

24344446 002 ЭРSАРФЗАРББРР ИНИЧЕГРИЗР SUQUUSP ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա

XXVII, Nº 5, 1974

Механика

А. А. БАБЛОЯН, М. Г. МЕЛКОНЯН

О КОНТАКТЕ ДВУХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ БЕЗ СЦЕПЛЕНИЯ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Рассматривается плоская задача для упругого тела, составленного из двух изотропных прямоугольников одинаковой длины, прижатых друг к другу без трения двумя жесткими захватами у краев.

Предполагается, что под действием внешних усилий и температуры зозможен отрыв материалов на некоторых участках линии контакта.

Основная цель работы заключается в определении размера зоны отрыва между двумя материалами в зависимости от виешних нагрузок, температуры и геометрических параметров задачи. Помимо этого определяются также напряженное и деформированное состояния материалов.

Для неограниченных областей вопросы определения длины зоны контакта (отрыва) подробно рассматривались в работах Кир, Дандерс и Цзай [4], Вейцмана [3], Пу и Хусейна [8, п др.

Задача решается методом Фурье [1], при этом коэффициенты разложения и неизвестный размер зоны отрыва определяются из бесконечзых систем нелинейных уравнений. Доказывается, что систему уравнений можно решать методом последовательных приближений.



Получены формулы для определения контактных напряжений и перемещений вне контактов, а также выражения спл и моментов, действующих на захваты.

1. Рассмотрим плоскую задачу термоупругости для прямоугольника, составленного из двух, имеющих одинаковую длину, прямоугольных слоев из различных материалов с толщинами h_1 и h_2 (фиг. 1). Слон наложены друг на друга без сцепления вдоль линии контакта y=0 п сжимаются П-образными клещами. Прямоугольник находится в стационарном температурном поле $T_i = a_i + b_i y$ (i = 1, 2). При этом возможны такие сочетания внешних воздействий, что берега материалов, находящихся до нагружения в соприкосновении, на определенных участках линии контакта могут удаляться друг от друга, то есть могут возникнуть участки отрыва между материалами. В рассматриваемом случае предположено, что возникает только один участок отрыва в цечтре линии контакта, берега которого могут быть дополнительно нагружены давлением $z_y(x,\pm 6) = f(x)$. Справедливость сделанного предположения можно легко проверить после решения задачи, то есть после определения контактных напряженый и перемещений в зоне отрыва в [4, 11].

В силу симметрии задачу будем решать только для половины основной области ($0 \le x \le -h_2 \le y \le h_1$) при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(i)}(0, y) &= \tau_{xy}^{(i)}(\pi, y) = \tau_{xy}^{(i)}[x, (-1)^{i-1} h_i] = \tau_{xy}^{(i)}(x, 0) = 0 \\ u_i(0, y) &= 0, \quad u_t(\pi, y) = a_0 + b_0 y \quad (i = 1, 2) \\ \sigma_{y}^{(i)}[x, (-1)^{i-1} h_i] = f_i(x) \quad (0 \leqslant x < l_i) \\ v_i[x, (-1)^{i-1} h_i] = \psi_i(x) \quad (l_i < x \leqslant \pi) \\ \sigma_{y}^{(1)}(x, 0) &= \sigma_{y}^{(2)}(x, 0); \quad v_1(x, 0) = v_2(x, 0) \quad (l_3 \leqslant x < \pi) \\ \sigma_{y}^{(1)}(x, 0) &= \sigma_{y}^{(2)}(x, 0) = f_3(x) \quad (0 \leqslant x < l_3) \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем индекс «1» соответствует верхней полобласти с характеристиками E_1 , v_1 , a_1 , а индекс «2» — инжней подобласти с характеристиками E_2 , v_2 , a_2 , где E_i — модуль Юнга, — коэффициент Пуассона, а z_i — коэффициент линейного расширения материала. Принимается, что значения этих параметров не зависят от температуры, а функции $f_i(x)$ (i = 1, 2, 3), $\psi'_i(x)$ (i = 1, 2) кусочно непрерывные в соответствующих интервалах. Отметим также, что длина l_3 , которой характеризуется область контакта $L = \pi - l_3$ неизвестна и подлежит определенню в дальнейшем.

Бигармоническую функцию Эри для каждой подобласти (! и 11) ищем отдельно в виде рядов Фурье [1, 9]

$$\begin{split} \Phi_{i}\left(x, \ y\right) &= \Phi_{0}^{(i)}\left(x, \ y\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda_{k}}{2k\delta_{k}} \left\{ \frac{\left(-1\right)^{i} \mu^{i-1}}{\operatorname{ch} \lambda_{k}^{(i)}} \right| \left(-1\right)^{i} \mu^{3-2i} \left(1 + \frac{\lambda_{k}^{(i)}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}} - \frac{\lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}}\right) \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(3-i)}}{\hbar 2\lambda_{k}^{(3-i)}}\right) + \frac{\lambda_{k}^{(i)} \lambda_{k} \operatorname{ch} \left(\lambda_{k}^{(i)} + \left(-1\right)^{i} \lambda_{k}\right)}{\hbar \lambda_{k}^{(i)} \operatorname{ch} \lambda_{k} \operatorname{ch} \lambda_{k}^{(i)}} - \frac{\hbar \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}\right) \\ &- \operatorname{th} \lambda_{k}^{(3-i)} \left(\operatorname{th} \lambda_{k} - \lambda_{k} + \frac{\lambda_{k}^{(i)} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}\right) \right] X_{k}^{(i)} + \left[1 + \frac{\left(-1\right)^{i} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\operatorname{cth} \lambda_{k}^{(i)}} - \frac{\hbar \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}\right] \\ &- \frac{\hbar \lambda_{k}^{(3-i)}}{\hbar \lambda_{k}^{(3-i)}} \left(\operatorname{th} \lambda_{k} - \lambda_{k} + \frac{\lambda_{k}^{(i)} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}\right) \right] X_{k}^{(i)} + \left[1 + \frac{\left(-1\right)^{i} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\operatorname{cth} \lambda_{k}^{(i)}}\right] \\ &- \frac{\hbar \lambda_{k}^{(3-i)}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}} \left(\operatorname{th} \lambda_{k} - \lambda_{k} + \frac{\lambda_{k}^{(i)} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}\right) \right] X_{k}^{(i)} + \left[1 + \frac{\left(-1\right)^{i} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\operatorname{cth} \lambda_{k}^{(i)}}\right] \\ &- \frac{\hbar \lambda_{k}^{(3-i)}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}} \left(\operatorname{th} \lambda_{k} - \lambda_{k} + \frac{\lambda_{k}^{(i)} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}\right) \right] X_{k}^{(i)} + \left[1 + \frac{\left(-1\right)^{i} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\operatorname{cth} \lambda_{k}^{(i)}}\right] \\ &- \frac{\hbar \lambda_{k}^{(3-i)}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}} \left(\operatorname{th} \lambda_{k} - \lambda_{k} + \frac{\lambda_{k}^{(i)} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}\right) \right] X_{k}^{(i)} + \left[1 + \frac{\left(-1\right)^{i} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\operatorname{cth} \lambda_{k}^{(i)}}\right] \\ &- \frac{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}{\hbar \lambda_{k}} \left(\operatorname{th} \lambda_{k} - \lambda_{k} + \frac{\lambda_{k}^{(i)} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}\right) \right] X_{k}^{(i)} + \left[1 + \frac{\left(-1\right)^{i} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\operatorname{cth} \lambda_{k}^{(i)}}\right] \\ &- \frac{\hbar \lambda_{k}^{(i)}}{\hbar \lambda_{k}} \left(\operatorname{th} \lambda_{k} - \lambda_{k} + \frac{\hbar \lambda_{k}^{(i)} \operatorname{th} \lambda_{k}}{\hbar \lambda_{k}}\right) \right]$$

$$-\frac{(-1)^{i}\lambda_{k}\operatorname{sh}\left(\lambda_{k}^{(i)}+(-1)^{i}\lambda_{k}\right)}{\operatorname{ch}\lambda_{k}^{(i)}\operatorname{ch}\lambda_{k}}+\frac{2\lambda_{k}^{(i)}}{\operatorname{sh}2\lambda_{k}^{(i)}}\left[\left[\frac{\mu^{i-1}\left(1+\lambda_{k}^{(3-i)}\operatorname{ch}\lambda_{k}^{(3-i)}\right)}{\operatorname{ch}\lambda_{k}^{(3-i)}}X_{k}^{(3-i)}-\right]\right]$$

$$-\left(1+\frac{2\kappa_{k}^{(3-i)}}{\sinh 2\kappa_{k}^{(3-i)}}\right)X_{k}^{(3)}\left[\right]\cos kx \qquad (i=1,\ 2) \tag{1.2}$$

где

$$\Phi_{0}^{(i)}(x, y) = P_{1}^{(i)} x^{2} + P_{2}^{(i)} y^{3} + P_{3}^{(i)} y^{2} + P_{4}^{(i)} y$$

$$\delta_{k} = \mu \operatorname{th} \lambda_{k}^{(1)} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(2)}} \right) + \operatorname{th} \lambda_{k}^{(2)} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(1)}} \right)$$

$$\lambda_{k} = ky, \qquad \lambda_{k}^{(i)} = kh_{i}, \qquad \mu = E_{2}/E_{1}$$

$$(1.3)$$

Напряжения и перемещения выражаются через бигармоническую функцию Эри известными соотношениями [9].

При выборе функций $\Phi_i(x, y)$ (i=1, 2) в виде (1.2) некоторые ча условий (1.1) удовлетворяются тождественно. Удовлетворив остальным (смещанным) граничным условиям, для определения неизвестных коэффициентов $X_k^{(i)}$ (i=1, 2, 3; k=1, 2,...) получим следующие нарные уравчения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k X_{k}^{(i)} \cos k\varphi = g_{i}(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_{k}^{(i)} \cos k\varphi, \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant l_{i})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_{k}^{(i)} \cos k\varphi = \gamma_{i}(\varphi), \qquad (l_{i} \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$
(1.4)

где введены обозначения

$$\begin{split} g_{\sharp}(\mathbf{r}) &= 2 \left[2P_{1}^{(l)} - f_{i}(\mathbf{r}) \right], \qquad g_{3}(\mathbf{r}) = -2 \left(1 + \mathbf{n} \right) \left[2P_{1}^{(1)} - f_{3}(\mathbf{r}) \right], \quad (i = 1, 2) \\ \eta_{1}(\mathbf{r}) &= 2h_{1}P_{1}^{(1)} - \mathbf{v}_{1} \left(3h_{1}^{2}P_{2}^{(1)} + 2h_{1}P_{3}^{(1)} + P_{4}^{(1)} \right) - E_{1}\phi_{1}(\mathbf{r}) + \\ &+ E_{1}\mathbf{r}_{1}h_{1}\left(a_{1} + 0.5 b_{1}h_{1} \right) + E_{1}\left(C_{1} - 0.5 \mathbf{r}_{1}b_{1}\mathbf{r}^{2} \right) \\ \eta_{2}(\mathbf{r}) &= 2h_{2}P_{1}^{(2)} + \mathbf{v}_{2} \left(3h_{2}^{2}P_{2}^{(2)} - 2h_{2}P_{3}^{(2)} - P_{4}^{(2)} \right) + E_{2}\phi_{2}(\mathbf{r}) - \\ &+ E_{2}\mathbf{r}_{0}h_{2}\left(a_{2} - 0.5 b_{2}h_{2} \right) - E_{2}\left(C_{1} - 0.5 \mathbf{r}_{2}\beta_{2}\mathbf{r}^{2} \right) \\ \eta_{3}(\mathbf{r}) &= \mathbf{v}_{2}P_{4}^{(2)} - \mathbf{u}\mathbf{v}_{1}P_{4}^{(1)} + 0.5 E_{2}\left(\mathbf{r}_{2}b_{2} - \mathbf{r}_{1}b_{1} \right) \mathbf{r}^{2} \\ \eta_{k}^{(1)} &= X_{k}^{(1)} - a_{k}^{(1)}X_{k}^{(1)} - b_{k}^{(1)}X_{k}^{(2)} - c_{k}^{(1)}X_{k}^{(3)}, \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

$$a_{k}^{(1)} &= \frac{1}{\delta_{k}} \left[\frac{\mathrm{th}\,\lambda_{k}^{(2)}}{\mathrm{cth}\,\lambda_{k}^{(1)}} \left(1 - \frac{\lambda_{k}^{(1)}}{\mathrm{sh}^{2}\lambda_{k}^{(1)}} \right) + \mathbf{\mu} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(1)}}{\mathrm{sh}\,2\lambda_{k}^{(1)}} \right) \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(2)}}{\mathrm{sh}\,2\lambda_{k}^{(2)}} \right) \right] \\ a_{k}^{(2)} &= \mathbf{\mu} \frac{\lambda_{k}^{(1)} + \mathrm{th}\,\lambda_{k}^{(1)}}{\delta_{k}\,\mathrm{sh}\,\lambda_{k}^{(1)}} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,\lambda_{k}^{(2)}} + \frac{\lambda_{k}^{(2)}}{\mathrm{sh}\,2\lambda_{k}^{(2)}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{k}^{(3)} &= -\mu \left(1+\mu\right) \frac{\lambda_{k}^{(1)} + \operatorname{th} \lambda_{k}^{(1)}}{\delta_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k}^{(1)}} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(2)}}\right) \\ b_{k}^{(1)} &= \frac{\lambda_{k}^{(2)} + \operatorname{th} \lambda_{k}^{(2)}}{\delta_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k}^{(2)}} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_{k}^{(1)}} + \frac{\lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(1)}}\right) \\ b_{k}^{(2)} &= \frac{1}{\delta_{k}} \left[\frac{\mu \operatorname{th} \lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{ch} \lambda_{k}^{(2)}} \left(1 - \frac{\lambda_{k}^{(2)^{2}}}{\operatorname{sh}^{2} \lambda_{k}^{(2)}}\right) + \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(1)}}\right) \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(2)}}\right)\right] \\ b_{k}^{(3)} &= -\left(1 + \mu\right) \frac{\lambda_{k}^{(2)} + \operatorname{th} \lambda_{k}^{(2)}}{\delta_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k}^{(2)}} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(1)}}\right) \right) \\ c_{k}^{(1)} &= -\frac{1}{\delta_{k}} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(2)}}\right) \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_{k}^{(1)}} + \frac{\lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{sh} \lambda_{k}^{(1)}}\right) \\ c_{k}^{(2)} &= -\frac{1}{\delta_{k}} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(2)}}\right) \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_{k}^{(1)}} + \frac{\lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{sh} \lambda_{k}^{(2)}}\right) \\ c_{k}^{(2)} &= -\frac{1}{\delta_{k}} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(1)}}\right) \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_{k}^{(2)}} + \frac{\lambda_{k}^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(2)}}\right) \\ c_{k}^{(3)} &= \frac{1 + \mu}{\delta_{k}} \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(1)}}\right) \left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_{k}^{(2)}}\right) \end{aligned}$$

2. Пользуясь известными методами решения парных уравнений полученного типа [2], для определения неизвестных коэффициентов $X_n^{(l)}$ (l=1, 2, 3) получим бескопечные системы алгебранческих уравнении

$$X_{n}^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(i)} X_{k}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{(i)} X_{k}^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}^{(i)} X_{k}^{(3)} + d_{n}^{(i)}$$
(2.1)
(n = 1, 2, ...)

и уравнения для определения коэффициентов, входящих в выражения $\Phi_0^{(l)}(x, y)$ (l = 1, 2):

$$P_{1}^{(2)} = P_{1}^{(1)}, \quad 6P_{2}^{(i)} = E_{i} \left(b_{0} - \alpha_{i} b_{i} \pi \right) / \pi, \quad 2P_{3}^{(i)} = 2\nu_{i} P_{1}^{(i)} + E_{i} \left(a_{0} - \alpha_{i} a_{i} \pi \right) / \pi$$

$$(2.2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k}^{(l)} z_{k} \left(\cos l_{i} \right) + \int_{0}^{t} F_{i} \left(\theta \right) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \, d\theta - \int_{l_{i}}^{\pi} G_{i} \left(\theta \right) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \, d\theta = -2\eta_{i} \left(\pi \right)$$

$$(i = 1, \ 2, \ 3)$$

В (2.1) п (2.2) введены следующие обозначения: $2a_{nk}^{(1)} = k (1 - a_k^{(1)}) J_{nk}(l_1), \quad 2b_{nk}^{(1)} = -kb_k^{(1)} J_{nk}(l_1), \quad 2c_{nk}^{(1)} = -kc_k^{(1)} J_{nk}(l_1)$ $2a_{nk}^{(2)} = -ka_k^{(2)} J_{nk}(l_2), \quad 2b_{nk}^{(2)} = k (1 - b_k^{(2)}) J_{nk}(l_2), \quad 2c_{nk}^{(2)} = -kc_k^{(2)} J_{nk}(l_2)$ $2a_{nk}^{(3)} = -ka_k^{(3)} J_{nk}(l_3), \quad 2b_{nk}^{(3)} = -kb_k^{(3)} J_{nk}(l_3), \quad 2c_{nk}^{(3)} = k (1 - c_k^{(3)}) J_{nk}(l_3)$ (2.3)

$$2d_{n}^{(i)} = \int_{0}^{l_{i}} F_{i}(\theta) y_{n}(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_{l_{i}}^{\pi} G_{i}(\theta) y_{n}(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{0}^{\theta} \frac{g_{i}(\varphi) \cos \varphi / 2 d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}}, \qquad G_{i}(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\eta_{i}'(\varphi) \cos \varphi / 2 d\varphi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}}$$

$$J_{nk}(l_{i}) = \int_{0}^{l_{i}} y_{k}(\cos\theta) y_{n}(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

причем

Fi

$$\int_{0}^{\pi} y_{k} (\cos \theta) y_{n} (\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{2}{k} \delta_{kn}$$
$$\overline{J}_{nk} (x) = \int_{x}^{\pi} y_{k} (\cos \theta) y_{n} (\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta =$$
$$= \frac{k z_{k} (\cos x) y_{n} (\cos x) - n z_{n} (\cos x) y_{k} (\cos x)}{n^{2} - k^{2}} \qquad k \neq n \qquad (2.4)$$

$$\overline{J}_{kk}(x) = \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - P_{k-1}^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - P_{k-1}^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - P_{k-1}^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - P_{k-1}^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) + 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) + 2P_{k-1}(\cos x) + 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x) \right] + \frac{1}{2k} \left[2 + 4\cos x + 2P_k(\cos x) + 2P_{k-1}(\cos x) + 2P_{k-1}(\cos x) + 2P_{k-1}(\cos x) \right] \right]$$

$$+\frac{2}{k}\sum_{m=1}^{k-1}P_{m}(\cos x)\left[P_{m}(\cos x)\cos x-P_{m-1}(\cos x)\right]$$

Здесь ∂_{kn} — символ Кронекера, $P_k(x)$ — полином Лежандра, а $y_k(x)$ и $z_k(x)$ имеют вид [2]

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x) \quad |x| \le 1$$
 (2.5)

Учитывая оценки соответствующих рядов, полученных в работах [2, 9], нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{(l)}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}^{(l)}| + \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}^{(l)}| < A_{l} n^{-\gamma_{2}} + B_{l} e^{-2hn}$$
(2.6)
(*i* = 1, 2, 3)

где $h = \min(h_1, h_2)$, а A_i и B_i — постоянные, значения которых зависят от геометрических параметров задачи и физических свойств материалов.

Из оценки (2.6) следует, что система (2.1) квази-вполне регулярна при любом значении размера отрыва l_3 . Свободные члены системы стремятся к пулю как $O(n^{-3l_2})$. Следовательно, решение системы (2.1) можно получить методом редукции или методом последовательных приближений.

Из формул (1.2) следует, что некоторые ряды, входящие в выражепля напряжений и перемещений, на границе прямоугольника сходятся мелленио. Улучшив сходимость этих рядов с помощью бесконечных систем (2.1) и выделив при этом соответствующие особенности для контактного напряжения $z_y^{(i)}$ и перемещения v_i вне контакта, получим формулы, удобные для определения покомых величии в окрестности особых точек

$$\begin{aligned} z_{i} z_{j}^{(i)}(z, H_{i}) &= S_{i} - \frac{F_{i}(0)}{4} + \frac{2^{-1.5} \sin \frac{\varphi}{2}}{1 \cos l_{i} - \cos \varphi} \left[F_{i}(l_{i}) + G_{i}(l_{i}) + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k_{\gamma_{k}^{(i)}} y_{k}(\cos l_{i}) \left] - \frac{\sin \varphi}{2 \sqrt{2}} \left[\int_{0}^{l_{i}} \frac{F_{i}(\theta) d\theta}{1 \cos \theta - \cos \varphi} - \right. \\ &- \int_{l_{i}}^{\tau} \frac{G_{i}(\theta) d\varphi}{1 \cos \theta - \cos \varphi} - \sum_{k=1}^{\infty} k_{\gamma_{k}^{(i)}} \int_{l_{i}}^{\varphi} \frac{y_{k}^{'}(\cos \theta) d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}} \right] \\ &- (l_{i} < \varphi < \pi) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$
(2.7)

$$v_i[\varphi, (-1)^{i-1}h_i] = \frac{(-1)^i \cos\frac{\varphi}{2}}{E_i \sqrt{2}} \left[\sum_{k=1}^n k \gamma_k^{(i)} \int_{\varphi}^{l_i} \frac{y_k (\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} + \right]$$

$$+ \int_{z}^{l_{i}} \frac{F_{i}(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 \cos z - \cos \theta} - \int_{l_{i}}^{z} \frac{G_{i}(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 \cos \varphi - \cos \theta} \bigg] + \frac{1}{2} \alpha_{i} b_{i} (\pi^{2} - z^{2}) - \phi_{i} (\pi)$$
$$(0 \leqslant \varphi \leqslant l_{i}); \quad (i = 1, 2)$$

$$(-1)^{i} E_{i} v_{i} (\varphi, 0) = \frac{\eta_{3}(\pi)}{\delta_{0}} - (-1)^{i} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \omega_{k}^{(i)} \cos k\varphi + \right]$$

$$+ v_i P_4^{(l)} - E_i \left(C_1 - \frac{1}{2} a_i b_i \varphi^2 \right) \right] + \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\delta_0 \sqrt{2}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k_{1k}^{\varphi(0)} \int_{\varphi}^{l_1} \frac{y_k (\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} + \right]$$

$$+\int_{\varphi}^{l_{\varphi}} \frac{F_{\mathfrak{z}}(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} - \int_{l_{\varphi}}^{\pi} \frac{G_{\mathfrak{z}}(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} \right]$$

$$(0 \leqslant \varphi \leqslant l_{\mathfrak{z}}), \quad (i = 1, 2)$$

$$(2.8)$$

где

$$S_{1} = S_{2} = 2P_{1}^{(1)}, \quad S_{3} = -2\delta_{0}P_{1}^{(1)}, \quad \varepsilon_{1} = \varepsilon_{2} = 1, \quad z_{3} = -\delta_{0} = -1 - \mu$$

$$2\mathcal{H}_{i} = (i-3)\left[(i-2)h_{1} + 2(i-1)h_{2}\right] \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\omega_{k}^{(i)} = \frac{\mu^{i-1}}{\delta_{k}} \left[\frac{(\lambda_{k}^{(1)} + \ln\lambda_{k}^{(1)})X_{k}^{(1)}}{\sinh\lambda_{k}^{(1)}\operatorname{cth}\lambda_{k}^{(2)}} = \frac{(\lambda_{k}^{(2)} + \ln\lambda_{k}^{(2)})X_{k}^{(2)}}{\sinh\lambda_{k}^{(2)}\operatorname{cth}\lambda_{k}^{(1)}}\right] +$$

$$+ (-i)^{i} \left[\frac{1}{\delta_{0}} - \frac{\operatorname{th}\lambda_{k}^{(i)}}{\delta_{k}}\left(1 + \frac{2\lambda_{k}^{(3-i)}}{\sin2\lambda_{k}^{(3-i)}}\right)\right]X_{k}^{(3)} \quad (i=1, 2)$$

Длину области контакта между двумя материалами будем определять из условия непрерывности нормальных напряжений на концах зон областей контакта [11], то есть из условия $\sigma_y(l_3, 0) = f_3(l_3)$.

В силу первой из формул (2.7) при *i*=3 это условие можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_{l_k}^{(3)} y_k (\cos l_3) + F_3(l_3) + G_3(l_3) = 0$$
(2.9)

Таким образом, для определения иензвестных коэффициентов $X_k^{(I)} P_1^{(1)}, P_4^{(1)}, P_4^{(2)}$ и C_1 , входящих в выражения функций напряжений, а также длины области отрыва получаем бесконечные системы линейных алгебранческих уравнений (2.1), линейные уравнения (2.2) и трансцеплентное относительно l_3 уравнение (2.9). Решая эти уравнения относительно отмеченных неизвестных и подставляя найденные значения в выражения напряжений и перемещений, выразим последние через внешине нагрузки и перемещений из условий статического равновесия отдельных звеньев клещей легко определяются значения сил и моментов, действующих на эти звенья. Для силы F и момента M, действующих на боковые грани прямоугольника, а также для сил P_i и моментов M_i (i=1, 2), действующих на верхний и инжний штампы, получим следующие выражения:

$$F = \int_{-h_{\star}}^{h_{\star}} z_{x}(\pi, y) \, dy = 3 \left(h_{1}^{2} P_{2}^{(1)} - h_{2}^{2} P_{2}^{(2)} \right) + 2 \left(h_{1} P_{3}^{(1)} + h_{2} P_{3}^{(2)} \right)$$

$$M = \int_{-h_{\star}}^{h_{1}} y z_{x}(\pi, y) \, dy = h_{1}^{2} \left(2P_{2}^{(1)} h_{1} + P_{3}^{(1)} \right) + h_{2}^{2} \left(2P_{2}^{(2)} h_{2} - P_{3}^{(2)} \right) -$$

$$(2.10)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{2k} \left[\left(a_{k}^{(1)} - a_{k}^{(2)} \right) X_{k}^{(1)} + \left(b_{k}^{(1)} - b_{k}^{(2)} \right) X_{k}^{(2)} + \left(c_{k}^{(1)} - c_{k}^{(2)} \right) X_{k}^{(3)} \right]$$

$$P_{i} = \int_{-I_{\star}}^{\infty} z_{y}^{(i)}(x, H_{i}) \, dx = 2\pi P_{1}^{(i)} - \int_{0}^{I_{\star}} f_{i}(x) \, dx \qquad (i = 1, 2)$$

$$M_{i} = \int_{l_{i}} (x - l_{i}) \, \sigma_{y}^{(i)}(x, H_{i}) \, dx = 2\pi \left(\pi - l_{i}\right) P_{1}^{(i)} - \Phi_{i}(x, H_{i}) \left|_{l_{i}}^{\pi}\right| (2.10)$$

которые являются связями между силой и моментом, действующими на соответствующих гранях боковых П-образных зажимов и параметрами перемещений этих же граней.

3. В качестве числового примера рассмотрим две прямоугольные иластички одинаковой толщины $h_1 = h_2 = h = \frac{2\pi}{3}$, составленные из меди и стали, находящиеся в контакте одной кромкой и сжимаемые у краев жесткими клещами, симметрично расположенными относительно главных осей прямоугольника. Внешние нагрузки и перемещения под штамнами задаются следующим образом:

$$f_{1}(x) = f_{2}(x) = p, \qquad f_{3}(x) = -q, \qquad b_{0} = 0.$$

$$\psi_{1}(x) = -\psi_{2}(x) = -\delta \frac{1 + \cos x}{1 + \cos l}$$
(3.1)

гле δ — заданное перемещение под штампом в точке $x = l_1 = l_2 = l = \frac{\pi}{2}$, а p н q—положительные величины. Физико-механические характеристики

выбранных материалов имеют значения

$$a_1 = 17 \cdot 10^{-6} \ \epsilon \ pad^{-1}, \quad E_1 = 1.12 \cdot 10^6 \ \kappa \ \epsilon \ cm^{-1}, \quad v_1 = 0.34$$
(3.2)

$$a_2 = 12 \cdot 10^{-6} \, r p \, a \, \partial^{-1}, \qquad E_2 = 2E_1, \qquad v_2 = 0.28$$

Целью вычислений является определение длины участка отрыва $2l_3$ в зависимости от параметров *р. q,* δ , a_0 , T_1 , T_2 . Отметим, что наличие ислинейного уравнения (2.9) в совокупности систем (2.1), (2.2) и (2.9) затрудияет получение численных значений неизвестных величии. Эту систему можно решать методом последовательных приближений, задавая при этом приближенное значение l_3 , затем в ходе следующих приближений уточнить как значение l_3 , так п значения остальных не-известных.

Однако, такой подход связан с большим объемом вычислений.

Избегая отмеченных затруднений, систему (2.1), (2.2), (2.9) будем решать следующим образом: задаем значение l_3 п решаем систему уравнений (2.1) и (2.2) относительно остальных неизвестных, затем подставляя найденные значения в уравчение (2.9), получаем следующую связь между параметрами:

$$\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 \beta + \gamma_4 F_0 + \gamma_5 T_1 + \gamma_8 T_2 = 0 \tag{3.3}$$

при которой длина участка отрыва 213 имеет данную величину.

Такой же прием вычисления пеизвестной длины зоны контакта был применен также в работе [4].

Коэффициенты γ_i ($i = 1 \div 6$) зависят от физико-геометрических параметров задачи. Для рассматриваемого нами случая значения γ_i для различных длин l_3 приведены в табл. 1.

<i>l</i> ₃	—~~"1	$-\gamma_2$	73	V.a	15	1.6
0	0.38652	0.46031	0,18820	0.00892	1.17220	0.79038
□ :18	0.38457	0.46106	0.19000	0.00922	1.20987	0.81679
7: 9	0.37865	0.46194	0.19525	0.01003	1.31825	0.88860
π: 6	0.36866	0.46325	0.20488	0.01136	1.49243	1.00631
$2\pi: 9$	0.35495	0.46482	0.21686	0.01301	1.70908	1.15239
$5\pi : 18$	0.33703	0.46694	0.23218	0.01488	1.95609	1.31894
π: 3	0.31561	0.47070	0.24939	0.01686	2.21516	1,49363
$7\pi:18$	0.29086	0.47592	0.26786	0.01880	2.47033	1,66569
4=: 9	0.26309	0.48403	0.28107	0.02039	2.67980	1.80692
π : 2	0.23437.	0.49947	0,29825	0.02227	2.92645	1.97324
57:9	0.20466	0.52198	0.30593	0.02371	3.11499	2.10036
11=:18	0.17366	0.54660	0.30478	0.02472	3.24807	2.19010
$2\pi: 3$	0.14261	0.58755	0.29835	0.02601	3.41761	2.30441
$13\pi : 18$	0.11347	0.63937	0.28189	0.02687	3,53143	2.38116
77: 9	0.08502	0.70957	0.25759	0.02758	3.62423	2,44373
57.: 6	0.05971	0.81437	0.22940	0.02813	3.69595	2.49209
87 : 9	0.03808	0.97029	0.20105	0.02848	3.74232	2.52335
17 = : 18	0.02213	1.26379	0.17737	0.02899	3.80944	2.56861

Отметим, что в соотношении (3.3) β и F₀ связаны с перемещениями δ и a₀ следующими формулами:

$$2\beta = E_1 \delta, \qquad F_0 = -E_1 a_0$$

Табл. 1 составлена для случая, когда известно значение перемещения боковых граней a_0 . Если вместо a_0 известно значение силы F. действующей на боковых гранях, то, определяя a_0 из первого уравнения (2.10) для каждого значения l_3 отдельно и подставляя в соотношение (3.3), получим связь между параметрами $p, q, \delta, F, T_1, T_2$:

$$\beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 \beta + \beta_4 F + \beta_5 T_1 + \beta_6 T_2 = 0 \tag{3.4}$$

при которой длина области отрыва $2l_3$ имеет данную величину. Значения коэффициентов β_i ($i = 1 \div 6$) для рассматриваемого случая приведены в табл. 2.

На основе приведенных табл. 1 и 2 построены графики зависимостей ллины участков контакта от различных комбинаций параметров *p*, *q*, δ , *a*₀(*F*), *T*₁, *T*₂. На фиг. 2 дается график функции $l_3 = l_3(p)$ для различных значений перемещения под штампами ($\beta = 0.5\beta_0$, β_0 , $2\beta_0$, гле $\beta_0 = 10^{-3}$ *см*) п температур материалов ($T_1 = T_2 = T = 0^\circ$, 20° , 40° C), когда внутреннее

Tabanua 1

давление и боковые перемещения равны нулю ($q = a_0 = \theta$). Как видно из приведенных графиков, начиная с некоторого значения растягивающей нагрузки $p = p_0$, между материалами возникает отрыв слоев и длина зопы отрыва увеличивается при увеличении нагрузки p.

*7		100					10
1	1.9	15	.7	11	83	1 1	· · ·
- á -	1	ω,	18	£4.	64	61	-

13	—3 ₁	- 12	.3	-154	-5	36
0	0.38433	0.46031	0.18372	0.00422	0.94112	0.51043
$\pi: 18$	0.38232	0.46104	0.18539	0.00435	0.97154	0.52805
a: 9	0.37622	0.46185	0.19023	0.00475	1.15848	0.57411
=: 6	0.36595	0.46303	0.19922	0.00538	1.19834	0.64988
2 .: 9	0.35192	0.46438	0.21043	0.00616	1.37256	0.74435
$5\pi : 18$	0.33371	0.46620	0.22492	0.00705	1.57180	0.85257
π: 3	0.31207	0.46960	0.24135	0.00799	1.78092	0.96585
7 = : 18	0.28725	0.47442	0.25922	0.00892	1.98823	1.07833
47.: 9	0.25960	0.48216	0.27222	0.00969	2.16045	1.17179
7 : 2	0.23114	0.49729	0.28925	0.01061	2.36433	1.28233
57: 9	0.20185	0.51961	0.29726	0.01131	2.52159	1.36752
11=:18	0.17134	0.54417	0.29677	0.01185	2.64080	1.43223
2:: 3	0.14083	0.58516	0.29110	0.01251	2.78931	1.51277
$13\pi : 18$	0.11216	0.63713	0.27557	0.01298	2.89455	1.56996
7=: 9	0.08411	0.70754	0,25223	0.01338	2.98359	1.61818
5=: 6	0.05911	0.81260	0.22498	0.01371	3.05630	1.65755
87: 9	0.03770	0.96852	0.19753	0.01395	5,10905	1.68622
17=:18	0.02188	1.26265	0.17473	0.01427	3.18096	1.72524



Значение ро зависит от температуры 7 и перемещения штампов δ . причем в данном случае $p_0 = p_0(T, \delta)$ является возрастающей функцией от каждого аргумента. Нетрудно видеть, что в этом примере соотношения между l_3 и p, p_0 и T, p_0 и δ являются взаимно однозначными.



На фиг. З приведен график функцин $l_3 = l_3(q)$ в зависимости от боковых перемещений ($F_0 = 0.5u_0$; u_0 ; $2u_0$, где $u_0 = 10^{-3}$ см) и температур материалов ($T_1 = T_2 = T = 0^\circ$; 20° ; 40° C), когда $p = \delta = 0$. В этом случае отрыв возникает при некотором значения $q = q_0(T, a_0)$ и при увеличения внутреннего давления q до значения $q = q_{\max}(T, a_0)$ зона отрыва расширяется. Дальнейшее расширение зоны отрыва происходит без увеличения внутреннего давления. Значения величин $q_0(T, a_0)$ и $q_{\max}(T, a_0)$ увеличиваются при возрастании температуры материалов и боковых перемещений a_0 . На основе графика $l_3 = l_3(q)$ легко составить график функини $l_3 = l_3(Q)$, где Q — общее давление на участке отрыва ($Q = 2l_3q$). При возрастании Q от 0 до Q_{\max} зона отрыва расширяется, причем дальнейшее расширение происходит без увеличения Q. Отметим еще, что $l_3(q_{\max}) < l_3(Q_{\max})$.

График функции $l_3 = l_3(p)$ при различных значениях $a_0 - u - T$ привелен на фиг. 4.

На фиг. 5—7 даются графики вышеприведенных функций, когда на боковых гранях прямоугольника вместо нормального перемещения α_3 заданы значения пормальной силы *F*. На основе графиков 5—7 можно сделать соответствующие выводы относительно поведения функции $l_3 = l_3(p)$ п $l_3 = l_3(q)$ для аналогичных случаев, соответствующих графикам 2—4. Сравнение графиков 5—7 с графиками 2—4 показывает, что для выбранных значений геометрических параметров характер изменения длины зоны отрыва l_3 в зависимости от нагружения в основном одинаков. Отметим, что при составлении графиков 5—7 дли силы *F* приняты значения F = 0.5f; f; 2f, где $f = 2h \cdot 10^3 \kappa a$.

При решении задачи было принято, что существует только одна область отрыва вдоль линии контакта материалов (y=0).



Такое допущение верно, если а) в участках контакта не возникают области растягивающих напряжений ($\sigma_y > 0$) и б) берега отрыва не приходят в соприкосновение ($v_1 - v_2 > 0$) [4, 11].

Проверка выполнения этих условий в каждом конкретном случае не представляет особых затруднений.

Приведем для случая (3.1) при $l_3 = \frac{\pi}{3}$, $l_1 = l_2 = \frac{2\pi}{3}$ некоторые значения контактных напряжений $\sigma_y(x, 0)$ ($l_3 \ll x \ll \pi$) и разности нормальных перемещений $\delta(x) = E_1 [v_1(x, 0) - v_2(x, 0)]$ ($0 \ll x \ll l_3$):





 $\delta(0) = 5.7476p + 4.7351q + 19.2026T_1 + 12.9479T_2 + 0.3594\beta + 0.1486F_0$ $\delta\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4.8361p + 4.0299q + 15.2909T_1 + 10.3103T_2 + 0.2862\beta + 0.1183F_0$ $\delta\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad \sigma_y\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = -q \quad (3.5)$

$$\bar{\sigma}_{y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -0.1490p + 1.0620q - 1.6505T_{1} - 1.1129T_{2} - 0.03093 - 0.0128F_{0}$$

$$\sigma_{y}\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right) = -0.4236p - 1.1630q - 4.9419T_{1} - 3.3322T_{2} - 0.0971\beta - 0.0401F_{0}$$

 $\sigma_y \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right) = -0.7887 p - 1.2786q - 9.5990 T_1 - 6.4724 T_2 - 0.1796\beta - 0.0742 F^0$ (3.5) $\sigma_y (\pi, 0) = -1.1587 p - 1.3917 q - 14.5472 T_1 - 9.8088 T_2 - 0.2722\beta - 0.1125 F_0$ Вычисления сделаны по формулам

$$\delta(x) = 6 \left(2P_{1}^{(1)} + q\right) \ln \frac{\frac{\cos \frac{x}{2} + \sqrt{\cos^{2} \frac{x}{2} - \cos^{2} \frac{l_{3}}{2}}}{\cos \frac{l_{3}}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k_{1k}^{(3)} \int_{x}^{l_{3}} \frac{y_{k}(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}}$$
(3.6)
$$(x < l_{3})$$
$$\delta_{y}(x, 0) = -q - \frac{\sin \frac{x}{2}}{6+2} \sum_{k=1}^{\infty} k_{1k}^{(3)} \int_{x}^{t} \frac{y_{k}(\cos \theta) d\theta}{1 \cos \theta - \cos x},$$

$$(l_2 \leqslant x \leqslant \pi)$$

которые получаются из (2.7) с учетом (3.1) и (3.2).

Как видно из приведенных соотношений (3.5), существует достаточно обширная область изменения параметров p, q, β , T_1 , T_2 , $a_0(F)$, когда выполняются условия a) и б), то есть таких значений параметров, при которых появление других зон отрывов, кроме центрального, исключается.

Если же для некоторого случая нагружения эти условия не соблюдаются одновременно, то для полного исследования вопроса надо снова решать задачу с предположением существования соответствующего числа зон контакта. Решение последней задачи новых принципиальных затруднений не вызовет.

Институт механики АН АрмССР Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступнаа З ІХ 1973-

Ա. 🔔 ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Մ. Գ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՌԱՆՑ ՇՓՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԱՍԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՈՐՈՇՈՒՄՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկվում է Հարթ կոնտակտային խնդիրը մի առաձգական մարմնի Համար, որը բաղկացած է միևնույն երկարությամբ երկու իզոտրոպ ուղղանկյուններից։ Ուղանկյունները իրար են սեղմվում առանց շփման սիմեարիկ դասավորված П-ձևի երկու աքցաններով։ Ենթադրվում է, որ արտաքին ուժերի և ջերմության աղդեցության տակ Հնարավոր է կոնտակտի տիրույթում նյուբերի իրարից Հեռացումը միայն կենտրոնական մասում։

Խնդիրը լուծվում է ֆուրյեի մենհոդով։ Վերլուծունյան դործակիցները որոշվում են գծային Հավասարումների անվերջ սիստեմներից։ Ապացուցվում է, որ բացվածքի ցանկացած չափի Համար անվերջ սիստեմները ընդՀանուր դեպբում կվաղի-լիովին ռեղուլյար են։

Բացվածքի չափը որոշելու Տամար ստացված է տրանսցենդենտ Տավաստրում։ Երկրաչափական պարամետրերի որոշակի Տարաբերությունների դեպբում դիտարկված է թվային օրինակ։ Բերված են ազյուսակներ և դրաֆիկներ, որոնք ցույց են տալիս բացվածքի չափի և արտաքին բեռնավորման դործոնների միջև եղած կապերը։

DETERMINATION OF DIMENSION OF INTERNAL SEPARATION IN A COMPOSITE RECTANGLE

A. A. BABLOYAN, M. G. MELKONIAN

Summary

A plane problem of an elastic solid composed of two isotropic rectangles of equal length is considered. The rectangles are pressed to one another without friction with two symmetrically applied II-shaped tongs.

It is assumed that under the action of external loads and temperature any separation of materials is possible only in the central part of the contact line.

The problem is solved by the Fourier method. The coefficients of expansion are determined from infinite systems of linear equations. It is proved that at any length of the crack the problem systems in the general case are quasi-quite regular.

A transcendental equation is derived to determine the crack length.

Some numerical examples are given for certain actual relations of geometric garameters. The tables and graphs, showing relation between a crack length and external factors of loading, are presented.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. П.М.М. т. XXI, вып. 1, 1957.
- Баблоян А. А. Решение некоторых парных уравнений. встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
- 3. Вейцман. О контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. Прикл. мех., т. 36, № 2, 1969.
- 4. Кир, Дандерс, Цзай. Контактная задача для слоя. лежащего на полупространстве. Прикл. мех. т. 39, № 4, 1972.

2 Известия АН Армянской ССР. Механика, № 5

- Pu S. L., Hussain M. A., Anderson G. Lifting of a plate from the foundation due to axisymmetric pressure. Developments in Mechanics. Prossidings of the 11th Midwestern Mechanics Conference, vol. 5, 1969, pp. 577-590.
- б. Кир, Сильва. Две смешанные задачи для полуполосы. Прикл. мех., т. 39, № 4, 1972.
- 7. Рейс и Си. Плоские задачи о трещинах, расположенных на границах двух различных сред. ПМ, т. 32, сер. Е, № 2, 1965.
- 8. Пу, Хусейн. К вопросу о контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. Прикл. мех., т. 37, № 3, 1970.
- 9. Мелконян М. Г. Об одной плоской контактной задаче термоупругости для составного прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т XXV, № 1, 1972.
- Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости. Изд. Наука, Л., 1968.
- 11. Ландау Л. Д. в Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., 1965.

Շեխանիկա

XXVII, Nº 5, 1974

Mexanetter

С. П. КУКУДЖАНОВ.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИИЛИНДРИЧЕСКОП ОБОЛОЧКИ. НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕПСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ВСЕП ПОВЕРХНОСТИ

Неследуется влияние предзарительно денствующей изгибающей поперечной нагрузки, равномерно распределенной по всей новерхности консольной цилиндрической оболочки, на собственные частоты и формы собственных колебаний. Предполагается, что своболный край полкреилен жестким кольцом, причем соедянение кольна с оболочкой шарикрное. Основное внимание уделяется наименьники частотам, практически наяболее важным и плаболее чувствительным к внешани воздействиям.

При решении задачи для метода Бубнова-Галеркина вспользовалепредложенный нами нуть определения оптимальных начальных приближения собственного числа [2], с помощью которого можно избежать значательных грудностей, сиязанных с учетом большого числя членов нскомого вядя. Начальные приближения были получены в виде формул. При учете же более высоких приближений использовалась ЭВМ. Получены кравые изменения низших частот в зависимости от геометрических лараметров, Проведено сравнение с влюстным случаем колебания, когда на оболючку действует раднальное внешнее дазление. Сравнениепоказало, что расхождение между низшими настотами для тух случае : будет существенным по мере позрастания интенсивности внешней нагрузки. Кроме того, необходимо отметить, что налячие зоны растяжения окружного напряжения финет на некоторые частоты в сторону их увелачения при возрастании интенсивности предварительно действующей нагрузка. Высшие частоты практически не зависят от внешней изгрузки для приемлемого интерзала 110 ссть когда нагрузка ис превосходит своего критического значения).

Путь отыскания оптитенных начальных приближений собственного числа и главных гармоник рица соя метолов Бубнова-Галеркина и Ратца заключается в следующем. В отличие от обычно используемого приема, инжсы коорлинатных функций заранее не фиксируются и представляют собой некоторую наперед и известную последовательность (n_k) . Поэтому для искомой функции у березся следующее презставляют:

$$\varphi = 1 + \cdots + n_n \varphi_n$$
 (*)

Тогда определение оптимальных начальных приближении собствезного числа и главных гармоник ряда сводится к отысканию пидексов (*n_k*), реализующих минамум соотаетствующего приближения собственного C. H. Kyley Learness

числа при фиксированном числе гармоник: пначе товоря, наименьшее расхождение б между точным значением собственного числа P и фиксированным k-ым приближением l^{k-1} будет для тех индексов $\{n_k\}$, при которых $P^{(k)}$ принимальное значение

$$b = |P - P^{(k)}|, \qquad P^{(k)} - \min P^{(k)}(a_k)|$$

так, есля в ряде () ограничиться двумя членами, то наплучшим вторым приближением булет

$$\min P \cdot (n_1, n_2) = P_{ij}^{(1)}(n_{ij}^n, n_j^n)$$

а индексам n_1^i , n_2^0 , реализующам этот минимум, соответствует нари главных гармовик, яанлучним образом приближающаяся к точному решению по сравнению со эсеми возможными парами.

Перехоля к решению задачи, как обычно, преднолагаем, что предварительно-нипряженное состояние безмомению, тогда

$$T_{\gamma}^{0} = \rho R^{2} \cos \varphi, \qquad T_{\gamma}^{0} = -\rho R \cos \varphi, \qquad S_{\gamma}^{0} = -2\rho R^{2} \sin \varphi \qquad (1)$$

 R_{2} , R_{2} — координаты в осевом и окружном направлениях; R — раднус оболочки, p интенсавность эненивей нагрузки; T_{1}^{0} , T_{2}^{0} , осеван, окружная и слингающее усилия безмом итного состояния.

Уравнение колебания предварительно-напряженной оболочки в форме Батдорфа [1] имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi^2} = \frac{1}{Eh} \left(T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial (\partial z)} \right) = \frac{R}{Eg} \frac{\partial \omega}{\partial t^2} = 1$$

$$\frac{h^2}{12R^2 (1 - z^2)} + \nabla^{-1} \nabla^{1} - 1$$
(2)

\[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]

Полставляя (1) в (2), получком уравление с переменными коэффиинентами.

Будем искать решение в виде следующего двойного ряда:

$$= \cos w t \sum_{m_k \in \mathcal{L}} A_{m_k} \sin \frac{m - R}{l} \cos n_k \neq (3)$$

который удовлетворяет условням своболного опирания. И плексы *т.* как обычно, принимают значения 1, 2, 3.... а инлексы (*n*_s) представляют собой некоторую намеред неизвестную последовательность целых чисел. Отметим, что общность при этом не вирушается, так как каждое n_k (для фиксированного *m*) может пробегать все значения натурального ряда чисел. Используя метод Бубнова-Галеркина в сочетании с данным подходом, получаем следующую однородную систему линейных алгебранческих уравнении относительно коэффициентов А_{тик}:

$$\begin{split} A_{mn_{k}}(M_{mk} = i) + \frac{p_{a}}{2} \Big[-A_{mn_{k}-1}(A_{mn_{k}-1}) - A_{mn_{k}-1}(d_{m(n_{k}-1)}) + \\ &+ \sum_{i} \left(\Delta_{n_{k}-1}^{i} A_{nn_{k}-1} \right) - A_{nn_{k}-1}(A_{mn_{k}-1}) \Big] \Big]^{-1} \\ (4) \\ M_{mk} = \frac{m^{2}}{7^{2}} \left(z \theta_{mk} + \delta \theta_{mk}^{-1} \right), \quad \theta_{mk} = \frac{(m^{2} - m^{2})^{2}}{2^{2}m^{2}}, \quad \gamma = \frac{l}{\pi k^{2}} \\ z - \left[12 \left(1 - v^{2} \right)^{-1}, \quad d_{m(n_{k}-1)} - \left(n_{k} - 1 \right) \left(n_{k} - 1 \right) - r \right] \\ r_{m} = \frac{m^{2} \pi^{2}}{3} - \frac{1}{2}, \quad \delta = \left(\frac{R}{h} \right)^{2}, \quad p_{0} = \frac{p}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^{3} \end{split}$$
(5)

 $\Delta_{n_k\pm 1}^{lm} = (-1)^{m-1} \frac{8im}{i^2 - m^2} \left[\frac{i^2}{i^2 - m^2} \mp (n_k \pm 1) \right], \quad i = \Omega_{0^{m^2}}, \quad \Omega_0 = \frac{\gamma R^2}{Eg} \delta$

Эта система имеет нетривнальное решение тогда и голько тогда, когда се определитель А=0.

Ограничиваясь в начальном приближении шестью членами ряда (3), получаем систему шести уравнении относительно коэффициентов A_{mn_k} . Последовательность (n_k) сразу выявляется на основании вида системы (4), а именно ири m = 1 (n_1 $n_2 = n - 1$, n = n - 1), аналогично и для m = 2. Это иструдно усмотреть из следующего рассуждения, например, если в ряде (3) ограничиться двуми членами с неизвестными индексами n_1 и (причем $u_2 = n_1 \pm 1$), то получим систему двух несвизанных уравлении

 $A_{mn}\left(M_{mn}-i\right)=0, \quad \bullet \quad A_{mn}\left(M_{mn}-i\right)=0.$

Поэтому, чтобы получить связанную систему. необходимо взять $n_2 = n_1 - 1$ (чтобы учесть коэффициент . либо $n_2 - n_1 - 1$ (для учета коэффициента A_{xn_1-1}).

Таким образом, определение оптимального приближения х для запион задачь сволится к нахождению наименьшего значения 2 только по одному индексу и.

Ограничнися в первом приближения лаумя членами m = 1 ($n_1 = n - n_2 = n - 1$). После раскрытия соответствующего определителя для квадратного уравнения относительно λ получаем следующее выражение для меньшего корня:

$$\lambda = - \left(F_{v}^{*} = 1 \right) \left(\overline{F_{v}^{*}} + p_{v}^{*} x^{*} \right)$$
 (6)

$$F_{2} = M_{1n} \pm M_{1(n+1)}, \qquad z_{1} = (n^{2} - 3.8) (n^{2} - 2n - 2.8)$$
(7)

Определам сталаонарную гочку для функция М₁₀, при этом и будем чигать тепрерывным аргументом. Получаем единственную стационарную точку

$$\label{eq:M0} \mathcal{M}_0 = \left[\frac{\pi R}{l}\left(\mathbf{z}^{-\tau_l} - \frac{\pi R}{l}\right)\right]^{\tau_l},$$

Петко показать, что это почка миномума Далее, учитывал интервалы возрастания в убывания составляющих функций, иструдно получить, тто минимум выражения (б) реализуется ≥ интервале

$$n_0 - \gamma_1 < n_0 < (n_0 - 1) - \gamma_2$$

7 , Y2 допол тення до целого числа.

Отметим следующее: если мы обычным способом бузем брать и тексы п. 0 $n_2 = 1,...$ и просчитаем частоту, учитывая два члена, то полу чим значение λ , которое отличается от λ , просчитанного но формуле (6) (например, для случая R/h 170, $l R = 1, p = 0.25p_n$) более, чем в 25 раз.

Это обусловлено тем, что обычным снособом, ограничиваясь небольниим числом членов ряда, мы не в состояния уловить главные гармоники, расположенные здали от мало существенных начяльных гармоних, гогла как при рекомендуемом полходе берутся главные гармоники, за счет чего достигаются хорошие начальные вриближения.

В данном примере пара главных гармоник n⁶ 8, n⁹ 9; в случае же более тонкой оболочки такой же дляны, например, R h 500 n⁶₁ 11, n⁶ 12 по мере уменьшения толщины значения главных гармоник будут увеличиваться.

Еще более отдалены главные гармоннки для второй частоты (m=2) и тем более для третьей (m=3) и т. д.

Первое приближение для второй частоты, аналогично предылущему, получаем при m = 2 $(n_1 - n, n_2 = n - 1)$, а для третьей частоты при m = 3 $(n_1 - n, n_2 = n + 1)$. тогда

$$i_{1} = \frac{1}{2} \left(F_{14}^{2} + F_{14}^{2} + p_{14}^{2} \right) \quad (i = 2, 3)$$

$$F_{14} = M_{14} - M_{i_{1}(n-1)}, \quad z_{i}^{2} = (n^{2} - \gamma_{i}) \left[(n + 1)^{2} - \gamma_{i} \right]$$

$$p_{n} = 13.8, \quad \gamma_{n} = 39.2$$

Аналогично преды и нему получаем, что тін 🦾 реализуется при

$$n^{0} - \gamma_{0} = n_{0} = (n_{0} - 1) + \gamma_{1} = n^{0} = \left(\frac{2\pi R}{l} \left(e^{-l_{0}} - \frac{\pi R}{l}\right)\right)^{2}$$

эля третьего собственного значения k, в интервале

$$n^{00} - \gamma_{\mathfrak{s}} = n_{\mathfrak{s}} \leq (n^{00} + 1) + \gamma_{\mathfrak{s}}, \qquad n^{00} = \left[\frac{3\pi R}{l} \left(\varepsilon^{-1} - \frac{\pi R}{l}\right)\right]^{1}$$

где ть - соответствующие дополнения по целого.

Далее учитывая три члена ряла (3), после раскрытия соответствуюшего определителя получаем кубическое уравнение относительно λ.

Для получения зальнейших приблажений с учетом данного подхола на ЭВМ система алгебранческих уравнений записыяалась и матричном виде

$$(B - iE) A = 0, \qquad A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{B_{nk}^{iq}\}, \qquad E = \{1\}$$

$$B_{mk}^{iq} = \{a, b, c\}, \qquad \left[(q - k)\left[(n - \Delta n) - q\right]\left((q - k)\left[(n - \Delta n) + q\right] - 2\right) - \left(\frac{m^2 \pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] 0.1 p_0 \Delta r \qquad (m = i)$$

$$B_{mk}^{iq} = (-1)^{m+i} \delta_{[q-k],-1} \frac{Sim}{i^2 - m^2} \left\{\frac{i}{i^2 - m^2} - (q - k)\left[(n - \Delta n) - q\right]\right\} 0.1 p_0 \Delta r \qquad (m = i)$$

 $\Delta i_{i} = 1$ (i = j), $\Delta i_{i} = 0$ (i = j), $\Delta r = 0, 1, 2, ...$

При этом и и и, представляются в виде

$$\begin{vmatrix} n_{h} \\ n_{q} \end{vmatrix} = (n - \Delta n) + \begin{vmatrix} k \\ q \end{vmatrix}, \quad \Delta n = 0, \ 1, \ 2, \dots, \\ \begin{vmatrix} k \\ q \end{vmatrix} = 0, \ -1, \ +1, \ -2, \dots.$$

В данном представления (n + M) яграет роль начального фиксир ванного значения n_1 (Ан характеризует неремещение n эт точки к точке в интервале (8), начиная от $n = n_0 - \gamma$), k соответствует членам n - 1, n+1, n-2, n+2....

При решении брались члены m=1, 2 (k=0, -1, -2, -3), m=3, 4(k=0, -1) го есть 20 главных гармоник В зависимости от величним внешней нагрузки p_0 необходамос' число главных гармоник для получе ния достаточно хорошых результатов (таких, когда расхождение между предылушам и последующим приближением составляет величина порядка 0.5%) различное. Так для малых значений $p_0 < 0.3p_{w_0}$ достаточно учесть шесть членов m=1, 2 $(k=0, \pm 1),$ ибо добавление последующих членов песущественно. По мере увеличения p_0 увеличивается и необходимое число главных гармовик. При наибольших значениях – то есть близких к p_{w_0} , учет всех вышеотмеченных 20 главных гармовик дает постаточно хорошее приближение, такое, что добавление дальнейших членов при увеличени $m = \frac{1}{2}$ не приводит к сколько-зибудь существенным изменениям. В частноста, добавление соседних членов m = 1, 2 $(k=\pm 4), m=3, 4$ $(k=\pm 2), m=5$ (k=0) изменяет значения минимального собственного числа матрицы на величину порядка 0.5%.



Па фиг. 1 л 2 представлены графики изменения чанменьшей частьзы в сависимости от величивы интенсивности поперечной натрузки

различных геометрических нараметров. По оси ординат отложено отповление $m_0^-(n_0)$, а по оси абсинсе величник $\sigma_0^- \sigma_{0+}$. При этом $\sigma_0^$ максимальное окружное напряжение для далони за начи, постоянное окружное напряжение — соответствующее кри ическое напряжение и случае действия радиального внешнего навления q: $m_0(n_0)$ наименьшая частога в случае отсутствия нагрузки (p=0); n_0 соответствующее число окружных воли. Заметим, что $\sigma_0 = pR(n, n_0) = qR/h$ и, следонательно, $p = p(a_0)$. На этих фитурах для сравзения приведена универсаль ан кривам (c) наменения наименьшей частоты для оболочек средней длины в случае ностоянного окружчого на при этом то аосциес отложена величина с с 11 приведеных графиков, вструдно видеть, что при равных напря-

24

жениях (или гри равных абсолютных значениях питеисивности понеречной и радиальных нагрузок) наименьшие частьсть и гут существенно различаться по мере возраслания нагрузки. Кроме того, из полученных кривых (фиг. 2) легко заметить, что изменения геоистрических параметров (*UR*, *R k*) для оболочек средней длины при-



водит к сравнительно небольним изменениям наиме в ней частоть При $p \to p_1$ ($p_* = критическая$ всличина задачи устойчивости [2]) получаем $w \to 0$.



На фиг. 3 для оболочки (l, R = 1, R, n = 300) приведения нас иять наименьших частот (кривые $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$), которые при $p \to 0$ стремятся соответственно к вааменьшим частотам незагруженной оболочки ϕ_0 ($m = 1, n = n_0$), ϕ_0 ($m = 1, n = n_0 = 1$). ϕ_0 ($m = 1, n = n_0 = -2$), ϕ_0 ($m = 1, n = n_0 + 1$), $(m = 1, n = n_0 = 31)$ (в частности, для раснатриваемов оболочки n = 9). Отсюда иструдно видеть что если при отсутствои насрузки расхоб дерне между частотами сравнительно небольшое, то но мере увеличения приложенной нагрузки расхождения между инми существение наусняются. Кроме гого, необходимо заметить, что и личне зоны растяжения окружного напряжения (от действия внешней нагрузка) вляяет на что торые частоты в сторону их увеличения при возрастания интенсиваются действующей вагрузка.

На фит. З но оси ординат отложена величина есле (m_{0} , при этом $m_{0}(n_{0}) = m_{0}$ ($m = 1, n = n_{0}$) – наименьная частота свободной оболочки когда в продольном направлении образуется одна полуволия (n_{0} соответствующее число окружных воли).

На фиг. 4 для той же оболочка приведены графика измененны частот (кривые 1., 2., 3., 4.), которые при $p \to 0$ стремятся соятветственно к частотам незагруженной оболочка w_n ($m = -n^m$), ($m = 2, n = n^0 - 1$), $w_n(m = 2, n = n^0 - 1$), ($m = 2, n = n^0 - 2$) (для рассматриваемой оболочки $n^0 = 131$. На фиг. 4 по осв ордават отложена величкиа (n^0), г.с. ($m = 2, n = n^0 - 1$) наименьшая в астота незагруженной оболочки, когда в продольном награвлении

 2°

С. Н. Кукуджанов

образуются две полуволны: n^a – соответствующее число окружных волн.

Выснике жи частоты, соответствующие частотам незагруженной оболочки для *т* 3, 4, ..., праки чески не зависят от внешней вагрузки доя приемлемого интервала, то есть, хогда загрузка не превосходит своего критического значения.

HIBCTHEVE MATEMETIKE AND TOOP.

Поступила 9 VI 1973.

॥. ६ मानिकाश्चित्राच

Ялганду шилыгыдныгы дри, 2004.084.20.944 г.С.Кыдий (9.355540.6 г.б.) Илгенингияны ким эккадид эдикизген генинген изик кикиланигынд

Ումփուփում

Ուսում ասիրվում է կոնոոլագյունույին քնադանվիլ եմ տատատնում հերը ծեր և հայտան մամարնականությունների վրա նախապես գործող քադանիի ամբողջ մակերևուլիով ավաստրաչափ բաշիված ծռող լավապիան բեսի ազդեղունյունը։

Հիժոտկան այսպրոմիլունը Տատկացվում է աժենափորը հատիական իլուններին, պոնը շաժարվում են դործնականորեն ավելի կարևոր և ավելի դդալուն արտարին աղղեցուքյունների նկատվաժը։

FIGENVIBRATION OF CYLINDRICAL SHELLS UNDER TRANSVERSAL LOAD I NIFORMLY DISTRIBUTED THROUGHOUT THE SURFACE

S. N. KUKU ANOV

м н н н к у

The effect of a preliminary acting bending transversal load, onlformity distributed throughout the surface of a console cylindrical shell, on the eigenfrequencies and the patterns of eigenvibrations is investigated.

The emphasis is laid upon the lowest irequencies which are practly cally most significant and most sensitive to external effects.

THTEPATSPA

- Botdort S. B. A simplified method of dasta stability analysis for thin cylind for shells, NACA Rep., 1947, Nº 847.
- Анк смонов С. И. Устойчивость цилиндрической оболочка пря изгибе всперечной силой, ранномерно распределенной по всей поверхности или приложенной из вой не. МТТ, 3, 1971.

20.34034015 002 ЧЕЯНРЗПРБЬРР ОНОЧНЕВИРОВ ВОДЬФЕНЕР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЛ ССР

Itsluutidus XXVII, No 5, 1974 Mexaninka

3. H. LAHOHH

К ПЛОСКОГІ ЗАДАЧЕ. РАСНРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОУПРУТИХ ВОЛИ В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

На основе язвестного четода комплексных решений Смирнова-Соболева [1] рассматравается задача распространения упругих волн в изтронной безграничной средс ноа наличии магнатного поля.

Изучаются руданнональта инкаря втяме решения плоской задачт. магант унруг кти, представликищие собой члоские вылим днух глиов.

Приводится исследование изменения скоростен рисвространения воли в зависимости от величаны магнитного поля и от угла между ман витным полем и пормалью к волие.

В результате проведенных асследовал и маг игоувругае полям разделяются на бы грые и медленные. Строят и графики скоростей этихводи.

Аналогичные вопросы для анизотронных тел при отсутствии магнитного поля рассмотрены в [2--5].

 Если упругая электронроволящая среда находатся в магнат обполе, то распространяющаеся в ней упругие волны будут возбуждать колебания магнатного поля и сами азменятся вод их влиянием. Волны, возникающие и результате такого взаимодействия, называются маглитоупругими.

Система уравнений, описывающая данжение упругой среды и постоянном одиэролном магинтном поле с заданным зексором напряженности Н₆, имеет вид [6-12];

$$\mathbf{h} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} - \mathbf{H}_{0}), \qquad \mathbf{E} = -\frac{n}{c_{0}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{H}_{0} \right)$$
(1.1)

$$p \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = G \Delta \mathbf{u} - (t + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{R}$$
(1.2)

где Е и h — векторы напряженности пидуцированного электромагнитного поля. и — вектор упругого смещения, c_0 — скорость, света в вакууме, д — магнитная пронинаемость, p_i и н G — плотио ть и упругие постоявные Лямы среды, соответственно.

Величина R. ахолящая в уравнения движения (1.2), является объемной сялой электромагнитного происхождения и определяется слодующим образом:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{u}}{c_0} \left(\mathbf{j} - \mathbf{H}_0 \right) = \frac{\mathbf{u}}{4\pi} \left[\operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\mathbf{u} - \mathbf{H}_0 \right) \right] - \mathbf{H}_n \tag{1.3}$$

где ј – вектор плотности индунирова шого тока.

Пря выводе систем уравшений (1.1) — (1.2) принимаются следующие предиоложения:

а) среда является изотронным идеальным проводником;

б) токи смещения пренебрегаются;

в) упругае перемещения среды в электромагнитные возмущения считаются частолько малыми, что при описании магнитоупругих колебаний можно пользоваться линейными уравлениями магнитоупругости и электроданамики.

Отнеся упругую среду к прямоугольной системе координат x и, г. рассмотрим случай, когда все исхомые неличника не зависят от одной из координат, например z и упруг ж смещсиие по напривлению соответствующей координаты отсутствует, то есть

$$u_{i} = u_{i}(x, y, t), \qquad u_{i} = 0$$

$$E_{i} = E_{i}(x, y, t), \qquad h_{i} = h_{i}(x, y, t), \qquad i = 1, 2, 3$$
(1.4)

Выясним необходамые условия выполнения соотношений (1.4).

В предположениях (1.4) уравнение (1.2) дает два уравнения, опретеляющих перемещения и , и₂, и следующее дополнительное условие:

$$H_{a}\left(H_{1}\frac{\partial e}{\partial x} - H_{1}\frac{\partial e}{\partial y}\right) = 0 \qquad e = \frac{\partial R_{1}}{\partial x} - \frac{\partial R_{2}}{\partial y} \tag{1.5}$$

Уравнопае (1.5) сполетворяется тождеств ино в следующих двух случаях:

1. заданное магнитное исле H_0 дираллельно плоскости $xy(H_{08} = 0);$

2. заданное магнитное поле перпенликулярно к илоскости $x_H(H_{21} = H_{32} = 0)$.

Таким образом, выполнение условий, вриведенных в случаях 1 и 2, является неокходимым иля существования решений зяда (14) (аналог плоской задачи теория увруг сти).

Проектируя уравнение (1.2) на оси коор ингат х. g. с учетом (1.3) и (1.4) получим:

1.18 CAV938 1 (Has = 0)

$$(a^{2} - s^{2} \sin^{2} z) \frac{\sigma^{2} u_{1}}{\sigma x^{2}} = (b^{2} - z^{2} \sin^{2} z) \frac{\sigma^{2} u_{1}}{\sigma y^{2}} = \frac{\sigma^{2} u_{1}}{\sigma t^{2}} =$$

$$e^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{4}{2} x^2 (\sin 2\varphi) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) = 0$$

(1.5)

$$e^{2}\frac{\partial^{2}u_{1}}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}x^{2}\left(\sin 2z\right)\left(\frac{\partial^{2}u_{1}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{1}}{\partial y^{2}}\right) = \left(d^{2} + x^{2}\cos^{2}\varphi\right)\frac{\partial^{3}u_{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{1}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{1}}{\partial y^{2}} = \left(d^{2} + x^{2}\cos^{2}\varphi\right)\frac{\partial^{3}u_{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{1}}{\partial y^{2}} = \left(d^{2} + x^{2}\cos^{2}\varphi\right)\frac{\partial^{3}u_{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{2}}{\partial y^{2}} = \left(d^{2} + x^{2}\cos^{2}\varphi\right)\frac{\partial^{3}u_{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{2}}{\partial y^{2}} = \left(d^{2} + x^{2}\cos^{2}\varphi\right)\frac{\partial^{3}u_{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{2}}$$

$$+ \left(b^2 - x^2 \cos^2 z\right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0$$

для случая 2 $(H_{o1} - H_{o2} = 0)$

$$(c^{2} + z_{1}^{2}) \frac{\partial^{2} u_{1}}{\partial x \partial y} = (a^{2} - z_{1}^{2}) \frac{\partial^{2} u_{2}}{\partial y^{2}} = b \frac{\partial^{2} u_{2}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{2} u_{1}}{\partial t^{2}} = 0$$

$$(a^{2} + z_{1}^{2}) \frac{\partial^{2} u_{1}}{\partial x^{2}} = b^{2} \frac{\partial^{2} u_{1}}{\partial y^{2}} - \frac{\partial^{2} u_{2}}{\partial t^{2}} = (c^{2} - z_{1}^{2}) \frac{\partial^{2} u_{2}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(1.7)$$

Злесь

$$a = y^{-1}(i + 2G) + b = y^{-1}(i + 2G) + a + H_0,$$

$$z_1 = 2^{-1}(\pi y) + H_0, \quad H_0 = (H_1^2 - H_0^2) + c = (a^2 - b^2)$$
(1.8)

а и b — скорости продольных и поперечных удругих ноли и среде при отсутствии висшиего магнитного поля H_0 , $x(x_1)$ — скорость Альфвена, z — угол между осью x и направлением магнитного поля H_0 .

 Решение системы уравнений (1.6) будем некать методом комплексных решений Смирника-Соболева [1]. Обобщение этого метода на случай систем ранородных дафферсициальных уравнений второго порядка дано в работе [9].

Метод комплексных решений позволяет выделить некоторый, имеющий важное применение в физических за тачах, класе решений рассматриваемой системы уравнений.

Согласно этому метолу, решение системы уравнений (1.6) следует искать в виде

$$u_i = F_i(\Omega), \qquad v = 1, \ 2$$
 (2.1)

где вспомогательная величина Ω , как функция от x, y, L быть может комплексиям, определяется соотношением

$$\delta = I(\Omega) t + m(\Omega) x + n(\Omega) y - k(\Omega) = 0$$
(2.2)

где коэффициенты $l(\Omega), \ldots, k(\Omega)$ — некоторые аналитические фулкцилог Ω .

Подставляя (21) в (1.6) и учатывая (2.2), волучим

$$\left[\left(a^{2} - x^{2} \sin^{2} z \right) m^{2} - \left(b^{2} - x^{2} \sin^{2} z \right) n^{2} - l^{2} \right] F_{+}(\Omega) + \\ + \left[c^{2} mn - \frac{1}{2} x^{2} (\sin^{2} z + (m^{2} - n^{2}) \right] F_{+}(\Omega) - 0 \\ \left[c^{2} mn - \frac{1}{2} x^{2} (\sin^{2} z + (m^{2} + n^{2}) \right] F_{+}(\Omega) + \\ \left[\left(a^{2} - x^{2} \cos^{2} z \right) n^{2} - \left(b^{2} + x^{2} \cos^{2} z \right) m^{2} - l^{2} \right] F_{+}(\Omega) = 0$$

$$(2.3)$$

Если l = 0, то, принимая l = 1, завинием условие разреннимости системы уравнений (2.3) для функций $F_{-}(\Omega)$ в следующем виде:

 $A_{1}(m) n^{i} - A_{2}(m) n^{i} + A_{4}(m) n^{i} - A_{1}(m) n - A_{0}(m) = 0$ (2.1)

1.10

$$\begin{aligned} A_{1}(m) &= a^{2}b^{2} \qquad \text{Transform} (z - b^{2}\cos^{2}\phi) \\ A_{2}(m) &= c^{2}c^{2}(\sin 2\phi) m \\ A_{1}(m) &= [2a^{2}b^{2} - c^{2}(a^{2} - b^{2})] m^{2} - (a^{2} - b^{2} + x^{2}) \qquad (2.5) \\ A_{1}(m) &= (c^{2}(\sin 2\phi) m \\ A_{2}(m) &= [a^{2}b^{2} + c^{2}(a^{2} + \cos^{2}\phi - b^{2}\sin^{2}\phi)] m^{4} + (a^{2} + b^{2} + c^{2}) m^{2} \end{aligned}$$

Равеньтво (2.1) есть алгебранческое равшение 4-ой степени относительно и. Его корни и, являг-тся ветоями четырёхзначной алгеоранческой функции от и иной на соответствующей римановой поверхности

Кажцай коренн n_1 в салу соо иошения (2.2), определяет в пропранстве x_i у, t функцио $\Omega_{s1}(x_i, y_i, t)$ в слетовательно, общий вид решений (2.1) св. (5) булят ванисать в виде

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} F_{-i}(\Xi_{i}), \qquad i = 1, \ 2 \tag{2.6}$$

Lean в соответствии (2.2) положим k (24 0, то (2.6) будет одпородное решение нулетств измерения

Тан кан функции F, солжны у и стетнорять условиям (2.3), то из первот условия (2.3), канисавного для получим

$$F_{\pm}(\Omega_{k}) \approx W_{k}(\Omega_{k}) p_{k}(\Omega_{k})$$

$$F_{\pm}(\Omega_{k}) = W_{k}(\Omega_{k}) q_{k}(\Omega_{k})$$
(2.7)

гас

$$p_{-}(\Omega_{x}) = -\frac{1}{2} x^{2} (\sin \Omega_{-}) (m_{x}^{*} - n^{2})$$

$$q_{-}(-\epsilon) = (a^{2} - \epsilon^{2} \sin^{2} z) m_{z} - (b^{2} - x^{2} \sin^{2} z) n_{z} - 1$$
(2.8)

Ш_ преизвольные аналитические функции.

Полстовив (2.7) в (2.6) и изделив действительную часть, получим пещественное решение типа

$$u_{1}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} W_{1}(z) \varphi_{i}(z) dz \right\}$$

$$u_{1}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} W_{1}(z) \varphi_{i}(z) dz \right\}$$
(2.9)

Прочавольные функции We, аходящие в решение (2.9), должны опредезяться из дополнительных условий скответствующей задачи.

Следует отметить, что если в некоторой области пространства $x_i \ll l - 2(x, y, t)$ принимает комплексные значения, то функции $F_{-1}(\Omega)$ в соответствующей области комплексной влоскости Ω — аналитические, в смучае же когда Ω вринимает действительные значения $F_{ik}(\Omega)$ яв-ляются дважды дифференцируемыми функциями от Ω .

3. Есль положим

$$m \simeq -1$$
 const, $n = i \simeq \text{const}, \quad h(2) \simeq -2$ (3.1).

то соотвошение (2.2) примет зна

$$\Omega_k = t - \theta x - \epsilon_k(\theta) \, \psi \tag{3.2}$$

где ik = M - корни уравнения 12.1).

В этом случае, как следует из (2,6) в (3,2), простейние решенчы системы (1,6), представляющие собон илоские волны, имеют зал

$$u_i = u_i (\Omega_k) = u_i (t + hx - v_k y), \qquad i = 1, 2$$
(3.3)

где функция и, согласно (2.9) и в силу постояне ва не почно 9 и г_к. связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &| u_{i} = W\left(\Omega_{k}\right) p\left(\Omega_{k}\right) \\ &| u_{i} = W\left(\Omega_{k}\right) q\left(\Omega_{i}\right) \end{aligned}$$
(3.4)

Если ностоянные в и вещественные, о плоские волны (3.3) называются однородными или вещественными, а если хотя бы одна из величин λ_{*} окажется комплексной, го волны (3.3) называются неоднородными или комплексными. В последнем случае в (3.3) и (3.1) следует брать вещественную час

Наконец, согласно (2.6) и 3.4), решение вила (3.3) системы (1.6) следует брать в следующем виде

$$\begin{vmatrix} u_{1}(x, y, t) = \sum_{k} \operatorname{Re}^{t} W_{k}(\Omega_{k}) p_{k}(\Omega_{k}) \\ u_{n}(x, y, t) = \sum_{k} \operatorname{Re}^{t} W_{k}(\Omega_{k}) q_{k}(\Omega_{k}) \end{vmatrix}$$
(3.5)

В дальнейшем удобно ось у направить во направл ялю залан юго магнитного поля И₀.

В этом случае на (2.4) - (3.4) получаем

$$|u_{1} = -c^{2}b_{r_{A}}W'(t - bx - c_{k}y)$$

$$|u_{2} = (a^{2}b^{2} + b^{2}r^{2} - 1)W'(t - bx - c_{k}y)$$
(3.6)

$$\lambda_{4} = 2^{-1} (a_{2}b)^{-1} \left[A(6) - (-1)^{k} \right] \left[\overline{Q(6)} \right]^{-1} = k - 1, 2 \quad (3.7)$$

Зл. сь приняты следующие обозначения:

$$A(b) = K_{1} - Lb^{2}, \qquad K_{1} = a_{1}^{2} + b^{2}, \qquad l. = a_{1}^{2}b^{2} + a^{2}b_{1}^{2}$$

$$B(b) = Aa^{2}b^{2}(1 + a^{2}b^{2})(1 + l^{2}b^{2}), \qquad a_{1}^{2} = a^{2} + z^{2}$$

$$Q(b) = A^{2}(b) - B(b) - N^{2}b^{1} - 2K_{1}^{2}N\ell^{2} + K^{2}$$

$$K_{2} = a_{1}^{2} - b^{2}, \qquad N = z^{2}c^{2}, \qquad j = b^{2} + z^{2}$$
(3.8)

Следуя [2], влоские юлиы, завязяние от аргументов $\Omega = t - bx - ix$, изовем соответственно волнами 1-го $(i = i_1)$ и 2-го $(i = i_2)$ типов.

Выбор знака илюс или минус а 13.61 просто показывает, что плоские золим могут распрастраняться в упругой среде в протавоположных изправлениях: «назал» в «зперед».

Уравнения фронтов илэских воли (3.6) имеют вид

$$-1 = t - z_{k}y = const.$$
 (3.9)

Гак как фазовые скорости распространения води определяются по формуле [13]

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sigma_{\pm} \\ \sigma_{t} \end{bmatrix} \mid \operatorname{grad} \mathbb{M}_{t} \mid \| \mathbf{n} \|$$

выль (3.9) получается

$$p_{1} = (p_{1} + 1_{1})^{-1}$$
 (3.10)

Полотавляя в (3.10) эначения это на (3.71, получим следующие выражения для скоростей распрострачения матинтрупрусих воли:

$$v_{i} = 2 \left\{ a_{i} b \left\{ S(b) + (-1)^{b} \right\} \right\} \left\{ Q(b)^{c} \right\}^{-1}$$
(3.11)

FIC

$$S(b) = K_1 - Nb^2$$
 (3.12)

Задесь с — скорость магнитоупругих воли 1-г (типа, v2- 2-г) типа,

Далее, из (3.10) имеем

$$v_{2} = (v_{2}^{-2} - 9)^{-1}$$
 (3.13)

Подставляя значения величин из (3.13) в выражения (3.6), представим магнитоупругие плоские волны 1-го и 2-го типов и виде

$$\| v_{k} - (v_{k}^{-2} - \theta^{2})^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} \|^{2} \| = \| u_{k} - \theta^{2} \| = \| u_{k} - u_{k} -$$

Обозначив через х_и углы между отрицательной полуосью у и направлением распространения воли 1-го и 2-го типон, соотнетственно (фиг. 1), получим

$$= b \, i \, = b \, (v_k^* - b^*)^{-1}, \qquad k = 1, \, 2 \tag{3.15}$$

Таким образом, четыре волны, соотверствующие гиперболической системе (1.61, с выбором направления оси х (параллельно H₀) разбились на две нары, распространяющиеся «назад» и «вперел».

Волну, имеющую большую скорость, будем называть быстрой, друтую же — медленной.



В длавней цем мы будем рассматривать волны только в одном лаправления, соответствующем знаку плюс в (3.14).

Распространенае маснитоупругих воли подчиняется более сложным закономерностям, чем распространение воли при отсутствии магнитисв: плая. В последнет случае в изотроны игреле имеются две независамо-распространяющиеся волны продольные (быстрые со скоростью *a*) и поперенные (м. дленные со скоростью *b*). В притивоположность исто упругим волнам, магнатоупругие волны не разделяются на чисто продольные в поперечные то есть смещения в магнитоупругих волнах относительно направления распространения имеют как продольные, так в поперечные компоненты. Скорости магнитоупругих волн зависят не только от упругих постоянных в плотяюсти среды, но и от величины внешнего магнитного поля в от угла между пормалью к волне и магнитыми полем.

Научим решения (3.6) (ила (3.14)) и исследуем инменение скоростей магнитоупругих воли в зависимости от величины внешиего магнитного поля и от угла между нормалью к волие и магнитным полем.

Выясним гажже вопрос о разделеная магнитоупругих воли ча быстрые в медленные в зависимости от величаны магнитного поля

Для этого рассмотрим изменения величии и из (3.7) при

-welcom, adapter.

В данном вопросе существенное значение имеют нули функций, находящихся под радикалами в выражениях (3.7).

З Известия АН Армянсьой ССР, Механика, № 5.

3. 11 Даноян

Нули функции Q(0), находящейся под внутренним радикалом (3.7), имеют вид

$$b = \pm b_1^0 = N^{-\alpha} (a_1 - b); \qquad b = -b_1^0 = \pm N^{-\alpha} (a_1 - b) \quad (3.16)$$

Так как a > b, то все четыре кория (3.16) вещественны.

Пули функций

$$T_{1}(b) = A(b) - (-1)^{k} | Q(b)$$
 (3.17)

находящихся под внешним радикалом в (3.17), твеют вид

 $\theta = -\theta_3 \pm b_1^{-1}, \qquad \theta = -\theta_1^0 = -a^{-1}$ (3.18):

Все пуля в (3.18) веществечные,

В дальнейнием, для выяснения значения функций с, оказываются нужными нули функции А (9), которые находим, согласно (3.8), в виде

$$b = -b_1^2 = -L^{-1}K_1^2 = -\left[\frac{a^2}{2a^2b^2} + \frac{b^2 - z^2}{z^2(a^2 - b^2)}\right]$$
(3.19)

Оля также вениственны.

Установим взанмиое расположение корней (3.16), (3.18), (3.19) на осн 6 в за шелмасти от величины х.

Благодаря симметрии корней, рассмотрим участок 0 5 4 тс.

Песле ювание знаком развостей $R_{ii} = [b_i^0(x)]^2 - [b_i^0(x)]^2$, i, j = -1, ..., 5 приводит к следующим результауам:

 $1 \quad 0 < b^{n}(\mathbf{x}) < b^{n}_{1}(\mathbf{z}) < b^{n}_{3}(\mathbf{z}) < b^{n}_{2}(\mathbf{z}) - b^{n}_{2}(\mathbf{x}) - b^{n}_{3}(\mathbf{x}) - b^{n}_{3}(\mathbf{z}) = 0$

5.
$$(1 \le a^{4}(x) \le a^{-}(x) \le a^{2}(x) \le a^{2}(x) \le -\infty$$
 ubu $(1 \le x \le x^{1})$

3. $0 < \theta_4^0(x) < \theta_5^0(x) = \theta_2^0(x) = \theta_2^0(x) < \theta_1(x) < +$ npu $x = x_1$

1.
$$0 < b_1^{\nu}(x) < b_1^{\nu}(x) < b_2^{\nu}(x) < b_1^{\nu}(x) < b_1^{\nu}(x) < -\infty$$
 ups (3.20)

5.
$$0 < \mathfrak{V}_1(x) = \mathfrak{V}(x) < \mathfrak{h}_2(x) < \mathfrak{h}_3(x) < \mathfrak{h}_1(x) < -$$
 upu $x = x_1$

6.
$$0 < b_1^0(z) < b_1(z) < b_2^0(z) < b_3^0(z) < b_1^0(z) < +$$
 npu

7.
$$0 < b_2^n(x) < b_2^n(x) = b_2^n(x) = b_1(x) < b_2^n(x) < -\infty$$
 HDH $x = x_1$

8. $0 < \theta^{n}(z) < \theta^{i}_{1}(z) < \theta^{0}_{1}(z) < \theta^{0}_{2}(z) < \theta^{i}_{1}(z) < -$ npu $z_{a} < z < +$

9. $0 = \theta_2^{\alpha}(\mathbf{x}) < \theta_3^{\alpha}(\mathbf{x}) < \theta_3^{\alpha}(\mathbf{x}) < \theta_3^{\alpha}(\mathbf{x}) = \theta_1^{\alpha}(\mathbf{x}) < -\infty$ upu $\mathbf{x} = +\infty$

$$u_{1} = \left[2^{-4}b\left(1 - \overline{a^{2} - 3b^{2}} - b\right)\right] \quad \mathbf{x}_{2} = \left[-\overline{a^{2} - b^{2}}\right] \quad \mathbf{x}_{2} = ab^{-1} + \overline{a^{2} - b^{2}}$$
(3.21)

Согласно (3.16) (3.21), на фиг. 2 приведены графики, характеризующие поведение функций 9° (х).



Исследование изменения величии и требует также выяснения знаков функций A (b), B (b) в Q (b) на положительной полуоси b в зависимости от скорости Альфвена z.

В сизу (3.16) -- (5.21) для функций А (9) и Q (9) имеем (0 = x < + =).

R

$$Q(b) < 0$$
 upu $b_2(z) < b < b_1^{\nu}(z)$

Изучение поведения функции В(0) приводит к следующим двум различным случаям:

a)
$$0 \le z$$

 $B(\theta) > 0$ при $0 \le \theta < \theta_1(z)$ и $\theta_3(z) < \theta_2$
 $B(\theta) = 0$ при $\theta = \theta^0(\theta)$ и $\theta = \theta_1(z)$ (3.23)
 $B(\theta) < 0$ при $\theta_1(z) < \theta < \theta_3(z)$

6) $z_z \leqslant z \leqslant z$

$$B(\theta) > 0 \quad \text{ipn} \quad 0 \quad \theta < \theta_{i}(z) \quad \text{if} \quad \theta_{i}^{0}(z) : \theta \quad + = \\ B(\theta) = 0 \quad \text{ipn} \quad \theta = \theta^{0}(z) \quad \text{if} \quad \theta = \theta^{0}(z) \quad (3.24) \\ B(\theta) < 0 \quad \text{ipn} \quad \theta_{i}^{0}(z) < \theta < \theta_{i}^{0}(z)$$

На основания (3.20) - (3.24) в табл. 1 приводятся основные свойства функций *Т.* из (3.17), находящихся пол внешним радиказом в (3.7).

Согласно тябл. в табл 2 приводятся области вещественности функций / на водожительной полуоси у в зависимости от ».

В остальных точках оси *b* функции *к* во всех рассматриваемых случаях или мнимые или комплексные; соответствующие плоские волны будут неоднородными и будут иметь мнимые или комплексные фазовые скорости.

Таким образом, значениям и из табл. 2 соответствуют определенные веществеаные магнитоупругие волны 1-го и 2-го танов с направлениями распространения и скоростями, определяемыми формулами (3.11), (3.14), (3.15).

В качестве примера рассмотрим это соответствие для в ли, распространяющихся в направления x, 90°, в случаях 2 в 4.

Согласно (3.15) для волн, распространяющихся и направлениях $z_{\mu} = 90^{\circ}$, $\bar{\epsilon}_{k} = 0$. Приравняя имлю (3.7), в силу табл. 1. 1 (акже (3.10), (3.11) и (3.15) получим;

для случая 😫

 $i_{1}(b_{4}) = 0, \quad i_{2}(b_{3}^{0}) \neq 0, \quad i_{2}(b_{1}^{0}) = 0 = 0$ $i_{1}(b_{1}^{0}) = 90, \quad i_{2}(b_{1}^{0}) < 90, \quad i_{2}(b_{2}^{0}) = 90$ (3.25)

лля случая 4

 $\begin{aligned} i_{1}(b_{1}) &= 0, \qquad i_{2}(b_{1}) \neq 0, \qquad i_{3}(b_{3}^{0}) = 0, \qquad i_{3}(b_{3}^{0}) = 0, \\ \tau_{1}(b_{1}) &= 90, \qquad z_{2}(b_{4}^{0}) < 90, \qquad z_{1}(b_{3}^{0}) = 90, \qquad z_{2}(b_{3}^{0}) < 90 \end{aligned}$ (3.26)

Соотнешения (3.25) т (3.26) показывают, что в случае 2 кажлый (3 двух тивоя воли (3.6) (пли (3.14) 1 кмеет по одному значению 0, соответствующему распространению в изправлении осл х, а и случае 4 волна 1-го типа имеет два значения 0, волна же 2-го типа не имеет ни одного сили 0, вующего направлению $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 90$

Отсюда следует, что магнитоупругле волны в каждом направлении могут быть либо обе только одного типа, либо разных гапов по одной. Это обстоятельство завасит от вышеуказанных интериалов изменения г (табл. 2) и требует детального исследования

При этом нужны будут значеная, принимаемые величинами на концах указанных интервалов вещественности функций ск.

Согласно (3.7)--(3.26) и табл. 1, указанные значения привелены в табл. 3, причем в случаях 1, 5, 6 имеют место следующие соотношения:

$$v_1(\theta_2^0) = v_2(\theta_2^0); \qquad v_1(\theta_2) = v_2(\theta_2^0), \qquad 0 < z_1(\theta_2^0) = z_2(\theta_2^0) < 90 \quad (3.27);$$

Спачала рассмотрим случая 2 и 4, которые являются данболее характерными.

	1	71					
0=	$0 \theta < \theta_1^{\theta}$ > 0	9 = 1 0	11 ⁴¹ 0 4-00 1) .				
2 1	$\begin{array}{ccc} 0 & {}^{h_{1}} < {}^{n_{1}} \\ & \searrow 0 \\ {}^{h_{1}} & {}^{q_{1}} & {}^{q_{2}} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \end{array}$	$h = h_1^0$ \oplus	$\begin{array}{c c} & \eta_{1} < \eta_{1} & \eta_{2}^{\mathrm{h}} \\ & & \eta_{1} \\ & & \eta_{2} \\ & & \eta_{1} \\ $				
N	0	<i>y</i> = <i>ψ</i> ⁰ -0 -∹0	$ \begin{array}{c} h_{\pm}^{0} \circ h = h_{\pm}^{0} \circ \\ < 0 \end{array} $				
×1×1	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\begin{split} \theta &= \theta_{4}^{0} \\ - \theta \\ \theta_{2}^{0} &= \theta < \theta_{2}^{0} \\ \text{bestifictor.} \end{split}$	$ $				
2 Z	$\begin{array}{ccc} 0 & h < h_{3,-1}^{0} \\ > 0 \\ < h & h_{5}^{*} \\ \hline & & \\ & $	$\begin{array}{c} u_1 & u_{1,1}^0 \\ z_2 & 0 \\ u_1 & u_{1_1}^0 \\ u_1 & u_{1_2}^0 \\ u_{110021,4,a} \end{array}$	$\begin{split} \ \boldsymbol{\theta}_{3, 1}^0 + \boldsymbol{\eta} &< \boldsymbol{\theta}_2 \\ &+ \boldsymbol{\theta} \\ \ \boldsymbol{\theta}^0 &\leq \boldsymbol{\eta} &\leq \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ $				
	T,						
---	---	---	---	--	--		
	11 ¹ 1 < 5	V - 15 0	9 ¹¹ / · [00				
h_2^0 $\eta < h_1^0$	$0 \theta < \theta^{0}$		$\eta_{0}^{0} \leftarrow \eta = \eta_{-}$				
FOWIH JOPE	5.0	3 D	3 ~ 2				
	$\theta_2^0 \theta < \theta_1^0$	$h_1^q = q = \frac{1}{1} \cos \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} -$					
	sommerc.	«: f)	_				
$q = q_{2,-1}^{\alpha}$	0 1 42.5.5	10	$V_{2,3,5}^{\mu} < \theta < V_{1}^{0}$				
0	>0	1)	комилект.				
	$\theta_1^{\alpha} = \theta \longrightarrow \infty$						
	-<;0						
0 _ 03	$0 0 y_{\pm}^{0}$	$b_2^b < b < b_5^0$	$\theta = \theta_0^0$				
	-12	wimileke,	минмая				
$b_0^{\mathrm{el}} < \theta \sim b_1^{\mathrm{el}}$	1-2-2-5	hi h no					
KUMBRENC.	комплекс.	~ 10					
	-						
		-					
l) b ⁽ⁱ⁾	O 0 9 ⁰	$h_0^0 < h < h_1^0$	$\eta = \eta_{f_1}^0$				
>0	>0	KOMILIPRS.	мнимая				
η η - re	3-1-4	41 4 - 100	-				
(1	ROMITIENC.	< 0	_				

	$0 \theta \ll \theta_3^0$	$b = b_3^{b}$	$b_3^0 < 0 < b^0$			
× × ×	$b_1^0 < b = b_2^0$	$\theta_{1}^{0} < \theta < \theta_{1}$	$h = 0^0_{\odot}$			
1	-0	ROMITER.	MELENAR			
	ს ^ი ს თ <0	_	~~~~			
	0 4 - 03	$b = b_{\rm d}^{\rm er}$	N2 < N < 62 4. 1			
8	>0	. 0	<0			
	$\theta^{U}_{2^{-1}} < \eta < \theta^{D}_1$	$\eta^{\mu} < \eta \qquad \infty$				
	комплекс.	<0	9			
8	11 4 < 4°	1 14	$\theta_3^0 < q = \theta_2^0$			
	>0	D	< 0			
*	$\eta^{\rm H}=\eta<\pm\infty$					
s	~0		—			
8	$h_i = h_j^{\phi} = 0$	$(1-\theta^{0}) \ll \theta$				
1	e	()				

Обозначения filla $b_0^{1,4,5}$ понимать так: $b_0^1 = b_0^1 = b_0^1$

а. Н. Даньяв

No	Случая	24.	ć 4
F	x 0	0 9 - 9 -	0 .6 5
2	$0 < z < z_1$	0 0 -	0 0 05
3	× = 7.1	0 0 5	0 0 00
4	$x_1 \le x \le x_2$	0 1 03 1	4 ¹¹ 0 9 6 ⁰
5	XWH	0 4 5	$0 - 0 - 0^0_2$
6	$x_1 < x < x_1$	0 9 9 <u>0</u> 94 9	V ¹ 0 0 0 ¹
7	$z = z_3$	0 0 M ^P ₁	0 9 0
8	23 C Z 1 100	0 9 0 ¹¹ -	0 0
9	% — 60	9 9 ⁰ 0	0 4 44

O60anauemte: $y_3 = y_2^0 - y_3^1 - y_5^1$,

Случий 2. 21 < 2 < 22. Согласно табл. 2, функции л. и л2 имеют вепественные значения в интервалах, слответственно,

$$0 - 5 - 5^{0}, \quad 0 - 5 \leq (3.28)$$

В силу (3.15) и табл. З тамолеяниям 0 я промежутках (3.28) сонветствуют направления распространения оли (3.6) (или (3.14))

$$0 = a_1 \leqslant 90$$
, $0 = a_2 = 90$ (3.29)

Следовательно, в случае 2 в каждом направлении распространяются волям обоих тапов, скорости хоторых зависят и направления лвижения

Изучим характер измене им скорости в зависимости от направления движения в пределах (3.29) и покажем, что $v_{0}(z) > v_{v}(z)$, 0 z = 90,

Из (3.11) имеем

$$\mathbf{v}_{1} = -\frac{\hbar \mathbf{v}_{1} R_{1}(b)}{2a^{2}b^{2}} \cdot \qquad R_{1} = -N[1 + (-1)^{2} Q^{-1} S(b)] \qquad (3.30)$$

$$R_{k}^{c}(b) = -(-1)^{c} \, 8a(b^{2}N^{2}Q^{-1}) \tag{3.31}$$

Согласно (3.8) и (3.12)

$$S(b) = 0$$
 npu $b \leq b_{0}^{0}$; $S(b) \leq 0$ npu $b \geq b_{0}^{0}$ (3.32)

где

$$b_i^0 > b_i^0 = \mathbf{x}^{-1} d^{-\alpha} (a_1^* - b^2) > b_i^0 \qquad i = 2, 3, 4, 5$$
 (3.33)

Выражение (3.31) совместно с перным условнем яз (3.32), выполняющямся в случае 2, дает

Таблина 😐

З. И. Даноян

							Tubatta		
		Точки чен о	$b_{\rm f}$	٤4	1.1	٨.,	1 ⁵ 2	a ș	
_		0	a+1	n	0	b ⁻¹	h	0	
	-	$b_4^1 = a^{-1}$	0	d	90	7:100	$v_{2}(\theta_{1}^{q})$	$\tau_1(\theta_4^\circ)$	
	۰.	$\theta_3 = \theta_1^{-1}$	-		_	n	b	90	
	, T	0	a_1^{-1}	<i>a</i> ₁	0	p=1	h	0	
	~	$\eta_4^0 = a^{-1}$	Û	63	901	20 (12)	$e_{\pi}(\theta_{4}^{*})$	21 (b ⁰ ₃)	
	=	$q_1^i = b_1^{-1}$		_	- 1	Û	<i>b</i> ₁	90	
	-	0	a ^{nt}	е.	U .	<i>l</i> i-1	h	n	
		$\Psi_{2}^{*} = e^{-2}$	0	a	90°	-	-		
	٩.	$b_3^0 = b_1^{-1}$	()	<i>b</i> ₁	90.1	Û	h,	90	
		0	a_1^{-1}	a ₁	0°	p=1	1	()	
	11	$\theta_1 = \eta^{-1}$	0	u.	90		-		
	× V	$b_1^{(i)} = b_1^{-1}$	D	h_{e}	907		-	-	
	1.	θ_{a}^{ν}	$\lambda_{1}\left(\theta_{2}^{b}\right)$	$\psi_1(\theta_2^0)$	$\pi_1(\theta_2^0)$	γ_2 (h_n^0)	$v_{\pi}(\theta_{\alpha}^{n})$	$\alpha_2 \; (\theta^0_{\underline{0}})$	
		¢(a_1^{-1}	01	0	ℓ^{-1}	h	٥'n	
		$h_{\hat{a}} = n^{-1}$	0	et	901	_	-	_	
	<i></i>	$Q_{\underline{n}}^{i}$	$\ell_1(h_2^b)$	$v_1(\theta^3)$	$\pi_1(12)$	$\lambda_2(b_2^0)$	$\sigma_{2}(\theta^{h})$	$\mathbf{a_2}\left(b_a^{\mathrm{T}} \right)$	
		0	a_1^{-1}	et 1	0.	pot.	b	0.	
	2	9 <mark>3</mark>	U.	- A1	907		_		
		$a_1^0 = a^{-1}$	O	u	901			-	
-	4	$b_{\underline{a}}^{r}$	$\lambda_x(\theta_2^0)$	$v_1(v_2)$	$\pi_1(\theta_2^0)$	$\kappa_2 \left(b_2^0 \right)$	$v_1(b_2^0)$	$(\frac{1}{2} \partial_{\mu} e^{i\phi})$	
- M.		U	a_1^{-1}	12	0	h-1	ŀ	01	
	-	$h_3 = h_1^{-1}$	0	it.	\$0	-	-		
	-si	0^0_4 , a^{-1}_{-}	#13	a	90 '	· #*1	a	90 -	
-	8	U	a_1^{-1}	at	0	b ⁻¹	ŀ	0.	
	2.4	$\theta_3 = h_1^{-1}$	D	h.	90.	_	-	-	
-	4.3	$0^0_4 = a^{-1}$	-	-		a ⁻¹	a	90	
	8	0	0	00	любан	1-1	h	0	
		θ_4^0	—		-	48	a	90-	

О распространения магнатоупругих выян в чаотропных средах

$$R_1' > 0, \quad R_2 < 0, \quad R_1(0) = \frac{2Nb^2}{K_2} > 0, \quad R_2(0) = -N\left(1 + \frac{S(\theta)}{\sqrt{Q}}\right) < 0$$

Следовательно, $R_{-}>0$ на отрезке $[0, 0^{\circ}_{4}]$ и $R_{2}<0$ на отрезке $[0, 0^{\circ}_{3}]$. Тогда, согласно (3.30), имеем $v_{4}<0, v_{4}>0$ и поэтому v_{1} монотовно убывает от a_{1} (о a_{1} — монотовно возрастает о b до b_{1} (табл. 3).

Так как на участках (3.28)

$$\max v_1 = v_1(0) = a_1, \qquad \min v_1 = v_1(b_0^*) = a$$

$$\max v_2 = v_2(b_3) = b_1, \qquad \min v_2 = v_2(0) = b$$
(3.34)

 $T0 = (a) > v_a(a), \quad 0 \leq a = 90^\circ.$

Таким образом, в случае $0 < z < z_1$ волва первого типа быстрая $(v_1 = v_j)$, волва 2-го типа — медлевная $(v_2 = v_j)$.



На фит. 3(б) изображены кривые изменения скоростей быстрых исдленных магнитоупругих воли в зависимости от направления движения (на фиг. 3 показан только один квадрант, остальные три получаются отражением относительно осей координат; линия *mn*, периендикулярная раднусу-вектору (c_i или c_s), дает положение плоского разрыва, который перемещается в направления, определяемом углом ψ , через едиинцу временя после прохождения им начала координат).

Случай 4 ×1 < 2 < 22. Согласно тябл. 2, функция λ₁ веществення в интервалах

3. 11 Длянян

$$0 \quad \emptyset \quad \emptyset_i \quad \Pi \quad (3.35)$$

функция л. вещественна в интервале

В силу (3.15) и табл. З. измененцям () в промежутках (3.35) и (3.36), соответствуют напрляль иля распространсния воли

$$0 \ll \tau_1 = 90 \quad \text{if } 90^\circ \quad \tau_1 = \tau_1(6^\circ) > 0$$
 (3.37)

$$(1 - a_2(\theta_2) < 90^{\circ}$$
 (3.35)

Из (3.27). (3.37) (3.38) следует, что в каждом напоавлении из промежутка 0 , т $x(b_2) < 90$ распространяются волны обонх типов, в и каждом ваправлении из промежутка $z(b_2^0) < x < 90^\circ$ распростраияются лишь волиы 1-го тива.

Изучим характер изменения скоростей магиатоупругих воли обонх тниов в зависамости от направления движения в пределах (3.37) в (3.38), соответствению.

Все рассуждения, праведенные при рассмотвении промежутков 0 δ δ_{x}^{μ} и 0 $< \delta$ в случае 2, остаются справс лазыми и в этом случае, то есть z < 0,

Следовательно, согласно табл. 3 и (3.27), вытежает, чт 2, монотопно убывает от b до a, a — монотопно возрастяет от b до a, (b_2^a) .

Далее, на промежутке $b^{i} - b - b^{i}_{i}$ согласно (3.31), $R_{1} > 0$, причем $R_{1}(b_{3}) = 2a^{i} b^{i} N^{2} (b^{i})^{*} = 0$, возгому в силу (3.30) v < 0, то есть v_{1} монотовно убывает от значения b_{1} до $1 = v_{2}(b_{2}) - 1 = v_{2}(b_{3})$

На остовении приведенных рассуждений издем

npu $0 = \emptyset = \emptyset^{\circ}$ max $v_1 = v_1(0) = a;$ min $v_2 = v_2(0) = a$

 $= \sup_{i=1}^{n} b_{i} = b_{i}$

при U 4 — max $v_q = v_s (b_1) = 1$ $a_1 b$; min $v_1 = -(0) - b$

Следовательно, в случае с матнитомиругие волим 1-го в 2-ого типов следует разделить на быстрые (v_i) и медленные (v_i) следующим образом

$$\begin{aligned} v_{x} &= v_{1} \quad \text{npn} \quad 0 = \theta \quad \theta_{0}^{0}, \qquad (0 = z_{1}(\theta) = 90^{\circ}) \\ &= \begin{cases} v_{2} & \text{npn} & 0 \\ v_{1} & \text{npn} & \theta_{1}^{0} = \theta & \theta_{01}^{0}, \qquad (0 \leq z_{1}(\theta) = z_{2}(\theta_{1}^{0})) \\ v_{2} & \text{npn} & \theta_{1}^{0} = \theta & \theta_{01}^{0}, \qquad (z_{2}(\theta_{1}) = z_{2}(\theta_{2}^{0}) = z_{2}(\theta_{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, в случае 4 быстрые золин длютоя формулами (3.14) (или (3.6) г со значением ст (или Лт) в первом интервале (3.35), а медленные золиы — формулами (3.14) гили (3.6)) ст значением ст (или Лт)

во втором интервале (3.35) и со значением ог (или 2) в интервале (3.36).

На фиг. 3(б) приведен график поляры скоростей быстрых и медленных магнатоупругих воле р завосимости от направления движения при исх<х<х2.

Теперь рассмотрим другие случая,

Когда $\times \to 0$, магнитоупругие волны, соответствующые случаю $0 < \varkappa < \varkappa_0$, переходят в обычные упругае олны, причем быстрая волча переходят в продользую (с) скоростью *a*), медленная – а поверечную (со скоростью *b*). График поляры пряведен на фиг. 3(a).

Случан 3 ($\varkappa - \varkappa_1$) является переходным между случаями 2 и 1. Здесь, как и в случае 2. волны 1-ого типа являются быстрыми, а волны 2-ого типа медленными. Причем для медленной волны, распространяющейся вдоль оси *x*, вследствие $b = b_1^* = b_4^* - b_2^*$ значення *i*, н *i*, равны,

Когда $x \to x$, матинтоў гругає в сочы, сответствующае случаю 4, реходят в волны, соответствующие волнам лучая 5. При этом $b_1 \to a$, то есть в направлении осн x быстрые в медленные волны амеют (динаховую скорость a, разпую скорости частоўпругах продольных воли (ф. 3(а)). Это случай конической рефракции.

Случай б аналог ичен случаю 4 в том смысле, что разделение магнатоуврумых воли на быстрые и медленные врожхидит одиниковым образом.

Заметим, что при х х, в направлении оси х (параллельно **H**) медленные волны распространяются со скоростью $= b_1(z)$, которая возрастает от значения b до a при изменении z от 0 до z_3 , а в дальнейшем, то есть при х медленные волны распространяются с постоянной скоростью $v_2(z)$ a = сонst. Для быстрых воли картина их распространения противоположия: нока х они распространяются с ностоянной скоростью $v_1(z)$ a = const. а когда $z > z_2 - \text{со скоростью } v_1 = b_1(z)$ и, которая возрастает от значения a цо

Отсюля следует, что быстрые золлы, распространяющиеся в напра левня внешнего маглятного йхля Н₀, при × < ×2 представляют собой продольные волны, а медлеламе — поперечные; есля же ×>×2, го наоборот.

Отсюда следует также, что вря « 2, продольные волны в направлении H₀ распространяются быстрее, чем понеречные, в случае же х 2, поперечные волны распространяются быстрее продольных волн.

Это постоятельство объясняется тем, что при переходе и через и расположение точек $Q_{\pm}^{0}(x)$ и $\theta_{\pm}^{0}(x)$ на оси и меняется на противоположное.

Такую же внялогию можно провести и между случаями 8 и 2. Графики поляр случаев 6 и 8 приведены на фаг 3(г).

Случан 7 и 9 можно получить из 8, когда $x \to x_s$ и $x \to +\infty$, соответственно, причем в случае 9 скорость быстрой магнитоупругой

волны по любому направления стремится к бесконечности. На фиг. З (г. с) приведены графики поляр, соответствующие случаям 7 и 9

В направлении, перненликулярном H_0 , во всех зышерассмотренных случаях быстрые волны представляют собой продольные, скорость которых $a_1(\varkappa)$ увелячивается узсличением скорости Альфвена от 0 до $+\infty$ а медленные волны — поперечные, скорость которых постоянна и равна *b*.

Итак, магинтоупругие волны, распространяющиеся по направлениям вцен не о магнитного поля H_n и песцендикулярно к нему, представляют собой чисто продольные и поперечные волны. В осгальных направлениях векторы смещений обоих типов воли обладают составляющими как на раллельными, так и перисодикулярными к направлениям распространеция.

С увеличением величаны внешнего магнитного лоля от 0 до $-\infty$ скорость медленных магнитоупругих воли увеличивается от *b* до *a*, а скорость быстрых магнитоупругих воли от *a* до $-\infty$.

В случає, когда висшиее магинтно, поле периендикулярно к илокости двяжения ($H_{01} = H_{02} = 0$), магинтрупругие вояны описываются системой уразисский (1.7). Исследование системы (1.7) сволится к исследованию обычных уравнений Лямъ заменон $a_{\pm} + s_{\pm} - a_{\pm}$. Отсюда следует, что в этом случае магиитное поле влияет только, на продольные волны, причем их скорость a_{\pm} увеличивается с возрастанием интенсивноста магиитного поля.

В пределе, когда — 0, при \times 0 характер распространения магнитоупругих воли такой же, как и — магнитогазолинамике [14], при этом и формулах (3.21) $z_1 \rightarrow 0, z \rightarrow a$

Отметим также, что в прехмерной задаче существуют вращательные волны (волны Альфзена), когда вектор перемещения нараллелет и в терхности фронта волны [12]. В плоской задаче эти колны этсутствуют

Автор благодарит участников семянара «Электродинамика деформаруемых сплониных сред» Института механики АН Арм. ССР, М. М. Чинасяна и А. А. Хачатряна за обсужден с работы.

Инстоту механики АН Армянской ССР

floervinina _4 Nil 1973

Չ. Ն. ԳԱՆՈՅԱՆ

ԲԴԵԱԼԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԻՉՈՏՐՈՎ ՄԵՋԱՎԱՅԲՆՐՈՒՄ՝ ՄԱԳՆԻՑԱԱՅԱՉԳԱԿԱՆ ԱԼԵՐՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՀԱՐԹ ԵՆԴՐԻ ՎԵՐԱՐԵՐՑԱԼ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում են մազնիսատուաձգականութերան էարթե խնգրի ֆունկցիոնալ ինվարիանտ լուծումները, սրոնցով նկարագրվում են երկու տիպի արթե արթներ։

^Rերվում է ալիթների ատրածման արադուքիյունների փոփոխուքիյան Նաազոտումը կախված մազնիսական գաշտի մեծուքիունից և մադնիսական գաշտի ուղղության ու ալիթի նորմալի կազմած անկյունից։

հատորատության արդյունթում՝ ժագնիստառաձղական այիբները բաժանվում են արագի և դանպաղի։ Կառուցվում են այգ ալիթների՝ արագությունների գրափիկները։

ON THE PLANE PROBLEM OF PROPAGATION OF MAGNETOELASTIC WAVES IN PERFECTLY CONDUCTING ISOTROPIC MEDIA

Z. N. DANOYAN

Summary

The problem of propagation elastic waves in infinite isotropic media in the presence of a magnetic field is considered in terms of Smirnov Sobolev's complex solutions method.

The functional invariant solutions are examined as plane waves of two types in the plane problem of magnetoelasticity.

The variation in velocity of propagation of waves depending both on magnitude of the magnetic field and on angle between the direction of the magnetic field and the normal to the wave is investigated.

According to the results obtained the magnetoelastic waves are divided into fast and slow ones. The graphs of velocities of the waves are presented.

ЛИТЕ-РАТУРА

- Франк Ф. и. Мазек Р. Дифференциальные и питегральные уразнения математической физики. 1937, пл. 12.
- 2 Свекло В. А. Упругие килебания апилотронного тела. Уч. зап. ЛГУ. 1949. вып. 17.
- 3 Осилов И. О. Отражение и применение илеских упругих воли на границе двух анизотропитых сред. Изи. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1961.
- Осилов И. О. К методу функционально-нивариантных решений для задачи динама ческой теории уну у ости линзотронных сред. Изв. МІ СССР, сер. геофия., М. 3, 1963.
- Оснион И. О. К. имоско стале распространиты укрусну, колебаний в анизотропной сределя точет но источнека. ПММ, т. 33, ный 3, 1969.
- Кейлис-Борок В. И., Монин А. С. Магнитоупругие полица в граница земного ядел Изо. АН СССР, сер. геофия., 1959. № 11
- Kallski S. The propagation of a non-linear loading wave in a magnetic field for a perfect conductor. Proc. Vibr, Probl., 1960, Nº 5.

- в Косаменский Л. Я. Об отражения магнятозвуковых воля, П.М.М. (26, шля, 5, 1962).
- Уличьонныя Г. Г. З. Н. Риспространение ун. на с нисстранстве полупространстве иом наличии мялицитного поля. Пап. XII. Хрм. ССР, Механока, г. 25, № 2, 1972.
- Амбарцумин С. 1., Бог вы артов Г. Е., Белибекли М. В. К. трехмерной за тис. моштоувругих колеодини здаствики ПММ, т. 35, авто. 2, 1971.
- Селемов И. Т. Распространение магнитоунауных воли напряжения от циландарите кой аолости в трополящей среде. ПМТФ, 1969. № 2.
- 12. Buzer J. Geometrical magnetoelasticity, Geophys J. Roy, Astron. Soc., 1971, Nº 1.
- 13. Седов Л. []. Мехоника сплотной среды, П. (. . . Наука», т. І. 1970.
- 11 Шерклиф Дж. Курс манитион гидродинамики. Над «Мир», 1967-

46

ЦІЗНІЦЬ ПОД ЧРУПРИЗПРОЛЬРЕ ПИПРЫТРІЛЛЕ УБЛІНЦЧЕР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկու

XXVII, Nº 5, 1974

Mexamixa

Л. Л. АЗАТЯН

ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ СИЛЬНОН МАГНИТОГАЗО-ДИНАМИЧЕСКОП УДАРНОП ВОЛНЫ ОКОЛО КЛИНА

В явстоящей работь рассматривается сестационарная пространетвенняя надача о движения электропроволящей сжимаемой жидкости ... магантиом поле при дифракции знльной маг из казоданамической ударной полны около угла, близкого у д. При отсутствии маглятого поля чудача о дифракции сильной ударной ислим около тупого угла рассмотрена в [4]. Метолом, отличным от [1], решение соответствующих плоской в осесимметрячной инфракционных задач рассмотрено в [2], [5]. О шомерные залачи с магнитога юдинамическими старнымы воднами рассмотрены довольно и спробио и [4] [5], [6], [7], [8], [9]. Пр эстранственные залачи неустановные тося движения в магнотной газодинамике изучены сравинтельно мало. Залача распространения лабых ударных воли в магнитной газодинамике рассмотрены в [10], [11], [12]. Задача о произканна туного кляна в электропроволящую жилкость при наличии слабой магнитогазодинамической ударной волны рассмотрона а [13]. Как указано и [14], в магнитной тазо цинамике почти отсутствуют результаты по решешию пространственных нестационарных залач, вместе с тем решение задач но отражению магнитогаз эдинам иче, ких уларных воли от преград представляет как теоретический, так и приктический интерес.

В § 1 настоящей работы решается задача об отражения сильной магнитогазодинамической ударной волны, распространяющейся в электропроволящей жидкоста или газе, от тупот клина при наличии олнородного начального магнитного поля. Возникающее возмущенное давжение будет плоским, причум плоскость основного двяжения периендакуляриа ребру клина (липни пересечения граней). Начальное магнити поле цараллельно линии пересечения ударной волям с плоскостью основного двяжения. Определены параметры газа позали палающей и плоской отражению от клина ударных воли. Показано, что индушированное магнитное поле за отраженным скачком нараллельно клипу. Далее методом [15] граничная з дача з области перавномерного теченда приводится к праничной залаче для овределения аналитической функция, которая решается мет цом [1]. Праведены результаты расчетов параметров за надающей и отраженной плоскими волнами, а также распределеше двяления параметрой салаче.

В § 2 примедены окончательные результаты задачь об отражения сильной магнитенализательные у зарной волны от тупого клина пра начальном магчитном поле, параллельном ребру клича. 1. Пусть фронт плоской ударной волны цвижется в идеально проводящем газе в магнитном поле со скоростью V_0 и в момент времени t=0 сталкивается с углом, стороны которого образуют со скачком малый угол г. Движение предположено илоским. Начало координат поместим



Фиг. 1.

клина вправо, а ось Оу – вертикально вверх. Начальное магнитное поле Во параллельно линин перессчения плоскости скачка с плоскостью основного течения, направление же движения скачка совнадает с отрицательным направлением оси Ох. Для некоторого значения г =0 картина движения показана на фиг. 1. Ввиду малости параметра є влияние угла можно рассматривать как малое возмущение отраженного скачка. Прямолинейные участки отраженной волны, исходящие из точек на стенках, до когорых дошла падающая волна в цанныя момент, будут соединены криволинейной частью отраженной ударной волны. которая является результатом дифракции от вершины. Обозначим индексом о параметры нокоящегося газа впереди падающей волны, индексами 1 и 2значения этих нараметров соответственно за фронтом падающей волны и прямолинейной части отраженной волны. Значения параметров газа в области возмушенного течения спаблим индексом 3 Определим течение за надающей ударной волной. Параметры потока за налающим скачком постоянны и опреде-

в вершине угла, ось Ох направим по оси

лиются из соотношений на прямом скачке уплотнения. Исключая п этих условий давление p_1 , плотность — магнитное поле B_1 , получим следующее кубическое уравнение для скорости частии газа g_1 за падающим скачком:

$$g_{1}^{2} + \frac{\left[2\gamma p_{0} + \gamma a_{1}^{2} \gamma_{0} - (\gamma + 3) \gamma_{0} V_{0}\right]}{(\gamma + 1) \gamma_{0} V_{0}} g_{1}^{2} - \frac{2\left[\gamma p_{0} + a_{1}^{2} \gamma_{0} - \gamma_{0} V_{0}\right]}{(\gamma + 1) \gamma_{0}} g_{1} - \frac{a^{2} V_{0}}{3} = 0$$

$$(1.1)$$

rae

$$a_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi \gamma_0}$$

Уравнение (1.1) имеет три вещественных кория a_1 и, которых физически осуществимо одно значение кория, равное при $a_1 = 0$ экорости изстиц газа за падающим скачком в газовой дивамике

$$g'_1 = \frac{2(M^2 - 1)}{(z - 1)\beta l^4}V_1$$

Злесь $M = \frac{W_0}{C_0}$ — число Маха падающего скачка, v_0 — скорость звука перед падающей ударной волной. Условия на скачке увлотиевия дают

перед падающен ударной волной, экловия на скачке унлотнения дают значения остальных параметров за падающим скачком

$$p_{1} = -\frac{\gamma_{0} \Gamma_{0}}{(g_{1} - V_{0})} \cdot B_{1} - \frac{B_{1} \Gamma_{0}}{(g_{1} - V_{0})}$$

$$p_{1} = p_{0} + \gamma_{0} V_{0} g_{1} - \frac{(g_{1} - 2V_{0})B_{0}^{2}g_{1}}{8\pi (g_{1} - V_{0})^{2}}$$
(1.2)

Определям течение за этражелным плоским скичком. За отраженной ударной волной и стенками угла вне области возмущенного течения влияние дифракции вершины не сказывается. В этой части отражение происходит так же, как от ивердой бесконечной стенки. Нараметры потока здесь постоянны и эпределяются из соотлиниений на когом скачке уплотнения [16]

$$B_{11} = B_{2n}$$

$$p_1 (g_{1n} - V_{00}) = (g_{1n} - V_{02}) + \frac{B_1^2}{8\pi} = p_2 + (g_{2n} - V_{02}) + \frac{B_2^2}{8\pi}$$

$$p_1 + g_1 (g_{1n} - V_{00}) + \frac{B_1^2}{4\pi} B_1 = g_2 + (g_{2n} - V_{02}) + \frac{B_2^2}{8\pi}$$

$$q_1 (g_{1n} - V_{00}) g_{12} - \frac{B_{1n}}{4\pi} B_1 = g_{2n} - V_{00} B_2 - \frac{B_{1n}}{4\pi} B_1$$

$$(g_{1n} - V_{00}) B_{12} - B_{12} B_1 = (g_{2n} - V_{00}) B_2 - B_1$$

$$(g_{1n} - V_{00})^2 - \frac{1}{(\tau - 1)} B_1 - \frac{B_1}{2} - \frac{B_1}{4\pi} B_1 - \frac{B_1}{4\pi} B_1$$

$$(1.3)$$

$$= \frac{(g_{2n} - V_{00})^2}{2} + \frac{1}{(\tau - 1)} \frac{p_2}{p_2} - \frac{g_{22}^2}{2} - \frac{B_{22}^2}{4\pi} - \frac{B_{12}^2}{4\pi} - \frac{B_{12}}{4\pi} - \frac{B_{12}}{$$

Здесь и—направление внешней нормали. т—касательной к скачку, V_{01} —нормальная скорость отраженного скачка. Скорость газа g_2 за ограженной ударной волной параллельна степке и направлена к точке N. Из условия неотрывности в точке N падающей и отраженной ударных воли имеем

4 Известия АН Армялской (CP, Механика, № 5)

RELEGA R. J.

$$z' = \frac{4V_{\rm min}}{V_{\rm m}} \tag{1.4}$$

не в угол отражения плоской ударной волны от клина, который согласно (1.4) язляется величиной порядка в Записывая в (1.3)

$$g_{1_1} = -g_1 \cos((z-z')) = -g_1, \qquad g_1 \sin((z-z')) = g_1((z+z'))$$

$$B_{1\varepsilon} = B_1 \sin\left(\varepsilon - \varepsilon'\right) = B_1 \left(\varepsilon - \varepsilon'\right), \qquad B_1 = B_1 \cos\left(\varepsilon - \varepsilon'\right) = B_1$$

и слючая из вторько, гравьет и вестого уравнения (1.3) р₂, рок В₂, в норядке в нолучих хубическое уравнение для V₁₀

$$V_{a_{0}}^{3} - \frac{(\gamma - 3)g_{1}}{2}V_{a_{0}}^{2} - \left[\frac{(\gamma - 1)g_{1}^{2}}{2} - \frac{\gamma p_{1}}{p_{1}} - a_{2}^{2}\right]V_{a_{0}} - \frac{(2 - \gamma)a_{2}^{2}g_{3}}{2} = 0$$
(1.5)

95.1

$$a_2^2 = \frac{B_1^2}{4\pi g_1}$$

По с ображениям, что я выше, берется тот корень уравнения, который близок к липчению

$$L_{0} = \frac{2(-1)M^{2} - (-3)}{(-1)M^{2}} I_{0}$$
(1.6)

дающему скоресть праженного скачка в газовой динамике и опреденяющемуся из (1.3) при B=0. Далсе в том же приближении из (1.3)получим оначения стальных параметнов за плоским отраженных скачком:

$$g_{2} = \frac{g_{1}(g_{1} - V_{0})}{V_{0}}, \qquad B_{2}, = B_{1}(z + z'), \qquad B_{2} = \frac{g_{1}B_{1}}{g_{1}}$$

$$p_{2} = p_{1} - g_{1}g_{1}(g_{1} + V_{0}) - \frac{B_{1}^{2}(g_{1} - 2V_{0})g_{1}}{8\pi V_{0}}$$
(1.7)

11. аконец, четаврате уравнение тистемы (1.3) позволяет определит величниу скороски газа = в бласти за прямолинейной частью отраженного скачка С использованием (1.2), (1.4) и (1.7) для проек

ция вектора В₂ на пормаль к стенке получим.

$$B_{1N} = B_{1N} - zB_{2N} = \frac{B_0}{p_0} [zy_1 + z^2 (z_2 - y_2)] = zB_0$$

то есть силовые линии иллуцярованного магнитного поля в област постоянного гечения за плоским отраженным скачком те проникаю в клян Вообще гозоря, для надающей удерной волны полжны быть дв отраженные ударные имы, быстрая а мелленная. Но можно показате



О дафракции магнатога юдинамической уди шой волько около клина

что в порядке медлемная ударная волна цает те же направления зекторов B и g, что в быстрая ударная волна, причем угод наклопа ее к стенке $\sim x$, поэтому можно принять, что в основ юм порядке медленная ударная волна отсутствует.

Учет конечной (хотя 4) оолын илт электропроводности о показывает на наличие узкого токового слоя вблязи новерхности клина нириной норядка 1/Т. где $L \sim \frac{1}{2}$. Полагая $L \sim \varepsilon^2$, получим, что в указанном слое ускорения ала сила Лорениа, неиствующие на частицы жилкости в направлении, касательном к стенке, конечны. Деиствительно,

$$J_z \sim \frac{\kappa}{VL}, \qquad J_z B_{AX} \approx \kappa B_0$$

К-новерхностная ялотность гока,

В области возмушенного геченая, заключенной межлу скачком ПВС, стенкой ДЕГ и дугам (ДС и FA, представляющими фронт быстрой маг автозвуковой волны, порожденной зершиной угла, нараметры и тока выпишем в виде

$$p_{0} = p_{1} = p$$
, $g_{0} = g_{2}$, $B_{0} = \vec{B}_{0}$, \vec{b} (1.8)

где р. р. в имеют порядок в. Как следует из четвертого уравнения системы (1.3), и следовательни, (и, а) также будет иметь порядок в. При подстановке (1.8) в основную систему уравнении магнит или газоданамики и личеаризации по в получим

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = B_z \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = -\frac{B_z}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{B_z}{4\pi p_z} \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) \qquad (1.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

С учетом автомодельности задачи уривнения (1.9) можно записать на переменных

$$\mathbf{\tilde{t}} = \frac{x}{c_2 t} \ , \qquad \tau_i = \frac{y}{c_i t} \ , \qquad \mathbf{rac} \quad c_2 = \left(\frac{\gamma p_2}{\gamma_2}\right)^2$$

J. J. Acator

В плоскости Е. 9 стенкь DEF скачок ABC можно анпрокеммировать прямолниенными отрезками (фиг. 21, причем на стенке Е будет равно нулю, а на искривленном скачке

$$r = \frac{1_{ac}}{sc_{a}} = \frac{1_{a0}}{c_{a}} = k$$
 (1.10)

Как в в задаче га овой динамики, съ в $k_0 < 1$, что видно также на расчетов, приведенных далес. На сталустовия $g_{1,0} = 0$ следует, что



при : $\Omega_{i} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 41а первого ураннения системы (1.9) имеем: при x = i = 0, $b_{i} = const.$

Поскольку на лугах DC и FA возмущевом отсутствуют, то есть в точках D и F b 0, ль дует принить b 0 на всей стенке DEF 11, аконет из системы (1.9) следует, что можно полагать

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = 0 \quad \text{i pu } x \quad \xi = 0 \quad (1.11)$$

На дугах DC и FA возмущения отсутствукы, вательно, на этих дугах

$$p = 0$$
 (1.12)

Для пахождения граничного эсловия на 2-ke представим возмушеяный фронт ударч ѝ волны в виде

$$:= -f(a)$$

гас I(ц) - функция, пределяющая дел вестную форму ударной волны.

Пинеаризуя относитель параметров индексом 2 соотношения вида (1.3) для искр кленной части скачка, получим некоторую систему уравнении, решение которой посл почения функции / имеет вид

$$w = D_0 p_1^*, \qquad \frac{\sigma w}{\sigma_1} = E_0 \frac{\sigma p_0^*}{\sigma_2}, \qquad \frac{\sigma b_0}{\sigma_2} = L_0 \frac{\sigma p_1^*}{\sigma_2}, \qquad b_0 = C_0 p_0^*, \quad \text{in } \xi = R_0$$
(1.12)

где **Яоэ**ффициенты следующие

$$D_0 = \frac{[4\pi V_{00}g_1\phi_2(\tau-1) - (\phi_2 - \phi_1)(e^{-i\phi_2}V_{10} - e^{-i\phi_2}B_1)]}{(\pi-1)(e^{-i\phi_2}g_1\phi_2 - V_{00}(\phi_2 - \phi_1)[4\pi(\tau-1)\phi_2V_{10} - 8\pi_i\rho_2 - (\tau-1)h_i]}$$

$$E = \frac{|B_1(B_2 - B_1) - 4\pi p_2 V_{00}g_1|(B_1 - 4\pi p_2 - 4\pi p_2 V_{00})}{4\pi V_0(4\pi V_0)(4\pi V_0)(4\pi V_0)(4\pi V_0)(4\pi V_0)(4\pi V_0)}$$
(1.14)

$$L_0 = \frac{(B_2 - b_1)(B_1 + 4\pi\gamma p_1 - 4\pi\gamma V_{10}^2)\phi}{(\gamma - 1)(4\pi\gamma V_1 - B_1^2)g_1p_2 - V_{10}(p_1 - \gamma)(4\pi\gamma - 1)p_2V_{10}^2 + 8\pi\gamma p_1 - (\gamma - 1)B_1^2}$$

$$C_{0} = \frac{4\pi p_{2}^{4} c_{2} B_{2} \left[\left(\frac{a}{1} - 1 \right) p_{2} g_{1} - \left(\frac{a}{1} + 1 \right) \left(p_{2} - p_{1} \right) V_{00} \right]}{\left(\frac{a}{1} - 1 \right) \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right) \left[\frac{a}{2} + V_{0} \left(\frac{a}{2} - 1 \right) \right] \left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \right]}$$

$$p_{0}^{*} = \frac{p_{3} - p_{2}}{c_{2} p_{1}}, \quad b_{0} = \frac{b}{\frac{1}{2}} - \text{варианний давления и магнитного поля,}$$

имеющие размерность скорости.

Уравнение (1.13) на ударной волие можно написать для одной только функции *р*^{*}, ссля использовать уравления (1.9), записанные з переменных 2, ц

$$\frac{\partial p_{\pm}^{*} \partial r_{\pm}}{\partial p_{\pm}^{*} \partial r_{\pm}} = \frac{M_{1}r_{\pm} - M_{2}r_{\pm}^{-1}}{M_{\pm}}$$

$$M_{1} = D_{0} + k_{0} - \frac{B_{2}C_{0}}{4\pi k_{0}c_{2}r_{\pm}^{2}} - \frac{B_{2}^{2}}{4\pi k_{0}c_{2}r_{\pm}^{2}}$$
(1.15)

$$M_{\pm} = E_{0}k_{0} - \frac{B_{1}^{2}E_{0}}{4\pi k_{0}c_{2}^{2}\gamma_{\pm}} - \frac{B_{0}L_{0}}{4\pi c_{0}\gamma_{\pm}^{2}}, \quad M_{\pi} = 1 - k_{0}^{2} - \frac{B_{\pm}^{2}}{4\pi \gamma_{\pi}c_{\pm}^{2}}$$

$$\int \frac{\partial w}{\partial r_1} \, \partial r_2 = \int \frac{E_0}{r_1} \, d\rho_2 = g_1 \tag{1.16}$$

Для решения сформулированной граничной задачи по решению системы уравнений (1.9) при граничных условиях (1.11), (1.12), (1.15) п (1.16) применяется мето Смирнова-Соболева, который справеллидля произвольной гиперболической системы с постоянными коэффиинентами для 3-х независимых переменных x, y I и согласно которому можно искать решение системы (1.9) в виде

$$u = \operatorname{Re} V_x(a), \qquad w = \operatorname{Re} V_y(a), \qquad b_x = \operatorname{Re} B_x(a)$$

$$b_y = \operatorname{Re} B_y(a), \qquad \rho = \operatorname{Re} P(a)$$
(1.17)

где $V_{x}(\alpha)$, $V_{z}(\alpha)$, $B_{x}(\alpha)$, $B_{z}(\alpha)$, $P_{z}(\alpha)$ — аналитические функции переиенной α , зависящей от x, y, t в виде

$$xy - y(z)x = t$$
 (1.18)

Подставляя (1.17) в (1.9), получим уравления, из которых можно получить соотношения

$$V_{x}(z) = \frac{\beta}{\beta_{2}\beta_{0}}P^{*}(z), \qquad V_{y}(z) = \frac{\pi}{\beta_{0}}P^{*}(z), \qquad B_{x}(z) = -\frac{\pi\beta}{\beta_{2}\beta_{0}}P^{*}(z)$$
$$B_{y}(z) = \frac{\beta^{2}}{\beta_{2}\beta_{0}}P^{*}(z), \qquad \beta_{0} = 1 - \frac{B_{0}^{2}}{4\pi\beta_{0}}(z^{2} + \beta^{2})$$

и лисперсионное уравнение для $\beta(\alpha)$, решение которого в переменных $z_1 = 2c_{\rm o}$ имеет вид

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1-a_1^{-1}x^2)(1-x^2)}{(1+a_1^{-2}-a_1^{-2}x^2)} & \text{rge} \quad a = \frac{B^2}{4\pi p_0 c_0} \end{array} \right.$$
(1.19)

Здесь і з цальнейшем индеке І отбральнается. Подетавляя шаченък $\beta(\alpha)$ в (1.18), получим относятельно а уравнение четвертого порядки. Путем графического построения можно показать, что это уравяение амеет циа зеществечных кория α_1 , α_2 , остальные же два значения а комплексть сопряженные. Из ших мы берем одно значение а в шижней получлоскостя. В плоскости а функция $\beta(\alpha)$ имеет точки веталения:



$$x = -1, \qquad \pm \frac{1}{a_1^*}, \qquad \pm \frac{1}{a_1^*} = \frac{1}{a_1^*}$$

как известно, уравнение точечных воли, произведенных в момент / 0 в вершние угла, дается отвбающей плоских воли в инде

$$z_0 v_1 + \beta (z_0) = -1$$

 $z_0 + \beta (z_0) = -0$ (1.20)

причем 20, 2 (20) деиствительны.

Здесь быстрои магнитозвуковой волне (фиг. 3) соответствует отрезок (-1,+1); состоящий яз даух берегов, причем на нижаем берегу разреза берем $\beta(a) \geq 0$, гогда согласию выбору ветви $\beta(a)$ волие *DPF* будет сютветствовать шижний берег разреза (фиг. 4). На верхнем берегу разреза (-1,-1), $\beta(a) < 0$, так как при полном обходе точки a = +1 в положительном направления огд $\beta(a)$ становится равлым і киле ювання, которые можно провести или медленной магнитозвуковой волны, ноказывают, что $\beta(a)$ лействительное тотрикательное на инжнем берегу, положительное, на верхием), причем точке $z = \frac{1}{a_1^2}$ (фиг. 4) соответствует точка в точке $z = \frac{1}{a_1} - C_0$, а точке z = z соответствует точка A_0 , в которен $z^{\alpha}(z_1) = 0$, что соот-

ветствует бесконсчной кривизине волны в точке А, (фиг. 3).

Значит в вашей и дляе пря магнятном поле, параллельном ося Оу можно полагать лля всех функций, в том числе для ро

$$p_0 = \text{Re}\phi(z)$$
 (1.21)

те а определяется из урание ния

$$+ \gamma(a) + = 1$$
 (1.22)

Решение (1.21) булет овасывать все поле перавномерного течения, включая окрестность медленной магнитозауковон золяы, хитя, строго говоря, в окрестности особых точех медленной магантознуховой волны лужно учитывать нелицейные эффекты



Воопце і заоря, можно пайти решение яост — он вадачи л.19 произвольної і вида функции — однако для получения тамкнутой апалитической формы решения нужно вметь сравнительно простую форму кривой в плоскостя — с преклавляющей обрат скачка $g = k_0$ в плоскости с. ц. Для эффективного конформного отображения образа области возмущенного давжения в плоккост ($\frac{1}{2}$) на каноничесьски во ласть предполагаем параметр $a_1^{(2)}$ малым в разлагаем $\beta(2)$ в ряд по параметру $a_1^{(2)}$

$$\beta(z) \approx \beta_0(z) + \frac{\partial \beta(z)}{\partial a_1^{*2}} \Big|_{a_1^* = 0} a_1^{*2} = \left(1 - \frac{a_1^{*2}}{2}\right) \sqrt{1 - z^2}$$
(1.23)

Это разложение верно всюду вроме окрестности т чек

$$a = -\frac{1}{a_1}, \quad a = -\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_1}$$

В статье оно используется лишь холизи уларной выны. Полстанляя (1.23) в (1.22), определяя из получениот уравнения $\frac{1}{2} = 1 - ie$ и отделяя действительную и эн мум части, получим

$$i = \frac{1}{1}$$
 $i = \frac{1}{1}$ (1.24)

где

 $1^{\circ} = 1\left(1 - \frac{a_1^{\circ *}}{2}\right)$

$$\frac{k^* - p^*}{k^{*2}} = (1.25)$$

область

гас

$$k_0 \left(1 - \frac{a_1^{**}}{a_1} \right), \qquad k_1^{**} = 1 - 1 - k^{**}$$

Промежутки
$$\frac{1}{k} < < -1, -1 < < 1, 1 < 1 < \frac{1}{k}$$
 ленстви-

тельной оси соотве ствуют, уге AF, стенке DEF и дуге DC. Эллинс



(1.25) соответстнует ударной волне АВС. Теперь примением конформное преобразование

$$\kappa = -\frac{2i_0}{1 - \omega^2}, \qquad \kappa = 1 - i_0 \quad (1.26)$$

и вволим илоскость $z = \infty$, причем z = c + iv. Отделяя в (1.26) действительную и миимую части, получим

$$= \frac{2(1-i^2-v^2)v}{(1-i^2+v^2)^2-4i^2} = \frac{1}{(1+i^2-v^2)^2-4i^2} \quad (1.27)$$

Преобразование (1.27) переводит область A'B'C' в область $A_1B_*C_1D_*E_*F_1$ на плоскости $i = j \cos b$. $v = j \sin b$. Отрезок DF' перейдет в часть $-1 \le v \le 1$ минмой оси, отрезки F'A' и D'C' пе-

—1 < 9 < 1 минмон осн, отрезки // А и D с нерейдут в дуги окружности сдиничного раднуса, а эллипс (1.25) преобразуется в дугу окружности (фиг. 6)

$$2y\cos\theta = k^*(1-y^2)$$
 (1.28)

которая пересскиет окружность у 1 в точке (k', k'') под прямым углом.

Преобразуем соотношение (1.15) для произкодных давления по направлению нормали и касательной к дуге окружности (4.28), соответ-

ствующей ударной волне: при последующем конформном преобразоваими она перейдут в производные по пормали и касательной к колтуру, в который переходит окружность (1.28) при преобразовании. Используя упрошенную формулу (1.23) «близи удар юн волны, можно для нерехода от плоскости – и к плоскости о, () воспользоваться преобразованием Буземана

$$t' = \frac{-2y\sin \theta}{1}$$
, $\eta = \frac{-2y\sin \theta}{1}$ (1.29)

ято следует на (1.24) в (1.27). Так как на дуге АВС

$$\frac{\partial p_0}{\partial t_1} = \frac{\partial p_0}{\partial s} \cos z_0 - \frac{\partial p_0}{\partial t_1} \sin z_0, \qquad \frac{1}{s} \frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{\partial p_0}{\partial s} \sin z_0 - \frac{\partial p_0}{\partial t_1} \cos z_0$$

гле α_0 — угол межлу направлением касательной в произвольной точке луги *ABC* и лучом, проведенным из начала координат в точку касания, то условие (1.15) в плоскости р. 0 будет иметь вид



$$\sin\theta = k_{\rm o}^*\cos \tau_0$$

О пфрак и матинтега слинамической стерион колны около ющин

$$\frac{\partial p_{0} \, \partial s}{\partial p_{0} \, \partial s} = \frac{(M_{1} k^{-1} k - M_{2} k^{-1} t_{2} t_{2} - M_{2} k^{-1} t_{2} t_{2})}{M_{3} \left(1 - k_{0}^{-1} \sec^{2} \theta\right)^{4}}$$
(1.30)

ғде

$$k_{1}^{**} = 1 \ \overline{1 - k_{1}^{**}}, \qquad k_{1}^{**} = k_{1}^{*} - \frac{a_{1}^{**} k_{1}^{**}}{4b} -$$
Ha uyrax $y = 1, \ \frac{\partial B_{1}}{\partial S} = 0, \quad a$ na normon $D_{1} E_{1} E_{1} - \frac{b}{b} - \frac{b}{b}$

9.1

 $\frac{\partial B_{\mu}}{\partial a} = 0.$ Функция

$$z_1 = \ln \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{2} = 0$$
, rac $z = 1e^{-1}$ (1.3)

переводит область $A_1B_1C_1D_2E_1F_4$ в прямоугольник (фиг. 7)

$$0 < x_i < z, \qquad 0 < y_i < \pi \quad (1.32)$$

причем на А_тВС значение з_т будет равно

$$z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + k_0^2}{1 - k_0^2} + i \left(\frac{1}{2} = \arctan \frac{2 \sin \theta}{1 - e^2} \right) = z - i y_1 \qquad (1.33)$$

Условие (1.30) на ударной волие нерейдет

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \sin y_1 \cos y_1 = \frac{\partial p_0}{\partial y_1} \left[\left(\frac{M_1}{M_1} - k_0^* \right) \cos y_1 - \frac{M_2 k_0^{**}}{k^{**2} M_3} \right] \quad (1.34)$$

HE D'C, F. U. J. D. E.F. HMEEM

$$\frac{\partial p_{u}}{\partial x_{1}} \simeq 0 \tag{1.35}$$

Итак, задача заключается в определении функции р^{*}, удовлетворяющей уравнению Ланласа внутри прямоугольника (1.32) и граничных условиям (1.34), (1.35). Далее задача решается методом Лайтхилла [1].

Решение во глательно находится в заде [1]

$$\kappa(z_1) = K_0 \left\{ \frac{u_r(-iz_1, g^r)}{u_r(-iz_1, g^r)} W(z_1) \right\}$$
 (1.36)

где 0., 4, тета-функции [18]

$$W(z_1) = \exp\left\{\sum_{a=1}^{\infty} (2 - a^a - b^a) | u^{-1} \operatorname{esch}(2uz_1) - (1.37)\right\}$$



R. L. America

$$a = \frac{1}{2^{n} - 1}, \qquad b = \frac{1}{2 - 1}, \qquad s = \frac{1 - k}{1 - k}$$

а К_с определяются из условия (1.16). Для распределения давления на стенке имеем

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial y_1}\right)_{x=0} = -K_0 \frac{\partial_2(y_1)}{\partial_4(y_1)} \quad W(iy_1)$$

По формулам

$$\overline{b}_{1} = \frac{y_{1}}{y_{0}} = -\frac{1}{(g_{1} - 1)}, \qquad \overline{B}_{1} = \frac{B_{1}}{B_{0}} = \overline{c}$$

$$\overline{p}_{1} = \frac{p_{1}}{(V)} = -\frac{1}{\gamma_{1}(V)} = -\frac{1}{2(g_{1} - 1)^{2}}$$

$$-\frac{y_{2}}{(V_{00})} = -\frac{+V_{0}}{V_{00}}, \qquad \overline{B}_{1} = \frac{B_{2}}{B} = -\frac{1}{2(g_{1} - 1)^{2}}$$
(1.38)

$$\overline{p}_{1} = \frac{p_{1}}{p_{1} v_{0}^{2}} + p_{1} - \overline{v_{0}}v_{1}(\overline{v_{1}} - \overline{V_{00}}) - \frac{a_{1}^{2}B^{2} v_{1}(v_{1} + 2\overline{V_{00}})}{2V_{00}}$$

где $\tilde{a}_1^2 = \frac{B_2^2}{4\pi p_0 V_0^2}$, $\tilde{g}_1 = \frac{g_1}{V_0}$ и $\tilde{V}_0 = \frac{1}{V_0}$ эпределяются из уравнений (1.1) и (1.5), саписанных в безразмерных пораметрах для $\gamma = \frac{7}{5}$. Кроме того, подсчитано значение

$$\frac{K_0}{W_0} = \frac{2M_0}{E_0}$$

$$= \sum_{0}^{n} \frac{a_{1}(y_{1})}{a_{1}(y_{1})} = \sum_{0}^{n} \frac{a_{2}(y_{1})}{1 \cos^{2} y_{1} - 1 \sin y_{1}} + \cos^{2} y_{1} - \beta^{2} \sin y_{1}$$

не э. и спределяются из уравиении

$$\frac{1}{x_{a} - z} = \frac{M_{1}k_{c}^{a+2}}{M_{3}} = \frac{M_{2}}{M_{3}} = \frac{M_{2}k^{a+2}}{k_{a} - k_{a}} = \frac{M_{2}k^{a+2}}{k_{a} - M_{3}}$$

Вычислено также бузразмерное завление р на степке по формуле

$$p = p_1 - p_0 s (p_1 - p_0)$$
(1.39)

Результаты расчетов приведены в табы. 1.

О матоноть ютячаческой у волят около клини

	$\frac{M}{u_1} = 0$	$\begin{array}{ccc} M & 1.5 \\ a_1 & 0.01 \end{array}$	M = 3 $a_1 = 0$	$\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ a_1 & 0, 01 \end{bmatrix}$		$\begin{array}{ccc} A & \infty \\ & \\ & \\ u_1 = 0, 0 \end{array}$		
P:	0.7804	0,7501	0,8201	0,8191	0,8333	0,8311		
21	1.8621	1.8612	1 \$571	3,8522	5,9999	5,9839		
81	0,4630	0,4627	0,7407	0,7404	0,8333	0,8329		
\overline{B}_1	1,8621	1.8612	3.8571	3,8522	5.9999	5,9839		
P1	1,7223	1.7206	4,1005	E.0890	6.6667	6.6272		
P2	3,2412	3,2287	10,8701	10 8455	21,0000	20,9012		
8:	0.7541	0 7539	1,0425	1,0415	1.1111	1,1091		
B:	3.2312	3.2287	10 \$701	10.155	21,0000	20,9012		
Ti I	$D_{\alpha} \times \{S\} \times$	11,8637	0.7267	0.7265	0,6867	0,6663		
$K_{\theta}:U_{\theta}$	0 1713	0.1711	0,1569	0 1556	0.1246	0.1343		
p (0)	ét	0	(I	n	0	a		
p (=:6)	0 1856	0,1855	0.2128	0,2113	0.2269	0,000		
p (=13)	0,3444	0,3442	0.3853	0.3833	0-3911	D, 3894		
p (= 2)	0, 1085	0, (05.)	0,4461	0.441	0_4408	0.4428		
p ₃ (0)	1,7223	1,7206	4, 1005	1,0891	vi 6667	6,6272		
<i>p</i> ₃ (= 6)	1.6962	1_6946	4,0149	4,0011	6,5151	6.4500		
P1 (7-3)	1,6739	1_6723	3,9457	3,9353	6, 1039	6,3692		
$p_{2}(-/2)$	1 (9649)	1,6633	3,9211	3,9105	6,3688	6,3341		

Как показывают численные расчеты, основные параметры движения, то есть давление, плотность и . т. уменьшаются с ростом нараметра a_1^* характеризу ониеся маглитное поле при фиксированном чясле Маха палающей у царной волны. Расчеты для распределения безразмерного давления p на стенке показывают, что качественно сохраняется картина, имеющая место в газовой динамике [1]. и, кроме того, снова имеет место уменьшение давления p при увеличении нараметра a_1^* . По формуле (1.39) рассчитано также для – $\frac{1}{10}$ распрецеление полного давления p_3 на стенке, причем с увеличением a_1^2 давление p_8 , уменьшается.

Из табл. 1 также видно, что основные параметры линжения *р* и *р* на стенке увеличиваются с ростом числа Маха при фиксированном значении параметра *a*:

.1 2. Aarsni

2. Нодобным же образом решена задача о лифракции сильной магинтогазодинамической ударной волны относительно клина при начальном магинтном поле, нараллельном ребру клина. Не приводя выкладок, резюмируем окончательные результаты в виде табл. 2.

S. Marca	- 13
CARDARHAC	- 2

	M 1.5	3f = 1.5	31 3	.41 3 2 0 01	50 1L	.31 ∞ 2 0.01
	^{cr} 1 ^{rr}	al. 0.01	[16] W	a1 0.01	61 U	14 0.01
Ĩ.	0,7804	0.7801	0 8201	0.5191	0,8333	0,8311
÷.	1.8621	1,8612	3,8571	3,8523	5 ,9 999	5.9840
\overline{Z}_1	0,4630	0.4627	0.7407	0.7404	0,\$333	0,8329
77.	1,8621	1,8612	3,8571	3.8523	5.9999	5.9840
22	1,7223	1.7206	4.1005	1.0891	6.6667	6.6272
5.	3,2312	3,2287	10,8701	10.8458	21,0000	20.0012
~ 2	0.7515	0.7541	1.0125	1.0424	1,1111	1 1110
32	3,2312	3.2287	10 \$701	10,8458	21,0000	20,9012
Ko ett.	0,1713	0,1712	0.1569	0,1568	0,1346	0,1345
$\tilde{p}(0)$	Û	đ	0	0	0	0
F(0 0)	0.1857	0.1858	0.2128	0,3016	0.2260	0.2292
p (a 3)	0.3445	0.3446	0,3851	0,1720	0,3941	0_3962
p (* 2)	0.4089	0.4091	0,4161	0,5180	0 44/68	0.4487
PS (0)	1.7223	1.7.205	-E.1005	4,0891	5.6567	4,0272
<i>p</i> ₁ (= 6)	1.6962	1,6946	4.0150	3,9681	6,3154	6.1753
p ₃ (= 3)	1.6739	1.6723	3,9457	3,8998	6,4049	6,3647
P3 (: 2)	1.6640	1,6633	3,9211	3,8814	6,3685	6.32.18

Из табл. 2 вилно что основные праметры движения (давление, плотность а т. л.) за наллющей в отраженной илоскима ударными волнами ум импаются с ростом нараметра при фиксированном числе Маха падающей волны. Расчеты для распределения безразмерного навления *р* и полного давления *р*₃ на стенке показывают, что с увеличением *а* значение *р* увеличивается, и то время как полное давление *р*₄ спова уменьщается.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи, обсуждение результатов и ценные советы.

Ереванский государственным университет

Поступила 11 У 1973

60.

L. A. HQUSSED

ՈՒՊԻ ՄՈՏ ՈՒԺԵՂ ՄԱԳՆԻՍԱԳԻՆԱՍԻՆԱՆԱՆ ՀԱԲՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ԳԻՏՐԱԿՑԻՎԵՐՎԵՐԵՐՅԱԼ ԽՆԳԻՐԸ

Ամփոփում

ներկա աշխատունյում գիտարկվում է անճավասարաստի հատորդա տիրույթը ունն մոտ անկանից ումեղ մադնիսացացացինամիկական հարվածային այիքի անգրացար հան խնդրում ընկնող այիքին զուցահես մազնիսական ցաշտի առկայությամբ։ Ան ավառարաստի հոսանքի տիրույթում ինդիրը Եմիրնով-Սորոյնի մնթողով ընդվա է աստումը բնորուոց անալիտիկ ֆուննցիայի համար եզրային խնդրին, Խնդիրը յուծված է Լայթիսիլի մնթոգով. Որոշված է ճնշման բաշխումը պատի վրա։ Կատարված են թվային շաշվում ներ.

THE PROBLEM ON DIFFRACTION OF A STRONG MAGNETOGASDYNAMIC SHOCK WAVE AT A WEDGE

L. D. AZATIAN

Nummary.

A region of non-uniform flow is investigated in the problem on reflection of a magnetogasdynamic strong shock wave in m angle close to π in the presence of a magnetic field parallel to incident shock.

The problem for the above region is reduced by the Smirnov – Sobolev method to a boundary problem for analytic function (pressure). The solution is obtained by the Lighthill method. Wall-pressure distribution is determined and numerical calculation is presented.

ЛИТЕРАТУРА

- Lighthill M. J. The diffraction of dist Pros. Roy. Soc. London, 201, 1950, 554-566.
- 2. Жикалко Е. Ф. Отражение ударной лолим блязкое лоржальному, о лиденном приближении Весоник ЛГУ 1970, № 13, выя J. 92—99.
- Жигалко Е. Ф. Отражение ул. по волны сторка и сторкальному, в линейном приближение сосеса метри най сторка Вестик ЛГУ, 1971. № 7. ныв. 2, 77 – 83.
- 6. Константия А. Г. в Полония Г. 1. Материаль зватоднованиях. М., Физматера, 1962.
- 8 Любарский Г. Я., Полония Р. В. Задать полине малитной силодинами Докл. АН СССР. 1 128, Nr 1, 1959.
- 6. Коган М. Н. Ударщае волим и магнихнов согото мике ПММ и XXIII, № 3, 1959.
- Гогосов В. В. Взаниолействие и отноги тредни мических вали ГИММ, т ХХУ М. 3, 1961

- 8 Голнов В. В. Вланмодействие матиатог, продинамических води с контъктным и кнуревым разрыном ПММ, т. XXV, № 2, 1961.
- ⁴¹ Jeffrey A., Tantati T. Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnet shydrodynamics. New York, London, 1964.
- Коробевников В. П. Распространение слабых магнигозвуковых воля. Магл. гидродинамика, 1967. № 2, 25-31.
- Минасти М. М. О распространения слабых возмущений в малинион газодниями ке Токл. МН АрмССР, г. IV, М. ., 1972
- 12 личны в Б. 3. Распространение ударной полны. ПМТФ, № 3, 1952.
- Мачисов М. М. Провиканые тела в полупространство сжаваемой жиджести изуавличи сал. исполозот на 11 м. АН АраССР, Мехазика, - XXV, № 3, 1972.
- 11 Колан М. Н., королейников В. П., А. Г., Тюбимов Г. А. Механика разреженного саза и матинтная гидродиновика, Механика в СССР за 10 лет. устаника воздкости и газа, т. 2, 423-454.
- 15 Франк и Милес. Дифференцияльные и интегральные уравнения математической фагонка, г.н. 12 ОПТИ Л. М., 1937.
- 16 Калихмая Л. С. Злементы маглитной тамери бомнки. М., Атом. издат. 1961.
- 17 Austence I a Differ F Kype conperendition a talmaa, a H, OHTH, M, 1934

2ЦБЧЦЧЦЪ ПО2 ТРЯПЕРЗИНЦЕР ЦЬЦЧБИТЦЗЕ ЅБЦБЧЦЧЕР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Սեխանիկա

XXVII, Nº 5, 1974

Механика

Г.С.БЕЗНРГЕНЯН

РАСЧЕТ БУРНОГО ПОТОКА В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ ОТКРЫТОМ ВОДОТОКЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОДОЛЬНЫМ УКЛОНОМ

Исследуется поведение сворукритического потока в открытом волотоке с илоским паклонным диом, слегка расширяющимся вила по течедяю. Выводятся уразнечаю харахтеристик, отделяющих в илане об ласть одномерного теченая и области лиухмерного теченая. Показывается, что при большом уклоне им и д тока онголизки к прямым, илущам от коннов входного сечения и параллельным оса симметрии водовода Параметры течения (компоненты скорости, глубина) разлатаются в асимитотическае ряды и вычисляются периме и приближению вторые члены этих рядов Находится натомодельное решение для уравнения, которое получатога и периом приближении в определиется 1.1 форма стенок, которая со пистствует этому решению. Приводится пример

Все опубликованные до настоящего времени работы по рисчету своржритических открытых и чоков (имеются в виду не г правличе: хие расчеты) посвящены иля і тризонтальным руслам или руслам с Малым уклоном диа. Па них следует отметить работы [1—7]. Их краткий обзор приведен в монография [1], в которой автор премится дать систематяческое наложение теория двуумерных (плановых) открытых потоков при бурных режимах, а также снованных на 3сй методов расчета водоводов некоторых типов. В частности, автор, используя метод характеристик и газогидравлическую аналогию, решает полуобратную надачу для расширяющег ся потока с учетом тречия в канале с не большим цаклонным (0.1—115) влюским цвом при бурном режимс.

1. Рассмотрам сверхкритаческие дважение нескимаемой жилкостт в открытом водоводе с плоскам наклонным дном и расходящимыем боковыми стенками. Пусть уклон дна волотока произвольный, волоток короткии, а боковые степки в алане повернуты за отчосительно малы углы МI (перех по ста концетор наст к бы тротока). В этом случае на свободной поверхности бурного потока появляются слабые визмущения.

Предположим, изо до частко со поларие безолученое, а от 1 кость идеальная (при бурных режимах силы янерции преобладают пал силами треняя и для коротких участкого ами можно пренебречь [2, 7, 8])

Для простоты расчета допустим, что скорости и глубниы во зхолном сечения водотока постоянны, причем скорости направлены нарат лельно сто оси симметрии. Как значения этих величин, так и теометрические параметры волотока (ширина входного сечения, уклон, длина) являются заданныма величинами.

Расположим начало координат во входном сечении волотока, эсь Ох совместим с осью его симметрии, ось Ог направим периендикулярно с его циу, а эсь Оу –перпенликулярно к плоскосты хОг (фиг. 1).



Псходные уравления двухмерного движения в случае произвольного про озленого уклови див полотока заимствуем из [7]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \cos y + g \sin y \tag{3.1}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cos y \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial (hw)}{\partial x} = \frac{\partial (hw)}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь у- угол наклова цил к горизонту, h—глубния воды, отечнтываемая по пормали в с ляу, и, с – компоненты екорости. У соответственно во осям Ох и Оу, в g – ускорение силы тяжести.

После несложных преобразований, используя при этом условие отс готямя вихрей, легио доказать, что система дифференциальных уравцений (11) (13) эквивалентия системе уравнений

$$\left(1 - \frac{u^2}{c_s^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2uv}{c_s^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \left(1 - \frac{v^2}{c_s^2}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{u}{h}\operatorname{tg} v \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{u^2 \cdots v^2}{2\pi} = x \sin y + h \cos y = \frac{4\pi}{2\pi} + k_0 \cos y$$
(1.6)

гле — значения скорости и глубниы в начальном сечении, а $\mathcal{L} = gh\cos \gamma - скорость распространения слабых возмущении в на$ клонных каналах.

Во входном сечении водотока ($x = 0, -b < y < b_0$) согласно в становке задачи имеем

$$v(0, y) = u_0 \quad \text{const}, \quad v(0, y) = 0$$
 (1.7)

Так как эчертания боковых степок являются лишиями тока, то вдоль них выполняются условия

$$v(x, y_n) = u(x, y_n) \operatorname{tg} b$$
 (1.8)

где II - гол между касательной к степке и осью Ох. Отметим, что по условщо II - малая величита

Учатывая словие счиметричности течения, получаем

×.

$$v(x, 0) = 0 \tag{1.9}$$

Таким поразом, решетте поставлениой задачи свелось к изхождению решения смещанной задачи для системы цифференципльных уразнений (1.4), (1.5) в частных проциодных ври начальных условиях (1.7) в граничных условиях (1.8), (1.9), которая являетия корректной, так как система уравнечий (1.4) и (1.5) пра сверхкрятическом режиме течения будет сиперболаческого типа.

2. Если сверхкритический поток в горизонтальном канале возмущоется только со стороны стенок, благодаря чему нутем соответствующего нодбора их очертания можно добиться гого, чтобы одно семейство характеристик на некотором его участке было прямол шейным, то в водоводах с продольным уклоном этого иельзя делать, так как в последнем случае поток возмущается как со стороны стенок, так и со стороны дия. Следовательно, в последнем случае характеристики обоих семейств будут криволшейными.

Так как рассматризаем непрерывное сверхкритическое движение, то возмущения, порожденные стенками будут распространяться только чо характеристикам и не будут сроникать во всю область течения.

Так что характеристики, исхолящие из точек (0, b_0) и (0, b_0), ухоля вназ по течению, будут отделять в плане область одномерного теченая от областа двухмерного течения. Так как вплоть до этих характе ристик движение одномерное, то их уравнение можно вывести на основании теории одномерного течения.

Веледствие симметричности движения относятельно осн Ох в даль нейшем будем ограничиваться рассмотрением той части илана водовода, которая расположена выше осн Ох.

Уранцение характеристики, исходящей из гочки (0, b₃), можно гаписать в форме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + F_{f_{3}(0)} - 1}$$
(2.1)

гле Гг_{або} – <u>враго у – число Фруда одномерного течения.</u>

5 Извес ия MI Армянской ССР, Механика, № 5

Неподьзуя интеграл Бернулли (16), уравнение пераэрывности одномерного двлженая и заменяя в полученном из них уравнения скорость черег явсло Фруда, находим, что

$$Fr_{sym} = 2Fr_{s0}^{-1} \left(1 - \frac{Fr_{sym}}{2} + \frac{x}{6} \lg z\right) Fr_{sym} \pm 2 = 0$$
 (2.2)

Полученное кубическое уравшение (2.2) относительно Рт., имеет три действительных кория, ак как его дискриминант (D) меньше пуля. В самом деле, если ввести обозначения

$$q = 1, \qquad p = -\frac{2}{3} \operatorname{Fr}_{0}^{-1} \left(1 + \frac{\operatorname{Fr}_{0}}{2} - \frac{\alpha}{h_{0}} \operatorname{tg} \alpha \right)$$
 (2.3)

τu

$$D = q^2 - p^3 = 1 - \frac{8}{27} \operatorname{Fr}_0^{-1} \left(1 + \frac{\operatorname{Fr}_0}{2} - \frac{\kappa}{k_0} \operatorname{Ig} s \right) < \alpha$$

(Гг_л значение Fr при x = 0, то есть в начальном сечении), так как выражение Гг $\tau^{-t}\left(1 + \frac{Fr}{2} + \frac{1}{n_0} tgv\right)$ самое меньшее значение принимает при x = 0, Гг_л = 1, равное 27.8. Нас интересует тот корень, который больше слиницы. Этот корень можно представить в следуюшей форме [12]

$$Fr_{A0} = 8|p|^{4} \left[\cos \frac{\pi - \arccos|p|}{3}\right]$$
 (2.4)

Подставляя и (2.1) вместо 1-г, его значение из (2.1) и интегрируя полученное уравнение, находим, что

$$\frac{dt}{\left| \left| y - b_{n} - \int \frac{dt}{\left| \left| s \right| p \right|^{2} \left| \cos \frac{\pi - \arccos \left| p \right|^{2}}{3} \right|^{2} - 1} \right|$$
(2.5)

Переходя в алгетвале (2.5) от переменнов (к р по формуле (2.3), излучаем

$$y = b - \frac{3}{2} k \left[r - \frac{\log \sqrt{1 - \frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{d|p|}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{d|p|}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 0.61$$

$$(p_0 - p|_{0} - 1)$$

Совершая замону переменной

$$\eta = 3 \left[\cos \frac{\pi - \arccos \left[p \right]^{-1}}{3} \right]^{-1} - 4$$

в выражении (2.6), находим

$$y = b_0 + \frac{1}{6} h_0 \operatorname{Fr}_{v0} \operatorname{ctg} v \int r^{-1} (8 - r)^{-s} dr_s \qquad (r_0 = r_0 f_{p, -p_0}) \quad (2.7)$$

Нзвестно [11] что полученный антеграл в формуле (2.7) через элементарные функции не выражается. Но в рассматриваемом случае течение бурное, то есть Fr₁₀₀ > 1 и в полнитегральном выражении (2.6) елинацеи по сравненню с числом Фруда можно прецебречь. После отбрасывания в поднитегральном зыражения (2.6) единицы и проведения тив же замены веременной получаем

$$y = h_0 - \frac{1}{21 \cdot 2} \cdot h_0 \operatorname{Fr}_{30}^{\prime} \operatorname{ctg} * \tau_0^{-\theta_0} \left\{ 8 \left[\left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{\prime} - 1 \right] + \frac{1}{5} \cdot \tau_0 \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{\prime \prime} - 1 \right] \right\}$$
(2.8)

Пра больших уклонах диа водовода уравнение (2.8) можно сще упростить непосредственным разложением его правой части в ряд по степеням

Разлагая выражение *р* и соз <u>— arccos р </u> в ряды по стеленям получаем, что

$$0 = -\frac{2}{3} e^{-\epsilon_0} \operatorname{Fr}_0^{-\epsilon_0} (m + \lambda + \cdots)$$
 (2.9)

$$\cos \frac{z - \arccos |p|^{-1}}{4} = \frac{1.3}{2} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \delta Fr^*_{1}(m + 5)^{-1} + \cdots \right]$$
(2.10)

где

$$\operatorname{Fr}_0 = \frac{1}{gh_0} \cdot \qquad m = \frac{1}{2} \operatorname{Fr}_0 + \frac{x}{h_0}$$

На основания формул (2.8), (2.9) и (2.10) находим, что-

$$y = b_0 - 2h_0 \operatorname{Fr}_0^{\gamma_0} \left[\left(1 + \frac{2x}{h_0 \operatorname{Fr}_0} \right)^{\gamma_0} - 1 \right] \delta^{\gamma_0} - \left[h_0 \operatorname{Fr}_0^{\gamma_0} \left[\left(1 + \frac{2x}{h_0 \operatorname{Fr}_0} \right)^{\gamma_0} - 1 \right] - \frac{2h_0 \operatorname{Fr}_0^{\gamma_0}}{5} \left[\left(1 + \frac{2x}{h_0 \operatorname{Fr}_0} \right)^{-\gamma_0} - 1 \right] - \frac{2x}{\operatorname{Fr}_0^{\gamma_0} \left(1 + \frac{2x}{h_0 \operatorname{Fr}_0} \right)} \right] \delta^{\gamma_0} + \cdots$$
(2.11)

Таким образом, в водогоках с большим продольным уклоном характеристика, исходящая из точки (0, b_0), располагается весьма близко к прямон — Следовательно, в этом случае характеринтики, принадлежащие к тому же семейству, что и характеристика (2.8), достаточно далеко идут иниз по течению.

В качестве примера рассмотрим водоток со следующами теометраческами и гидравлическими данными

327 $u^{s} core$, v = 53, $2b_{0} = 35$ M, l = 21 M, 2B = 56 M

гле Q секуплици рясхол, 2В ширина подволящего канала. (Приве teны ланны- водосликтов платины на реке Вороган в Армении). На осповалан известных гаправлических формул [8] нахолям, что

$$h_0 = 0.99$$
 u, $u_0 = 5.65$ u cek, $Fr_{s0} = 3.25$

На фиг. 2 пряволятся график характеристики (2.8), построенным по пряведенным данным.



 Гак как поток в области двухмерного течения по условню задачи слабо возмущается со стороны стенск, то в этой области нараметры и, с. и тече ця можно раздагать в асчинитотические ряды.

 $u(x, y, z) = u_{e_{1}}(x) - (z, y)$ (3.1)

$$v(x, y, z) = (x, y) + \cdots$$
 (3.2)

$$h(x, y, z) = h_{00}(x) - zh_{00}(x, y) - \cdots$$
 (3.3)

гле = $0\left(\frac{dy_{i}}{dy_{i}}\right)$ — малый нараметр в изучаемой задаче.

При произвольном безотрывном расширении эти разложения сара-

ведливы в окрестивети характеристика $y = b_0$ $\int \frac{dx}{1-1}$. Пер-

вые члены (нулевое приближение) в написанных рядах соответствуют одномерному стационарному движению (случан прямоугольного водовода з = 0).

Подставляя ряды (3.1), (3.2), (3.3) в уравнения (1.4), (1.5), (1.6) и приравниная в обоих частях получаемых равенств коэффициенты при однияковых стененях к, получаем систему линейных лифференциальных уравнений в частных производных для определения членов разложения. В частности, для определения величин и_(D), опр. и h_(D) (первого приближения) получаем

$$(gh_{0} \cos v - u^{2}) \frac{\partial u_{0}}{\partial x} - gh_{0} \cos v \frac{\partial v_{0}}{\partial y} - gh_{0} \sin v + (gh_{0}) \cos v - 2u_{0} u_{0} + 0$$
(3.4)

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial x_{(1)}}{\partial y} = 0 \tag{3.51}$$

$$\frac{u_{\mu\nu}w_{\mu\nu}}{|v|\cos 2} = k_{\mu\nu} = 0$$
 (3.6)

Уравневня пулевого приближения не выпясили, так как получают я известные уравнения здломерного станконарного движения и их первый интеграл.

Полетавляя в лифференциальное уравнение (3.4) вместо $\frac{du_{0,1}}{dx}$ своє паражение з нулевого приближення, исключая затем величних $h_{0,1}$ с помощью (3.6) и замения везде $\frac{du_{0,1}}{gh_{0,1}\cos y}$ числом брудь, а $u_{-1} = h\left(\frac{F\tau}{F\tau_{-}(y)}\right)$, долучаем

$$\frac{\partial u_{c11}}{\partial x} = \frac{1}{|Fr_{v(0)} - 1|} \frac{\partial v_{c1}}{\partial y} = \frac{2|Fr_{v(0)} - 1|}{(Fr_{v(0)} - 1)^2} \frac{ig |v|}{h_0} \left(\frac{|Fr_{v(0)}|}{|Fr_{v(0)}|}\right)^{\prime} |u_{c2} = 0 \quad (....)$$

Пря малельком уклоне (в лервом праближении) уравнение 13.7) изчнимает янд

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial x} - \frac{1}{Fr_{,0} - 1} \frac{\partial v_{(0)}}{\partial y} = 0$$
(3.8)

решение которого описывленся склой сорзе Цаламбера. Цз-за не достатка места решения последующих приближений не приволятся.

Подставляя разложения (3.1), (3.2) в начальные условия (1.7) и в гранциные условия (1.8), (1.9) и приравнивая в обоих частях полученных равенств коэффициенты при одинаховых стененях и, получаем те начальные

 $u_{(1)}(0, y) = 0, \quad v_{(1)}(0, y) = 0, \quad (0 \le y - b_0)$ (3.9)

и граничные устовия

$$(0,10a) = a_{(0)} \frac{dy}{dx}$$
 (3.10a)

Г. С. Бемргенян

$$v_{\rm R1}(x, 0) = 0$$
 (0 $x \le k$) (3.106)

к торым удовлетворяют функции и.п. voi.

Из уравнения (3.5) следует, что вместо функции $u_{\rm O}$ и $v_{\rm D}$ можно в ести в рассмотрение функцию -, частиме производные которой по x и у соответствению равны $u_{\rm D}$ и $v_{\rm O}$. После замены $u_{\rm C}$ и $v_{\rm O}$, соо ствению через $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ дифференциальное уравневие (3.) принимает вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{\operatorname{Fr}_{(0)} + 1} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{2\operatorname{Fr}_{(0)} + 1}{(\operatorname{Fr}_{(0)} - 1)^2} \frac{\operatorname{Ig} y}{h_0} \left(\frac{\operatorname{Fr}_{(0)}}{\operatorname{Fr}_{(0)}}\right) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

Так как в рассматриваемом случае поток бурный, то на всей протяжевности водотока число Фруда будет намного больше единицы. Слуговательно.

$$\frac{1}{||\mathbf{r}|| = 1} = |\mathbf{F}_{\mathbf{r}}| + 0 (|\mathbf{F}_{\mathbf{r}}|| = \frac{2||\mathbf{r}||}{(||\mathbf{r}_{\mathbf{r}}||_{\mathbf{r}} = 1)^2} = 2||\mathbf{F}_{\mathbf{r}}|| = 0 (||\mathbf{r}||_{\mathbf{r}}) (3.12)$$

На основании ф рмул (2.3), (2.1) и (2.10) можем написать, что

$$[r_{1} = 3^{-1} \rho]^{-r} [1 \oplus 0 (\mathrm{Fr}_{1}^{-1})], \quad [\rho] = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \mathrm{Fr}_{0} \left(h_{0} \operatorname{ctg} s\right)^{-r};$$

гло $z = x - h_a$ etg. $\left(1 - \frac{1}{2} \ln z\right)$, $u_a h_a - y$ лельный расход в начальном сечении.

Значит.

$$\frac{1}{|\operatorname{Fr}_{\mathrm{ob}}| - 1} \sim \frac{1}{2 \sqrt{2g} \sin x} = \frac{2 \operatorname{Fr}_{\mathrm{ob}} - 1}{(\operatorname{Fr}_{\mathrm{ob}} - 1)^2} \operatorname{Fr}_{\mathrm{ob}} = \frac{1}{2} \operatorname{Fr}_{\mathrm{ob}} h_{\mathrm{s}} \operatorname{etg} x \varepsilon^{-1}$$
(3.13)

На ставляя выражения $\frac{2\Gamma_{ca}}{\Gamma_{r,(0)}-1}$, $\frac{2\Gamma_{ca}}{(\Gamma_{r,-1})^2}$ Fr₄₀₁ из (3.13) в дирференциальное уравнение (3.11), досле отбрасывания членов более высокого порядка и замены переменной

$$\eta = \left(\frac{2}{q_0} + 2g \sin y \operatorname{tg} y\right)^* y$$

получаем

$$\frac{\partial_{\tau\phi}}{\partial z^*} = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{z} \frac{d\varphi}{dz} = 0$$
(3.14)

Производя замену переменной 1 1 г в дифференциальном уравценян (3.14), получаем

[•] Так ках решение тифференциального уравмения: (3.11) ненисравно акансит о его конфициентов, то око будет постаточи олизко в решению тифференциальти ко уравнения (3.14).

е бурвог потока в расштряющемся открытом водотоке

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \omega^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \omega^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \omega^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \omega^2} = 0$$
(3.15)

Легко проверять, что ножле перехода от переменных ζ, η к характеритическам переменным α β по формулам

 $\alpha = 1$, $\beta = 70$

уравнение (3.15) сволится к уравнению Царбу со значением m = - 1

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial z} = 0$$
(3.16)

(Для удобства дальнойшей записи з заменьли через с. 1

Пачальные и граничные условия для функцив - соответственно записываются в следующей форме:

$$\left(\mathbf{x}_{0} = 4 \left[h_{0} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{Fr}_{0} \right) \operatorname{ctg} \mathbf{v} \right]^{\gamma_{0}}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_{0} = \left(\frac{2}{q_{0}} \sqrt{2g \sin \mathbf{v}} \operatorname{tg} \mathbf{v} \right)^{\gamma_{0}} b_{0}$$

$$\frac{\partial \varphi_{-\gamma_{0}}(\mathbf{x}, \beta_{\varepsilon_{1}})}{\partial \beta} = \frac{A}{\mathbf{x}} \frac{d\beta_{\varepsilon_{1}}^{\ast}}{d\sigma}, \quad \frac{\partial \varphi_{-\gamma_{0}}(\mathbf{x}, 0)}{\partial \beta} = 0 \quad (\varphi(\mathbf{x}, \beta) = \varphi(\mathbf{x}, -\beta))$$

$$(3.18)$$

$$\left(A = 2q_0 \operatorname{ctg} \mathsf{v}, \quad \mathsf{z}_0 \leq \mathsf{z} \quad \mathsf{z}_L = \left[L + h_0 \left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{Fr}_{\mathsf{w}}\right) \operatorname{ctg} \mathsf{v}\right]^{*}\right)$$

Покажем, что характерисныха уравнения (3.16), исходящая из точки (ао, βо), при переходе в физическую илоскость совнадает с характерастикой (2.11). Используя формулы перехода от характериснических координат (а, β) к координатам физической илоскости (х и), уравнелие рассматриваемой характеристики можно записать в форме

$$\left[\frac{2}{u_0 h_0} 1 \frac{2g\cos^2 \cos^2}{h_0 h_0} \right]^{4} \left[\left(1 - \frac{h_0 \log^2 \delta}{x - \frac{1}{2} \frac{h_0 Fr_0}{\cos^2 \delta}}\right)^{4} - \left(1 - \frac{2}{Fr_0} \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2 \delta}\right)^{4} \right]$$

• Из наражения $u_{(0)} = u_a \left(\frac{1}{1}\right)^{-1}$ с номощью формул $\operatorname{Fr}_{r(0)} \simeq 3^{-1} |p| \simeq n$ $|p| = \frac{2}{3} (\operatorname{Pr}_{r0})^{-1} \cdot \frac{\operatorname{1g} \nu}{u_a}$: детко получить, что $u_{(0)} \simeq \frac{1}{1} \frac{2 p \sin \nu}{p_1} z^3$.
та делит в полученном раненстве обе части на величину $\left(\frac{2}{a \cdot h_0} + \frac{2}{2g \cos 4} \cot g \right)$ и разлагая выраженноя sin 4, sec 5, на

$$1 = \frac{h_0 \lg \delta}{x - \frac{1}{2} \frac{h_0 \mathrm{Fr}_0}{\cos \delta}} , \quad \left(1 + \frac{2}{\mathrm{Fr}_0} \sin \delta\right)^{2} \quad \mathrm{a} \quad \mathrm{cremenuise} \quad \mathrm{pagas} \quad \mathrm{no} \quad \delta$$

п с с сториях вызнедения получаем

$$y = b_0 - 2h_0 \operatorname{Fr}_0^{**} \left[\left(1 - \frac{2x}{h_0 \operatorname{Fr}_0} \right)^2 - 1 \right] \delta^{**} + O(\delta^{**})$$
 (3.19)

Общее решение уравнетая (3.15) завлеывается в форме [10]

$$\approx \int_{0}^{1} \left[f(x - 2 - 2\pi t) + \Psi(x - z - 2\pi t) \right] t^{-1} (1 - t)^{-1} dt \qquad (3.20)$$

Цела привести из точка B_1 в илоскоств $\{a, j\}$ характериссак $B_1, I_2: a+\beta = a_1 + \beta_2$ (фи), $\beta_1 = \beta_2$ поднолаети $I_1B_2I_2$, которую обозна и им через $\{D_1\}$, от тасно то ременениетвенности илиенных лифферени илльчых уравнений иле общиеского типа [9], решение уравнения 1.16) пра пачаланых условиях (347) в условия на оси (3.18) раз сущо, то сеть

$$\epsilon_{-i_1(0_1)}(x, \beta) = 0$$
 (3.21)



В полобласта (D_2) , ограниченной характеристиками B_1A_2 , A_2B_2 частьки B_1B_2 стенки (точка B_2 является точкой нересечения характерасі ки $1, \beta = \alpha_0 + \beta_0$ по стенкой), нахожление функции J и W сво зится к решению интегрально-функциональных уравнений, что аналитически невозможно осуществлять

Если в формулс (3.12) велютну $2Fr_{10}^{-1}$ один раз заменим через $\frac{3}{2}$ Р r_{c} (в рассматриваемом случае оба этих значения близки), то соответственно получим волиовое уранение и уравнение Дарбу со значением m = -1

Петег бурного нотока в деници мнечен открытом водотоке

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial^2 z_{-1}}{\partial q^3} = \frac{\partial^2 \overline{z}_{-1}}{\partial \overline{z}^2} \pm \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{z}_{-1}}{\partial x} = 0$$
 (3.23)

условиям, что тфункция - ... Общее решение полученных уравнений

$$\varphi_{c} = F(\sigma - \beta) - G(a - \beta)$$
 (3.24)

$$z_{-1} = \frac{1}{\alpha} \left[V \left(z + \beta \right) + \Omega \left(z - \beta \right) \right]$$
(3.25)

В подобласти (D₁) согласно вышесказанному

$$\Psi_{-(0)} = 0, \quad \Psi_{-0,0,1} = 0$$
 (3.26)

В подобласти (D_2), яспользуя решения (3.24), (3.25) п (3.26), может ваписать

$$G_{(D_0)} = \text{const} = F(x_0 - y_0), \qquad - = \text{const} = -I(x_0 + y_0)$$

Учитывая последные свотношения и гравичное условие (3.1) на степке, найдем, что

$$\mathfrak{s}_{\alpha_i D_{\mathfrak{g}}} = Ag(\mathfrak{x} + \beta), \qquad \mathfrak{s}_{-\mathfrak{g}(D_{\mathfrak{g}})} = \frac{A}{\mathfrak{x}} I(\mathfrak{x} - \beta)$$
 (3.27)

где

$$z \zeta(\mathfrak{g}) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{m} \left. \frac{d\beta_{\mathrm{cr}}}{dx} \right|_{\mathfrak{g}=\mathfrak{g}} d\mathfrak{g}, \qquad z I(\mathfrak{g}) = \int_{0}^{\infty} \frac{d\beta_{\mathrm{cr}}}{dx} \Big|_{\mathfrak{g}=\mathfrak{g}} d\mathfrak{g}$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{\mathrm{cr}}^{-1}$$
$$(\mathrm{Hp}) = \mathfrak{g}_{\mathrm{cr}} - \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathrm{cr}} - \mathfrak{g}_{$$

 $4 \text{ HpH } z_0 - \beta_0 = z + \beta_0 + \beta_0 + \beta_{z_2}, \quad z - z_0 - \theta_0 \le 3 - \beta_B)$

OTMETHN, ATO $\frac{\partial (p_1, p_2)}{\partial (p_2)} > 0, \quad \frac{\partial (p_1, p_2)}{\partial (p_2)} > 0.$

В нолобласти (D_3) , о раниченной характеристиками — п B_2A_2 и частью оси A_2A_3 , используя общие решения (3.24), (3.25) и полученные в волобласти (D_2) решелия (3.27), изходим, что вдоль характеристики A_2B_2 $\alpha = \beta = \alpha_0 + \beta_0$ имеют место соотношения

$$F(2x - z_{0} - \beta_{0}) + (\alpha_{0} - \beta_{0}) = (z - z_{0} - \beta_{0})$$
$$= [(2x - z_{0} - \beta_{0}) - (\alpha_{0} - \beta_{0})] = (z - z_{0} - \beta_{0})$$

отсюда получаем.

7.5

Г. С. Безпртению

$$F_{(D_0)}(z+\beta) = z_{0(D_0)} \left(\frac{z+\beta+z_0+\beta_s}{2} \cdot \frac{z-\beta+z_0+\beta_u}{2} - z_0 - \beta_0 \right) - G(z_0 - \beta_0)$$

$$Z_{(D_0)}(z+\beta) = \frac{z+\beta+z_0+\beta_0}{2} z_{-1(D_0)} \times$$
(3.28)

$$\left(\frac{\alpha + \beta + z_{0} + \beta_{1}}{2} + \frac{\alpha - \beta + z_{0} + \beta_{1}}{2} - z_{0} - \beta_{1}\right) = G(z_{0} + \beta_{1}) \quad (3.29)$$

0

Пспользуя общие решения (3.24), (3.25) и условие на оси, получаем, чта

 $G_{0,0}(\tau - 3) = F(\tau - 3) + c_s, \qquad \Omega_{0,0}(\tau - 3) = Z_{0,1}(\tau - 3) - c_s \quad (3.39)$ The C1. Cy -HOSTORIHIMS.

На состлошения (3.27), (3.28), (3.29) и 15.301 -кончательно находим. UT0

$$\tau_{\Psi(D_1)} = \Delta \left[e \left(z + \beta \right) + e \left(z - \beta \right) \right] \tag{3.31}$$

2-1000

$$\bar{\tau}_{(1)}(\mu_0) = \frac{A}{\pi} \left[I \left(\pi - \beta \right) + I \left(\pi - \beta \right) \right]$$
(3.32)

$$(\pi\rho_{11} - z_{0} + \beta_{0} < \alpha < \beta_{0} + \beta_{0} = 0 \quad \beta = \alpha + \beta_{0} + \beta_{0} = 0$$

a при
$$\tau_0 = \beta_u = 3_{R_1}$$
, $\tau = 3_{R_2}$, $0 = 3$, $\tau_g = 3_{L_2} = 21$

В осгальных подобластях решения находятся точно таз, как в пол об- $\text{TRETRY} (D_2) = (D_3).$

Из цепрерывной заваенмость реше ий гон тех уравнений, которым они удовлетворяют, следует, что значение захолится между вначениями уча уч. Но так как во всей рассматриваемон области 22 и 25 воложительны, то 25 также будет ноложительной Следовательцо, можно утверждать, что в открыт и расширяющемся водотоке с произвольным продольным уклоном в любом его поперечном сечении величника скорости илеального потока вол/1стенок больше, чем внутри канала. слубния — наоборот. При буром режиме для коротких участков волотока аналогичное утверж leade верно и иля реальных жилкостей. *

Покажем, что решение 🧛 🔔 во всен рассматринаемой области удовлетворяет черавенству

С этой целью рассмотрим смешанную задачу для уравнения

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x^2} + b_1(x) \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$
(3.34)

при следующых начальных

$$w_0(0, \beta) = 0, \qquad \frac{\partial w_0(0, \beta)}{\partial x} = 0 \qquad (3.35)$$

и граничных условиях -

$$\frac{\partial \overline{w}_0(a, 0)}{\partial \underline{\theta}} = I(a), \qquad \frac{\partial \overline{w}_0(a, 0)}{\partial \underline{\theta}} = 0 \qquad (a_0 \leq a \leq a_1) \qquad (3.66)$$

Кроме уравнечия (3.34) рассмотрим два других уравнения

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial z} = k_1(z) \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \qquad (2.3^*)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial a^4} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \beta^2} = k_1(a) \frac{\partial w_2}{\partial a} = 0$$
(3.38)

Функция 224 24 удовлетворяют тем же начальным в граничным услезням, что в функция 220.

Творема, Если все функции $k_0, k_1, k_2 u = \frac{\partial w_0}{\partial 2}, \frac{\partial v_1}{\partial 2}, \frac{\partial w_2}{\partial 2}, s$ рассматриваемой областа положительны и имеет место неравенство

$$k_1 + k_2 \tag{3.39}$$

 m_{O}

$$w_0 \le w_1 - w_0 \tag{3.40}$$

На уравлений (3.34), (3.37) и теравенства (3.39) следует, что

$$\frac{\partial^2 (w_1 - w_0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (w_1 - w_0)}{\partial y^2} + k_t \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} < 0 \quad (3.41)$$

Ралемотрам веномогательное выражение

$$= \frac{\partial \left(w_1 - w_n\right)}{\partial a} \left[\frac{\partial^2 \left(w_1 - w_n\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial \left(w_1 - w_n\right)}{\partial x^2} - k_n \frac{\partial \left(w_1 - w_n\right)}{\partial x} \right] (3.42)$$

Натеграруя выражение (3.42) по областа (D) (см. фиг. 3) и примезяя формулу Грина, получаем, что

$$\begin{split} \int_{(D)}^{L} 2 \frac{\partial \left(w_{1} - w_{0}\right)}{\partial x} \left| \frac{\partial^{2} \left(w_{1} - w_{0}\right)}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{2} \left(w_{1} - w_{0}\right)}{\partial y^{2}} + k_{0} \frac{\partial \left(w_{1} - w_{0}\right)}{\partial x} \right| dx dy = \\ = \int_{U}^{U} \left| \left| \frac{\partial \left(w_{1} - w_{0}\right)}{\partial x} \right|^{2} - \left[\frac{\partial \left(w_{1} - w_{0}\right)}{\partial y^{2}} \right|^{2} \right] dy - z \int_{U}^{u_{L}} c(a) \left| \frac{\partial \left(w_{1} - w_{0}\right)}{\partial x} \right|^{2} dx dy + \\ = \int_{U}^{U} k_{0} \left[\frac{\partial \left(w_{1} - w_{0}\right)}{\partial x} \right]^{2} dx dy \end{split}$$

Следовательно, $\frac{\sigma(w_1 - w_2)}{\sigma_x} = 0$, по так как $w_1 - w_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(w_1 - w_2)}{\sigma_x} dx$.

то таким же путем доказывается, ч о во всей рас-

7.5

I. C. Bessipremm

сматриваемой области w. Ф. Из доказанной теоремы следует справедливость неравсиства (3.33)

Таким образом, залавая подхолящую, гидравлически рациональную форму боковых стенок (то, это делается ври решени прямых задач), при этом так, чтобы они удовлетворяла условиям рассматриваемой задачи, получия соответствующее распределение скоростей т глубии, Для ясности рассмотрим один пример.

По постановке зазвачи пляжаю иметь место следующие условия:

a)
$$y_{c1}(0) = b_{0}, \qquad \frac{dy_{c1}(0)}{dx} = 0,$$

b) $\frac{dy_{c1}}{dx} > 0, \qquad \frac{d^{2}y_{c1}}{dx^{2}} > 0, \qquad \frac{dy_{c1}}{dx} = 0$ (2)

где n = n (Franch) и в кажд у конкретном случає обределяется при помощи подбора

Зада ним очертание стенки в форме.

$$y_{a1} = b_a + 4ax^* \tag{3.43}$$

тас à положительное ранногальное число, нажащее и интернале (1.2), а>0--произвольная размерная постоящимя

Очевидно, что назисанное уравневие словлетворяет всем условаях, иходящим в а). Отметим, что если воложи: — - = — и

 $n = \frac{1}{81 + 2b_0}$ • то получим эмпиристское уравнение, привеленное в [6],

которое описывает траничную ланню тост своросно растекающегост бурного потока в горизонтальном русле. Вилимо, унавиение, приведенное в [6], можно при расширенаях использовать в качестве черания стенки при любом уклун для водото ссло в тем числе Фруда заменись числом Фруда для изклопаных анал

👝 В области (D₂) из формул (3.27) получаех:

$$\mathfrak{su}_{(1)}^{\mathfrak{g}} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = \frac{A}{w} \left[\frac{d\mathfrak{g}}{dx} \right]_{\mathfrak{z}} = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x} \qquad \mathfrak{su}_{(1)}^{\mathfrak{g}} \coloneqq \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial y} = \frac{A}{v} \left[\frac{d\mathfrak{g}}{dx} \right]_{\mathfrak{z}} = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial y} \quad (3.44)$$

$$u_{i1}^{(1)} = \frac{\partial z_{r-i1}}{\partial x} = -\frac{A}{r} \frac{dx}{dx} \int \frac{dz_{r-1}}{dx} \left[-\frac{d}{2} \frac{dx}{dx} - \frac{A}{2} \frac{dx}{dx} - \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

(3.45)

$$\frac{1}{2} = \frac{A}{2} \frac{d^2}{d^2} = \frac{\partial y}{\partial y}$$

Переходя в уравнении (3.43) в координатам (и. б), получаем, что

$$\vec{\nu}_{i} = \frac{-1}{4} \frac{(\tau^{*} - \tau)}{4} + \frac{-1}{6} \frac{1}{6} \frac{1$$

Пмея в ввду, что $a_{1} = r + 3$, (z) в $w(r_{0})$ является обратной функцией от a_{1} , а также вспользуя ураввение (3.46), находим, что

$$\nu = \mu - \beta_0 - m \left[\frac{(\mu - \beta_0)^2 - \alpha_1^3}{4^3} \right]^2$$
 (3.47)

Нодставляя в (3.44) и (3.45) вместо $\frac{dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{dx}{dx}$ их вы-

$$u_{(1)}^{(0)} = \frac{A\bar{a}k\omega^2}{4^{4k}} \left(\omega^4 - z_0^4\right)^{k-1} \left(x - \frac{\overline{x}_0^4}{4^4}\right)^{-1}, \quad v_{(1)}^{(0)} = \frac{A\bar{a}k}{4^{4k}} \frac{\overline{\beta}_0}{\overline{b}_0} \omega^2 \left(\omega^4 - z_0^4\right)^{k-1}$$
(7.48)

$$u_{(1)}^{(-1)} = \frac{A}{4^{4k}} \overline{a} \left(x - \frac{z_0^4}{4^4} \right)^{-1} \left(\omega^4 - z_0^4 \right)^{k-1} \left(-\frac{\omega^4 - z_0^4}{2} + k \omega^4 \right)$$

$$v_{(1)}^{(-1)} = \frac{A \overline{a} k}{4^{4k}} \frac{\beta_0}{\beta_0} \frac{\omega^3}{2} \left(\omega^4 - z_0^4 \right)^{k-1}$$
(3.49)

Из формул (3.31), (3.32), (3.48) я (3.49) яено, как булут записываться решевия в остальных подобластях.

П Частное решение уравнения (3.16) нщем в автомодельной форме

$$z_{-1} = x^{\alpha} f(x), \qquad \lambda = \frac{x}{(\beta) - z_{0} - \beta_{0}}$$
 (4.1)

а находим ду форму стенок, которая соответствует этому решению.

Из формул (4.1) находим, что

$$\frac{\partial \varphi_{-}}{\partial x} = x^{n+1} (nf + if'), \qquad \frac{\partial^2 z_{-1}}{\partial x^2} = x^{n+2} [(n-1)nf + 2nif' - i^2f']$$

$$\frac{\partial^2 z_{-n}}{\partial t^2} = x^{n-2} i^3 (2f' + if'')$$
(4.2)

Подставляя выражения вроизводных из (4.2) в уравнение (3.16), получаем для определения / обыкновенное дифференциальное уравнение вторию порядка

$$(1 - i^{*})f' = (2n - 1 - 2\kappa)iJ' - h^{2}f = 0$$
(4.3)

Выберем степень изгомодельности так. чтобы $2n \mid -1 = 2$, отсюда n = 1. Подставляя в уравнение (4.3) значение *n* и производя замену переменных $t = \lambda^2$, получаем

$$(1-t) t^2 f'' + \frac{3}{2} (t-1) t f' + \frac{1}{46} f = 0$$
(4.4)

I С Безиргенян

Исли заменить функцию / через г с помощью формулы

$$f = t^{-1} z(t)$$
 (4.5)

то дифференциальное уравнение (4.4) сведется в сипертеометрическому уразнению [13]

$$(t-1) tz^{n+1} (t-1) z^{*} - \frac{1}{16} z = 0$$
(4.6)

Совершая в уравнении (4.5) замену переменной

$$s = 1 - t$$
 (1.7)

получаем

$$s(1-s)z'' = sz' - \frac{1}{16}z^{-1}$$
 (4.8)

Нас интересует то решение уразнения (1.8), которое пря $\lambda = 1$ (s = 0) (d рацается в пуль. Это решение занисывается в форме [11]

$$z = csF\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, s\right), \qquad (c = const)$$

$$(4.9)$$

Сопоставляя формулы (4.1), (4.5) (4.7) и (4.9), нахолям что

$$\varphi_{-1} = c \alpha \cdot (-i) - (1-i) F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, 1-i)\right) \quad (4.10)$$

$$\frac{d\left|\beta_{\rm cr}\right|}{d^2} = z \frac{\operatorname{ctg} v}{4q_0} z^{-i_0} \left(-i\right)^{i_0} \left[\left(1+3i^2\right) F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, 1-i^2\right) + \frac{15}{8} i^2 \left(1-i^2\right) F\left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}, 3, 1-i^2\right) \right]$$

$$(4.11)$$

с условнем

 $[2_{cr}] = [3_0]$ npn $x = x_1$

Таким образом, уравнение (1.11) в лифференциальный форме пранелиет ту форму стенок, при которон решение уравнения (3.17) можно представить в автомодельной форме. В общем случае интегральные вривые цифференциального уразнения (4.11) находится численно.

НИИ Водных проблем. в Годротехники

Постуянта 29 VIII 1974

$$^{-78}$$

9. U. Physershisus

ԲՈՒՔԵ ՀՈՍԱՆՔԻ ՀԱՇՎԱՐԿՈ ԵՐԿԱՅԵԱԿԱՆ ՄԵԾ ԲԵՔՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈԳ. ԲԱՏ, ԼԱՅՆԱՏԻՎ ՋՐՀՈՍՔՈՒՄ

Ամփոփոմ։

-λουσημοσίατα έ τουρβ, βερ τουσωή στάληση և δασωτερή περησεβιούς βεβδιοδής γωράσσης μως γρωσισματά ηδεβρβιοβήωψων τουστερή ετιβωσχες Υπερια δα καρίστα δρωζουή և δεβριοφ δεασδερία ωροτεββιάρε σημολικά δρατουδημη του δαθεωγουση μια καλομβιοδερία μβικά δια δουσια στά δερε.

3ուղց է արվում, որ այց Հավասարումներով սրոչվող կորհրդ մոտ հն մուտքի կարվածրի ռայունըից հկող և սիմհասիայի առանդրային զուգանեւ ուղիցներին։

-ոստնթի պարաժետրերը (արացության բացացրիչները, նորությունը, մերտծվամ են առիմպառաիկ չարրերի և Հայվում են այց չարրերի առաջին և մոտավոր երկրորդ անդամները։

- ռիուտիա մահղադական ճակզատության գնալկազուիատուն մվտասալ է հակման գել դատադիս դամադիստատրունան գմանճուղ բլա է նշաիշարո է դիունությու

CALCULATION OF TURBULENT FLOW IN AN EXPANDING OPEN CHANNEL WITH A STEEP LONGITUDINAL SLOPE

G. S. BEZIRGUENIAN

Summarv

The behaviour of supercritical flow in an oper channel with a plane sloping bed, expanding slightly downstream, is examined. The equations of characteristics, dividing in plan the region of one-dimensional flow irom that of two-dimensional flow, are derived. These are shown to be quite close to the straight times, passing from the ends of the inlet section, parallel to the channel's axis of symmetry. The parameters of the flow (components of velocity, depth) are expanded into asimptotic series and the first, and approximately the second terms of these series, are calculated. A homogeneous solution for the equation, obtained in a first approximation, is found and the shape of the walls, corresponding to this solution, is defined.

ЛНТЕРАТУРА

- 1 Мелеценов И Т. Плановая садача гидраванка: открытых волотоков. Пэвечної ВПИНГ, і 35, 1948.
- 2 Франклы Ф. И Теорезический расчет первопомерного сурного течения на быстрогоке. Киргизский гос. узиверсатет Тр. физ. мат. факультета. Вын. 3, 1994.

- Шенскков 1 О плоско хости И веста АН СССР, эта техн наук. № 1, 1958
- 4. Инжерны С. И. Планика звляча гидравлики открытых водотноков и случие бутчена нихрене о и нани Известно ВНИИТ, т. 19, 1949.
- Appen A. Dawson J. H. Schemel construction (cansactions of ASCE, vol. 116, 1951)
- b. Rouse Hunter, B. and En Jun-Hau. Design of channel expansions, Transactions of ASCE and 116, 1951.
- 7 Lugen B T. Luyymepings sping normal Hag spin- strong M. Paul
- 8 Turner P. P. Luppennics, 11 p. (Supplies, 11, 1971)
- 9. Караят Р. Уравнения с застными проязводными. Пл. «Мир», М., 1961.
- 10. Проблемы меха изд. т. Т. П. 1, М. 1955.
- Рымик, И. М. в Гразнатано И. С. Таблицы, автеградов, сумм, ризов в произведенай. И з изутопрет литер. М. 1, 1950.
- 12 Бромштеов И. И. и. Семендяев К. І. Справознов по математике Пад. тех.-теор. литер. М., 1957.
- Кальзе Э. Спраненых по обыкающиных доффессимнальных уравоенных. Пто «Таука», физматлия М., 1965.

۰.

80

(मे)

Г. С. Бениргелян

20.390.50.5 002 9-РЯПЕФЗИРУЛЬРЕ ОБОЛЕВИЯТ ЯВРЕНИЯТЕ ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИН НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա

XXVII, Nº 5, 1974

Mexannika

H. I. TEMHOB

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ИОЛЗУЧЕСТИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА В ПРОЦЕССЕ ТЕРМООБРАБОТКИ

В настоящее время большинства предварительно напряженных элементов сборных железоостояных конструкций гражданских и промышленных зданий изготовляются в заводских условиях. Для ускоренны оборачиваемости заводского оборудования элементы подвергаются тепловой обработке, интенсифицарующей процесс вызревания бетона. Вместе с тем термообработка нередко приводит к возникновению запряжений, способных вызвать грешяны или создать условия для растрескивания бетона в процессе эксплуатация Существующая в настоящее время ме толика расчета гермонапряженного состояния железобетонных элеметтов основана на даскретном учете заменения величины модуля увругомтновенных деформаций бетона во время термообработка [4], [5], [7], [10].

Носкольку эта метолика не учитывает пронесса формирования напряжении, результаты соответствующих расчетов носят, в основном, качественный характер. Для получения достаточно полного количестве вного описания изменения напряженного состояния железобетони элемента в процессе термообработки, необходимо учесть вроцесс изменовия температуры и влажности, а также влияние таких явлений, ках интенсиваюе старение и ползучесть бетона. Принимая во внимавие, ч. ч речь влет о напряжениях, необходимых для проверки трещиностой кости, то есть о растягивающих напряжениях согносительно небольших сжимающих напряжениях, допустимо полагать, что ноставлен 1910 задачу можно решать на основе лянейной теории ползучести [2].

1. Изготовление призматического предварительно-напряжениот железобетонного элемента на стедновой технологии произволстея в такой последователья сти: 1 чатяжение арматуры на зоры, 2 уклатка бетона, 3 термообработка, включающая вызреванае бетона при начальной температуре, повышение гемпературы, изотермическай протрев а охлаждение, 4 чобжатие бетона. Как правило, температура среды, окружающей элемент, постояния по его поперечному сечению и поалине степда. Таким образом, при эпределения напряженного состояния в процессе термообработки необходимо рассматривать систему, состоящую из предварительно напряженной и закрепленной на упорах арматуры и бетона, жестко связанного с этой арматурой. В силу статической неовределямоста такой системы при измененан температуры

6 Повестия МП Армянскої ССР, Механака, № 5-

проясходит возниктовета силик в тдельных е частях В дополнение к усплово предварательного апряжения стободной арматуре появлясловно читать, что источником формирования запряженного состояиня желе обстатото с та при сермо юработке является усилие V(t) (фаг. 1). Дополнатель с к этому необходамо учесть напряжения $\phi(y, z, t)$, формирующие я в бетоне вслед твие наличим перементого но понеречному сченыю градии в зажностных тефовмаций.



фит. 1. Схема системы: железобетонное паделие - своб/двая арматура-улоры.

Такім обрання. процессе нериорбилістка налични денствуют следующие напряження

 $z_{ab}^{*}(t) = z_{ab}^{*}(t)$ (1)

$$z_{i}(\mathbf{y}, | \mathbf{z}_{i}, t) = z_{i}^{*}(t)^{*} - z_{ij}^{*}(\mathbf{y}, | \mathbf{z}_{i}, t)$$
(2)

Hpu soon.

011

$$z_{iN} = \frac{\Lambda}{F_{s}} = -z_{s}(t) = \frac{N_{s}(t)}{F_{s}} = -z_{s}(t) = -iz_{s}(t) \left(1 - \frac{F_{\delta}h_{1}}{J_{\delta}}z\right)$$
(3)

$$\int_{a} (y, z, t) = -\left\{ z E(t) h(y, z, t) + \frac{N_{b}(y, z, t)}{k_{b}} - \frac{N_{b}(y, z, t)}{k_{b}} - \frac{N_{b}(y, z, t)}{k_{b}} - \frac{N_{b}(y, z, t)}{k_{b}} - \frac{N_{b}(y, z, t)}{k_{b}} \right\}$$
(4)
$$N_{b}(y, z, t) = -z E(t) \int_{a} h(y, z, t) dz dy$$
(5)

$$M_{dy}(\mathbf{y}, | z, t) = -\beta E(t) \left[\int b(\mathbf{y}, | z, t) z dy dz \right]$$

Известно, что на эслове линей юн геории полаучести завленмость между действующей на призматический элемент (фиг. 1) силой X (и усилием в арматуре – N_x(t) – устанавливается таким интегральным уравнением [11]

$$\begin{aligned} \nabla_a^*(t) &= \left[m\left(t\right) \; \left| \; \mathcal{N}_a^*\left(t\right) - E\left(t\right) \int \mathcal{N}_a(t) \frac{\partial k\left(t, \tau\right)}{\partial \tau} \, d\tau \right| = \\ &= \left[m\left(t\right) \; \left| \; \mathcal{N}^*\left(t\right) - E\left(t\right) \int \mathcal{N}^*\left(t\right) \frac{\partial k\left(t, \tau\right)}{\partial \tau} \, d\tau \right| \right] \end{aligned} \tag{6}$$

где и колффиниелт, определяющий армирозание, E(t) молуль упрего-мгновенных неформаций бегона, $m(t) = : E(t), \delta(t, x)$ —полная относительная деформация бетона, $m(t) = : E(t), \delta(t, x)$ —полная отв момент t, вызванная флиницым напряжением, теп. вующим с момента времени, соотлетствующего возрасту бетона т

$$\delta(t, z) = \frac{1}{\mathcal{E}(z)} + \mathcal{C}(t, z) \tag{7}$$

 $1/E(\tau)$ — упруго-миновенная пеформация бетона, $C(t, \tau)$ деформация ползучести к моменту времени t (мера ползучести). Знаком отмече на усилия, определяемые с учетом ползучести и старения

Уравнение (б) в эператорной форме имсет вид-

$$A_{E}N_{a}^{*}(t) = A\left(1 - EK\right)N_{a}^{*}(t) = A\left(1 - EK\right)N^{*}(t)$$
(8)

где

$$(1 - EK) N_{s}^{*}(t) = N_{s}^{*}(t) - E(t) \int_{0}^{t} N_{s}(t) \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$(1 - EK) N^{*}(t) = N^{*}(t) - E(t) \int_{0}^{t} X^{*}(\tau) \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$
(9)

II II Texptos

$$A = \frac{I}{m(t)F} \qquad A = \frac{I}{F_0} \tag{10}$$

Своеобразное начертание функции двух переменных он т) особенно интенсивно стареющего бетона затрулияет решение уравнения (8) я аналитическом явле и заставляет использовать численные способы [8], [9], [12], [13], [15],

Известно, что вектор величии, получающахся после применения онераторов (9) к функциям (в данном случае неизвестные усилия в армінтуре в заданные моменты времени $N_{s}(\tau_{1}), N_{s}^{*}(t_{1}), ..., N_{s}^{*}(t_{o})$ вли известные внешние силы $X^{i}(t_{1}), X^{i}(t_{2}) \dots X^{i}(t_{i})$ могут быть представлены в виде произведения матряц, содержаних характеристики деформативности на вектор А яля Х", то ссти

$$(1 - EK) \overline{N_a} = *\Delta \delta \overline{N} \qquad (1 - EK) \overline{N} = \Delta \delta \overline{N} \qquad (11)$$

где через 🗚, Х. н. Х. обозначены треугольная матрица характеристик леформазивности и векторы усилии, то есла-

$$\|\Delta \phi\| = \begin{vmatrix} 1 & & N_{a}(\tau_{1}) & & X_{-}(\tau_{1}) \\ \frac{\Delta_{a_{1}} - 1}{\Delta_{a_{2}} - \Delta_{a_{1}} - 1} & & N_{a}^{*} = \begin{vmatrix} N_{a}(t_{1}) & & & X_{-}(t_{1}) \\ N_{a}(t_{1}) & & X^{*} = \begin{vmatrix} X_{-}(t_{1}) & & & X_{-}(t_{2}) \\ X^{*}(t_{2}) & & X^{*}(t_{2}) \end{vmatrix}$$
(12)

Элементы магрин (12) вычисляются по формулам

$$\begin{split} \Delta_{P_{i}} &= E\left(t_{i}\right)\left[\delta\left(t_{i}, z_{i}\right) - \delta\left(t_{i}, z_{i}\right)^{t}\right] & i = 1, 2, ..., n\\ \Delta_{i} &= E\left(t_{i}\right)\left[\delta\left(t_{i}, z_{i}\right)^{t}\right]_{t_{k=1}} - \delta\left(t_{i}, z_{i}\right)^{t}\right] & i = 1, 2, ..., n\\ k = 1, 2, ..., n, \\ k = 1, 2, ..., n, \\ \delta_{ik} &= E\left(t_{i}\right)\delta\left(t_{i}, z_{i}\right)^{t} & i = k \end{split}$$

A.

где через и обозначено значение, среднее в сосле удовлетворення, цапример, такого равенства

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \tilde{s}(t_{k}, z) \frac{dN_{s}(z)}{dz} dz = \tilde{s}(t_{k}, z)_{t_{k-1}}^{t} [N_{s}^{*}(t_{k}) - N_{s}(t_{k-1})]$$
(13)

При выполнении практических расчетов обычно призимается

$$\delta(t_n, \frac{t_n - t_{k-1}}{2})$$

$$(14)$$

Папряженное состояние железобетояного элекента при термообработке

На основании (11) из интегрального уравнения (6) можно получить матричное уравнение

$$A_{E_{n}^{H}}\widetilde{N}_{n} = A_{n} \Delta \delta \| \widetilde{N}_{n} - A_{n} \Delta \delta^{\dagger} \widetilde{X}^{\prime}$$
(15)

Уравнение (15) представим в виде

$$A\delta_{a}\|\vec{N}_{a} = \|\Delta\delta_{A}\|\vec{X}^{*}$$
(16)

185

51.1

$$\|A\delta_{\lambda}\| = \|A_{E}\| - \|\Delta\delta_{A}\|, \qquad \|\Delta\delta_{A}\| = A\|\Delta\delta\|, \qquad \|A_{E}\| = \begin{bmatrix} \alpha_{1} \\ 0 & A_{2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \\$$

Ал определяется согласно (10).

Хмножив уравнение (16) на матрицу 1465 то есть матрицу, обратную матрице [Аб_ получим

$$N_{1} = A\delta_{2} \left[-\frac{1}{4} \Delta \delta_{3} \right] X^{-}$$
(18)

Аналогично можно получить формулу

$$\vec{N}^{*} = [\Delta \vec{s}_{A}]^{-1} [A \vec{s}_{A}] \vec{N}_{a}^{*}$$
(19)

Вектор перемещений орцов изделии и, относттельно противоцоложных торнов вызычляется так:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{1}^{*} = \frac{I_{0}}{E_{1}F_{*}}\tilde{X}_{1}^{*} = \frac{I_{*}}{E_{*}F_{*}}\left(\left|A\tilde{\mathbf{x}}_{*}\right|^{-1},\Delta\delta_{A}\tilde{y}\tilde{X}^{*}\right)$$
(20)

2. После вывода формул (18), (19) я (20) можно перепта к залаче пределення величным усалия X (t) свободной арматуре в процезое термообработка и последующего охлаждения.

Неизнестная величина усялая X *(t) в любой момент времени от начала совместной работы бетона и арматуры может быть найдена с помощью такого уразнения совместности деформаций

$$u_a^*(t) = u_a^*(t) - u_b^*(t) = 0 \tag{(21)}$$

В этом уравнении u_n и u_6 суммарные изменсиня длин всех участков свободной арматуры и железобетонных изделий, вызванные усилием $X_{-}(t)$, u_{η} суммарное изменение длины участков свободной арматуры $l_{-}\Delta \theta_{e}$ и железобетовного изделия на уровне арматуры $l_{0}\Delta \theta$ аследствие приращения температуры во времени

$$u_{\eta} = \tau \left(l_{\eta} \Delta \theta_{h} + l_{\gamma} \Delta \theta_{\mu} \right) \tag{22}$$

I_и — длина изделия. I суммарная длина свободных от бетова участков арматуры.

H. H. Tembon

Решая за цачу определения величин X (t) в наперед заланные моменты времени т₁, t₁, ..., можно (21) переписать в векторной форме

$$u_{4}^{*} - u_{5}^{*} - u_{4} = 0 \tag{23}$$

Учатывая (20), уръвнение (23) в развернутом вяде занишем следующим образом:

$$\frac{I_a}{E_a F_a} \tilde{X}^a + \frac{I_a}{E_a F_a} \left(|A\delta_a|^{-1} |\Delta\delta_a| X^a \right) \to \left(I_a \Delta \tilde{b}_a - I_a \Delta \tilde{b}_a \right) = 0$$
(24)

либо так:

 $\|\gamma\|N^* = (\|A\delta_{\Delta}^{-1}\|\Delta\delta_{A}^{-1}\|N^* = -zE_{\mu}F_{\mu\nu}\Delta\delta_{\nu\nu} - \gamma\Delta\delta_{\nu})$ (25)

откуда

$$\bar{X}^{\pm} = - \left| \Delta \eta \right|^{-1} \tilde{P}_{y} \tag{26}$$

гле 🖾 ⁻¹ — матрина, обратная матрице 🏼 🖓 ј, причем

$$[\Delta x_{1} = x_{1}^{T} - A\delta_{x}]^{-1} [\Delta \delta_{A}], \quad A = \begin{bmatrix} 0 & i_{1} \\ 0 & 0 & \cdots & i_{l} \end{bmatrix}$$
(27)

$$P_{\pm} = \pi E_s F_{\pi} \left(\Delta \theta_{\rm ep} \pm \eta \Delta \theta_{\pi} \right)$$
 (28)

Напояження = (t), =',(t) соотнетственно в свободной и обетонврованной арматуре и бетоне з^{*}(t) в соответствии с (18), (19) и (3) определяются по формулам

$$\vec{z}_{i_1} = \frac{1}{F} \vec{X}^{*}_{i_1} = \vec{z}_{a_1} = \frac{1}{E} \vec{X}_{a_2}, \quad \vec{z}_{b_1} = -\frac{M}{F} \left(1 + \frac{F \cdot h_1}{F}\right)$$
(29)

Навестно, что пр.н напряженном состояния, характеризующемся (м), продольные перемещения стержия отсутствуют. Тогда вектор темтературно влажностных напряжений с учетом ползучести и стврения на основе призцана паложения будет имсть вид [14]

$$z_{ij}^* = |H| \Delta z_{ij} \qquad (30)$$

где 111 — матряца коэффициентов затухания напряжений

$$\|H\| = \begin{vmatrix} H_{11} & 1 & H_{33} = H(t_{33}, -1) \\ H_{01} & H_{03} & 1 \\ H_{01} & H_{03} & 1 \\ H_{01} & H_{01} - H(t_{03}) \end{vmatrix}$$

26 ¹ матрица, обратная матрице 28

86

(31)

∆:₆₅ — прирашения напряжений.

З Естественно, что для юстаточно полного представления о про целсе формирования температурных напряжении матрицу 28 и вектор Е необходимо построить на эснове экспериментальных данных, полученных для бетона, находящегося в условиях термообработки. В качестве примера для приблаженного авиаления характера процесса кспользованы данные, приведенные в [16].

Молуль упруго-меновенных теформации бетола апрохедмирован формулой

$$E(\tau) = 2.92(1 - 0.65e^{-2.070\tau}) 10^{5}$$

мера ползучести, содержащаяся в (12), зависимостью [1]

$$C(t, z) = \left[(3.42 - 27.26e^{-0.00} + 138.6e^{-0.0}) - 1(3.42 + 27.26e^{-0.00} + 138.6e^{-0.0}) \right] - \frac{138.6e^{-0.0}}{e^{-0.0}} - (1.05 + 9.86e^{-0.00} + 165.5e^{-1.22})e^{-(t-1)} \right] 10^{-1}$$

И слотие рассматри с симметричным армарованием и следующими характеристиками $R(28) = 400 \ \kappa zc \ c.m$, $F_h = 15 - 15 \ c.m$, $30 \ c.m^2$, $I = 2 \ mm$, $r_i = 0.18$, $F_h = 2 \cdot 10 \ \kappa zc \ c.m^2$; продолжительность термообработки — 16 час.

В табл 1 приведены элементы вектора и подсчитанные при помоща формул (2)- (3), (1), (29) и (30) напряжения в кастся² в угловых и цеятральной точках поперечного сечения налелия, вызванные как изменением темля ратуры, так и деформациями ползучести в старения бетона за время его термьобработки, полагая, что совместность работы бетона и арматуры обеспечивается через 5 час после уклялки смеся.

На таблины видно, что пра t = 22, 25, 26, 27 и 28 час., то есть когла элементы вектора P_b практически постоянны, дополнительные напряжения в свободной арматуре и напряжение з бетоне аследствие ползучести уменьшаются, а чапряжение в обетокированной арматуре продолжает увеличиваться. К окончанию термовбработки суммарные растягивающие напряжения в бетоне составляют 36.6 кгс/см². Эти напряженяя и являются прачиной растрескивания поверхлостей изделли, наблюзаемого после охлаждения.

П. П. Темнов

Todayne I

						Contraction of the second seco		
Li, nice	1	±_17)	$\vec{\xi}_m(0)$	zî (1)	0, 0, 0	(0, 0, 7)	(u, t, t)	(a - b - t)
4	0	0	0	0	0	0	10	0
5	1926	150	- 37	1,70	- 0,40	- 2,10	0.80	0.90
0	4230	= 347	= 78	3.9	-0.50	- 4.40	0.80	= 3,10
4	6954	554	-139	-6.2	= 0.20	5,40	0.70	- 0.9
8	1060-	- 815	187	- 9,3	- 0.90	- 8.4	- 1.6	-10,9
9	13962	-1126	-263	-12.7	= 1,70	- 11.0	- 2.2	=14.9
10	16920	-1439	- 304	-16.1	- 2.22	-11.2	= 2.1	=18,8
14	25736	-2373	561	-26,0	2,50	-23 5	- 25	-25.8
36	34952	2574	-698	- 27.7	0,10	-27.6	2.3	-25.1
11	36800	2557	- 755	-27.0	- 3,60	30.6	6,8	20.2
25	36840		772	- 25 5	- 5.60	-31.1	8,8	17.0
26	36870	-9182	786	-25,0	- 6,10	31,1	9.6	= 15.4
21	36550		- 797	- 24,1	1.20	-51.9	-12.6	-11.8
28	36810	24	504	23.9	×.40		-15,5	6.5
-30	35832	-2351	703	4.1	-13,00		-21	-2.9
32	337.23	= 2033	-678	= 20.0	-17.0	57.0	- 20.0	6.0
34	310.0	-1772	- 648		-20.0	-36,6	29.4	-12.8
36	27936	-1409	- 603	-11.9	22.6	31.5	-31,9	
15	21180		568	- 7.70	-24.0	31.7		-25.2
40	20760	605		- 1,40	25.5	- 26,9	34_0	+32.6
12	16842	261	443	+ 2 2	-26,3	- 21.1	34_0	-1-30.2
16	0572	- 357	- 146	10_4	-21.0	-10.6	25.7	36.1

Одесский инженерно-строи сланыя институт

12.

Heerman 3 V 1973

E. E. SUBDAY

бичьновлятах убравання идятряхя дердая држимь дочивсеза, волее даржила данна индер зынарезна меринирезиа нанно-

Ամփոփում

Առաջարդվում է եղանակ՝ երկաքերևանյա էլենենա, ազատ արմատուրա, Հեռարաններ սիստեմի լարված վենակը որոշման Տամար։

Եղանակը քնուց է տալիս էլնմննաներում շնահել միզերի առաջացմանը տար գոլորդների աղղեցուքյան և սեղքումից շնաս։

նդանակը չաչդի է առնում ըստ ժամանակի և ըստ լայնական գարքածթի առածդական, ջնըմային, սողջային և ծերացման գեֆորմացիաների փոփոխաքյունը բետոնում պարզացող ջերմախոնավային լարումները և Ճեղջագիմուքյունը ուսումնասիրվում է շատուկ որինակում։

ON APPLICATION OF THE CREEP THEORY TO SOLVING THE PROBLEM OF REINFORCED CONCRETE MEMBER STRESSED CONDITION IN THE STEAM CURING PROCESS

LE TEMNOV

S и m m a r y

A method of solving a stressed condition of the system including a reinforced concrete member free reinforcement and supports is suggested.

The method allows to trace the formation of stresses in the memlog-during steam curing and after compression of concrete.

The method take into a count the variation with time and the cross-section of elastic, iternal, receiping and ageing deformations.

The inermo-moisture tresses developing in concrete and crack resistance are analys d in a specific example

CHILENTED /

- т. р. в. В. Р. свої остоплаєх и желедоосточнах конструкций на намененая технературы а влаж ости с узетом полаучести. Стройклаят, 1974.
- 2 Наизоная И. А. Пекоторые попросы теории ползучести. Гостемиздат 1952.
- Белия Л. В. Температурные наприжение и остояной призме прямоутального понерешого сечения. Или. ВНИШ. т. 51. Госунергов. 1954.
- тип Г. И. Морларов И. 4. Технологическуу факт сы треничносточкост о пручности пру нуар тульно эксприженицах. конструкция. Строй из нат. 1964.
- 5 кой Г. И., Марианов И. А. Шабанова Г. И. О возможности от ниссприенто бытоти преднапряжен сех конструкций после из знар было в Бетон. 9 желозобетов, № 1973.
- b. Ba cre R SI Knowkat 61 R "estimptityphile on pass rule a "wrothers" creation. 10(R)
- 7 Лилински, Е. Ю., Мирчикаличис И. Г. Определение потель пледиарительного на жений арматучка от техноратучных перейала с учетом роста прочичеств при теплообработке. Митерыная к VII-ой Всесоновов хонферезции. Герлгекти учантая етона и желе юбуто пос. Вальшос, 1972.
- 8 К. И., Гедаго иский Г. И. Матричная цианамость мель изноженноманеформациями и задачах доценной теории подочаеть Приха не аник. У чын. П. 1969.
- 5 May low F. H. Tepotoranjprocessing coefforms in Solutions Successing and a second structure BHSHBT, 7, XXVII, 1941.
- Инхийдов И В Предия, цельно изприженные соста сонных конструкции М., 1963.
- Проколович И. Е. Влияние для стельных процессов на напряжениюе и деформицина с иссекточные сооружение 1 осстроизздат, 1965.
- 12 И. Е., Рекша В. (1) стоя обморт и о дадокието получиство и усилението свядоми, П.6. АН Арм. ССР. Механика, т. 22. № 1, 1969.
- Телинов И. И. Палибалеска с собщиной. сумой или деястельного и групке. Пля. вущод. «Строительство и архитектура». № 3, 1962.

S9.

- 14. Темнов И. И. О лы шелениць коэффициентов затухания температурно-шлажностних изприжений и бетонных сооружениях. Гидротехническое строятельство, № 10, 1969.
- Швенов 1. В. Приближенный способ определения собственных напряжений и бетоне с учетом переменноста его деформативных спонста. Гидротехническое строяти акство, N/8, 1952.
- 16 Янния І. В. П. научесть Техова в раннем коэрасте. Га. БПП ОКБ, мын. 1. Гостровпълат. 1959.

ch.