱՄԻՏՅԱՅԵՆ ԱՒԼԻՑԻ ԵՒ ԿԻԴՐՈՒՄ ՄՈՄԵՆՏՆԱՅԻՆ ՆԱՍՏՅՈՒՆՆԵՐԻ, ՆԵՏԻՄԵՏՐԻՇԻՑՈՒ ՏԵՆՅՈՒՐ ՆԱՍՏՅՈՒՆԻ ԵՒ ԻՆԵՐՑԻԱ ՎԵՐՄԻՍՏՅԱՅԻՆ ԿԻԴՐՈՒՄ ՍՐԻ ՎՐԱՅՈՒՆՆԵՐԻ: ՐԱՏՄԱՏՐԻՅԱՅԵՆ ԱՅՈՒՄԻՆ ՎԵՐՄՈՒՄԵՐՈՒ ՏԵՄԵՆԻ Ա ՏՐՈՒԲԵ: ՍՐԻՎՈԴԻՏԵՆ ՐԵՏՈՒՆԵՆ ԶԱԴՈՒ ՍԼՈՒՍՊԱՐԱՒԵՐՈՒՄԻ ԱՍՏԱՆՈՒՄԻՆ ԿԵՐԱՄԱՐՈՒՄԻ ՆԱՍՏԱՅԻՆ ԿԵՐԱՄԱՐՈՒՄԻ ՆԱՍՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՍՐՈՎՈՅԴՈՒՄ ԵՒ ՍՐՏԱՆՈՒՄԻ ԷԼԵԿՏՐՈՍՐՈՎՈՅԴՈՒՄ ԵՄԵՂԱ ԴՅՈՒՄ ԱՐԱՄԵՆԱՅԻՆ ՆԱՐԱՒԵՐՈՒՄԻ ԻՅՈՒՐՈՒՄԻ ՆԱՍՏԱՅԻՆ ՏԵՆԿԱՅԻՆ ԵՒ ՕԴԻՐՈՒՄԻ ՆԱՍՏԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՄՈՒԼԵ:

#### § 1. ԱՐԱՄԵՆԱՅԻՆ ԱՏԻՄԵՏՐԻՇԵՍԿՈՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ԿԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԻ

ՐԱՏՄԱՏՐԻՅԱՅԵՆ ՄԱՏԵՐԻԱԼՆԵՐԻ ԻՅՈՒՐՈՒՄԻ ԷԼԵԿՏՐՈՍՐՈՎՈՅԴԱՅԻՆ ԿՈՆՏԻՆՈՒՄ ԵՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՄՈՒԼԵ, ԴՅՈՒՄ ԿՈՒՅՄՈՒՄԻ ՆԱՍՏԱՅԻՆ ԶԱԿՈՒՆ ԵՒ ՄԵԿԱՆԻԿԱ ԵՒ ԱՄԵՂԱՄ ԱԵԿՏՐՈՄԱԳՆԻՏՆԱՅԻՆ ՏՐԻՆ ԱՒՆԻՏԻՆԱԼՆԵՐԻ ՎՈՐՄԵՂԱՅԵՆ ՓՈՐՄԻՆ ԿԵՐԱՄ ՎԵՂԱՅԵՆ [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= 0, \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} dV = \int_S \mathbf{t} dS - \int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_V \rho \mathbf{c} dV \\ \frac{d}{dt} \int_V (\rho \mathbf{r} \otimes \mathbf{v} + \rho \boldsymbol{\omega}) dV &= \int_S (\rho \mathbf{t}_s + \rho \mathbf{m}_s) dS - \int_V (\rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{c}) dV \\ &\quad + \int_V (\rho \mathbf{f}_{\omega}) dV \\ \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \pi + \frac{\rho \omega^2}{2} \right) dV &= \int_S (\mathbf{t}_s \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{m}_s \cdot \boldsymbol{\omega}) dS \\ &\quad - \int_V \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} dV - \int_V (\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV - \int_V \rho A dV \end{aligned} \quad (1.1)$$

ԶԵՂԵՆ  $d(\dots)/dt$  — ՍԵՂԱՅԵՆ ՎՈՐՄՈՒՄԻ ԿՈՒՅՄՈՒՄԻ ՄԱՏԵՐԻԱԼՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆԵՐՈՒՅՐ ՏԵՂԵԳՈՒՄԻ,  $\rho$  — ՄԱՏԵՐԻԱԼՆԵՐԻ ՊԵՐՏՈՒՄԻ ՊԵՐՏՈՒՄԻ,  $\mathbf{r}$  — ՐԱԴԻՍՆԱՅԻՆ ՎԵԿՏՈՒՐ ՏՈՒՑԻ ԿՈՒՅՄՈՒՄԻ,  $\boldsymbol{\nabla}$  — ՍՐՏՐԱՏՅԱՅԻՆ ԳՐԱԴԻԵՆՏ,  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  — ՎԵԿՏՈՒՐ ՍԵՂՈՒՄԻ ՏՈՒՑԻ,  $\boldsymbol{\omega}$  — ՎԵԿՏՈՒՐ, ԿՐԱԿՏԵՐԻՅԱՅԵՆ ՏՐԵՄԻՄԱՅԻՆ ԱՂՍՈՒՄԻ ՍԵՂՈՒՄԻ ՎՐԱՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՂԱՅԵՆ ԿԵՐԱՄ ՎԵՂԱՅԵՆ

торых состоит точка континуума,  $q$  — вектор теплового потока,  $u$  — внутренняя удельная энергия,  $J$  — среднее значение момента инерции единицы массы в точке структурного континуума [1, 3],  $A$  — приток энергии к единице объема со стороны электромагнитного поля. Соотношения (1.1) имеют место для материального континуума, если предположить, что в каждой точке произвольного материального объема  $V$  приложен вектор внешней массовой силы  $f$ , внешняя объемная сила воздействия электромагнитного поля с плотностью  $f_{em}$ , вектор внешнего массового момента  $l$ , в каждой точке поверхности  $S$  объема  $V$  приложен вектор силового напряжения  $l_n$  и вектор моментного напряжения  $m_n$ . Уравнение изменения энергии (1.1) написано в предположении, что вектор моментного напряжения  $m_n$  и вектор  $l$  производят работу только на перемещениях внутреннего вращения [1, 4].

Плотность электромагнитной силы равна [2]

$$f_{em} = \rho_e E + j \times B \quad (1.2)$$

где  $E$  — вектор напряженности электрического поля,  $B$  — вектор магнитной индукции,  $\rho_e$  — плотность заряда,  $j$  — плотность тока.

Приток энергии за счет внешнего электромагнитного поля будет [2]

$$A = j \cdot E \quad (1.3)$$

Воспользуемся соотношениями, связывающими диаду силовых напряжений  $\tau$  и диаду моментных напряжений  $\mu$  соответственно с вектором силовых напряжений  $l_n$  и вектором моментных напряжений  $m_n$  [5]

$$l_n = n \cdot \tau, \quad m_n = n \cdot \mu \quad (1.4)$$

Здесь  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

Принимая во внимание известные формулы диадного исчисления [6, 7] и (1.4), из (1.1) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v &= 0, & \rho \frac{dv}{dt} &= \nabla \cdot \tau + \rho f + f_{em} \\ \Delta \cdot \mu + \rho \epsilon + \tau : l &= \rho j \frac{d\omega}{dt} \\ \rho \frac{d\omega}{dt} &= \tau : \nabla v - (\tau \cdot l) \cdot \omega + \mu : \nabla \omega - \tau \cdot q - A - f_{em} \cdot v \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь операция  $(\cdot)$  означает, что левые множители диад перемножаются векторно, а правые — скалярно, операция  $(:)$  показывает, что левые и правые множители диад перемножаются скалярно [6],  $l$  — единичная пространственная диада.

Всюду в дальнейшем будем считать среду двухпараметрической, то есть считать, что все термодинамические величины (например, тем-

пература  $T$  и внутренняя энергия  $u$ ) и вообще все величины, характеризующие среду при термодинамическом равновесии, являются функциями двух параметров: плотности и давления.

Отметим, что в то время, как первое и второе уравнения системы (1.5) хорошо известны из классической теории магнитной гидродинамики, последние два уравнения этой системы являются новыми. Эти уравнения приводятся к классическим результатам

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_e^* \\ \rho \frac{du}{dt} &= \tau : \nabla v - \tau \cdot q - A - f_{\text{ext}} \cdot v \end{aligned} \quad (1.6)$$

если

$$\mu = \epsilon = \omega = 0$$

Разделим диаду силовых напряжений  $\tau$  на симметричную  $\tau^d$  и антисимметричную  $\tau^a$  части

$$\tau = \tau^d + \tau^a$$

Антисимметричной частью  $\tau$  является [6]

$$\tau^a = -\frac{1}{2} I \times (\tau \cdot I)$$

Следовательно, из (1.5) получаем, что

$$\tau^a = \frac{1}{2} I \times \left( \tau \cdot \mu + \mu \cdot \tau - \rho J \frac{d\omega}{dt} \right) \quad (1.7)$$

Из (1.7) следует, что несимметричность диады напряжений  $\tau$  обусловлена наличием моментных напряжений, массовыми моментами, а также внутренним вращением частиц.

При  $J = 0$  несимметричность диады напряжений обусловлена наличием моментных напряжений и массовыми моментами [6].

Отсюда и происходит название теории — теория асимметрической гидродинамики (в частности, асимметрической магнитной гидродинамики). В классической теории  $\mu = \epsilon = \omega = 0$ , поэтому диада напряжений  $\tau$  симметрична.

Таким образом, асимметрическая гидродинамика (магнитная) отличается от обычной классической гидродинамики (магнитной) уточнением напряженного состояния, которое характеризуется асимметрической диадой силовых напряжений  $\tau$  и моментных напряжений  $\mu$ .

Представим диады  $\tau$ ,  $\nabla v$ ,  $\nabla \omega$ ,  $\mu$  в форме

$$\begin{aligned} \tau &= (\pi_0 - p)I + \pi^s + \pi^d, & \tau &= -pI + \pi \\ \mu &= \eta_1 I + \mu^s + \mu^d, & \nabla v &= \frac{1}{3} \nabla \cdot v I + (\nabla v)^s + (\nabla v)^d \end{aligned}$$

\* Здесь индексом  $\epsilon$  обозначена сопряженная диада.

$$\begin{aligned} \gamma \omega &= \frac{1}{3} \gamma \cdot \omega I = (\gamma \omega)^s + (\gamma \omega)^a \\ \pi_0 &= \frac{1}{3} \pi : I, \quad \mu_0 = \frac{1}{3} \mu : I \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $p$  — равновесное давление,  $\pi_0$  и  $\mu_0$  соответственно  $1/3$  следа диады  $\pi$  и  $\mu$ , индексом  $a$  отмечены антисимметричные диады с нулевым следом, индексом  $s$  — симметричные диады с нулевым следом.

Воспользуемся следующими линейными связями [7]:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \gamma_0 \nabla \cdot v, \quad P^a = \gamma_a (\nabla \times v - 2\omega) \\ \pi^d &= 2\gamma_d (\nabla v)^d, \quad \mu_0 = c_0 \nabla \cdot \omega \\ \mu^a &= -\beta I \times \nabla T - 2c_a (\gamma \omega)^a, \quad \mu^s = 2c_s (\gamma \omega)^s \\ q &= -\kappa \nabla T + \beta T \nabla \times \omega \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заметим, что при выводах были произведены замены диады  $\pi^a$  на эквивалентный ей псевдовектор  $P^a = \frac{1}{2} \nabla \times v$  и диады  $(\gamma \omega)^a$  — на псевдовектор  $\frac{1}{2} \nabla \times \omega$  [7].

Феноменологические коэффициенты в этих уравнениях суть теплопроводность  $\kappa$ , объемная вязкость  $\gamma_0$ , динамическая ньютоновская вязкость  $\gamma_d$ , динамическая вращательная вязкость  $\gamma_a$ , динамические моментные вязкости  $c_s$ ,  $c_a$ ,  $c_d$ .

Величины  $\gamma_0$ ,  $\gamma_d$ ,  $\gamma_a$ ,  $c_s$ ,  $c_a$ ,  $c_d$ ,  $\beta$  — положительные скаляры, характеризующие изотропные свойства среды [3, 7].

Из (1.9) видно, что несимметричность диады моментных напряжений обусловлена как несимметричностью диады  $\gamma \omega$ , так и градиентом температуры. Наличие  $\nabla \times \omega$  приводит к возникновению теплового потока.

Используя (1.2), (1.8) и (1.9), из (1.5) находим, что

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} &= -\nabla p + \nabla (\gamma_0 \nabla \cdot v) + 2\gamma_d [\gamma (\nabla v)]^d + \\ &+ \nabla \cdot [\gamma_a (2\omega - \nabla \times v)] + \rho f + \gamma_s E + j \times B \\ \rho j \frac{d\omega}{dt} &= \nabla (c_s \nabla \cdot \omega) + 2\gamma_a [c_d (\gamma \omega)]^a + 2\gamma_s (\nabla \times v - 2\omega) + \rho \kappa + \\ &+ 2\gamma_a [c_a (\gamma \omega)]^a - \nabla \cdot (\beta I \times \nabla T) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Электрические величины, фигурирующие в уравнении (1.10), как известно, зависят от распределения в пространстве электромагнитного поля, которое удовлетворяет системе уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме записываются в виде [2, 8]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= j \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{div} B &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $H$  — вектор напряженности магнитного поля. Можно принять, что относительные диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость близки к единице  $\epsilon \approx \mu \approx 1$  и что электрическая проводимость жидкости  $\epsilon$  постоянна и изотропна.

Вектор магнитной индукции  $B$  определяется соотношением

$$B = \mu_0 H \quad (1.12)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

Обычно можно полагать, что для изотропного вещества величина  $\mu_0$  является постоянной.

В качестве уравнения, связывающего плотность тока с другими параметрами и замыкающего вместе с (1.12) систему уравнений электродинамики, воспользуемся обобщенным законом Ома (без учета эффекта Холла) для движущихся сред в форме [2, 8]

$$j = \epsilon [E + v \times B] \quad (1.13)$$

Кроме того, надо иметь в виду закон сохранения заряда

$$\operatorname{div} j = 0 \quad (1.14)$$

что легко получить из уравнений Максвелла (1.11) в рассматриваемом приближении.

В задачах магнитной гидродинамики обычно пренебрегают эффектами, связанными с влиянием электрической силы  $j \times E$  на течение [2].

Для несжимаемой жидкости уравнения движения асимметрической магнитной гидродинамики запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \omega &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla^2 (\nabla v) + \nu_0 \nabla \times [2\omega - \nabla \times v] - \frac{1}{c} j \times B \\ j \frac{d\omega}{dt} - 2\nu_0 (\nabla \times v - 2\omega) + c_0 \nabla (\nabla \cdot \omega) + 2c_1 \nabla \cdot (\nabla \omega) + 2c_2 \nabla \cdot (\nabla \omega) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь  $\nu$  — кинематическая ньютоновская вязкость,  $\nu_0$  — кинематическая вращательная вязкость,  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  — коэффициенты моментной вязкости.

## § 2. Уравнение равномерного установившегося движения в трубе

Рассмотрим общий случай равномерного течения в трубе.

Приведем уравнения (1.11), (1.13), (1.15) к безразмерному виду. В качестве характерной длины возьмем  $L$ , характерной скорости  $V_0$  и угловой скорости  $V_0/L$ , а для индукции магнитного поля —  $B_0$ . Тогда для плотности электрического тока, исходя из (1.11), с учетом (1.12), получаем характерную величину  $B_0/L$ . Характерную величину напряженности электрического поля при отсутствии внешних источников тока получим из (1.13) в виде  $V_0 B_0$ . В качестве масштабных времени и давления примем соответственно  $L/V_0$  и  $\rho V_0^2$ .

Уравнения (1.11), (1.13), (1.15) с учетом (1.12) в безразмерном виде запишутся так:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \frac{2}{K} \nabla \cdot (\tau v) - \frac{1}{K} \nabla \cdot [2\omega \times v] + A^2 (j - B) \quad (2.1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2E_h}{K} (\nabla \cdot v - 2\omega) + \frac{E_r}{R_0} \nabla (\nabla \cdot \omega) - \frac{2E_r}{R_d} \nabla (\nabla \omega)^2 - \frac{2E_r}{R_s} \nabla (\nabla \omega)^n \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \nabla \times B = j$$

$$j = K_1 (E + v \times B) \quad (2.3)$$

Здесь

$$K = \frac{V_0 L}{\nu}, \quad R_0 = \frac{V_0 L}{c_0}, \quad A^2 = \frac{B_0}{V_0 l \mu_0}$$

$$E_r = \frac{L^2}{j}, \quad R_d = \frac{V_0 L^2}{c_d}, \quad R_s = \frac{V_0 L^2}{c_s}$$

$$\mu_0 = \frac{V_0 L^2}{c_0}, \quad R_1 = \mu_0 V_0 L = \frac{V_0 L}{\eta} \quad (2.4)$$

где  $\eta = \frac{1}{\mu_0}$  — коэффициент магнитной вязкости (диффузии).

Из уравнений (2.3) легко получить уравнение индукции

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \cdot (v \times B) + \frac{1}{K_1} \nabla^2 B \quad (2.5)$$

Выражение для безразмерной лоренцовой силы, с учетом (2.3), можно записать так:

$$A^2 (j - B) = A^2 K_1 (E + v \times B) \times B \quad (2.6)$$

\* Обозначения для безразмерных величин сохраним те же, что и для размерных.

Отсюда следует, что порядок величины лоренцовой силы оценивается произведением  $At^2 \cdot R_z$ , а это равно числу Стюарта  $N = \frac{B_0^2 l}{\rho V_0}$ .

В стационарных задачах уравнение (2.3) позволяет ввести скалярный электрический потенциал  $\varphi$  равенством

$$E = -\nabla\varphi$$

Потенциал электрического поля  $\varphi$  можно получить из (2.3), если учесть условие сохранения заряда (1.14). Тогда

$$\nabla^2\varphi = \tau \cdot [\tau \cdot B] \quad (2.7)$$

Будем предполагать трубу бесконечно длинной, а поток — направленный вдоль оси трубы, так что из трех компонент скорости ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) остается лишь одна  $u$ , а остальные два равны нулю.

Если учесть одномерность течения и равенство (2.6), то уравнения движения (2.1) и (2.2) и уравнение для потенциала (2.7) в рассматриваемой задаче принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_s} \right) \tau^2 u &= \frac{2}{R_s} \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) + \\ &+ N \left[ b_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - b_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - u(b_y^2 - b_z^2) \right] \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= N \left[ b_z \frac{\partial z}{\partial x} - b_x \frac{\partial z}{\partial z} - ub_y b_z \right] \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= N \left[ b_x \frac{\partial z}{\partial y} - b_y \frac{\partial z}{\partial x} + ub_z b_x \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{R_s} \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - 2\omega_x \right) + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) + \frac{2}{R_s} \left( \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y \partial z} + \frac{1}{R_s} \left( \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y \partial z} \right) = 0 \\ - \frac{2}{R_s} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - 2\omega_x \right) + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) + \\ + \frac{2}{R_s} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{R_s} \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y \partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial ub_x}{\partial z} - \frac{\partial ub_z}{\partial y} \quad (2.10)$$

Из (2.3) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} &= -R_s \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} \\ \frac{\partial b_x}{\partial z} &= -R_s \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} - ub_z \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} = R_z \left( \frac{\partial v}{\partial z} - ub_y \right) \quad (2.11)$$

и

$$\frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

Как следует из (2.3), величина  $R_z \frac{\partial v}{\partial x}$  равна составляющей плотности электрического тока по направлению оси  $x$ , то есть

$$j_x = -R_z \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Она не зависит от движения. Следовательно,  $j_x$  — плотность тока, подводимого извне и должна быть задана. Отсюда вытекает, что  $b_y$  и  $b_z$  определяются из первого уравнения (2.11) и (2.12) и граничных условий задачи независимо от движения. Зависящий от движения компонент индукции магнитного поля  $b_x$  может быть найден из (2.11) после определения поля скоростей. Поле скоростей и потенциалов может быть найдено из (2.8), (2.9), (2.10) независимо от магнитного числа Рейнольдса  $R_z$ .

### § 3. Равномерное плоскопараллельное течение в поперечном магнитном поле

Отыскание точных решений уравнений асимметрической магнитной гидродинамики наталкивается в общем случае на непреодолимые математические трудности. Тем не менее в некоторых частных случаях все же можно найти точные решения уравнений асимметрической магнитной гидродинамики.

Особенно простой класс точных решений представляют так называемые *слоистые течения*, для которых характерно, что как скорости точек, так и средняя скорость вращения частиц имеют лишь одну составляющую.

В качестве простого примера применения изложенных выше положений рассмотрим плоскопараллельное установившееся ламинарное течение несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью и постоянной электропроводностью между двумя прямыми параллельными изолированными стенками в однородно-поперечном магнитном поле.

Пусть плоскости стенок расположены при значениях координат  $y = \pm b$ , скорость  $u$  направлена по оси  $x$ , а приложенное магнитное поле имеет постоянную индукцию  $B_y$ , которая направлена по оси  $y$ .

Поскольку в плоскопараллельном установившемся движении все производные по  $z$  тождественно равны нулю, кроме  $\partial z \partial z = \text{const}$ , то системы уравнений (2.8) и (2.9) в размерном виде запишутся так:

$$\frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx} = (\nu + \chi) \frac{d^2 u}{dy^2} + 2\chi \frac{du}{dy} + \frac{\chi}{\nu} (B_x E_z - B_z^2 u) \quad (3.1)$$

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{c_u + c_d}{2\nu} \frac{d^2\sigma}{dy^2} - 2\sigma \quad (3.2)$$

Здесь

$$\nu = \omega r, \quad B_y = B_0$$

Уравнение (2.10) дает

$$-\frac{\sigma_T}{\sigma z} = \text{const} = E. \quad (3.3)$$

Решение системы (3.1) и (3.2), как уже указывалось, не зависит от наведенного магнитного поля  $B_0$ .

Система дифференциальных уравнений (3.1) и (3.2) решается методом исключения.

Общее решение есть

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{c_u + c_d}{2\nu} \left( C_1 k_1 e^{k_1 y} + C_2 k_2 e^{k_2 y} - C_3 k_1 e^{-k_1 y} - \right. \\ &\quad \left. - C_4 k_2 e^{-k_2 y} \right) - 2C_1 \frac{1}{k_1} e^{k_1 y} - 2C_2 \frac{1}{k_2} e^{k_2 y} - \\ &\quad - 2C_3 \frac{1}{k_1} e^{-k_1 y} - 2C_4 \frac{1}{k_2} e^{-k_2 y} - C_5 \\ \omega &= C_1 e^{k_1 y} + C_2 e^{k_2 y} + C_3 e^{-k_1 y} + C_4 e^{-k_2 y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \left| \frac{1}{2} a_1 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}} \right) \right|^{1/2}, \quad k_2^2 = \left| \frac{1}{2} a_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}} \right) \right|^{1/2} \\ a_1 &= \frac{4\nu}{\nu + \nu_r} \frac{\nu_r}{c_u + c_d} \frac{H_a^2}{b^2 (1 + \nu_r/\nu)} = \frac{1}{b^2} \left( i^2 + \frac{H_a^2}{1 + \nu_r/\nu} \right) \\ a_2 &= \frac{4\nu}{\nu + \nu_r} \frac{\nu_r}{c_u + c_d} \frac{H_a^2}{b^2} = i^2 \frac{H_a^2}{b^2} \\ i &= \left( \frac{4\nu}{\nu + \nu_r} \frac{\nu_r}{c_u + c_d} \right)^{1/2} b^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  — произвольные постоянные, которые должны быть определены из граничных условий,  $H_a$  — число Гартмана:

$$H_a = B_0 b \left( \frac{\nu}{\gamma \nu} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

\* Рассматривается случай, когда  $a_1^2 > 4a_2$ .

Мы предполагаем, что жидкость прилипает к границе при  $y = \pm b$ , тогда граничные условия для скорости и вращения частиц будут

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \\ u = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b \end{aligned} \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.4) с учетом граничных условий (3.7) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_{cp}} = \frac{1}{M} \left[ (\operatorname{ch} k_1 a - \operatorname{ch} k_1) \left( \frac{k_1}{i^2 \nu + \nu_e} - \frac{1}{k_1} \right) - \right. \\ \left. - (\operatorname{ch} k_2 a - \operatorname{ch} k_2) \left( \frac{k_2}{i^2 \nu + \nu_e} - \frac{1}{k_2} \right) \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

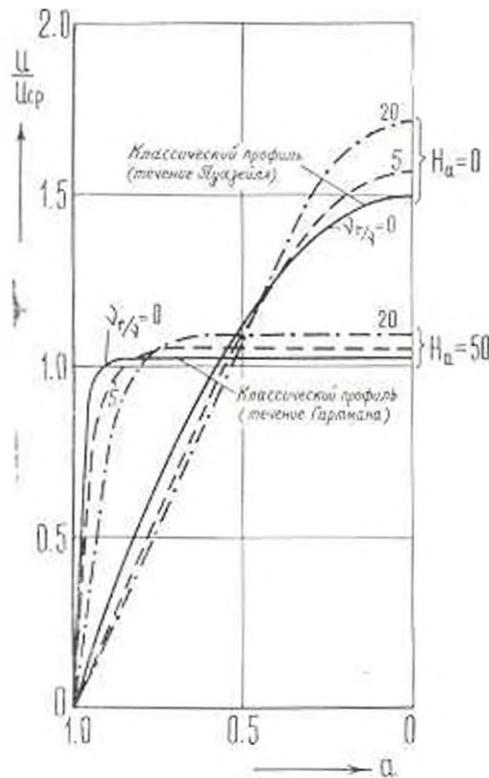
$$\frac{\omega b}{u_{cp}} = \frac{1}{2M} \left( \operatorname{sh} k_1 a - \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \operatorname{sh} k_2 a \right) \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} u_{cp} = \frac{Q}{2b} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b u dy = \left( u_0 + \frac{z B_0 E_0 b^2}{2 \nu_e} \right) \frac{\beta}{D} \\ M = \left( \frac{1}{k_1} \operatorname{sh} k_1 - \operatorname{ch} k_1 \right) \left( \frac{k_1}{i^2 \nu + \nu_e} - \frac{1}{k_1} \right) - \\ - \left( \frac{1}{k_2} \operatorname{sh} k_2 - \operatorname{ch} k_2 \right) \left( \frac{k_2}{i^2 \nu + \nu_e} - \frac{1}{k_2} \right) \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \\ D = \frac{1}{i^2} \left( k_1^2 - \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} k_2^2 \right) - \left( k_1 - \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} k_2 \right) - \\ - \frac{\nu}{\nu + \nu_e} \frac{H_0^2}{i^2} \left( k_1 - k_2 \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \right) + H_0^2 \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \right) + \\ + \frac{\nu}{\nu + \nu_e} \frac{H_0^2}{i^2} \left( k_1 \operatorname{ch} k_1 - k_2 \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \operatorname{ch} k_2 \right) - \\ - H_0^2 \left( \frac{1}{k_1} \operatorname{ch} k_1 - \frac{1}{k_2} \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \operatorname{ch} k_2 \right) \\ k_1 = \bar{k}_1 b, \quad k_2 = \bar{k}_2 b, \quad a = \frac{y}{b} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $u_0 = -\frac{1}{2} b^2 (\nu_e)^{-1} \frac{dP}{dx}$  — максимальная скорость в классическом течении Пуазейля, которая достигается при  $y = 0$ . Решение (3.8) переходит в классическое течение Гартмана при  $\nu_e = 0$  и (3.9) дает  $\omega = 0$ .

Так как  $\gamma$ ,  $\nu$ ,  $c_0$ ,  $c_1$  неотрицательны [1, 3, 7], то  $\nu$  — действительное число.



Фиг. 1.

На фиг. 1 изображено отличие скорости от классического течения Гартмана для различных значений  $\gamma_c/\nu$  (при  $\nu = 1$ ) при двух значениях числа Гартмана ( $H_a = 0$ ;  $H_a = 50$ ).

Ер-ванский государственный  
университет

Получено 1 II 1974

✍

Л. Г. ПЕТРОСЯН.

ԱՐԻՄԵՏՐԻԿ ԻՐԱՆՈՒԹՅԱՆ ԶԻՐՈՒԹՅԱՄԻՐՈՒՄԸ ԵՎ ԿՆՔԻ ԿՈՍՄՈՍ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Ուսումնասիրում են տարբերիչ մադելուսիան շեղողինամիկայի հիմնական նախասարումները, կազմված են էլեկտրահաղորդիչ ճեղքի շարժման նախասարումները մեծ կամ անսահման էլեկտրահաղորդականության դեպքում: Ընդ որում նաշփի են ստեղծված ճեղքուիում սակա մոմենտապին լարումները, լարումների սենյգրի ոչ սիմետրիկալյուներ և ճեղքի պատման դեպքում նրա մասնիկների ինեդրիան: Էքտարիկվում է խողովակի ճեղքի նախասարումալի

Նարթի քնդանոր գեղրր: Թերլած է Երկու զուգահեռ մեկուսացված Նարթ պատերի միջև Նամասեռ լաշտական մաղնիսական զաշատու անսեղմելի էլեկտրա՝ ազդողիչ Նեղուկի Նարթ զուգահեռ կաշունացված լամբիտր շարժման խնդրի լուծումը:

## ON A PROBLEM OF ASYMMETRIC MAGNETOHYDRODYNAMICS

L. G. PETROSIAN

### S u m m a r y

The equations of asymmetric magnetohydrodynamics are examined; the equations of continuous electrically conducting liquid of great or infinite electroconductivity are derived, the presence of coupled stresses in liquid, the asymmetry of stress tensor and the rotation inertia of liquid particles being taken into account. The general case of uniform flow in the duct is discussed. The solution to the problem of one-dimensional steady laminar flow of incompressible fluid of constant viscosity and electroconductivity between two plane parallel isolated walls in a homogeneous transverse magnetic field is presented.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Grad H* Statistical Mechanics, Thermodynamics, and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Number of Integrals. *Commun. Pure. App. Math.*, v. 5, 1952, p. 455.
2. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. (Физматгиз, М., 1962).
3. *De Groot S. R., Mazur P.* Non-equilibrium Thermodynamics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962; русск. пер. Де-Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Изд. Мир, 1964.
4. *Cundiff D., Dahler I.* Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress, *The Physics of Fluids*. Publ. by the American institute of Physics, vol. 7, № 6, 1964.
5. *Ашман М.* Векторное исчисление. ОНТИ, М.-Л., 1935.
6. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of Couplestresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, № 5; русск. пер: Механика, Сб. пер. ИЛ, № 4 (86), 1964.
7. *Низел Ван Двен, Листров А. Т.* О неизоэргической модели несимметричных жидкостей. *Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа*, № 5, 1967.
8. *Бай Шан* Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Изд. Мир, М., 1964.

Н. А. ВЕКОВИЦЕВА

ИЗГИБ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЙ ПО ВСЕМУ КОНТУРУ

Рассмотрим краевую задачу об изгибе тонкой прямоугольной пьезоэлектрической пластинки, опертой (шарнирно закрепленной) по всему контуру. В работе [1] получено, что задача сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций  $w(x_1, x_2)$  — прогиба срединной плоскости и  $V(x_1, x_2)$  — распределения потенциала срединной поверхности

$$L_4 w - \frac{1}{4\pi} \frac{2}{h} L_2 V = q, \quad L_3 w - \frac{2}{h} L_2 V = 0 \quad (1)$$

Здесь линейные операторы с частными производными

$$\begin{aligned} L_4 &= B_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 4B_{13} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2(B_{32} + 2B_{33}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ &\quad - 4B_{23} \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + B_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \\ L_2 &= B_{14} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (B_{15} - 2B_{31}) \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (B_{24} + 2B_{25}) \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial x_1^2} - B_{22} \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \\ L_3 &= B_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2B_{45} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - B_{55} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (2)$$

$q = q(x_1, x_2)$  — интенсивность распределенной нагрузки, действующей на пластинку нормально к срединной плоскости в ее недеформированном состоянии.  $B_{ij}$  — постоянные коэффициенты, связанные с толщиной  $h$  и материальными константами среды.

Краевая задача состоит в определении двух неизвестных функций  $w$  и  $V$ , удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (1) и следующим граничным условиям:

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a$$

$$w = 0$$

$$-(B_{11} w_{,1} + B_{13} w_{,2} - 2B_{13} w_{,12}) - \frac{2}{h} (B_{14} V_1 - B_{15} V_2) = 0$$

$$B_{44} w_{,11} - B_{55} w_{,22} + 2B_{45} w_{,12} - \frac{2}{h} (B_{44} V_1 - B_{45} V_2) = 0 \quad (3)$$

при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = h$

$w = 0$

$$\begin{aligned}
 -(B_{11}w_{11} + B_{22}w_{22} - 2B_{33}w_{12}) - \frac{2}{h}(B_{23}V_1 + B_{32}V_2) &= 0 \\
 B_{11}w_{11} + B_{22}w_{22} - 2B_{33}w_{12} - \frac{2}{h}(B_{13}V_1 + B_{31}V_2) &= 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

Функции со штрихами обозначают производные по аргументам, указываемым нижними индексами.

Для решения задачи применим метод малого параметра, известный в литературе и нашедший широкое распространение в работах В. С. Саркисяна [2]. Для этого перепишем систему (1) в виде

$$A_1[w] + \mu A_2[w, V] = q, \quad A_3[V] + \mu A_4[w, V] = 0 \quad (5)$$

вводя новые обозначения для операторов

$$\begin{aligned}
 A_1 &= B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2(B_{12} - 2B_{33}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\
 A_2 &= \frac{4B_{13}}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{4B_{33}}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{1}{4\pi h^2} \left[ B_{11} \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3} + \right. \\
 &\quad \left. (B_{13} - 2B_{31}) \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^2 \partial x_2} - (B_{34} - 2B_{33}) \frac{\partial^3 V}{\partial x_1 \partial x_2^2} - B_{23} \frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3} \right] \\
 A_3 &= \frac{2}{h} \left( B_{44} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - B_{55} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right) \\
 A_4 &= \frac{4B_{13}}{h\mu} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{\mu} \left[ B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} - (B_{13} + 2B_{31}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \right. \\
 &\quad \left. + (B_{31} + 2B_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right]
 \end{aligned} \quad (6)$$

Такое введение малого параметра в основные уравнения и граничные условия содержит в себе два физических предположения:

1) в матрице равновесных свойств коэффициенты, стоящие на главной диагонали, больше, чем соответствующие недиагональные значения упругих и диэлектрических коэффициентов.

2) основные процессы в пьезокристалле больше, чем процессы взаимодействия полей. Иными словами, при действии на пьезокристалл заданных деформаций возникающие механические усилия больше, чем усилия, вызываемые электрическим полем, происходящим от заданных деформаций. И наоборот, при действии электрического поля возникающая поляризация больше, чем поляризация, вызываемая деформацией, определяемой электрическим полем.

Отметим, что второе предположение не говорит о слабой электромеханической связи. Такое соотношение будет иметь место в любых, в том числе и сильных, пьезоэлектриках.

Будем искать решение системы (5) в виде рядов по степеням малого параметра  $\mu$

$$w = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \mu^n, \quad V = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \mu^n \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) и приравнивая выражения при одинаковых степенях  $\mu$ , получим

$$\begin{aligned} A_1[w_0] &= q_0, & A_1[w_m] &= q_m \\ A_3[V_0] &= 0, & A_3[V_m] &= Q_m \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

вводя обозначения для правых частей

$$\begin{aligned} q_m(x_1, x_2) &= q(x_1, x_2) \\ q_m(x_1, x_2) &= -A_2[w_{m-1}, V_{m-1}] \\ Q_m(x_1, x_2) &= -A_3[w_{m-1}, V_{m-1}] \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

Преобразуем граничные условия. Для этого запишем их в виде: при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = a$   $w_{22}^* = 0$ , тогда

$$w = 0, \quad w_{12}^* = \mu B_1, \quad V_1 = \mu B_2 \quad (10)$$

где обозначены

$$B_1 = -\frac{2B_{11}}{\mu B_{11}} w_{12}^* - \frac{2}{\mu h B_{11}} (B_{14} V_1 + B_{15} V_2) \quad (11)$$

$$B_2 = -\frac{h}{2B_{34}} \left( \frac{2B_{12}}{h^2} V_2 + \frac{B_{14}}{\mu} w_{11}^* + \frac{2B_{24}}{\mu} w_{12}^* \right) \quad (12)$$

при  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = b$   $w_{11}^* = 0$ , тогда

$$w = 0; \quad w_{22}^* = \mu B_3, \quad V_2 = \mu B_4 \quad (13)$$

где обозначены

$$B_3 = -\frac{2B_{22}}{\mu B_{22}} w_{22}^* - \frac{2}{\mu h B_{22}} (B_{24} V_1 + B_{25} V_2) \quad (14)$$

$$B_4 = -\frac{h}{2B_{34}} \left( \frac{2B_{22}}{\mu h} V_1 + \frac{B_{22}}{\mu} w_{22}^* + \frac{2B_{25}}{\mu} w_{12}^* \right) \quad (15)$$

Принимая во внимание (7) и выполняя ряд преобразований, получим окончательно граничные условия

при  $x_1 = 0, x_1 = a$

$$w_m = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

$$(w_m)_{11} = 0, \quad (w_m)_{11} = B_1 [w_{m-1}, V_{m-1}] \quad (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad (16)$$

$$(V_0)_{11} = 0, \quad (V_m)_{11} = B_2 [w_{m-1}, V_{m-1}]$$

при  $x_2 = 0, x_2 = b$

$$w_m = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

$$(w_m)_{22} = 0, \quad (w_m)_{22} = B_1 [w_{m-1}, V_{m-1}] \quad (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad (17)$$

$$(V_0)_{22} = 0, \quad (V_m)_{22} = B_2 [w_{m-1}, V_{m-1}]$$

Итак, решение поставленной задачи сводится к решению рекуррентных систем дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющих граничным условиям (16) и (17).

Для нахождения первого приближения ( $m = 0$ ) нужно решить две краевые задачи

$$I. \quad A_1 [w_0] = q \quad (18)$$

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad w_0 = 0, (w_0)_{11} = 0$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad w_0 = 0, (w_0)_{22} = 0$$

$$II. \quad A_3 [V_0] = 0 \quad (19)$$

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad (V_0)_{11} = 0$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad (V_0)_{22} = 0$$

Решение задачи I идем в виде

$$w_0 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \quad (20)$$

удовлетворяющем всем граничным условиям. Для определения коэффициентов  $A_{pq}$  разложим функцию  $q(x_1, x_2)$  в двойной ряд Фурье

$$q(x_1, x_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \quad (21)$$

где

$$a_{pq} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x_1, x_2) \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 \quad (22)$$

Подставляя (20) и (21) в (18) и сравнивая коэффициенты, находим  $A_{pq}$

$$A_{pq} = \frac{a_{pq}}{\pi^4 \left[ B_{11} \left( \frac{P}{a} \right)^4 + 2(B_{12} + 2B_{33}) \left( \frac{P}{a} \right)^2 \left( \frac{q}{b} \right)^2 + B_{33} \left( \frac{q}{b} \right)^4 \right]} = \frac{a_{pq}}{\pi^4} \quad (23)$$

Тогда для  $w_0(x_1, x_2)$  будем иметь

$$w_0(x_1, x_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_{pq}}{\pi^4} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \quad (24)$$

Задача II представляет собой однородное уравнение (уравнение Лапласа) с однородными граничными условиями для производных. Такая задача имеет решение

$$V_0(x_1, x_2) = 0 \quad (25)$$

Приступим к построению второго приближения ( $m=1$ ). Из (8) с учетом (6) и (24) следует

$$A_1[w_1] = q_1[w_0, V_0], \quad A_3[V_1] = Q_1[w_0, V_0] \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= \sum_p \sum_q b_{pq} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \cos \frac{q\pi x_2}{b} \\ b_{pq} &= \frac{4a_{pq}}{\pi^4} \frac{pq}{ab} \left[ B_{13} \left( \frac{p}{a} \right)^2 + B_{23} \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right] \\ Q_1 &= \sum_p \sum_q \left( x_{pq} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} + y_{pq} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \cos \frac{q\pi x_2}{b} \right) \\ x_{pq} &= \frac{h}{2\pi^2} a_{pq} \left[ B_{14} \left( \frac{p}{a} \right)^3 + (B_{24} + 2B_{35}) \frac{p}{a} \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right] \\ y_{pq} &= \frac{h}{2\pi^2} a_{pq} \left[ (B_{15} - 2B_{34}) \left( \frac{p}{a} \right)^2 \frac{q}{b} + B_{25} \left( \frac{q}{b} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

$a_{pq}$  — обозначение постоянной, введенное в (23). Из (9) с учетом (24) будем иметь граничные условия для функций  $w_1$  и  $V_1$

при  $x_1 = 0$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{11} = f_1(x_2), \quad (V_1)_1 = F_1(x_2)$$

при  $x_1 = a$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{11} = f_2(x_2), \quad (V_1)_1 = F_2(x_2)$$

при  $x_2 = 0$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{22} = z_1(x_1), \quad (V_1)_2 = \Phi_1(x_1)$$

при  $x_2 = b$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{22} = z_2(x_1), \quad (V_1)_2 = \Phi_2(x_1)$$

Обозначим предварительно

$$\begin{aligned} c_{pq}^{(1)} &= \frac{1}{c} a_{pq} \cos \frac{p\pi x_1}{a} = c_{pq}^{(1)} \\ c_{pq}^{(2)} &= a_{pq} \cos \frac{q\pi x_2}{b} = c_{pq}^{(2)} \end{aligned}$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned}
 f_1(x_2) &= \frac{2B_{11}c}{B_{11}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(2)}, & F_1(x_2) &= \frac{hB_{11}c}{B_{11}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(2)} \\
 f_2(x_2) &= \frac{2B_{13}c}{B_{11}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(2)} (-1)^p, & F_2(x_2) &= \frac{hB_{13}c}{B_{11}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(2)} (-1)^p \quad (27) \\
 z_1(x_1) &= \frac{2B_{23}c}{B_{22}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(1)}, & \Phi_1(x_1) &= \frac{hB_{23}c}{B_{22}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(1)} \\
 z_2(x_1) &= \frac{2B_{23}c}{B_{22}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(1)} (-1)^q, & \Phi_2(x_1) &= \frac{hB_{23}c}{B_{22}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(1)} (-1)^q
 \end{aligned}$$

Для решения этих задач применим метод сведения неоднородных задач к однородным. Для этого сформулируем и решим четыре вспомогательные задачи

$$\text{IIб:} \quad A_1[\bar{w}_1] = \frac{1}{2} q_2 [w_0, V_0] \quad (28)$$

при

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0 \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{11} &= f_1(x_2) \\
 x_1 = a \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{11} &= f_2(x_2) \\
 x_2 = 0 \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{22} &= 0 \\
 x_2 = b \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{22} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{IIIб:} \quad A_1[\bar{w}_1] = \frac{1}{2} q_1 [w_0, V_0] \quad (29)$$

при

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0 \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{11} &= 0 \\
 x_1 = a \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{11} &= 0 \\
 x_2 = 0 \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{22} &= \varphi_1(x_1) \\
 x_2 = b \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{22} &= z_2(x_1)
 \end{aligned}$$

$$\text{IVа:} \quad A_2[\bar{V}_1] = \frac{1}{2} Q_1 [w_0, V_0] \quad (30)$$

при

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0 \quad (\bar{V}_1)_1 &= F_1(x_2) \\
 x_1 = a \quad (\bar{V}_1)_1 &= F_2(x_2) \\
 x_2 = 0 \quad (\bar{V}_1)_2 &= 0 \\
 x_2 = b \quad (\bar{V}_1)_2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$IV_0 \quad A_3[\bar{V}_1] = \frac{1}{2} Q_1[w_0, V_0] \quad (31)$$

при

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \quad (V_1)_1 = 0 \\ x_1 = a & \quad (\bar{V}_1)_1 = 0 \\ x_2 = 0 & \quad (V_1)_2 = \psi_2(x_1) \\ x_2 = b & \quad (V_1)_2 = \psi_2(x_1) \end{aligned}$$

Решение задачи IIIa ищем в таком виде, чтобы удовлетворить однородным условиям

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n(x_1) \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (32)$$

Представим правую часть уравнения (28) в виде тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2} q_1[w_0, V_0] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(x_1) \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{q}_n(x_1) &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{pn} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \\ b_{pn} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - q^2} \frac{b_{pq}}{a} [1 - (-1)^{n+q}] \end{aligned}$$

Подставляя (32) и (33) в (28) и сравнивая коэффициенты, получим для  $\bar{X}_n(x_1)$  обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\bar{X}_n'' - 2 \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{2B_{21}}{B_{22}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \bar{X}_n + \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \bar{X}_n = \frac{\bar{q}_n(x_1)}{B_{11}} \quad (34)$$

Общее решение уравнения (34) состоит из суммы

$$\bar{X}_n = \bar{X}_n'' + \bar{X}' \quad (35)$$

где

$$\bar{X}_n'' = \sum_{p=1}^{\infty} M_{pn} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \quad (36)$$

$$M_{pn} = \frac{b_{pn}}{\pi^4 \left[ \left(\frac{p}{a}\right)^4 + \frac{2(B_{12} - 2B_{21})}{B_{11}} \left(\frac{p}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]}$$

является частным решением неоднородного дифференциального урав-

ления (34), а  $\bar{X}_n$  — общим решением соответствующего однородного уравнения. Характеристическое уравнение

$$\epsilon_1 \frac{2(B_{22} - 2B_{21})}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \epsilon^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = 0 \quad (37)$$

может иметь четыре корня одного из типов: 1)  $\pm \frac{n\pi}{h} s_1, \pm \frac{n\pi}{b} s_2, s_1 > 0, s_2 > 0$  — вещественные разные, 2)  $\pm s$  ( $s > 0$ ) — вещественные равные, 3)  $\pm s \pm it$  ( $s > 0, t > 0$ ) — комплексные. В дальнейшем будем рассматривать только первый тип, так как случаи 2) и 3) можно получить из 1) путем предельного перехода или отделения вещественной и мнимой частей

$$X_n = \bar{A}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{h} s_1 x_1 + \bar{B}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 x_2 + \bar{C}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_2 x_2 + i \bar{D}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 x_2 \quad (38)$$

Подставляя (36) и (38) в (32), находим

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(x_1, x_2) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \bar{A}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{h} s_1 x_1 + \bar{B}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 x_2 + \bar{C}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_2 x_2 + \right. \\ & \left. + i \bar{D}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 x_2 + \sum_{a=1}^{\infty} M_{n,a} \cos \frac{a\pi x_1}{a} \right) \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (39) \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования представим функции  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$ , заданные выражениями (27), в виде

$$f_1(x_1) = \sum_{a=1}^{\infty} f_{1a} \sin \frac{a\pi x_1}{a}, \quad f_2(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} f_{1a} = & \frac{4B_{22}n}{nB_{11}a^2ab} \sum_p \sum_q \frac{a_p p q}{q^2 - n^2} [1 - (-1)^{p+q}] \\ f_{2n} = & \frac{4B_{12}n}{nB_{11}a^2ab} \sum_p \sum_q \frac{a_p p q (-1)^p}{q^2 - n^2} [1 - (-1)^{p+1}] \end{aligned}$$

Удовлетворяя условиям задачи (28), составим систему четырех уравнений для определения четырех постоянных интегрирования

$$0 = \bar{A}_n + \bar{C}_n - \bar{X}'_n(0)$$

$$0 = \bar{A}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{h} s_1 a + \bar{B}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 a + \bar{C}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_2 a + i \bar{D}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 a - \bar{X}'_n(a)$$

$$f_{1a} = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 (\bar{A}_n s_1^2 + \bar{C}_n s_2^2) + [\bar{X}'_n(0)]^2 \quad (41)$$

$$f_{xy} = \left(\frac{\pi^2}{h}\right)^2 \left( A_n \sin^2 \frac{n\pi}{b} \cdot a + B_n \sin^2 \frac{n\pi}{h} \cdot s \cdot a - C_n s^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{h} \cdot s \cdot a + D_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{h} \cdot s \cdot a \right) - [X'(a)]^2$$

Методика решения задач (29), (30), (31), а также соответствующих задач третьего и более высоких приближений никаких принципиальных отличий от изложенной выше не имеет.

Рассмотрим конкретный пример прямоугольной пластинки с размерами  $a = b$ , вырезанной из кристалла бирфалата калия [3]. Исходная система (1) имеет вид

$$\begin{aligned} (0.1505 w_{111}^{IV} - 0.452 w_{111}^{IV} - 0.128 w_{111}^{IV}) \cdot 10^{12} \\ - \frac{2}{h} (0.118 V_{111} - 0.339 V_{112}) \cdot 10^8 = q_1 \end{aligned} \quad (42)$$

$$(0.118 w_{111} - 0.339 w_{111}) \cdot 10^8 - \frac{2}{h} (4.08 V_1' - 5.98 V_2') = 0$$

с граничными условиями согласно (3) и (4)

при

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad w = 0$$

$$(0.1505 w_{11} - 0.0745 w_{21}) \cdot 10^{12} - \frac{2}{h} (0.118 V_1' \cdot 10^8 = 0$$

$$(0.118 w_{11} - 0.585 w_{21}) \cdot 10^8 - \frac{2}{h} (4.08 V_1' = 0 \quad (43)$$

при

$$x_1 = 0, \quad x_2 = b, \quad w = 0$$

$$-(0.0745 w_{11} - 0.128 w_{21}) \cdot 10^{12} - \frac{2}{h} (0.585 V_1' \cdot 10^8 = 0$$

$$- 0.246 w_{12} \cdot 10^8 - \frac{2}{h} (5.98 V_2' = 0 \quad (44)$$

Выбрав малый параметр, получим системы рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 0.1505 (w_{m-1})_{111}^{IV} - 0.452 (w_{m-1})_{111}^{IV} - 0.128 (w_{m-1})_{111}^{IV} = q_m \\ 4.08 (V_{m-1})_1 - 5.98 (V_{m-1})_2 = Q_m \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$q_m = \frac{10}{2h} [0.118 (V_{m-1})_{111} - 0.339 (V_{m-1})_{112}] \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (46)$$

$$Q_m = \frac{10}{2h} [0.118 (w_{m-1})_{111} + 0.339 (w_{m-1})_{112}]$$

и граничные условия при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = a$

$$w_m = 0; \quad (w_m)_{11} = \frac{1.57}{\mu} \cdot 10^{-5} (V_{m-1})_1; \quad (V_m)_1 = -\frac{1.45}{\mu} \cdot 10^3 (w_{m-1})_{11}$$

при  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = b$

$$w_m = 0; \quad (w_m)_{22} = \frac{9.15}{\mu} \cdot 10^{-5} (V_{m-1})_2; \quad (V_m)_2 = \frac{2.06}{\mu} \cdot 10^3 (w_{m-1})_{22}$$

Следуя изложенной выше методике, ограничиваясь первыми тремя приближениями, получим решение

$$\begin{aligned} w = \sum_p \sum_q & \left\{ \frac{0.197 q_0 \cdot 10^{-3} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b}}{pq \left[ 0.1505 \left( \frac{p}{a} \right)^4 + 0.452 \left( \frac{p}{a} \right)^2 \left( \frac{q}{b} \right)^2 + 0.128 \left( \frac{q}{b} \right)^4 \right]} \right\} + \\ & + \mu^2 \sum_n \left\{ \left[ A_{2n} \operatorname{ch} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + B_{2n} \operatorname{sh} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + \left( \sum_q C_{2nq} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. D_{2n} \operatorname{ch} 1.76 \frac{n\pi x_2}{a} + E_{2n} \operatorname{sh} 1.76 \frac{n\pi x_2}{a} + G_{2n} \operatorname{ch} 0.67 \frac{n\pi x_2}{a} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + H_{2n} \operatorname{sh} 0.67 \frac{n\pi x_2}{a} \right] \sin \frac{n\pi x_1}{a} \right\} \\ V = \mu \sum_n & \left\{ \left[ A_{1n} \operatorname{ch} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + B_{1n} \operatorname{sh} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \sum_q C_{1nq} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \right) \right] \cos \frac{n\pi x_1}{a} \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

Если рассмотреть в полученных рядах первые приближения, то прогиб центра пластинки имеет значения для пластинки с размерами  $a = 1$  см,  $b = 1$  см,  $h = 0.1$  см

$$w = 23.5 q_0 \cdot 10^{-5} \text{ (см)}$$

для пластинки с размерами  $a = 2$  см,  $b = 1$  см,  $h = 0.1$  см

$$w = 28.15 q_0 \cdot 10^{-5} \text{ (см)}$$

В заключение сделаем важное замечание об оценке величины малого параметра  $\mu$ . Сравнивать операторы с помощью сравнения их коэффициентов не представляется возможным, так как эти коэффициенты имеют разную размерность.

Характеристический определитель исходной системы (42)

$$\begin{vmatrix} 0.128 \lambda^4 - 0.452 \lambda^2 & 0.1505 & -\frac{1}{2\pi} (0.339 \lambda^2 - 0.118) \\ (0.339 \lambda^2 + 0.118) & 5.98 \lambda^2 + 4.08 & \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -i1.77; \lambda_{3,4} = -i0.827; \lambda_{5,6} = -i0.615 \quad (49)$$

Характеристические уравнения приближенных уравнений

$$0.128\lambda^4 + 0.452\lambda^2 + 0.1505 = 0; \quad 5.98\lambda^2 + 4.08 = 0 \quad (50)$$

имеют корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i1.755; \lambda_{3,4} = \pm i0.67; \lambda_{5,6} = \pm i0.59 \quad (51)$$

Сравнение корней (49) и (51) позволяет считать, что приближенная совокупность дифференциальных уравнений действительно мало отличается от исходной системы. Таким образом, подтверждается правомерность введения малого параметра  $\mu$ . Оценка малого параметра  $\mu$ , величина которого лежит в пределах

$$0.0085 \leq \mu \leq 0.19$$

получается из относительной погрешности в значениях корней (51) по сравнению с (49).

Ի. Ա. ՎԵՎՈՎԻՇԵՎԱ

ԵՐԱՐԱՅՈՒՄ ԵՐԱՏ ՇԵՆՎՈՒՄ ՈՒՂԱԿԱՆՅՈՒՄԱԶԵԼ ՊՅԵՋՈՒԼԵԿՏՐՈՒԱՆ  
ԲՈՐՈՎ ՍԱՐ ԾՈՒՄՈՐԸ

Ա. Ա Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Փոքր պարամետրի եղանակով լուծվում է եզրայնով ազատ շենված պլե-  
-տիկտրական բարակ սաղի ծածան վերաբերյալ եզրային խնդիր: Տրվում են  
ընթացիկ օրինակ և փոքր պարամետրի սենսիթյան գնահատականը:

## THE BENDING OF A THIN RECTANGULAR PIEZOELECTRIC PLATE SUPPORTED THROUGHOUT ITS BOUNDARIES

I. A. VEKOVISHCHEVA

S u m m a r y

Small parameter technique solves the boundary problem of bending  
a thin piezoelectric plate supported throughout its boundaries. Numerical  
examples are presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

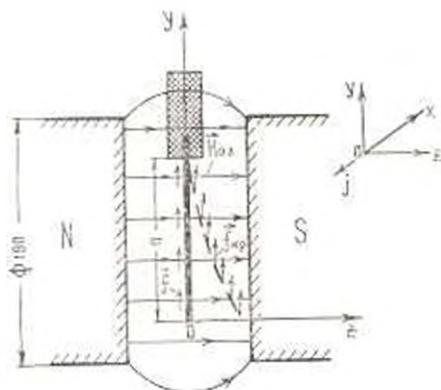
1. *Веконицета И. А.* Теория изгиба тонких пьезоэлектрических пластин. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 4, 1972.
2. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ереванского ун-та, Ереван, 1970.
3. *Балаян А. М.* и др. Выращивание кристаллов бифталата калия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства. Кристаллография, т. 14, вып. 4, 1969.

Р. Н. ОВАКИМЯН, Ю. И. КОСАКЯН, Р. М. МАРТИРОСЯН

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К настоящему времени неуклонно растет число опубликованных теоретических работ и новой отрасли механики — магнитоупругости тонких тел, развивающейся на стыке электродинамики и сильно развитой теории пластин и оболочек. В то же время экспериментальная разработка многих вопросов магнитоупругости недостаточна и это особенно заметно в области исследования токонесущих тонких тел в сильных магнитных полях.

В данной работе описывается постановка первых экспериментов и приводятся результаты по исследованию статической устойчивости токонесущей пластинки в магнитном поле в случае жесткого защемления одной из краев пластины (фиг. 1).



Фиг. 1.

При рассмотрении в [1] колебаний и устойчивости токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле, в частности, исследован случай, когда пластинка закреплена на краю  $y = a$  и колебания не зависят от координаты  $x$ . Уравнение устойчивости (без учета сил тяжести) имеет вид

$$D \frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{2sh E_0 H_0}{c} \frac{d}{dy} \left( y \frac{dw}{dy} \right) = 0$$

где  $D = \frac{2 E h^3}{3 (1 - \nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $w$  — прогиб,  $2h$  — толщина пластины.

ки,  $\tau$  — электропроводность,  $c$  — скорость света,  $E_{0z}$  и  $H_{0z}$  — напряженности электрических и магнитных полей в невозмущенном состоянии. Из решения этого уравнения следует выражение критического значения произведения

$$(E_{0z} H_{0z})_k = 3.92 \frac{D}{a^2} \frac{\epsilon}{\tau b} \quad (1)$$

при котором пластинка теряет устойчивость.

В дальнейшем все выкладки ведутся в системе СИ. Практическая неизменность величины и направления плотности тока  $\vec{j} = \tau \vec{E}_{0z}$ , магнитной индукции  $\vec{B} = \mu_0 H_{0z}$  ( $\mu$  — относительная магнитная проницаемость проводящей среды,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$  — магнитная проницаемость

вакуума) при взаимной перпендикулярности  $\vec{j}$  и  $\vec{B}$  позволяет считать объемную силу  $\vec{f} = [\vec{j}, \vec{B}]$  равномерно распределенной по всей высоте пластинки и всегда направленной по  $Oy$  (противоположно силе тяжести). С учетом новых соотношений перепишем выражение (1) в виде

$$f_{kp} = (jB)_k = 2.61 \frac{E}{1-\tau^2} \frac{R^2}{a^3} \left| \frac{\mu}{\mu^2} \right| \quad (2)$$

Целью нашего эксперимента являлось определение величины  $f_{kp} = (jB)_k$  в соответствии с (2) для проводящих пластинок из диа- и парамагнитного материала, где  $\mu \approx 1$ .

Магнитное поле в направлении оси  $z$  создается электромагнитом соленоидной системы с водяным охлаждением обмотки. Конструктивно магнит состоит из двух одинаковых намагничивающих катушек, которые по одной оси неподвижно закрепляются на ярме. Внутри катушек расположены сердечники с полюсными наконечниками цилиндрической формы  $\varnothing 190$  мм. Величина зазора 10–80 мм между плоскими торцевыми полюсами получается перемещением сердечников по оси магнита.

Питание магнита осуществляется генератором постоянного тока с дистанционным управлением системы стабилизации и ввода тока.

На фиг. 2 приведена зависимость индукции поля от подаваемой в катушку силы тока при зазорах в 23 и 30 мм. Измерения проводились измерителем магнитной индукции ИМИ-2.

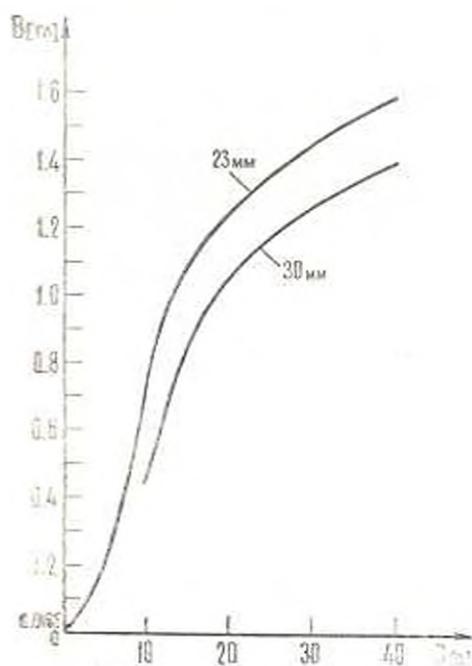
Величина плотности тока  $j$  — другой составляющей силы (2) — ограничивается температурой нагрева токонесящей пластинки  $\Delta t \approx 10^\circ$ , что делается для постоянства физико-механических характеристик материала пластинки. Для определения  $j$  решается дифференциальное уравнение теплопроводности с объемным источником джоулева тепла  $g = j^2 \tau$

$$\tau \frac{d^2 t}{dz^2} + q = 0 \quad (3)$$

при граничных условиях

$$-j \frac{dt}{dz} \Big|_{z=l} = \alpha_m \Delta t, \text{ а при } z=0 \quad \frac{dt}{dz} = 0 \text{ и } t = t_{max} \quad (4)$$

Здесь  $j$  — коэффициент теплопроводности,  $\alpha_m$  — коэффициент теплопередачи при свободной конвекции.



Фиг. 2.

Решая уравнение (3) совместно с условиями (4), получим при  $z \approx h$  и  $z=0$  соответственно

$$\Delta t = j^2 \frac{h}{\alpha_m}, \quad \Delta t_{max} = \left(1 - \frac{h\alpha_m}{2j}\right) \Delta t \quad (5)$$

Отметим, что во втором выражении (5) при толщине пластины  $2h \sim 10^{-3}$  м величиной  $h\alpha_m/2j \sim 10^{-4}$  можно пренебречь по сравнению с единицей. Таким образом, температура нагрева постоянна по толщине пластины и равна  $\Delta t$ . Так как было принято, что  $\Delta t \approx 10^\circ$ , а при свободной конвекции  $\alpha_m \approx 5 \text{ вт/м}^2\text{град}$ , то по (5) плотность тока должна удовлетворять условию

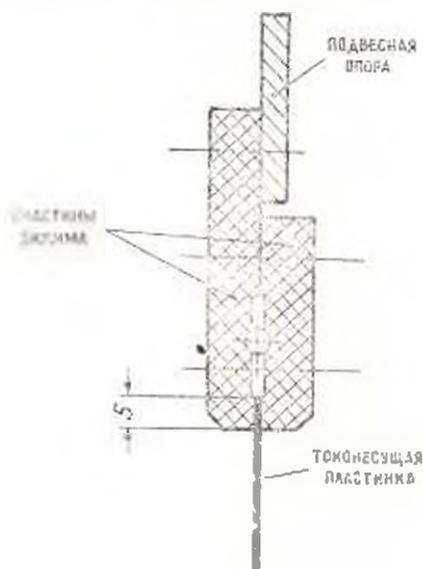
$$j < 7 \left(\frac{\sigma}{h}\right)^{1/2}, \quad \left|\frac{\alpha}{M^2}\right| \quad (6)$$

При постановке эксперимента учитывалась создаваемая в зазоре электромагнита однородность магнитного поля  $\sim 10^{-3}$  в радиусе  $R < 3.5$  см относительно оси магнита. Исходя из этого, наибольший из трех размеров пластины должен быть меньше 7 см.

Получение равномерно распределенной плотности постоянного тока, протекающего от одной кромки пластины к противоположной, с определенной точностью осуществляется путем припайвания медных проволочек  $\varnothing 0.13$  мм к обоим краям с шагом (2.5 - 4) мм по всей высоте пластины. Исходя из специфики эксперимента, такой способ припайвания позволяет свободно изгибаться пластинке относительно заземленной кромки. Жесткость пластины практически не меняется, а цепь электрического тока получается безразрывной.

Электрический ток для тонких пластинок, последовательно включенных в цепь, подается от стабилизатора постоянного тока с плавной регулировкой его величины от 0 до 20а при коэффициенте стабильности  $10^{-4}$ . Для более толстых пластинок применяется другой источник с силой тока до 60а с кратковременной стабильностью  $10^{-3}$ .

Испытываемая пластинка с припаянными проволоками устанавливается на глубину 5 мм в зазор прижимного устройства, состоящего в основном из двух наложенных друг на друга текстолитовых пластин, и затем затягивается двумя винтами (фиг. 3). Прижимное устройство совместно с алюминиевым листом подвесной опоры составляет специальное приспособление, с помощью которого проводится фиксация пластины в плоскости симметрии магнита перпендикулярно магнитным силовым линиям. Толщина текстолитовых пластин — 8 мм, алюминиевого листа — 5 мм. Детали винтового соединения изготовлены из бронзы.



Фиг. 3.

Эксперименты проводились на пластинках из алюминия — А5, бериллиевой бронзы — БрБ2 и латуни — Л70. В табл. 1 даны их геометрические размеры, а также некоторые физико-механические свойства материалов, взятые из [2]. Приведены также значения максимальной плотности тока, вычисленные по (6), силы тока и  $f_{max} = j_{max} B$  при

$B = 1.5$  тл, то есть реальной величины индукции поля используемого электромагнита. Кроме того, даны значения  $f_{кр}$ , вычисленные по правой части формулы (2).

Как видно из табл. 1, отношение  $\gamma/f_{кр} \sim 10^{-1}$ , что позволяет не учитывать собственный вес пластинки.

Таблица 1

Материал	Удельный вес $\gamma \cdot 10^3$ [г/см <sup>3</sup> ]	Толщина $2h \cdot 10^{-3}$ [см]	Высота $a \cdot 10^{-3}$ [см]	Модуль упругости $E \cdot 10^{11}$ [н/см <sup>2</sup> ]	Коэффициент Пуассона $\nu$	Коэфф. тепло- λ [вт/м <sup>2</sup> ·град]	Проводимость $\sigma \cdot 10^8$ [ом <sup>-1</sup> ·м]	Плотность тока $J_{кр} \cdot 10^6$ [а/см <sup>2</sup> ]	Сила тока $J_{кр}$ [а]	$f_{кр} \cdot 10^3$ [с <sup>-1</sup> ]	$f_{теор} \cdot 10^3$ [с <sup>-1</sup> ]
Алюминий	2.63	0.16	6.0	0.73	0.34	228	0.363	4.7	49	7.0	6.4
Бронза берилл.	8.2	0.1	7.0	1.33	0.35	83.5	0.143	3.7	28	5.5	2.88
Латунь	8.62	0.07	4.5	1.1	0.35	121	0.145	4.5	16	6.7	4.4

Ширина пластинок  $b = 5$  см.

Экспериментальные значения  $f_{кр} = \gamma/J_{кр} H_{кр}$ , полученные при различных значениях силы тока (плотности тока) и магнитной индукции  $B = \mu H_{кр}$ , приведены в табл. 2.

Таблица 2

	Алюминий (эзвор 30 м.м)				Бронза бериллиевая (эзвор 23 м.м)					Латунь (эзвор 23 м.м)			
	34	36	40	44	12	14	16	18	20	8	10	12	13
$J$ [а]													
$B$ [тл]	1.4	1.34	1.185	1.054	1.35	1.18	1.04	0.92	0.82	1.35	1.18	1.04	0.92
$f_{кр} \cdot 10^3$ [с <sup>-1</sup> ]	4.58	4.64	4.55	4.46	2.16	2.20	2.22	2.21	2.19	3.08	3.37	3.56	3.42

Сравнивая полученные результаты с теоретическими значениями  $f_{кр}$  (табл. 1), можно заметить, что во всех случаях соответствующие экспериментальные величины  $f_{кр}$  меньше теоретических.

Конечно, здесь следует учесть ошибки измерения, связанные с точностью установки пластинки перпендикулярно магнитным силовым линиям, малейшие неровности поверхности пластинки, диа- и парамагнитные свойства образцов, особенно заметные в сильных магнитных полях. Помимо этого не принимались во внимание незначительные силы натяжения токонесущих проволок.

Несмотря на это, по-видимому, полученные результаты позволяют принять теоретические значения  $f_{кр}$  (2) за верхний предел при определении устойчивости токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле.

Պ. Ն. ՉՈՎԱԿԻՄԻԱՆ, Յ. Ի. ԿՕՏԱԿԻԱՆ, Բ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍԻԱՆ

ԴԱՐՅՆԻՍԵԿԱՆ ԳԱՆՏՈՒՄ ԸՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ  
ՓՈՐՉՆԱԿԱՆ ՇԵՍՉՈՑՈՒՄԸ

## Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում նկարագրվում է մեկ եզրով ամրակցված ելուցիական մագնիսական դաշտում գանգոյ նստանքատար սալի ստատիկ կայունության նետադասման նամար կատարվող փորձի սրվածքը:

Նրեր տարրեր սալերի նամար բերված են կրիտիկական ուժերի մեծությունների փորձնական սրջման նախնական արդյունքները:

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF A CURRENT-CARRING  
PLATE STABILITY IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

R. N. OVAKIMIAN, Y. I. KOSAKIAN, R. M. MARTIROSIAN

## S u m m a r y

The experiments are described and the primary results of experimental determination of magnitude of critical force are presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вадцарян Г. Е., Бедубекян М. В. Колебания и устойчивость токоносущей пластинки в поперечном магнитном поле. Докл. АН Арм.ССР, т. I.VII, № 5, 1973.
2. Справочник машиностроителей, под. ред. Н. С. Аверкала, т. 6. Машиностроение, М., 1964.

Н. Э. АРКЕЛИАН

## ВЫНОСЛИВОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ОРИЕНТИРОВАННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ НАГРУЖЕНИЯ

В циклических испытаниях конструкционных материалов на выносливость при заданном нагружении различают два основных режима нагружения —  $P = \text{const}$  и  $\Delta = \text{const}$ . В первом случае в процессе нагружения поддерживается постоянное амплитудное значение нагрузки, приходящейся на образец, и может изменяться деформация, во втором — сохраняется неизменной деформационная характеристика цикла (перемещение) и во времени может изменяться величина прилагаемой нагрузки [1]. В обоих этих случаях процессе нагружения происходит с постоянной во времени частотой изменения  $P$  или  $\Delta$ . Строго сопоставимые данные, очевидно, могут быть получены лишь при соблюдении идентичности условий эксперимента и одинаковости режима циклического нагружения.

В настоящей работе исследовались усталостные свойства ориентированного стеклопластика при высокой частоте нагружения и режиме, при котором в процессе деформирования соблюдается условие  $P = \text{const}$ , но частота нагружения  $n$ , определяемая частотой собственных колебаний образца, может несколько изменяться по мере изменения жесткости образца. Такой режим нагружения и дальнейшем для краткости иногда условно будем называть резонансным.

### § 1. Методика исследования

Опыты проводились на испытательной машине РП<sub>6</sub> — 6 производства ГДР, работающей по резонансному принципу и предназначенной для испытания конструкционных материалов на выносливость при осевой деформации с любым коэффициентом асимметрии цикла  $r$ .

На фиг. 1 показан общий вид испытательной установки.

Образец зажимался в стандартных захватах машины, что обеспечивало надежное крепление его на все время эксперимента.

Контроль нагрузки и асимметрии цикла производился по показаниям пластинчатого элемента силовизмерителя машины.

Независимо от этого параллельный контроль  $P$  и  $r$ , а также измерение продольной деформации осуществлялись по методике [2, 4] с той разницей, что здесь использовалось трехканальное универсальное измерительное устройство (тензостанция) типа УМ-131.

В процессе опыта измерялись частота нагружения, продольная деформация и температура разогрева на поверхности образца.

Частота нагружения и определялась по измерительному прибору машины. Погрешность измерения не превосходила  $1-2\%$ .



Фиг. 1. Общий вид испытательной установки.

Испытаниям подверглась слоистая пластик типа СВМ на эпоксид-фенольном связующем с ортогонально равнопрочной укладкой стекловолокон (СВМ 1:1).

Для исследования влияния анизотропии механических свойств образцы вырезались в направлении волокон и композите ( $\varphi = 0$ ) и в диагональном по отношению к нему направлении ( $\varphi = 45$ ).

Форма и размеры образцов те же, что и в работах [5, 6].

Образцы толщиной 5 мм вырезались вдоль направления волокон и испытывались на растягивающее растяжение ( $r = 0$ ), а толщиной 10 мм — в диагональном направлении и на симметричный цикл нагружения ( $r = -1$ ).

Частота нагружения  $n_0$  в испытаниях стеклопластиков  $\varphi = 0$ ,  $r = 0$  и  $\varphi = 45$ ,  $r = -1$  равнялась соответственно 3000 и 3300 цикл/мин. Разнос в значениях  $n_0$  при переходе от одного образца к другому в каждой серии испытаний не превышал  $1\%$ .

Образцы толщиной 5 мм, имеющие ориентацию  $\varphi = 0$ , были подвергнуты предварительной термической обработке по режиму, описанному в [6]. Вопросы, касающиеся влияния предварительной термообработки образцов на изменение циклической прочности и деформативности испытываемых стеклопластиков при растяжении, были рассмотрены ранее [6].

На каждое значение циклического напряжения испытывалось по 5 образцов.

Усталостные диаграммы построены по корреляционным уравнениям, вычисленным по статистическому методу малого числа измерений [7]. Точки на приведенных кривых соответствуют средним значениям из пяти экспериментальных результатов.

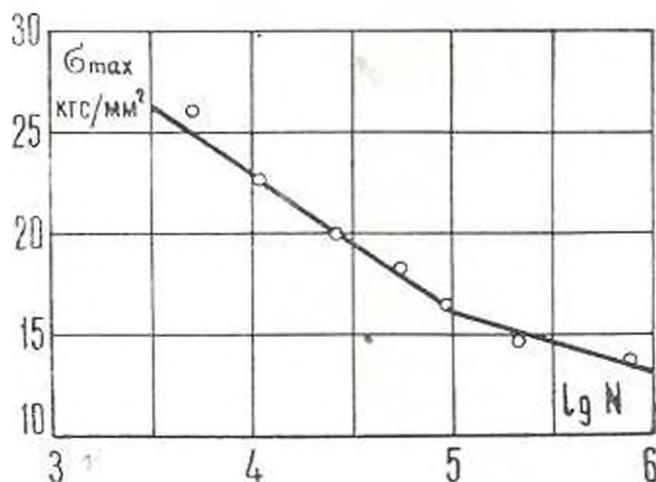
Температура окружающей среды на весь период испытаний была в пределах  $26 \pm 3$  С.

## § 2. Обсуждение результатов испытаний

На фиг. 2 и 3 показаны усталостные диаграммы  $\sigma_c - \lg N$ , которые в полулогарифмической системе координат состоят из двух линейных участков. Линейная зависимость между циклической прочностью и логарифмом выносливости имеет общий вид

$$\sigma_c = a - b \lg N$$

где  $\sigma_c$  — напряжение цикла,  $a$  и  $b$  — параметры, зависящие от свойств испытываемого композита и условий испытания, в частности, от анизотропии механических свойств.

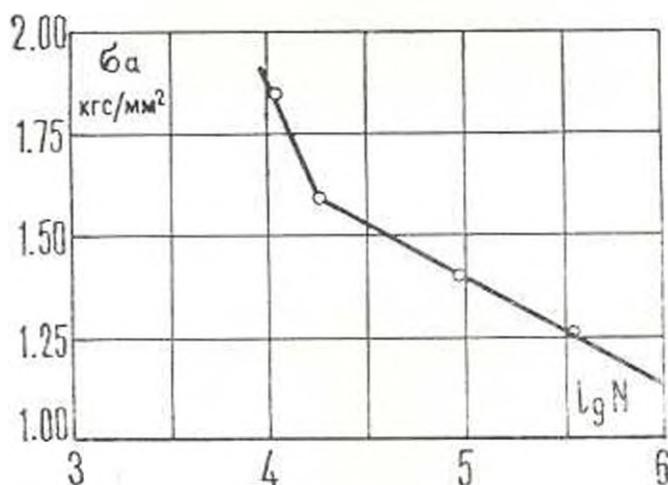


Фиг. 2. Усталостная диаграмма СВММ 1:1,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\gamma = 0$ .

Как и при циклическом нагружении ориентированных стеклопластиков частотой 1200 *цикл/мин* в режиме  $P = \text{const}$  [3, 5, 6], такое представление соответствует наименьшему отклонению эксперимен-

тальных результатов от графика зависимости, построенного на основе статистического анализа.

Параметр  $b$  в приведенной выше зависимости по своему абсолютному значению является количественной характеристикой сопротивляемости материала циклическим нагрузкам. Чем выше  $b$ , чем больше уклон графика зависимости  $\sigma$  —  $\lg N$ , тем материал более склонен к усталостному разрушению.



Фиг. 3. Усталостная диаграмма СВММ 1:1,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\gamma = -1$ .

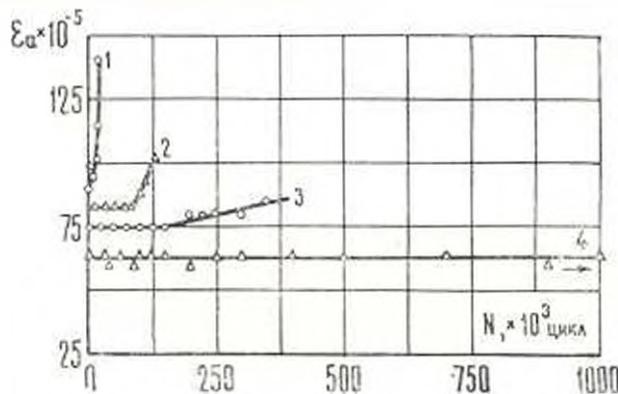
На фиг. 4 показаны кривые изменения амплитудных значений деформаций в процессе длительного циклического нагружения. По характеру они подобны кривым, соответствующим режиму нагружения  $P = \text{const}$  при частоте 1200 *цикл./мин* [4], с той особенностью, что в данном случае имеет место существенная зависимость между напряжением и амплитудной величиной деформации цикла к моменту разрушения образца.

Таблица 1

Стеклопластик	Предел прочности $\sigma_a$ кгс/мм <sup>2</sup>	Коеф. асимметрии цикла $\gamma$	Цикл. нагруж. соотн. долгов. переломн. уст. напр. кгс/мм <sup>2</sup>	Номер участка диаграммы	Параметры и характеристики корреляционного уравнения			
					$a$	$b$	коэфф. коррел.	осн. ошибка критерия линейн.
СВММ 1:1, $\varphi = 0^\circ$	49.85 ± 1.70	0	15.90	1	50.3705	6.8493	-0.9460	0.0652
				2	30.5122	2.9087	-0.8563	0.1342
СВММ 1:1, $\varphi = 45^\circ$	16.80 ± 0.80	-1	1.60	1	6.3295	1.1128	-0.8929	0.2012
				2	2.7186	0.2645	-0.9878	0.0522

Что касается кривых зависимости деформации от количества циклов нагружения при пульсирующем растяжении, то они также по-

добны полученным ранее [4], только в рассматриваемых опытах наблюдается еще более существенный рост деформаций виброползучести, связанный с относительно более высокой температурой разогрева материала в данных испытаниях.



Фиг. 4. Зависимость деформации от напряжения и числа циклов. СВММ 1:1,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $r = 1$ ,  $\sigma_0 = 1) 1.55; 2) 1.35; 3) 1.29; 4) 1.10 \text{ кгс/мм}^2$ .

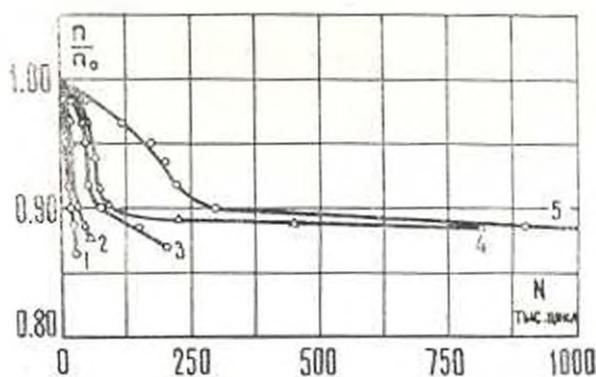
При циклическом нагружении образца посредством машины, работающей по резонансному принципу, частота нагружения  $\omega_0$  определяется частотой собственных колебаний образца. Последняя зависит от жесткости образца, то есть от исходных величин его размеров и модуля упругости материала. Поэтому в процессе нагружения, когда соблюдается режим  $P = \text{const}$ , частота нагружения может изменяться вследствие изменения жесткости образца. Для стекловолоконистых композитов, являющихся разупрочняющимися материалами, это изменение  $\omega_0$  происходит в сторону его уменьшения. Уменьшение резонансной частоты нагружения  $\omega_0$  вызывается двумя причинами [8]: необратимыми изменениями в материале, возникающими вследствие накопления повреждений, и зависимостью модуля упругости материала от температуры.

Ранее в связи с испытаниями стеклопластиков на образцах, вырезанных вдоль направления волокон, было показано, что как в опытах с обычной частотой нагружения  $P = \text{const}$  [9], так и в случаях нагружения со звуковой частотой [8] изменение жесткости образца и резонансной частоты колебания в основном происходит вследствие развития повреждаемости материала, а не повышения температуры образца за счет циклического разогрева.

Поэтому изменение частоты  $\omega$  во времени в определенной мере может служить количественной характеристикой повреждаемости материала. На фиг. 5 приведены некоторые из экспериментальных кривых изменения отношения  $\omega/\omega_0^*$  в зависимости от числа циклов и на-

\* Здесь  $\omega_0$  — начальное значение резонансной частоты циклов, постоянное для всех образцов заданной серии испытаний независимо от величины прикладываемой нагрузки;  $\omega$  — значение частоты в данный момент циклического деформирования, зависящее от числа циклов  $N$  и напряжения  $\sigma$ .

пряжения. Эти кривые свидетельствуют, во-первых, об определенной зависимости резонансной частоты колебания  $n$  от циклического напряжения и продолжительности деформирования  $n$ , во-вторых, что более важно, о наличии некоторого критического значения отношения  $n/n_0$ , по достижении которого независимо от величины напряжения наступает разрушение материала.



Фиг. 5. Изменение резонансной частоты нагружения СВМ 1:1,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\tau = 0$ .  
 $\sigma_{\text{max}}$ : 1) 19.85; 2) 18.02; 3) 14.58; 4) 11.00; 5) 13.91 кгс/мм<sup>2</sup>.

Как показывает статистический анализ, это видно также из фиг. 5, среднеарифметическая величина критического значения  $(n/n_0)_c$  при пульсирующем растяжении СВМ 1:1 вдоль направления волокон составляет 0.882 и характеризуется коэффициентом вариации  $\approx 2.60\%$  (расчеты соответствуют 28 испытаниям).

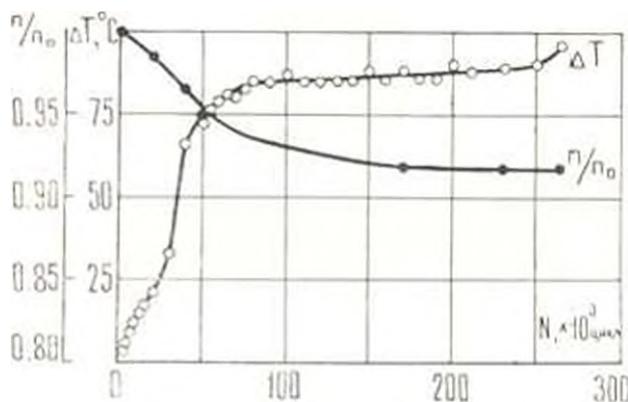
Иная картина наблюдается при испытании образцов, вырезанных в диагональном по отношению к волоконному направлению. Здесь при симметричном растяжении-сжатии, на всем интервале  $10^3 - 10^6$  циклов деформирования, практически во всех опытах начальное значение резонансной частоты с течением времени сохраняется неизменным, т.е. есть при разрушении соблюдается условие  $(n/n_0)_c = 1.000$ . Такое явление может свидетельствовать в пользу того, что в этих случаях нагружения разрушение происходит преимущественно из-за растрескивания материала, без заметного накопления повреждаемости.

Экспериментальное исследование относительного изменения модуля упругости СВМ 1:1,  $\alpha = 0^\circ$ , в функции от температуры и случае статического растяжения выявило слабую линейную зависимость модуля  $E$  от температуры  $T$  вплоть до температуры стеклования полимерного связующего ( $\approx 90^\circ\text{C}$ ), при которой  $E/E_0 \approx 0.95$  где  $E_0$  — модуль упругости при комнатной температуре [10, 11].

На фиг. 6 для иллюстрации показана еще одна опытная кривая изменения параметра повреждаемости  $d_{\text{пл}}$ . Там же приведена

\* Лишь в относительно небольшом числе опытов величина  $d_{\text{пл}}$  впоследствии уменьшилась. Однако, это изменение в количественном отношении оставалось в пределах точности измерения.

и соответствующая кривая разогрева, отражающая изменение температуры разогрева на поверхности образца в его опасном сечении. Как показывают экспериментальные данные, что видно также и по кривым на фиг. 5 и 6, повреждаемость образца в основном различается на начальной стадии циклического деформирования, когда температура



Фиг. 6. Изменение относительной частоты  $n$  и температуры разогрева  $\Delta T$ , СВМ 1:1,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\tau_{max} = 11,68 \text{ кгс/см}^2$ ,  $\Delta t = 265,000 \text{ цикл}$ ,  $T_0 = 26^\circ\text{C}$ .

разогрева еще не достигла своего максимального, более или менее стабильного по времени, значения. Относительная протяженность этой стадии утомления материала составляет  $\sim 0,15 - 0,5 N_0$  и зависит от величины напряжения (выносливости) композита и укорачивается с его уменьшением. По графикам  $\Delta T - N$  на соответствующих участках выносливости температура разогрева растет с возрастающей скоростью, но, как было отмечено, по своей величине  $T$  еще не достигает своего максимального стабильного значения. Непосредственно перед разрушением образца снова наблюдается повышение скорости роста температуры разогрева и новое, но уже небольшое, падение значения  $n/n_0$ . Отсюда можно заключить, что в случае циклического растяжения композита вдоль направления волокон суммарная повреждаемость материала перед разрушением большей частью является результатом механического разупрочнения, а не размягчения материала.

**Выводы.** 1. При циклическом деформировании ориентированного стеклопластика СВМ частотой  $\sim 3000 \text{ цикл/мин}$  зависимость между напряжением и выносливостью в полулогарифмической системе координат имеет линейный характер, как и при частоте нагружения  $1200 \text{ цикл/мин}$ .

2. Несущая способность композита в рассматриваемых условиях деформирования исчерпывается при определенном изменении начального значения частоты нагружения независимо от приложенного напряжения.

3. По экспериментальным результатам можно заключить, что при пульсирующем растяжении стеклопластика вдоль волокон стеклопласт-

стик разрушается хрупко, а при симметричном цикле растяжения — сжатия в диагональном направлении потеря работоспособности материала происходит прежде всего из-за размягчения материала.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 25 X 1973

Ն. Ե. ՍԱՐԿԻՍԻԱՆ

ԿՈՎԱՆՈՐՈՇԵԼԱՆ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻՆԵՐԻ ԳԻՄՍԿՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ԵՎ ԳԵՋՈՐՄԱՆՍԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՌՆԱՎՈՐՄԱՆ ԲՎՐՁՐ ՀՍՃԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ  
ԳԵՊԲՈՒՄ

Ս. մ փ ո փ ո ս

Ուսումնասիրվել է էպոքսի-ֆենոլային խեժի վրա պատրաստված (CBAM) տիպի արվողոնայ նախատարամուր ապակեպլաստի նոզնածային նատկու-վյունները թելիկների ուղղությամբ բարախող ձգման և թելիկների նկատմամբ անկյունազծային ուղղությամբ սիմետրիկ ձգման-սեղման դեպքում: Քննա-վորման ցիկլերի նամախականությունը նամապատասխանել է 3000 և 3300 ցիկլ/րոպե:

Էքսպերիմենտայ արդյունքներից նկատում է, որ թելիկների ուղղությամբ ջեկնից բենավորման դեպքում ապակեպլաստի բայրայումը կրում է առավել-յապես մեխանիկական բնույթ, իսկ թելիկների նկատմամբ անկյունազծային ուղղությամբ կրողունակության կորուստը առաջին ներթին տեղի է սենենում նյութի ջերմային փոփոխման պատճառով:

DURABILITY AND DEFORMABILITY OF ORIENTED  
FIBREGLOSS PLASTICS UNDER HIGH FREQUENCY LOADING

N. E. SARKISIAN

S u m m a r y

The fatigue characteristics of orthogonally equistrong fibreglass plastics of the „CBAM“ type under symmetric cycles of tension-compression, pulsating along fibres in the direction diagonal to the latter, are examined.

The frequency of loading cycles is 3000 and 3300 cycles/min respectively.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бекш Т. А., Шнейдерович Р. М. Методы оценки прочности при малом числе циклов нагружения. Заводская лаборатория, т. XXX, № 12, 1964.
2. Олдырев П. П. Исследование деформативных свойств, рассеяния энергии и разрушения жестких полимерных материалов при длительном циклическом нагружении. Автореферат канд. дисс., Рига, 1968.
3. Саркисян Н. Е. Прочность и деформативность стеклопластиков типа СВМ при циклическом осевом нагружении. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 6, 1969.
4. Саркисян Н. Е. Анизотропия статической и циклической деформативности стеклопластиков типа СВМ. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 3, 1971.
5. Саркисян Н. Е. Анизотропия усталостной прочности стеклопластиков типа СВМ. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 2, 1971.
6. Саркисян Н. Е. О влиянии термической обработки на усталостные свойства нетканого стеклопластика. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 5, 1972.
7. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. Физматгиз, М., 1961.
8. Анидзе Р. П., Скалозуб С. А., Уржумцев Ю. С. Усталость стеклопластика при звуковых частотах колебаний. Механика полимеров, № 6, 1972.
9. Олдырев П. П., Тамуж В. П. Изменение свойств стеклотекстолита при циклическом растяжении-сжатии. Механика полимеров, № 5, 1967.
10. Замбахидзе Д. В., Рабинович А. А. Влияние температуры и анизотропии на упругие константы ориентированных стеклопластиков. Механика полимеров, № 6, 1968.
11. Клягичкин Е. П., Зверев А. Н. Исследование механических характеристик стеклопластика типа СВМ в условиях пониженных и повышенных температур. В кн.: Физико-химия и механика ориентированных стеклопластиков. Наука, М., 1967.