ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1974

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

Н. П. ЗАМЕТАЛИНА, В. К. ПРОКОПОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЕСТЕСТВЕННО СКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ТИПА СПИРАЛЬНЫХ СВЕРЛ

Исследование напряженного состояния является необходимым элементом рационального конструирования спирального сверла. Однако расчет спирального сверла до сих пор производится без учета его скрученности. В данной работе ставится задача расчета спирального сверла с учетом его естественной скрученности; при этом используются известные результаты Г. Ю. Джанелидзе и А. И. Лурье [1, 3] по теории равновесия скрученных стержней.

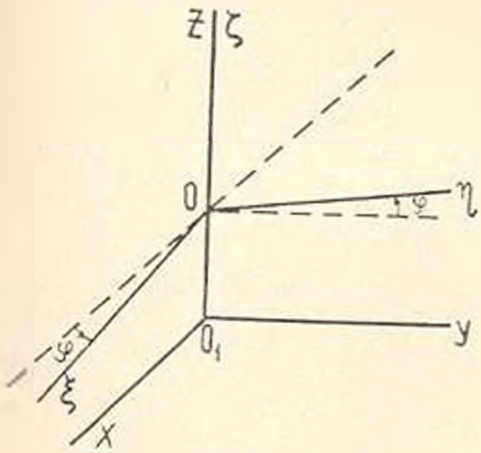
Введем координаты ξ, η с началом в центре тяжести поперечного сечения сверла, направленные вдоль главных осей инерции сечения (фиг. 1); эти оси поворачиваются вокруг оси сверла ζ на угол

$$\varphi = a\zeta \tag{1}$$

где

$$a = \frac{2}{D}\operatorname{tg}\omega \tag{2}$$

— угол закручивания на единицу длины, ω — наклон винтовой канавки сверла, D — диаметр сверла.



Фиг. 1.

Оси ξ, η, ζ образуют неортогональную систему координат; связь с неподвижными декартовыми осями x, y, z выражается соотношениями

$$\xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad \eta = y\cos\varphi - x\sin\varphi, \qquad \zeta = z \tag{3}$$

Очевидно, что при $z=0$ $(\eta=\zeta=0)$ оси ξ, η, ζ и x, y, z совпадают.

При работе сверло испытывает совместное действие крутящего момента N и усилия подачи R, приложенных в торцевом сечении $z=l$ (l — длина сверла) и направленных вдоль оси $z(\zeta)$; величины R и N считаются заданными.

Вычисляя для координат (3) составляющие метрического тензора и символы Кристоффеля (см. [1, 2]), получим исходные уравнения задачи

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial\zeta}-2a\sigma^{23}-a^2\xi\sigma^{33}=0\\
\frac{\partial\sigma^{21}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{22}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma^{23}}{\partial\zeta}+2a\sigma^{13}-a^2\eta\sigma^{33}=0\\
\frac{\partial\sigma^{31}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{32}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\zeta}=0
\end{gathered}\tag{4}$$

$$\begin{gathered}
\sigma^{11}=\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u^1}{\partial\xi}\right)(1-a^2\eta^2)-2\mu a^2\eta\left(\xi\frac{\partial u^1}{\partial\eta}+u^2-\frac{1}{a}\frac{\partial u^1}{\partial\zeta}\right)\\
\sigma^{22}=\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u^2}{\partial\eta}\right)(1-a^2\xi^2)-2\mu a^2\xi\left(\eta\frac{\partial u^2}{\partial\xi}+u^1+\frac{1}{a}\frac{\partial u^2}{\partial\zeta}\right)\\
\sigma^{12}=\mu\left[\frac{\partial u^1}{\partial\eta}(1+a^2\xi^2)+\frac{\partial u^2}{\partial\xi}(1-a^2\eta^2)\right]-\lambda\theta a^2\xi\eta+\\
+\mu a^2\eta\left[u^1+\frac{1}{a}\frac{\partial u^2}{\partial\zeta}-\xi\frac{\partial u^1}{\partial\xi}\right)+\mu a^2\xi\left(u^2-\frac{1}{a}\frac{\partial u^1}{\partial\zeta}-\eta\frac{\partial u^2}{\partial\eta}\right)\\
\sigma^{13}=\mu\left[\frac{\partial u^3}{\partial\xi}(1+a^2\eta^2)-a^2\xi\eta\frac{\partial u^3}{\partial\eta}\right]+a\eta\left[\lambda\theta+\mu\left(\frac{\partial u^1}{\partial\xi}+\frac{\partial u^3}{\partial\zeta}\right)\right]-\\
-\mu a\left(u^2-\frac{1}{a}\frac{\partial u^1}{\partial\zeta}+\xi\frac{\partial u^1}{\partial\eta}\right)\\
\sigma^{23}=\mu\left[\frac{\partial u^3}{\partial\eta}(1+a^2\xi^2)-a^2\xi\eta\frac{\partial u^3}{\partial\zeta}\right]-a\xi\left[\lambda\theta+\mu\left(\frac{\partial u^2}{\partial\eta}+\frac{\partial u^3}{\partial\zeta}\right)\right]+\\
+\mu a\left(u^1+\frac{1}{a}\frac{\partial u^2}{\partial\zeta}+\eta\frac{\partial u^2}{\partial\xi}\right)\\
\sigma^{33}=\lambda\theta+2\mu a\left(\eta\frac{\partial u^3}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial u^3}{\partial\eta}+\frac{1}{a}\frac{\partial u^3}{\partial\zeta}\right)
\end{gathered}\tag{5}$$

$$\sigma^{\alpha 1}\nu_1+\sigma^{\alpha 2}\nu_2=0\qquad(\alpha=1,2,3)\tag{6}$$

$$\iint_{(\Omega)} \sigma^{3\alpha} dS = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \qquad \iint_{(\Omega)} \xi\sigma^{33} dS = \iint_{(\Omega)} \eta\sigma^{33} dS = 0$$

$$\iint_{(\Omega)} \sigma^{33} dS = R, \qquad \iint_{(\Omega)} [\xi\sigma^{32} - \eta\sigma^{31} + a(\xi^2 + \eta^2)\sigma^{33}] dS = N \tag{7}$$

Здесь u^α, $\sigma^{\alpha\beta}$ — контрвариантные составляющие вектора перемещения и тензора напряжений; λ, μ — постоянные Ляме: $\nu_1 = \frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\nu_2 = -\frac{\partial\xi}{\partial t}$ — направляющие косинусы нормали к контуру сечения Γ в плоскости $\xi\eta$; t — длина дуги контура; $dS = d\xi d\eta$, Ω — площадь поперечного сечения; $\vartheta = \frac{\partial u^1}{\partial\xi} + \frac{\partial u^2}{\partial\eta} + \frac{\partial u^3}{\partial\zeta}$. Уравнения (6) и (7) представляют граничные условия на боковой поверхности и условия на торце сверла.

Решение системы (4)—(7) строится в форме ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = aD$:

$$u^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^\alpha, \qquad \sigma^{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_n^{\alpha\beta} \tag{8}$$

Нулевое приближение дает уравнения для незакрученного сверла в декартовых координатах. Уравнения первого приближения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial\sigma_1^{\alpha 1}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_1^{\alpha 2}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_1^{\alpha 3}}{\partial\zeta} + \frac{2}{D}(-1)^\alpha \sigma_0^{\beta\gamma} = 0$$

$$(\alpha = 1, 2; \quad \beta = 2, 3; \quad \gamma = 3, 1) \tag{9}$$

$$\frac{\partial\sigma_1^{31}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_1^{32}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_1^{33}}{\partial\zeta} = 0$$

$$\sigma_1^{11} = \lambda\vartheta_1 + 2\mu\frac{\partial u_1^1}{\partial\xi} + 2\mu\frac{\eta}{D}\frac{\partial u_0^1}{\partial\zeta}$$

$$\sigma_1^{33} = \lambda\vartheta_1 + 2\mu\frac{\partial u_1^3}{\partial\zeta} + \frac{2\mu}{D}\left(\eta\frac{\partial u_0^3}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial u_0^3}{\partial\eta}\right)$$

$$\sigma_1^{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial\eta} + \frac{\partial u_1^2}{\partial\xi}\right) + \frac{\mu}{D}\left(\eta\frac{\partial u_0^2}{\partial\zeta} - \xi\frac{\partial u_0^1}{\partial\zeta}\right) \tag{10}$$

$$\sigma_1^{13} = \mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial\zeta} + \frac{\partial u_1^3}{\partial\xi}\right) +$$

$$+ \frac{\eta}{D}\left[\lambda\vartheta_0 + \mu\left(\frac{\partial u_0^1}{\partial\xi} + \frac{\partial u_0^3}{\partial\zeta}\right)\right] - \frac{\mu}{D}\left(\xi\frac{\partial u_0^1}{\partial\eta} + u_0^2\right)$$

$$
\begin{gathered}
\theta_n = \frac{\partial u_n^1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_n^2}{\partial \eta} - \frac{\partial u_n^3}{\partial \zeta} \qquad (n = 0,\ 1) \\
\sigma_1^{\nu 1} \nu_1 + \sigma_1^{\nu 2} \nu_2 = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$
\begin{gathered}
\iint\limits_{(\omega)} \sigma_1^{3\alpha} dS = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \qquad \iint\limits_{(\omega)} \xi \sigma_1^{33} dS = \iint\limits_{(\omega)} \eta \sigma_1^{33} dS = 0 \\
\iint\limits_{(\omega)} (\xi \sigma_1^{31} - \eta \sigma_1^{31})\, dS = -\frac{1}{D} \iint\limits_{(\omega)} (\xi^2 - \eta^2)\, \sigma_0^{33}\, dS
\end{gathered} \tag{12}
$$

Выражения для $\sigma_1^{2\alpha}$ и σ_1^{33} получаются из σ_1^{11} и σ_1^{13} заменой ξ, η, u_0^1, u_0^2, u_1^1, D на η, ξ, u_0^2, u_0^1, u_1^2, $-D$, соответственно.

Решая сначала задачу о сжатии сверла, а затем задачу его кручения [1], получим формулы, определяющие напряженное состояние сверла (с точностью до первой степени параметра ε) при одновременном действии продольной сжимающей силы R и крутящего момента N:

$$
\begin{gathered}
\sigma^{11} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{2N}{DT} \psi \right), \qquad \sigma^{22} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{2N}{DT} \psi \right), \qquad \sigma^{12} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \\
\sigma^{13} = \left(N + \varepsilon \frac{RJ_p}{D\Omega} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \qquad \sigma^{23} = -\left(N + \varepsilon \frac{RJ_p}{D\Omega} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\
\sigma^{33} = -\frac{R}{\Omega} + \varepsilon \left\{ \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{N}{D\Omega} - \frac{2N}{DT} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \right. \\
\left. + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left[\Delta \Phi + \frac{2N}{DT} \left(\xi^2 + \eta^2 - 2\psi - \frac{J_p}{\Omega} \right) \right] \right\}
\end{gathered} \tag{13}
$$

Здесь J_p — полярный момент инерции сечения, $T = 2 \iint\limits_{(\omega)} \psi dS$ — геометрическая жесткость на кручение; оси ξ и η предполагаются осями симметрии для поперечного сечения сверла.

Функции $\Psi(\xi, \eta)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$
\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -2; \qquad \Psi|_\gamma = 0 \tag{14}
$$

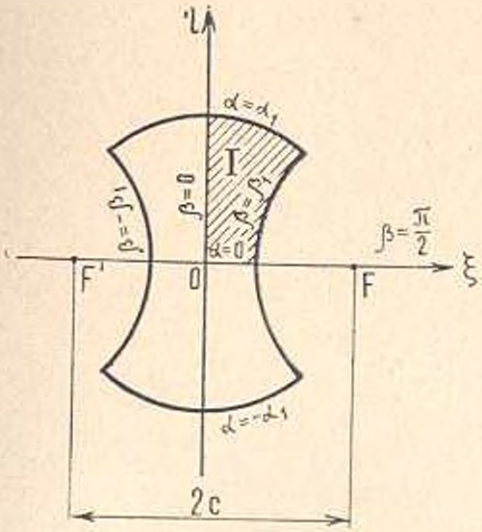
$$
\Delta \Delta \Phi = -\frac{16N}{DT}; \qquad \Phi|_\gamma = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_\gamma = 0 \tag{15}
$$

Таким образом, задача определения напряженного состояния спирального сверла с учетом его естественной крутки сводится к решению двух задач: гармонической задачи (14), типа задачи кручения, и бигармонической задачи (15), эквивалентной задаче изгиба тонкой плиты с защемленным контуром.

Для решения этих задач введем эллиптические координаты α, β [4] с фокусным расстоянием $2c$

$$\xi = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \qquad \eta = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \tag{16}$$

Поперечное сечение спирального сверла с достаточной точностью можно аппроксимировать симметричной областью, ограниченной софокусными эллипсами и гиперболами $\alpha = \pm\alpha_1$; $\beta = \pm\beta_1$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

В эллиптических координатах уравнение (14) преобразуется к такому

$$\Delta^* \Psi^* = \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \beta^2} = -c^2 h \tag{17}$$

Здесь

$$\Psi^* [\xi(\alpha, \beta), \eta(\alpha, \beta)] = \Psi^*(\alpha, \beta), \qquad h = \operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta \tag{18}$$

Так как поперечное сечение сверла представляет собой симметричную область и граничные условия по всему контуру однотипны (на контуре Г функция Ψ^* обращается в нуль), то достаточно рассмотреть заштрихованную на фиг. 2 область 1, определив в ней функцию напряжений, требуя при этом обращения в нуль нормальной производной $\frac{\partial \Psi^*}{\partial n}$ на осях симметрии области 2. Таким образом, граничные условия для области 1 представят в таком виде:

$$\Psi^*(\alpha_1, \beta) = 0, \qquad \left.\frac{\partial \Psi^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{19а}$$

$$\Psi^*(\alpha, \beta_1) = 0, \qquad \left.\frac{\partial \Psi^*}{\partial \beta}\right|_{\beta=0} = 0 \tag{19б}$$

Решение краевой задачи (17), (19) строим в форме ряда синусов кратных дуг с неизвестными функциональными коэффициентами [4]:

$$\Phi^* = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\beta) \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1), \qquad \gamma_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\alpha_2} \tag{20}$$

Ряд (20) граничным условиям (19 а) удовлетворяет автоматически, подстановка его в уравнение (17) и в условия (19 б) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов $f_k(\beta)$

$$f_k''(\beta) - \gamma_k^2 f_k(\beta) = \frac{2c^2\gamma_k \operatorname{ch} 2\alpha_1}{\alpha_2(\gamma_k^2 - 4)} + \frac{2c^2}{\alpha_2\gamma_k} \cos 2\beta \tag{21}$$

и к граничным условиям для них

$$f_k'(0) = 0, \qquad f_k(\beta_1) = 0 \tag{22}$$

Решение уравнений (21), удовлетворяющее условиям (22), имеет следующий вид:

$$f_k(\beta) = \frac{2c^2}{\alpha_2\gamma_k(\gamma_k^2 - 4)} \left[\frac{\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1}{\operatorname{ch} \gamma_k\beta_1} \operatorname{ch} \gamma_k\beta - (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta) \right] \tag{23}$$

Формулы (20), (23) и дают решение краевой задачи (17), (19).

Рассмотрим далее задачу (15). В эллиптических координатах (16) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{h} \Delta^* \left(\frac{1}{n} \Delta^* \Phi \right) = -\frac{4c^2 N}{DT} \tag{24}$$

где оператор Δ^* и функция h по-прежнему определяются формулами (17), (18), а $\Phi^*(\alpha, \beta) = \Phi[\xi(\alpha, \beta), \eta(\alpha, \beta)]$; граничные условия (15) сохраняют свой вид и для функции Φ^*

$$\Phi^*|_\Gamma = 0, \qquad \left.\frac{\partial \Phi^*}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \tag{25}$$

Уравнение (24) является уравнением Эйлера для функционала

$$J = \frac{c^2}{2} \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{h^2} (\Delta^* \Phi^*)^2 - \frac{8c^2 N}{DT} \right] h\,d\alpha\,d\beta \tag{26}$$

что легко проверяется приравниванием нулю его первой вариации и преобразованием полученного выражения по формуле Грина с использованием граничных условий (25).

Краевую задачу (24), (25) поэтому можно решать прямыми вариационными методами. В качестве первого и второго приближений следует принять функцию Φ^* в виде

$$1)\ \Phi^* = Ah^2 (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \alpha_1)^2 (\cos \beta - \cos \beta_1)^2 \tag{27}$$

$$2)\ \Phi^* = B_1 h^2 (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \alpha_1)^2 (\cos \beta - \cos \beta_1)^2 + B_2 h^2 (\operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{ch} 2\alpha_1)^2 (\cos 2\beta - \cos 2\beta_1)^2 \tag{28}$$

При таком задании функции Φ^* граничные условия (25) на контуре Г выполнены, а выражение для лаплассиана $\Delta^*\Phi^*$ примет удобный для последующего интегрирования (26) вид. После чего уравнение $\frac{\partial J}{\partial A}=0$ в случае 1) или уравнения $\frac{\partial J}{\partial B_1}=0$, $\frac{\partial J}{\partial B_2}=0$ в случае 2) дадут возможность найти искомые коэффициенты A или B_1, B_2.

Тольяттинский политехнический институт

Поступила 7 VI 1972

Ն. Պ. ԶԱՄԵՏԱԼԻՆԱ, Վ. Կ. ՊՐՈԿՈՖՈՎ

ՊԱՐՈՒՐԱԶԵՎ ՇԱՂԱՓԻ ՏԵՍԱԿԻ ԲՆԱԿԱՆ ԿԵՐՊՈՎ ՈԼՈՐՎԱԾ ԶՈՂԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾ ՎԻՃԱԿԸ

Ամփոփում

Դրվում է պարուրաձև շաղափի հաշվարկի խնդիրը նրա բնական ոլորվածության հաշվառումով, երբ նրա վրա միաժամանակ ազդում են ոլորող մոմենտը և երկայնական սեղմող ուժը։

Էլիպտական կոորդինատային սիստեմում ստացվել է ոլորման խնդրի տիպի հարմոնիկ խնդրի լուծումը և եզրագծով ամրակցված բարակ սալի ծռման խնդրին համարժեք բիհարմոնիկ խնդրի լուծումը։

THE STRAINED STATE OF NATURALLY TWISTED BARS LIKE SPIRAL DRILLS

N. P. ZAMETALINA, V. K. PROKOPOV

Summary

A problem is set to calculate the spiral drill as a naturally twisted bar under a joint action of torque moment and longitudinal compressive force.

The solution of a harmonic problem similar to that of twist and the solution of a biharmonic problem equivalent to that of bending a thin plate with a squeezed contour are obtained in elliptic coordinates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И., Джанелидзе Г. Ю.* Задача Сен-Венана для стержней, близких к призматическим. Ч. I. Основные уравнения. Докл. АН СССР, 1939, т. 24, № 1; ч. II. Растяжение и кручение. Докл. АН СССР, 1939, т. 24, № 3.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. «Наука», М., 1970.
3. *Джанелидзе Г. Ю.* Соотношения Кирхгофа для естественно скрученных стержней и их приложения. Тр. ЛПИ, 1946, № 1.
4. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, А. Н. МАРТИРОСЯН

РЕШЕНИЕ РЯДА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИМПУЛЬСОВ

Рассматривается задача определения перемещений в упругой и магнитоупругой среде при наличии точечных импульсов в неограниченном пространстве. Для изотропной однородной упругой среды уравнения движения возьмем в виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + b^2\Delta u_1 + \frac{X_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + b^2\Delta u_2 + \frac{Y_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + b^2\Delta u_3 + \frac{Z_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

Вводим преобразование Лапласа $\bar{u}_{1,2,3}$ для компонентов перемещений $u_{1,2,3}$, а затем вводим преобразования Фурье в виде

$$\bar{u}_{1,2,3} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)}\,\bar{\bar{u}}_{1,2,3}\,d\alpha_1\,d\beta_1\,d\gamma_1 \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), применяя обратное преобразование Фурье, имеем

$$[s^2 + a^2\alpha_1^2 + b^2(\beta_1^2 + \gamma_1^2)]\,\bar{\bar{u}}_1 + (a^2 - b^2)\,\alpha_1\beta_1\bar{\bar{u}}_2 + (a^2 - b^2)\,\alpha_1\gamma_1\bar{\bar{u}}_3 = \frac{X_0}{8\pi^3\rho}$$

$$(a^2 - b^2)\,\alpha_1\beta_1\bar{\bar{u}}_1 + [s^2 + a^2\beta_1^2 + b^2(\alpha_1^2 + \gamma_1^2)]\,\bar{\bar{u}}_2 + (a^2 - b^2)\,\beta_1\gamma_1\bar{\bar{u}}_3 = \frac{Y_0}{8\pi^3\rho} \qquad (3)$$

$$(a^2 - b^2)\,\alpha_1\gamma_1\bar{\bar{u}}_1 + (a^2 - b^2)\,\beta_1\gamma_1\bar{\bar{u}}_2 + [s^2 + a^2\gamma_1^2 + b^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)]\,\bar{\bar{u}}_3 = \frac{Z_0}{8\pi^3\rho}$$

Из (3) можно получить

$$8\pi^3\rho D\bar{\bar{u}}_1 = X_0[s^2 + b^2\alpha_1^2 + a^2(\gamma_1^2 + \beta_1^2)] - Y_0(a^2 - b^2)\,\alpha_1\beta_1 - Z_0(a^2 - b^2)\,\alpha_1\gamma_1$$

$$8\pi^3\rho D\bar{\bar{u}}_2 = -X_0(a^2 - b^2)\,\alpha_1\beta_1 + Y_0[s^2 + b^2\beta_1^2 + a^2(\alpha_1^2 + \gamma_1^2)] - Z_0(a^2 - b^2)\,\beta_1\gamma_1 \qquad (4)$$

$$8\pi^2\rho D\bar{\bar{u}}_3 = -X_0(a^2-b^2)\alpha_1\gamma_1 - Y_0(a^2-b^2)\beta_1\gamma_1 + Z_0[s^2+b^2\gamma_1^2+a^2(\alpha_1^2+\beta_1^2)] \quad (4)$$

где

$$D = [s^2+a^2(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)][s^2+b^2(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)]; \quad s = -i\omega$$

Подставляя (4) в (2), вычисляя вычет в интегралах по γ_1 относительно полюсов $\gamma_1^{(1)} = \omega\sqrt{\frac{1}{a^2}-\alpha^2-\beta^2}$; $\gamma_1^{(2)} = \omega\sqrt{\frac{1}{b^2}-\alpha^2-\beta^2}$, $\alpha = \frac{\alpha_1}{\omega}$, $\beta = \frac{\beta_1}{\omega}$ и переходя к цилиндрическим координатам

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta, \quad \alpha = \xi\cos\varphi, \quad \beta = \xi\sin\varphi, \quad z = z$$

получим

$$\bar{u}_1 = \frac{\omega i}{4\pi^2\rho}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}(X_0\alpha^2+Y_0\alpha\beta+Z_0\alpha\gamma_1^{(1)})\,e^{i\omega(\xi r\cos\psi+z\gamma_1^{(1)})}\frac{\xi}{\gamma_1^{(1)}}\,d\xi d\psi +$$

$$+\frac{\omega i}{4\pi^2\rho}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1}{b^2}-\alpha^2\right)X_0 - Y_0\alpha\beta - Z_0\beta\gamma_1^{(2)}\right]e^{i\omega(\xi r\cos\psi+z\gamma_1^{(2)})}\frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}}\,d\xi d\psi$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\omega i}{4\pi^2\rho}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}(X_0\alpha\beta+Y_0\beta^2+Z_0\beta\gamma_1^{(1)})\,e^{i\omega(\xi r\cos\psi+z\gamma_1^{(1)})}\frac{\xi}{\gamma_1^{(1)}}\,d\xi d\psi +$$

$$-\frac{\omega i}{4\pi^2\rho}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\left[-X_0\alpha\beta+Y_0\left(\frac{1}{b^2}-\beta^2\right)-Z_0\beta\gamma_1^{(2)}\right]e^{i\omega(\xi r\cos\psi+z\gamma_1^{(2)})}\frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}}\,d\xi d\psi \quad (5)$$

$$\bar{u}_3 = \frac{\omega i}{4\pi^2\rho}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}(X_0\alpha+Y_0\beta+Z_0\gamma_1^{(1)})\,e^{i\omega(\xi r\cos\psi+z\gamma_1^{(1)})}\xi\,d\xi d\psi +$$

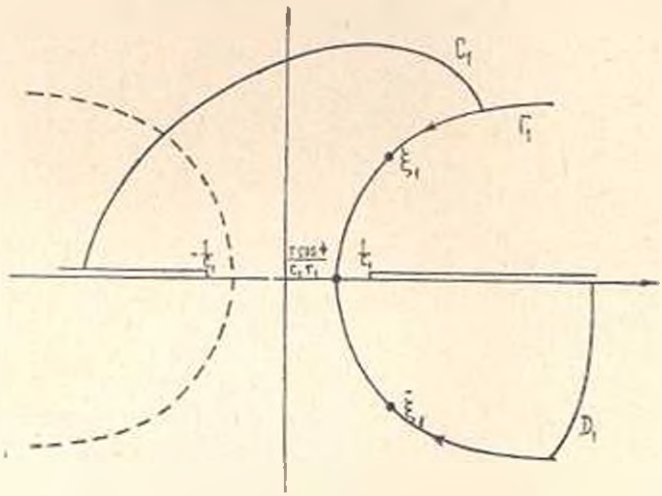
$$-\frac{\omega i}{4\pi^2\rho}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}[-X_0\alpha\gamma_1^{(2)}-Y_0\beta\gamma_1^{(2)}+Z_0(\alpha^2+\beta^2)]\,e^{i\omega(\xi r\cos\psi+z\gamma_1^{(2)})}\frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}}\,d\xi d\psi$$

где $\psi = \varphi - \theta$.

Формулы (5) имеют место для $z > 0$, для $z < 0$ $\gamma_1^{(1,2)}$ в экспоненте поменяют знаки, а окончательное решение (12), (13), (14) не изменится.

В интегралах по ψ в (5), взятых в пределах $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, сделаем замену $\pi - \psi$ на ψ, тогда в указанных интегралах, взятых уже в пределах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\psi$ заменится на $-\cos\psi$. Поскольку при нечетных степенях $\cos\psi$ стоят множителем нечетные степени ξ, можно полученные интегралы в (5) по ψ в пределах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ объединить, причем

$\cos\psi$ всюду брать со знаком плюс и интегралы по ξ следует брать в пределах $(-\infty, \infty)$, а также под знаком интеграла ставить $\operatorname{sgn}\xi$. Сделаем разрез плоскости ξ по действительной оси от точек $\pm c_n^{-1}$ до $\pm\infty$, причем $c_1 = a$ и $c_2 = b$ для первых и вторых интегралов соответственно в правых частях (5). Выберем положительно мнимые значения функций $\gamma_{1,2}(\xi) = \frac{\gamma_1^{(1,2)}}{\omega}$, $\xi = \frac{z}{\omega}$ на верхних берегах левых и нижних берегах правых разрезов, причем при $\omega > 0$ контур интегрирования по ξ проходит при $\xi < 0$ в верхней полуплоскости, при $\xi > 0$ — в нижней полуплоскости. Проведем дуги окружностей $C_{1,2}$, $D_{1,2}$ большого радиуса фиг. 1, на которых $\operatorname{Im} T_{1,2}(\xi) < 0$, где $T_{1,2}(\xi) = t - \xi r\cos\psi - z\gamma_{1,2}(\xi)$.



Фиг. 1.

Проведем контуры $\Gamma_{1,2}$, на которых $\operatorname{Im} T_{1,2}(\xi) = 0$, и которые проходят через точки Смирнова-Соболева $\xi_{1,2}$, определяемые уравнениями

$$T_1(\xi_1) = t - \xi_1 r\cos\psi - z\gamma_1(\xi_1) = 0, \qquad \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \xi_1^2}$$
$$T_2(\xi_2) = t - \xi_2 r\cos\psi - z\gamma_2(\xi_2) = 0, \qquad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{b^2} - \xi_2^2} \tag{6}$$

Из (6) получится для $z > 0$

$$r_1\xi_1 = tr\cos\psi - iz\sqrt{t^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}$$
$$r_1\xi_2 = tr\cos\psi - iz\sqrt{t^2 - \frac{r_1^2}{b^2}} \tag{7}$$
$$r_1^2 = z^2 + r^2\cos^2\psi$$

причем при $z<0$ перед радикалами берется обратный знак. Комплексно-сопряженные значения $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ также удовлетворяют (6), то есть находятся на $\Gamma_{1,2}$ фиг. 1. Интеграл по ξ от 0 до $\frac{r\cos\psi}{c_{1,2}r_1}$ равен нулю, поскольку при обратном преобразовании Лапласа получится интеграл от дельта-функций аргумента $t-\xi r\cos\psi-\gamma_{1,2}z$, корни которого $\xi_{1,2}$ не лежат на вышеупомянутом участке. Заменяя интегралы по ξ на интегралы по контурам $\Gamma_{1,2}$, получим из (5) для $\bar{u}_1$, например, при $\omega>0$

$$\bar{u}_1=-\frac{\omega l}{4\pi^2\rho}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_{\Gamma_1}\Big[X_0(\cos^2\theta\cos^2\psi-\sin^2\theta\sin^2\psi)\xi^2+Y_0\cos 2\psi\sin\theta\cos\theta\xi^2+$$

$$+Z_0\xi\cos\psi\gamma_1(\xi)\Big]e^{i\omega(t-\xi r\cos\psi-z\gamma_1(\xi))}\frac{\xi}{\gamma_1(\xi)}\,d\xi d\psi-\frac{\omega l}{4\pi^2\rho}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_{\Gamma_2}\Big\{\Big[\frac{1}{b^2}-\xi^2(\cos^2\theta\cos^2\psi+$$

$$+\sin^2\theta\sin^2\psi)\Big]X_0-Y_0\cos 2\psi\sin\theta\cos\theta\xi^2-Z_0\xi\cos\psi\gamma_2(\xi)\Big\}\times$$

$$\times e^{i\omega(t-\xi r\cos\psi-z\gamma_2(\xi))}\frac{\xi}{\gamma_2(\xi)}\,d\xi d\psi \tag{8}$$

Здесь учтено, что интегралы от нечетных степеней $\sin\psi$, $\cos\psi$ в (5) равны нулю. При получении (8) интегралы по ξ в пределах $(-\infty, 0)$ заменялись на проходимые сверху вниз верхние части контуров $\Gamma_{1,2}$ с учетом знака $\operatorname{sgn}\xi$, а участок $(0, \infty)$ заменяется на взятые с обратным знаком интегралы по нижним частям контуров $\Gamma_{1,2}$, проходимых уже снизу вверх. При $\omega<0$ берем вместо $C_{1,2}$, $D_{1,2}$ (фиг. 1) дуги окружности, дополняющие их соответственно до верхних и нижних полуокружностей. Учитывая множитель $\operatorname{sgn}\xi$, можно показать, что при $\omega<0$ снова имеет место (8).

Обратное преобразование Лапласа по t дает, например, для коэффициента при X_0, соответствующего интегралу по Γ_1, значение

$$u_1|_{X_0,\Gamma_1}=\frac{X_0}{4\pi^2\rho}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_{\Gamma_1}(\cos^2\theta\cos^2\psi+$$

$$+\sin^2\theta\sin^2\psi)\xi^3\delta(t-\xi r\cos\psi-z\gamma_1(\xi))\frac{d\xi d\psi}{\gamma_1(\xi)} \tag{9}$$

и после вычисления интеграла от дельта-функции действительного аргумента для $z>0$ получим

$$u_1|_{X_0,\Gamma_1}=-\frac{X_0}{2\pi^2\rho}\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(\cos^2\theta\cos^2\psi+\sin^2\theta\sin^2\psi)\xi_1^3}{r\cos\psi\gamma_1(\xi_1)-z\xi_1}\,d\psi \tag{10}$$

где объединены интегралы по верхней и нижней частям Γ_1, дающие сопряженные комплексные значения, причем ξ_1 дается (7). Учитывая, что действительная и мнимая части подынтегральных функций—четные и соответственно нечетные функции $\cos\psi$, получим для (10) значение

$$\frac{X_0}{2\pi^2\rho}\frac{\partial}{\partial t}\sigma\left(t-\frac{R}{a}\right)\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^2\theta\cos^2\psi+\sin^2\theta\sin^2\psi)\times$$

$$\times\left[3t^2r^2z\cos^2\psi-z^3\left(t^2-\frac{r_1^2}{a^2}\right)\right]\frac{d\psi}{r_1^3} \qquad (11)$$

где $\sigma(x)$ есть единичная функция, $R=\sqrt{z^2+r^2}$.

Заменяя $\operatorname{tg}\psi=\lambda$, вычисляя интегралы по λ, получим для (11) значение

$$u_1|_{\lambda_0,\,\Gamma_1}=\frac{X_0t(3x^2-R^2)}{4\pi\rho R^5}\sigma\left(t-\frac{R}{a}\right)+\frac{X_0x^2\delta\left(t-\frac{R}{a}\right)}{4\pi\rho a^2R^3}$$

Подобным же образом вычисляются остальные интегралы в (8), а также интегралы для $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$. Окончательные формулы для компонентов перемещений имеют вид

$$u_1=\frac{t}{4\pi\rho R^5}\sum_1^2(-1)^{k+1}[(3x^2-R^2)X_0+3xyY_0+3xzZ_0]\sigma\left(t-\frac{R}{c_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho R^3}\sum_1^2\frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2}(X_0x^2+Y_0xy+Z_0xz)\delta\left(t-\frac{R}{c_k}\right)+\frac{X_0\delta\left(t-\frac{R}{b}\right)}{4\pi\rho b^2R} \qquad (12)$$

$$u_2=\frac{t}{4\pi\rho R^5}\sum_1^2(-1)^{k+1}[3X_0xy+(3y^2-R^2)Y_0+3Z_0yz]\sigma\left(t-\frac{R}{c_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho R^3}\sum_1^2\frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2}(X_0xy+Y_0y^2+Z_0yz)\delta\left(t-\frac{R}{c_k}\right)-\frac{Y_0\delta\left(t-\frac{R}{b}\right)}{4\pi\rho b^2R} \qquad (13)$$

$$u_3=\frac{t}{4\pi\rho R^5}\sum_1^2(-1)^{k+1}[3X_0xz+3Y_0yz-Z_0(3z^2-R^2)]\sigma\left(t-\frac{R}{c_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho R^3}\sum_1^2\frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2}(X_0zy+Y_0zx+Z_0z^2)\delta\left(t-\frac{R}{c_k}\right)+\frac{Z_0\delta\left(t-\frac{R}{b}\right)}{4\pi\rho b^2R} \qquad (14)$$

где $c_1=a$, $c_2=b$.

Полученное решение задачи для точечных импульсов совпадает с известным решением [1], однако приведенный здесь метод является до-

вольно общим и может быть применен к более сложным граничным задачам для изотропных сред.

Рассмотрим теперь задачу определения перемещений магнитоупругой среды при наличии точечных импульсов.

Пусть начальное магнитное поле величины B_x параллельно оси x, тогда задача имеет осевую симметрию относительно оси x, причем уравнения магнитоупругости [2] можно взять в виде

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + b^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) +$$

$$+ a_1^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) + a_1^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) - \frac{b^2}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) - \tag{15}$$

$$- b^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \frac{X_x}{2\pi r \rho}\delta(r)\delta(x)\delta(t)$$

Решение для преобразования по Лапласу по t от u_r и u_x ищется в виде преобразования Фурье-Ханкеля

$$\bar{u}_r = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} e^{ikx} J_1(\lambda r)\, \bar{\bar{u}}_r d\lambda; \qquad \bar{u}_x = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} e^{ikx} J_0(\lambda r)\, \bar{\bar{u}}_x d\lambda \tag{16}$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя [3].

Подставляя (16) в (15) и применяя формулы обращения преобразований Фурье-Ханкеля, можно получить

$$4\pi^2 \rho D \bar{\bar{u}}_x = -X_x \lambda \left[(a^2 + a_1^2)\lambda^2 + (b^2 + a_1^2) k^2 + s^2\right] \tag{17}$$

$$4\pi^2 \rho D \bar{\bar{u}}_r = X_x (a^2 - b^2)\, ik\lambda^2$$

где

$$D = (a^2 - b^2)^2 k^2 \lambda^2 - \left[(a^2 + a_1^2)\lambda^2 + (b^2 + a_1^2) k^2 + s^2\right](a^2 k^2 + b^2 \lambda^2 + s^2) \tag{18}$$

Подставляя (17) в (16), используя интегральные представления функций Бесселя [3], вычисляя интегралы по β с помощью теории вычетов, вводя переменные $s = -i\omega$, $\lambda = \alpha\omega$, $k = \beta\omega$, получим

$$\bar{u}_r = \frac{X_x \omega i}{4\pi^2 \rho} \sum_{n=1}^{3} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha \left[(a^2 + a_1^2)\alpha^2 + (b^2 + a_1^2)\beta_n^2 - 1\right] e^{i\omega(\beta_n x + \alpha r \cos\varphi)} \frac{d\alpha d\varphi}{\beta_n \sqrt{\Delta}}$$

$$\bar{u}_x = \frac{X_x \omega i}{4\pi^2 \rho} \sum_{n=1}^{3} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (a^2 - b^2)\, \alpha^2 \cos\varphi\, e^{i\omega(\beta_n x + \alpha r \cos\varphi)} \frac{d\alpha d\varphi}{\sqrt{\Delta}} \tag{19}$$

где

$$\Delta = p^2 - 4a^2(a_1^2 + b^2)q; \qquad p = (a^2a_1^2 + a_1^2b^2 - 2a^2b^2)\alpha^2 - a^2 - b^2 - a_1^2$$

$$q = (b^2\alpha^2 - 1)(a^2\alpha^2 + a_1^2\alpha^2 - 1); \qquad \beta_{1,2}^2 = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2a^2(a_1^2 + b^2)}; \qquad a_1^2 = \frac{B_x^2}{4\pi\rho}$$

При $x > 0$ выберем знак $+$ перед корнем квадратным в формуле для $\beta_{1,2}$. Заменяя как и выше контуры интегрирования по α контурами $\Gamma_{1,2}$, проходящими через точки $\alpha_{1,2}$, даваемые уравнениями Смирнова-Соболева.

$$T_{1,2} = t - \beta_{1,2}(\alpha_{1,2})x - \alpha_{1,2}r\cos\varphi = 0 \tag{20}$$

в направлениях $\operatorname{Im} T_{1,2} = 0$, после обратного преобразования Лапласа по t и вычисления интегралов от $\delta(T_{1,2})$, получим

$$u_x = \frac{X_x}{2\pi^2\rho}\sum_1^2(-1)^k \operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi/2}\frac{\alpha_k[(a^2 - a_1^2)\alpha_k^2 + (b^2 + a_1^2)\beta_k^2(\alpha_k) - 1]}{\beta_k\sqrt{\Delta(\alpha_k)}[r\cos\varphi + \beta_k(\alpha_k)x]}d\varphi$$

$$u_r = \frac{X_x}{2\pi^2\rho}\sum_1^2(-1)^k \operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi/2}\frac{\alpha_k^2\cos\varphi}{\sqrt{\Delta(\alpha_k)}[r\cos\varphi + \beta_k(\alpha_k)x]}d\varphi \tag{21}$$

где $\alpha_{1,2}$ определяются из (20). Заметим, что в отличие от случая упругой среды подынтегральные функции в (19) имеют точки ветвления $\Delta(\alpha) = 0$. Однако эти точки находятся на действительной оси, поэтому они не дадут дополнительных слагаемых в решении при замене указанных перед формулой (9) контуров по α (или ξ), проходящих в верхней и нижней полуплоскостях α, соответственно на контуры $\Gamma_{1,2}$, поскольку указанные точки ветвления находятся вне замкнутых контуров фиг. 1. Заметим, что, так как при изменении знака x значения α не изменятся по величине, а β поменяет знак, из (21) видно, что u_x есть нечетная, u_r — четная функция x. При $x < 0$ в (19) изменяются знаки перед $\bar{u}_r$, $\bar{u}_x$, α_n, β_n изменяются на $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, кроме того заменяется $\sqrt{\Delta}$ на $-\sqrt{\Delta}$, причем (21) снова имеет место.

Рассмотрим задачу о движении магнитоупругой среды, занимающей верхнее полупространство $x > 0$, граничащей с диэлектриком (воздухом), занимающим полупространство $x < 0$. Точечный импульс действует в точке $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$. Тогда решение для падающей на границу $x = 0$ волны дается (21), где заменено x на $x - x_0$. Решение при $x > 0$ ищем в виде

$$u_x = u_x^{(0)} + u_x, \qquad u_r = u_r^{(0)} + u_r \tag{22}$$

где $u_x^{(0)}$, $u_r^{(0)}$ дает падающую волну, u_x, u_r удовлетворяют (15) при $X_x = 0$. Для преобразования Лапласа по t запишем

$$\bar{u}_x = \bar{u}_x^{(0)} + \omega \sum_{n=1}^{2} \int_{\gamma_n} e^{i\omega\beta_n x} J_0(\alpha r)\, \bar{u}_x^{(n)}\, d\alpha$$

$$\bar{u}_r = \bar{u}_r^{(0)} + \omega \sum_{n=1}^{2} \int_{\gamma_n} e^{i\omega\beta_n x} J_1(\alpha r)\, \bar{u}_r^{(n)}\, d\alpha \tag{23}$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\omega}$, $\beta_n(\alpha)$ дается (19). В нижнем полупространстве для компонентов напряжений b_x, b_r возмущенного магнитного поля имеем

$$b_x^{(3)} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \qquad b_r^{(3)} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = 0$$

и можно для преобразований Лапласа по t записать

$$\bar{\Pi} = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \bar{\Pi} J_0(\alpha r)\, d\alpha$$

$$\bar{b}_x^{(3)} = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} J_0(\alpha r) \bar{\Pi}\, d\alpha, \qquad \bar{b}_r^{(3)} = -\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} J_1(\alpha r) \bar{\Pi}\, d\alpha$$

Граничные условия при $x = 0$ имеют вид [4]

$$\sigma_{rx} + \Pi_{rx} = \Pi'_{rx}, \qquad \sigma_{xx} + \Pi_{xx} = \Pi'_{xx}, \qquad b_x = b_x^{(3)}$$

где штрихи относятся к нижнему полупространству. Π — тензор Максвелла.

Используя формулы [4]

$$\Pi_{rx} = \frac{b_r}{4\pi}(B_x + b_x) \approx \frac{B_x b_r}{4\pi}, \qquad \Pi_{xx} = \frac{1}{8\pi}(B_x + b_x)^2 - \frac{b_r^2}{8\pi} \approx \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_x b_x}{4\pi}$$

где (b_x, b_r) — возмущенное магнитное поле, получим граничное условие в виде $(x = 0)$

$$b^2\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \frac{B_x}{4\pi\rho} b_r = \frac{B_x}{4\pi\rho} b_r^{(3)}$$

$$a^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + (a^2 - 2b^2)\left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) = 0, \qquad b_x = b_x^{(3)} \tag{24}$$

В силу соотношений $b_x = -B_x\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right)$, $b_r = B_x \frac{\partial u_r}{\partial x}$ получится $(x = 0)$

$$(a_1^2 + b^2)\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} = \frac{B_x}{4\pi\rho} \bar{b}_r^{(3)}$$

$$a^2 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + (a^2 - 2b^2)\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r}\right) = 0, \qquad B_x\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r}\right) = -\bar{b}_x^{(3)} \tag{25}$$

Подставляя (23) и $\overline{\Pi}$ в (25), где $\overline{u}_x^{(0)}$, $\overline{u}_t^{(0)}$ даются (19) с заменой x на $x - x_0$, учитывая, что при $x = 0$, $x - x_0 < 0$, получим уравнения для $\overline{u}_x^{(1,2)}$, $\overline{u}_t^{(1,2)}$, $\overline{\Pi}$ в виде

$$-\frac{X_x}{4\pi\rho}\sum_1^2(-1)^{n-1}e^{i\omega_n x_0}\alpha^2[(a^2-2b^2)(a_1^2+b^2)\beta_n^2-b^2(a^2+a_1^2)\alpha^2+b^2]\frac{1}{\beta_n\sqrt{\Delta}}+$$

$$+\sum_1^2(b^2\alpha\overline{u}_t^{(n)}-(a_1^2+b^2)\beta_n\overline{u}_t^{(n)})=\frac{B_x}{4\pi\rho}i\alpha\overline{\Pi} \tag{26}$$

$$-\frac{X_x}{4\pi\rho}\sum_1^2(-1)^{(n-1)}e^{i\omega_n x_0}\alpha[(a^2a_1^2+3a^2b^2-2b^4)\alpha^2+a^2(b^2+a_1^2)\beta_n^2-a^2]\frac{1}{\sqrt{\Delta}}+$$

$$+\sum_1^2[(a^2-2b^2)\alpha\overline{u}_t^{(n)}+a^2\beta_n i\overline{u}_x^{(n)}]=0$$

$$\frac{X_x}{4\pi\rho}\sum_1^2(-1)^n e^{i\omega_n x_0}\frac{(a^2-b^2)B_x\alpha^2}{\sqrt{\Delta}}-\sum_1^2 B_x\overline{u}_t^{(n)}=\overline{\Pi}$$

Значения $\overline{u}_t^{(n)}$ выражаются через $\overline{u}_x^{(n)}$ из (17) в виде

$$\overline{u}_t^{(n)}=-\frac{(a^2-b^2)\beta_n\alpha i\overline{u}_x^{(n)}}{(a^2+a_1^2)\alpha^2+(b^2+a_1^2)\beta_n^2-1} \tag{27}$$

Как видно из (26) и (27), значения $\overline{u}_t^{(n)}$, $i\overline{u}_x^{(n)}$ при вещественных α, β_n, в отличие от случая решения для бесконечного пространства (19), являются комплексными, что приводит в данной задаче к наличию отличных от нуля значений u_t, u_x вне фронтов магнитоупругих волн. Из (26)—(27) получим

$$\overline{u}_x^{(n)}=(-1)^n\frac{X_x}{4\pi\rho}i\sum_1^2(-1)^k d_{n,k}(\alpha),\qquad (n=1,2) \tag{28}$$

где

$$d_{n,k}(\alpha)=\frac{[A_k-a_1^2(a^2-b^2)i\alpha\beta_k]B_{3-n}\beta_{3-n}+[A_{3-n}+a_1^2(a^2-b^2)\alpha\beta_{3-n}i]\beta_k B_k}{D\sqrt{\Delta}\,b_{3-n}\beta_k}\alpha$$

$$A_k=(a^2-2b^2)(a_1^2+b^2)\beta_k^2-b^2(a^2+a_1^2)\alpha^2+b^2$$

$$B_k=(a^2a_1^2+3a^2b^2-2b^4)\alpha^2+a^2(b^2+a_1^2)\beta_k^2-a^2$$

$$b_n=(a^2+a_1^2)\alpha^2+(b^2+a_1^2)\beta_n^2-1$$

$$Db_1b_2=\sum_1^2(-1)^{m-1}[A_m+a_1^2(a^2-b^2)i\alpha\beta_m]B_{1-m}\beta_{3-m}$$

Подставляя (28) в (23) и переходя к оригиналам u_x так же, как было сделано выше, можно получить значение u_x в виде

$$u_x = \frac{X_x}{4\pi^2\gamma} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\alpha_n b_n(\alpha_n)}{\beta_n(\alpha_n) \sqrt{\Delta(\alpha_n)} \left| \beta_n(\alpha_n)(x - x_0) + r\cos\varphi \right|} d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2} (-1)^k \int_0^{\infty} \frac{d_{n,k}(\alpha_{n,k})}{\beta_k(\alpha_{n,k}) x + \beta_k(\alpha_{n,k}) x_0 + r\cos\varphi} d\tau \right\}$$

где α_n, $\alpha_{n,k}$ определяются из уравнений

$$t - \beta_n(\alpha_n)(x - x_0) - \alpha_n r\cos\varphi = 0 \qquad (n,\ k = 1,\ 2)$$

$$t - \beta_n(\alpha_{n,k}) x - \beta_k(\alpha_{n,k}) x_0 - \alpha_{n,k} r\cos\varphi = 0$$

То же решение может быть получено при наличии решения (21) методом [5].

Институт механики АН Армянской ССР
Педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 6 VII 1973

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՄԻ ՇԱՐՔ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՀՈՍ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑՎԱԾ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկվում է տեղափոխման վեկտորի որոշման մի քանի խնդիրներ առաձգական և մագնիսաառաձգական միջավայրում կետային իմպուլսների առկայության դեպքում։ Լուծումը գտնվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով և այնուհետև բերվում է Սմիրնովի և Սոբոլևի լուծման տեսքի։ Լուծումը գտնվել է անվերջ և կիսաանվերջ միջավայրերի համար։

SOLUTION OF SOME NON-STATIONARY SPATIAL PROBLEMS FOR A CONTINUOUS MEDIUM WITH CONCENTRATED IMPULSES

A. G. BAGDOEV, A. N. MARTIROSIAN

Summary

A number of problems to determine the displacement vector for elastic and magnetoelastic media with point impulses is considered. The solution is found by a common method consisting of determination of displacements by the integral transforms of Laplace and Fourier in the form of quadratures, which then are reduced to the effective form expressed through the analytical functions, introduced by Smirnov and Sobolev. The familiar solution of the problem for an infinite elastic medium, the

solution for an infinite magnetoelastic medium and the solution for a semi-infinite magnetoelastic medium bordering with dielectric are also found. In the latter problem the propagation of disturbances ahead of wave fronts in the magnetoelastic medium is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М.* и др. Линейные уравнения математической физики. Изд. «Наука», М., 1964.
2. *Kaliski S.* and *Petykiewicz Y.* Dynamical equations for elastic bodies in magnetic field. Proc. vibr. probl., 1959. № 2. Warsaw.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М.—Л., 1963.
4. *Кугушев А. М., Голубева Н. С.* Основы радиоэлектроники. Изд. «Энергия», М., 1969.
5. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, М.—Л., 1937.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 3, 1971 Механика

Г. А. БАБАДЖАНЯН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ДЛИННОМ ГАЗОПРОВОДЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ УГЛА НАКЛОНА ГАЗОПРОВОДА

§ 1. Уравнения движения и краевые условия

Рассматривается одномерное изотермическое нестационарное движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы. Влияние уклона газопровода на параметры газа становится существенным в горных условиях местности, а также, когда газ подается по длинному газопроводу большого диаметра с изменяющимся уклоном по отношению к горизонту.

Нестационарность движения газа обусловлена многими факторами, существующими на практике при эксплуатации газопровода. Так, например, неравномерное потребление газа в течение суток, месяца, квартала и года, пусковые и отключающие режимы, различные аварийные случаи и т. д.

Изучением нестационарного движения газа в длинном газопроводе занимались многие исследователи. Например, в работах [1], [2], [3], [4] рассмотрены задачи, относящиеся к движению газа при различных краевых и физико-химических условиях. В этих работах при решении той или иной задачи сделаны различные предположения и упрощения, но не учтено влияние уклона профиля трассы на газодинамические величины.

В предлагаемой работе мы сделали попытку, кроме нестационарности движения, учесть влияние уклона профиля трассы на характеристики движения.

Движение газа при вышеуказанных условиях описывается следующей системой уравнений [5]:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\xi \rho u^2}{2d}+\rho g \sin \alpha \\
-\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \\
p=\rho g R T
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где p — среднее по сечению трубы давление газа, ρ — плотность, u — скорость, ξ — коэффициент сопротивления, g — ускорение силы тяжести, T — абсолютная температура, R — газовая постоянная, d —

диаметр трубы, x — направление потока, t — время, α — угол, показывающий уклон профиля трассы или угол наклона трубопровода к горизонту.

Из системы (1.1) после некоторых несложных математических преобразований получим

$$\pi \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dgRT}{\xi} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{2dg \sin \alpha}{\xi} \frac{\partial P}{\partial x} \tag{1.2}$$

где

$$P(x, t) = p^2(x, t)$$

Исходя из постановки задачи, зададимся следующими граничными и начальными условиями:

$$\begin{aligned} &P(0, t) = P_н = p_н^2 = \text{const} && \text{при} \quad x = 0 \\ &\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\xi RT}{dgs_1^2} G^2(t) - AP(L, t) && \text{при} \quad x = L \\ &P(x, 0) = P_0(x) = p_0^2(x) && \text{при} \quad t = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

здесь $G(t)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения расхода газа по времени в конце трубопровода, s_1 — площадь поперечного сечения трубы, L — длина трубопровода, $P_0(x)$ — функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме работы.

Значение функции $P_0(x)$ с учетом уклона профиля трассы берется в следующем виде [6]:

$$P_0(x) = \frac{P_к(e^{-Ax} - e^{-AL}) + P_н(1 - e^{-Ax})}{1 - e^{-AL}} \tag{1.4}$$

где $A = \frac{2 \sin \alpha}{RT}$, а $P_н$ и $P_к$ — значения квадрата давлений в начале и в конце трубопровода.

Уравнение (1.2) есть нелинейное уравнение в частных производных второго порядка параболического типа. Точное функциональное решение его представляется невыполнимым. Поэтому его решение будем искать для случая, когда переменный коэффициент заменяется своим средним значением при стационарном режиме работы, т. е. принимаем

$$u(x, t) = u_{ср}(x) = \left[\frac{G_0(x) RT}{s_1 p_0(x)} \right]_{ср} \tag{1.5}$$

тогда уравнение (1.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial P}{\partial x} \tag{1.6}$$

где

$$A_1 = \frac{dgs_1(p_0)_{cp}}{G_0^2}, \qquad A_2 = \frac{2dgs_1(p_0)_{cp}\sin\alpha}{G_0^2 RT} \tag{1.7}$$

Величины $(p_0)_{cp}$ и G_0 в выражениях A_1 и A_2 постоянны и соответственно равны:

$$(p_0)_{cp} = \frac{1}{L}\int_0^L p_0(x)\,dx = \text{const}\,(\alpha)$$

$$G_0 = \frac{s_1 a_0(x) p_0(x)}{RT} = \text{const}\,(\alpha)$$

где G_0 — расход газа при стационарном режиме работы газопровода.

§ 2. Решение уравнения (1.6)

Решение уравнения (1.6) ищем в виде

$$P(x, t) = P_0(x) + P_1(x, t) \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.6), получим

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = A_1\left(\frac{\partial^2 P_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\right) + A_2\left(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x}\right) \tag{2.2}$$

Из (2.2) имеем

$$A_1\frac{d^2 P_0}{dx^2} + A_2\frac{dP_0}{dx} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = A_1\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + A_2\frac{\partial P_1}{\partial x} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) описывает движение газа при стационарном режиме. Решение уравнения (2.3) будет иметь вид (1.4).

Для нахождения полного решения задачи нужно интегрировать уравнение (2.4) при следующих краевых условиях:

$$P_1(0, t) = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0$$

$$P_1(x, 0) = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{\xi RT}{dgs_1^2}(2G_0G_1 + G_1^2) - AP_1(L, t) \qquad \text{при} \quad x = L$$

Третье граничное условие из (2.5) получается из соответствующего условия (1.3), если в нем подставить

$$P(x, t) = P_0(x) + P_1(x, t)$$

и

$$G(t) = G_0 + G_1(t)$$

Уравнение (2.4) решаем методом операционного исчисления [2]. Применяя к уравнению (2.4) и к краевым условиям (2.5) преобразование Лапласа, получим:

$$A_1 \frac{d^2F(s, x)}{dx^2} + A_2 \frac{dF(s, x)}{dx} - sF(s, x) = 0 \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &F(0, s) = 0 && \text{при} \quad x = 0 \\ &F(L, s) = -2cG_0\varphi_1(s) - c\varphi_2(s) - AF(L, s) && \text{при} \quad x = L \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$F(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} P_1(x, t)\, dt$$

$$\varphi_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_1(t)\, dt \tag{2.8}$$

$$\varphi_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_2(t)\, dt$$

$$c = \frac{\xi RT}{dgs_1^2}$$

Решением уравнения (2.6) будет

$$F(x, s) = e^{-\frac{A}{2}x}(c_1 e^{\beta x} + c_0 e^{-\beta x}) \tag{2.9}$$

где $\beta = \sqrt{\dfrac{A_2^2 + 4A_1 s}{2A_1}}$, а c_1 и c_0 — постоянные интегрирования.

Определяя c_1 и c_0 из граничных условий (2.7) и подставляя в (2.9), получим

$$F(x, s) = \frac{-ce^{\frac{A}{2}(L-x)}\,[2G_0\varphi_1(s) + \varphi_2(s)]\,\mathrm{sh}\,\beta x}{\beta\,\mathrm{ch}\,\beta L + \frac{A}{2}\,\mathrm{sh}\,\beta L} \tag{2.10}$$

Для нахождения оригинала функции $F(x, s)$ представим (2.10) в следующем виде:

$$F(x, s) = -ce^{\frac{A}{2}(L-x)}\,[F_1(x, s) + F_2(x, s)] \tag{2.11}$$

где

$$F_1(x, s) = \frac{2G_0\varphi_1(s)\,\mathrm{sh}\,\beta x}{\beta\,\mathrm{ch}\,\beta L + \frac{A}{2}\,\mathrm{sh}\,\beta L}, \qquad F_2(x, s) = \frac{\varphi_2(s)\,\mathrm{sh}\,\beta x}{\beta\,\mathrm{ch}\,\beta L + \frac{A}{2}\,\mathrm{sh}\,\beta L}.$$

Применяя к уравнению (2.11) обратное преобразование Лапласа, получим решение уравнения (2.4) в следующем виде:

$$P_1(x, t) = -ce^{\frac{\lambda}{2}(t-x)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} [F_1(s, x) + F_2(s, x)] e^{st} ds \qquad (2.12)$$

Если задан закон изменения расхода газа во времени в конце трубопровода, т. е. вид функции $G_1(t)$, то с помощью формулы (2.8) можем вычислить значения функций $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$. Затем подсчитав по известным правилам значение интеграла (2.12), получим решение уравнения (2.4). Имея в виду выражение (2.1) и обозначения $P(x, t) = p'(x, t)$, получим решение поставленной задачи.

Имея значение функции $p(x, t)$ из системы уравнений (1.1), определим значения всех искомых функций $u(x, t)$, $\rho(x, t)$ и $G(x, t)$.

Обычно на конце длинного газопровода изменение расхода газа во времени связано с требованием потребителя. Расход газа в конце газопровода изменяется в течение суток почти периодически, имея как наибольшее, так и наименьшее значения. Вследствие этого иногда длинный газопровод может служить в какой-то мере, как аккумулятор газа, где в течение часов провала накапливается газ с таким расчетом, чтобы в часы пик обеспечить требование потребителя.

Предположим, что вид функции $G_1(t)$, т. е. закон изменения расхода в конце трубопровода имеет синусоидальный характер, т. е.

$$G_1(t) = -\frac{G_0 \sin \omega t}{2} \qquad (2.13)$$

где $\omega = \frac{\pi}{\tau}$, τ — полный период колебания расхода газа в течение суток (в нашем случае $\tau = 24$ час).

Подставляя значение функции $G_1(t)$ в виде (2.13) в формулы (2.8) и производя интегрирование, получим для $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ следующие значения:

$$\varphi_1(s) = -\frac{G_0\omega}{2(s^2+\omega^2)}; \qquad \varphi_2(s) = \frac{G_0\omega^2}{2s(s^2+4\omega^2)} \qquad (2.14)$$

Подставляя значения $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ в виде (2.14) в (2.12), на основании теоремы обращения находим оригинал функции $F(x, s)$, то есть значение $P_1(x, t)$ в следующем виде:

$$P_1(x, t) = ce^{\frac{\lambda}{2}(t-x)} G_0 \left| \frac{M_1D_1 - M_2D_2}{M_1^2 + M_2^2} - \frac{K_1N_1 + K_2N_2}{8(N_1^2 + N_2^2)} - \right.$$

$$-\frac{A_1}{4A_2} e^{-\frac{\lambda}{2}t} \operatorname{sh} \frac{Ax}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_1\lambda_n \sin(\lambda_n x/L)\, e^{s_n t}}{L(s_n^2 + \omega^2)\left(\cos\lambda_n - \lambda_n \sin\lambda_n + \frac{AL}{2}\cos\lambda_n\right)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_1\lambda_n\sin(\lambda_n x/L)\,e^{s_n t}}{L(s_n^3-4s_n\omega^2)\left(\cos\lambda_n-\lambda_n\sin\lambda_n-\frac{AL}{2}\cos\lambda_n\right)}\Bigg\} \tag{2.15}$$

где

$$M_1=B_1\operatorname{ch}B_1L\cos B_2L-B_2\operatorname{sh}B_1L\sin B_2L+\frac{A}{2}\operatorname{sh}B_1L\cos B_2L$$

$$M_2=B_2\operatorname{ch}B_1L\cos B_2L+B_1\operatorname{sh}B_1L\sin B_2L+\frac{A}{2}\operatorname{ch}B_1L\sin B_2L$$

$$D_1=\operatorname{sh}B_1x\cos B_2x\cos\omega t-\operatorname{ch}B_1x\sin B_2x\sin\omega t$$

$$D_2=\operatorname{ch}B_1x\sin B_2x\cos\omega t+\operatorname{sh}B_1x\cos B_2x\sin\omega t \tag{2.16}$$

$$N_1=a_1\operatorname{ch}a_1L\cos a_2L-a_2\operatorname{sh}a_1L\sin a_2L+\frac{A}{2}\operatorname{sh}a_1L\cos a_2L$$

$$N_2=a_2\operatorname{ch}a_1L\cos a_2L+a_1\operatorname{sh}a_1L\sin a_2L+\frac{A}{2}\operatorname{ch}a_1L\sin a_2L$$

$$K_1=\operatorname{sh}a_1x\cos a_2x\cos 2\omega t-\operatorname{ch}a_1x\sin a_2x\sin 2\omega t$$

$$K_2=\operatorname{ch}a_1x\sin a_2x\cos 2\omega t+\operatorname{sh}a_1x\cos a_2x\sin 2\omega t$$

$$B_1=\pm\frac{1}{2A_1}\sqrt{\frac{\sqrt{A_2^4+16A_1^2\omega^2}+A_2^2}{2}}$$

$$B_2=\pm\frac{1}{2A_1}\sqrt{\frac{\sqrt{A_2^4+16A_1^2\omega^2}-A_2^2}{2}} \tag{2.17}$$

$$a_1=\pm\frac{1}{2A_1}\sqrt{\frac{\sqrt{A_2^4+64A_1^2\omega^2}+A_2^2}{2}}$$

$$a_2=\pm\frac{1}{2A_1}\sqrt{\frac{\sqrt{A_2^4+64A_1^2\omega^2}-A_2^2}{2}}$$

$\lambda_n=B_2L$ являются корнями следующего трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{tg}\lambda_n=-\frac{2}{A}\frac{\lambda_n}{L} \tag{2.18}$$

а

$$s_n=-\frac{4A_1\lambda_n^2+L^2A_2^2}{4A_1L} \tag{2.19}$$

Если изменение расхода в конце трубопровода задано другим законом, зависящим от времени, то разлагая его по синусам в интервале $[0, T]$ в ряд Фурье, можем определить значения функции $z_1(s)$ и $z_2(s)$, которые в этом случае будут представляться в виде суммы с коэффициентами Фурье.

§ 3. Численный пример

Рассмотрим численный пример при следующих данных:

$$p_н = 12 \cdot 10^4 \ кГ/м^2 \qquad \zeta = 0.012$$

$$p_к = 8 \cdot 10^4 \ кГ/м^2 \qquad R = 50 \ м/град$$

$$l = 5 \cdot 10^3 \ м \qquad T = 290^\circ$$

$$d = 0.6 \ м \qquad \tau = 24 \ часа$$

$$\alpha = 0^\circ, \ \pm 1^\circ, \ \pm 5^\circ, \ \pm 10^\circ.$$

Расход газа при стационарном режиме вычисляется по формуле [3]

$$G_0 = \frac{s_1}{RT} \sqrt{\frac{2dg \sin\alpha \left(p_н^2 e^{-\lambda l} - p_к^2\right)}{\zeta (1 - e^{-\lambda l})}} \tag{3.1}$$

Скорость газа вычисляется по формуле

$$u(x, t) = \left(-\frac{2dgRT}{\zeta p} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2dg \sin\alpha}{\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

Расход газа при нестационарном режиме вычисляем по формуле

$$G(x, t) = \frac{s_1}{RT} p(x, t) u(x, t) \tag{3.3}$$

Плотность определяется из уравнения состояния.

Изменения искомых функций $p(x, t)$, $u(x, t)$ и $G(x, t)$ вдоль газопровода и во времени, вычисленные по формулам (2.15), (3.2) и (3.3) представлены на фиг. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

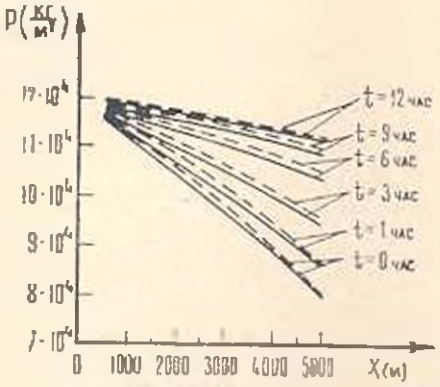
Из полученных результатов и вычисленного примера можно сделать следующие выводы:

1. В интервале времени $0 < t \leqslant 12$ и $\alpha = \text{const}$ давление в трубе увеличивается, а в интервале $12 < t \leqslant 24$ начинает уменьшаться, достигая своего первоначального значения.

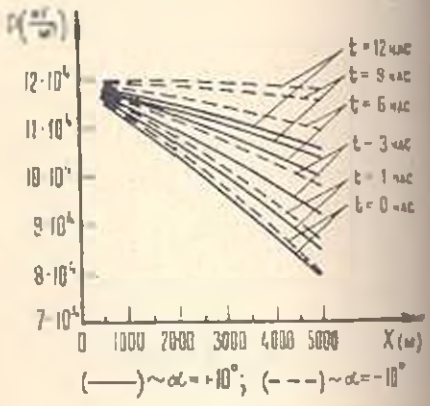
2. На изменение давления существенно влияет уклон профиля трассы. Из фиг. 1, 2 видно, что в данный момент времени и для заданного сечения трубы при положительном уклоне ($\alpha > 0$) давление меньше, чем при отрицательном уклоне ($\alpha < 0$).

3. Скорость газа в интервале $0 < t \leqslant 12$ уменьшается, а в интервале $12 < t \leqslant 24$ увеличивается. Из фиг. 3 и 4 видно, что для фиксированного момента времени и заданного сечения трубы скорость газа при отрицательном уклоне больше, чем при положительном.

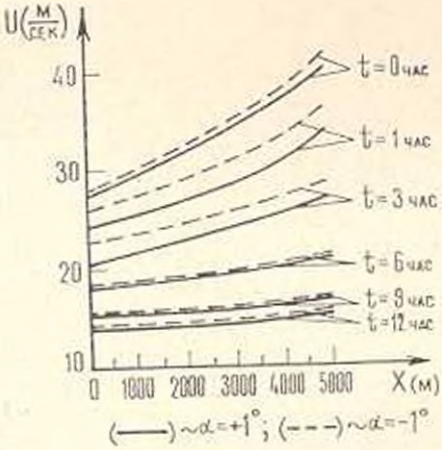
4. Из фиг. 5, 6 видно, что при $\alpha = \text{const}$ и в интервале $0 < t \leqslant 12$ расход уменьшается, а потом начинает увеличиваться, принимая свое первоначальное значение. Из этих фигур видно, что влияние уклона на значение расхода газа существенно. При положительном значении



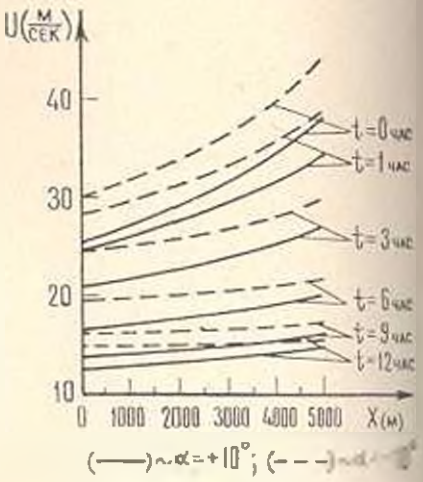
Фиг. 1.



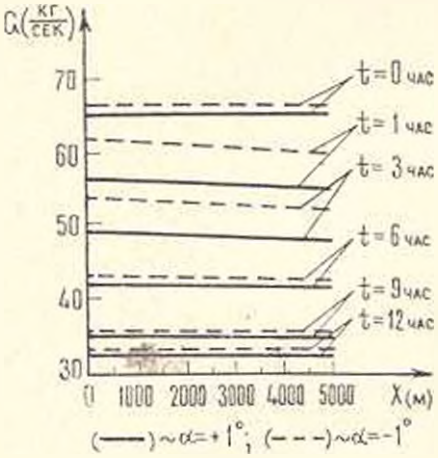
Фиг. 2.



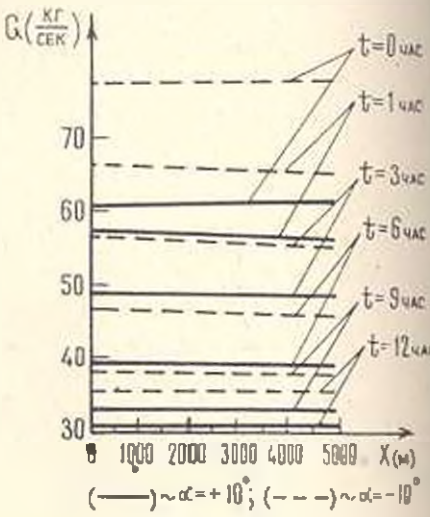
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

уклона ($\alpha > 0$) расход уменьшается быстро и где-то в окрестности $\alpha = +15^\circ$ расход обращается в нуль. Наоборот, расход газа увеличивается, когда уклон уменьшается ($\alpha < 0$). Так, например, при $\alpha = -10^\circ$ расход газа на 35—40% больше по сравнению с расходом при $\alpha = 0$.

Эти обстоятельства накладывают очень важное ограничение на точность расчетов при проектировании магистральных газопроводов больших диаметров.

Влияние угла наклона газопровода на газодинамические характеристики подробно показано в работе [6].

Ереванский государственный
университет

Поступила 20 VIII 1973

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ ԻՐԱԿԱՆ ԳԱԶԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԳԱԶԱՄՈՒՂԻ ԹԵՔՈՒԹՅԱՆ ԱՆԿՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկվում է իրական (մածուցիկ) գազի ոչ ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը երկար գազամուղում, երբ նրա թեքությունը հորիզոնի նկատմամբ կազմում է որևէ անկյուն (α)։ Գազամուղում գազի շարժման ոչ ստացիոնարությունը պայմանավորված է նրա վերջին կտրվածքում գազի ելքի փոփոխությամբ ըստ ժամանակի։ Գազի ելքի փոփոխությունը իր հերթին պայմանավորված է սպառողի օրվա ընթացքում պահանջի փոփոխությամբ։

Ստացված էն գազի ճնշման, արագության, ելքի, խտության փոփոխման օրենքները ըստ ժամանակի և գազամուղի երկարության։

Շարժման պարամետրերի համար ստացված թվային արժեքները ցույց են տալիս, որ գազամուղի թեքության անկյունը նշանակալից ազդեցություն է գործում գազոդինամիկական մեծությունների վրա։

NON-STATIONARY MOTION OF REAL GAS IN A LONG GASPIPE CONSIDERING THE EFFECT OF THE LINE PROFILE SLOPE

G. H. BABADJANIAN

Summary

A linear isothermic non-stationary motion of real gas in a long gaspipe, considering the effect of the line profile slope, is studied. A non-stationary state of gas motion in the gaspipe develops due to change in gas discharge at the end of the gaspipe. The change depends upon an uneven consumption of gas during the day. The laws of change in pressure, density, velocity and discharge along the gasline with time are found as well.

The solution and numerical example show that the change in the line slope and non-stationary motion of gas affect essentially the gas-dynamic values.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галиулин З. Т., Черенкин В. И.* Некоторые вопросы неустановившегося движения в трубопроводах. Изв. высших учебных заведений «Нефть и Газ», № 12, 1960.
2. *Бабаджанян Г. А.* Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. высших учебных заведений «Нефть и Газ», № 1, 1961.
3. *Бабаджанян Г. А.* Об одной задаче нестационарного движения газа в длинном газопроводе. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XIV, № 3, 1961.
4. *Кудрашев Л. И., Церерин В. А.* К качественной оценке влияния нестационарности на газодинамическое сопротивление магистральных газопроводов. Изв. высших учебных заведений «Нефть и Газ», № 6, 1963.
5. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
6. *Бабаджанян Г. А.* Стационарное движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVI, № 5, 1973.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Гостехтеориздат, М., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

Г. Г. ОГАНЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

Рассматривается задача определения параметров движения вязкой химически реагирующей неоднородной бинарной газовой смеси при наличии в ней процессов теплопроводности и диффузии в окрестности каустики, являющейся огибающей лучей фронтов волн (в приближении геометрической акустики). В зависимости от отношения времени протекания химической реакции к макроскопическому времени [1] различают два вида процессов распространения возмущений: квазиравновесный и квазизамороженный. При отсутствии теплопроводности, диффузии и химических реакций задача рассматривалась в [2, 3].

В настоящей работе методом [1] выведены нелинейные диссипативные уравнения движения среды в окрестности каустики для всех видов процессов. При этом использованы лучевые соотношения [4] и показано, что полученные уравнения верны как для однородной, так и неоднородной среды в порядке $\varepsilon=\gamma^{-1/2}$, где γ — интенсивность волны вдали от каустики. Найдены давление и компоненты скорости частиц смеси в окрестности и на самой каустике в линейно-диссипативном приближении.

Интересен тот факт, что если отнести компоненты скорости частиц к некоторому множителю в интенсивности лучевого решения, характеризующему неоднородность среды или процесс релаксации, то движение в окрестности каустики для обоих процессов описывается одними и теми же уравнениями. Для случая специальных сред с близкими значениями замороженной и равновесной скоростей звука получена система уравнений, содержащая третью производную, которая [5] приводит к дисперсии волн.

1. Предположим, что в потоке химически реагирующей бинарной газовой смеси происходит только одна реакция. Уравнения движения смеси возьмем в виде [6, 7]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu_1\Delta u+\left(\frac{1}{3}\mu_1+\mu_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\rho\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu_1\Delta v+\left(\frac{1}{3}\mu_1+\mu_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{3}$$

$$\rho\mu\frac{dc}{dt}-Q\frac{dq}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho D\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho D\left(\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] \qquad (4)$$

$$\rho T\frac{ds}{dt}+Q\frac{dq}{dt}=\left(\frac{4}{3}\lambda_1+\lambda_2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+2\left(\lambda_2-\frac{2}{3}\lambda_1\right)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+$$

$$+\lambda_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+k\Delta T+\left[k_T\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{P,T}-T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{P,c}\right]\rho D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Bigg\}+$$

$$+D\left\{\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{P,T}-T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{P,c}+\mu\right]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{P,T}-T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{P,c}+\mu\right]\right\} \qquad (5)$$

$$q=\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}, \qquad Q=\nu\mu \qquad (6)$$

Здесь t — время, ρ — плотность, u и v — продольная и поперечная составляющие скорости, P — давление, T — температура, s — энтропия, Q, q и $\dot{q}$ — сродство, полнота и скорость химической реакции, c — концентрация, μ — химический потенциал, λ_1 и λ_2 — первый и второй коэффициенты вязкости, D, $k_T D$, $k_P D$ — коэффициенты диффузии, термодиффузии и барродиффузии, величина ν/M пропорциональна стехиометрическому коэффициенту, с которым входит первый компонент в уравнение химической реакции, M — молекулярная масса первого компонента, Δ — оператор Лапласа.

Система (1)—(5) описывает движение химически реагирующей бинарной газовой смеси с учетом в ней процессов диффузии и теплопроводности.

Чтобы замкнуть систему уравнений (1)—(5), рассмотрим соотношение Гиббса

$$Tds=de-pdV-\mu dc$$

где e — удельная внутренняя энергия, $V=1/\rho$ — удельный объем. Первые частные производные

$$\mu=\frac{Q}{\nu}=e_1=\left(\frac{\partial e}{\partial c}\right)_{s,V}, \qquad -P=e_2=\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_{s,c}, \qquad T=e_3=\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_{V,c}$$

являющиеся также уравнениями состояния среды, служат недостающими соотношениями для замыкания системы.

В состоянии термодинамического равновесия [6] $Q = q = 0$. Допустим, что вблизи этого состояния имеется аналитическая зависимость q от Q

$$q = -\frac{1}{\tau} H_1(\rho, c)\, Q + \cdots \tag{7}$$

где коэффициент $H_1(\rho, c) > 0$ является функцией порядка единицы, τ — время протекания химической реакции.

Рассматриваемую область течения релаксирующей смеси считаем областью двумерных коротких волн [8]. Введем систему координат x_1, y_1 с началом в точке, находящейся на пересечении каустики с ударной волной и движущейся со скоростью a_1, представляющей соответствующую характерную скорость звука линейной задачи на каустике

$$\begin{aligned} x_1 &= (x - x^0)\cos\theta + (y - y^0)\sin\theta \\ y_1 &= -(x - x^0)\sin\theta + (y - y^0)\cos\theta \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь (x^0, y^0) — координаты центра подвижных координат (x_1, y_1) в системе (x, y). Координатные линии $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ направлены соответственно по внутренней нормали и по касательной к каустике в сторону движения фронта волны. Причем $\dfrac{\partial x^0(t)}{\partial t} = a_1 \cos\theta$, $\dfrac{\partial y^0(t)}{\partial t} = a_1 \sin\theta$, $\theta(t)$ — угол наклона касательной к каустике в точке (x^0, y^0) луча к оси Ox.

Для проекций u_1, v_1 скорости частиц смеси на направления подвижной системы координат получаем

$$u_1 = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad v_1 = -u\sin\theta + v\cos\theta \tag{9}$$

В дальнейшем производится сжатие координат (x_1, y_1)

$$x_1 = \varepsilon^{1/2} x_1, \qquad y_1 = \varepsilon y_1 \tag{10}$$

Преобразования (8)—(10) позволяют рассматривать течение газовой смеси в узкой области волны, которая фактически представляет собой структуру размытого ударного фронта.

Допустим, что разность значений всех параметров возмущенной и невозмущенной газовой смеси мала. Невозмущенные величины обозначим нулевым индексом

$$\begin{aligned} &P = P_0 + \varepsilon P', \quad \rho = \rho_0 + \varepsilon\rho', \quad s = s_0 + \varepsilon s', \quad T = T_0 + \varepsilon T', \quad Q = \varepsilon Q' \\ &q = q_0 + \varepsilon q', \quad c = c_0 + \varepsilon c', \quad a = a_0 + \varepsilon a', \quad u_1 = \varepsilon u_1, \quad v_1 = \varepsilon^{1/2} v_1 \end{aligned} \tag{11}$$

В выражениях (10)—(11) величина ε есть малый параметр. Между невозмущенной (линейной) скоростью звука a_0 и скоростью звука a_1 на каустике существует связь [9]

$$a_4 = a_1 - a_1 K_r y_1 \tag{12}$$

где K_r — кривизна луча в рассматриваемой точке.

При выводе последующих уравнений во всех случаях будем удерживать лишь главные члены и в окончательных уравнениях делать переход к переменным (9)—(10).

1. *Квазиравновесный процесс*

За независимые переменные примем плотность ρ, давление P, сродство Q. Аналогично [1], для давления P получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} - a_r^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{ds}{dt}\left(\frac{ds}{dP}\right)^{-1}_{\rho, Q} + \left(\frac{dP}{\partial Q}\right)_{\rho, s} \frac{dQ}{dt}, \qquad a_r = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{1/2}_{s, Q}$$

Здесь a_r — равновесная скорость звука. Комбинируя это соотношение с уравнениями (1), (5), (4), можно получить

$$\frac{dP}{dt} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + \rho a_r^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = L_{2r} + L_{3r} - L_{4r} \tag{13}$$

где

$$L_{2r} = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, Q} \frac{1}{\rho T}\left\{k\Delta T + \left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \lambda_1\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$L_{3r} = \left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_{\rho, s}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \frac{Q}{\rho T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

$$L_{4r} = \frac{D}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, Q}\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P, T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P, c}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] + \frac{D}{\rho T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, Q}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P, T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P, c} + \mu\right] + \left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P, T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P, c} + \mu\right]\right]$$

Приращение температуры представим в виде

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{\rho, Q}\left[dP - \frac{1}{\chi_r} a_r^2 d\rho - \left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_{\rho, T} dQ\right], \qquad \chi_r = \frac{c_{P, Q}}{c_{V, Q}} \tag{14}$$

где $c_{P, Q}$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении и сродстве, $c_{V, Q}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме и сродстве.

Пусть $a_0 = a_{e0}$, то есть рассматриваемая двумерная короткая волна с узкой возмущенной зоной движется с равновесной скоростью звука в покоящейся среде. Примем

$$a_e = a_{e0} + \varepsilon a_e' \tag{1.3}$$

В дальнейшем штрихи над всеми величинами опускаем.

Преобразования (8)—(10) и последующая линеаризация посредством (11) уравнений (1) и (2) дают

$$\rho = \frac{\rho_0}{a_{e1}} u_1 = \frac{1}{a_{e1}^2} P \tag{1.4}$$

Аналогичным образом из уравнения (3) получем

$$\rho_0 a_{e1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial y_1}$$

Отсюда с учетом второго равенства из (1.4) находим

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \tag{1.5}$$

то есть в окрестности пересечения фронта волны с каустикой движение стеки потенциальное.

Для отклонения давления $P = P(\rho, Q, s)$ от значения вблизи положения равновесия можно получить

$$P = a_{e0}^2 \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, e} s + \left(\frac{\partial P}{\partial Q_0}\right)_{\rho, e} Q$$

Чтобы приведенное соотношение совпало с (1.4), необходимо потребовать

$$s = 0, \qquad Q = 0 \tag{1.6}$$

Преобразование и последующая линеаризация с помощью (8)—(11) соотношений (6) и (7) дают

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = N_e H_{10} Q, \qquad N_e = \frac{L}{\tau a_{e1}}, \qquad H_{10} = \frac{H_{10}}{L_1} \tag{1.7}$$

где $L = \varepsilon^{3/2} L_1$, L_1, имеющая размерность длины, есть величина порядка единицы.

Из (1.6) видно, что возмущенные энтропия и сродство — малые более высокого порядка, чем остальные возмущенные параметры. Более точная оценка показывает, что $s \sim \varepsilon^{3/2}$, $Q \sim \varepsilon^{3/2}$. Тогда из (1.7) получим условие $N_e \gg 1$ или $\tau \sim \varepsilon^3$. Таким образом, в квазиравновесном процессе время протекания химической реакции много меньше макроскопического времени L/a_{e1}.

Линеаризируя уравнение (1.1) и учитывая соотношения (1.2), (1.6) и (1.4), получим

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{\rho, Q} \left(1 - \frac{1}{\gamma_e}\right) \rho_0 a_{e1} du_1 \tag{1.8}$$

Применение преобразований (8)—(11) к уравнению (4) и учет соотношения (1.7) дают

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{\nu}{\rho_0} N_e H_{10} Q \tag{1.9}$$

Разлагая $c = c(\rho, Q, s)$ в ряд Тейлора вблизи положения равновесия, учитывая требования (1.6) и соотношения (1.4), получим

$$c = \left(\frac{\partial c}{\partial \rho_0}\right)_{Q, s} \frac{\rho_0}{a_{e1}} u_1 \tag{1.10}$$

Аналогичным образом для приращения равновесной скорости звука находим

$$a_e = (\varkappa_e^0 - 1) u_1, \qquad \varkappa_e^0 = \left| \frac{\partial}{\partial \rho_0} (a_e \rho) \right|_{Q, s} \tag{1.11}$$

Преобразуя посредством (8)—(11) уравнение (1.1), учитывая линеаризованное уравнение (2) и соотношения (1.8)—(1.11) и затем переходя к переменным x_1, y_1, u_1, v_1 (без штрихов), получим

$$\left(2y_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} - 2a_{e1} \frac{y_1}{R_r} + 2 \frac{\varkappa_e^0}{\sqrt{\rho_0 a_{e1}}} \bar{u}_1\right) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + a_{e1} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y_1} + 2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} =$$

$$= \left\{\left(\frac{4}{3} \lambda_1 + \lambda_2\right) \frac{1}{\rho_0} + \frac{k}{\rho_0 T_0} \left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, Q} \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{\rho, Q} \left(1 - \frac{1}{\gamma_e}\right) - \right.$$

$$- \frac{\nu \rho_0}{\nu H_{10}} \left(\frac{\partial P}{\partial Q_0}\right)_{\rho, s} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho_0}\right)_{Q, s} + B_{e0} \left| \frac{D}{a_{e1}^2} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho_0}\right)_{Q, s} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{k_T D}{T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{\rho, Q} \left(1 - \frac{1}{\gamma_e}\right) + \frac{k_P D}{P_0} \right| \right\} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} \tag{1.12}$$

Здесь $B_{e0} = \left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, Q} \left[\frac{k_T}{T_0} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c_0}\right)_{P, T} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T_0}\right)_{P, c}\right]$, $R_r = K_r^{-1}$ — радиус кривизны луча в рассматриваемой точке, $\bar{u}_1 = \sqrt{\rho_0 a_{e1}}\, u_1$, $\bar{v}_1 = \sqrt{\rho_0 a_{e1}}\, v_1$.

Уравнение (1.12) совместно с уравнением (1.5) описывает движение смеси в окрестности каустики. При отсутствии химических реакций, теплопроводности и диффузионных эффектов оно совпадает с уравнением, полученным в [3].

Вводя потенциал скорости $\varphi(x_1, y_1)$, из системы (1.12) и (1.5) получим

$$\left(2a_{e1} \frac{y_1}{R} + 2 \frac{\varkappa_e^0}{\sqrt{\rho_0 a_{e1}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + a_{e1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial t} = \lambda \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} \tag{1.13}$$

где $1/R = 1/R_s - 1/R_r$ — разность кривизн каустики и луча, $\frac{1}{R_s} = \frac{1}{a_{r1}}\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{\partial\delta}{\partial l}$, l — элемент дуги каустики, δ — выражение в фигурной скобке в уравнении (1.12).

Исследуем полученное уравнение.

а) Пусть нелинейный и диссипативный эффекты пренебрежимо малы по сравнению с линейным. Уравнение (1.13) приведется к виду

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t} + 2a_{r1}\frac{y_1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + a_{r1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = 0 \qquad (1.14)$$

Отметим, что уравнение (1.14) можно также получить вышеприведенным методом из акустического уравнения потенциала для неоднородной среды [10]

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a_0^2\Delta\Phi + \frac{a_0^2}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\rho_0}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1.15)$$

которое заменой $\Phi = \rho_0^{-1/2}\Phi'$ приводится с точностью до недифференцируемых слагаемых с Φ', не влияющих на решение вблизи каустики, к волновому уравнению. Последнее путем замены $\Phi' = a_{r1}^{-1/2}\varphi$ приводится в переменных (9), (10) к уравнению (1.14). Заметим, что для давления $P = -\rho_0\partial\Phi/\partial t$ получится уравнение (1.15) с обратным знаком перед третьим слагаемым. Замена $P = \sqrt{\rho_0}\,P_1$ приводит с точностью до недифференцируемых членов к волновому уравнению для P_1. Периодическое по времени решение волнового уравнения вблизи каустики определено в [9, 11, 12], нестационарное — в [4, 9, 13, 14].

Компоненты скорости по нормали и по касательной к фронту слабой ударной волны имеют вид

$$u_1 = (\rho_0 a_{r1})^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{P}{\rho_0 a_{r1}}, \qquad u_2 = (\rho_0 a_{r1})^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \qquad (1.16)$$

Для скачкообразной падающей волны решение для давления имеет вид [11]

$$\frac{P}{A_1}(-y_1)^{1/6} = \begin{cases} P_{-1/6}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right) & \text{при } x_1 > \alpha_1 \\ 2P_{-1/6}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right) & \text{при } -\alpha_1 < x_1 < \alpha_1 \\ \sqrt{3}\,P_{-1/6}\left(-\frac{x_1}{\alpha_1}\right) + \frac{2}{\pi}Q_{-1/6}\left(-\frac{x_1}{\alpha_1}\right) & \text{при } x_1 < -\alpha_1 \end{cases} \qquad (1.17)$$

причем имеет место [15]

$$2P_{-1/2}\left(\frac{x_1}{z_1}\right) = \sqrt{3}\,P_{-1/2}\left(-\frac{x_1}{z_1}\right) + \frac{2}{\pi}\,Q_{-1/2}\left(-\frac{x_1}{z_1}\right)$$

Здесь $P_{-1/2}$, $Q_{-1/2}$ — функции Лежандра. $P_{\text{геом}} = A_1(-y_1)^{-1/6}$ есть лучевое решение вдали от каустики, $z_1 = \frac{2}{3}(-y_1)^{3/2}\left(\frac{2}{R}\right)^{1/2}$. Из (1.17) видно, что оно удовлетворяет (1.14), в котором отбрасывается первое слагаемое, то есть в порядке $\varepsilon^0 = \gamma^{1/2}$ (линейное решение) движения в переменных (9), (10) — установившееся.

б) Пусть теперь в уравнении (1.13) малы только нелинейные эффекты. Уравнение (1.13) примет вид

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t} + 2a_{e1}\frac{y_1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = a_{e1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} - \varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} \tag{1.18}$$

Решение уравнения (1.18) будем искать в виде ($\varepsilon = \text{const}$)

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x_1 - \tau,\ y_1,\ t)(2\pi\delta t)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau \tag{1.19}$$

Предполагая, что $\varphi_0(x_1, y_1, t)$ есть решение (1.14), легко можно показать, что φ удовлетворяет уравнению (1.18). Поскольку для давления $P = \sqrt{\rho_0 a_{e1}}\,\partial\varphi/\partial x$ также имеет место свертка (1.19), то, взяв для P_0 значение (1.17), получим

$$\frac{P}{A_1}(-y_1)^{1/6}(2\pi\delta t)^{1/2} = \int_{-\infty}^{x_1-z_1} P_{-1/2}\left(\frac{x_1-\tau}{z_1}\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau +$$

$$+2\int_{x_1-z_1}^{x_1+z_1} P_{-1/2}\left(\frac{x_1-\tau}{z_1}\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau + \int_{x_1+z_1}^{\infty}\left[\sqrt{3}\,P_{-1/2}\left(\frac{-x_1+\tau}{z_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}Q_{-1/2}\left(\frac{-x_1+\tau}{z_1}\right)\right]\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau \tag{1.20}$$

Вычислим по (1.20) давление в окрестности каустики $y_1 = 0$. Используя разложение функций Лежандра по отрицательным степеням аргументов, легко вычислим путем замены переменной $x_1 - \tau = -z$ особые интегралы [16]. Затем вычисляем с помощью перемножения степенных рядов интеграл

$$\int_{x_1-z_1}^{x_1+z_1}(x_1-\tau)^{-2m-k}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau =$$

$$= -\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\delta t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n-2m+\frac{5}{6}}\,z_1^{n-2m+k+1}$$

где

$$k = \frac{1}{6} + \frac{\delta}{6}, \qquad c_{2n} = (2\delta t)^{-2n} \sum_{s=0}^{n} \frac{(2x_1)^{2s}}{(2s)!\,(2n-2s)!} \tag{1.21}$$

$$c_{2n+1} = (2\delta t)^{-2n-1} \sum_{s=0}^{n} \frac{(2x_1)^{2s+1}}{(2s+1)!\,(2n-2s)!}$$

Аналогично вычисляется второй интеграл в (1.20), который разбивается на интегралы в пределах $(x_1 - \alpha_1, x_1)$ и $(x_1, x_1 - \alpha_1)$, причем разложение функций Лежандра берется по положительным степеням аргументов и для второго интеграла имеет место $c_n(-x_1) = (-1)^n c_n(x_1)$.

Итак, решение (1.20) в окрестности каустики запишется в виде

$$P = A_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{-2m}\alpha_1^{2m}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right)m!} (\delta t)^{-m} \left[D_{2m-\frac{2}{3}}\left(-\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\, D_{2m-\frac{2}{3}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right) \right] - A_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{-2m-1/3}\alpha_1^{2m+1/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+m\right)m!} (\delta t)^{-m-1/3} \times$$

$$\times \left[D_{2m-\frac{1}{3}}\left(-\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right) - \sqrt{3}\, D_{2m-\frac{1}{3}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right) \right] + A_3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_1^{n+1/3} \times$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}+m\right)}{\left(n-2m+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}+m\right)m!} - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}+m\right)}{\left(n-2m+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right)m!} \right] -$$

$$- \frac{A_3}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \alpha_1^{n+1/3} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}+m\right)}{\left(n-2m+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}+m\right)m!} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}+m\right)}{\left(n-2m-\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right)m!} \right] + \frac{A_3}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \alpha_1^{n+1/3} \times$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{5}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}+m\right)}{(n-2m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)m!} - \frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}+m\right)}{(n-2m+2)\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)m!} \right] \tag{1.22}$$

где

$$A_2 = 2^{1/3} 3^{-1/6} A_1 \left(\frac{2}{R}\right)^{1/12} (\delta t)^{-1/6} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4\delta t}\right)$$

$$A_2 = 2^{-3/4} A_2 \pi^{1/2} (\delta t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4\delta t}\right)$$

а $D_{2m-k}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right)$ — функции параболического цилиндра.

Из (1.22) по (1.4) получается значение для n_1. Решение для потенциала $\overline{\rho_0 a_{01}}\,\varphi(x_1, y_1)$ дается (1.19), причем значение ρ_0 берется из [4] при $k_1 = 1$. Тогда, аналогично вычислениям в (1.20), можно выразить компоненту скорости $v_1 = \partial\varphi/\partial y_1$ через формулу, подобную (1.22). При $x_1 = 0$, то есть на самой каустике, полученные формулы еще более упрощаются.

Рассмотрим сходимость полученных рядов типа (1.22). Для рядов, содержащих функции D_{2m-k}, используя их выражения через вырожденные гипергеометрические функции [15], а также асимптотические выражения этих функций [17], можно показать, что они сходятся для всех y_1. Легко проверить, что в последних слагаемых внутренний ряд сходится. Что же касается внешнего ряда, то из (1.21) видно, что

$$c_n < \frac{(1 + 2x_1)^{2n}}{(2n)!}$$

то есть внешний ряд также сходится. Сходимость рядов типа (1.22) для всех y_1 доказана.

2. *Квазизамороженный процесс*

Примем за независимые переменные плотность ρ, давление P, концентрацию c. Аналогично [1], для давления получим

$$\frac{dP}{dt} - a_f^2 \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{\partial P}{\partial c}\right)_{\rho, s} \frac{dc}{dt}, \qquad a_f = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s, c} \tag{2.1}$$

Здесь a_f — замороженная скорость звука. Аналогично выводу (1.11), из (2.1) получаем альтернативную форму

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + \rho a_f^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = L_{2f} + L_{3f} + L_{4f} \tag{2.2}$$

где

$$L_{2f} = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c} \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, Q}^{-1} L_{2r}$$

$$L_{3f} = \left[\frac{\varkappa}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial c}\right)_{\rho, s} - \frac{Q}{\rho T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c}\right]\left(\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y}\right)$$

$$L_{4f} = \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial c}\right)_{\rho, s} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c}\left[k_T\left(\frac{\partial \psi}{\partial c}\right)_{P, T} - T\left(\frac{\partial \psi}{\partial T}\right)_{P, c}\right]\right\} \times$$

$$\times D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} +$$

$$+\frac{D}{2T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{p,c}\left\{\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}p\left[k_T\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{P,T}-T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{P,c}-\mu\right]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}p\left[k_T\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{P,T}-T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{P,c}-\mu\right]\right\}$$

Приращение температуры напишем в виде

$$dT=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{p,c}\left[dP-\frac{1}{\chi_f}a_f^2dp-\left(\frac{\partial P}{\partial c}\right)_{p,T}dc\right],\qquad \chi_f=\frac{c_{P,c}}{c_{V,c}}\qquad(2.3)$$

где $c_{P,c}$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении и концентрации, $c_{V,c}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме и концентрации.

Пусть теперь $a_0=a_{f0}$, то есть скорость движения двумерной короткой волны по покоящейся смеси равна замороженной скорости звука. Примем

$$a_f=a_{f0}+\varepsilon a_f'\qquad(2.4)$$

Как и в п. 1, штрихи над всеми переменными опускаем.

С учетом (12), для отклонения давления $P=P(p,s,c)$ от равновесного значения в покоящейся среде имеем

$$P=a_{f1}^2p+\left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{p,c}s+\left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{p,s}c\qquad(2.5)$$

Преобразования (8)—(10), последующая линеаризация (11) уравнений (1)—(2) и интегрирование снова приводят к соотношениям (1.4) с заменой a_{e1} на a_{f1}, где a_{f1} — замороженная скорость звука на каустике. Тогда сравнение с (2.5) приводит к требованию

$$s=0,\qquad c=0\qquad(2.6)$$

Иными словами, в рассматриваемом приближении сжатие газовой смеси происходит обратимо не только при постоянном сродстве, но и концентрации реагирующей смеси.

Как и в п. 1, выполняются условие (1.5) потенциальности движения газовой смеси в окрестности каустики и соотношение (1.7), в котором необходимо заменить N_e на N_f, $N_f=L/\tau a_{f1}$. Из (2.6) видно, что возмущенные энтропия и концентрация — величины более высокого порядка малости, чем остальные возмущенные параметры ($s\sim\varepsilon^{3/2}$, $c\sim\varepsilon^{3/2}$). Преобразуя и производя линеаризацию уравнения (4) посредством (8)—(11), убеждаемся, что $q\sim c\sim\varepsilon^{3/2}$. Тогда из (1.7) получаем условие $N_f\ll 1$, т. е. в квазизамороженном процессе время протекания химической реакции τ много больше макроскопического времени L/a_{f1}.

Согласно требованию (2.6), соотношениям (1.4) и (12), для дифференциала возмущения температуры из (2.3) получим

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{s,c} \left(1 - \frac{1}{\chi_f}\right) \rho_0 a_{f1} du_1 \tag{2.7}$$

Преобразования (8)—(10) и линеаризация (11) приводят уравнения (4) к виду

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{\nu}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{k_T D}{T_0 a_{f1}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \frac{k_P D}{P_0 a_{f1}} \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} \tag{2.8}$$

В рассматриваемом приближении [1]

$$Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{s,c} \frac{\rho_0}{a_{f1}} u_1, \qquad a_f = (\varkappa_f^0 - 1) u_1, \qquad \varkappa_f^0 = \left| \frac{\partial}{\partial \rho_0} (\rho a_f) \right|_{s,c} \tag{2.9}$$

Выражая (2.8) с помощью (1.4), (1.7), (2.7), (2.9) через скорость частиц смеси, подставляя полученное соотношение, а также (2.7), (2.9) в преобразованное посредством (8)—(11) уравнение (2.2), получим, возвращаясь к переменным u_1, v_1, x_1, y_1 (без штрихов),

$$\left(2 \frac{y_1}{R} a_{f1} + 2 \frac{\varkappa_f^0}{\sqrt{\rho_0 a_{f1}}} \bar{u}_1\right) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + a_{f1} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y_1} + 2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\nu H_{10}}{\rho_0 a_{f1}^2} \left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{s,c} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{s,c} \bar{u}_1 =$$

$$= \left\{\left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right) \frac{1}{\rho_0} + \frac{k}{\rho_0 T_0} \left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho,c} \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{s,c} \left(1 - \frac{1}{\chi_f}\right) + \right.$$

$$+ \left[B_{f0} + \left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{\rho,s}\right] \frac{k_T D}{T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{s,c} \left(1 - \frac{1}{\chi_f}\right) +$$

$$\left. + \left[B_{f0} + \left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{\rho,s}\right] \frac{k_P D}{P_0}\right\} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \tag{2.10}$$

Здесь

$$B_{f0} = \left[k_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial c}\right)_{P,T} \frac{1}{T_0} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T_0}\right)_{P,c}\right] \left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho,c}$$

$$\bar{u}_1 = \sqrt{\rho_0 a_{f1}}\, u_1, \qquad \bar{v}_1 = \sqrt{\rho_0 a_{f1}}\, v_1$$

R^{-1} — разность кривизн каустики и луча.

Уравнение (2.10) совместно с (1.5) описывает движение газовой смеси в окрестности каустики в случае квазизамороженного процесса.

Обозначая

$$\gamma = \frac{\nu H_{10}}{\rho_0 a_{f1}^2} \left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{s,c} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{s,c}, \qquad u = \bar{u}_1 e^{\frac{\gamma}{2} t}, \qquad v = \bar{v}_1 e^{\frac{\gamma}{2} t}$$

и вводя, согласно (1.5), потенциал скорости $\varphi(x_1, y_1, t)$, уравнение (2.10) приведем к виду

$$\left(2\frac{y_1}{R}a_{f1}-2e^{-\frac{t}{\tau}}t\frac{x_1^0}{\sqrt{1+\frac{t}{\tau_0}a_{f1}}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+a_{f1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t}=\delta\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3} \qquad (2.11)$$

где δ равняется выражению в фигурной скобке из (2.10). Отсюда видно, что без учета нелинейных членов уравнение (2.11) совпадает с (1.13), в котором a_{e1} должно быть заменено на a_{f1}. Тогда, рассуждая как в п. 1, можно получить решения (1.17) и (1.22) в окрестности каустики, где δ уже дается правой частью уравнения (2.10).

3. *Среды с близкими скоростями звука*

Из уравнения состояния среды можно найти связь между замороженной и равновесной скоростями звука [1]

$$a_f^2-a_e^2=\frac{1}{\rho^2}\frac{e_{12}^2}{e_{11}}\geqslant 0, \qquad e_{12}=\left(\frac{\partial^2 e}{\partial V\,\partial c}\right)_s, \qquad e_{11}=\left(\frac{\partial^2 e}{\partial c^2}\right)_{V,s}$$

Знак неравенства ставится, исходя из условия термодинамической устойчивости системы. Видно, что a_e можем достичь значения a_f только при $e_{12}=0$.

Пусть значения скоростей a_f и a_e в покоящейся среде близки. Тогда величина $e_{12}=e_{120}$ в покоящейся среде мала. Положим

$$e_{120}=\varepsilon_n e'_{120} \qquad (3.1)$$

Здесь ε_n — новый малый параметр.

При последующем упрощении уравнений движения среды необходимо в (11) сделать замену

$$q'\to\varepsilon_n q', \qquad Q'\to\varepsilon_n Q', \qquad c'\to\varepsilon_n c' \qquad (3.2)$$

Как и в п. 1, 2, штрихи над возмущенными параметрами опускаем и при упрощении уравнений удерживаем лишь главные члены.

Так как невозмущенная (линейная) скорость a_0 не совпадает со скоростями a_{f0} и a_{e0}, значения которых близки, то положим

$$a_0-a_{f0}=\varepsilon_n^2 a_0\sigma_{f1}, \qquad a_0-a_{e0}=\varepsilon_n^2 a_0\sigma_{e1} \qquad (3.3)$$

где σ_{f1}, σ_{e1} — постоянные порядка единицы.

После преобразований (8)—(11) уравнения (5) в порядке до ε_n^2 имеем $s=0$ $(s\sim\varepsilon\varepsilon_n^2)$.

Аналогично [1], можно показать, что в порядке до $\varepsilon=\varepsilon_n^2$ отклонения давлений (2.5) и (1.6) совпадают друг с другом и равны (1.4) с заменой a_{e1} на a_{f1}.

Согласно уравнению (4), в порядке до ε_n^2 имеем

$$\frac{\partial c}{\partial x_1}=\frac{\nu}{\tau_0}\frac{\partial q}{\partial x_1} \qquad (3.4)$$

Разлагая $Q(\rho, s, c)$ в ряд Тейлора вблизи положения термодинамического равновесия, можно найти

$$Q = \nu e_{110} c - \frac{\nu}{\rho_0^2} e_{120} \rho \tag{3.5}$$

Комбинация (3.4) с (1.7), (3.5) и (1.4) дает

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{H_{10}}{\tau} \left(\frac{\nu^2 e_{110}}{\rho_0 a_1} q - \frac{\nu e_{120}}{\rho_0 a_1^2} u_1 \right) \tag{3.6}$$

Как и прежде, выполняется условие потенциальности движения (1.5). Учитывая (12) и вторую формулу из (3.3), путем преобразований (8)—(11) уравнение (1.1) приводится к виду

$$2 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial t} \ln (\rho_0 a_1) + \left(2 y_1 \frac{\partial \delta}{\partial t} - 2 a_1 \frac{y_1}{R_r} + 2 \tau_r u_1 \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} +$$

$$+ a_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - 2 a_1 \sigma_{e1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \left(\frac{4}{3} \lambda_1 + \lambda_2 \right) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{k}{\rho_0^2 a_1 T_0} \left(\frac{\partial P}{\partial s_0} \right)_{\rho, c} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} +$$

$$+ \frac{e_{120}}{\nu \rho_0 e_{110}} \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{k_T D}{\rho_0 a_1} \frac{B_{f0}}{T_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{k_P D}{\rho_0 a_1} \frac{B_{f0}}{P_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} \tag{3.7}$$

Аналогичные упрощения над уравнением (2.2) приводят его к виду, который, как легко показать [1], совпадает с уравнением (3.7).

Из уравнений (3.7) и (3.6), исключая полноту реакции q, получим ($\bar{u}_1 = \sqrt{\rho_0 a_1}\, u_1$, $\bar{v}_1 = \sqrt{\rho_0 a_1}\, v_1$)

$$2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \left(2 \frac{y_1}{R} a_1 - 2 a_1 \sigma_{e1} + 2 \frac{\alpha_f^0}{\sqrt{\rho_0 a_1}} \bar{u}_1 \right) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + a_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y_1} -$$

$$- \frac{\tau}{H_{10}} \frac{e_{120}^2}{\nu^2 \rho_0 e_{110}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} = \left\{ \left(\frac{4}{3} \lambda_1 + \lambda_2 \right) \frac{1}{\rho_0} + \left(\frac{\partial T}{\partial P_0} \right)_{\rho, c} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \left[\frac{k}{\rho_0 T_0} \left(\frac{\partial P}{\partial s_0} \right)_{\rho, c} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_T D}{T_0} B_{f0} \right] + \frac{k_P D}{P_0} B_{f0} \right\} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\tau}{H_{10}} \frac{\rho_0 a_1}{\nu^2 e_{110}} \left\{ \left(\frac{4}{3} \lambda_1 + \lambda_2 \right) \frac{1}{\rho_0} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial T}{\partial P_0} \right)_{\rho, c} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \left[\frac{k}{\rho_0 T_0} \left(\frac{\partial P}{\partial s_0} \right)_{\rho, c} + \frac{k_T D}{T_0} B_{f0} \right] +$$

$$\left. + \frac{k_P D}{P_0} B_{f0} \right\} \frac{\partial^3 \bar{u}_1}{\partial x_1^3} + \frac{\tau}{H_{10}} \frac{\rho_0 a_1}{\nu^2 e_{110}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left| 2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \left(2 \frac{y_1}{R} a_1 - 2 a_1 \sigma_{e1} + 2 \frac{\alpha_f^0}{\sqrt{\rho_0 a_1}} \bar{u}_1 \right) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + a_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y_1} \right| \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) совместно с уравнением (1.5) описывает движение газовой смеси в окрестности каустики для случая, когда замороженная и равновесная скорости звука мало отличаются друг от друга.

В предельных случаях уравнение (3.8) переходит в (1.12) и (2.10).

Автор выражает благодарность А. Г. Багдоеву за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 9 VII 1973

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ՔԻՄԻԱՊԵՍ ԱԿՏԻՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԿԱՈՒՍՏԻԿԱՅԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է բինար մածուցիկ գազային խառնուրդի համար շարժման հավասարումների գծային և դիսիպատիվ-գծային լուծումների որոշման խնդիրը։ Հաշվի են առնված տարբեր դիֆուզիոն էֆեկտները և ջերմահաղորդականության պրոցեսը։

Աշխատանքում ստացված և հետազոտված են ոչ գծային հավասարումներ խառստիկայի շրջակայքում կվազիսառեցված և կվազիհավասարակշռված պրոցեսների համար։ Գծային և դիսիպատիվ-գծային մոտավորություններով գրտնված են ճնշումը խառնուրդի մասնիկի արագության բաղադրիչները կաուստիկայի վրա և նրա շրջակայքում։

Հատուկ միջավայրերի համար, երբ ձայնի սառեցված և հավասարակշռված արագությունների մեծությունները քիչ են տարբերվում իրարից, ստացված է հավասարումների սիստեմ, որը պարունակում է ալիքների դիսպերսիան բնութագրող փնտրվող ֆունկցիայի երրորդ կարգի ածանցյալ։

DETERMINATION OF PARAMETERS OF MOTION OF A CHEMICALLY ACTIVE MEDIUM NEAR THE CAUSTIC

G. G. OHANIAN

Summary

The problem of determination of linear and linear-dissipative solutions to the equations of motion in a binary-viscous mixture of gases where only one chemical reaction takes place near the caustic is considered.

In the mixture of gases all diffusive and heat-conductive effects are taken into account.

Some non-linear equations near the caustic for quasi-frozen and quasi-equilibrium processes of propagation of disturbances are derived and analysed.

Pressure and components of velocity of the mixture particles on linear and linear-dissipative approximation are found near and on the caustic. A system of equations containing the third order derivative which produces the dispersion of waves is obtained for a special medium where frozen velocity of sound and equilibrium velocity are nearly equal.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, т. 35, вып. 6, 1971.
2. *Guiraud J. P.* Le acoustique geometrique et la localisation. Comptes rendus, t. 260, № 6, 1965.
3. *Багдоев А. Г.* Определение давления в окрестности встречи ударных волн. Докл. АН АрмССР, т. XVII, № 5, 1968.
4. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Определение параметров газа вблизи каустики. Докл. АН Арм. ССР, т. XIX, № 2, 1969.
5. Нелинейная теория распространения волн. Под ред. Лайтхилла. «Мир», М., 1970.
6. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. «Мир», М., 1964.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954.
8. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, т. 22, вып. 5, 1958.
9. *Lewis R. M., Bleistein N., Ludwig D.* Uniform asymtotic theory of creeping waves. Comm. on pure and applied Mathematics, № 2, 1967.
10. *Фридлендер Ф.* Звуковые импульсы. ИЛ, М., 1962.
11. *Газарян Ю. Л.* О распространении звука в неоднородных средах. Сб. «Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.», Л., № 5, 1961.
12. *Кравцов Ю. А.* О видоизменении метода геометрической оптики. Радиофизика, т. 7, № 4, 1964.
13. *Бабич В. М.* Аналитический характер поля нестационарной волны в окрестности каустики. Сб. «Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.», Л., № 5, 1961.
14. *Булдырев В. С.* Волновое поле в окрестности каустики в нестационарных задачах дифракции в случае сферических и цилиндрических границ раздела сред. Сб. «Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.», Л., № 5, 1961.
15. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М.—Л., 1963.
16. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «Наука», М., 1971.
17. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. I. «Наука», М., 1973, стр. 267.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVII, № 3, 1974 Механика

С. Т. ХАЧАТРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Современный этап развития прикладной теории устойчивости неразрывно связан с созданием математически строгих алгоритмов исследования устойчивости неустановившихся состояний с учетом конечности времени протекания процесса [1, 3, 4, 5].

В настоящей статье предлагается алгоритм получения условий устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения [1] по отношению к заданной области предельных отклонений параметров линейной части нестационарной системы дифференциальных уравнений второго порядка посредством матриц вдвое меньшего порядка по сравнению с общепринятыми.

1. Рассматривая материальные системы, описываемые уравнениями возмущенного движения, воспользуемся определением об устойчивости движения на заданном интервале времени в следующей постановке [1].

Определение. Если уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом $\rho>0$ любое решение $x=x(t)$ уравнения, начальное значение $x_0=x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G(t_0)x_0,\ G(t_0)x_0)\leqslant\rho^2 \tag{1.1}$$

на заданном (конечном) интервале $t_0\leqslant t<T$ удовлетворяют условию

$$(G(t)x(t),\ G(t)x(t))\leqslant\rho^2 \tag{1.2}$$

где $G(t)$ — заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение по отношению к области (1.2) устойчиво на интервале $[t_0, T)$, в противном случае — неустойчиво. Поскольку задача об устойчивости на заданном интервале времени $[t_0, T)$ в общем случае зависит от выбора начального момента t_0, невозмущенное движение будем называть равномерно устойчивым в смысле приведенного выше определения, если оно устойчиво на любом интервале $[t_*, T)$, где $t_*\in[t_0, T)$.

2. Пусть уравнения возмущенного движения представлены в виде

$$L(t)\frac{d^2q}{dt^2}+N(t)q=h(t, q) \tag{2.1}$$

где $L(t)$ и $N(t)$ — квадратные матрицы порядка m, а $h(t, q)$ и q — непрерывные вектор-функции.

Будем предполагать, что $L(t)$ — невырожденная матрица, матрицы $L(t)$ и $N(t)$ непрерывны на заданном интервале времени $[t_0, T)$, а эле-

менты $h(t, q)$ — нелинейные функции возмущений q_i $(i = 1, \ldots, m)$ — таковы, что равномерно по t в пределах интервала $[t_0, T)$

$$\lim_{q \to 0} \frac{h(t, q)}{|q|} = 0 \tag{2.2}$$

Из свойства нелинейности $h(t, q)$, выраженного условием (2.2), следует наличие решения $q=0$ уравнения (2.1) и далее будем рассматривать решения, остающиеся достаточно близкими к тривиальному. Невырожденность матрицы $L(t)$ обеспечивает возможность приведения уравнения (2.1) к нормальному виду

$$\frac{dx}{dt} = U(t)x + H(t, x) \tag{2.3}$$

где

$$U(t) = \begin{pmatrix} 0 & -L^{-1}(t)N(t) \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \dfrac{dq}{dt} \\ q \end{pmatrix}, \quad H(t, x) = \begin{pmatrix} L^{-1}(t)h(t, q) \\ 0 \end{pmatrix}$$

а E_m — единичная матрица порядка m.

Пусть матрица $U(t)$ дифференцируема и имеет простую структуру. Тогда существует невырожденная и дифференцируемая матрица $K(t)$, преобразующая матрицу $U(t)$ к диагональному виду

$$K^{-1}(t)\,U(t)\,K(t) = \Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$$

где $n = 2m$.

Элементы диагональной матрицы $\Lambda(t)$ являются собственными значениями матрицы $U(t)$, а столбцы матрицы $K(t)$ — ее собственными векторами. Пусть K_s — собственный вектор матрицы $U(t)$, отвечающий собственному значению λ_s $(s = 1, \ldots, n)$, $(\lambda_s = \lambda_s(t))$.

Обозначим через $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)$ — собственные значения, а через $\varkappa_1(t), \ldots, \varkappa_m(t)$ — соответствующие собственные векторы матрицы $L^{-1}(t)\,N(t)$. Обозначим $\mu(t) = \varkappa^{-1}(t)$ и представим $\varkappa(t)$ и $\mu(t)$ в виде блочных матриц

$$\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m), \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Тогда из [2] соотношения между собственными векторами и собственными значениями матриц $L^{-1}(t)\,N(t)$ и $U(t)$ можно представить следующими формулами:

$$\lambda_s = i\sqrt{|\gamma_j|}\left(\cos\frac{\arg\gamma_j}{2} + i\sin\frac{\arg\gamma_j}{2}\right) \tag{2.4}$$

$$\lambda_\sigma = i\sqrt{|\gamma_j|}\left(\cos\frac{\arg\gamma_j + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\arg\gamma_j + 2\pi}{2}\right) \tag{2.46}$$

$$K_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_\sigma x_j \\ x_j \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

где

$$j = \begin{cases} \sigma & \text{при} \quad \sigma \leqslant m \\ \sigma - m & \text{при} \quad \sigma > m \end{cases}$$

$j = 1, \ldots, m$: $\gamma_j \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$ и, если через Ω_σ и Ω_s обозначить соответственно области определения σ и s, то Ω_σ, $\Omega_s \subset \{1, \ldots, n\}$ и $\Omega_\sigma \cap \Omega_s = \varnothing$.

Формулы (2.4) позволяют утверждать, что среди каждой пары собственных значений матрицы $U(t)$, соответствующей одному собственному значению матрицы $L^{-1}(t)N(t)$, собственные значения матрицы $U(t)$ отличаются только знаком. Следовательно, если матрицу $\Lambda(t)$ представить в блочном виде

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

где Λ_1 и Λ_2 — диагональные матрицы порядка m, то можно выбрать такое размещение собственных значений матрицы $U(t)$ в диагональной матрице $\Lambda(t)$, при котором выполняется равенство

$$\Lambda_1 = -\Lambda_2 \tag{2.6}$$

Полагая, что столбцы K_σ $(\sigma = 1, \ldots, n)$ нормированы, примем $\Theta(t) = K^{-1}(t)$ и зададим область предельных отклонений следующим образом:

$$V(t, x) = (K^{-1}(t)x, K^{-1}(t)x) \leqslant \rho^2 \tag{2.7}$$

3. Введем обозначение

$$x = K(t)y \qquad (y = y(t)) \tag{3.1}$$

В новых переменных уравнение (2.3) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y - K^{-1}(t)\frac{dK(t)}{dt}y - K^{-1}(t)H(t, Ky) \tag{3.2}$$

Полная производная по t в силу уравнений возмущенного движения от положительно определенной на интервале $[t_0, T)$ функции $V(t, x) = V(t, Ky) = |y|^2$ равна

$$\frac{1}{2}\frac{dV(t, x)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} \operatorname{Re}\lambda_\sigma |y_\sigma|^2 + y^* P(t) y +$$

$$+ \frac{1}{2}(y^* K^{-1}(t) H(t, Ky) + H^*(t, Ky) K^{*-1}(t) y) \tag{3.3}$$

где

$$P(t) = -\frac{1}{2}\left(K^{-1}(t)\frac{dK(t)}{dt} + \frac{dK^*(t)}{dt}K^{*-1}(t)\right)$$

Из (2.5) следует

$$K(t) = \begin{pmatrix} \varkappa\Lambda_1; & \varkappa\Lambda_2 \\ \varkappa; & \varkappa \end{pmatrix}; \qquad K^{-1}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1}\mu; & \mu \\ \Lambda_2^{-1}\mu; & \mu \end{pmatrix}$$

Тогда из (3.1) имеем

$$y = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right)$$
$$\psi = \frac{1}{2}\left(\Lambda_2^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right) \tag{3.4}$$

φ и ψ — столбцовые матрицы порядка m.

Тогда

$$\sum_{s=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_s|y_s|^2 = \frac{1}{4}\left|\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right)^*\operatorname{Re}\Lambda_1\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\Lambda_2^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right)^*\operatorname{Re}\Lambda_2\left(\Lambda_2^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right) = \varphi^*\operatorname{Re}\Lambda_1\varphi + \psi^*\operatorname{Re}\Lambda_2\psi\right.$$

Учитывая (2.6), имеем

$$\sum_{s=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_s|y_s|^2 = \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\lambda_i(|\varphi_i|^2 - |\psi_i|^2)$$

Будем предполагать, что здесь $\lambda_i (i = 1, \ldots, m)$ определены через (2.46). Тогда имеем

$$\sum_{s=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_s|y_s|^2 = \sum_{i=1}^{m}|\overline{\gamma_i}|\sin\frac{\arg\gamma_i}{2}(|\varphi_i|^2 - |\psi_i|^2) \tag{3.5}$$

Обозначив

$$D(t) = -\frac{1}{4}\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{d\varkappa\Lambda_1}{dt} + \frac{d\Lambda_1^*\varkappa^*}{dt}\mu^*\Lambda_1^{*-1}\right)$$
$$F(t) = -\frac{1}{4}\left(\mu\frac{d\varkappa}{dt} - \frac{d\varkappa^*}{dt}\mu^*\right) \tag{3.6}$$

и учитывая (2.6), эрмитову матрицу $P(t)$ в (3.3) можно представить следующим образом:

$$P(t)=\begin{pmatrix} F(t)+D(t), & F(t)-D(t) \\ F(t)-D(t), & F(t)+D(t) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Тогда имеем

$$y^* P(t)\, y = \left(\Lambda_1^{-1}\mu \frac{dq}{dt}\right)^* D(t)\, \Lambda_1^{-1}\mu \frac{dq}{dt} + (\mu q)^* F(t)\, \mu q$$

Введя переменные (3.4), получим

$$y^* P(t)\, y = (\psi - \varphi)^* D(t)\,(\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t)\,(\psi + \varphi) \tag{3.8}$$

Лемма. Пусть дана эрмитова матрица $P(t)$ порядка n с собственными значениями $\nu_1(t), \ldots, \nu_n(t)$, определяемая по (3.6) и (3.7) через эрмитовы матрицы простой структуры $D(t)$ и $F(t)$ одного и того же порядка m с собственными значениями $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t)$ и $\beta_1(t), \ldots, \beta_m(t)$ соответственно, причем $n = 2m$. Тогда матрица $P(t)$ имеет простую структуру, а собственные значения $\nu_1(t), \ldots, \nu_n(t)$ связаны с $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t)$ и $\beta_1(t), \ldots, \beta_m(t)$ следующим соотношением:

$$\nu_s(t) = \begin{cases} 2\beta_s(t) & \text{при } s \leqslant m \\ 2\alpha_{s-m}(t) & \text{при } s > m \end{cases} \tag{3.9}$$

где $s = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $\chi(t)$ и $\eta(t)$ — невырожденные унитарные матрицы порядка m, приводящие соответственно матрицы $D(t)$ и $F(t)$ к диагональному виду. Введем матрицу

$$S(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta(t), & \chi(t) \\ \eta(t), & -\chi(t) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Тогда

$$S^{-1}(t)\, P(t)\, S(t) = 2\begin{pmatrix} \eta^*(t) F(t)\, \eta(t), & 0 \\ 0, & \chi^*(t) D(t)\, \chi(t) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Таким образом, невырожденная матрица $S(t)$ из (3.10) приводит матрицу $P(t)$ к диагональному виду. Следовательно, эрмитова матрица $P(t)$ имеет простую структуру. Как видно из (3.11), соотношение (3.9) справедливо. Лемма доказана.

Из (3.5), (3.8) и (3.9) в силу известных свойств произвольной эрмитовой формы имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|\gamma_i(t)|}\, \sin\frac{\arg\gamma_i(t)}{2}\,(|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2)}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2} \leqslant \max_i \left| \sqrt{|\gamma_i(t)|}\, \sin\frac{\arg\gamma_i(t)}{2} \right| \tag{3.12}$$

$$\min_i [\alpha_i(t), \beta_i(t)] \leqslant \frac{(\psi - \varphi)^* D(t)\,(\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t)\,(\psi + \varphi)}{2\,[\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2]} \leqslant$$

$$\leqslant \max_i [\alpha_i(t), \beta_i(t)] \tag{3.13}$$

где $i = 1, \ldots, m$.

С учетом (2.6) выражение $\frac{1}{2}(y^* K^{-1}(t) H(t, Ky) + H^*(t, Ky) K^{*-1}(t) y)$ в (3.3) можно представить следующим образом:

$$\delta(t, q) = \frac{1}{2}(y^* K^{-1}(t) H(t, Ky) + H^*(t, Ky) K^{*-1}(t) y) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{dq^*}{dt} \mu^* \Lambda_1^{*-1} \Lambda_1^{-1} \mu L^{-1}(t) h(t, q) + h^*(t, q) L^{*-1}(t) \mu^* \Lambda_1^{*-1} \Lambda_1^{-1} \mu \frac{dq}{dt}\right) \tag{3.14}$$

Подставив (3.5), (3.8), (3.14) в (3.3), получим

$$\frac{1}{2}\frac{dV(t, q)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{|\gamma_i(t)|} \sin\frac{\arg\gamma_i(t)}{2}(|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2) +$$

$$+ (\psi - \varphi)^* D(t)(\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t)(\psi + \varphi) + \delta(t, q) \tag{3.15}$$

4. Сформулируем условия равномерной устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения на заданном интервале времени $[t_0, T)$ по отношению к заданной области предельных отклонений (2.7).

Теорема 1. *Если для всех $t_* \in [t_0, T)$ выполняется условие*

$$\int_{t_*}^{t}\left\{\max_i\left|1 - \sqrt{|\gamma_i(t)|}\sin\frac{\arg\gamma_i(t)}{2}\right| + 2\max_i[\alpha_i(t), \beta_i(t)]\right\}dt < 0 \tag{4.1}$$

$$i = 1, \ldots, m$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) равномерно устойчиво на заданном интервале $[t_0, T)$ по отношению к области (2.7).

Доказательство. Из (3.2) имеем

$$\frac{d\|y\|}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}\lambda_i \frac{|y_i|^2}{\|y\|} + \frac{y^* P(t) y}{\|y\|} + \frac{1}{2\|y\|}(y^* K^{-1}(t) H(t, Ky) +$$

$$+ H^*(t, Ky) K^{*-1}(t) y).$$

Интегрируя вдоль решения уравнений возмущенного движения на интервале $[t_*, T)$, возведя обе части полученного уравнения в квадрат и учитывая (3.5), (3.8), (3.14) и (3.15), имеем

$$V(t, q(t)) = V(t_*, q(t_*)) \exp 2\int_{t_*}^{t}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} \sqrt{|\gamma_i(t)|}\sin\frac{\arg\gamma_i(t)}{2}}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2}(|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2) +\right.$$

$$\left. + \frac{(\psi - \varphi)^* D(t)(\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t)(\psi + \varphi) + \delta(t, q)}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2}\right] dt \tag{4.2}$$

Из (2.2) и (3.14) имеем, что при достаточно малых $|q|$, то есть для решений уравнения (2.1), близких к тривиальному, в силу (3.12) и (3.13) выполняется неравенство

$$V(t, q(t)) \leqslant V(t_*, q(t_*)) \exp 2 \int_{t_*}^{t} \left\{ \max_i \left| 1 - \overline{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \right| + \right.$$

$$\left. + 2 \max_i |\alpha_i(t), \beta_i(t)| \right\} dt$$

Следовательно, при выполнении условия (4.1) имеет место

$$V(t, q(t)) < V(t_*, q(t_*))$$

то есть условие устойчивости на интервале $[t_*, T)$, а следовательно, и условие равномерной устойчивости невозмущенного движения на заданном интервале времени $[t_0, T)$ выполняется. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в какой-либо момент $t_* \in [t_0, T)$ выполняется условие*

$$\int_{t_*}^{t} \left\{ \max_i \left| 1 - \overline{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \right| + 2 \min_i |\alpha_i(t), \beta_i(t)| \right\} dt > 0 \qquad (4.3)$$

$$i = 1, \ldots, m$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) не может быть равномерно устойчивым на интервале $[t_0, T)$ по отношению к области (2.7).

Доказательство. Пусть невозмущенное движение на интервале $[t_0, T)$ равномерно устойчиво по отношению к области (2.7) и при $t = t_*$ выполняется условие (4.3). Тогда, в силу предположения равномерной устойчивости, невозмущенное движение будет устойчиво на интервале $[t_*, T)$. Введем обозначение

$$\varkappa(t, q) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left| 1 - \overline{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \right| (\xi - \xi)^* D(t) (\xi - \xi)}{|\xi|^2 + |\xi|^2} +$$

$$+ \frac{(\xi + \xi)^* F(t) (\xi + \xi)}{|\xi|^2 + |\xi|^2}$$

Допустим, что

$$\max_i \left| 1 - \overline{|\gamma_i(t_*)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t_*)}{2} \right| = \left| 1 - \overline{|\gamma_j(t_*)|} \sin \frac{\arg \gamma_j(t_*)}{2} \right|$$

Рассмотрим частное решение уравнения (2.1) $q^1 = \varkappa(\xi^0 + \xi^0)$, определенное начальными условиями $\xi(t_*) = 0$, $\xi_j(t_*) = \xi_j$, $\xi_l(t_*) = 0$, $l \neq j$. Будем предполагать, что t лежит в окрестности точки t_*.

Тогда, в силу непрерывности форм (3.5) и (3.8), из (3.13) и (4.3) имеем

$$\int_{t_0}^{t} w(t, \varphi^0(t))\,dt = \int_{t_0}^{t} \left| \max \left| 1 \sqrt{|\tau_i(t)|} \sin \frac{\arg \tau_i(t)}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2 \min |\alpha_i(t), \beta_i(t)| \right| dt > 0$$

Следовательно, для достаточно малых ρ из (4.2) при выполнении условия (4.3) будем иметь

$$V(t, \varphi^0(t)) > V(t_0, \varphi^0(t_0)) \tag{4.4}$$

Наличие частных решений, вдоль которых в окрестности точки t_0 выполняется условие (4.4), позволяет утверждать, что невозмущенное движение неустойчиво. Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 16 I 1973

Ս. Թ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏՐՎԱԾ ԺԱՄԱՆԱԿԱՄԻՋՈՑՈՒՄ ՇԱՐԺՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է տրված (վերջավոր) ժամանակամիջոցում շարժման կայունության սահմանումը [1] և ձևակերպվում է երկրորդ կարգի m դիֆերենցիալ հավասարումներով նկարագրվող սիստեմի շարժման կայունության և անկայունության պայմանները, գրգռումների փոփոխման տրված տիրույթի նկատմամբ։ Նշված պայմանները ստացված են անմիջականորեն, առանց սիստեմը նորմալ տեսքի բերելու։ Այդ պատճառով զգալիորեն պարզեցվում է հաշվարկման այդորիթմը, որովհետև կայունության և անկայունության պայմանները ստացվում են երկու անգամ փոքր կարգ ունեցող մատրիցաների միջոցով։

ON STABILITY OF MOTION AT A SPECIFIED TIME INTERVAL

S. T. KHACHATRIAN

Summary

The article presents a definition of motion stability at a specified (finite) time interval and a determination of conditions of stability and instability of undisturbed motion with respect to a prescribed domain of limiting deviations of parameters of linear part in a non-stationary system m of differential equations of the second kind without reducing them to a normal form.

Such an algorithm significantly simplifies the procedure of calculation, allowing to use matrices of twice as smaller order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айгарян К. А.* Лекции по теории устойчивости. М., 1972.
2. *Айгарян К. А.* Матрицы и дифференциальные уравнения. (Пособие для аспирантов). М., 1971.
3. *Айгарян К. А.* Об устойчивости движения на конечном промежутке времени. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
4. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
5. *Лебедев А. А.* Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

А. М. САРГСЯН

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНКИ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛООТДАЧИ

Исследованию термоупругих напряжений в изотропных и анизотропных пластинках, находящихся в условиях теплоотдачи, посвящено много работ [1—5].

В настоящей работе рассматривается задача термоупругости для тонкой составной пластинки. Две полубесконечные пластинки из различных материалов соединены между собой в стык вдоль общей прямолинейной границы без собственных напряжений при некоторой постоянной температуре T_0. Пластинка подвергается независящему от времени температурному воздействию линейного* источника тепла с постоянной интенсивностью q, расположенного на конечном отрезке $(-a, a)$ прямолинейного стыка. Через поверхности пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой постоянной температуры T_0 по закону Ньютона. Предполагается, что на бесконечности разность температуры пластинки и среды, а также напряжения исчезают.

При изменении температуры окружающей среды от T_0 до T_1 к искомому решению задачи термоупругого состояния составной пластинки следует добавить решение, соответствующее разности температур $T_1 - T_0$ и конкретным условиям на бесконечности.

Поскольку пластинка тонкая и коэффициенты теплоотдачи с поверхностей пластинки малы по сравнению с единицей, градиент температуры по толщине незначителен, и поставленная задача сводится к двумерной задаче термоупругости [1, 2, 11].

1. Составную пластинку отнесем к декартовой системе координат (фиг. 1). Для определения температурного поля в пластинке должна быть решена система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2} - m_j^2 T_j = 0 \tag{1}$$

$$|x| < \infty, \quad y > 0, \quad j = 1 \qquad |x| < \infty, \quad y < 0, \quad j = 2$$

при следующих контактных условиях:

$$T_1|_{y=0} = T_2|_{y=0} \tag{2}$$

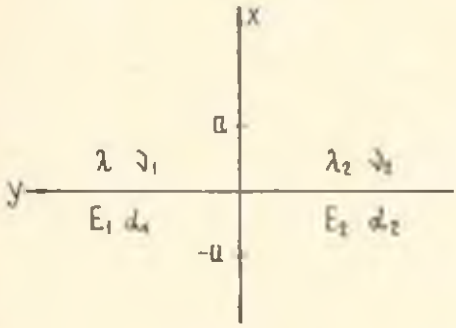
$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}\Big|_{y=0} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\frac{q}{h} \eta (a - |x|) \tag{3}$$

* Точнее говоря, рассматривается плоский источник тепла длиной 2a и шириной h, где h — толщина пластинки.

Здесь T_j — разность температур в произвольной точке пластинки и постоянной температуры среды, λ_j — коэффициенты теплопроводности материалов пластинок, h — толщина пластинок, $\delta(x)$ — функция Хевисайда.

$$m_j^2 = 2\beta_j/\lambda_j h$$

где β_j — коэффициенты теплоотдачи.



Фиг. 1

Для решения системы (1) при условиях (2), (3) применяется интегральное преобразование Фурье [7]

$$\overline{T}_j(u, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T_j(x, y)\, e^{-iux}\, dx, \quad T_j(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{T}_j(u, y)\, e^{-iux}\, du \tag{4}$$

Вместо (1)—(3) получим

$$\frac{d^2\overline{T}_j}{dy^2} - (u^2 + m_j^2)\,\overline{T}_j = 0 \tag{5}$$

$$\overline{T}_1|_{y=0} = \overline{T}_2|_{y=0} \tag{6}$$

$$\lambda_1 \frac{d\overline{T}_1}{dy}\Big|_{y=0} = \lambda_2 \frac{d\overline{T}_2}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{q}{\pi h}\,\frac{\sin au}{u} \tag{7}$$

Решение (5) при условии (6), (7) имеет вид

$$\overline{T}_j(u, y) = \frac{q}{\pi h}\,\frac{\sin au\, e^{-|y|k_j}}{u(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)} \tag{8}$$

где

$$k_j = \sqrt{u^2 - m_j^2}$$

2. Двумерная задача термоупругости приводится к интегрированию уравнений равновесия [8]

$$\frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xyj}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xyj}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yj}}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

и условий совместности деформации

$$\Delta(\sigma_{xj} + \sigma_{yj}) + \alpha_j E_j \Delta T_j = 0 \tag{10}$$

с условиями непрерывности напряжений и перемещений на линии контакта $y=0$

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} \tag{11}$$

$$\sigma_{xy1} = \sigma_{xy2} \tag{12}$$

$$\sigma_{x1} - \nu_1 \sigma_{y1} = \mu(\sigma_{x2} - \nu_2 \sigma_{y2}) + E_1(\alpha_2 - \alpha_1) T_1 \tag{13}$$

$$2(1+\nu_1)\frac{\partial \sigma_{xy1}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial y} - \nu_1 \frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial y}\right) = 2(1+\nu_2)\frac{\partial \sigma_{xy2}}{\partial x} -$$
$$- \mu\left(\frac{\partial \sigma_{x2}}{\partial y} - \nu_2 \frac{\partial \sigma_{y2}}{\partial y}\right) - E_1\left(\alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}\right) \tag{14}$$

где условия непрерывности перемещений u_j и v_j на линии контакта заменены условиями непрерывности $\partial u_j/\partial x$ и $\partial^2 v_j/\partial x^2$ соответственно [9].

Здесь ν_j, E_j, α_j — коэффициенты Пуассона, модули упругости и коэффициенты линейного расширения материалов; $\mu = E_1/E_2$.

Применяя к уравнениям (9)—(14) преобразование Фурье, будем иметь

$$-i\alpha\bar{\sigma}_{xj} + \frac{d\bar{\sigma}_{xyj}}{dy} = 0 \tag{15}$$

$$-i\alpha\bar{\sigma}_{xyj} + \frac{d\bar{\sigma}_{yj}}{dy} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{d^2\bar{\sigma}_{xj}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{\sigma}_{yj}}{dy^2} - \alpha^2(\bar{\sigma}_{xj} + \bar{\sigma}_{yj}) + \alpha_j E_j m_j^2 \bar{T}_j = 0 \tag{17}$$

$$\bar{\sigma}_{y1} = \bar{\sigma}_{y2}, \qquad y = 0 \tag{18}$$

$$\bar{\sigma}_{xy1} = \bar{\sigma}_{xy2}, \qquad y = 0 \tag{19}$$

$$\bar{\sigma}_{x1} - \nu_1 \bar{\sigma}_{y1} = \mu(\bar{\sigma}_{x2} - \nu_2 \bar{\sigma}_{y2}) + E_1(\alpha_2 - \alpha_1)\bar{T}_1, \qquad y = 0 \tag{20}$$

$$-i2(1+\nu_1)\alpha\bar{\sigma}_{xy1} - \left(\frac{d\bar{\sigma}_{x1}}{dy} - \nu_1 \frac{d\bar{\sigma}_{y1}}{dy}\right) = -i2(1+\nu_2)\alpha\bar{\sigma}_{xy2} -$$
$$- \mu\left(\frac{d\bar{\sigma}_{x2}}{dy} - \nu_2 \frac{d\bar{\sigma}_{y2}}{dy}\right) - E_1\left(\alpha_2 \frac{d\bar{T}_2}{dy} - \alpha_1 \frac{d\bar{T}_1}{dy}\right) \tag{21}$$

Исключая из системы (15)—(17) $\bar{\sigma}_{xj}$ и $\bar{\sigma}_{xyj}$ с помощью

$$\bar{\sigma}_{xj} = -\frac{1}{u^2}\frac{d^4\bar{\sigma}_{yj}}{dy^4}, \qquad \bar{\sigma}_{xyj} = \frac{1}{iu}\frac{d\bar{\sigma}_{yj}}{dy} \tag{22}$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^4\bar{\sigma}_{yj}}{dy^4} - 2u^2\frac{d^2\bar{\sigma}_{yj}}{dy^2} + u^4\bar{\sigma}_{yj} = \alpha_j E_j m_j \bar{T}_j e^{-|y|k_j} u^2 \tag{23}$$

Выбирая в соответствии с условиями на бесконечности общий интеграл в виде

$$\bar{\sigma}_{yj} = [A_j - (-1)^j |y| B_j] e^{-|y||u|} + \bar{T}_j b_j u^2 e^{-|y|k_j} \tag{24}$$

для остальных преобразованных напряжений получим следующие выражения:

$$\bar{\sigma}_{xj} = [(|y||u| - 2)|u|(-1)^j B_j - u^2 A_j] - \bar{T}_j b_j k_j^2 e^{-|y|k_j} \tag{25}$$

$$\bar{\sigma}_{xyj} = [(1 - |y||u|) B_j - (-1)^j |u| A_j] \frac{e^{-|y||u|}}{iu} - i(-1)^j \bar{T}_j b_j u k_j e^{-|y|k_j}$$

$$b_j = \alpha_j E_j / m_j \tag{26}$$

Удовлетворяя преобразованным контактным условиям (18)—(21) с помощью (24)—(26) и (8) для неопределенных коэффициентов A_j и B_j получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
A_1 - A_2 = -Du^2(b_1 - b_2) \\
|u|(A_1 + A_2) - B_2 - B_1 = -Du^2(b_1k_1 + b_2k_2) \\
-(1 + \nu_1)|u| A_1 + \mu(1 + \nu_2)|u| A_2 - 2B_1 + 2\mu B_2 = \\
= Du^2[(1 + \nu_1) b_1 - \mu(1 + \nu_2) b_2] \\
(1 - \nu_1)|u| A_1 + \mu(1 - \nu_2)|u| A_2 + (1 - \nu_1) B_1 - \mu(1 - \nu_2) B_2 = \\
= -Du^2[(1 - \nu_1) b_1k_1 + \mu(1 + \nu_2) b_2k_2] \\
D = \bar{T}(u, 0)
\end{gathered} \tag{27}$$

Для A_j и B_j из (27) получим

$$\begin{gathered}
A_1 = [((2 - p) b_1 + 2\mu p b_2) u^2 - (2db_1k_1 + 2\mu p b_2k_2) u] D/pd \\
A_2 = [(2db_1 - (dp - 2\mu p) b_2) u^2 - (2db_1k_1 - 2\mu p b_2k_2) u] D/pd \\
B_1 = b_1(4 - p)(u - k_1) u^2 D/p, \quad B_2 = b_2(4 - p)(u - k_2) u^2 D/d \\
p = 3 - \nu_1 + \mu(1 + \nu_2), \qquad d = 1 + \nu_1 + \mu(3 - \nu_2)
\end{gathered} \tag{28}$$

Подставляя (28) в (24)—(26) и возвращаясь к оригиналу, находим напряжения σ_{xj}, σ_{yj}, τ_{xyj}

$$\sigma_{xj} = 2\int_0^\infty \left[\left(\frac{|y|u-2}{u} (-1)^j B_j - A_j \right) e^{-|y|u} - Db_j k_j^2 e^{-|y|k_j} \right] \cos ux\,du \quad (29)$$

$$\sigma_{yj} = 2\int_0^\infty \left[\left(A_j - (-1)^j |y| B_j \right) e^{-|y|u} - Db_j u^2 e^{-|y|k_j} \right] \cos ux\,du \quad (30)$$

$$\sigma_{xyj} = 2\int_0^\infty \left[\left((|y|u-1) B_j - (-1)^j u A_j \right) e^{-|y|u} - \right.$$

$$\left. - (-1)^j Db_j u^2 k_j e^{-|y|k_j} \right] \frac{\sin ux}{u}\,du \quad (31)$$

В выражениях (29—31) перейдем от линейного источника к точечному, устремляя $2a$ к нулю, а q — к бесконечности. При этом $2aq = Q = \text{const}$, где Q — мощность источника. В случае $\alpha_1 = \alpha_2$, $m_1^2 = m_2^2$, $E_1 = E_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ получим решение для изотропной пластинки, нагреваемой точечным источником тепла.

$$\sigma_x = 2N \left[\frac{x^2 - y^2}{r^4} - \frac{m_1 K_1(m_1 r)}{r} + \frac{m_1^2 y^2 K_2(m_1 r)}{r^2} \right] \quad (32)$$

$$\sigma_y = 2N \left[\frac{y^2 - x^2}{r^4} - \frac{m_1 K_1(m_1 r)}{r} + \frac{m_1^2 x^2 K_2(m_1 r)}{r^2} \right] \quad (33)$$

$$\sigma_{xy1} = -\sigma_{xy2} = 2N \left[\frac{2xy}{r^4} - \frac{m_1^2 xy K_2(m_1 r)}{r^2} \right] \quad (34)$$

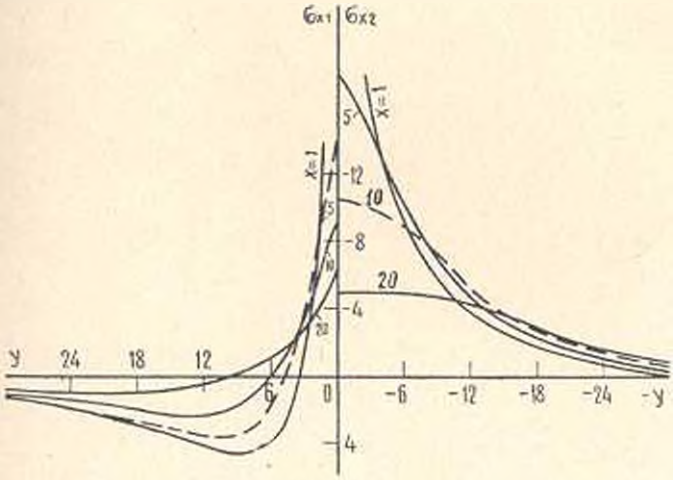
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad N = -Qb_1/4\pi b_2$$

Это решение совпадает с решением, полученным в работе [3] в полярных координатах.

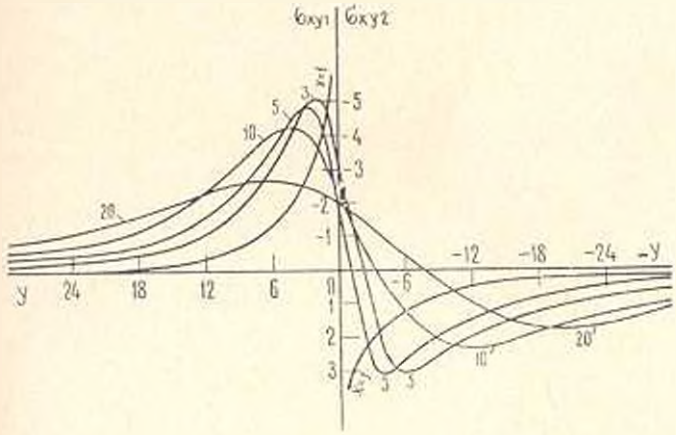
На фиг. 2—4 приведены кривые распределения напряжений в пластинке, составленной из стали (индекс 1) и алюминия (индекс 2) в зависимости от y при различных значениях x. Для параметров, входящих в (29), приняты следующие значения: $q = 0.1$ *кал/см·сек*, $a = 1$ *см*, $h = 0.1$ *см*, $m_1^2 = 0.084$ *см*$^{-2}$, $m_2^2 = 0.002$ *см*$^{-2}$. Параметры m_1^2 и m_2^2 характеризуют теплоотдачу [10].

С целью выяснения влияния степени разнородности пластинки на термоупругие напряжения, рассмотрим однородные пластинки из стали (фиг. 5) и из алюминия (фиг. 6). По графикам, приведенным на фиг. 2, 5, 6, видно, что разнородность материала пластинки обусловливает заметное изменение напряжений в окрестности прямолинейного стыка составной пластинки как в сторону их увеличения, так и уменьшения.

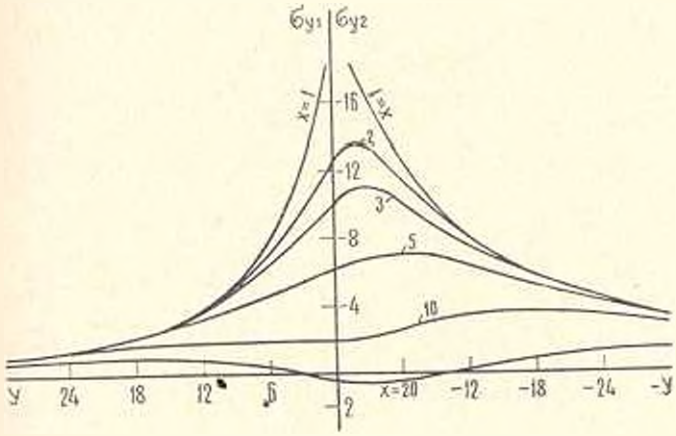
Расчеты показывают также, что с увеличением теплоотдачи с поверхностей пластинки напряжения уменьшаются.



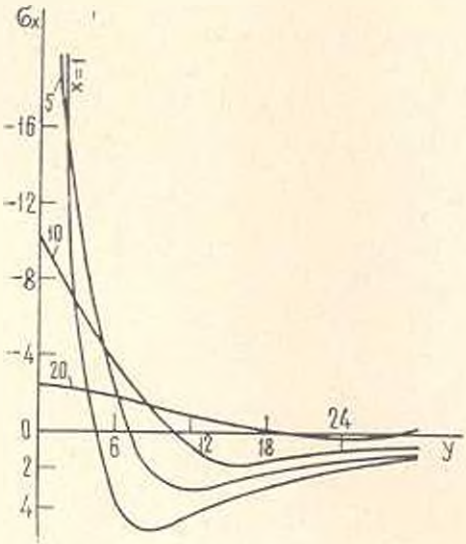
Фиг. 2.



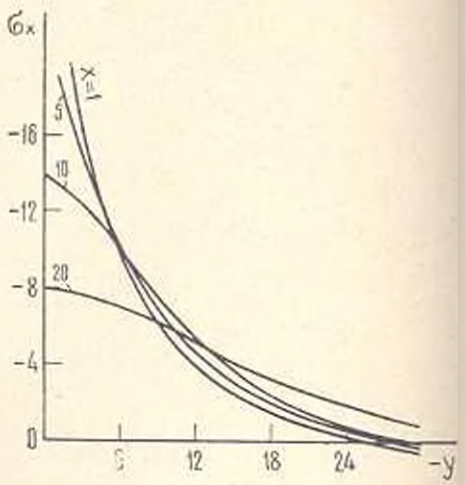
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 IX 1973

Ա. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՋԵՐՄԱԼՓՈՒԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՍԱԼԻ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է տարբեր ջերմային և առաձգական հատկություններ ունեցող կիսատանվերջ սալերից կազմված, արտաքին ուժերի և կապերի չենթարկված սալի հարթ լարվածային վիճակը ժամանակի ընթացքում անփոփոխ ջերմային դաշտի ազդեցության տակ։

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ։

Ուսումնասիրված է տարասեռության և ջերմափոխանակության ազդեցությունը լարումների բաշխման վրա։

THE THERMOELASTIC PROBLEM FOR A COMPOSITE PLATE IN CONDITIONS OF HEAT EMISSION

A. M. SARGSIAN

S u m m a r y

The two-dimensional thermoelastic proplem for an infinite composite plate in conditions of heat emission is considered.

The plate undergoes a time-independent temperature effect from a linear heat source of constant intensity.

The problem is solved with the aid of Fourier's transformations. The effect of dissimilarity and heat emission on the thermal stress distribution is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Двумерная задача теории упругости для полубесконечной пластинки при наличии теплоотдачи. Прикл. механика, т. IX, в. 1, 1963.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Двумерная температурная задача теории упругости для бесконечной пластинки, по краю которой движется источник тепла. Прикл. механика, т. X, в. 2, 1964.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* О нагреве источниками тепла тонких пластинок с теплообменом. Инж-физич. журнал, т. VII, № 2, 1964.
4. *Коляно Ю. М.* Температурные напряжения в ортотропной полосе—пластинке с теплоотдачей. Прикл. механика, т. X, в. 5, 1967.
5. *Колесниченко В. А., Коляно Ю. М.* Температурные напряжения в анизотропной пластинке, нагреваемой движущимся источником тепла. «Физика и химия обработки материалов», № 5, 1971.
6. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1961.
7. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. ИЛ., М., 1955.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1963.
9. *Алексанян Р. К.* Термоупругие напряжения составной полуплоскости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 3, 1971.
10. *Казимиров А. А., Недосека А. Я.* Расчет температурных полей в пластинках при электросварке плавлением. «Наукова думка», Киев, 1968.
11. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. Изд. «Наука», М., 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

О. В. БУГРИМ, Е. С. СИНАЙСКИЙ

К РАСЧЕТУ НАСЛЕДСТВЕННО СТАРЕЮЩЕЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

1. Балка длиной l, материал которой проявляет свойства ползучести, расположена на упругом основании и изгибается под действием поперечной нагрузки интенсивностью q.

Исходное соотношение между деформацией $\varepsilon(t)$ и напряжением $\sigma(t)$ для наследственно стареющего материала балки принимаем в виде [1, 2]

$$\varepsilon(t) = E_0^{-1} A\sigma(t) \tag{1.1}$$

Здесь A — оператор, действующий на функции времени t

$$A\varphi(t) = \zeta(t)\varphi(t) + \int_{t_c}^{t} H(t-s)\,\eta(s)\,\varphi(s)\,ds \tag{1.2}$$

$E(t) = E_0\zeta^{-1}(t)$ — модуль упругости ($E_0 = E(t_c)$), $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ — монотонно убывающие функции, характеризующие старение мгновенной и наследственной реакций материала, t_c — возраст материала в момент приложения нагрузки, $H(t-s)$ — функция со слабой особенностью типа Абеля при $t = s$. В качестве $H(t-s)$ будем предполагать экспоненту дробного порядка Ю. Н. Работнова [2]

$$Э_r(\beta, t-s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t-s)^{nr+r}}{\Gamma[r(n+1)]}, \quad \beta < 0, \quad 0 < r = 1-\alpha < 1 \tag{1.3}$$

или функцию А. Р. Ржаницына [2]

$$P_r(\beta, t-s) = \frac{(t-s)^r}{\Gamma(r)} e^{\beta(t-s)}, \quad \beta < 0, \quad 0 < r = 1-\alpha < 1 \tag{1.4}$$

($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция).

Если функцию $\eta(t)$ положить в форме

$$\eta(t) = \eta(t_0)(1 + \lambda e^{-\gamma t}), \qquad \lambda > 0, \quad \gamma > 0 \tag{1.5}$$

то уравнение (1.1) при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ легко преобразуется по Лапласу по переменной $t - t_0$. Это позволяет при уже известной зависимости $E(t)$ тем же способом, что и в работе [3], произвести обработку трех кривых простой ползучести с моментами нагружения, отвечающими трем различным возрастам материала, и получить значения всех реологических параметров, входящих в (1.1).

Уравнение изгиба балки на упругом основании [4] при условии (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\omega(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = A\left[q(x, t) - K(x)\, y\right] \tag{1.6}$$

Здесь $y(x, t)$ — прогиб, $\omega(x) = E_0(x) J(x)$, J — момент инерции поперечного сечения балки, $K(x)$ — коэффициент податливости основания, $q(x, t)$ — интенсивность поперечной нагрузки.

Положим

$$y = \sum_{i=0}^{n} B_i(t)\, \varphi_i(x) \tag{1.7}$$

где $\varphi_i(x)$, $(i = 0, 1, \ldots)$ — полная система координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи.

Применяя процедуру метода Бубнова-Галеркина [4], для определения коэффициентов $B_i(t)$ получаем систему интегральных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n}(\alpha_{ij} + \beta_{ij} A)\, B_i(t) = A q_j(t), \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{1.8}$$

Здесь

$$\alpha_{ij} = \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\omega(x)\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}\right)\varphi_j\, dx, \qquad \beta_{ij} = \int_0^l K(x)\, \varphi_i \varphi_j\, dx$$

$$q_j(t) = \int_0^l q(x, t)\, \varphi_j\, dx \tag{1.9}$$

Если использовать обозначения

$$H^* \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} H(t - s)\, \varphi(s)\, ds, \qquad J_\alpha^* \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t - s)^{\alpha}}{\Gamma(r)}\, \varphi(s)\, ds \tag{1.10}$$

а также выражение оператора $Э_\alpha^*(\beta)$ через оператор Абеля J_α^* [2], то оператор A с функцией $H(t - s)$ в форме (1.3) и (1.4) получает соответственно представления

$$A\varphi(t) = \zeta(t)\, \varphi(t) + \frac{J_\alpha^*}{1 - \beta J_\alpha^*}\, \eta(t)\, \varphi(t) \tag{1.11}$$

$$A\varphi(t) = \zeta(t)\, \varphi(t) + e^{\beta t} J_\alpha^* \eta(t)\, e^{-\beta t}\, \varphi(t) \tag{1.12}$$

Система (1.8) в рассматриваемых случаях принимает вид

$$\sum_{i=0}^{n} [(1-\beta J_1^*)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}\zeta(t))+\beta_{ij} J_1^* \eta(t)] B_i(t) =$$

$$= [(1-\beta J_1^*)\zeta(t)+J_1^*\eta(t)] q_j(t), \qquad j=0,1,\ldots,n \tag{1.13}$$

$$\sum_{i=0}^{n} [\alpha_{ij}+\beta_{ij}(\zeta(t)+J_1^*\eta(t))] \bar{B}_i(t) = (\zeta(t)+J_1^*\eta(t))\bar{q}_j(t) \tag{1.14}$$

$$j=0,1,\ldots,n$$

Здесь

$$\bar{B}_i(t)=e^{-\lambda t}B_i(t), \qquad \bar{q}_j(t)=e^{-\lambda t}q_j(t) \tag{1.15}$$

оператор J_1^* действует на все последующие множители — функции времени.

Для построения приближенного решения уравнений (1.13), (1.14) в промежутке $[t_0, t_1]$, на котором практически завершается процесс старения, используем τ-метод Ланцоша [5].

Предположим, что в интервале $[t_0, t_1]$ функции, входящие в (1.13), (1.14) имеют ограниченную производную по времени. Этого достаточно, чтобы существовали равномерные аппроксимации вида

$$\zeta(t)=\sum_{k=0}^{p}\zeta_k\theta^k, \qquad \eta(t)=\sum_{k=0}^{p}\eta_k\theta^k, \qquad \theta=(t-t_0)/(t_1-t_0) \tag{1.16}$$

$$B_i(t)=\sum_{g=0}^{m}B_{i,g}\theta^g, \qquad q_j(t)=\sum_{g=0}^{m}q_{j,g}\theta^g \tag{1.17}$$

Подставим эти разложения в уравнения (1.13). Одновременно с целью разрешимости системы (1.13) введем в ее правые части невязки в форме

$$T_{m+1}^{*}(\theta)(\tau_0^j+\tau_1^j\theta+\cdots+\tau_p^j\theta^p) \tag{1.18}$$

где τ_k^j — пока неизвестные параметры, $T_{m+1}^{*}(\theta)$ — смещенный полином Чебышева [5]

$$T_{m+1}^{*}(z)=\sum_{i=0}^{m+1}c_{m+1}^{i}z^i \tag{1.19}$$

Методом неопределенных коэффициентов получаем систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяются все неизвестные $B_{i,g}$ и τ_k^j.

$$\sum_{i=0}^{n}\Big\{\alpha_{ij}(B_{i,g}-\beta\Delta t_1^j\Omega_g^{g-1}B_{i,g-1})+\beta_{ij}\sum_{k=0}^{p+1}[\zeta_k+\Delta t_1^j\Omega_g^{g-1}(\eta_{k-1}-$$

$$-\beta\zeta_{k-1})]B_{i,g-k}\Big\}=\sum_{k=0}^{p+1}[\zeta_k+\Delta t_1^j\Omega_g^{g-1}(\eta_{k-1}-\beta\zeta_{k-1})]q_{j,g-k}+\sum_{k=0}^{p}\tau_k^j c_{m+1}^{g-k} \tag{1.20}$$

$$j=0,1,\ldots,n, \qquad g=0,1,\ldots,m+p+1$$

Здесь

$$\Omega_g^j = \frac{\Gamma(rj+1)}{\Gamma(rg+1)}, \quad \Delta t_j = t_j - t_0, \quad B_{i,k} = q_{j,k} = \tau_{ik} = \zeta_k = c_{m+1}^{k} = 0 \quad \text{при } k<0$$

$$B_{i,m+k} = q_{i,m+k} = \zeta_{p+k} = \tau_{ip+k} = c_{m+1}^{m+1-k} = 0 \qquad \text{при} \quad k>0.$$

Уравнения (1.14) приводятся к системе алгебраических уравнений аналогично. Ее можно получить непосредственно из системы (1.20), полагая в последней $\beta = 0$ и заменяя $B_{i,k}$ и $q_{j,k}$ на $\tilde{B}_{i,k}$ и $\tilde{q}_{j,k}$ соответственно.

Используемый τ-метод определяет неизвестные функции $B_i(t)$ в виде ускоренно сходящихся [5] разложений (1.17) по дробным степеням временной переменной θ и позволяет судить о погрешности решения каждого уравнения системы (1.13) или (1.14) по невязке (1.18), не превосходящей суммы $|\tau_0^i| + |\tau_1^i| + \cdots + |\tau_\nu^i|$. Число τ-членов определяется степенью аппроксимирующих полиномов (1.16), которая для устанавливаемых из опыта функций $\zeta(t)$ и $\tau_i(t)$ может быть выбрана достаточно низкой.

2. В качестве иллюстрации рассмотрим изгиб лежащей на упругом основании и защемленной на концах бетонной балки длиной $l = 60$ *м* с линейно меняющейся жесткостью $\omega(x) = \omega_0(1 - \varepsilon x/l)$, $\omega_0 = 7.39 \cdot 10^{10}$ *нм*², $\varepsilon = 0.25$. Для коэффициента упругой податливости основания положим $K(x) = a(x/l)^2 + b(x/l) + c$, $a = -3.92 \cdot 10^5$, $b = 3.92 \cdot 10^5$, $c = 1.96 \cdot 10^7$ *н/м*² [6]. Функцию $H(t-s)$ в уравнении (1.1) примем в форме (1.4).

В результате обработки серии кривых простой ползучести ($\sigma = \sigma_0 = \text{const}$) бетона [7], отвечающих нагружениям в возрасте $t_{01} = 5$, $t_{02} = 7$, $t_{03} = 28$ суток, получены следующие значения параметров $\gamma = 0.233$ *сут*$^{-1}$, $\lambda = 5.72$, $r = 0.614$, $\beta = -0.00838$ *сут*$^{-1}$, $\varkappa(t_{01}) = 0.0185$, $\varkappa(t_{02}) = 0.017$, $\varkappa(t_{03}) = 0.00874$ *сут*$^{-r}$.

Сравнение вычисленных при этих параметрах из уравнения (1.1) значений величины $\chi(t) = \varepsilon(t) - \sigma_0 E^{-1}(t)$ с экспериментальными данными для нее приведено в табл. 1.

Таблица 1

t	(сутки)	5	7	14	28	60	90	150	210
χ_1	опыт	0	0.095	0.195	0.24	0.32	0.38	0.43	0.46
	расчет	0	0.107	0.179	0.232	0.319	0.372	0.434	0.467
χ_2	опыт		0	0.14	0.20	0.27	0.33	0.39	0.42
	расчет		0	0.130	0.192	0.281	0.335	0.396	0.427
χ_3	опыт				0	0.11	0.15	0.19	0.21
	расчет				0	0.108	0.149	0.193	0.214

Функции $\zeta(t)$ и $\tau_i(t)$ в интервале от $t_0 = 5$ *сут* до $t_1 = 20$ *сут* достаточно хорошо аппроксимируются выражениями

$$\zeta(t) = 1.72 - 0.731\,\vartheta^r + 0.0215\,\vartheta^{2r}, \qquad \eta(t) = 0.0525 - 0.061\,\vartheta^r + 0.028\,\vartheta^{2r}.$$

В соответствии с граничными условиями координатные функции в (1.7) выберем в виде

$$\psi_i(x) = (1 - x/l)^2 (x/l)^{i+2}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

При $n = 2$ система (1.14) содержит три интегральных уравнения. Ограничиваясь в разложениях (1.17) третьей степенью величины ϑ^r ($m = 3$) и полагая для простоты $q(x, t) = q_0 e^{\beta t}$ ($q_0 = \text{const}$) найдем из системы (1.20) в единицах $q_0 l^4/\omega_0 \cdot 10^{-3}$

$$\bar{B}_{00} = 11.10 \qquad \bar{B}_{01} = -1.422 \qquad \bar{B}_{02} = -0.9814 \qquad \bar{B}_{03} = 0.2478$$

$$\bar{B}_{10} = -31.19 \qquad \bar{B}_{11} = 5.863 \qquad \bar{B}_{12} = 4.034 \qquad \bar{B}_{13} = -1.103$$

$$\bar{B}_{20} = 31.27 \qquad \bar{B}_{21} = -5.749 \qquad \bar{B}_{22} = -3.957 \qquad \bar{B}_{23} = 1.076$$

Невязки решения уравнений системы (1.14) в тех же единицах не превышают величины $6 \cdot 10^{-5}$. Вычисления выполнены на ЭВМ „Минск-22".

Согласно (1.7), (1.15), (1.17) для прогиба окончательно получаем

$$y(x, t) \approx (1 - x/l)^2 e^{\beta t} \sum_{i=0}^{2} \sum_{g=0}^{3} \bar{B}_{i,g}\, \vartheta^{rg} (x/l)^{i+2}$$

В заключение авторы благодарят М. И. Розовского за обсуждение работы.

Днепропетровский
горный институт

Поступила 19 VI 1972

Ս. Վ. ԲՈՒՏՐԻՄ, Ե. Ս. ՍԻՎԱՅՍԿԻ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՐԵՆ ԾԵՐԱՑՈՂ ՀՆՆԱՆԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով առաձգական հիմքի վրա գտնվող ժառանգականության ծերացման հատկություններով անհամասեռ հեծանի ծռման խնդիրը բերվել է ժամանակի նկատմամբ ոչ ինվարիանտ կորիզներով Վոլտերի ինտեգրող հավասարումների սիստեմի։ Այս սիստեմի լուծման թվային իրագործումը կատարվել է Լանցոշի τ-մեթոդով։

ON THE CALCULATION OF AN HEREDITARY AGING BEAM ON THE ELASTIC FOUNDATION

O. V. BUGRIM, E. S. SINAYSKY

S u m m a r y

The problem of buckling a nonhomogeneous beam possessing the properties of heredity and aging based on an elastic foundation is reduced to a system of integral Volterra equations with hereditary kernels noninvariant in respect to time. This system has been solved numerically by Lanczos' τ-method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. «Наука», М., 1966.
3. *Синайский Е. С.* Об одном способе обработки кривых экспериментальной реологии. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Изд. «Наука», М., 1970.
5. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
6. *Клепиков С. Н.* Расчет конструкций на упругом основании. Изд. «Будівельник», К., 1967.
7. *Улицкий И. И., Русинов И. А.* Экспериментальные исследования деформативности бетона и жесткости железобетонных изгибаемых элементов при длительном загружении. Сб. «Строительные конструкции». Госстройиздат, УССР, 1959, вып. 13.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

З. А. МАРТИРОСЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА

В статье исследуется возможность образования трещин на поверхности контакта составного цилиндра, образованного из двух сплошных круглых цилиндров конечной длины одинакового диаметра, которые соединены между собой торцами, при сжимающей внешней торцевой нагрузке. При решении задачи сцепление между этими цилиндрами принимается полным и без начальных напряжений. На боковой поверхности составного цилиндра нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю.

Такая задача в 1963 г. рассматривалась в работе Баблояна А. А. и Тонояна В. С. [2]. Эта задача в данной работе вновь рассматривается для выяснения возможности трещинообразования на поверхности контакта, при этом проводится другой численный анализ.

Вопрос образования трещин на поверхности контакта связан с исследованием нормального контактного напряжения с определением его величины и знака. Для конкретных внешних нагрузок и отношений геометрических параметров составляющих цилиндров рассмотрены численные примеры, вычислены напряжения на поверхности контакта и на некоторых сечениях составного цилиндра. Исследовано влияние разнородности материалов на распределение напряжений.

Анализ полученных результатов позволяет сделать однозначное заключение о возможности образования трещин на поверхности контакта.

1. *Основные расчетные формулы для напряжений*

Рассмотрим цилиндр с радиусом R, состоящий из двух сплошных круглых цилиндров из различных материалов, соединенных между собой торцами (фиг. 1).

Граничные условия рассмотренной задачи имеют вид

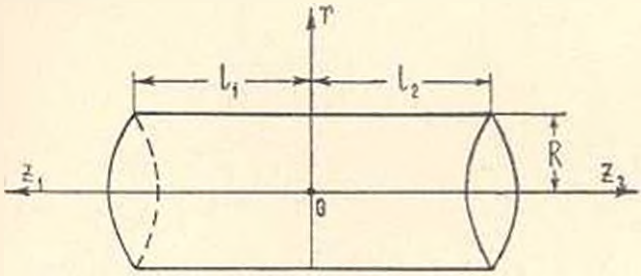
$$\sigma_{rz}^{(i)}(R, z) = 0, \qquad u_r^{(i)}(R, z) = 0 \tag{1.1}$$

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \frac{a_0^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_k r) = f(r)$$

$$0 < r < R \quad (i = 1, 2) \tag{1.2}$$

$$\sigma_{rz}^{(i)}(r, l_i) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(i)} J_1(\beta_k r) = \varphi(r)$$

где $f(r)$ и $\varphi(r)$ — кусочно-непрерывные функции, ограниченные на заданном интервале.



Фиг. 1.

Условия полного контакта цилиндров по торцам даются соотношениями

$$\sigma_{rz}^{(1)}(r, 0) = -\sigma_{rz}^{(2)}(r, 0), \qquad \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0)$$
$$u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0), \qquad u_r^{(1)}(r, 0) = u_r^{(2)}(r, 0) \tag{1.3}$$

Бигармоническая функция напряжений представляется в виде

$$\Phi^{(i)}(r, z) = \frac{z^2 a_0^{(i)}}{12(1-\nu_i)} + \sum_{k=1}^{\infty} [X_k^{(4i-3)} \operatorname{sh} \beta_k z + X_k^{(4i-2)} \operatorname{ch} \beta_k z +$$
$$+ X_k^{(4i-1)} \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + X_k^{(4i)} \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z] \frac{J_0(\beta_k r)}{\beta_k^3 \operatorname{ch} \beta_k l_i} \tag{1.4}$$

где $a_0^{(i)}$ — коэффициенты разложения граничных функций.

Пользуясь обычными формулами [1, 2, 3], для напряжений $\sigma_z^{(i)}$ и $\sigma_{rz}^{(i)}$ получим следующие формулы:

$$\sigma_z^{(i)}(r, z) = \frac{a_0^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{-\operatorname{ch} \beta_k z X_k^{(4i-3)} - \operatorname{sh} \beta_k z X_k^{(4i-2)} -$$
$$+ [(1-2\nu_i) \operatorname{sh} \beta_k z - \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z] X_k^{(4i-1)} +$$
$$+ [(1-2\nu_i) \operatorname{ch} \beta_k z - \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z] X_k^{(4i)}\} \frac{J_0(\beta_k r)}{\operatorname{ch} \beta_k l_i} \tag{1.5}$$

$$\sigma_{rz}^{(i)}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \beta_k z X_k^{(4i-3)} - \operatorname{ch} \beta_k z X_k^{(4i-2)} +$$
$$+ (2\nu_i \operatorname{ch} \beta_k z + \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z) X_k^{(4i-1)} + (2\nu_i \operatorname{sh} \beta_k z + \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z) X_k^{(4i)}] \frac{J_1(\beta_k r)}{\operatorname{ch} \beta_k l_i} \tag{1.6}$$

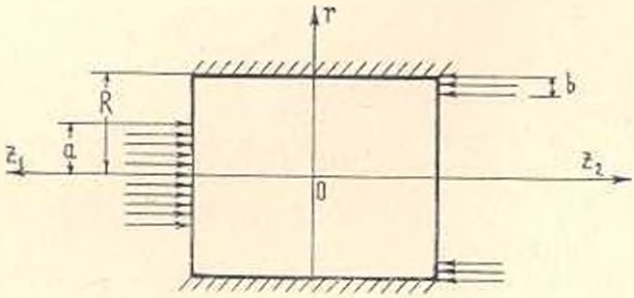
Неизвестные коэффициенты, входящие в ряды (1.4—1.6), определяются после удовлетворения граничных условий и условий контакта из конечного числа линейных алгебраических уравнений.

2. *Численные примеры*

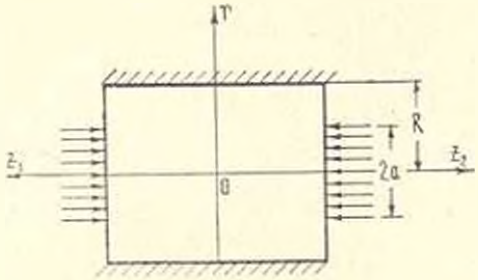
В качестве примеров рассмотрим напряженное состояние составного цилиндра, когда на некоторых частях торцов цилиндра приложены равномерно-распределенные нормальные нагрузки следующим образом:

$$\text{a)}\quad \sigma_z^{(1)}(r, l_1) = \begin{cases} -p & \text{при } 0 < r < a_1 \\ 0 & \text{при } a_1 < r < b_1 \end{cases} \qquad \sigma_z^{(2)}(r, l_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r < a_2 \\ -p & \text{при } a_2 < r < R \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \sigma_z^{(1)}(r, l_1) = \begin{cases} -p & \text{при } 0 < r < a_1 \\ 0 & \text{при } a_1 < r < R \end{cases}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Из условия равновесия имеем

$$a_1^2 + a_2^2 = R^2$$

При этих условиях имеем

$$b_k^{(1)} = 0, \qquad a_0^{(1)} = \frac{2a_1^2}{R^2} p \tag{2.1}$$

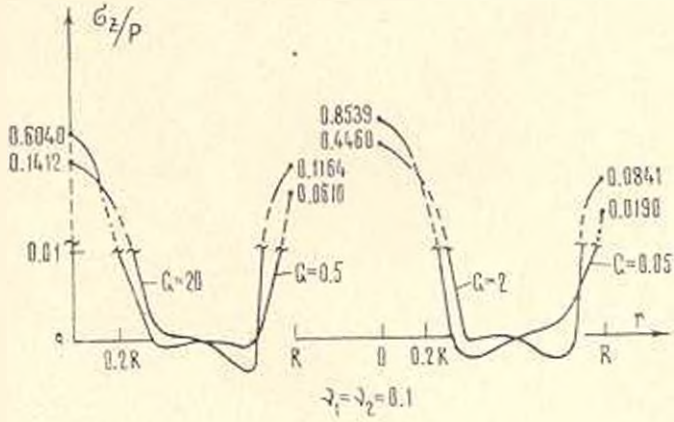
$$\text{a)}\quad a_k^{(1)} = -\frac{2a_1 J_1(\beta_k a_1)}{R^2 \beta_k J_0^2(\beta_k R)} \qquad \text{b)}\quad a_k^{(1)} = -\frac{2a_1 J_1(\beta_k a_1)}{R^2 \beta_k J_0^2(\beta_k R)} \tag{2.2}$$

Вычисления выполнены для значений $l_1 = l_2 = l = 0.1R$, $a_1 = 0.125R$.

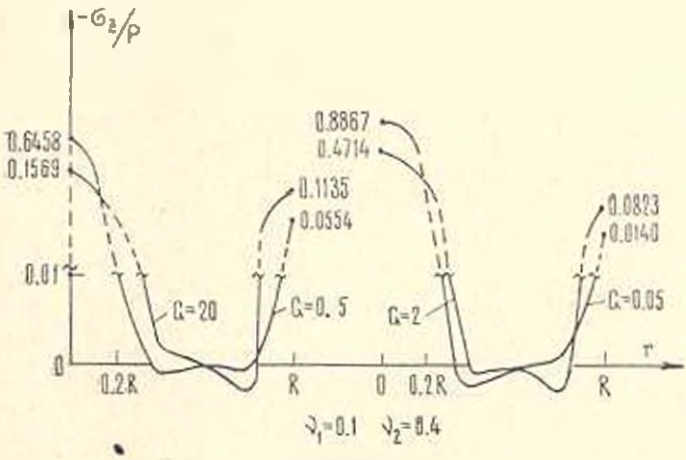
После удовлетворения граничных условий и условий контакта для определения неизвестных коэффициентов $X_k^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ получается конечная система линейных уравнений. Для больших значений k, решая эту систему и подставляя значения $X_k^{(j)}$ в (1.5) и (1.6), получим, что отброшенная часть рядов будет меньше, чем сумма следующего ряда:

$$\sum_{k=51}^{\infty} \beta_k l e^{-\lambda_k l} = 0.000005 \tag{2.3}$$

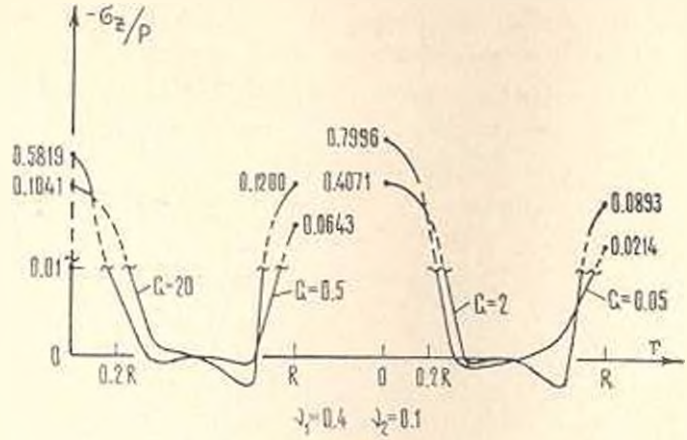
Если $l_1 \neq l_2$, асимптотика решения получается сравнительно простой, так как некоторые члены имеют порядок $e^{-\lambda_k l_1}$ и при больших k практически равны нулю. Оценены ряды, содержащие бесселевые и гиперболические функции, и для напряжений в общем случае получены оценки типа (2.3).



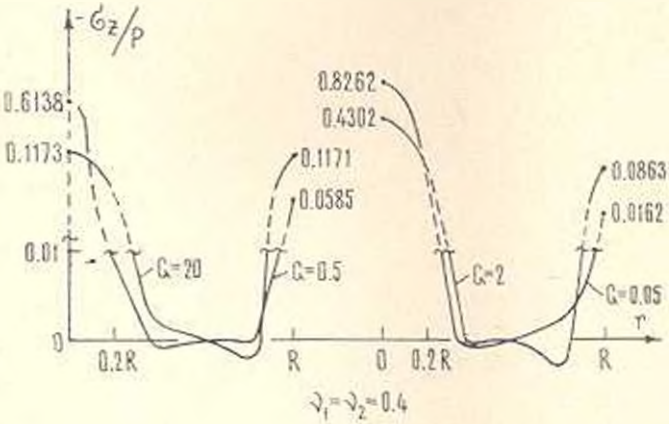
Фиг. 4.



Фиг. 5.

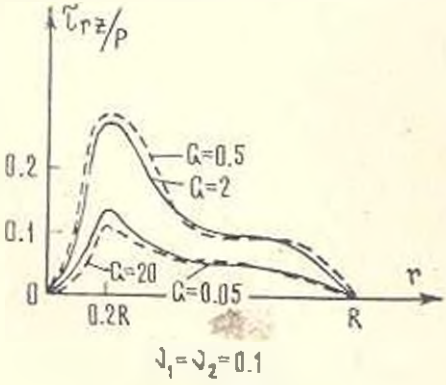


Фиг. 6.

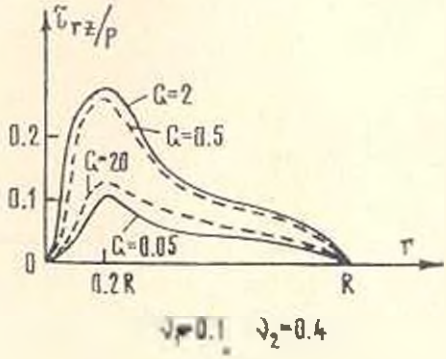


Фиг. 7.

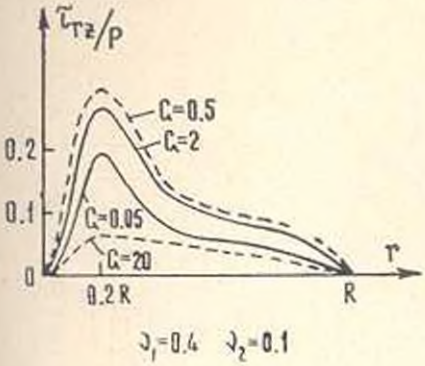
Значения нормального и касательного напряжений в некоторых точках поверхностей $z=0$, $l/4$, $3l/4$, $r=0.2R$, $0.4R$, $0.6R$, $0.8R$, R и на линии $r=0$, при $\frac{G_1}{G_2}=1$, для первого случая нагружения приведены в табл. 1 и 2.



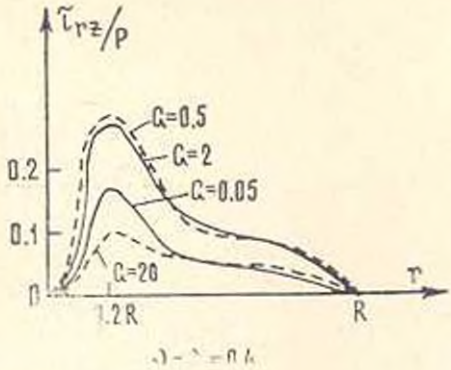
Фиг. 8.



Фиг. 9.



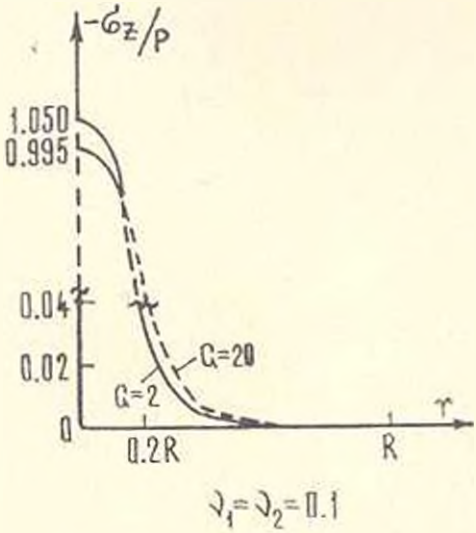
Фиг. 10.



Фиг. 11.

Распределения нормального и касательного напряжений на поверхности контакта при различных значениях модулей сдвига и коэффициентов Пуассона для первого случая нагружения показаны на фиг. 4—11. Диаграммы построены по расчетам, сделанным для шести точек поверхности контакта.

Распределение нормального напряжения на поверхности контакта при $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$, $\frac{G_1}{G_2} = 2;\ 20$ для второго случая нагружения показано на фиг. 12.



Фиг. 12.

3. *Анализ результатов вычислений*

Для первого случая нагружения двухслойной плиты, когда слои имеют одинаковые толщины, сжатие сопровождается изгибом. На осно-

вании данных фиг. 4—11 и табл. 1—2 приходим к следующим заключениям:

Таблица 1

	$\sigma_z^{(2)}/p$					$\sigma_z^{(2)}/p$		
	z/l				$\frac{r}{R}$	z/l		
	0	1/4	1/2	3/4		1/4	1/2	3/4
$\nu_1=0.1$	−0.5276	−0.7170	−0.8740	−0.9551	0	−0.3372	−0.1704	−0.0573
	0.0333	0.0456	0.0640	0.0814	0.2	0.0282	0.0293	0.0366
	0.0005	0.0005	0.0003	0.0001	0.4	0.0001	0.0002	−0.0010
	−0.0000	−0.0000	−0.0000	−0.0001	0.6	−0.0001	−0.0001	−0.0010
	0.0018	0.0015	0.0009	0.0002	0.8	0.0016	0.0010	−0.0004
	−0.0731	−0.0429	−0.0207	−0.0059	1	−0.1162	−0.1891	−0.3598
$\nu_1=0.4$	−0.5619	−0.7417	−0.8902	−0.9654	0	−0.3712	−0.1921	−0.0645
	−0.0161	−0.0143	−0.0058	−0.0002	0.2	−0.0119	−0.0060	−0.0026
	0.0007	0.0006	0.0005	0.0002	0.4	0.0005	0.0003	−0.0010
	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.6	0.0000	−0.0001	−0.0010
	0.0019	0.0018	0.0015	0.0012	0.8	0.0018	0.0011	−0.0003
	−0.0694	−0.0392	−0.0181	−0.0072	1	−0.1337	−0.1877	−0.3594
$\nu_1=0.3$	−0.5028	−0.7004	−0.8680	−0.9588	0	−0.3129	−0.1551	−0.0523
	−0.0148	−0.0112	−0.0035	−0.0006	0.2	−0.0124	−0.0066	−0.0029
	0.0005	0.0005	0.0004	0.0002	0.4	0.0004	0.0002	−0.0010
	0.0001	0.0003	0.0005	0.0007	0.6	0.0000	−0.0001	−0.0010
	0.0027	0.0023	0.0018	0.0017	0.8	0.0019	0.0013	−0.0004
	−0.0770	−0.0467	−0.0226	−0.0057	1	−0.1186	−0.1031	−0.3602
$\nu_1=0.4$	−0.5294	−0.7200	−0.8789	−0.9621	0	−0.3381	−0.1708	−0.0574
	−0.0160	−0.0132	−0.0049	0.0001	0.2	−0.0126	−0.0065	−0.0028
	0.0006	0.0006	0.0005	0.0002	0.4	0.0005	0.0002	−0.0010
	0.0001	0.0003	0.0005	0.0007	0.6	0.0000	−0.0001	−0.0010
	0.0020	0.0019	0.0016	0.0013	0.8	0.0018	0.0011	−0.0004
	−0.0729	−0.0424	−0.0200	−0.0048	1	−0.1160	−0.1890	−0.3598

1. Нормальное напряжение σ_z на поверхности контакта меняет знак. Следовательно, при слабом сцеплении под действием внешней сжимающей нагрузки на отдельных участках контакт может нарушиться.

2. При постоянном отношении $\frac{G_1}{G_2}$ максимальное напряжение σ_z на поверхности контакта получается меньшим при $\nu_1 > \nu_2$ и большим при $\nu_1 < \nu_2$, чем при $\nu_1 = \nu_2$.

Таблица 2

	$\sigma_{rz}^{(1)}/p$					$\sigma_{rz}^{(2)}/p$		
	z/l				$\frac{c}{R}$	z/l		
	0	1/4	1/2	3/4		1/4	1/2	3/4
$\nu_1=\nu_2=0.1$	0.2966	0.2742	0.2107	0.1102	0.2	−0.2809	−0.2286	−0.1375
	0.1463	0.1370	0.1095	0.0637	0.4	−0.1374	−0.1100	−0.0640
	0.0975	0.0914	0.0731	0.0426	0.6	−0.0911	−0.0731	−0.0420
	0.0731	0.0695	0.0562	0.0331	0.8	−0.0675	−0.0531	−0.0201
$\nu_1=0.1,\ \nu_2=0.2$	0.2868	0.2588	0.1948	0.0907	0.2	−0.2919	−0.2481	−0.1335
	0.1446	0.1306	0.1016	0.0578	0.4	−0.1426	−0.1178	−0.0701
	0.0963	0.0871	0.0679	0.0387	0.6	−0.0948	−0.0783	−0.0461
	0.0724	0.0663	0.0523	0.0301	0.8	−0.0702	−0.0570	−0.0322
$\nu_1=0.4,\ \nu_2=0.1$	0.2984	0.2875	0.2247	0.1202	0.2	−0.2639	−0.2123	−0.1250
	0.1445	0.1413	0.1168	0.0692	0.4	−0.1312	−0.1027	−0.0588
	0.0962	0.0946	0.0779	0.0462	0.6	−0.0873	−0.0682	−0.0385
	0.0720	0.0720	0.0603	0.0362	0.8	−0.0642	−0.0435	−0.0265
$\nu_1=\nu_2=0.4$	0.2961	0.2735	0.2098	0.1092	0.2	−0.2806	−0.2281	−0.1374
	0.1460	0.1365	0.1088	0.0630	0.4	−0.1372	−0.1099	−0.0640
	0.0973	0.0910	0.0726	0.0420	0.6	−0.0912	−0.0730	−0.0420
	0.0631	0.0631	0.0560	0.0329	0.8	−0.0674	−0.0531	−0.0291

3. При любых значениях коэффициентов Пуассона и значительной разности модулей сдвига материалов максимальное напряжение σ_z на поверхности контакта получается меньшим при $G_1 > G_2$ и большим при $G_1 < G_2$, чем при $G_1 = G_2$.

4. При любых значениях коэффициентов Пуассона материалов при увеличении $\frac{G_1}{G_2}$ максимальное нормальное контактное напряжение уменьшается.

5. Для любых значений коэффициентов Пуассона при увеличении $\frac{G_1}{G_2}$ сжимающее нормальное контактное напряжение на краю контактной поверхности увеличивается.

6. Касательное напряжение τ_{rz} на поверхности контакта не меняет знака и не имеет особенностей.

Для второго случая нагружения двухслойной плиты, когда симметричное сжатие торцевой нормальной нагрузкой не сопровождается изгибом, на основании данных вычислений, часть которых приведена на фиг. 12, заключаем:

1. Нормальное напряжение σ_z на поверхности контакта меняет знак.

2. Максимальное контактное нормальное напряжение превосходит значение интенсивности равномерно-распределенной внешней нормальной нагрузки. В предельном случае для одинаковых материалов напряженное состояние составного цилиндра не зависит от свойства материалов.

3. Изменение модулей сдвига и коэффициентов Пуассона материалов слоев мало влияет на напряженное состояние двухслойной плиты.

4. Касательное напряжение τ_{rz} на поверхности контакта может изменить знак и значительно меньше, чем в первом случае нагружения.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 6 VII 1973

Զ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԳԼԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ ՃՆՂՔԻ ԱՌԱՋԱՑՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է ճակատներից սեղման ժամանակ բաղադրյալ գլանի կոնտակտի մակերևույթի վրա օդակածև ճեղքի առաջացման հնարավորության հարցերը, երբ գլանի կողմնային մակերևույթի վրա նորմալ տեղափոխումները և շոշափող լարումները բացակայում են։

Ընդհանուր տեսքով տրված է լուծման գնահատականը, որը թույլ է տալիս միարժեք եզրակացություն հանելու բաղադրյալ գլանի կոնտակտի մակերևույթի վրա ճեղքի առաջացման հնարավորության մասին։

Թվային հաշվարկումները ցույց են տալիս, որ եթե գլանի ճակատների որևէ հատվածներում կիրառված են հավասարաչափ բաշխված նորմալ ճնշումներ, ապա կոնտակտի մակերևույթի վրա կարող են առաջ գալ ձգող նորմալ լարումներ։

AN INVESTIGATION ON SOME ASPECTS OF DISJOINING ON THE CONTACT SURFACE OF A COMPOSITE CYLINDER

Z. A. MARTIROSIAN

Summary

Some aspects of formation of clearance on the contact surface of a composite cylinder under an external contracting load are investigated where normal displacements and shearing stresses on the lateral surfaces of the cylinder are equal to zero.

A general form of solution is given enabling to draw unambiguous conclusions on the formation of clearance on the contact surface.

A numerical analysis shows that under an external normal contracting load certain extending stresses may develop on the contact surface of the composite cylinder.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН Арм. ССР, т. 19, № 1, 1954.
2. *Баблоян А. А., Тоноян В. С.* Изгиб двухслойной толстой круглой плиты осесимметричной нагрузкой. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVI, № 1, 1963.
3. *Мартиросян З. А.* О контактных напряжениях осесимметрично нагруженного полого составного цилиндра. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVI, № 4, 1973.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Госиноиздат, ч. I, М., 1949.
5. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций. ИЛ, Физматгиз, 1959.