

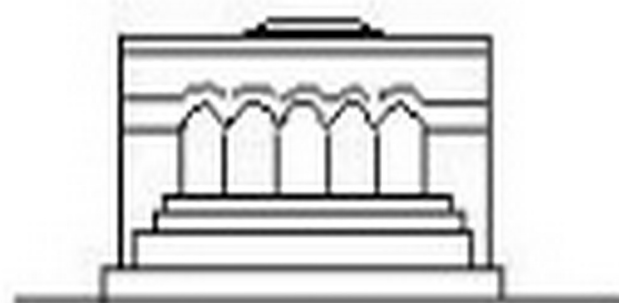
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1974

В. Х. СИРУНЯН

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ТРЕЩИНА В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается задача математической теории трещины касательного разрыва.

Пусть имеется цилиндрическая трещина радиуса R и длины $2a$ в упругом пространстве с упругими постоянными E и ν . На цилиндрической поверхности трещины действуют касательные силы произвольной интенсивности $\tau(z)$.

Требуется определить величину предельной нагрузки, необходимой для распространения равновесной трещины.

Решение поставленной задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром, выражающимся интегралом Фурье. Решение полученного уравнения строится известными асимптотическими методами [1, 2] применительно к случаям больших и малых λ , где λ — безразмерный параметр, являющийся отношением радиуса цилиндра к полудлине трещины.

Решения для больших и малых значений λ перекрывают друг друга на некотором диапазоне изменения параметра λ .

Предварительно рассматриваются две вспомогательные задачи, на которых основывается вывод разрешающего интегрального уравнения.

§ 1. Вывод интегрального уравнения

1) Имеем упругий бесконечный цилиндр радиуса R , на боковой поверхности ($r = R$) которого задано перемещение $v = \gamma^{(1)}(z)$. Предполагается, что на оси цилиндра ($r = 0$) перемещения ограничены.

Используя из [3] соответствующие формулы, получим

$$T_{rz}^{(1)} = \frac{2G\Gamma^{(1)}(z) \left| I_0(2r) - \frac{2}{2r} I_1(2r) \right|}{I_1(2R)} \quad (1.1)$$

где $T_{rz}^{(1)}$ и $\Gamma^{(1)}(z)$ — трансформаты Фурье касательного напряжения $\tau_{rz}^{(1)}$ и перемещения $\gamma^{(1)}(z)$, $I_0(2r)$ и $I_1(2r)$ — функции Бесселя мнимого аргумента, G — модуль сдвига материала.

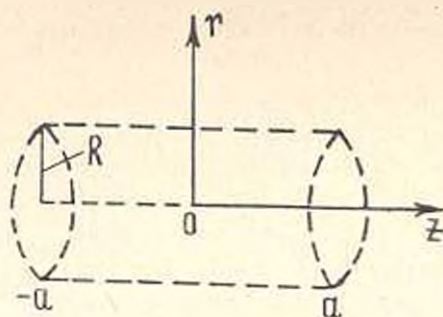
2) Имеем ослабленное бесконечным цилиндром радиуса R упругое пространство. На поверхности цилиндра ($r = R$) задано перемещение $\gamma^{(2)}(z)$, которое предполагается ограниченным в бесконечности. Определим трансформанту Фурье касательных напряжений по формуле

$$T_{12}^{(2)} = - \frac{z \Gamma^{(2)}(z) \left[K_0(zR) + \frac{2}{zR} K_1(zR) \right]}{K_1(zR)} \quad (1.2)$$

Здесь $K_0(zr)$ и $K_1(zr)$ — функции Макдональда. При $r = R$ требуем

$$\begin{aligned} \gamma_{r0}^{(1)} = \gamma_{r0}^{(2)} = z(z) \\ \gamma^{(2)}(z) - \gamma^{(1)}(z) = g(z) \end{aligned} \quad |z| \leq a \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r0}^{(1)} = \gamma_{r0}^{(2)} \\ \gamma^{(1)}(z) = \gamma^{(2)}(z) \end{aligned} \quad |z| > a \quad (1.4)$$



фиг. 1

Предполагается, что при $r = 0$ и $r \rightarrow \infty$ перемещения и напряжения ограничены.

Учитывая (1.1), (1.2) и (1.4), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z) e^{-izx} dz = 0, \quad F(z) = \Gamma^{(2)}(z) - \Gamma^{(1)}(z), \quad |z| \geq a \quad (1.5)$$

$$\frac{\Gamma^{(1)}(z) \omega_1(zR)}{I_1(zR)} = - \frac{\Gamma^{(2)}(z) \omega_2(zR)}{K_1(zR)} \quad (1.6)$$

где

$$\omega_1(zR) = I_0(zR) - \frac{2}{zR} I_1(zR), \quad \omega_2(zR) = K_0(zR) + \frac{2}{zR} K_1(zR) \quad (1.7)$$

Имея в виду (1.3) и (1.5), имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) e^{-izx} dz = \begin{cases} g(z), & |z| \leq a \\ 0, & |z| > a \end{cases} \quad (1.8)$$

Определяя из функциональных уравнений (1.5), (1.6) $\Gamma^{(2)}(z)$ и подставляя в (1.2), с учетом (1.8) получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha F(\alpha) \omega_1 \omega_2}{K_1 \omega_1 + I_1 \omega_2} e^{-i\alpha z} d\alpha = -\frac{\tau(z)}{G} \quad |z| \leq a \quad (1.9)$$

$$\int_{-a}^a g(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi = F(\alpha)$$

Обозначив

$$g(\xi) = 2f(\xi) \quad (1.10)$$

и учитывая, что $g(\pm a) = 0$, после некоторых преобразований и интегрирования по z , найдем

$$\int_{-a}^a f'(\xi) K\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\xi = -\frac{\pi \tau_1(z)}{G} + c \quad (1.11)$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad u = \pi R \quad (1.12)$$

$$L(u) = 2 \left[\frac{K_1}{\omega_1} + \frac{I_1}{\omega_2} \right]^{-1} \quad (1.13)$$

$$\frac{d\tau_1(z)}{dz} = \tau(z) \quad (1.14)$$

Производя в (1.11) замену переменных и вводя обозначения

$$x = \frac{\xi}{a}, \quad y = \frac{z}{a}, \quad \lambda = \frac{R}{a}, \quad f'(\xi) = \varphi(x) \quad (1.15)$$

получим

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) M\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) dx = -\frac{\pi \tau_1(y)}{G} + c \quad (1.16)$$

$$M(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad (1.17)$$

§ 2. Приближенное решение уравнения (1.16) при больших λ .

Ядро $M(t)$ в окрестности $t=0$ имеет логарифмическую особенность, поэтому представим его в виде

$$M(t) = -\ln(t) + H(t) \quad (2.1)$$

Чтобы определить $H(t)$, ядро $M(t)$ представим как сумму трех интегралов

$$M(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du = \int_0^{0.7} \left(\frac{1}{2} - \frac{u^2}{12} \right) \cos ut du + \\ + \int_{0.7}^{1.5} \frac{L(u)}{u} \cos ut du + \int_{1.5}^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{15}{8u^3} + \frac{5}{2u^5} \right) \cos ut du \quad (2.2)$$

В первом интеграле используется разложение в ряд бесселевых функций до членов порядка u^3 для малых значений аргумента.

Здесь расхождение между $L(u)$ и его разложением не превосходит одного процента.

В третьем интеграле используется асимптотическое разложение бесселевых функций до членов порядка u^{-4} .

Расхождение между $L(u)$ и его разложением при больших значениях u ($u > 1.5$) не превышает трех процентов.

Для вычисления второго интеграла используется метод Филона [4].

Ошибка, получаемая в результате применения метода Филона, имеет величину меньшую, чем $(6.75t - 0.2t^3) \cdot 10^{-4}$.

Учитывая вышесказанное, для функции $H(t)$ получим следующее выражение:

$$H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i} + \ln |t| \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^{2i} \quad (2.3)$$

где $a_0 = -0.5869$, $a_1 = 0.5309$, $a_2 = 0.1757$
 $b_1 = -0.9375$, $b_2 = -0.1042$ и т. д.

Теперь сведем интегральное уравнение (1.16) к эквивалентному ему интегральному уравнению второго рода.

Учитывая (2.1) и (2.3), имеем

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \left[C_1 + \int_{-1}^1 \frac{z(\eta) \sqrt{1-\eta^2}}{G(\eta-y)} d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2i}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-y} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) \left(2ia_i + b_i + 2ib_i \ln \left| \frac{\eta-\zeta}{k} \right| \right) (\eta-\zeta)^{2i-1} d\zeta \right\} dy \right] \quad (2.4)$$

Следуя [1], найдем решение интегрального уравнения (2.4) в виде

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} k^{-2n} \varphi_{nm}(y) \quad (2.5)$$

Подставляя $\varphi(y)$ в виде (2.5) в правую и левую части интегрального уравнения (2.4) и приравнявая выражения при одинаковых степенях y^{-2} и $\ln y$, получим следующие соотношения для последовательного определения $\varphi_{nm}(y)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{00}(y) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \left(C_1 + \int_{-1}^1 \frac{\tau(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2}}{G(\zeta-y)} d\zeta \right) \\ \varphi_{10}(y) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta-y} d\zeta \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\zeta) (2a_1 + b_1 + 2b_1 \ln |\zeta-y|) (\zeta-y) d\zeta \\ \varphi_{11}(y) &= -\frac{2b_1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta-y} d\zeta \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\zeta) (\zeta-y) d\zeta \\ \varphi_{20}(y) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta-y} d\zeta \int_{-1}^1 \left[\varphi_{10}(\zeta) (2a_1 + b_1 + 2b_1 \ln |\zeta-y|) (\zeta-y) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{00}(\zeta) (4a_2 + b_2 + 4b_2 \ln |\zeta-y|) (\zeta-y)^2 \right] d\zeta \\ \varphi_{21}(y) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta-y} d\zeta \int_{-1}^1 \left[\varphi_{11}(\zeta) (2a_1 + b_1 + 2b_1 \ln |\zeta-y|) (\zeta-y) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_1 \varphi_{10}(\zeta) (\zeta-y) - 4b_2 \varphi_{00}(\zeta) (\zeta-y)^2 \right] d\zeta \\ \varphi_{22}(y) &= -\frac{2b_1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta-y} d\zeta \int_{-1}^1 \varphi_{11}(\zeta) (\zeta-y) d\zeta \quad \text{и т. д.} \quad (2.6)\end{aligned}$$

Пример (большие λ). Определим коэффициент интенсивности касательных напряжений, когда касательное напряжение равномерно распределено по берегам трещины и равно

$$\tau(z) = \tau = \text{const}$$

Тогда формулы (2.6) принимают вид

$$\begin{aligned}\varphi_{00}(y) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} (C_1 + Dy) \\ \varphi_{10}(y) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \left[C_1 \left(\frac{1}{2} - y^2 \right) (2a_1 + 3b_1 - 2b_1 \ln 2) - \right. \\ &\quad \left. - Dy \left(b_1 \ln 2 - a_1 - \frac{b_1}{2} - b_1 y^2 \right) \right]\end{aligned}$$

$$\varphi_{II}(y) = -\frac{2b_1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \left[C_1 \left(\frac{1}{2} - y^2 \right) + \frac{Dy}{2} \right] \text{ и т. д.} \quad (2.7)$$

$$D = -\frac{\pi z}{G} \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) в (2.5) и сохраняя члены с точностью порядка λ^{-1} , получим

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \left\{ C_1 \left[1 + \frac{(1-2y^2)}{2\lambda^2} (2a_1 + 3b_1 - 2b_1 \ln 2i) \right] + \right. \\ & \left. + Dy \left[1 + \frac{1}{\lambda^2} \left(a_1 + \frac{b_1}{2} - b_1 \ln 2i + b_1 y^2 \right) \right] \right\} + O(\lambda^{-1}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Переходя в (2.9) к старым переменным и обозначениям (1.15), интегрируя $f'(z)$ в пределах $(-a, a)$ и учитывая $f(\pm a) = 0$, получим $C_1 = 0$.

Учитывая (2.8), окончательно для функции разрыва перемещений $g(z)$ получим

$$g(z) = -\frac{2iz}{G\sqrt{a^2-z^2}} \left[1 + \frac{1}{\lambda^2} \left(a_1 + \frac{b_1}{2} - b_1 \ln 2i + b_1 \frac{z^2}{a^2} \right) \right] + O(\lambda^{-1}) \quad (2.10)$$

Коэффициент интенсивности касательных напряжений в точках $z=a$ и $z=-a$ определим из условий

$$\begin{aligned} T_a &= -\frac{G}{2} \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{a-z} \frac{d}{dz} g(z) \\ T_{-a} &= \frac{G}{2} \lim_{z \rightarrow -a} \sqrt{a+z} \frac{d}{dz} g(z) \end{aligned} \quad (2.11)$$

В табл. 1 приведено значение $\tau^* = \frac{\pi\sqrt{R}}{T_a}$

Таблица 1¹⁾

$\lambda = \frac{R}{a}$	1.9	2.0	3.0	4.0	6.0
τ^*	1.595	1.655	2.190	2.630	3.310

¹⁾ При составлении табл. 1 в уравнении (2.10) учтены также члены, содержащие λ^{-1} .

§ 3. Приближенное решение уравнения (1.11) при малых λ

Ядро уравнения (1.11) имеет вид

$$K(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad \begin{cases} L(u) \rightarrow 1 & \text{при } u \rightarrow \infty \\ L(u) \sim Au & \text{при } u \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Функцию $L(u)$ в зависимости от требуемой точности можно аппроксимировать разными выражениями (смотри в [2] формулы (1.3), (1.4) и (1.5)).

Здесь функцию $L(u)$ будем аппроксимировать выражением

$$L(u) = \frac{\sqrt{u^2 + B^2}}{u^2 + C} u, \quad \left(\frac{B}{C} = A \right) \quad (3.2)$$

Рассмотрим наряду с уравнением (1.11) вспомогательные уравнения

$$\int_{-\infty}^a f_{-}(\xi) K\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\xi = -\frac{\pi \tau_1(z)}{G} + c \quad (-\infty < z \leq a) \quad (3.3)$$

$$\int_{-a}^{\infty} f_{+}(\xi) K\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\xi = -\frac{\pi \tau_1(z)}{G} + c \quad (-a < z < \infty) \quad (3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) K\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\xi = -\frac{\pi \tau_1(z)}{G} + c \quad (|z| < \infty) \quad (3.5)$$

Представим нулевой член асимптотики решения уравнения (1.11) в виде комбинации решений интегральных уравнений (3.3), (3.5)

$$f'(\xi) = f'_{-}(\xi) + f'_{+}(\xi) - V(\xi) \quad (3.6)$$

Решения уравнений (3.3) и (3.4) могут быть получены методом Винера-Хопфа, а решение уравнения (3.5) — применением теоремы о свертках для преобразования Фурье. Итак, приближенное решение (3.6) уравнения (1.11) при малых λ всегда может быть построено.

Принимая, что касательное напряжение равномерно распределено по берегам трещины, получим $\tau_1(z) = \tau(z)$.

Решения интегральных уравнений (3.3), (3.4) и (3.5) соответственно будут иметь вид

$$f_{-}(z) = \frac{c}{R} \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) - \tau \left[\frac{1}{\lambda} \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) - \varphi_1\left(\frac{a-z}{R}\right) \right] \quad (3.7)$$

$$f_{+}(z) = \frac{c}{R} \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) + \tau \left[\frac{1}{\lambda} \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) - \varphi_1\left(\frac{a+z}{R}\right) \right] \quad (3.8)$$

$$V(z) = \frac{e^{-\pi z}}{ARG} \quad (3.9)$$

где

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{GV\bar{A}} \left(\frac{1}{1/\bar{A}} \operatorname{erf} \sqrt{Bt} + \frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}} \right)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{G} \left(c_{11} \varphi_0(t) + c_{21} \int_0^t \varphi_0(u) du \right)$$

$$c_{11} = \frac{1}{2B\sqrt{\bar{A}}} - \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c_{21} = \frac{1}{1/\bar{A}}, \quad B = 1.5$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{G \cdot A} \left[t \operatorname{erf} \sqrt{Bt} - \left(\frac{t}{\sqrt{B}} + \frac{1/\bar{A}}{2B} - \frac{A}{1/\bar{B}} \right) \frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}} \right]$$

Подставляя значение (3.7) — (3.9) в (3.6), получим

$$f(z) = \frac{c}{R} \left[\varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) + \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) \right] + \pi \left[\frac{1}{\lambda} \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda} \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) + \varphi_1\left(\frac{a-z}{R}\right) - \varphi_1\left(\frac{a+z}{R}\right) \right] \quad (3.10)$$

Неизвестная постоянная c определится из условия $f(\pm a) = 0$.

Интегрируя (3.10) по z в пределах $(-a, a)$, получим $c = 0$.

По формулам (2.11) определим коэффициент интенсивности касательных напряжений при малых значениях λ .

Учитывая при этом, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{a-z} \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{a-z} \varphi_1\left(\frac{a+z}{R}\right) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{a-z} \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) = \frac{1/\bar{R}}{G\sqrt{\bar{A}\pi}}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{a-z} \varphi_1\left(\frac{a-z}{R}\right) = \frac{1/\bar{R}}{G\sqrt{\bar{A}\pi}} \left(\frac{1}{2B} - \frac{1/\bar{A}}{\sqrt{B}} \right)$$

для предельной нагрузки получим

$$\tau^* = \frac{\pi \sqrt{\bar{R}}}{\sqrt{\bar{A}\pi}} = \sqrt{\bar{A}\pi} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2B} + \frac{1/\bar{A}}{\sqrt{B}} \right)^{-1} \quad (3.11)$$

В табл. 2 приведены значения τ^* , подсчитанные по формуле (3.11) для разных значений λ .

Таблица 2

λ	1.8	1.4	1.2	3/4	1.0	1.5	1.9	2.0
τ^*	0.152	0.295	0.558	0.795	1.007	1.375	1.628	1.681

Сравнивая значения τ^* для больших и малых λ , приходим к выводу, что для значений λ , близких к двум, оба решения перекрывают друг друга.

Автор благодарит В. М. Александрова за постановку задачи и ценные замечания.

Кировский филиал Ереванского политехнического института им. К. Маркса

Поступила 29 I 1973

Վ. Խ. ՍԻՐՈՒՆՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՀԱՔ ԱՌԱՋԿԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՉ

Ա մ փ ո փ ու մ

Առաձգական տարածության մեջ ունենք զլանային ճաթ, որի կողմնային մակերևույթի վրա ազդում են շոշափող ուժեր:

Դիտարկված խնդիրը բերվում է ճաթի ափերի շոշափողի ուղղությամբ անհատ տեղափոխության խզման նկատմամբ ինտեգրալ հավասարման:

Ստացված ինտեգրալ հավասարումը լուծվում է մեծ և փոքր λ պարամետրերի եղանակով, որտեղ λ -ն շափողականություն չունեցող մեծություն է և հանդիսանում է զլանի շառավիղի և ճաթի կիսաներկարության հարաբերությունը:

Պարամետրի փոփոխման որոշ սահմանում λ -ի մեծ և փոքր արժեքներին համապատասխանող լուծումները համընկնում են:

Ստացված են բանաձևեր սահմանային բեռի որոշման համար:

A CYLINDRICAL CRACK IN AN ELASTIC SPACE

V. Kh. SIRUNIAN

S u m m a r y

A problem in the mathematical theory of cracks is considered. In an elastic space there is a cylindrical crack with a tangential stress applied to its boundary surface. Some formulas for determination of limiting load are derived.

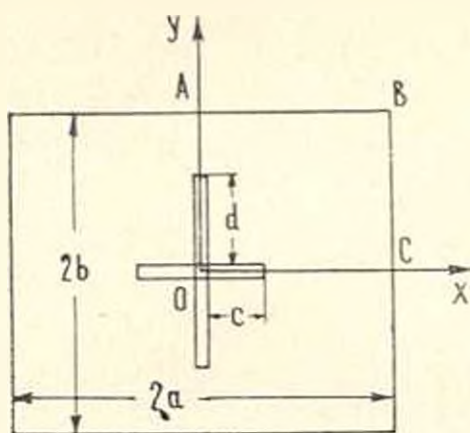
ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. МТТ, № 4, 1967.
2. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР. Механика, т. 1, № 2, 1965.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Изд-во «Наука», М., 1964.

Ա. Ա. БАБԼՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՅԱՆ

РАВНОВЕСИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ОСЛАБЛЕННОГО КРЕСТООБРАЗНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

1. Решается плоская задача теории упругости для прямоугольника, ослабленного симметрично расположенным внутренним крестообразным разрезом (фиг. 1), когда на внешней границе прямоугольника заданы напряжения. Для простоты выкладок принимается, что касательные напряжения по всему контуру отсутствуют.



Фиг. 1

В силу симметрии задача решается только для области ABCO, при этом удовлетворяются условия симметрии

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(0, y) = u(0, y) = 0 & \quad \text{при} \quad (d \leq y \leq b) \\ \tau_{xy}(x, 0) = v(x, 0) = 0 & \quad \text{при} \quad (c \leq x \leq a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничные условия на остальных частях области ABCO задаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x(a, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \beta_k y, \quad \sigma_x(x, b) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos 2\beta_k x \\ \sigma_x(0, y) = f_1(y) \quad (0 \leq y < d), \quad \sigma_x(x, 0) = f_2(x) \quad (0 \leq x < c) \quad (1.2) \\ \tau_{xy}(x, y)|_l = 0 \end{aligned}$$

Задача решается по методу, использованному в работах [1—5].

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эри по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ E v &= \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} + E v_0 \\ E u &= \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + E u_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, v_0 , u_0 — постоянные интегрирования.

Функцию напряжений ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= c_1 x^2 + \frac{b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-2} [\lambda X_k^{(1)} t_k^{(1)}(y) - Y_k^{(1)} t_k^{(1)}(y)] \cos \alpha_k x + \\ &+ c_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{-2} [\lambda X_k^{(2)} t_k^{(2)}(x) - Y_k^{(2)} t_k^{(2)}(x)] \cos \beta_k y \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}; \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b}$$

где

$$\begin{aligned} Y_k^{(1)}(y) &= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \left[\operatorname{ch} \alpha_k (b - y) + \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} \alpha_k b} - \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k (b - y) \right] \\ t_k^{(1)}(y) &= t_k^{(1)}(b - y) \end{aligned}$$

а $t_k^{(2)}(x)$ и $t_k^{(2)}(x)$ определяются этими же формулами заменой

$$y \rightarrow x, \quad \alpha_k \rightarrow \beta_k, \quad b \rightarrow a$$

λ — произвольная постоянная.

При таком выборе функции $\Phi(x, y)$ условия симметрии и равенства нулю тангенциальных напряжений удовлетворяются автоматически.

Удовлетворяя однородным условиям (1.2), получим бесконечные алгебраические уравнения

$$Y_k^{(1)}(1 + M_k^{(1)}) - \lambda X_k^{(1)} N_k^{(1)} = \sum_{p=1}^{\infty} [a_{pk}^{(1)} X_p^{(2)} + a_{pk}^{(2)} Y_p^{(2)}] + b_k \frac{a}{h} \quad (1.5)$$

$$Y_k^{(2)}(1 + M_k^{(2)}) - \lambda X_k^{(2)} N_k^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} [b_{pk}^{(1)} X_p^{(1)} + b_{pk}^{(2)} Y_p^{(1)}] + a_k$$

и условия для определения c_1 и c_2

$$c_1 = \frac{b_0}{4}, \quad c_2 = \frac{a_0}{4}$$

где

$$a_{pk}^{(1)} = \frac{4i\alpha_p^2 \beta_k (-1)^p}{b(\alpha_p^2 + \beta_k^2)^2}, \quad a_{pk}^{(2)} = (-1)^{p-1} a_{pk}^{(1)} i^{-1}$$

$$b_{pk}^{(1)} = \frac{4i\beta_k^2 \alpha_p (-1)^p}{a(\alpha_p^2 + \beta_k^2)^2}, \quad b_{pk}^{(2)} = (-1)^{p-1} b_{pk}^{(1)} i^{-1}$$

$$M_k^{(1)} = \frac{e^{-\alpha_k b}}{\operatorname{sh} \alpha_k b} + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b}, \quad N_k^{(1)} = \frac{1 - \alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b}$$

$$M_k^{(2)} = \frac{e^{-\beta_k a}}{\operatorname{sh} \beta_k a} + \frac{\beta_k a}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a}, \quad N_k^{(2)} = \frac{1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a}{\operatorname{sh} \beta_k a}$$

Смешанные условия (1.1) и (1.2) приводят к парным уравнениям

$$i \sum_{k=1}^{\infty} [X_k^{(2)} + M_k^{(2)} X_k^{(2)} - i^{-1} N_k^{(2)} Y_k^{(2)}] \cos \beta_k y = 2c_2 - f_1(y) + \\ + \frac{b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} [Y_k^{(1)} \varphi_{\beta_k \frac{b}{a}}(y) - i X_k^{(1)} \varphi_{\beta_k \frac{b}{a}}(b-y)], \quad (0 < y < d) \quad (1.6)$$

$$X_a^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} i k^{-1} X_k^{(2)} \cos \beta_k y = 0 \quad (d < y < b)$$

и аналогичное уравнение для $X_k^{(1)}$. Здесь

$$\varphi_{\beta_k \frac{b}{a}}(y) = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \left[\operatorname{ch} \alpha_k y - \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \operatorname{sh} \alpha_k y \right] \\ X_0^{(2)} = \frac{E a_0 \tau}{2i b}$$

Использование результатов [2—4] парные уравнения приводятся к бесконечным уравнениям

$$X_k^{(1)} = \frac{a}{ib} \sum_{p=1}^{\infty} \left[i C_{pk}^{(2)} X_p^{(2)} + \frac{ib}{a} C_{pk}^{(1)} X_p^{(1)} + \frac{b}{a} d_{pk}^{(1)} Y_p^{(1)} + d_{pk}^{(2)} Y_p^{(2)} \right] + \frac{a}{ib} \gamma_k^{(1)}$$

$$X_k^{(2)} = \frac{b}{ia} \sum_{p=1}^{\infty} \left[i C_{pk}^{(1)} X_p^{(2)} + \frac{ai}{b} C_{pk}^{(2)} X_p^{(1)} + \frac{a}{b} d_{pk}^{(1)} Y_p^{(2)} + d_{pk}^{(2)} Y_p^{(1)} \right] + \frac{b}{ia} \gamma_k^{(2)}$$

$$2X_0^{(1)} = -8c_1 \ln \left(\cos \frac{\gamma_1}{2} \right) - \int_{\frac{\gamma_1}{2}}^{\frac{\gamma_2}{2}} F_1(\cos \vartheta) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p^{(2)} M_p^{(2)} - \lambda X_p^{(2)} N_p^{(2)}}{p} z_p (\cos \gamma_1) + \\
& + \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} Y_p^{(1)} \frac{\bar{M}_p \frac{a}{b} (\cos \gamma_1) - \bar{K}_p \frac{a}{b} (\cos \gamma_1)}{p} - \\
& - \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(1)} \frac{\bar{N}_p \frac{a}{b} (\cos \gamma_1) - \bar{P}_p \frac{a}{b} (\cos \gamma_1)}{p}
\end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
2X_0^{(2)} &= -8c_1 \ln \left(\cos \frac{\xi_1}{2} \right) - \int_0^{\xi_1} F_2(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \\
& - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p^{(1)} M_p^{(1)} - \lambda X_p^{(1)} N_p^{(1)}}{ab^{-1}p} z_p (\cos \xi_1) + \\
& + \frac{a}{b} \sum_{p=1}^{\infty} Y_p^{(2)} \frac{\bar{M}_p \frac{b}{a} (\cos \xi_1) - \bar{K}_p \frac{b}{a} (\cos \xi_1)}{p} - \\
& - \frac{a}{b} \sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(2)} \frac{\bar{N}_p \frac{b}{a} (\cos \xi_1) - \bar{P}_p \frac{b}{a} (\cos \xi_1)}{p}
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$C_{pk}^{(1)} = \frac{b}{2} M_k^{(2)} \int_0^{\xi_1} y_p(\cos \theta) y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta, \quad d_{pk}^{(1)} = -C_{pk}^{(1)} \frac{N_k^{(2)}}{\lambda M_k^{(2)}}$$

$$C_{pk}^{(2)} = -\frac{k}{2} \int_0^{\xi_1} \bar{H}_p \frac{b}{a} (\cos \theta) y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$X_0^{(1)} = \frac{E\nu\tau}{2\lambda a}, \quad d_{pk}^{(2)} = \frac{k}{2} \int_0^{\xi_1} \bar{L}_p \frac{b}{a} (\cos \theta) y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (1.8)$$

$$\gamma_k^{(1)} = -\frac{b}{2} \int_0^{\xi_1} F_2(\cos \theta) y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta + 2c_1 z_k(\cos \gamma_1)$$

$$\gamma_k^{(2)} = -\frac{k}{2} \int_0^{\xi_1} F_1(\cos \theta) y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta + 2c_2 z_k(\cos \xi_1)$$

$$F_1(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_1\left(\frac{a\tau}{\pi}\right) \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{\sqrt{\cos \tau - \cos \theta}} \quad (1.8)$$

$$\overline{H}_1(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau (\pi - \tau) \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{\sqrt{\cos \tau - \cos \theta}}$$

Функции $y_k(\cos \theta)$, $z_k(\cos \theta)$, $\overline{L}_k(\cos \theta)$ исследованы в работах [2—3], а входящие в $C_{\mu}^{(2)}$ интегралы связаны с функциями

$$\begin{aligned} \overline{H}_k(\cos \theta) &= L_k(-\cos \theta) & \overline{N}_k(\cos \theta) &= H_k(-\cos \theta) \\ P_k(\cos \theta) &= K_k(-\cos \theta) & \overline{Q}_k(\cos \theta) &= R_k(-\cos \theta) \end{aligned} \quad (1.9)$$

которые детально исследованы в работах [3—4].

Учитывая (1.9), а также оценки соответствующих рядов и функций из [1—4], получим, что суммы модулей коэффициентов при неизвестных бесконечных систем (1.5) меньше единицы при $\lambda = 0.25$, а соответственные суммы в системах (1.7), а также свободные члены этих систем стремятся к нулю при возрастании « k ». Следовательно, совокупность бесконечных систем (1.5) и (1.7) квази вполне регулярна, и неизвестные $X_k^{(0)}$, $Y_k^{(0)}$ можно определить методом последовательных приближений.

Напряжения и перемещения определяются по формулам (1.3). На линиях разреза выражения для напряжений видоизменяются выделением особенностей у корня разреза

$$2\sigma_x(0, \tau_1) = - \frac{\sqrt{2} R_2 \sin \frac{\tau_1}{2}}{\sqrt{\cos \tau_1 - \cos \tau_1}} + F_1(\tau_1) - \sqrt{2} \sin \frac{\tau_1}{2} T(\tau_1) \quad (1.10)$$

$$(\tau_1 < \tau < \pi)$$

где коэффициент особенности R_2 определяется по формуле

$$\begin{aligned} R_2 &= -4c_2 + \sum_{p=1}^{\infty} [Y_p^{(2)} M_p^{(2)} - \lambda X_p^{(2)} N_p^{(2)}] y_p(\cos \tau_1) - \\ &- \sum_{p=1}^{\infty} [Y_p^{(1)} \overline{L}_{p \frac{b}{a}}(\cos \tau_1) - X_p^{(1)} \overline{H}_{p \frac{b}{a}}(\cos \tau_1)] + F_1(\cos \tau_1) \end{aligned}$$

а регулярная функция $T(\eta)$ имеет вид

$$T(\tau_1) = \frac{b}{a} \sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(1)} p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\overline{N}_{p \frac{b}{a}}(\cos \theta) - \overline{P}_{p \frac{b}{a}}(\cos \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \tau_1}}$$

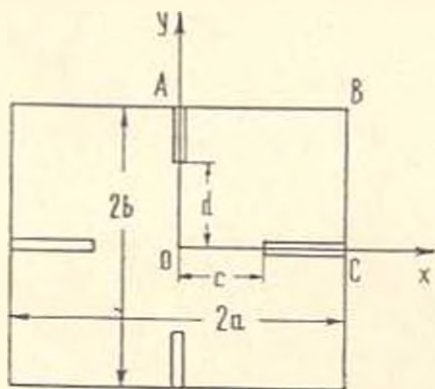
$$\begin{aligned}
 & - \frac{b}{a} \sum_{p=1}^{\infty} p Y_p^{(1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\bar{M}_{p, \frac{a}{b}}(\cos \theta) + \bar{K}_{p, \frac{a}{b}}(\cos \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 - \cos \theta - \cos \eta} = \\
 & - \sum_{p=1}^{\infty} p [Y_p^{(2)} M_p^{(2)} - \lambda N_p^{(2)} X_p^{(2)}] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_1(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{1 - \cos \theta - \cos \eta}
 \end{aligned}$$

Заменой

$$X_k^{(1)} = X_k^{(2)}, \quad Y_k^{(1)} = Y_k^{(2)}, \quad a = b, \quad f_1 = f_2, \quad \eta = \eta$$

из (1.10) получим выражение для напряжения $\tau_y(\frac{1}{2}, 0)$.

2. Одновременно рассматривается вторая задача, когда прямоугольник ослаблен четырьмя симметрично расположенными внешними разрезами (фиг. 2), то есть когда граничные условия имеют вид



Фиг. 2

$$\tau_{xy}(0, y) = u(0, y) = 0 \quad \text{при} \quad (0 \leq y < d)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad (0 \leq x < a)$$

$$\tau_x(a, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \beta_k y, \quad \tau_y(x, b) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \alpha_k x \quad (2.1)$$

$$\tau_x(0, y) = f_1(y) \quad (d < y \leq b), \quad \tau_y(x, 0) = f_2(x) \quad (c < x \leq a)$$

$$\tau_{xy}(x, y)|_l = 0$$

В этом случае изменяются только бесконечные системы (1.7), где надо учесть, что

$$\tau_{xy}^{(1)} = 2C_1 y_1 (\cos \eta_1) + \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(\cos \theta) z_1(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$C_p^{(1)} = \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_p(\cos \theta) z_a(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$C_p^{(2)} = -\frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_{p \frac{a}{2}}(\cos \theta) z_a(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$d_p^{(2)} = -\frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L_{p \frac{a}{2}}(\cos \theta) z_a(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$
(2.2)

$$F_1(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_1\left(\frac{d\gamma}{\pi}\right) \sin \frac{\gamma}{2} d\gamma}{1 - \cos \theta - \cos \gamma}$$

$$H_{p \frac{a}{2}}(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi_{p \frac{a}{2}}(\gamma) \sin \frac{\gamma}{2} d\gamma}{1 - \cos \theta - \cos \gamma}$$

$$L_{p \frac{a}{2}}(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau_{p \frac{a}{2}}(\gamma) \sin \frac{\gamma}{2} d\gamma}{1 - \cos \theta - \cos \gamma}$$
(2.3)

$$R_2 = F_1(\cos \gamma_1) - 4C_1 + \sum_{p=1}^n |Y_p^{(2)} M_p^{(2)} - X_p^{(2)} N_p^{(2)}| z_p(\cos \gamma_1) -$$

$$- \sum_{p=1}^n |Y_p^{(1)} L_{p \frac{a}{2}}(\cos \gamma_1) - X_p^{(1)} H_{p \frac{a}{2}}(\cos \gamma_1)|$$
(2.4)

Из (1.9) и значений интегралов, входящих в (2.2), приведенных в работах [2—4], следует, что системы алгебраических уравнений квази- вполне регулярны.

Отметим некоторые частные случаи.

1. В первой задаче (фиг. 1), подставляя $d=0$, получим решение задачи о равновесии прямоугольника с одним внутренним разрезом [5], [6] (фиг. 3).

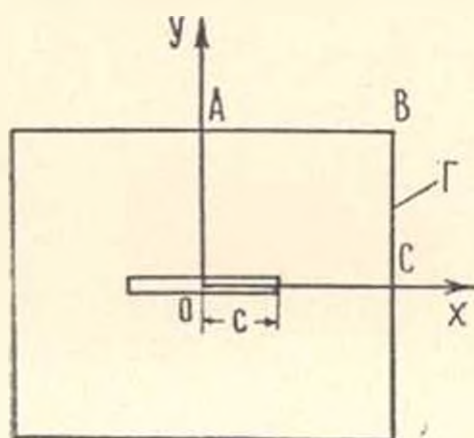
2. При $d=b$ (фиг. 1) получается решение задачи, когда прямоугольник имеет один выходящий на границу разрез (фиг. 4) [7].

3. При $d=b$ (фиг. 2) получается решение для задачи о равновесии прямоугольной области с двумя симметричными разрезами (фиг. 5), ранее рассмотренной в работе [5].

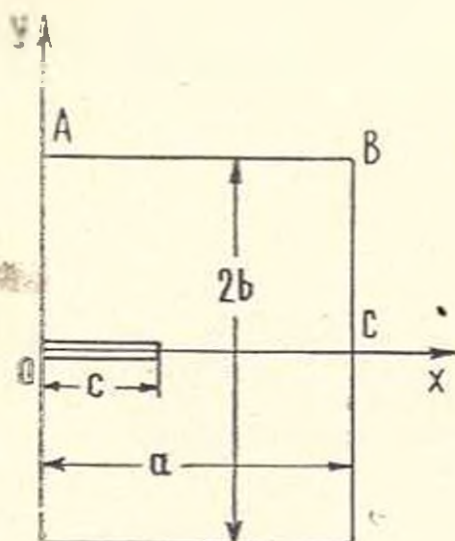
3. В качестве примера для первой задачи вычислим коэффициент при особенности по формуле (1.11) для квадрата, ослабленного равно- сторонним крестообразным разрезом, когда квадрат подвергается дву-

стороннему растяжению равномерными силами P и Q , то есть когда параметры задачи принимают следующие значения:

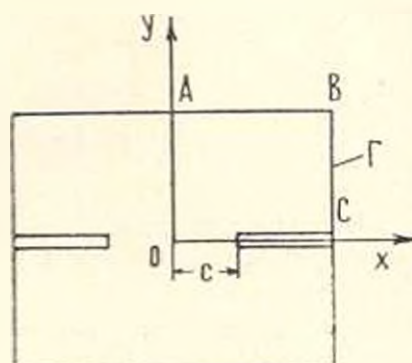
$$a = b = \infty, \quad c = d, \quad a_0 = 2Q, \quad b_0 = 2P, \quad a_s = b_s = 0 \quad (3.1)$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Значение коэффициента R' для некоторых отношений c/a приведены в табл. 1.

Таблица 1

c/a	1/2	1/4	1/10
$R'_1 = \frac{R_1 \sin(\pi c/a)}{1 - \dots}$	$0,843P - 0,021Q$	$0,142P - 0,051Q$	$0,185P - 0,021Q$

В табл. 2 даны значения коэффициента особенности R_2 (2.4) для задачи, приведенной в п. 2, при тех же значениях параметров (3.1).

Таблица 2

c/a	1/2	3/4	9/10
$R_2 = \frac{R_1 \cos(\pi c/2a)}{\sqrt{2}}$	$0.821P - 0.023Q$	$0.432P - 0.015Q$	$0.176P - 0.007Q$

Случай $d = 0$, $c = 0$ первой задачи был рассмотрен в работе [5], где приведены некоторые значения R для различных отношений c/a .

Частные случаи второй задачи $c=0$ и $c=a$ рассматривались в работах Бови и Нила [6, 7], а также в работе [5].

Частный случай первой задачи, когда $a = b = \infty$, $c = d$, $P = Q$ подробно рассматривается в работе Стяллибраса [8].

Для изучения влияния отношений c/d и P/Q на значение коэффициента при особенности R рассмотрим подробно предельный случай п. 1, когда $a = b = \infty$ (фиг. 1), то есть рассмотрим задачу для плоскости, ослабленной крестообразным разрезом, когда плоскость растягивается по направлениям осей ox и oy равномерными силами с интенсивностями соответственно P и Q . Предполагается, что берега разреза нагружены только равномерным давлением p .

4. Решение задачи можно получить из решения задачи п. 1 предельным переходом, когда $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$. Однако, предельный переход затруднителен из-за наличия бесконечных систем в задаче для конечного прямоугольника. Поэтому целесообразно функцию напряжений рассматриваемой задачи представить отдельно в виде

$$\Phi(x, y) = \frac{Py^2 - Qx^2}{2} + \int_0^{\infty} A(z)(1 - \gamma x)e^{-\gamma z} \cos \gamma y dz + \int_0^{\infty} C(\beta)(1 - \beta y)e^{-\beta x} \cos \beta x d\beta \quad (4.1)$$

где неизвестные функции $A(\alpha)$ и $C(\alpha)$ должны определяться из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} z_y(x, 0) &= p \quad (0 \leq x \leq c); & V(x, 0) &= 0 \quad (c \leq x < \infty) \\ z_x(0, y) &= p \quad (0 \leq y < d); & U(x, 0) &= 0 \quad (d \leq y < \infty) \\ z_{xy}|_r &= 0 & z_y(x, \infty) &= Q; \quad z_x(\infty, y) = P \end{aligned} \quad (4.2)$$

Удовлетворяя условиям (4.2), используя при этом формулы (1.3), задачу можно свести к решению следующей системы интегральных уравнений:

$$X(t) = Q - p - \frac{4}{\pi} \int_0^d \frac{\xi^2 Y(\xi) d\xi}{(\xi^2 + t^2)^2}, \quad (0 < t < c) \quad (4.3)$$

$$Y(t) = P - p - \frac{4}{\pi} \int_0^c \frac{\xi^2 X(\xi) d\xi}{(\xi^2 + t^2)^2}, \quad (0 < t < d)$$

где функции $X(t)$ и $Y(t)$ связаны с функциями $A(z)$ и $B(z)$ соотношениями

$$zA(z) = \int_0^d t Y(t) J_0(zt) dt, \quad zC(z) = \int_0^c t X(t) J_0(zt) dt \quad (4.4)$$

Нормальные напряжения на линиях $x=0$, $y=0$ выражаются через функции $X(t)$ и $Y(t)$ формулами

$$\sigma_x(0, y) = \frac{yY(d)}{1 - y^2 - d^2} - Y(0) - \int_0^d \frac{Y Y'(t) dt}{1 - y^2 - t^2} + \int_0^c \frac{yt(y^2 - 2t^2)X(t)}{(y^2 + t^2)^3} dt \quad (|y| > d) \quad (4.5)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{xX(c)}{1 - x^2 - c^2} - X(0) - \int_0^c \frac{X X'(t) dt}{1 - x^2 - t^2} + \int_0^d \frac{xt(x^2 - 2t^2)Y(t)}{(x^2 + t^2)^3} dt \quad (|x| > c)$$

Отметим, что путем замены переменных уравнения (4.3) легко сводятся к системе интегральных уравнений Винера-Хопфа

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) + \frac{e^{-t}}{\pi} \int_0^{\gamma} \frac{\varphi_2(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}^2(t - \frac{\xi}{2} + \gamma)} &= Q_1 e^{-t} \\ \varphi_2(t) + \frac{e^{-t}}{\pi} \int_0^{\gamma} \frac{\varphi_1(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}^2(t - \frac{\xi}{2} - \gamma)} &= P_1 e^{-t} \end{aligned} \quad (4.3')$$

где

$$Q_1 = Q - p, \quad P_1 = P - p, \quad \gamma = \ln z = \ln \frac{d}{c}$$

$$\varphi_1(t) = e^{-t} X(ce^{-t}), \quad \varphi_2(t) = e^{-t} Y(de^{-t})$$

В частном случае при $\gamma=0$ ($c=d$) система (4.3') распадается на два независимых друг от друга уравнения. При $P=Q$ получается только одно уравнение для функции $\varphi(t) = \varphi_1 = \varphi_2$, которое подробно исследовано в работе [8].

Решая приближенно [9] систему уравнений (4.3), для коэффициента при особенности $X(c)$ формулы (4.5) в зависимости от $\alpha = d/c$ получим следующее выражение:

$$X(c) = Q_1 - \frac{2yP_1}{\pi} + \frac{2(P_1 - Q_1)}{\pi^2} [y(\pi - y) - 2\alpha^2 g^2] + \\ + \frac{4P_1 \alpha^2 g^2}{\pi^3} \left[\frac{3(\pi^2 - 8) + 18 - \pi^2}{6(\alpha^2 + 1)} + \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} - \alpha g \right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} - \right. \\ \left. - 0.522 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p! g^p}{(1.5)_p (p + 1.4701)} \right] \quad (4.6)$$

Коэффициент $Y(d)$ получается из формулы (4.6) заменой $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$.

$Q_1 = P_1$. В (4.6) введены обозначения

$$g = (\alpha^2 + 1)^{-1/2}, \quad y = \operatorname{arctg} \alpha - \alpha g, \quad (a)_p = \Gamma(a + p) / \Gamma(a)$$

Погрешность формулы (4.6) не превышает 2%.

При малых значениях α ряд, входящий в (4.6), сходится медленно. Однако, формулы

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{p! g^p}{(1.5)_p (p + 1)} = \frac{1}{g} \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{\alpha} \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p! g^p}{(1.5)_p (p + 2)} = \frac{1}{2g^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} - \alpha g \right)^2 + \frac{1}{2}$$

позволяют вычислить значение этого ряда с любой наперед заданной точностью.

В табл. 3 приведены значения коэффициента при особенности $X(c) = \gamma_1(\alpha) Q_1 - \gamma_2(\alpha) P_1$, вычисленные по формуле (4.6) для конечных значений c и d .

Как видно из табл. 3, изменение функции $\gamma_1(\alpha)$ незначительно ($1 \leq \gamma_1(\alpha) \leq 1.096$ при $0 < \alpha < \infty$), то есть влияние силы Q_1 на значение коэффициента $X(c)$ практически не зависит от отношения $\alpha = d/c$. Влияние же силы P_1 на $X(c)$ при малых значениях α незначительно, а при увеличении α его влияние возрастает, но всегда меньше влияния Q_1 . При $\alpha = 0$, ($d = 0$), $X(c) = Q_1$, то есть не зависит от силы P_1 . При $\alpha = \infty$, ($c = 0$), $X(c) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\pi^2} \right) (Q_1 - P_1) \neq 0$,

но напряжение $\sigma_y(x, 0)$ не имеет особенности, так как сумма первых двух членов формулы (4.5) при $c = 0$ обращается в нуль.

Сравнение результатов работы с имеющимися в литературе решениями частных задач [5—8] показывает, что при одинаковых значениях параметров задач численные результаты (значения коэффициентов при особенностях напряжений) при больших отношениях c/a совпадают.

и при малых — имеются некоторые расхождения, которые возникают из-за приближенности конформного отображения в [6, 7].

Таблица 3

α	$\gamma_1(\alpha)$	$\gamma_2(\alpha)$	α	$\gamma_1(\alpha)$	$\gamma_2(\alpha)$
0.0	1.00000	0.00000	1.6	1.08451	0.41311
0.1	1.00038	0.00049	1.7	1.08613	0.44028
0.2	1.00261	0.00381	1.8	1.08746	0.46582
0.3	1.00751	0.01229	1.9	1.08855	0.48981
0.4	1.01474	0.02727	2.0	1.08947	0.51235
0.5	1.02347	0.04891	2.1	1.09022	0.53351
0.6	1.03276	0.07638	3.1	1.09353	0.68791
0.7	1.04186	0.10828	4.1	1.09429	0.77869
0.8	1.05020	0.14309	5.1	1.09453	0.83721
0.9	1.05756	0.17941	6.1	1.09462	0.87776
1.0	1.06386	0.21611	7.1	1.09466	0.90743
1.1	1.06915	0.25236	8.1	1.09468	0.93004
1.2	1.07354	0.28759	9.1	1.09469	0.94782
1.3	1.07715	0.32144	10.1	1.09470	0.96215
1.4	1.08011	0.35371	101.0	1.09472	1.08138
1.5	1.08253	0.38426	—	—	—

В более частных случаях, например, для плоскости с одним разрезом получается известное решение [10].

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 XI 1972

Ա. Ա. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԻԿՐՅԱՆ

ԽԱՉԱԶԵԿ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկվում է առաձյականության տեսության հարթ խնդիրը խաչաձև կտրվածքներով թուլացված ուղղանկյան համար: Մի դեպքում երկու ներքին ուղղադիմ սիմետրիկ կտրվածքները հատվում են ուղղանկյան կենտրոնում, մյուս դեպքում կտրվածքները սկսվում են ուղղանկյան եզրերի կենտրոններից: Երկու դեպքում էլ խնդրի լուծումը բերվում է կվադրիպոլիկ սեղուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սխեմների անհատների որոշմանը:

Հարումների արտահայտություններում անհատված են եղակիությունները: Նշված են մասնավոր դեպքերը: Բերված են թվային օրինակներ:

ON EQUILIBRIUM OF A RECTANGLE WEAKENED
BY CROSS-SHAPED CUTS

A. A. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A plane problem in the theory of elasticity for a rectangle, weakened by cross-shaped cuts, is considered.

In one case two straight symmetric cuts intersect in the centre of the rectangle while in the other the cuts start from the middle of the rectangle edges.

In both cases the solution to the problem is reduced to determination of coefficients of expansion from quasi-regular infinite systems of algebraic equations.

Some singularities in the expressions for stresses as well as a few particular cases are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. Баблоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. XXXI, вып. 2, № 4, 1967.
3. Баблоян А. А., Гулканли Н. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
4. Баблоян А. А., Мкртчян А. М. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
5. Баблоян А. А., Мкртчян А. М. Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 2, 1972.
6. Бови О. Растяжение прямоугольной пластинки с симметричным разрезом. Прикл. механика, т. 31, № 4, 1964.
7. Бови О., Нил Д. Растяжение прямоугольной пластинки с трещиной на кромке. Прикл. механика, т. 32, № 3, 1965.
8. Stallybrass M. P. A unified approach to the solution of four crack problems in plane elastostatics. Proc. Cambridge Phil. Soc., 70, № 1, 1971.
9. Иванов В. В. Теория приближенных методов. Изд. «Наукова Думка», Киев, 1968.
10. Sneddon I. N., Srivastava R. P. The Stress in the Vicinity of an Infinite Row of Collinear Cracks in an Elastic Body. Proceedings Royal Society of Edinburgh, Section A, vol. LXVII, Part 1, 1965.

Ա. Տ. ՐԱԲԻՆՈՎԻՇ

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ДАВЛЕНИИ ШТАМПА С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ОСНОВАНИЕМ НА ШЕРОХОВАТУЮ УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

В работе [1] эта задача исследуется в предположении, что дополнительное нормальное перемещение, возникающее вследствие деформации неровностей поверхности полуплоскости, пропорционально давлению в первой степени. Из результатов опытов различных авторов [2, 3] вытекает, что это дополнительное перемещение пропорционально давлению в некоторой степени. Поэтому контактная задача описывается уравнением

$$Kp^{1/m}(x) = \int_{-a}^a p(t) \ln |t - x| dt + D \quad (1)$$

где $p(x)$ — давление на участке контакта, $2a$ — ширина штампа,

$Kp^{1/m}(x)$ — функция, пропорциональная дополнительному перемещению.

Число m обычно находится в пределах: $1 \leq m \leq 3$ [2, 3]. Для решения поставленной задачи следует к (1) добавить условие равновесия

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P \quad (2)$$

где P — сжимающая сила.

Обозначим

$$r(x) = p(x) \sqrt{a^2 - x^2}, \quad q(x) = p^{1/m}(x)$$

Дифференцируя (1) и произведя некоторые преобразования, имеем

$$\begin{aligned} Kq'(x) &= \int_{-a}^a \frac{r(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (x - t)} = \int_{-a}^a \frac{r(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{(a^2 - t^2) (x - t)} dt = \\ &= \frac{1}{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{r(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{x - t} dt - \int_{-a}^a \frac{(x - t) r(t)}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - t^2}} dt = \\ &= \frac{1}{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{r(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{x - t} dt - P \frac{x}{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

откуда

$$Kq'(x)(a^2 - x^2) = \int_{-a}^x \frac{r(t)\sqrt{a^2 - t^2}}{x - t} dt - Px$$

Интегрируя это уравнение и деля на $(a^2 - x^2)$, получаем

$$Kq(x) = \frac{1}{a^2 - x^2} \left[2K \int_0^x xq(x) dx + S \right] = \\ = \frac{1}{a^2 - x^2} \int_{-a}^x r(t) \sqrt{a^2 - t^2} \ln \left| \frac{t - x}{t - a} \right| dt + \frac{P}{2} \quad (3)$$

где S — неизвестная константа.

Нелинейное интегральное уравнение (3) будем приближенно решать методом, применявшимся в [4].

Для приближенного решения этого уравнения будем искать такую функцию $q(x)$, которая была бы положительной, удовлетворяла условию (2) и уравнению

$$Kq(x) = \frac{1}{a^2 - x^2} \left[2K \int_0^x xq(x) dx + S \right] = \\ = \frac{1}{a^2 - x^2} \int_{-a}^x r(t) \sqrt{a^2 - t^2} \ln \left| \frac{t - x}{t - a} \right| dt + \frac{P(x)}{2} \quad (3')$$

где $P(x)$ равна P с хорошей степенью точности.

Для достижения этой цели будем подбирать функцию $q(x)$ в виде

$$q(x) = \frac{d_0 + d_1 x^2 + \dots + d_n x^{2n}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2n}}} \quad (4)$$

где $d_0 > 0$.

Тогда

$$r(x) = (d_0 + d_1 x^2 + \dots + d_n x^{2n})^{1/n}$$

Разложим в ряды Маклорена

$$r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{2i}, \quad (1 - x^2)^{-\frac{1}{2n}} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^{2i}$$

Заменим в (3) $r(x)$ выражением

$$r_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^{2i}$$

Можно убедиться, что

$$\frac{1}{a^2 - x^2} \int_{-a}^a r_n(t) \sqrt{a^2 - t^2} \ln \left| \frac{t-x}{t+a} \right| dt = \sum_{l=0}^{2n} N_l x^{2l} \quad (5)$$

где

$$N_l = -\pi \sum_{k=0}^{2n-1} b_{l+k} u_{l,k} a^{2k} \quad (6)$$

Здесь

$$u_{l,k} = - \sum_{i=0}^k \frac{(2i-3)!!}{(l+k-i+1) 2^{i-1} i!} \quad (7)$$

$$(-3)!! = -1, \quad (-1)!! = 1$$

Обозначим

$$d_l = -d_0 \frac{\gamma_l}{a^{2l}}, \quad \lambda = \frac{2K}{\pi m a^{\frac{1}{m}} d_0^{m-1}}, \quad \lambda = - \frac{2S}{\pi m^2 a^2 d_0^2} \quad (8)$$

Отсюда

$$\gamma_0 = -1, \quad \gamma_l \geq 0$$

$$b_l = \left[-m \gamma_l + \frac{m(m-1)}{2} (\gamma_1 \gamma_{l-1} + \gamma_2 \gamma_{l-2} + \dots + \gamma_{l-1} \gamma_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{m(m-1)(m-2)}{6} (\gamma_1 \gamma_1 \gamma_{l-2} + \dots + \gamma_{l-2} \gamma_1 \gamma_1) + \dots + \right.$$

$$\left. + (-1)^l \frac{m(m-1) \dots (m-l+1)}{l!} \gamma_l \right] \frac{d_0^m}{a^{2l}} \quad (9)$$

Разложим левую часть уравнения (3) в ряд

$$Kq(x) + \frac{1}{a^2 - x^2} \left[2K \int_0^x xq(x) dx + S \right] = \sum_{l=0}^{\infty} C_l x^{2l} \quad (10)$$

Оставим в ряде сумму

$$\sum_{l=0}^{2n} C_l x^{2l}$$

Тогда вместо (3) получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$C_0 = \frac{P}{2} - \pi \sum_{k=0}^{2n} b_k u_{0,k} a^{2k}, \quad C_l = -\pi \sum_{k=0}^{2n-1} b_{l+k} u_{l,k} a^{2k} \quad (11)$$

$$(1 \leq l \leq 2n)$$

Предлагаемый метод приближенного решения системы (11) основан на следующем замечательном свойстве коэффициентов $\mu_{i,k}$, вытекающем из табл. 1: при $k \geq 1$ они весьма малы по сравнению с единицей, что, как увидим из дальнейшего, позволяет существенно упростить систему (11).

Таблица 1

Значения $\mu_{i,k}$

$k \backslash i$	0	1	2	3	5	10	20	50	100
0	1.5000	0.0000	0.0208	0.0208	-0.0161	-0.0091	-0.00442	-0.00151	-0.00064
1	0.2500	0.0417	0.0104	0.0010	-0.0039	-0.0043	-0.00269	-0.00109	-0.00049
2	0.1667	0.0117	0.0167	0.0073	0.0007	-0.0021	-0.00181	-0.00087	-0.00041
3	0.1250	0.0375	0.0177	0.0094	0.0029	-0.0008	-0.00128	-0.00072	-0.00036
5	0.0833	0.0298	0.0164	0.0102	0.0045	0.0005	-0.00060	-0.00052	-0.00029
10	0.0455	0.0189	0.0119	0.0084	0.0048	0.0016	0.00017	-0.00025	-0.00019
20	0.0239	0.0105	0.0074	0.0056	0.0037	0.0018	0.00059	-0.00002	-0.00009
50	0.0098	0.0047	0.0034	0.0027	0.0020	0.0012	0.00060	0.00015	0.00011
100	0.0049	0.0024	0.0018	0.0015	0.0011	0.0007	0.00043	0.00016	0.00005

Выполним теперь действия, законность которых будет показана ниже. Во-первых, оставим в системе (11) первые $(n+1)$ уравнений. Во-вторых, в суммах

$$\sum_{k=0}^{2n-1} b_{i,k} u_{k,l} a^{2k}$$

входящих в (11), оставим

$$\sum_{k=0}^l b_{i,k} u_{k,l} \quad \text{при } l=0 \quad \text{и} \quad b_l u_{l,0} \quad \text{при } l \geq 1$$

Кроме того, при $l \geq 2$ оставим в выражении (9) для b_l лишь член

$$-m \tau_{i,l} \frac{d_l^n}{a^n}$$

Тогда получим упрощенную систему относительно d_l

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{P}{2} - \pi d_0^n \left(u_{1,0} - \sum_{k=1}^n m \tau_{1,k} u_{0,k} \right), \quad d_0 > 0 \\ C_l &= \pi m d_0^n \tau_{l,l,0} \frac{1}{a^n}, \quad (1 \leq l \leq n) \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12), (7) и (8) вытекает

$$d_0^m = \frac{P}{\pi [1 + \gamma_1 - m\xi(\lambda - 1)]}, \quad d_0 > 0 \quad (13)$$

$$\gamma_l = \frac{(l+1)\xi}{1 + (l+1)\xi} \left[\left(\sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i f_{l-i} + \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^l \gamma_j f_{l-j} \right) + \lambda \right]$$

где

$$\gamma_2 = 0.0417 (\gamma_2 + \gamma_3), \quad \gamma_0 = -1$$

Неизвестный параметр λ определим из условия равновесия (2) с использованием (13)

$$\int_{-a}^a \frac{\left(1 - \gamma_1 \frac{x^2}{a^2} - \dots - \gamma_n \frac{x^{2n}}{a^{2n}} \right)^m}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \pi [1 + \gamma_1 - m\xi(\lambda - 1)] \quad (14)$$

Оставим в разложении в ряд Маклорена функции

$$\left(1 - \gamma_1 \frac{x^2}{a^2} - \dots - \gamma_n \frac{x^{2n}}{a^{2n}} \right)^m$$

лишь линейные и квадратичные члены относительно γ_i . Ниже будет показано, что это приведет к удовлетворению условия (2) с высокой степенью точности. Относительно λ получаем квадратное уравнение. Значения чисел λ и γ_i при различных m и ξ , а также значения чисел n , λ подсчитывались на БЭСМ-6 при $n = 50$. Из двух получившихся действительных значений λ выберем большее (именно оно позволит удовлетворить (2) и (3) с хорошей степенью точности).

В табл. 2 приведены значения λ , а в табл. 3 — значения верхних границ модулей γ_i при этих значениях λ .

Значения λ

Таблица 2

$\xi \backslash m$	0.1	0.3	0.5	0.7	1	2	5	10
1	1.7203	1.5177	1.4052	1.3328	1.2623	1.1535	1.0682	1.0354
1.5	1.4172	1.3209	1.2587	1.2160	1.1727	1.1030	1.0463	1.0241
2	1.2908	1.2304	1.1880	1.1590	1.1269	1.0760	1.0342	1.0178
3	1.1802	1.1465	1.1207	1.1017	1.0817	1.0486	1.0217	1.0113

Числа γ_i , как правило, оказывались положительными. Подсчитанные значения γ_i позволили проверить, что (14), а следовательно, и (2), выполняется с неточностью, меньшей 1%. (в большинстве случаев неточность значительно меньше 1%). Перейдем теперь к обоснованию метода, то есть покажем, что если числа d_i определять из (12), а λ — из (14), то при $n = 50$ и $1 \leq m \leq 3$ функция $q(x)$ (4) удов-

удовлетворяет уравнению (3), где $P(x)$ равна P с хорошей степенью точности.

Таблица 3

Верхние границы модулей γ_l

l	0.1	0.3	0.5	1	2	5	10
1	0.0368	0.0079	0.0474	0.1585	0.2773	0.3926	0.4425
2	0.0136	0.0540	0.1035	0.1532	0.1666	0.1540	0.1424
3	0.0048	0.0719	0.0979	0.1060	0.0947	0.0782	0.0708
5	0.0261	0.0621	0.0622	0.0520	0.0417	0.0349	0.0325
10	0.0300	0.0278	0.0229	0.0178	0.0150	0.0132	0.0126
20	0.0145	0.0097	0.0083	0.0068	0.0060	0.0054	0.0052
30	0.0082	0.0056	0.0048	0.0040	0.0036	0.0032	0.0031
50	0.0038	0.0028	0.0024	0.0021	0.0019	0.0018	0.0017

Рассмотрим функцию

$$A(x) = \sum_{l=0}^{2n} I_l x^{2l} \quad (15)$$

Здесь I_l представляет собой отброшенное ранее выражение в правой части $(l+1)$ -ого уравнения системы (11) и равно

$$I_l = -\pi \sum_{k=0}^{2n-l} b_{l+k} u_{l+k} a^{2k} \quad (16)$$

где

$$b_{l,k} = \begin{cases} 0 & \text{при } l=0 \text{ и } k=0; 1; \quad l=1 \text{ и } k=0 \\ b_{l+k} + m \gamma_{l+k} \frac{d_0^{2n}}{a^{2(l+k)}} & \text{при } l=0 \text{ и } 2 \leq k \leq 3 \\ & k=0 \text{ и } 2 \leq l \leq n \\ b_{l+k} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Покажем, что $A(x)$ мала по сравнению с $\frac{P}{2}$ при $|x| \leq a$, $1 \leq m \leq 3$ и $n=50$, если числа γ_l и d_0 определять соответственно из (14) и (12).

Обозначим

$$\gamma_{l,k} = b_{l,k} \frac{a^{2(l+k)}}{d_0^{2n}} \quad (17)$$

при $l=0$ и $k=0; 1$, а также при $l=1$ и $k=0$ $\gamma_{l,k}=0$

при $l=0$ и $2 \leq k \leq 3$, а также при $k=0$ и $2 \leq l \leq n$

$$\begin{aligned} \bar{z}_{l,k} &= \frac{m(m-1)}{2} (\gamma_1 \gamma_{l-k-1} + \gamma_1 \gamma_{l+k-2} + \dots + \gamma_{l-k-2} \gamma_1) - \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)}{6} (\gamma_1 \gamma_1 \gamma_{l-k-2} + \dots + \gamma_{l-k-2} \gamma_1 \gamma_1) + \dots + \\ &+ (-1)^{l+k} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-l-k+1)}{(l+k)!} \gamma_1^{l+k} \end{aligned}$$

В остальных случаях

$$\begin{aligned} \bar{z}_{l,k} &= -m \gamma_{l+k} + \frac{m(m-1)}{2} (\gamma_1 \gamma_{l-k-1} + \gamma_1 \gamma_{l+k-2} + \dots + \gamma_{l-k-2} \gamma_1) - \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)}{6} (\gamma_1 \gamma_1 \gamma_{l-k-2} + \dots + \gamma_{l-k-2} \gamma_1 \gamma_1) + \dots + \\ &+ (-1)^{l+k} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-l-k+1)}{(l+k)!} \gamma_1^{l+k} \end{aligned}$$

Положим

$$B_l = - \sum_{k=0}^{2n-l} \bar{z}_{l,k} u_{l,k} \quad (18)$$

Используя (13), получим

$$A(x) = \frac{P}{1 + \gamma_1 - m\bar{z}(\lambda-1)} \sum_{l=0}^{2n} B_l \left(\frac{x}{a} \right)^{2l} \quad (19)$$

Для различных m и $\bar{z}$ нами проведена оценка функции $A(x)$, для чего использовались значения $u_{l,k}$, $\bar{z}_{l,k}$ (частично приведенные в табл. 1 и 2), γ_l и легко проверяемое неравенство

$$\left| \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} - \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-4)}{5!} + \right. \\ \left. + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-5)}{6!} - \dots \right| < \frac{1}{15}$$

при $1 \leq m \leq 3$.

Эта оценка показала, что при $|x| \leq a$, $\bar{z} \geq 0$ ($\bar{z}$ — неотрицательное число), $1 \leq m \leq 3$ и $n = 50$ функция $A(x)$ составляет от $\frac{p}{2}$ меньше, чем

$$2\% \text{ при } |x| \leq 0.8a$$

$$3\% \text{ при } 0.8a < |x| \leq 0.9a$$

$$5\% \text{ при } 0.9a < |x| \leq a$$

Используя (5), (6) и (10), можно убедиться, что при $1 \leq m \leq 3$ и $n = 50$ с высокой степенью точности выполняются равенства

$$\sum_{l=0}^n C_l x^{2l} = Kq(x) + \frac{1}{a^2 - x^2} \left[2K \int_0^x xq(x) dx + S \right] - \pi \sum_{l=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n-l} b_{l+k} u_{l,k} a^{2k} x^{2l} = \frac{1}{a^2 - x^2} \int_0^a r(t) \sqrt{a^2 - t^2} \ln \left| \frac{t-x}{t+a} \right| dt \quad (20)$$

Из системы (12) следует

$$\sum_{l=0}^n C_l x^{2l} = \frac{P}{2} - \pi d_0''' \left(u_{0,0} - \sum_{k=1}^3 m \gamma_k u_{0,k} \right) + \pi m \sum_{l=1}^n d_0''' \gamma_l u_{l,0} \left(\frac{x}{a} \right)^{2l} \quad (21)$$

Из построения функции $A(x)$ вытекает

$$- \pi \sum_{l=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n-l} b_{l+k} u_{l,k} a^{2k} x^{2l} = - \pi d_0''' \left(u_{0,0} - \sum_{k=1}^3 m \gamma_k u_{0,k} \right) + \pi m \sum_{l=1}^n d_0''' \gamma_l u_{l,0} \left(\frac{x}{a} \right)^{2l} + A(x) \quad (22)$$

Вычитая из (21) равенство (22) и используя (20), получим, что $q(x)$ удовлетворяет (3'), где

$$P(x) = P - 2A(x)$$

Из приведенной выше оценки $A(x)$ вытекает, что $P(x)$ равна P с хорошей степенью точности.

Ранее было показано, что построенная нами функция $q(x)$ удовлетворяет (2) с высокой степенью точности. Кроме того, значения γ_l позволяют сделать вывод, что $q(x) > 0$.

Отсюда следует, что функция $q(x)$, определяемая по формулам (12) и (14), является приближенным решением уравнений (2) и (3). Для ее вычисления остается найти лишь параметр ξ .

Из (8) и (13) получаем при $m > 1$ уравнение относительно ξ

$$\frac{\alpha(\xi, m)}{(m\xi)^{\frac{m}{m-1}}} = \left(\frac{\pi a}{2^{m-1} K^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} P \quad (23)$$

где

$$\alpha(\xi, m) = 1 + \gamma - m\xi(l-1)$$

Левая часть уравнения, как можно убедиться, является убывающей функцией от ξ .

При $m = 1$ ξ известно и равно $\xi = \frac{2K}{\pi a}$, что следует из (8).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_l; m_1, m_2, \dots, m_l, \dots, m_k$ — значения ξ и m , рассмотренные в табл. 2 и расположенные в порядке возрастания и, кроме того,

$$m_l \leq m \leq m_{l+1}$$

На основании монотонности левой части (23) выберем такие числа ξ_j и ξ_{j+1} , чтобы $\xi_j \leq \xi < \xi_{j+1}$.

Нами проверено, что при $m_l \leq m \leq m_{l+1}$ и $\xi_j \leq \xi < \xi_{j+1}$ функции $\alpha(\xi, m)$ и $\lambda(\xi, m)$ с достаточной степенью точности можно считать линейными по m и ξ . Поэтому можно представить

$$\alpha(\xi, m) = \alpha(\xi, m_l) + \frac{\alpha(\xi, m_{l+1}) - \alpha(\xi, m_l)}{m_{l+1} - m_l} (m - m_l) \quad (24)$$

где при $k = i, i + 1$

$$\alpha(\xi, m_k) = \alpha(\xi_j, m_k) + \frac{\alpha(\xi_{j+1}, m_k) - \alpha(\xi_j, m_k)}{\xi_{j+1} - \xi_j} (\xi - \xi_j)$$

Заменяя в (24) α на λ , получаем формулы для $\lambda(\xi, m)$. Из (23) и (24) находим ξ и, следовательно, λ и γ_i . Из (4), (8) и (13) вытекает, что давление можно записать в виде

$$p(x) = p_0(x) \frac{\left[- \sum_{i=0}^{50} \gamma_i \left(\frac{x}{a} \right)^{2i} \right]^m}{\alpha(\xi, m)} \quad (25)$$

где

$$p_0(x) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$$

— давление при отсутствии шероховатостей [1, 5].

Необходимо подчеркнуть, что на практике для вычисления $p(x)$ по формуле (25) при $|x| \leq 0.9a$ достаточно заменить

$$\sum_{i=0}^{50} \gamma_i \left(\frac{x}{a} \right)^{2i} \quad \text{на} \quad \sum_{i=0}^5 \gamma_i \left(\frac{x}{a} \right)^{2i}$$

Для вычисления $p(x)$ при $0.9a < |x| \leq 0.95a$ достаточно заменить в (25) верхний предел суммирования 50 на 10. При этом правая часть формулы (25) изменится менее, чем

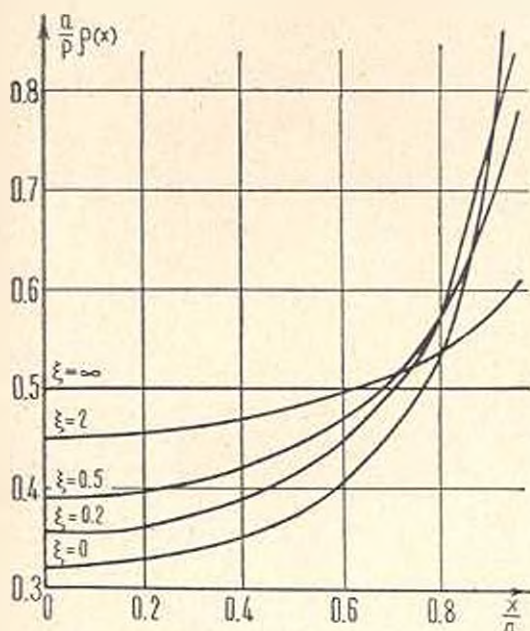
на 1% при $|x| \leq 0.8a$

на 6% при $0.8a < |x| \leq 0.9a$

на 8% при $0.9a < |x| \leq 0.95a$

На фиг. 1 изображены графики давления при $m=2$ и различных ξ .

Остановимся на случае $m=1$, рассмотренном в [1], при котором нелинейное интегральное уравнение (1) становится линейным*.



Фиг. 1.

В [1] на стр. 270 приведены значения давления при $m=1$. Приближенный метод их нахождения основан на разбиении отрезка $[0, a]$ на 5 равных частей и составлении системы линейных уравнений относительно давлений в серединах этих частей.

Таблица 4

Значения $\frac{a}{p_0} p(x)$

x/a	0.1		0.3		0.5		0.7		0.9	
	А	Б	А	Б	А	Б	А	Б	А	Б
0.1	0.3658	0.3648	0.3827	0.3802	0.4239	0.4200	0.5157	0.5060	0.6121	0.7430
1	0.4558	0.4603	0.4615	0.4688	0.4836	0.4871	0.5171	0.5195	0.5791	0.5791
10	0.4913	0.4983	0.4966	0.4995	0.4982	0.5020	0.5025	0.5062	0.5096	0.5147

В табл. 4 приведены значения давления по [1] (столбцы А) и по нашему методу (столбцы Б). Из нее следует, что наше решение при $m=1$ весьма близко к решению в [1].

Автор благодарит Л. А. Галина за обсуждение результатов.

Московский государственный
университет

Поступила 5 II 1973

* Частично этот случай исследован в [6].

Ա. Ս. ՌԱԲԻՆՈՎԻՉ

ԱՆՀԱՐԹ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԿՐԻՈՆԱԲԹՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐ ՈՒՂՂԱԿԵՐ շԻՄՔՈՎ ՇՏԱՄԲԻՆ
ԸՆՇԵՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՏԱՂ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ա փ ո լ մ

Գիտարկվող կոնտակտային խնդիրը բերվում է ճնշման ֆունկցիայի նկատմամբ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման լեյդ հավասարման լուծումը կառուցելու համար ստաջարկվում է մոտավոր անալիտիկ մեթոդ: Մասնակի դեպքի համար բերված է համեմատություն Ի. Ա. Շտալցերմանի լուծման հետ:

A PLANE CONTACT PROBLEM ON THE PRESSURE OF A PUNCH WITH A RECTILINEAR BASIS ONTO A ROUGH ELASTIC SEMI-PLANE

A. S. RABINOVICH

S u m m a r y

The contact problem under examination is reduced to a non-linear integral equation with respect to pressure. An approximate analytical method to solve the equation is suggested. For the particular case a comparison with I. J. Stacerman's solution is presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
2. Рыжов Э. В. Основы расчета стыковых поверхностей деталей машин на контактную жесткость. Машгиз, М., 1962.
3. Деикин Н. Б. Контактирование шероховатых поверхностей. Наука, М., 1970.
4. Рабинович А. С. Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1974.
5. Галин А. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1953.
6. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммными ядрами. Проблемы прочности, № 4, 1971.

Л. Е. ДАННЕЛЯН

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ДЛИННОМ ГАЗОПРОВОДЕ

Для проектирования длинных газопроводов в горных пересеченных местностях особое значение имеет учет угла наклона газопровода и изменения температуры вдоль газопровода. В настоящей работе рассматривается нестационарное неизотермическое движение газа по длинному газопроводу и с помощью численных методов исследуется влияние температуры и угла наклона газопровода на изменение газодинамических параметров.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения.

Начальные и граничные условия

Рассмотрим одномерное нестационарное неизотермическое движение реального газа в длинном газопроводе. Такое движение можно описать системой дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{k\rho u^2}{8r} + \rho g \sin \alpha \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \\ p &= \rho R T, \quad G = g s \rho u \end{aligned} \quad (1.1)$$

где p , u и ρ — соответственно средние по сечению давление, скорость и плотность газа, k — безразмерный коэффициент сопротивления, r — гидравлический радиус сечения трубы, α — угол наклона газопровода, R — газовая постоянная, g — ускорение силы тяжести, G — весовой расход, s — площадь поперечного сечения трубы, T — абсолютная температура.

В данном случае принимается, что температура — любая заданная функция x . Такие задачи встречаются при добыче газа из больших глубин.

Требуется определить давление, плотность, скорость и расход газа в любой момент времени в любом сечении газопровода при нестационарном режиме работы, обусловленном переменным потреблением газа, и произвести исследование вышеуказанных величин в зависимости от изменения температуры газа вдоль трубопровода и от угла наклона трубы.

Пусть начало координат расположено в начале трубы, а ось ox направлена по длине трубопровода. Тогда считая, для определенности, что

температура газа по длине газопровода меняется по линейному закону, можно $T(x)$ выразить следующей формулой:

$$T(x) = T_n - (T_n - T_k) \frac{x}{L} \quad (1.2)$$

где T_n — температура газа в начале трубы, T_k — температура газа в конце трубы, L — длина трубопровода.

С помощью очевидных математических преобразований систему (1.1) можно привести к следующему нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно квадрата давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = & \sqrt{-\frac{1}{4\delta g R T} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1 \sin \alpha}{2\delta g R T^2} \frac{\partial P}{\partial t} +} \\ & + \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{2 \sin \alpha}{RT} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4 \sin \alpha}{RT^2} \frac{\partial T}{\partial x} P \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $P(x, t) = p^2(x, t)$.

Зададим следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad P &= P_n = \text{const} \\ \text{при } x = L \quad \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{RT_k}{4\delta g s^2} G^2(t) - \frac{P_k \sin \alpha}{RT_k} \\ \text{при } t = 0 \quad P &= P_0(x) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $G(t)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения расхода в конце трубопровода; $P_0(x)$ — функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме, которая берется в виде [2]

$$P_0(x) = P_n - (P_n - P_k) \frac{x}{L} \quad (1.5)$$

где P_n и P_k — значения квадратов давления в начале и конце трубопровода.

Определяя давление из (1.3), можно вычислить плотность, скорость и расход газа по следующим формулам:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{gRT(x)} p(x, t) \quad (1.6)$$

$$u(x, t) = \sqrt{-\frac{8\delta g R}{1} \frac{T(x)}{p(x, t)} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} - \frac{8\delta g s \sin \alpha}{1}} \quad (1.7)$$

$$G(x, t) = \frac{s}{RT(x)} p(x, t) u(x, t) \quad (1.8)$$

Итак, задача сводится к решению уравнения (1.3) с граничными и начальными условиями (1.4).

§ 2. Решение поставленной задачи

До перехода к решению задачи уравнение (1.3), условия (1.4) и (1.2) предварительно приводим к безразмерному виду с помощью следующих соотношений:

$$P = P_n P', \quad x = Lx', \quad t = t_0 t', \quad T = T_n T', \quad G = G_0 G' \quad (2.1)$$

где величины со штрихами — безразмерные; P_n , L , t_0 , G_0 , T_n — соответственно характерные: давление, длина, время, расход и температура.

За характерный расход принят расход газа при стационарном режиме работы, за характерное давление — квадрат давления газа при $x=0$ стационарного режима (1.5), за характерную длину — длина газопровода, за характерную температуру — температура газа при $x=0$. Характерное время определится из уравнения (1.3)

$$t_0 = \sqrt{\frac{L^2}{\gamma g R T_n}} \quad (2.2)$$

Уравнение (1.3), граничные и начальные условия (1.4) и (1.2) в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x'^2} = & \left\{ -\frac{1}{T P} \frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{2L \sin \alpha}{R T_n T^2} \frac{\partial P}{\partial t'} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{2L \sin \alpha}{R T_n T} \right) \frac{\partial P}{\partial x'} + \frac{4L \sin \alpha}{R T_n} \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x'} P \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{при } x' = 0 \quad P = 1$$

$$\text{при } x' = 1 \quad \frac{\partial P}{\partial x'} = A G'^2(t') - \frac{P_n \sin \alpha}{R T_n} \quad (2.4)$$

$$\text{при } t' = 0 \quad P = 1 - \left(1 - \frac{P_n}{P_n} \right) x$$

$$T = 1 - \left(1 - \frac{T_n}{T_n} \right) x \quad (2.5)$$

где

$$A = - \frac{\gamma R T_n L G_0^2}{\gamma g P_n S^2}$$

Отметим, что в случае негоризонтального трубопровода начальные и конечные газодинамические параметры надо выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\left| \frac{\partial P}{\partial x'} \right| > \frac{P}{R T} \sin \alpha \quad (2.6)$$

которое следует из уравнения (1.7).

§ 3. Схема численного решения задачи (2.3) — (2.4)

Уравнение (2.3) представим в виде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{T} \left[\sqrt{-\frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial x} - C_2 \sin \alpha} \right] \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{T} (-C_1 - C_2 \sin \alpha) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2C_1 C_2 \sin \alpha}{T^2} \frac{P}{T} \quad (3.1)$$

где

$$-C_1(x) = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad C_2 = \frac{2L}{RT_0}$$

Разрешив уравнение (3.1) относительно $\frac{\partial P}{\partial t}$ и обозначив

$$\frac{1}{T} \left[\sqrt{-\frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial x} - C_2 \sin \alpha} \right] = M(x, t) \quad (3.2)$$

получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{M(x, t)} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{C_1 + C_2 \sin \alpha}{TM(x, t)} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2C_1 C_2 \sin \alpha}{T^2 M(x, t)} P \quad (3.3)$$

В работе [3] рассмотрено модельное уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{M(x, t)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - N(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - H(x, t) \Phi + S(x, t)$$

и указаны схема и метод численного решения этого уравнения. Сравнивая уравнение (3.3) с вышеприведенным уравнением, замечаем, что

$$M(x, t) = \bar{M}(x, t)$$

$$N(x, t) = \frac{C_1 + C_2 \sin \alpha}{TM(x, t)}$$

$$H(x, t) = -\frac{2C_1 C_2 \sin \alpha}{T^2 M(x, t)}$$

$$S(x, t) = 0$$

Следовательно, схему решения §3 работы [3] можно применить к решению задачи (3.3) — (2.4)

Задача решается методом прогонки. Для этой цели на основе алгоритмов, предложенных в работе [3], составлена программа на ЭВМ «Раздан-3».

§ 4. Численный пример

Особый интерес представляют случаи, которые соответствуют значениям $\alpha=0$ (горизонтальный газопровод) и $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (вертикальный газопровод).

Как отмечалось в §3, для решения задачи была составлена программа, реализующая метод прогонки.

В этом параграфе приведено решение конкретного численного примера, соответствующее значению $\alpha=0$ и произведено сравнение полученных результатов с результатами решения изотермической задачи, приведенной в работе [3], с целью выявить влияние температуры на изменение газодинамических параметров.

Для решения задачи заданы следующие числовые данные:

$$L = 10^4$$

$$R = 50 \text{ мКг/кгград}$$

$$\lambda = 0.0119$$

$$d = 0.625 \text{ м}$$

$$T_1 = 360^\circ\text{K}$$

$$G_0 = 31.5 \text{ кг/сек}$$

$$T_2 = 240^\circ\text{K}$$

$$P_1 = 36 \text{ атм}; \quad P_2 = 14 \text{ атм.}$$

$$G(t) = G_0(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4)$$

где G_0 — среднечасовой расход газа; t — время; $a_0 = 1$; $a_1 = 0.03217$; $a_2 = -0.07794$; $a_3 = 0.01530$; $a_4 = -0.00078$. Интервал $[0; 1]$, соответствующий длине газопровода, разбивается на 20 участков, то есть $h = 0.05$; $k = 0.01$.

Здесь h — шаг по переменной x , k — шаг по переменной t . Употреблена неявная схема и обеспечена практическая сходимость метода. Определены законы изменения давления, скорости и расхода.

В табл. 1 приведено решение задачи работы [3], а в табл. 2 — решение задачи, предлагаемой в данной работе. В этих таблицах для сравнения показаны изменения давлений по длине газопровода в отдельные моменты времени. Как замечаем из приведенных таблиц, между полученными результатами есть существенная количественная разница. Это строго замечается в сечениях конечного участка газопровода (1.5–1.9 раза). В том сечении газопровода, абсолютная температура которого равна абсолютной температуре изотермического режима (280°K), замечается количественная разница порядка 12%. При неизотермическом режиме движения давление уменьшается.

Изменения скорости по длине трубопровода для отдельных моментов времени показаны на фиг. 1. Сплошными линиями показаны графики изменения скорости при неизотермическом движении газа, а пунктирными линиями — графики изменения скорости газа при изотермическом движении. Числовые значения скоростей приведены в табл. 3. Изменение расхода газа по длине газопровода для некоторых моментов времени показано на фиг. 2.

Таблица 1

№№	x	$t=0$	$t=1$	$t=2$
		$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$
-1	-0.025	1.01	1.01	1.01
0	0.025	0.99	0.99	0.99
1	0.075	0.97	0.97	0.98
2	0.125	0.95	0.95	0.96
3	0.175	0.92	0.93	0.94
4	0.225	0.90	0.91	0.93
5	0.275	0.88	0.88	0.91
6	0.325	0.85	0.86	0.89
7	0.375	0.83	0.84	0.87
8	0.425	0.80	0.81	0.86
9	0.475	0.77	0.79	0.84
10	0.525	0.74	0.76	0.82
11	0.575	0.72	0.74	0.80
12	0.625	0.69	0.71	0.78
13	0.675	0.65	0.68	0.76
14	0.725	0.62	0.65	0.74
15	0.775	0.58	0.62	0.71
16	0.825	0.55	0.59	0.69
17	0.875	0.51	0.55	0.67
18	0.925	0.45	0.51	0.64
19	0.975	0.42	0.47	0.62
20	1.025	0.36	0.43	0.59

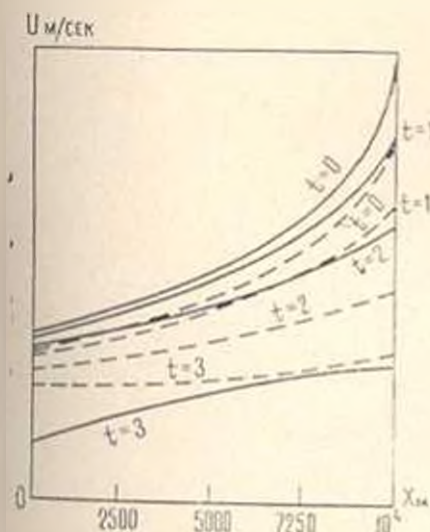
Таблица 2

№№	x	$t=0$	$t=1$	$t=2$
		$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$
-1	-0.025	1.01	1.01	1.01
0	0.025	0.99	0.99	0.99
1	0.075	0.97	0.97	0.97
2	0.125	0.95	0.95	0.96
3	0.175	0.92	0.93	0.94
4	0.225	0.90	0.90	0.92
5	0.275	0.88	0.88	0.89
6	0.325	0.85	0.85	0.87
7	0.375	0.83	0.82	0.85
8	0.425	0.80	0.79	0.82
9	0.475	0.77	0.76	0.80
10	0.525	0.74	0.73	0.77
11	0.575	0.72	0.70	0.74
12	0.625	0.69	0.66	0.71
13	0.675	0.65	0.62	0.68
14	0.725	0.62	0.58	0.65
15	0.775	0.58	0.54	0.62
16	0.825	0.55	0.49	0.58
17	0.875	0.51	0.44	0.55
18	0.925	0.46	0.38	0.51
19	0.975	0.42	0.31	0.47
20	1.025	0.36	0.22	0.43

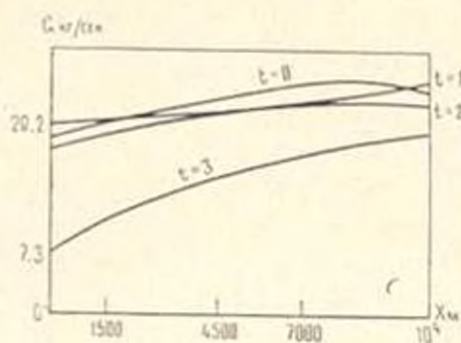
Таблица 3

№№	M	$T = \text{const}$				$T = \text{const}$			
		$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
		$\mu \frac{M}{\text{сг/с}}$	$\mu \frac{M}{\text{сг/с}}$	$\mu \frac{M}{\text{сг/с}}$	$\mu \frac{M}{\text{сг/с}}$	$\mu \frac{M}{\text{сг/с}}$	$\mu \frac{M}{\text{сг/с}}$	$\mu \frac{M}{\text{сг/с}}$	$\mu \frac{M}{\text{сг/с}}$
1	0	24.60	20.83	21.25	18.37	27.33	27.00	24.94	9.90
2	2500	28.45	25.51	21.93	18.81	30.10	30.96	28.87	15.90
3	3250	34.93	31.68	25.07	20.68	33.97	36.98	33.11	19.30
4	5750	36.51	32.85	26.24	21.32	38.70	45.15	37.10	21.50
5	7750	38.33	34.28	26.89	21.66	47.30	57.19	42.14	22.80
6	9750	54.79	47.64	33.40	24.66	55.90	76.00	46.44	23.65
7	10000	63.28	51.92	34.77	25.19	61.50	88.9	49.02	24.50

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

1. Алгоритмы и метод решения работ [3, 4] можно применять к относительно более сложному нелинейному дифференциальному уравнению (1.3), получающемуся из системы уравнений неизоэтермического движения реального газа в длинном газопроводе.

2. При неизоэтермическом нестационарном режиме движения, давление по сравнению с изотермическим режимом, уменьшается (порядка 12—13%), а скорость увеличивается (в отдельные моменты до 40%).

Брянский зооветеринарный
институт

Поступила 1 X 1973

Լ. Ն. ԴԱՆԻՆՅԱՆ

ԻՐԱՎԱՆ ԴԱՋԻ ԶԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱՄ ՈՉ-ԻՋՈՔՆԵՐՄ ՇԱՐՃՈՒՄԸ ԵՐԿԱՐ
ԿԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո Վ մ

Որոշվում է զագի հեշումը, խոռոթյունը, արագությունը և հասրը ոչ-ստա-
թիոնար ուժիմի դեպրում բնդ որում ընդունվում է, որ ջերմաստիճանի փոփոխ-
ման օրենքը ըստ դազամուդի երկարության հայտնի է:

Խնդիրը բերվում է ճնշման քառակուսու նկատմամբ երկրորդ կարգի ոչ
գծային դիֆերենցիալ ավասարման լուծմանը:

անդիրը լուծվում է խառը եզրային պայմաններով: Լուծումը կատարվում է թվային մեթոդով: Այդ նպատակով կառուցվում է թվային լուծման անբացահայտ սխեմա, որը հնարավորություն է տալիս որոշելու վերահիշյալ խնդրի զսղողինամիկական պարամետրերը:

UNSTEADY NON-ISOTHERMAL MOTION OF REAL GAS IN A LONG GAS PIPELINE

L. E. DANIELIAN

S u m m a r y

The temperature variation law along a gas pipeline is assumed to be known, and the pressure, density, velocity and discharge of the gas in unsteady operating conditions of the gas pipeline are determined.

The problem is reduced to the solution of a second order nonlinear differential equation with regard to the square of pressure in mixed boundary conditions.

An implicit scheme of the numerical solution of the problem is constructed which allows to determine the above dynamic parameters of the gas.

The solution is obtained by a numerical method on the „Razdan-3“ computer.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный Н. А. Неустойчившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. Бабаянцян Г. А. Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. высших учебных заведений. «Нефть и Газ», № 1, 1961.
3. Бабаянцян Г. А., Даниелян Л. Е. Неустойчившееся движение реального газа в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, - XXIV, № 6, 1971.
4. Даниелян Л. Е. Неустойчившееся движение реального газа в длинном газопроводе. Изв. АН Арм. ССР, Механика, - XXIII, № 1, 1970.
5. Березин Н. С. и Жилин Н. П. Методы вычислений, т. II. Физматгиз, М., 1969.
6. Рундмакер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Устойчивости пластинок за пределами упругости материала в различных постановках посвящено много исследований ([1—5] и др.).

Для пластинок известно (см. [4], стр. 441), что с экспериментальными данными лучше согласуются теоретические значения критических нагрузок, полученные по деформационной теории пластичности без учета эффекта разгрузки.

В настоящей работе на основе деформационной теории пластичности [1] рассматривается устойчивость пластинок с учетом влияний поперечных сдвигов в условиях продолжающегося нагружения. Аналогичная задача на основе теории течения исследована в работе [5].

1. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h , отнесенную к системе прямоугольных декартовых координат x, y, z . В качестве механических соотношений примем уравнения деформационной теории пластичности несжимаемого материала [1]

$$\varepsilon_x - \frac{1}{2} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{e_1} e_{xx}, \quad \varepsilon_y - \frac{1}{2} \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{e_1} e_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{3e_1} e_{xy} \quad (1.1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ и e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} — компоненты напряжения и деформации,

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\sigma_{xy}^2} \quad (1.2)$$

$$e = \frac{2}{1+3} \left\{ \sqrt{e_{xx}^2 + e_{xx}e_{yy} + e_{yy}^2} + \frac{1}{4} e_{xy}^2 \right\}$$

— интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига.

Пусть в пластинке, которая деформирована за пределами упругости, реализовано безмоментное напряженное состояние

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} \quad (1.3)$$

При выпучивании напряжения в пластинке получают бесконечно малые приращения $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_{xy}, \delta e_{xx}, \delta e_{yy}, \delta e_{xy}$. Принимая гипотезу непрерывного нагружения ([7, 8]), согласно которой искривление пластинки возможно в условиях возрастания нагрузки, обеспечивающих нагружение по всем ее точкам, с помощью (1.1) для вариаций $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y$ и $\delta\sigma_{xy}$ получим

$$\begin{aligned}\delta\tau_x &= a_{11}\delta e_x + a_{12}\delta e_y + a_{13}\delta e_{xy} \\ \delta\tau_y &= a_{21}\delta e_x + a_{22}\delta e_y + a_{23}\delta e_{xy} \\ \delta\tau_{xy} &= a_{31}\delta e_x + a_{32}\delta e_y + a_{33}\delta e_{xy}\end{aligned}\quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{4}{9e_1} \left[3\tau_1 + (2e_x + e_y)^2 \frac{d}{de_1} \left(\frac{\tau_1}{e_1} \right) \right] \\ a_{22} &= \frac{4}{9e_1} \left[3\tau_1 + (2e_y + e_x)^2 \frac{d}{de_1} \left(\frac{\tau_1}{e_1} \right) \right] \\ a_{33} &= \frac{1}{9e_1} \left[3\tau_1 + e_{xy}^2 \frac{d}{de_1} \left(\frac{\tau_1}{e_1} \right) \right] \\ a_{12} &= \frac{2}{9e_1} \left[3\tau_1 + 2(2e_x + e_y)(2e_y + e_x) \frac{d}{de_1} \left(\frac{\tau_1}{e_1} \right) \right] \\ a_{13} &= \frac{2}{9e_1} e_{xy} (2e_x + e_y) \frac{d}{de_1} \left(\frac{\tau_1}{e_1} \right) \\ a_{23} &= \frac{2}{9e_1} e_{xy} (2e_y + e_x) \frac{d}{de_1} \left(\frac{\tau_1}{e_1} \right)\end{aligned}\quad (1.5)$$

Будем исходить из уточненной теории пластинок С. А. Амбарцумяна [6], учитывающей влияние деформации поперечных сдвигов. В условиях отсутствия поверхностных нагрузок для тангенциальных напряжений по этой теории имеем

$$\tau_{xx} = f(z) \varphi(x, y), \quad \tau_{yz} = f(z) \psi(x, y) \quad (1.6)$$

где $f(z)$ — функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине пластинки, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — искомые функции.

Связь между касательными напряжениями (1.6) и соответствующими деформациями поперечных сдвигов пластинки имеет вид [1]

$$\tau_{xx} = \frac{\tau_1}{3e_1} e_{xx}, \quad \tau_{yz} = \frac{\tau_1}{3e_1} e_{yz} \quad (1.7)$$

Пользуясь геометрическими соотношениями

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}, \quad e_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \quad (1.8)$$

где u_x , u_y , u_z — перемещения по направлению осей координат x , y , z , соответственно, с учетом (1.6) и (1.7) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{3e_i}{z_i} f(z) \varphi(x, y) \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{3e_i}{z_i} f(z) \psi(x, y)\end{aligned}\quad (1.9)$$

Пренебрегая изменением нормальных перемещений точек пластинки по ее толщине и деформированием срединной плоскости ($u=v=0$), из (1.9) путем интегрирования по z находим

$$\begin{aligned}u_x &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3e_i}{z_i} J_0(z) \varphi(x, y) \\ u_y &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3e_i}{z_i} J_0(z) \psi(x, y)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Здесь

$$J_0(z) = \int_z^{\infty} f(z) dz \quad (1.11)$$

w — прогиб пластинки.

Используя известные геометрические соотношения, с учетом (1.10) для вариаций деформаций получим

$$\begin{aligned}\delta e_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3J_0(z) \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{z_i} \right) \\ \delta e_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 3J_0(z) \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{e_i}{z_i} \right) \\ \delta e_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 3J_0(z) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{z_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{z_i} \right) \right]\end{aligned}\quad (1.12)$$

Внося (1.12) в (1.4) и присоединяя к ним (1.6), для приращений напряжений вылученной пластинки находим

$$\begin{aligned}\delta \sigma_x &= -z \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 3J_0(z) \left\{ a_{11} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{z_i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + a_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{e_i}{z_i} \right) + a_{13} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{z_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{z_i} \right) \right] \right\} \\ \delta \sigma_y &= -z \left(a_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 3J_0(z) \left\{ a_{22} \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{e_i}{z_i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + a_{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{z_i} \right) + a_{23} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{z_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{z_i} \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \delta \tau_{xy} = & -z \left(a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 3J_0(z) \left\{ a_{13} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + \right. \\ & \left. + a_{23} \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + a_{33} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{\tau_i} \right) \right] \right\} \\ \tau_{xz} = & f(z) \varphi(x, y), \quad \tau_{yz} = f(z) \psi(x, y) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Поступая как обычно, для приращений моментов и поперечных сил получим

$$\begin{aligned} \delta M_x = & -\frac{h^3}{12} \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + 3J_1 \left\{ a_{11} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + a_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + a_{13} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{\tau_i} \right) \right] \right\} \\ \delta M_y = & -\frac{h^3}{12} \left(a_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + 3J_1 \left\{ a_{22} \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + a_{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + a_{23} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{\tau_i} \right) \right] \right\} \\ \delta H = & -\frac{h^3}{12} \left(a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + 3J_1 \left\{ a_{13} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + a_{23} \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + a_{33} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\tau_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{\tau_i} \right) \right] \right\} \\ N_1 = & J_2 \varphi(x, y), \quad N_2 = J_2 \psi(x, y) \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} z J_0(z) dz, \quad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz \quad (1.15)$$

Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки после выпучивания имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta H}{\partial y} = N_1, \quad \frac{\partial \delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta H}{\partial x} = N_2 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

где T_x^0 , T_y^0 , S^0 — внутренние тангенциальные силы начального безмоментного состояния —

$$T_x^0 = h \tau_{xx}, \quad T_y^0 = h \tau_{yy}, \quad S^0 = h \tau_{xy} \quad (1.17)$$

Подставляя (1.14) в (1.16), получим следующую систему относительно функций $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{36J_1}{h^3} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ a_{11} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + \right. \\ & + a_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + a_{13} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) \right] \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\ & + a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{36J_1}{h^3} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ a_{13} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + a_{23} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + \right. \\ & + a_{33} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) \right] \left. + \frac{12J_2}{h^3} \varphi = 0 \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{36J_1}{h^3} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ a_{22} \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + \right. \right. \\ & + a_{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + a_{23} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) \right] \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\ & + a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{36J_1}{h^3} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ a_{13} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + a_{23} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + \right. \\ & + a_{33} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{e_i}{\sigma_i} \right) \right] \left. + \frac{12J_2}{h^3} \psi = 0 \right. \\ & \left. J_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \right. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Это система устойчивости пластинок за пределами упругости материала.

Пренебрегая влиянием деформаций поперечных сдвига, вместо системы (1.18) получим уравнение устойчивости неупругой пластины в классической постановке.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости шарнирно опертой по всему контуру ($x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$) прямоугольной пластины, сжатой в своей плоскости по направлениям x и y давлениями p и kp , соответственно. Для простоты ограничимся случаем линейного упрочнения материала [1]

$$\sigma_i = 3G \{ (1 - \lambda) e_i + \lambda e_s \}, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{3G} \frac{d\sigma_i}{de_i} = \text{const} \quad (2.1)$$

где G — модуль сдвига, e_s — предел упругих деформаций материала.

Полагая

$$T_x^0 = -ph, \quad T_y^0 = -kph, \quad S^0 = 0 \quad (2.2)$$

и используя (1.1), (1.2) и (2.1), находим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \kappa p, & e_1 &= \frac{\kappa p - \lambda p}{3G(1-\lambda)}, & \kappa &= \sqrt{1 - k + k^2}, & \rho_1 &= 3Ge, \\ 2e_x + e_y &= -\frac{\kappa p - \lambda p}{2\kappa G(1-\lambda)}, & 2e_y + e_x &= -k \frac{\kappa p - \lambda p}{2\kappa G(1-\lambda)}, & e_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (1.5) с учетом (2.3) для коэффициентов a_{ij} получим

$$\begin{aligned} a_{11} &= A \frac{4\kappa^2 p - 3B}{\kappa p - B}, & a_{22} &= A \frac{4\kappa^2 p - 3k^2 B}{\kappa p - B}, & a_{33} &= A \frac{\kappa^2 p}{\kappa p - B} \\ a_{12} &= A \frac{2\kappa^2 p - 3kB}{\kappa p - B}, & a_{13} &= a_{23} = 0 \\ A &= \frac{G(1-\lambda)}{\kappa^2}, & B &= \lambda \rho_1, & \frac{e_1}{\varphi_1} &= \frac{1}{3a_{33}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Имея в виду, что коэффициенты a_{ij} не зависят от координат, из (1.18) получим систему устойчивости рассматриваемой шарнирно опертой пластинки

$$\begin{aligned} \frac{\rho h}{J_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \\ a_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_{12} + 2a_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{12J_1}{h^3} \left(\frac{a_{11}}{a_{33}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{12J_2}{h^3} \varphi - \frac{12J_1}{h^3} \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ a_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (a_{12} + 2a_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{12J_1}{h^3} \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{12J_1}{h^3} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{a_{12}}{a_{33}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{12J_2}{h^3} \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Граничные условия шарнирного опирания пластинки с учетом (1.10) и (1.14) представим в виде

$$\text{при } x=0, \quad x=a$$

$$w=0, \quad u_y \text{ или } \psi=0$$

$$M_x = -\frac{h^2}{12} \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{J_1}{a_{33}} \left(a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{при } y=0, \quad y=b$$

$$w=0, \quad u_x \text{ или } \varphi=0$$

$$M_y = -\frac{h^2}{12} \left(a_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{J_1}{a_{33}} \left(a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

Соблюдая эти граничные условия, решение системы (2.5) ищем в форме

$$\begin{aligned} w(x, y) &= C_w \sin \frac{m-x}{a} \sin \frac{n-y}{b} \\ z(x, y) &= C_z \cos \frac{m-x}{a} \sin \frac{n-y}{b} \\ \varphi(x, y) &= C_\varphi \sin \frac{m-x}{a} \cos \frac{n-y}{b} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где C_w, C_z, C_φ — постоянные, m и n — целые числа, показывающие число полуволн искривленной пластинки. Подставляя (2.7) в (2.5), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных:

$$ph \left(\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2} \right) C_w - \frac{J_2 m}{\pi a} C_z - \frac{J_2 n}{\pi b} C_\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi m}{a} \left[a_{11} \frac{m^2}{a^2} + (a_{12} + 2a_{33}) \frac{n^2}{b^2} \right] C_w - \frac{12}{h^3} \left[\frac{J_2}{\pi^2} + J_1 \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{a_{11}}{a_{33}} \frac{m^2}{a^2} \right) \right] C_z - \\ - \frac{12}{h^3} J_1 \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}} \right) \frac{mn}{ab} C_\varphi = 0 \\ \frac{\pi n}{b} \left[a_{22} \frac{n^2}{b^2} + (a_{12} + 2a_{33}) \frac{m^2}{a^2} \right] C_w - \frac{12}{h^3} J_1 \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}} \right) \frac{mn}{ab} C_\varphi - \\ - \frac{12}{h^3} \left[\frac{J_2}{\pi^2} + J_1 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{a_{22}}{a_{33}} \frac{n^2}{b^2} \right) \right] C_z = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Приравняв нулю определитель этой системы (условие существования нетривиального решения), с учетом (2.4) для критического давления получим квадратное уравнение

$$A_1 p^2 - A_2 p + A_3 = 0 \quad (2.9)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] \left[\frac{1}{\pi^2} + 4 \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] \\ A_2 &= \frac{3B}{\pi^3} \frac{J_1}{J_2} \left\{ k^2 \frac{n^2}{b^2} \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(4 \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{a^2} \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + 4 \frac{n^2}{b^2} \right) \right] - 6 \frac{J_1}{J_2} k \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right\} + \\ &\quad + \frac{B}{\pi} \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] \left[\frac{1}{\pi^2} + 4 \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] + \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} A h^2 x^2 \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2}} \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] \\
A_3 = & \frac{A B h^2}{x} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2} \right) \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{J_1}{J_2} (1-k)^2 \frac{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}{\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2}} \left. \right\} + 3 \frac{J_1}{J_2} \frac{B^2}{x^4} \left\{ k^2 \frac{n^2}{b^2} \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(4 \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{m^2}{a^2} \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + 4 \frac{n^2}{b^2} \right) \right] \left. \right\} - 6 \frac{J_1}{J_2} k \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \left. \right\}
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Предположим, что пластинка теряет устойчивость в пределах упругости ($\lambda = 0$). Тогда с учетом (2.1), (2.4) и (2.10) имеем

$$B = 0, \quad A = \frac{G}{x^2}, \quad A_3 = 0 \quad (2.11)$$

Соответствующее значение критического давления p_c из (2.9) определится однозначно

$$p_c = \frac{A_2}{A_1} = \frac{G h^2}{3} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2}} \frac{1}{\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (2.12)$$

В дальнейшем будем считать, что

$$z_1 = z_2 = z_c = p_c > z_0 = 3 G h^2 \quad (2.13)$$

то есть пластинка теряет устойчивость за пределами упругости. С учетом (2.13) и (2.4) для этого случая имеем

$$p_{\text{кр}} > \frac{z_1}{x} > \frac{B}{x} = \frac{\lambda z_1}{x} \quad (2.14)$$

С учетом (2.10) для значения функции

$$\Phi(p) = A_1 p^2 - A_2 p + A_3 \quad (2.15)$$

в точке $p = \frac{B}{x}$ получим

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{B}{x}\right) = & -\frac{1}{12x} \frac{ABh^2}{\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2}} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \left| \frac{m^4}{a^4} (1-2k)^2 + \frac{n^4}{b^4} (2-k)^2 + \right. \right. \\ & + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} (4-7k+4k^2) \left. \right| + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left| \frac{m^2}{a^2} - 2 \frac{n^2}{b^2} + \right. \\ & \left. \left. + k \left(\frac{n^2}{b^2} - 2 \frac{m^2}{a^2} \right) \right|^2 \right\} < 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как функция $\Phi(p)$ отрицательные значения принимает только на отрезке, ограниченном корнями уравнения (2.9), то в силу (2.16) заключаем, что значение $p = \frac{B}{x}$ находится между корнями этого уравнения, то есть

$$p_1 < \frac{B}{x} < p_2 \quad (2.17)$$

Очевидно, что первый корень уравнения (2.9) p_1 не может быть решением задачи, так как для него нарушается условие (2.14).

Таким образом, критическое значение давления $p_{кр}$ определится наибольшим корнем уравнения (2.9)

$$p_{кр} = p_2 = \frac{A_2 + 1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1} \quad (2.18)$$

Для понятия секущего модуля

$$E_c = \frac{\sigma_c}{\epsilon_c} = 3Ax^3 \frac{p}{xp - B} \quad (2.19)$$

к квадратному уравнению (2.9) можно приять формально линейный вид и для критического значения давления записать

$$p_{кр} = \frac{1}{A_1 B E_c} [A_2 B E_c - A_3 x (3Ax^2 - E_c)] \quad (2.20)$$

Однако, выражение (2.20) не является окончательным, так как секущий модуль E_c зависит от неизвестного $p_{кр}$. В этом смысле предпочтительнее отдать выражению (2.18).

Отбрасывая из (2.10) члены, содержащие $\frac{J_1}{J_2}$, получим выражение коэффициентов A , по классической постановке задачи устойчивости

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{B}{x} + \frac{\pi^2}{3} Ah^2 x^2 \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2}} \quad (2.21)$$

$$A_2 = \frac{\pi^2}{4\pi} ABh^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (2.21)$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Для квадратной пластинки ($a=b$), сжимающейся со всех сторон равномерным давлением $p(k=\pi-1)$, из (2.10) получим

$$A_1 = 1 + 8 \frac{J_1}{J_2} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad A_2 = B + \frac{2}{3} \left(Ah^2 + 21 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad (2.22)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} B \left(Ah^2 + 12 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2}$$

б) Полагая в (2.14) $k=0$, $\pi=1$ и переходя к пределу при $b \rightarrow \infty$, получим выражения коэффициентов A_i для шарнирно опертой бесконечной полосы, сжимающейся равномерным давлением p

$$A_1 = 1 + 4 \frac{J_1}{J_2} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad A_2 = B + \frac{1}{3} \left(Ah^2 + 21 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad (2.23)$$

$$A_3 = \frac{1}{4} B \left(Ah^2 + 12 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2}$$

3. Рассмотрим численный пример. Имея в виду, что произвол в разумном выборе закона распределения касательных напряжений по толщине пластинки $j(z)$ не может внести недопустимых погрешностей [6], положим

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (3.1)$$

С учетом (1.11) и (1.15) имеем

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{h^2}{10} \quad (3.2)$$

Пусть

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}, \quad \lambda = \frac{1}{6}, \quad G = 7 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2, \quad \tau_c = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2 \quad (3.3)$$

В табл. 1 представлены результаты вычисления значений критического явления для бесконечной полосы, сжимающейся в направлении коротких сторон. С целью сравнения в последних трех столбцах таблицы приводятся значения критического давления по теории течения [5], рассчитанные для этого же случая (3.3).

Таблица 1

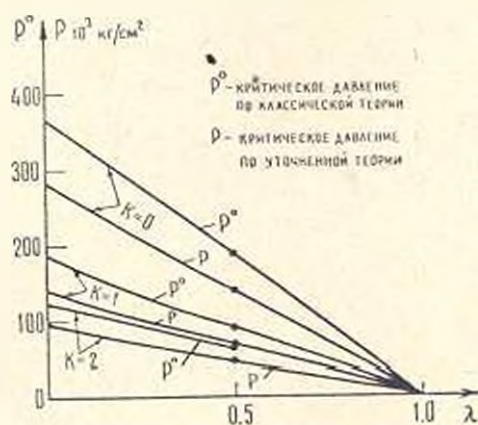
m	P_1 в 10^3 кг/см^2	P_1 в 10^3 кг/см^2	P_1^0/P_1	P_1^1 в 10^3 кг/см^2	P_1 в 10^3 кг/см^2	P_1^0/P_1
1	76,769	66,334	1,157	80,524	70,759	1,138
2	306,827	188,135	1,631	322,096	207,536	1,552

Из этой таблицы видно, что относительные поправки, вносимые со стороны уточненной теории пластинок [6], для обеих теорий пластичности примерно одинаковы. Разница между абсолютными значениями критического давления обусловлена характерами теории пластичности и существенно не зависит от учета влияния деформаций поперечного сдвига. Как и обычно, здесь тоже теория течения дает завышенные значения для критического давления.

Рассмотрим численный пример шарнирно опертой квадратной пластинки, сжимающейся давлениями p и kp . Варьируя значения параметров λ и k , приходим к результатам, представленным в табл. 2.

Таблица 2

$k \backslash \lambda$	0			0.5			1.0		
	в 10^3 кг/см^2	P	P^0/P	P^0	P	P^0/P	P^0	P	P^0/P
0	368.17	280.03	1.32	125.00	140.87	1.31	2.00	2.00	1.00
1	184.23	140.01	1.32	92.37	70.44	1.31	2.00	2.00	1.00
2	122.82	93.34	1.32	61.66	47.00	1.31	1.15	1.15	1.00



Фиг. 1.

С помощью этих данных на фиг. 1 построены графики изменения критических давлений и их отношений в зависимости от параметра λ , характеризующего пластические свойства материала. Из графиков замечаем, что наибольшее расхождение между значениями критических

давления по классической и уточненной теориям имеет место для линейно упругого материала $\lambda=0$. С увеличением пластических свойств это расхождение монотонно убывает и при стремлении материала к идеально-пластическому (при $\lambda \rightarrow -1$) оно полностью исчезает.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 XI 1973

Դ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՈՍԿԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՋԳԱՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ՈԱՇԽԱՆՑ ԱՅՆ ԿՈՂՄ ԸՆԴԱՅՆԱԿԱՆ ՈԱՇԻ ԶԱՇՊԱՌՄԱՐ

Ա ռ ղ և ղ և ղ և ղ և ղ

Պլաստիկության շեփոքացիոն տեսության հիման վրա շարունակող բեռնափորման պայմաններում դիտարկվում է սալերի կայունությունը բնդյալական սալերի հաշվառմամբ: Ստացվում է սալերի կայունության հաճախումների սխեման և բերվում է վերջինիս լուծումը մի քանի մասնավոր դեպքերի համար:

ON STABILITY OF PLATES OUTSIDE ELASTICITY WITH DUE REGARD FOR TRANSVERSAL DISPLACEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

The stability of plates outside elasticity with due regard for transversal displacements in conditions of continued loading in terms of deformation theory of plasticity is considered. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Физматгиз, М., 1969.
3. Угрюмов М. Устойчивость упруго-пластических конструкций. Механика, № 1, 1965.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Физматгиз, М., 1967.
5. Алавердиан С. А. Об устойчивости неупругих пластинок с учетом деформации в реальных средах. ПММ, т. XXVII, в. 4, 1963.
6. Алавердиан С. А. Теория упруго-пластичных пластин. Физматгиз, М., 1967.
7. Shanley F. R. Inelastic column theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, v. XIV, № 5, 1947.
8. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, т. XXI, в. 3, 1957.

А. М. СИМОНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ХРОМО-НИКЕЛЕВОЙ СТАЛИ В УСЛОВИЯХ СТУПЕНЧАТЫХ ИЗМЕНЕНИИ НАПРЯЖЕНИЯ

Большинство энергетических установок и деталей машин работает в условиях нестационарных тепловых и силовых воздействий. Вследствие этого вопрос о предсказании деформативности материалов при произвольных изменениях напряжений и температур в больших пределах деформаций является актуальным. Общепринятые теории ползучести, которые, базируясь на экспериментальных данных о ползучести при постоянных напряжениях и температурах, в ряде случаев правильно предсказывают ползучесть при плавных и ступенчатых изменениях напряжений, в случае циклических или многократно изменяющихся напряжений иногда приводят к заниженной оценке ползучести [1—5]. Иногда цикличность напряжений приводит к ускорению наступления третьей стадии ползучести даже при небольших напряжениях [6]. Эти факты, а также и то, что протекание ползучести с возрастающей скоростью у некоторых металлов является продолжительным и начинается довольно скоро после приложения нагрузки (см., например, [7]), предопределяют учет деформаций ползучести третьей стадии при частых изменениях напряжения, тем более, что при инженерных расчетах, провозимых с целью гарантии от разрушения, вряд ли имеет смысл пренебрегать деформациями с возрастающей скоростью, приводящими к разрушению.

Настоящая работа посвящена исследованию ползучести хромо-никелевой стали X18H10T при ступенчатых и при различных неравномерно-циклических приложениях нагрузок, а также проверке одного феноменологического уравнения, учитывающего деформации «запаздывающей пластичности», обратимые деформации наследственности, а также деформации третьей стадии ползучести.

1. О методике экспериментальных исследований

Опыты производились на испытательной машине Zsl 502.10 Рау-энштейн, у которой были усовершенствованы термомизмерительное и терморегулирующее устройства. В процессе испытания на ползучесть температура измерялась непосредственно на поверхности образца и регулировалась путем периодического включения и выключения нагревательного устройства печи с колебаниями $\pm 2^\circ\text{C}$ и с периодом около 2 мин. В процессе опыта на всех установках температура контролировалась с помощью одного и того же милливольтметра.

Нагрузка на образец передавалась путем плавного подъема с упора двухступенчатого рычажного приспособления, и в процессе опыта ступенчатое изменение напряжения осуществлялось пружину при строгом недопущении динамических эффектов.

Испытуемые образцы $\varnothing 8$ мм выточивались из прутков $\varnothing 15$ мм стали Х18Н10Т при непрерывной подаче масла на обрабатываемую поверхность с целью предотвращения нагрева образца в процессе обработки.

Точность измерения деформация, обеспечиваемая с помощью оптического устройства, составляет $0,5 \cdot 10^{-3}$.

2. О ползучести при постоянных нагрузках

Как показано в работах [8, 9], для ряда материалов, в том числе для нержавеющей стали при относительно небольшой длительности испытаний*, деформации ползучести при постоянных напряжениях и температуре, хорошо описываются следующим аппроксимирующим уравнением

$$\varepsilon_p(t) = \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \gamma t \quad (2.1)$$

где α , β и γ легко определяются [10] значениями напряжения σ и температуры T , при которых проводится испытание на ползучесть. Формула (2.1), как известно, соответствует распространенной схеме Эндрейда.

Однако, как показали проведенные эксперименты при 700°C и при напряжениях $9,30 \text{ кг/мм}^2$, $11,15 \text{ кг/мм}^2$ и $12,40 \text{ кг/мм}^2$ (фиг. 1), при достаточной длительности эксперимента кривые ползучести (показаны сплошными линиями) оказываются вогнутостью вверх, и использование зависимости (2.1) (показано штриховыми линиями) приводит к все возрастающей во времени погрешности.

Штрих-пунктирными линиями показаны теоретические кривые ползучести, построенные, согласно теории старения в применении к (2.1), с учетом изменения длины и поперечных размеров образцов [11] в процессе ползучести. Как вытекает из фиг. 1, возрастание скорости ползучести не определяется указанными причинами и, вероятно, связано с образованием местных трещин [12].

В связи с этим для описания экспериментальных кривых ползучести предлагается феноменологическое уравнение

$$\varepsilon_p(t) = \beta(1 - e^{-\alpha t}) - \gamma t + \varepsilon_{II}(t) \quad (2.2)$$

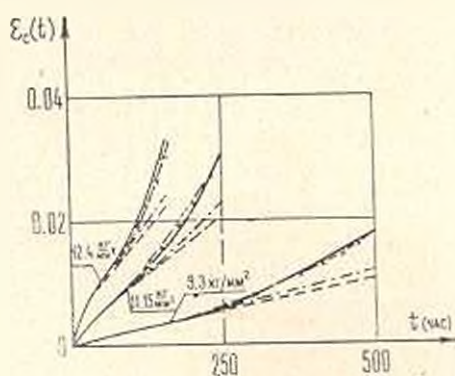
где $\varepsilon_{II}(t)$ — деформации с возрастающей во времени скоростью. На фиг. 1 штриховыми линиями с крестиками показаны кривые, построенные

* Под термином «относительно небольшая длительность испытаний» здесь понимается такая длительность испытаний, при которой деформации, соответствующие III стадии ползучести, пренебрежимо малы по сравнению с общей деформацией ползучести.

ные согласно (2.2) при следующей аппроксимации $\varepsilon_{\text{пл}}(t)$ по напряжению и времени при 700°C:

$$\varepsilon_{\text{пл}}(t) = k \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{13.3} t^3 \quad (2.3)$$

где $k=0.497 \cdot 10^{-3}$ 1/час³, $R=31$ кг/мм² — кратковременная прочность испытываемой стали при 700°C. Отметим, что α , β и γ были взяты соответствующими усредненным экспериментальным кривым без аппроксимации по напряжениям, дабы связанные с этой аппроксимацией приближения не влияли бы на оценку уравнений (2.2) и (2.3). Аналитическое представление деформаций ползучести во времени в форме (2.2) и (2.3), по-видимому, удобнее предложенной в [13] как с точки зрения определения параметров уравнения, так и с точки зрения обобщения на случай переменных напряжений и температур.



Фиг. 1.

3. О ползучести при ступенчатых изменениях напряжения

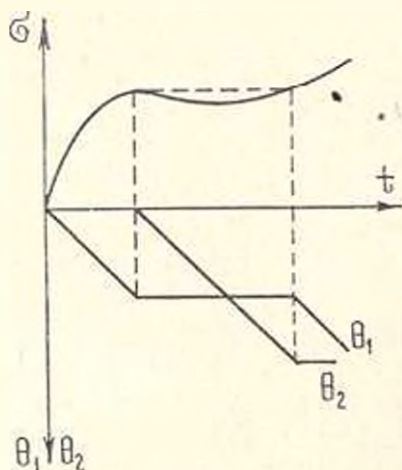
Обобщение уравнения (2.2) на случай переменных напряжений, вообще говоря, может осуществляться различными способами в зависимости от принятой теории ползучести. Однако, обобщение (2.2) при учете (2.3), согласно наследственной теории [14], как это делалось в работе [9] для уравнения (2.1), возможно лишь формально, так как формула (2.3) с некоторого момента времени описывает ползучесть с возрастающей скоростью, что при принятии принципа наследственности соответствует усиливающейся памяти материала. Невозможность существования материала с усиливающейся памятью демонстрируется на опыте по обратной ползучести, где деформации ползучести после полной разгрузки должны были бы неограниченно расти с возрастающей скоростью в направлении предшествующего напряжения, что невозможно.

Использование наследственного принципа для первого члена (2.2) в случае уменьшающихся во времени напряжений приводит к завышен-

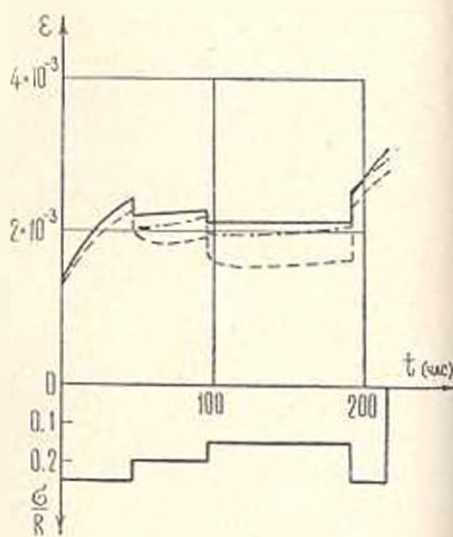
ным деформациям обратной ползучести [9], в связи с чем затухающая часть ползучести (β -ползучесть) здесь, аналогично [15, 16], рассматривается как сумма обратимой деформации ползучести (β_0 -ползучести) и деформации запаздывающей пластичности (β_1 -ползучести). Обобщение (2.2) на случай переменных напряжений запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) = & \int_0^t \beta_0[\sigma(\tau)] \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau + \sigma[\sigma(\tau)] d\tau \\ & + \int_0^{\theta_1} \beta_1[\sigma(\tau + t_2)] \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau + \Pi[\sigma(t)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

где θ_1 — сумма промежутков времени, в течение которых действующее напряжение не меньше максимально достигнутого за предшествующее время нахождения образца под нагрузкой, $\theta_2 = t - \theta_1$ (правило определения θ_1 и θ_2 в зависимости от изменения напряжения $\sigma(t)$ во времени проиллюстрировано на фиг. 2). $\Pi[\sigma(t)]$ — некоторый оператор, описывающий деформации с возрастающей скоростью и вырождающиеся при постоянных напряжениях в (2.3). Отметим, что деформации ползучести за вычетом третьей стадии могли бы быть обобщены на случай переменных напряжений согласно теории Малинина—Хаживского [17], которая, как показано в [10], лучше описывает деформационные кривые, однако применяемая запись при своей относительной простоте не приводит к большим погрешностям.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 3 представлены деформационная кривая (сплошная линия) стали Х18Н10Т при 600°C и при ступенчато-переменном напряжении [9] при длительности эксперимента, когда деформации $\varepsilon_{\text{кр}}(t)$ практи-

чески не проявляются, а также теоретические кривые — штрих-пунктирная, построенная согласно (3.1) при пренебрежении $\Pi[\sigma]$, и штриховая, построенная согласно обычной наследственной теории без выделения деформаций запаздывающей пластичности и с нелинейными по напряжениям мгновенными деформациями. Значения $\beta_0(\sigma)$, используемые при построении соответствующих теоретических кривых, определены из опытов на обратную ползучесть.

Из сравнения приведенных кривых заключаем, что уравнение (3.1) существенно лучше описывает деформационные кривые ползучести, чем обычное уравнение наследственности, и, следовательно, некоторые усложнения, связанные с выделением деформаций запаздывающей пластичности, иногда могут быть оправданы.

Рассмотрим теперь вопрос построения оператора $\Pi[\sigma]$, или что то же, обобщения (2.3) на случай переменных напряжений. Как было указано выше, оператор $\Pi[\sigma]$ будет внутренне противоречивым при обобщении (2.3) согласно наследственному принципу. Естественным представляется в применении к $\varepsilon_{III}(t)$ использовать основной принцип гипотезы уравнения состояния [1], согласно которой скорость ползучести $\frac{d\varepsilon_{III}}{dt}$ однозначно определяется напряжением, температурой и ε_{III} , имеющими место в данный момент, независимо от истории нагружения.

Для построения соответствующего уравнения дифференцируется (2.3) при условии постоянного напряжения и в полученный результат подставляется время t , выраженное через σ и ε_{III} , согласно (2.3),

$$\frac{d\varepsilon_{III}}{dt} = 3k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{4.4(3)} \varepsilon_{III}^{\frac{2}{3}} \quad (3.2)$$

Распространяя (3.2) на случай переменных напряжений, после интегрирования получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{III}(t) = \Pi[\sigma(t)] &= k \left[\int_0^t \left(\frac{\sigma(\tau)}{R} \right)^{4.4(3)} d\tau \right]^3 = \\ &= 3k \int_0^t \left[\frac{\sigma(\tau)}{R} \right]^3 \left[\int_0^{\tau} \left(\frac{\sigma(\xi)}{R} \right)^{4.4(3)} d\xi \right]^2 d\tau \end{aligned} \quad (3.3)$$

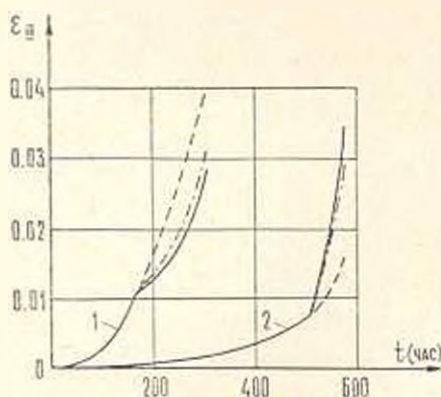
Формула (3.3) является обобщением (2.3) согласно принципу гипотезы уравнения состояния; в этом случае для деформации $\Pi[\sigma(t)]$ имеет место коммутативный закон [18].

Запишем выражение $\Pi[\sigma(t)]$ в более общем виде

$$\Pi[\sigma(t)] = 3k \int_0^t \left[\frac{\sigma(\tau)}{R} \right]^3 \left[\int_0^{\tau} \left(\frac{\sigma(\xi)}{R} \right)^{\lambda} d\xi \right]^2 d\tau \quad \lambda + 2\nu = 13.3 \quad (3.4)$$

При $\lambda = 4.4(3)$ уравнение (3.4) вырождается в (3.3).

На фиг. 4 сплошными линиями показаны экспериментальные кривые деформаций ползучести за вычетом затухающей и установившейся долей ползучести, определяемых в отдельности для каждого образца, в условиях одноступенчатых изменений напряжений от 12.40 кг/мм² до 11.15 кг/мм² (линия 1) и от 9.30 кг/мм² до 11.15 кг/мм² (линия 2). Штриховыми линиями показаны теоретические кривые, построенные согласно гипотезе уравнения состояния в применении к eqn (3.3), с штрих-пунктирными — согласно (3.4) при $\lambda=10$. Как заключаем из фиг. 4, выражение (3.2) для $\Pi(\sigma(t))$ при $\lambda=10$ хорошо описывает деформации с возрастающей скоростью как в случае повышения напряжения, так и в случае его понижения.



Фиг. 4.

В связи с вышеизложенным, уравнение ползучести при переменных напряжениях запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \int_0^t [\beta_0[\varepsilon(\tau)] \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} + \alpha[\varepsilon(\tau)]] d\tau + \\ & + \int_0^{\theta_1} [\beta_1[\varepsilon(\tau + \theta_2)] \gamma e^{-\gamma(\theta_1-\tau)}] d\tau + 3k \int_0^t \left[\frac{\varepsilon(\tau)}{R} \right]^2 \left[\int_0^{\tau} \left(\frac{\varepsilon(\xi)}{R} \right)^2 d\xi \right]^2 d\tau \quad (3.5) \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению ползучести при циклических нагружениях. Как отмечается в работе [4], действие циклических перегрузок приводит к возрастанию установившейся скорости ползучести, а в работе [5] предложена система уравнений структурной теории ползучести, согласно которой циклические нагружения приводят к так называемой «ускоренной» деформации по отношению к случаю действия постоянного напряжения. Отметим, что в некоторых экспериментальных исследованиях [19, 20] «ускоренные» деформации не имели места. Согласно (3.3), в случае циклических нагружений (до одного и того же напряжения), чередующихся с полной разгрузкой как для равномерных, так и для неравномерных циклов, деформации ползучести, за вычетом

затухающей и установившейся частей, определяются лишь временем нахождения образца под данной нагрузкой. Этот принцип в известной мере аналогичен линейной теории накопления повреждений (см., например, [21, 22]) в теории длительной прочности.

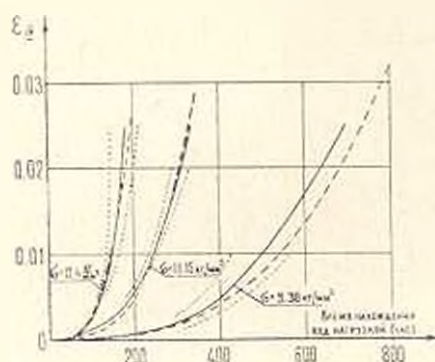
Для проверки указанного принципа были проведены экспериментальные исследования той же стали при 700°C и при циклических нагружениях до напряжений 9.30 кг/мм^2 , 11.15 кг/мм^2 и 12.40 кг/мм^2 в условиях различных и существенно неравномерных циклов. Эксперименты при циклических нагружениях до 9.30 кг/мм^2 проводились с общей длительностью от 268 до 1226 часов со средней продолжительностью цикла от 16 до 60 часов и с общим количеством циклов от 6 до 35, причем выдержка на одной ступени изменялась в весьма широких пределах — от 1 часа до 840 часов. При нагружениях до 11.15 кг/мм^2 эксперименты проводились с общей длительностью от 76 до 554 часа со средней продолжительностью цикла от 15 до 79 часов и с общим количеством циклов от 7 до 33, причем выдержка напряжения на одной ступени изменялась от 1 часа до 283 часа. При нагружениях до 12.40 кг/мм^2 эксперименты проводились с общей длительностью от 274 до 428 часов со средней продолжительностью цикла от 12 до 50 часов и с общим количеством циклов от 7 до 21, причем выдержка напряжения на одной ступени изменялась от 1 часа до 139 часов. Отношение длительности нахождения под нагрузкой к общей длительности эксперимента изменялось при 9.30 кг/мм^2 и 11.15 кг/мм^2 в пределах 0.5—0.8, а при 12.40 кг/мм^2 — в пределах 0.3—0.8. Экспериментальные кривые были построены в координатах $\varepsilon_{\text{пл}}$ — время нахождения образца под нагрузкой для различных случаев циклического нагружения. Указанные экспериментальные кривые $t_*(\varepsilon)$ оказались сгруппированными около усредненных кривых $t_*(\varepsilon)$ при соответствующих постоянных нагрузках, причем отклонения

в форме
$$\frac{\int_0^{\varepsilon} |t_*(\varepsilon) - t_*(\varepsilon)| d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon} t_*(\varepsilon) d\varepsilon}$$
 при любых деформациях ε не превы-

шали 20%. При этом не было найдено какой-либо закономерности этих отклонений в зависимости от средней продолжительности цикла.

На фиг. 5 сплошными линиями показаны усредненные экспериментальные кривые при циклическом нагружении, штриховыми линиями — теоретические кривые, построенные согласно (3.4) (для данной программы нагружения теоретические кривые инвариантны в отношении значения λ), пунктирными линиями ограничена область, в которой с вероятностью 0.9 находится усредненная кривая из бесчисленного множества экспериментов, то есть математическое ожидание соответствующей кривой ползучести (вычисления проделаны согласно [23]). Указанные области расширяются при больших деформациях (0.02—0.05), однако это расширение связано не с увеличением разброса экспериментальных кривых, а с тем, что до этих деформаций было доведено мень-

ше образцов, чем при меньших деформациях. При $\varepsilon_{III} > 0.02$, $\sigma = 11.15 \text{ кг/мм}^2$ и $\varepsilon_{III} > 0.01$, $\sigma = 9.30 \text{ кг/мм}^2$ количество образцов было меньше пяти и поэтому приведены лишь усредненные кривые без вероятностных оценок.



Фиг. 5.

И сравнения экспериментальных и теоретических кривых можно заключить, что уравнение (3.3) в применении к испытанной стали, несмотря на экстраполяцию до большей продолжительности действия нагрузки (ср. с данными фиг. 1), вполне удовлетворительно описывает ползучесть в больших пределах деформаций как в случае возрастающих или убывающих напряжений, так и при различных циклических нагружениях, чередующихся с разгрузкой.

Для приложений уравнение (3.3) в некоторых случаях может быть упрощено путем пренебрежения членами β_0 и β_1 , что при длительных воздействиях напряжений приводит к незначительным погрешностям.

В заключение приводится таблица усредненных значений α , β , γ и β_0 при 700°C .

Таблица

σ (кг/мм ²)	α (10^{-5} /мин)	β (10^{-5})	β_0 (10^{-5})	γ ($\frac{1}{\text{час}}$)
9.3	0.035	16	37	0.07
11.15	0.129	200	50	0.07
12.14	0.183	470	56	0.07

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ

ԽՐՈՄՆԻԿԵԼԱՅԻՆ ՊՈԼՊԱՏԻ ԲԱՐՁՐԱՋՆՐԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ
 ՀԵՏԱՋՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԼԱՐՄԱՆ ԱՍՔԻՃԱՆԱՅԻՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
 ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. է. մ.

Հետազոտվում է խրոմանիկելային պողպատի սողքը 700° -ի դեպքում անփոփոխ, աստիճանա-փոփոխական և անհավասար շիկլիկ լարման պարմաններում: Կառուցվում է երևույթի նկարագրման ընդհանուր հավասարումը, որը հաշվի է առնում «ուշացող պլաստիկության» դեֆորմացիաները, ժառանգականության վերադարձող դեֆորմացիաները ինչպես և սողքի երրորդ աստիճանի դեֆորմացիաները:

AN INVESTIGATION ON HIGH-TEMPERATURE CREEP
 OF CHROME-NICKEL STEEL IN CONDITIONS
 OF STEP CHANGES IN STRESSES

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

The creep of chrome-nickel steel at 700°C in conditions of step-variable and non-uniformly cyclic stresses is investigated. A phenomenologic equation describing deformations of "delay plasticity", reversible deformations of heredity as well as deformations of the third stage of creep is derived.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Работнов Ю. И. Ползучесть элементов конструкций. Наука, М., 1966.
2. Франссон А. Влияние одновременного циклического изменения напряжения и температуры на жаропрочный материал. Усталость металлов. ИЛ, М., 1961.
3. Кеннеди А. Дж. Влияние переменных напряжений на ползучесть и отдых. Усталость металлов. ИЛ, М., 1961.
4. Кохей Р. Г., Хойт В. Б. Влияние циклических перегрузок на скорости ползучести и время разрыва никонеля при 925 и 980°C . Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. Госэнергоиздат, М.—Л., 1960.
5. Lagneborg R. A theoretical approach to creep deformation during intermittent load. Trans. ASME, D, 93, № 2, 1971.
6. Гварниери Г. Характеристики длительной прочности листовых материалов при циклических нагрузках и температурах. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. Госэнергоиздат, М.—Л., 1960.
7. Ковпак В. И. К вопросу о прогнозировании ползучести жаропрочных металлов. Проблемы прочности, № 4, 1971.

8. Гарофало Ф. Законы ползучести и длительной прочности металлов. Металлургия, М., 1968.
9. Симонян А. М. Экспериментальное исследование ползучести нержавеющей стали Х18Н10Т при 600°C. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 6, 1969.
10. Симонян А. М. К вопросу о изотермической ползучести хромо-никелевой стали. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 6, 1972.
11. Андреде Э. Н. да Ч. Представление о ползучести. Сб. «Ползучесть и возврат». Металлургиздат, М., 1961.
12. Салли А. Ползучесть металлов и жаропрочные сплавы. Оборонгиз, М., 1953.
13. Murry G. Contribution a l'etude de la forme des courbes de fluage des aciers. Rev. met. (France), 67, № 10, 1970.
14. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы ползучести. Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.
15. Брызгалов Г. И. О ползучести при переменных напряжениях. ПМТФ, № 3, 1962.
16. Самарин Ю. И. Об одном обобщении метода разделения деформации в теории ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1971.
17. Малайкин Н. Н., Хажинский Г. М. К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением. МТТ, № 3, 1969.
18. Одкинст Ф. Технические теории ползучести. Механика (сб. переводов), 2, 1959.
19. Герберт Д. С., Армстронг Д. Т. Испытание на ползучесть сплавов никоник при изменяющихся напряжениях и температуре. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. Госэнергониздат, М.—Л., 1960.
20. Симмонс В. Ф., Кросс Н. С. Испытание различных материалов на ползучесть при постоянном и переменном напряжении. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. Госэнергониздат, М.—Л., 1960.
21. Журков С. Н., Токмашевский Э. Е. Временная зависимость прочности при различных режимах нагружения. Сб. «Некоторые проблемы прочности твердого тела», Изд. АН СССР, 1959.
22. Миллер Дж. Влияние температурных циклов на прочность некоторых жаропрочных сплавов. Сб. «Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях». Госэнергониздат, М.—Л., 1960.
23. Гмурман В. Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Высшая школа, М., 1966.

Ю. И. НОВИЧКОВ

ИЗГИБ СЛОИСТЫХ СТЕРЖНЕЙ С ПРОСКАЛЫЗЫВАНИЕМ
МЕЖДУ СЛОЯМИ

Начиная с работ, посвященных в [1], теория слоистых стержней, пластин и оболочек развивается достаточно интенсивно. В настоящее время имеется несколько различных подходов к исследованию поведения слоистых конструкций. О современном состоянии теории можно судить по обзору [2]. Практически во всех предложенных теориях не учитывается возможность проскальзывания между слоями. В настоящей заметке дается распространение теории слоистых сред, предложенной в [3, 4], на случаи учета проскальзывания между слоями. В качестве примера рассматривается задача изгиба опертого по концам трехслойного стержня. Заметим, что к рассматриваемому вопросу примыкают работы, связанные с расчетом составных стержней (см., например, [5]).

1. Рассмотрим многослойный стержень длиной $2l$ (пластину в условиях цилиндрического изгиба), состоящий из чередующихся слоев различной жесткости. Для простоты будем считать, что стержень по толщине имеет регулярную структуру и ограничен слоями повышенной жесткости. Жесткие слои толщины h , согласно [3, 4], подчиняются гипотезам Кирхгофа-Лява, а для мягких слоев существенны поперечные деформации и сдвиги. При этом считается, что по толщине мягкого слоя s они распределены равномерно. Уравнения равновесия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dN_x^x}{dx} - \frac{1}{s} (N_{xz}^{x-1} \gamma_{xz1} - N_{xz}^{x+1} \gamma_{xz1}) &= 0 \\ \frac{dQ^x}{dx} - \frac{1}{s} (N_x^x \gamma_{xz1} - N_x^{x+1} \gamma_{xz1}) &= q^x \\ \frac{dM^x}{dx} - Q^x + \frac{k+s}{s} (N_{xz}^x \gamma_{xz1} + N_{xz}^{x+1} \gamma_{xz1}) &= 0 \\ \gamma_{xz1} &= 1 - \epsilon_{xz}, \quad x = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.1)$$

Усилие Q^x из (1.1) может быть исключено. Усилия N_x^x , N_x^x и моменты M^x можно выразить через перемещения

$$N_x^x = A \frac{du_x}{dx}, \quad N_x^x = \frac{B}{s} (w_{x+1} - w_x), \quad M^x = D \frac{d^2 w_x}{dx^2} \quad (1.2)$$

где A — жесткость на растяжение, B — трансверсальная жесткость, D — жесткость на изгиб соответствующих слоев.

Если проскальзывание отсутствует, то усилие N_{xz}^* определяется по формуле

$$N_{xz}^* = G_m \left[u_{i-1} - u_i + \frac{h+s}{2} \left(\frac{dw_{i-1}}{dx} + \frac{dw_i}{dx} \right) \right] \quad (1.3)$$

где G_m — модуль сдвига материала мягкого слоя.

Подстановка (1.2) и (1.3) в (1.1) после исключения Q^* приводит к уравнениям теории многослойных сред без проскальзывания [3, 4].

Предположим теперь, что в некоторых областях N_{xz}^* превысило допустимое значение. В силу принятия предположения о равномерном распределении деформаций в мягком слое проскальзывание будет происходить одновременно по обеим поверхностям мягкого слоя. Рассмотрим жесткий слой номера α . Зоны проскальзывания на поверхностях этого слоя с мягкими слоями номера α и номера $\alpha-1$ делят этот слой на ряд характерных областей. Возможны при этом области четырех типов: 1⁰ — на обеих сторонах жесткого слоя нет проскальзывания; 2⁰ — на обеих сторонах имеется проскальзывание; 3⁰ — проскальзывание есть только с мягким слоем номера α и 4⁰ — проскальзывание только с мягким слоем номера $\alpha-1$. Выяснение характера расположения возможных областей проскальзывания может быть проведено путем анализа решения задачи изгиба стержня заданной нагрузкой без учета проскальзывания и построения элюр распределения тангенциальных усилий N_{xz}^* .

В качестве критерия существования проскальзывания примем превышение усилием N_{xz}^* предельного значения N_1^* . Если $N_{xz}^* < N_1^*$, проскальзывание отсутствует. В зоне проскальзывания $N_{xz}^* = N_1^*$. При этом относительно N_1^* могут быть приняты различные предположения. Пристейшим является предположение, что $N_1^* = N_1 = \text{const}$. Другим предположением может служить гипотеза о пропорциональности N_1^* нормальному (трансверсальному) усилию N_z^* , то есть $N_1^* = f N_z^*$, где $f = \text{const}$.

Для получения системы уравнений для перечисленных случаев 2⁰–4⁰ необходимо в системе (1.1) заменить для данного α N_{xz}^{*-1} и (или) N_{xz}^* в соответствии с данным случаем значением N_1^* .

Пусть $x = x_i^*$ есть граница области проскальзывания α -го жесткого и α -го мягкого слоев. На этой границе должны выполняться условия непрерывности перемещений и касательных усилий

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i^-, & \frac{du_i^*}{dx} &= \frac{du_i^-}{dx}, & w_i^* &= w_i^-, & \frac{dw_i^*}{dx} &= \frac{dw_i^-}{dx} \\ \frac{d^2 w_i^*}{dx^2} &= \frac{d^2 w_i^-}{dx^2}, & \frac{d^3 w_i^*}{dx^3} &= \frac{d^3 w_i^-}{dx^3}, & N_{xz}^{*-} &= N_1^* \end{aligned} \quad (1.4)$$

Знаком "+" отмечены величины, относящиеся к зоне проскальзывания $x > x^*$, "-" отмечены величины для области $x < x^*$, где проскальзывания нет. Первых шести условий достаточно для стыковки решений на границе $x = x^*$, последнее служит для определения границы области проскальзывания x^* .

2. В качестве примера рассмотрим изгиб стержня, состоящего из двух жестких слоев и находящегося под действием равномерной нагрузки p . Для каждого слоя выполняются условия свободного опирания. Пусть проскальзывание отсутствует. Система (1.1), записанная в перемещениях, примет вид

$$\begin{aligned}
 a W_1^{IV} - b (W_2 - W_1) + \lambda (U_2 - U_1 + W_1' + W_2') &= 2q \\
 a W_2^{IV} + b (W_2 - W_1) + \lambda (U_2 - U_1 + W_1' + W_2') &= 0 \\
 U_1' + \lambda (U_2 - U_1 + W_1' + W_2') &= 0 \\
 U_2' - \lambda (U_2 - U_1 + W_1' + W_2') &= 0
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где введены следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= w_0/c, & U_0 &= u_0/c, & 2c &= h + s \\
 \lambda &= \frac{G_0 c^2}{As}, & a &= -\frac{D}{Ac^2}, & b &= \frac{Bc^2}{As} \\
 2q &= \frac{pc}{A}, & \xi &= x/c, & L &= l/c
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Штрихи в (2.1) означают производные по ξ . На краях стержня должны выполняться условия

$$W_1 = W_2 = W_1' = W_2' = U_1 = U_2 = 0 \quad \text{при } \xi = \pm L \quad (2.3)$$

Введение новых переменных

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{2} (W_1 - W_2), & w' &= \frac{1}{2} (W_2' - W_1') \\
 u &= \frac{1}{2} (U_2 - U_1), & u' &= \frac{1}{2} (U_1' + U_2')
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

приводит к уравнениям

$$a w^{IV} + 2\lambda (u' + w') = q, \quad u'' + 2\lambda (u + w') = 0 \quad (2.5)$$

$$u^{(4)} = 0, \quad a w^{(4)} + 2b w' = -q \quad (2.6)$$

и условиями

$$w = w' = w'' = w''' = u = u' = 0 \quad \text{при } \xi = \pm L \quad (2.7)$$

Решение (2.6), удовлетворяющее (2.7) и условию отсутствия смещения как жесткого целого, будет

$$\begin{aligned} w = -\frac{q}{2b} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \beta L \cos \beta L \operatorname{ch} 3\beta \cos 3\beta + \operatorname{sh} 3\beta \sin \beta L \operatorname{sh} 3\beta \sin 3\beta}{\operatorname{ch}^2 \beta L \cos^2 \beta L + \operatorname{sh}^2 \beta L \sin^2 \beta L} \right] \\ u = 0, \quad 2\beta^3 = b/a \end{aligned} \quad (2.8)$$

Общее решение (2.5) записывается в виде

$$\begin{aligned} w = C_1 \cos \gamma \xi + C_2 \xi^2 + C_3 + w_r \\ u = -C_1 a \gamma \sin \gamma \xi - 2C_2 \xi + u_r \end{aligned} \quad (2.9)$$

Параметр γ и частное решение (2.5), входящее в (2.9), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma = \left(2\lambda \frac{a+1}{a} \right)^{1/2}; \quad w_r = \frac{q}{a+1} \left[\frac{\xi^4}{24} + \frac{\xi^2(a+1)}{8\lambda} \right] \\ u_r = -\frac{q}{a+1} \left[\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi(a-1)}{4\lambda} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Удовлетворяя условиям (2.7), найдем

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{q}{2\gamma^4(a+1)a \cos \gamma L}, \quad C_2 = -\frac{q}{2(a+1)} \left[\frac{L^2}{2} + \frac{a^2 + 2a - 1}{4\lambda(a+1)} \right] \\ C_3 = \frac{5}{24} \frac{qL^4}{a+1} + \frac{qL^2}{4\lambda(a-1)^2} - \frac{qa}{4\lambda^2(a-1)^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полученные решения позволяют определить распределение сдвиговых и нормальных усилий вдоль стержня. С учетом (1.2) и (1.3) и обозначений (2.2) получим для безразмерных усилий

$$N_{xz} = u + w', \quad N_z = bw'' \quad (2.12)$$

Зависимость усилия N_{xz} для стержня, характеризуемого параметрами $a=1/12$, $\chi=0.00675$, $L=100$ представлена на фиг. 1. Различными цифрами 1—3 отмечены кривые, соответствующие различным значениям нагрузки q .

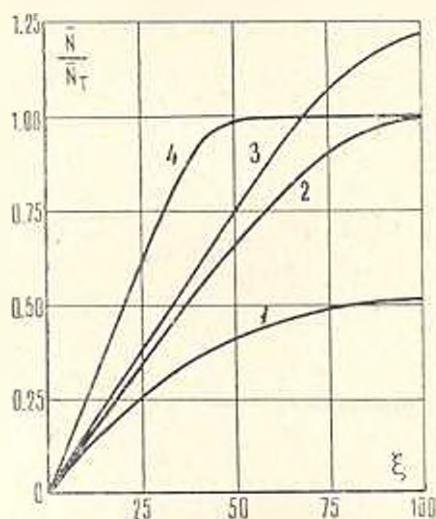
Возьмем в качестве критерия отсутствия проскальзывания условие

$$N_{xz} < N_c$$

Величину нагрузки q , соответствующую достижению $\max N_{xz}$, значения N_c обозначим q_c . На фиг. 1 этой нагрузке соответствует кривая, отмеченная цифрой 2. Цифрой 1 отмечена кривая для $q < q_c$ и цифрой 3 — для $q > q_c$.

Исходя из решения задачи об изгибе без учета проскальзывания, найдем, что область проскальзывания при $q > q_0$ будет располагаться у краев стержня $\xi^* < |\xi| \leq L$, где ξ^* — граница области проскальзывания, подлежащая определению. В данном случае можно ограничиться только рассмотрением u и w . Для зоны $|\xi| < \xi^*$ u и w удовлетворяют (2.5), а для $\xi^* < |\xi| \leq L$ имеем

$$aw^{+IV} = q, \quad u^{+''} + 2\lambda \bar{N}_T = 0 \quad (2.13)$$



Фиг. 1.

Решением (2.13), удовлетворяющим условиям опирания (2.7) при $\xi = \pm L$, будет

$$\begin{aligned} w^{+} &= \frac{q(\xi - L)^4}{24a} + B_1 \frac{(\xi - L)^3}{6} + B_2 (\xi - L) \\ u^{+} &= -2\lambda \bar{N}_T \frac{(\xi - L)^2}{2} + B_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

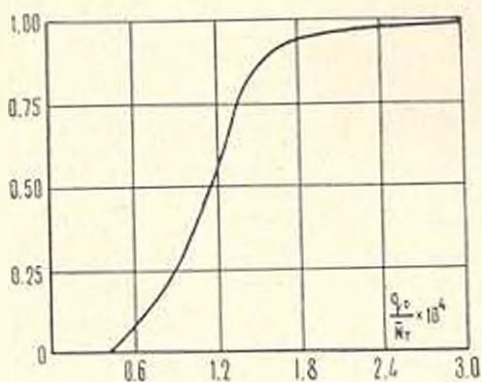
Константы C_1 , C_2 , C_3 , B_1 , B_2 , B_3 и координату ξ^* находим из семи условий (1.4). Для определения ξ^* получим

$$\lg \gamma \xi^* = \frac{D}{R} \quad (2.15)$$

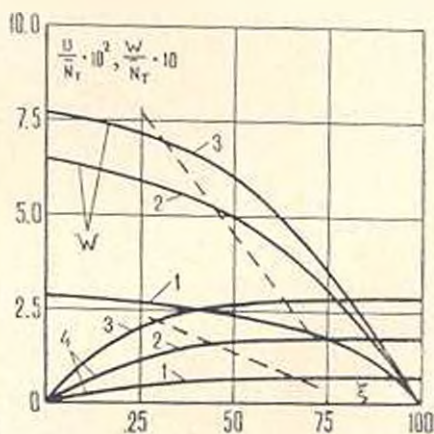
где

$$\begin{aligned} D &= \frac{\xi^* \gamma}{2\lambda} + \frac{\bar{N}_T}{q} \gamma (a + 1) \\ R &= \frac{1}{2\lambda} + \frac{(L - \xi^*) \xi^{*3}}{6} + (L - \xi^*) \xi^* \left(\frac{a + 1}{4\lambda} + \frac{1}{a} \right) + \\ &\quad + \frac{(L - \xi^*)^2 \gamma^2}{4\lambda} - (L - \xi^*) \gamma^2 (a + 1) \frac{\bar{N}_T}{q} \end{aligned}$$

Зависимость величины зоны проскальзывания от $q/\bar{N}_T$ показана на фиг. 2. При проскальзывании происходит перераспределение напряжений в слоях. Это перераспределение определяется полученным решением. На фиг. 1 приведен характер изменения зависимости $\bar{N}_{xz}$ (кривая 3) при учете проскальзывания (кривая 4). В результате решения данной задачи определяется также и распределение перемещений u и w по длине стержня (фиг. 3). Штриховыми линиями отмечены границы



Фиг. 2.



Фиг. 3.

зон проскальзывания для данных серий кривых, построенных при различных значениях параметра χ . Цифрой 1 отмечены кривые, соответствующие $\chi=10^{-2}$; цифрой 2 — $\chi=0.00675$ и цифрой 3 — $\chi=10^{-1}$. Используя полученные зависимости, можно определить в каждом случае величину относительного проскальзывания.

Московский ордена Ленина
энергетический институт

Поступила 6 XII 1972

ՀՈՒ. Ն. ՆՈՎԻՉԿՈՎ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԶՈՂՆԵՐԻ ՄՈՌԻՄԸ ՇԵՐՏՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՍԱՀՔԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԸ

Ա. մ. Վ. ՈՎ. ՈՎ. ՈՎ.

Իսպաճաշերու ձողերի ծոման խնդրի օրինակի վրա տրվում է Վ. Վ. Ռոչո-տինի շերտավոր միջավայրերի տեսության տարածումը այն դեպքում երբ հաշվի է առնվում սահքը շերտերի միջև: Մանրամասն դիտարկվել է եռաշերտ ձողի ծոմում նախնի եզրային պայմանների ժամանակ: Այդ դեպքի համար որոշվել են շերտերի միմյանց վրայով սահքի, ճիգերի բաշխման և տեղա-փոխումների միջակայքերը:

THE BENDING OF LAMINATED BEAMS WITH
SLIP BETWEEN LAYERS

Yu. N. NOVICHKOV

S u m m a r y

In the paper Bolotin's theory of laminated media is extended for the case of possible slip between layers. Various criteria of slip are discussed. The bending of a freely supported sandwich beam is chosen to demonstrate the application of the above theory. The distribution of forces and displacements is also found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Григорюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек. Прикл. механика, т. 8, вып. 6, 1972.
3. Болотин В. В. К теории слоистых плит. Изв. АН СССР, ОН, «Механика и машиностроение», № 3, 1963.
4. Болотин В. В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин. В сб. «Расчеты на прочность» Машгиз, вып. 11, 1965.
5. Калинин Н. Г. Составные стержни. В кн. «Прочность, устойчивость, колебания». Справочник под ред. Н. А. Биргера и Я. Г. Пановко. Изд. «Машиностроение», т. 1, гл. 14, 1968.