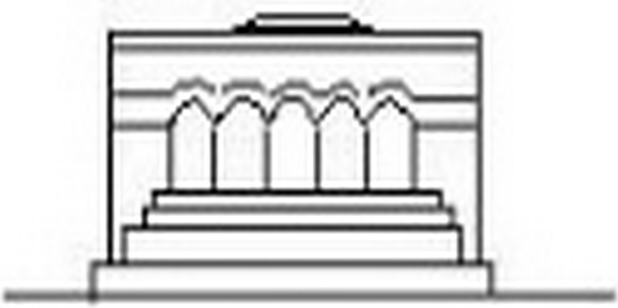
ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1974

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 1, 1974 Механика

С. С. ШАГИНЯН

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, УСИЛЕННОЙ НА СВОЕЙ ГРАНИЦЕ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Исследованию контактных задач для упругих тел усиленных упругими креплениями в виде накладок (стрингеров) малой толщины, которые тесно примыкают к вопросам передачи нагрузок от стрингеров упругим телам и представляют большой интерес для инженерной практики, посвящены работы многих авторов. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в работах [1, 2]. Здесь же только отметим, что контактная задача для полуплоскости, усиленной на конечном отрезке своей границы приваренной к ней упругой накладкой малой толщины, с точки зрения выяснения особенностей контактных напряжений на концах упругой накладки была рассмотрена в работе [3]. Позже некоторые контактные задачи для полуплоскости, усиленной различными способами нагруженными и скрепленными с основанием накладками, рассматривались в работах [4, 5]. В работе [6] рассмотрена контактная задача для плоскости с круговым отверстием, граница которой усилена упругой кольцевой накладкой малой толщины.

В настоящей работе рассматриваются некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на конечных отрезках своей границы упругими накладками малой толщины.

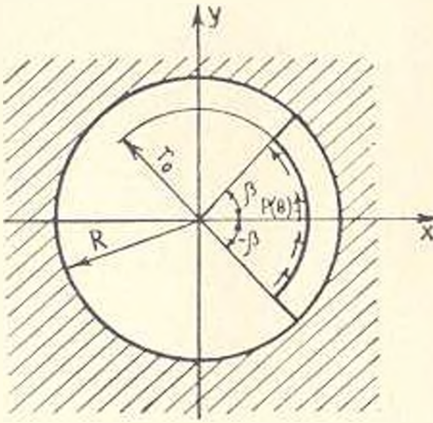
Для характерных в исследуемой задаче механических величин — касательных контактных напряжений — получены формулы, содержащие в явном виде присущие этим напряжениям особенности в окрестностях концов упругих накладок.

Эти контактные задачи рассматриваются для случая упругих пластин с круговым отверстием, находящихся в обобщенном плоском напряженном состоянии, а также для случая упругого пространства с бесконечным цилиндрическим отверстием, находящегося в условиях плоской деформации.

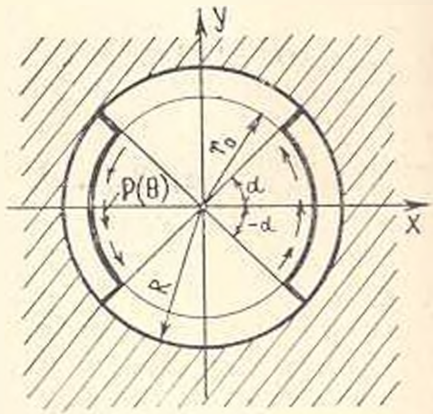
Указанные контактные задачи, как нам представляется, ставятся и решаются в настоящей работе впервые.

1. *Постановка задач и вывод определяющих уравнений.* Пусть плоскость с круговым отверстием радиуса $R=1$, что не нарушает общности, вдоль конечного дугового отрезка своей границы усилена приваренной к ней упругой накладкой, имеющей вид трапеции, которая ограничена дугами двух концентрических окружностей и отрезками радиусов. Предположим, что накладка имеет достаточно малую толщину. Кроме того, пусть на внутренней стороне этой накладки действует касательная нагрузка интенсивности $\rho(\theta)$ (фиг. 1).

Во второй задаче предполагается, что такая же упругая плоскость вдоль симметрично расположенных конечных отрезков своей границы усилена одинаковыми упругими накладками такой же формы, как и выше, нагруженными симметричными внешними касательными нагрузками (фиг. 2).

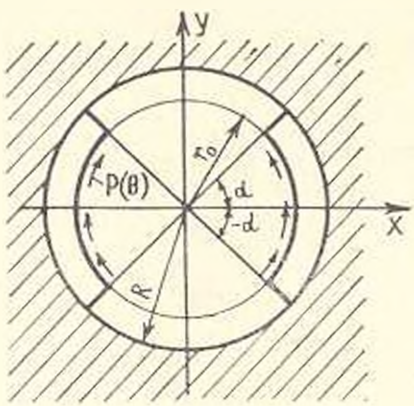


Фиг. 1.



Фиг. 2.

Рассматривается также случай кососимметрично нагруженной накладки (фиг. 3).



Фиг. 3.

Цель нашей работы заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с основанием. В дальнейшем будет рассматриваться только первая контактная задача. Решение остальных задач можно получить вполне аналогичным способом.

Приняв те же физические предположения, что и в работе [6] и поступив точно так же, как в этой работе [6], находим, что решение указанной выше задачи после некоторых операций сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_{-\beta}^{\beta}\left\{\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}+K(t-s)\right\}\Psi'(s)\,ds=\lambda\Psi(t)-\lambda g(t),\quad(-\beta<t<\beta)\tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$\Psi(-\beta)=0,\quad \Psi(\beta)=1\tag{1.2}$$

где первый интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Здесь параметр λ, зависящий от геометрических и упругих характеристик накладки и плоскости, имеет значения

$$\lambda=\frac{R^2}{2r_0h}\,\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_2)E_2}{(1-\nu_2^2)(1-\nu_1)E_1},\qquad \lambda=\frac{R^2}{2r_0h}\,\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2}{(1-\nu_1)E_1}$$

соответственно случаям плоского деформированного состояния и обобщенного плоского напряженного состояния. Постоянные E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, отмеченные индексами 1 и 2, относятся к накладкам и плоскости соответственно. Далее,

$$g(t)=g_1(t)/g_1(\beta),\quad g_1(t)=\int_{-\beta}^{t}p(s)\,ds\quad(-\beta\leqslant t\leqslant\beta)$$

а

$$K(t-s)=\frac{\ln 2+\varkappa(1+\ln 2)}{\pi(1+\varkappa)}\sin(t-s)+\frac{1}{\pi}\sin(t-s)\ln\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|+$$

$$+\frac{1-\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}[\pi-|t-s|]\cos(t-s)\operatorname{sign}(t-s)\quad(-\beta\leqslant t,\ s\leqslant\beta)$$

Входящая сюда постоянная $\varkappa$ имеет различные значения для различных состояний упругого тела [7], а именно $\varkappa=3-4\nu_2$ в случае плоской деформации и $\varkappa=(3-\nu_2)/(1+\nu_2)$ для обобщенного плоского напряженного состояния.

Легко видеть, что функция $K(t-s)$ в квадрате $-\beta\leqslant t,\ s\leqslant\beta$ непрерывна как функция двух переменных и имеет интегрируемые частные производные первого порядка.

Контактное напряжение будет даваться формулой

$$\tau(t)=\frac{r_0^2}{R^2}g_1(\beta)\Psi'(t),\quad(-\beta<t<\beta<\pi)\tag{1.3}$$

Таким образом, решение рассмотренной контактной задачи приводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) при граничных условиях (1.2), ядро которого представлено в виде суммы известного ядра Гильберта $(2\pi)^{-1}\operatorname{ctg}\dfrac{s-t}{2}$ и регулярного ядра в виде функций $K(t-s)$. Иными словами, в ядре уравнения (1.1) выделены его сингулярная часть в виде ядра Гильберта и регулярная часть в виде непрерывной функции $K(t-s)$.

2. *Об особенностях контактных напряжений вблизи концов упругих накладок.* Для выяснения этого вопроса заметим, что потенциальная энергия деформации плоскости с круговым отверстием вследствие ее деформации контактными напряжениями должна быть величиной конечной. Поэтому возможные особенности контактных напряжений вблизи концов упругих накладок должны быть интегрируемого порядка. Из сказанного и из (1.3) следует, что имеет место представление

$$\Psi'(t) = \frac{Z_0(t)}{(\beta - t)^{\gamma_1}(\beta + t)^{\gamma_2}}, \qquad (-\beta < t < \beta)$$

где $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$, $Z_0(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера на отрезке $-\beta \leqslant t \leqslant \beta$.

Исходя из этого представления и учитывая известную связь между ядрами Гильберта и Коши

$$\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2} = i\left[1 + 2\frac{\sigma}{\zeta - \sigma}\right], \quad \zeta = e^{is}, \quad \sigma = e^{it}$$

на основе результатов [8], которые относятся к поведению интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, легко показать, что

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$$

Таким образом, имеет место следующее представление:

$$\Psi'(t) = \frac{Z_1(t)}{\sqrt{2\cos t - 2\cos\beta}}, \quad (-\beta < t < \beta) \tag{2.1}$$

где $Z_1(t) = Z_0(t)\sqrt{2\cos t - 2\cos\beta}/\sqrt{\beta^2 - t^2}$ — функция класса H на отрезке $[-\beta, \beta]$.

Отметим, что подробное исследование вопроса об особенностях напряжений в некоторых классах смешанных задач теории упругости содержится в работе [9].

3. *Приведение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) с граничным условием (1.2) к бесконечной системе уравнений.* Сначала приводим следующие интегральные соотношения:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}\,T_{2m}\left(\frac{\sin\frac{s}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\frac{\cos\frac{s}{2}\,ds}{\sqrt{2\cos s - 2\cos\beta}} =$$

$$= \begin{cases} 0, & m = 0 \\ \dfrac{1}{2}\csc\dfrac{\beta}{2}\,U_{2m-1}\left(\dfrac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\cos\dfrac{t}{2}, & m = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}T_{2m-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{s}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right)\frac{\sec\frac{s}{2}\,ds}{\sqrt{2\cos s-2\cos\beta}}=$$

$$=\frac{1}{2}\csc\frac{\beta}{2}U_{2m-2}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right)\sec^2\frac{t}{2},\quad m=1,2,\ldots \tag{3.2}$$ *

нужные нам в дальнейшем. Отметим, что они получаются из известного соотношения

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(y)\,dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}}=\pi U_{n-1}(x),\quad (n=1,2,\ldots),\quad |x|\leqslant 1$$

при помощи элементарных выкладок. В последней формуле $T_n(x)=$ $=\cos(n\arccos x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ и $U_n(x)=\sin[(n+1)\arccos x]\sin\arccos x$, $(n=0,1,\ldots)$ — известные многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Далее, ввиду (2.1), решение уравнения (1.1) представим формулой

$$\Psi'(t)=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}}\sum_{m=0}^{\infty}x_{2m}T_{2m}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)+$$

$$+\frac{\sec\frac{t}{2}}{\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}}\sum_{m=1}^{\infty}x_{2m-1}T_{2m-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right) \tag{3.3}$$

с неизвестными коэффициентами $\{x_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{x_{2m-1}\}_{m=1}^{\infty}$.

Отметим, что первая сумма в формуле (3.3) с точностью постоянного множителя представляет собой симметричную часть неизвестных контактных напряжений, а вторая сумма — кососимметричную часть тех же напряжений.

Интегрируя обе части (3.3) в пределах $(-\beta, t)$ и учитывая (1.2), будем иметь

$$\Psi(t)=x_0\left[\pi/2+\arcsin\left(\sin\frac{t}{2}\csc\frac{\beta}{2}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\csc\frac{\beta}{2}\sum_{m=1}^{\infty}x_{2m}(2m)^{-1}\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\,U_{2m-1}\left(\sin\frac{t}{2}\csc\frac{\beta}{2}\right)-$$

* Аналогичные соотношения приведены в работе [10] в несколько другом виде.

$$-\frac{1}{2}\sec\frac{\beta}{2}\csc\frac{\beta}{2}\sum_{m=1}^{\infty} x_{2m-1}(2m-1)^{-1}\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\sec\frac{t}{2}\times$$

$$\times U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) \qquad (3.4)$$

Отсюда коэффициент x_0 определяется непосредственно, а именно: $x_0=\pi^{-1}$.

Подставив (3.3) и (3.4) в (1.1) и используя соотношения (3.1) и (3.2), известным способом [2] получим бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$x_{2k}+\left(2\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} x_{2m}(2m)^{-1}[A_{2m-1,\,2k-1}+B_{2m-1,\,2k-1}]=$$

$$=\left(\pi\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-1} b_{2k-1},\quad k=1,2,\ldots \qquad (3.5)$$

$$x_{2k-1}+\left(2\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} x_{2m-1}(2m-1)^{-1}[A_{2m-2,\,2k-2}+B_{2m-2,\,2k-2}]=$$

$$=\left(\pi\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{-1} b_{2k-2},\quad k=1,2,\ldots \qquad (3.6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$A_{2m-1,\,2k-1}=\left[\lambda-\frac{1-x}{1+x}\right]\int_{-\beta}^{\beta} U_{2m-1}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\times$$

$$\times U_{2k-1}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)(2\cos t-2\cos\beta)\,dt,\quad m,k=1,2,\ldots$$

$$B_{2m-1,\,2k-1}=\int_{-\beta}^{\beta} U_{2m-1}\left(\frac{\sin\frac{s}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\sqrt{2\cos s-2\cos\beta}\,ds\int_{-\beta}^{\beta} G(t-s)\times$$

$$\times U_{2k-1}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\,dt,\quad m,k=1,2,\ldots$$

$$b_{2k-1} = \int\limits_{-\beta}^{\beta} \left[\lambda\pi^{-1} \arcsin \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) - \pi^{-1} R(t) - \lambda g(t) \right] \times$$

$$\times U_{2k-1} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta}\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$A_{2m-2,\, 2k-2} = \left[\lambda - \frac{1 - x}{1 + x} \right] \int\limits_{-\beta}^{\beta} U_{2m-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \times$$

$$\times U_{2k-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) (2 \cos t - 2 \cos \beta) \sec^2 \frac{t}{2}\, dt, \quad m,\ k = 1, 2, \ldots$$

$$B_{2m-2,\, 2k-2} = \int\limits_{-\beta}^{\beta} U_{2m-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{s}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2 \cos s - 2 \cos \beta}\, \sec \frac{s}{2}\, ds \times$$

$$\times \int\limits_{-\beta}^{\beta} G(t - s)\, U_{2k-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta}\, \sec \frac{t}{2}\, dt, \quad m,\ k = 1, 2, \ldots$$

$$b_{2k-2} = \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\beta}^{\beta} [1 - 2g(t)] \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta}\, \sec \frac{t}{2}\, U_{2k-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) dt$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

где

$$G(t - s) = -\frac{1}{2\pi} - \frac{2x - (x + 1) \ln 2}{\pi (1 + x)} \cos (t - s) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \cos (t - s) \ln \left| \sin \frac{t - s}{2} \right| + \frac{1 - x}{2\pi (1 + x)} [\pi - |t - s|] \sin (t - s) \operatorname{sign} (t - s)$$

$$(-\beta \leqslant t,\ s \leqslant \beta)$$

$$R(t) = \int\limits_{-\beta}^{\beta} K(t - s) \frac{\cos \frac{s}{2}\, ds}{\sqrt{2 \cos s - 2 \cos \beta}}, \quad [R(t) = -R(-t),\ -\beta \leqslant t \leqslant \beta < \pi]$$

4. *Исследование бесконечных систем линейных уравнений.* Обратимся сначала к бесконечной системе (3.6). Для ее исследования оценим суммы

$$S_{2k-2}=\left(2\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)^{-1}\left|A_{2m-2,\,2k-2}+B_{2m-2,\,2k-2}\right|,\quad k=1,2,\ldots$$

При помощи неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$S_{2k-2}\leqslant\left(2\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)^{-2}\right]^{1/2}\left[(M_{2k-2})^{1/2}+(M'_{2k-2})^{1/2}\right]$$

где

$$M_{2k-2}=\sum_{m=1}^{\infty}A^2_{2m-2,\,2k-2},\qquad M'_{2k-2}=\sum_{m=1}^{\infty}B^2_{2m-2,\,2k-2}$$

или же

$$S_{2k-2}\leqslant\left(4\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\left[(M_{2k-2})^{1/2}+(M'_{2k-2})^{1/2}\right]\tag{4.1}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(t)=\left|i-\frac{1-x}{1+x}\right|2\pi\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\,U_{2k-2}\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\times$$

$$\times\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\,\cos\frac{t}{2}$$

Коэффициентами Фурье последней функции по полной ортогональной в $L^2_\rho(0,\beta)$ $\left(\rho(t)=\sec^4\frac{t}{2}\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\right)$ системе многочленов $\left\{U_{2m-2}\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ будут как раз коэффициенты $\{A_{2m-2,\,2k-2}\}_{m,\,k=1}^{\infty}$. Следовательно, на основании известного равенства Парсеваля

$$M_{2k-2}=\left|i-\frac{1-x}{1+x}\right|^2 4\pi^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\int_{-\beta}^{\beta}\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\,\sec^4\frac{t}{2}\times$$

$$\times\left|U_{2k-2}\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\,\cos\frac{t}{2}\right|^2dt$$

Оценив входящий сюда интеграл, для M_{2k-2} окончательно находим

$$(M_{2k-2})^{1/2}\leqslant\left|i-\frac{1-x}{1+x}\right|4\pi\sqrt{2\pi}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\sin^3\frac{\beta}{2},\qquad k=1,2,\ldots\tag{4.2}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Omega(s) = 2\pi \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{s}{2}\int_{-\beta}^{\beta} G(t-s)\times$$

$$\times U_{2k-2}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2\cos t - 2\cos\beta}\,\sec\frac{t}{2}\,dt$$

Совершенно аналогичным образом будем иметь

$$(M^*_{2k-2})^{1/2} \leqslant 8\pi \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{\beta\sin\frac{\beta}{2}}\,N \tag{4.3}$$

Здесь

$$N^2 = 4Q^2\beta^4 + \frac{4Q}{\pi}[\beta^4 - 2\beta^4\ln(2\beta) + 2\beta^4(1+\ln 2) +$$

$$+ 4\beta^4\ln\beta - 4\beta^4\ln\sin\beta] + 2\pi^{-2}(2\beta^4\ln^2(2\beta) - 2\beta^4\ln(2\beta) +$$

$$+ \beta^4 - (2+\ln 4)[2\beta^4\ln(2\beta) - \beta^4] - 4\beta^4 - 4\beta^4\ln 2 + 4\beta^4\ln^2 2)$$

$$Q = \frac{1}{2\pi} + \frac{2\varkappa + (\nu+1)\ln 2}{\pi(1+\varkappa)} + \frac{\varkappa - 1}{2\pi(\varkappa-1)}.$$

Для вполнерегулярности системы (3.4) достаточно, чтобы выполнялось условие $S_{2k-2} \leqslant q < 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. С учетом (4.1), (4.2) и (4.3) это условие примет вид

$$\lambda < \pi^{-3/2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\csc\frac{\beta}{2} - N\sqrt{\frac{2}{\pi}\beta\csc\frac{\beta}{2} + \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}$$

Теперь докажем, что для любого значения параметра $\lambda\,(0 \leqslant \lambda < \infty)$ бесконечная система квазирегулярна. С этой целью заметим следующее. Исследование системы (3.6) с ядром $(2m-1)^{-1}A_{2m-2,\,2k-2}$, к которой сводится сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (1.1) с граничным условием (1.2) в случае только ядра Гильберта $(2\pi)^{-1}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}$, содержится в работах [4, 10]. Покажем, что добавление к этому ядру нового ядра $(2m-1)^{-1}B_{2m-2,\,2k-2}$, которое обусловлено наличием в структуре ядра исходного интегро-дифференциального уравнения (1.1) регулярной части в виде функции $K(t-s)$, не нарушает регулярности исходной бесконечной системы в смысле ее квазиполнерегулярности. Действительно, если обозначим через $K_{2m-2,\,2k-2} = (2m-1)^{-1}B_{2m-2,\,2k-2}$, то при помощи неравенства Коши-Буняковского получим

$$L_{2k-2} = \sum_{m=1}^{\infty} |K_{2m-1,\,2k-2}| \leqslant \left[\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)^{-2}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\sum_{m=1}^{\infty} B^2_{2m-2,\,2k-2}\right]^{1/2} = 8^{-1/2} \cdot (M_{2k-2})^{1/2}$$

С другой стороны, как легко видеть, коэффициенты $\{B_{2m-2,\,2k-2}\}_{m,\,k=1}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье функции

$$f(t,\ s) = 4\pi^2\, \mathrm{tg}^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}\, G(t-s) \cos^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{s}{2}$$

по системе многочленов

$$\left\{U_{2m-2}\left(\mathrm{tg}\frac{s}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right) U_{2k-2}\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\right\}_{m,\,k=1}^{\infty}$$

которые составляют полную ортогональную систему в классе функций, квадратично суммируемых с весом $\rho_1(t,\ s)$ $(\rho_1(t,\ s) = \rho(t)\rho(s))$ на квадрате $0 \leqslant t,\ s \leqslant \beta$. Тогда вследствие неравенства Бесселя двойной ряд

$$\sum_{m,\,k=1}^{\infty} B^2_{2m-2,\,2k-2}$$

сходится. Следовательно, сходится и ряд [11]

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{2k-2}, \qquad M_{2k-2} = \sum_{m=1}^{\infty} B^2_{2k-2,\,2m-2}$$

Отсюда, по крайней мере,

$$M_{2k-2} = O\,[(2k-2)^{-1-\varepsilon}], \quad k \to \infty$$

где ε—сколь угодно малое положительное число.

Приняв во внимание выражение для L_{2k-2} будем иметь

$$L_{2k-2} = O[(2k-2)^{-(1+\varepsilon)/2}], \quad k \to \infty$$

что и доказывает высказанное выше утверждение.

Далее, можно показать, что свободный член этой системы стремится к нулю при $k \to \infty$ со скоростью не менее, чем $(2k-2)^{-1}$. В этом легко убедиться, если в выражении свободного члена произвести замену переменного интегрирования следующим образом:

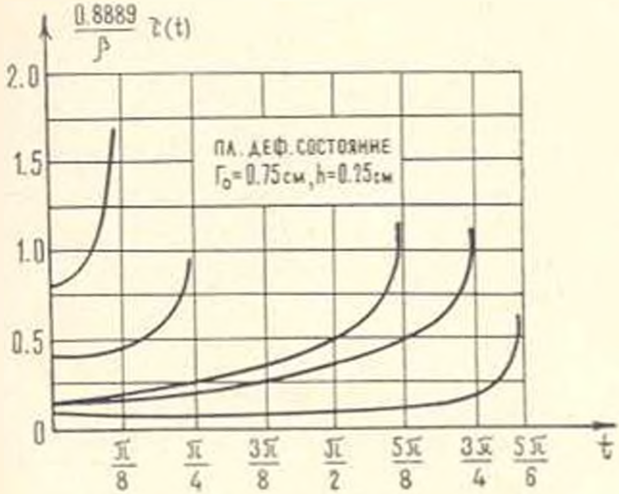
$$\cos\varphi = \mathrm{tg}\frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

а затем пользоваться формулой интегрирования по частям.

Совершенно аналогичным образом исследуется бесконечная система (3.5).

Перейдем к обсуждению числовых результатов. Численная реализация полученных формул произведена на ЭВМ «Наири-2». При этом предполагалось, что внешняя нагрузка, действующая на накладку, распределена равномерно с интенсивностью $p(0)=1$ кг/см², а толщина накладки — $h=0.25$ см. Остальные параметры варьировались различными способами. Эти вариации включали выбор материалов контактирующих пар накладка-плоскость с круговым отверстием, а также длину участка контакта.

При решении соответствующих бесконечных систем линейных уравнений ограничивались лишь решением системы десяти уравнений, поскольку ее решение с точностью по крайней мере шестизначных цифр совпало с решением системы из восьми уравнений. Здесь же отметим, что при вычислении коэффициентов бесконечных систем, которые представлены в виде интегралов, ограничивались такой точностью, чтобы в дробных частях значений этих интегралов совпадали по крайней мере трехзначные цифры. В таблицах указаны решения соответствующих систем линейных уравнений для различных контактирующих пар и для различных значений длины участка контакта. При вычислении контактных напряжений ограничивались одиннадцатью членами. На графиках (фиг. 4) показано влияние изме-



Фиг. 4.

нения длины участка контакта на закон распределения контактных напряжений для одной и той же контактирующей пары. При этом было замечено следующее: если при возрастании параметра λ контактное напряжение имеет лишь малозаметную тенденцию уменьшения, то изменение параметра β явным образом влияет на распределение контактных напряжений под упругой накладкой. Точнее, с возрастанием параметра β контактное напряжение под упругой накладкой существенно уменьшается. Эта закономерность полностью согласуется с принятой нами физической моделью накладки.

Значения коэффициентов в формуле (3.3) для различных значений физических и геометрических параметров приведены в таблицах.

Таблица 1

$\varphi_1 = 0.3927$					
	$\lambda_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.0007	−0.0084	−0.0215	−0.0265	−0.0344
x_4	0.0010	0.0032	0.0041	0.0045	0.0047
x_6	0.0003	0.0011	0.0018	0.0022	0.0028
x_8	0.0002	0.0008	0.0009	0.0010	0.0014
x_{10}	0	0.0002	0.0004	0.0005	0.0006
x_{12}	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003
x_{14}	0	0	0	0	0.0001
x_{16}	0	0	0	0	0
x_{18}	0	0	0	0	0
x_{20}	0	0	0	0	0

Таблица 2

$\varphi_2 = 0.7854$					
	$\lambda_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.0421	−0.0467	−0.0581	−0.0617	−0.0671
x_4	−0.0015	−0.0001	−0.0013	−0.0018	−0.0028
x_6	−0.0003	0.0005	0.0009	0.0013	0.0013
x_8	−0.0004	−0.0002	0.0003	0.0005	0.0008
x_{10}	0.0006	0.0008	0.0011	0.0012	0.0013
x_{12}	0.0002	0.0003	0.0005	0.0005	0.0007
x_{14}	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005
x_{16}	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
x_{18}	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
x_{20}	0.0002	0.0002	0.0003	0.0002	0.0003

Таблица 3

$\beta_3 = 1.9635$

	$\lambda_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.1191	−0.1017	−0.0941	−0.0982	−0.0888
x_4	−0.0317	−0.0326	−0.0221	−0.1078	−0.0324
x_6	−0.0121	−0.0138	−0.0121	−0.0287	−0.0143
x_8	−0.0050	−0.0063	−0.0053	−0.0152	−0.0067
x_{10}	−0.0025	−0.0034	−0.0027	−0.0086	−0.0035
x_{12}	−0.0012	−0.0019	−0.0014	−0.0050	−0.0018
x_{14}	0.0002	−0.0001	0	−0.0022	−0.0002
x_{16}	0.0018	0.0020	0.0016	0	0.0012
x_{18}	0.0002	0.0001	0.0002	−0.0009	0
x_{20}	0.0008	0.0007	0.0007	−0.0002	0.0004

Таблица 4

$\beta_4 = 2.3562$

	$\lambda_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.1251	0.1538	−0.1792	−0.1905	−0.2078
x_4	−0.0222	−0.0185	−0.0404	−0.0452	−0.0528
x_6	−0.0084	−0.0038	−0.0122	−0.0137	−0.0155
x_8	−0.0034	0	−0.0030	−0.0046	−0.0032
x_{10}	−0.0015	0.0008	−0.0003	−0.0831	0.0004
x_{12}	−0.0007	0.0007	0.0004	−0.0008	0.0013
x_{14}	−0.0002	0.0007	0.0008	0.0001	0.0015
x_{16}	0.0005	0.0013	0.0013	0.0010	0.0019
x_{18}	0.0014	0.0021	0.0021	0.0019	0.0025
x_{20}	0.0007	0.0012	0.0012	0.0010	0.0014

Таблица 5

$\beta_5 = 2.6180$

	$\lambda_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.0520	−0.0480	−0.0461	−0.0456	0.0433
x_4	−0.0144	−0.0179	−0.0199	−0.0207	−0.0115
x_6	−0.0091	−0.0114	−0.0125	−0.0130	−0.0038
x_8	−0.0056	−0.0053	−0.0077	−0.0080	0.0001
x_{10}	−0.0036	−0.0045	−0.0047	−0.0049	0.0018
x_{12}	−0.0020	−0.0030	−0.0031	−0.0032	0.0024
x_{14}	−0.0017	−0.0022	−0.0022	0.0018	0.0024
x_{16}	−0.0011	−0.0015	−0.0023	−0.0008	0.0023
x_{18}	−0.0004	−0.0005	−0.0007	−0.0007	0.0023
x_{20}	0.0008	0.0009	0.0009	0.0006	0.0029

При помощи этих таблиц построены графики контактных напряжений для значения параметра $\lambda = \lambda_1$.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 26 VI 1973

Ս. Ս. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ԻՐ ԵԶՐՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են մի քանի կոնտակտային խնդիրներ կլոր անցքով առաձգական հարթության համար, որն իր եզրագծի աղեղային հատվածների վրա ուժեղացված է փոքր հաստություն ունեցող առաձգական վերադիրներով: Նշված խնդիրների լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում: Ստացված սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների կորիզը բաղկացած է երկու գումարելիներից, որոնցից առաջինով՝ Հիլբերտի կորիզով, պայմանավորված է նրա եզակի մասը, իսկ երկրորդը իրենից ներկայացնում է քառակուսու մեջ որոշված անընդհատ ֆունկցիա: Այդ որոշիչ հավասարումների համար ստացված են էֆեկտիվ լուծումներ: Վերջիններիս թվային արդյունքները մի քանի դեպքերի համար ներկայացված են աղյուսակներում և գծագրերում:

CERTAIN CONTACT PROBLEMS FOR A PLANE WITH A CIRCULAR HOLE REINFORCED WITH ELASTIC STIFFENERS ON ITS BOUNDARY

S. S. SHAHINIAN

Summary

Certain contact problems are considered for an elastic plane with a circular hole, reinforced above the arc segment of its boundary with elastic stiffeners of a small thickness. The solution of the above problems is reduced to that of singular integral-differential equations under specified boundary conditions. Efficient solution for these equations are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муки Р., Стернберг Э.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. Прикл. мех., Тр. америк. о-ва инж.-мех., т. 35, № 4, 1968, 124—135.
2. *Arutunian N. K.* and *Mkhitarian S. M.* Some contact problems for a semiplane with elastic stiffeners. Freads in elasticity and thermoelasticity. Witold Novacki Anniversary Volume. Wolters-Nordorff Publ., 1971, 3—20.
3. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, № 2, 1968, 632—646.
4. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, № 5, 1969, 813—843.
5. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 25, № 2, 1972, 15—35.
6. *Шагинян С. С.* Передача нагрузок от кольцевой накладки к плоскости с круговым отверстием. МТТ, № 5, 1972, 178—183.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука", М., 1966.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд-во „Наука", М., 1968.
9. *Ворович И. И.* О некоторых смешанных задачах теории упругости для полосы. Сб. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. Изд-во „Наука", М., 1972.
10. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 35, № 1, 1971, 172—178.
11. *Уиттекер Э., Ватсон Г.* Курс современного анализа, т. 3. Физматгиз, М., 1963.
12. *Канторович Л., Крылов В.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ СС

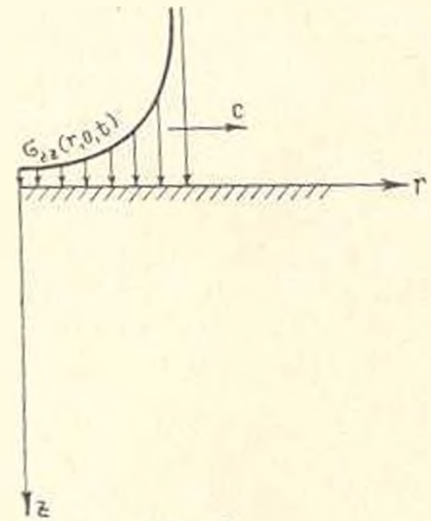
Մեխանիկա XXVII, № 1, 1974 Механ

С. Г. СААКЯН

ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВЫЗВАННЫЕ БЕГУЩЕЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКО

§ 1. Постановка задачи и ее решение в образах

Пусть давление за фронтом ударной волны, распространяющейся постоянной скоростью c по поверхности однородного, изотропного упруго полупространства, имеет вид (фиг. 1)



Фиг. 1.

$$p(r,t) = \frac{P_0 H(ct - r)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \qquad (1.$$

где H—функция Хевисайда, P_0—постоянная.

При отсутствии объемных сил поведение полупространства описывае ся уравнениями

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_d^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (1.$$

где скалярный и векторный потенциалы φ и ψ связаны с вектором переме щения $\bar{u} = u_r \bar{r} + u_z \bar{k}$

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \tag{1.3}$$

$c_d^2 = (\lambda + 2\mu)/\gamma_0$, $c_s^2 = \mu/\gamma_0$ — скорости распространения продольной и поперечной волн, λ, μ — постоянные Ламе, γ_0 — плотность среды.

Граничные условия, выражающие отсутствие касательных напряжений и равенство нормальных напряжений заданному давлению, следующие:

$$\sigma_{zz}(r, 0, t) = -p(r, t), \quad \sigma_{rz}(r, 0, t) = 0 \tag{1.4}$$

Начальные условия для φ и ψ имеют вид

$$\varphi(r, z, 0) = \frac{\partial \varphi(r, z, 0)}{\partial t} = \psi(r, z, 0) = \frac{\partial \psi(r, z, 0)}{\partial t} = 0 \tag{1.5}$$

Решение уравнений (1.1), ограниченное в бесконечности и удовлетворяющее начальным (1.5) и граничным (1.4) условиям, получим, если применим преобразование Лапласа, а затем к полученным уравнениям — преобразование Ганкеля. Обращая преобразование Ганкеля полученного решения и используя соотношение (1.3) между потенциалами и перемещениями, получим перемещение в преобразовании Лапласа

$$\bar{u}_j = \bar{u}_{jd} + \bar{u}_{js} \quad (j = r, z) \tag{1.6}$$

где

$$\frac{\mu c}{P_0} \bar{u}_{j\alpha} = \int_0^\infty N_{j\alpha}(k, p)\, e^{-zn_\alpha} dk \quad (\alpha = d, s) \tag{1.7}$$

и

$$N_{rd} = k^2 n_0 G J_1(kr), \quad N_{rs} = -2k^2 n_d n_s G J_1(kr)$$

$$N_{zd} = k n_0 n_d G J_0(kr), \quad N_{zs} = -2k^3 n_d G J_0(kr) \tag{1.8}$$

$$n_0 = 2k^2 + p^2/c_s^2, \quad n_d^2 = k^2 + p^2/c_d^2, \quad n_s^2 = k^2 + p^2/c_s^2$$

$$n_c = k^2 + p^2/c^2, \quad L = n_0^2 - 4k^2 n_d n_s, \quad G = 1/n_c L. \tag{1.9}$$

В формулах $\bar{u}_{j\alpha}$ представляет изображение Лапласа оригинала $u_{j\alpha}$; p, k — параметры преобразований Лапласа и Ганкеля. Ветви радикалов n_d и n_s фиксированы условиями $\arg n_d = 0$, $\arg n_s = 0$ при $k > 0$, $p > 0$.

Преобразования Лапласа и Ганкеля приложенной нагрузки вычислялись по формулам [1].

$$\int_0^\infty \frac{P_0 H(ct - r)\, e^{-pt}\, dt}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} = \frac{P_0}{c} K_0\left(\frac{rp}{c}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{P_0}{c} K_0\left(\frac{rp}{c}\right) J_0(kr)\, r\, dr = \frac{P_0}{c n_c} \tag{1.10}$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя третьего рода.

§ 2. Переход к оригиналам

Подставим в формулы (1.7) вместо бесселевых функций J_0 и J_1 их интегральное представление Пуассона

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikr\cos x}\,dx, \qquad J_1(kr) = -\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_0(kr) \tag{2.1}$$

и введем обозначения $p\omega = k\cos x$, $pq = k\sin x$.

Для изображений радиального и вертикального компонентов скорости получаем

$$\bar v_j = \bar v_{jd} + \bar v_{js} \quad (j = r,\ z) \tag{2.2}$$

где

$$\frac{\pi c\mu}{P_0}\bar v_{j\alpha} = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{j\alpha}(\omega,\ q)\exp[-p(i\omega r + m_\alpha z)]\,d\omega dq \quad (\alpha = d,\ s) \tag{2.3}$$

и

$$M_{rd}(\omega,\ q) = i\omega m_0 g, \quad M_{rs}(\omega,\ q) = -2i\omega m_d m_s g$$

$$M_{zd}(\omega,\ q) = m_0 m_d g, \quad M_{zs}(\omega,\ q) = -2(\omega^2 + q^2)m_d g \tag{2.4}$$

$$m_0 = 2\omega^2 + 2q^2 + 1/c_s^2, \quad m_d^2 = \omega^2 + q^2 + 1/c_d^2, \quad m_s^2 = \omega^2 + q^2 + 1/c_s^2$$

$$m_c = \omega^2 + q^2 + 1/c^2, \quad R = m_0^2 - 4(\omega^2 + q^2)m_d m_s, \quad g = 1/m_c R \tag{2.5}$$

При обращении $\bar v_r$ и $\bar v_z$ имеются три случая в зависимости от значения отношений скорости распространения фронта нагрузки ударной волны к скоростям упругих объемных волн. Эти случаи таковы: сверхзвуковой ($c > c_d$), трансзвуковой ($c_s < c < c_d$) и дозвуковой ($c < c_s$).

Продольные волны

а) фронт нагрузки распространяется со сверхзвуковой скоростью.

Из (2.3) имеем

$$\frac{\pi c\mu}{P_0}\bar v_{rd} = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{rd}(\omega,\ q)\exp[-p(i\omega r + m_d z)]\,d\omega dq \tag{2.6}$$

На комплексной плоскости ω подинтегральная функция $M_{rd}(\omega, q)$ имеет особенности: точки ветвления при $\omega = \Omega_d^{\pm}$ и $\omega = \Omega_s^{\pm}$ и простые полюсы при $\omega = \Omega_c^{\pm}$ и $\omega = \Omega_R^{\pm}$, где

$$\Omega_d^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1/c_d^2}, \quad \Omega_s^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1/c_s^2}$$

$$\Omega_c^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1/c^2}, \quad \Omega_R^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1/c_R^2} \tag{2.7}$$

Полюсы при $\omega = \Omega_R$ соответствуют нулям функции Рэлея $R(\omega^2 + q^2)$, которая имеет простые нули при $\omega^2 + q^2 = -\frac{1}{c_R^2}$, где $c_R < c_s$ — скорость поверхностных волн Рэлея.

Чтобы перевести $\overline{v}_d$ в преобразование Лапласа известной функции, рассмотрим в плоскости ω контур $\omega = \omega_d^{\pm}(q)$, который получается при разрешении соотношения

$$t = i\omega r + z\sqrt{\omega^2 + q^2 + 1/c_d^2} \tag{2.8}$$

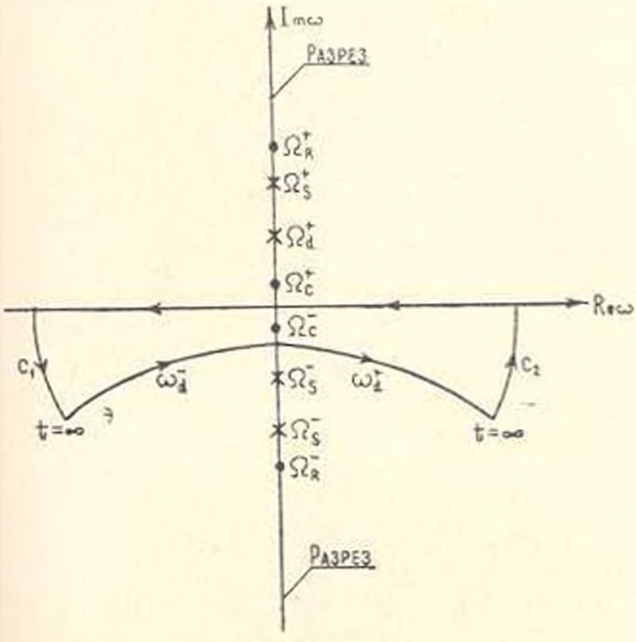
относительно ω, то есть

$$\omega = \omega_d^{\mp}(q) = \left(-itr \pm z\sqrt{t^2 - t_{qd}^2}\right)/\rho^2 \tag{2.9}$$

где

$$t_{qd} = \rho\sqrt{q^2 + 1/c_d^2}\,, \qquad \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \tag{2.10}$$

Уравнение (2.9) определяет в параметрической форме одну ветвь гиперболы с вершиной в точке $\omega = -\frac{ir}{\rho}\sqrt{q^2 + 1/c_d^2}$ и асимптотами $\arg\omega = \pm r/z$, когда параметр t изменяется от t_{qd} до бесконечности. Эта гипербола не пересекает разрезы в плоскости ω, так как $r/\rho < 1$.



Фиг. 2.

Образуем замкнутый контур $C = (\mathrm{Im}\,\omega = 0) + C_1 + \omega_d^- + \omega_d^+ + C_2$, где C_1 и C_2 — дуги окружности с центром в начале координат и с большим радиусом R_1 (фиг. 2). В зависимости от того, выполняется или нет условие

$$-t_{ud}r/\beta^2 < -\sqrt{q^2+1/c^2} \tag{2.11}$$

то есть лежит внутри или вне контура C полюс $\omega = \Omega_c^-$, все полупространство разделим на две области.

Область I: $r/z > l/\sqrt{1-l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит внутри C для $q \in [0, Q_{dc})$ и лежит вне C для $q \in (Q_{dc}, \infty)$, где $Q_{dc} = \frac{1}{c_d}\sqrt{(1-l^2)\frac{r^2}{z^2} - l^2}$, $l = \frac{c_d}{c}$. Уравнение $r/z = l/\sqrt{1-l^2}$ определяет поверхность конуса, ось которого совпадает с положительной осью z.

Область II: $r/z < l/\sqrt{1-l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит вне контура C для $q \in [0, \infty)$.

Область I. Рассмотрим $\bar{v}_d$ для контура C и применим теорию вычетов Коши. В пределе, когда $R_1 \to \infty$, интегралы вдоль C_1 и C_2 по лемме Жордана стремятся к нулю, и мы имеем

$$\frac{\pi c \mu}{P_0} = \int_0^\infty \int_{t_{qd}}^\infty F_1(\omega_d, q)\, e^{-pt}\, dt dq +$$

$$+\Gamma_1 \int_0^{Q_{dc}} \exp\left[-p\left(r\sqrt{q^2+1/c^2} + z\sqrt{\frac{1}{c_d^2} - \frac{1}{c^2}}\right)\right] dq \tag{2.12}$$

где

$$F_1(\omega, q) = -2\,\mathrm{Re}\, M_d(\omega, q)\frac{d\omega}{dt}, \qquad \omega_d = \omega_d(q)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\pi c_d^2(\gamma^2 - 2l^2)}{(\gamma^2 - 2l^2)^2 + 4l^2\sqrt{1-l^2}\sqrt{\gamma^2 - l^2}}, \qquad \gamma = \frac{c_d}{c_s} \tag{2.13}$$

Изменим порядок интегрирования в двухкратном интеграле (2.12) и сделаем замену $t = r\sqrt{q^2 + \frac{1}{c^2}} + z\sqrt{\frac{1}{c_d^2} - \frac{1}{c^2}}$ во втором интеграле.

Получим

$$\frac{\pi c \mu}{P_0} = \int_{t_d}^\infty \int_0^{q_d} F_1(\omega_d, q)\, e^{-pt}\, dq dt - \Gamma_1 \int_{t_{dc}}^{t_{dc}^*} \frac{[c(t - t_{dc}) + r]\, e^{-pt}\, dt}{r\sqrt{[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2}} \tag{2.14}$$

где

$$t_d = \rho/c_d, \qquad t_{dc} = \left(r + z\sqrt{\frac{c^2}{c_d^2} - 1}\right)\Big/c$$

$$t_{dc}^* = \rho^2\sqrt{1-l^2}/c_d z, \qquad q_d = \sqrt{t^2 - t_d^2}/\rho \tag{2.15}$$

После обращения $\bar{v}_{rd}$ имеем

$$\frac{\pi c\mu}{P_0} v_{rd} = H(t - t_d)\,\text{v. p.}\int\limits_0^{q_d} F_1(\omega_d, q)\,dq +$$

$$+ H(t - t_{dc})\,H(t^*_{dc} - t)\,\frac{\Gamma_1[c(t - t_{dc}) - r]}{r\sqrt{[c(t - t_{dc}) - r]^2 - r^2}} \qquad (2.16)$$

Таким образом, при сверхзвуковом распространении ударной волны v_{rd} состоит из двух слагаемых, одно из которых представляет скорость в области внутри фронта полусферической волны при $t = t_d$ с центром в точке начального положения нагрузки. Второе представляет скорость в области позади фронта конической волны при $t = t_{dc}$, следующей за фронтом распространяющейся по границе ударной волны. Уравнение $t = t^*_d$ для фиксированного t определяет сферическую поверхность с центром $r = 0$, $z = -c_d t/2\sqrt{1 - l^2}$ и радиусом $c_d t/2\sqrt{1 - l^2}$. Эта поверхность не является фронтом волны потому, что она не является ни характеристической и ни огибающей характеристических поверхностей волнового уравнения (1.2) для φ. Поэтому на этой поверхности решение не имеет разрыва непрерывности.

Интеграл в v_{rd} является несобственным для $t = t^*_{dc}$, так как множитель $\omega_d^2 + q^2 + 1/c^2$ в знаменателе подынтегральной функции равен нулю при $q = q_d$. Поскольку алгебраический член в v_{rd} имеет конечный разрыв непрерывности при $t = t^*_{dc}$, а v_{rd} непрерывна при $t = t^*_{dc}$, то это означает, что первый член при $t = t^*_{dc}$ имеет конечный разрыв, равный разрыву алгебраического члена с противоположным знаком.

Область II. Для этой области полюс $\omega = \Omega_r^-$ на плоскости ω лежит вне контура C, поэтому вклад от вычета в полюсе $\omega = \Omega_r^-$ в формуле (2.16) отсутствует.

Полученные результаты для областей I и II можно объединить в одну формулу

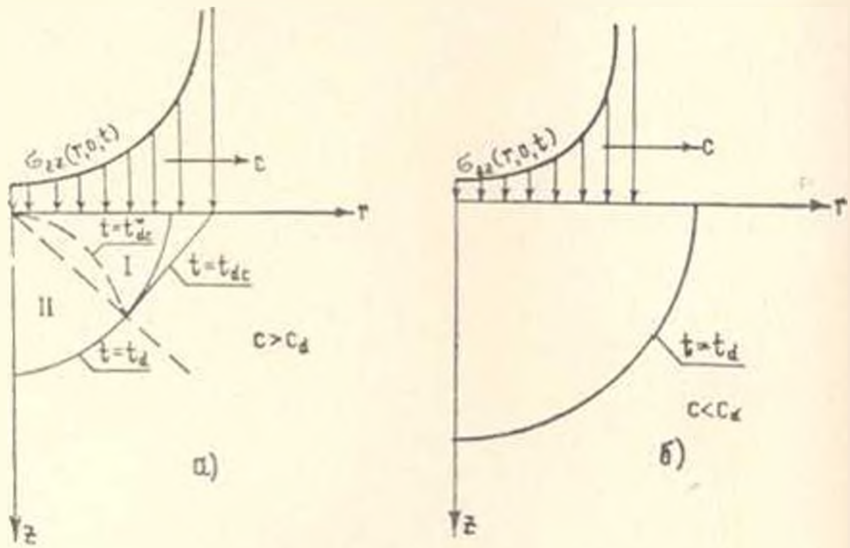
$$\frac{\pi c\mu}{P_0} v_{rd} = H(t - t_d)\,\text{v. p.}\int\limits_0^{q_d} F_1(\omega_d, q)\,dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{1 - l^2}}\right) H(t - t_{dc})\,H(t^*_{dc} - t)\,\frac{\Gamma_1[c(t - t_{dc}) + r]}{r\sqrt{[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2}}$$

$$(2.17)$$

которая справедлива для $r > 0$, $z > 0$. На фиг. 3а показана волновая картина для v_{rd}, фронты волн $t = t_d$ и $t = t_{dc}$, полусферическая поверхность $t = t^*_{dc}$ и области I и II;

б) фронт нагрузки распространяется с трансзвуковой или дозвуковой скоростями.



Фиг. 3

Для $c < c_d$ (независимо от того, какое из условий $c_s < c < c_d$ или $c < c_s$ имеет место) полюс $\omega = \Omega^-$ на плоскости ω всегда лежит вне контура C (фиг. 4). Следовательно, обращение v_{rd} для области $r > 0$, $z > 0$ производится точно так же, как и для области II, поэтому результат имеет вид

$$\frac{\pi c\mu}{P_0} v_{rd} = H(t - t_d) \int\limits_0^{q_d} F_2(\omega_d, q)\, dq \tag{2.18}$$

Как видно из (2.18), для трансзвукой и дозвуковой скоростей распространения фронта нагрузки конические волны в v_{rd} не появляются. Волновая картина для этих случаев показана на фиг. 3б.

Обращение $\bar{v}_{zd}$ находится точно так же, как и обращение $\bar{v}_{rd}$. Не останавливаясь на подробностях обращения $\bar{v}_{zd}$, приведем окончательные результаты.

Имеем

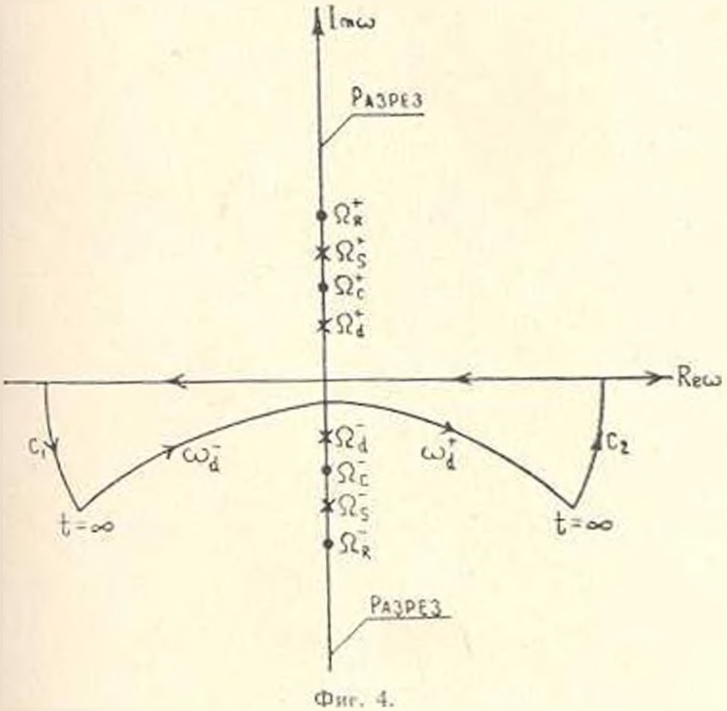
$$\frac{\pi c\mu v_{zd}}{P_0} = H(t - t_d)\, \text{v. p.} \int\limits_0^{q_d} F_3(\omega_d, q)\, dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{1 - l^2}}\right) H(t - t_{dc})\, H(t_{dc}^* - t) \frac{\Gamma_2}{\sqrt{[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2}} \tag{2.19}$$

для сверхзвуковой скорости распространения фронта нагрузки, и

$$\frac{\pi c \rho \bar{v}_{zd}}{P_0} = H(t - t_d) \int_0^{q_d} F_2(\omega_d, q)\, dq \tag{2.20}$$

для трансзвуковой и дозвуковой скоростей распространения фронта нагрузки.



Фиг. 4.

В формуле (2.19) приняты обозначения:

$$F_2(\omega, q) = 2\,\mathrm{Re}\, M_{zd}(\omega, q) \frac{d\omega}{dt}, \qquad \Gamma_2 = \Gamma_1 \sqrt{1 - t^2}/t \tag{2.21}$$

Поперечные волны

а) Фронт нагрузки распространяется со сверхзвуковой скоростью. Обращение выражения

$$\frac{\pi c \rho \bar{v}_{rs}}{P_0} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} M_{rs}(\omega, q) \exp[-p(i\omega r + m_s z)]\, d\omega\, dq \tag{2.22}$$

производится так же, как и для $\bar{v}_{rd}$, однако процедура обращения и результат сложнее, чем в случае $\bar{v}_{rd}$. На плоскости ω уравнению

$$t = i\omega r \pm z\sqrt{\omega^2 + q^2 + 1/c_s^2} \tag{2.23}$$

соответствует ветвь гиперболы

$$\omega = \omega_s^{\pm}(q) = (-itr \pm z\sqrt{t^2 - t_{qs}^2})/\rho^2, \quad t \geq t_{qs} \tag{2.24}$$

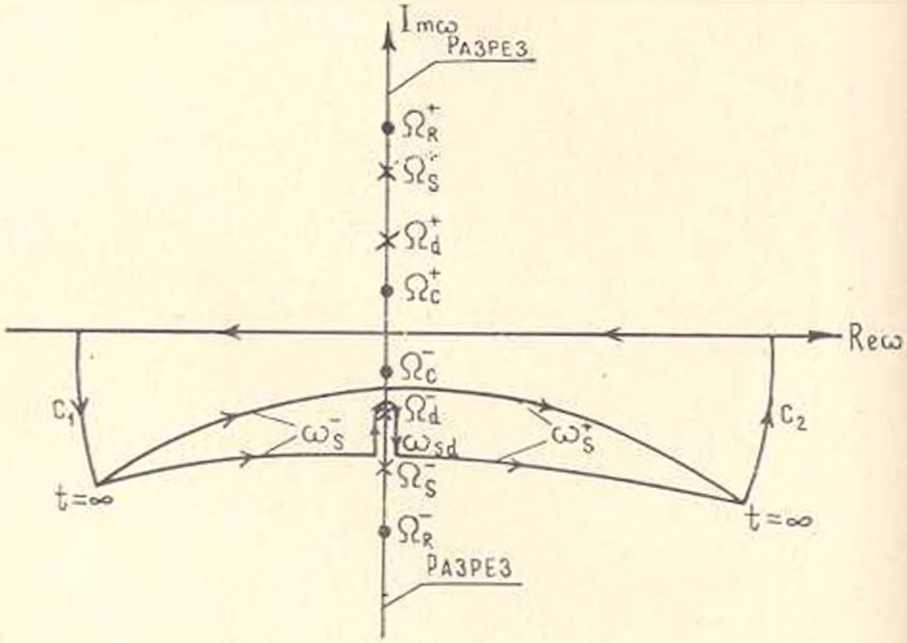
где

$$t_{qs} = \rho\sqrt{q^2 + 1/c_s^2} \tag{2.25}$$

Эта гипербола имеет вершину на плоскости ω в точке $\omega = -\dfrac{ir}{\rho}\sqrt{q^2+1/c_s^2}$ и асимптоты $\arg\omega = \pm r/z$. В зависимости от того, выполняется или нет условие

$$-\frac{rt_{qs}}{\rho^2} > -\sqrt{q^2+1/c_s^2} \tag{2.26}$$

контур C имеет на плоскости ω две возможные конфигурации, как это показано на фиг. 5. Таким образом, если $r/z < 1/\sqrt{\gamma^2-1}$ и $q \in [0, \infty)$,



Фиг. 5.

имеем контур $C = (\operatorname{Im}\omega = 0) + C_1 + \omega_s^- + \omega_s^+ + C_2$. Но если $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2-1}$ и $q \in [0, Q_{sd})$, вершина гиперболы ω_s лежит на разрезе между точками ветвления $\omega = \Omega_d^-$, $\omega = \Omega_s^-$, и мы имеем контур $C = (\operatorname{Im}\omega = 0) + C_1 + \omega_s^- + \omega_{sd} + \omega_s^+ + C_2$, где

$$\omega_{sd} = i(-rt + z\sqrt{t_{qs}^2 - t^2})/\rho^2$$

$$t_{qsd} < t < t_{qs}, \quad t_{qsd} = r\sqrt{q^2 + \frac{1}{c_d^2}} + z\sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_d^2}} \tag{2.27}$$

Полюс $\omega = \Omega_c^-$ может лежать как внутри, так и вне контура C. В зависимости от положений полюса $\omega = \Omega_c^-$ и вершины гиперболы ω_s^- все полупространство разделим на три области, которым соответствуют разные случаи обращения $\bar{v}_{rs}$.

Область I: $r/z > 1/\sqrt{\gamma_s^2-1}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит внутри C для $q \in [0, Q_{sc})$ и лежит вне C для $q \in (Q_{sc}, \infty)$, где $Q_{sc} = \frac{1}{c_s}\sqrt{(\gamma_s^2-l^2)\frac{r^2}{z^2}-l^2}$. Вершина гиперболы ω_s^- лежит на разрезе для $q \in [0, Q_{sd})$ и не лежит на разрезе для $q \in (Q_{sd}, \infty)$, где $Q_{sd} = \frac{1}{c_d}\sqrt{(\gamma_s^2-1)\frac{r^2}{z^2}-1}$.

Область II: $l/\sqrt{\gamma_s^2-l^2} < r/z < 1/\sqrt{\gamma_s^2-1}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит внутри C для $q \in [0, Q_{sc})$ и лежит вне C для $q \in (Q_{sc}, \infty)$. Вершина не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$.

Область III: $r/z < l/\sqrt{\gamma_s^2-l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит вне C для $q \in [0, \infty)$. Вершина не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$.

Область I. Выражение $\bar{v}_{rs}$ в виде интеграла по контуру C в плоскости ω позволяет применить теорию вычетов Коши и привести это выражение к виду

$$\frac{\pi c \mu \bar{v}_{rs}}{P_0} = \int_0^\infty \int_{t_{cs}}^\infty F_s(\omega_s, q)\, e^{-pt}\, dt dq + \int_0^{Q_{sd}} \int_{t_{csd}}^{t_{ys}} F_s(\omega_{sd}, q)\, e^{-pt} dt dq +$$

$$+ \Gamma_s \int_0^{Q_{sc}} \exp\left[-p\left(r\sqrt{q^2+1/c^2} + z\sqrt{\frac{1}{c_s^2}-\frac{1}{c^2}}\right)\right] dq \qquad (2.28)$$

где

$$F_s(\omega, q) = 2\,\mathrm{Re}\, M_{rs}(\omega, q)\,\frac{d\omega}{dt}, \quad \Gamma_s = -\frac{2\Gamma_c l}{\sqrt{\gamma_s^2-l^2}} \qquad (2.29)$$

В формуле (2.28) первое слагаемое представляет собой вклад контура ω_s^-, где $\omega_s = \omega_s^-(q)$, второе — контура ω_{sd} и, наконец, последнее — вклад вычета в полюсе $\omega = \Omega_c^-$. В двукратных интегралах изменим порядок интегрирования, а в одинарном интеграле сделаем замену $t = r\sqrt{q^2+\frac{1}{c^2}} - z\sqrt{\frac{1}{c_s^2}-\frac{1}{c_d^2}}$, после чего обращение преобразования Лапласа дает

$$\frac{\pi c \mu v_{rs}}{P_0} = H(t-t_s)\,\text{v. p.}\int_0^{q_s} F_s(\omega_s, q)\, dq +$$

$$+ H(t - t_{sd})\, H(t^*_{sd} - t) \int\limits_{q^*_{sd}}^{q_{sd}} F_3(\omega_{sd},\ q)\, dq +$$

$$+ H(t - t_{sc})\, H(t^*_{sc} - t) \frac{\Gamma_3}{\sqrt{[c\,(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2}} \tag{2.30}$$

где

$$t_s = \rho/c_s, \quad t_{sd} = (r + z\sqrt{\gamma^2 - 1})/c_d, \quad t_{sc} = \left(r + z\sqrt{\frac{c^2}{c_s^2} - 1}\,\right)\Big/ c$$

$$t^*_{sd} = \rho^2\sqrt{\gamma^2 - 1}/c_d z, \quad t^*_{sc} = \rho^2\sqrt{\frac{c^2}{c_s^2} - 1}\Big/ cz, \quad q_s = \sqrt{t^2 - t_s^2}/\rho \tag{2.31}$$

$$q_{sd} = \frac{1}{c_d}\sqrt{\left[\frac{c_d\,(t - t_{sd})}{r} + 1\right]^2 - 1}, \qquad q^*_{sd} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_s \\ q_s & \text{при } t > t_s \end{cases}$$

Область II. С учетом того, что вершина гиперболы $\omega_s^{\mp}$ не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$, то есть при контурном интегрировании вклад контура ω_{sd} отсутствует, получаем

$$\frac{\pi c \rho v_{rz}}{P_0} = H(t - t_s)\ \text{v. p.} \int\limits_0^{q_s} F_3(\omega_s,\ q)\, dq +$$

$$+ H(t - t_{sc})\, H(t^*_{sc} - t) \frac{\Gamma_3}{\sqrt{[c\,(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2}} \tag{2.32}$$

Область III. Так как и полюс $\omega = \Omega^{\mp}$, и вершина гиперболы $\omega_s^{\mp}$ лежат вне C, то при контурном интегрировании остается лишь вклад контура $\omega_s^{\mp}$, то есть первый член в (2.32).

Сравнивая полученные результаты для трех областей полупространства, легко заметить, что их можно представить следующим единым выражением:

$$\frac{\pi c \rho v_{rz}}{P_0} = H(t - t_s)\ \text{v. p.} \int\limits_0^{q_s} F_3(\omega_s,\ q)\, dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right) H(t - t_{sd})\, H(t^*_{sd} - t) \int\limits_{q^*_{sd}}^{q_{sd}} F_3(\omega_{sd},\ q)\, dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{\gamma^2 - l^2}}\right) H(t - t_{sc})\, H(t^*_{sc} - t) \frac{\Gamma_3}{\sqrt{[c\,(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2}} \tag{2.33}$$

Первый член в v_{rs} представляет собой скорость за фронтом поперечной полусферической волны при $t = t_s$. Второй член — скорость за фронтом так называемой головной волны или волны Шмидта. Фронтом этой волны является поверхность усеченного конуса $t = t_{sd}$ при $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$, которая распространяется впереди $t = t_{sd}$, и, таким образом, оказывает действие как впереди, так и позади фронта поперечной волны при $t = t_s$ для $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$. Для фиксированного момента времени t уравнение $t = t^*_{sd}$ определяет поверхность сферы с центром $r = 0$, $z = c_d t/2\sqrt{\gamma^2 - 1}$ и радиусом $c_d t/2\sqrt{\gamma^2 - 1}$. Поверхность $t = t^*_{sd}$ аналогична поверхности $t = t^*_{dr}$ и не является фронтом волны, так как она не является ни характеристической, ни огибающей характеристических поверхностей волнового уравнения (1.2) для ψ. При приближении к поверхности $t = t^*_{sd}$ решение является непрерывным, в чем легко убедиться, если заметим, что второй интеграл стремится к нулю при $t \to t^*_{sd}$.

Последний член в v_{rs} представляет собой коническую волну, следующую за фронтом нагрузки. Он является вкладом вычета подынтегральной функции в полюсе $\omega = \Omega_c^-$. Фронтом этой волны является поверхность усеченного конуса $t = t_{sc}$ при $r/z > l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$ и она распространяется впереди $t = t^*_{sc}$. Для фиксированного момента времени уравнение определяет поверхность сферы с центром $r = 0$, $z = ct/2\sqrt{\dfrac{c^2}{c_s^2} - 1}$ и радиусом $ct/2\sqrt{\dfrac{c^2}{c_s^2} - 1}$. Поверхность $t = t^*_{sc}$ не является фронтом волны по той же причине, что и для $t = t^*_{sd}$.

На фиг. 6а показана волновая картина (вместе с фронтами продольных волн), соответствующая v_{rs}.

б) Фронт нагрузки распространяется с трансзвуковой скоростью.

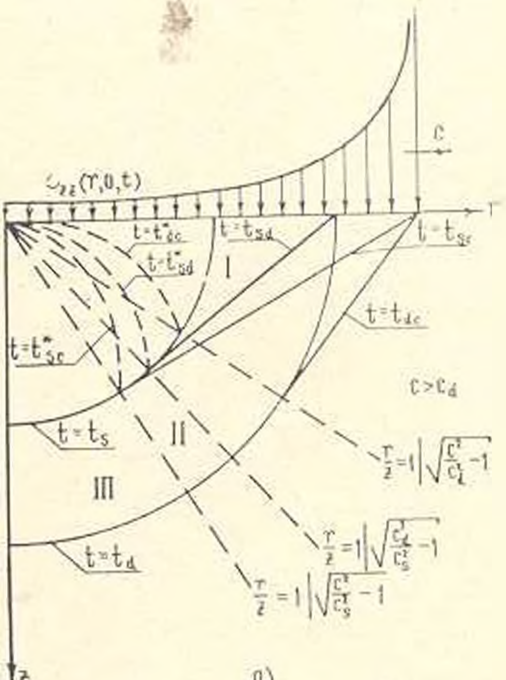
Расположение особенностей подынтегральной функции в плоскости ω для $c_s < c < c_d$ показано на фиг. 7. В зависимости от положения вершины гиперболы ω_s и полюса $\omega = \Omega_c^-$ имеем три случая обращения v_{rs}, каждый из которых соответствует некоторой области полупространства.

Область I: $r/z > l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит на контуре ω_{sd} для $q \in [0, Q_{sc})$ и не лежит для $q \in (Q_{sc}, \infty)$. Вершина гиперболы ω^*_{s} лежит на разрезе для $q \in [0, Q_{sd})$ и не лежит для $q \in (Q_{sd}, \infty)$.

Область II: $1/\sqrt{\gamma^2 - 1} < r/z < l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ не лежит на контуре ω_{sd} для $q \in [0, \infty)$. Вершина лежит на разрезе для $q \in [0, Q_{sd})$ и не лежит для $q \in (Q_{sd}, \infty)$.

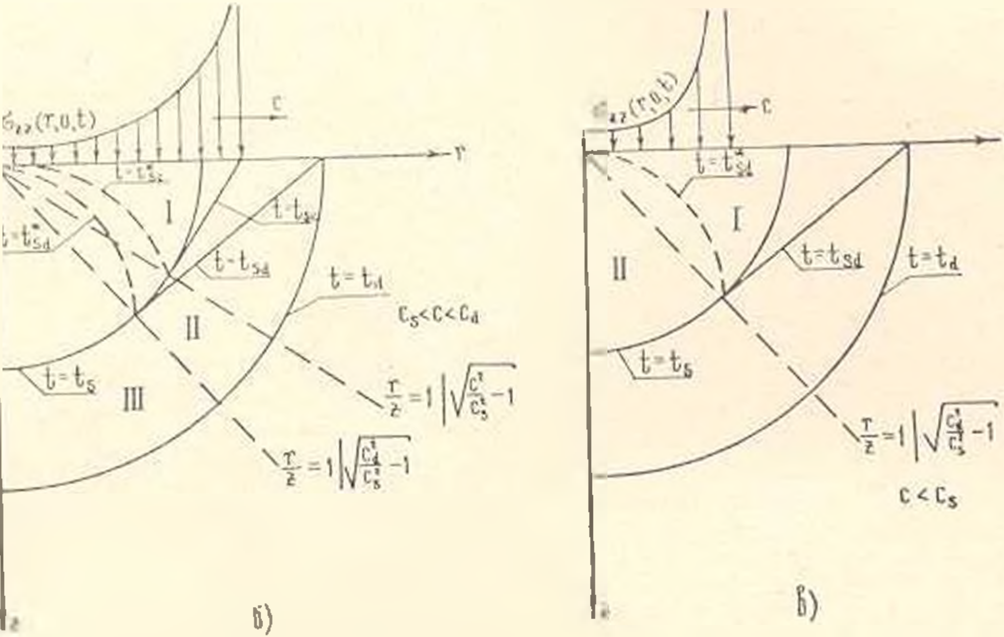
Область III: $r/z < 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$, $z > 0$. Полюс не лежит на ω_{sd} для $q \in [0, \infty)$. Вершина не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$.

В каждой из этих областей v_{rs} обращается для $c_s < c < c_d$ так же, как и для $c > c_d$, за исключением того, что вклад вычета в полюсе $\omega = \Omega_c^-$ вычисляется путем предельного перехода, когда радиусы



$\sigma_{zz}(r,0,t)$
c
$t=t^*_{dc}$
$t=t_{sd}$
$t=t_{sc}$
$t=t^*_{sd}$
I
$t=t_{dc}$
$t=t^*_{sc}$
$c>c_d$
$t=t_s$
II
III
$\frac{r}{z}=1\Big/\sqrt{\frac{c^2}{c_d^2}-1}$
$\frac{r}{z}=1\Big/\sqrt{\frac{c_d^2}{c_s^2}-1}$
$t=t_d$
$\frac{r}{z}=1\Big/\sqrt{\frac{c^2}{c_s^2}-1}$
r
z

a)


$\sigma_{zz}(r,0,t)$
c
r
$t=t^*_{sd}$
$t=t_{sd}$
$t=t_d$
I
II
III
$t=t_s$
$c_s<c<c_d$
$\frac{r}{z}=1\Big/\sqrt{\frac{c^2}{c_s^2}-1}$
$\frac{r}{z}=1\Big/\sqrt{\frac{c_d^2}{c_s^2}-1}$
б)
$c<c_s$
в)

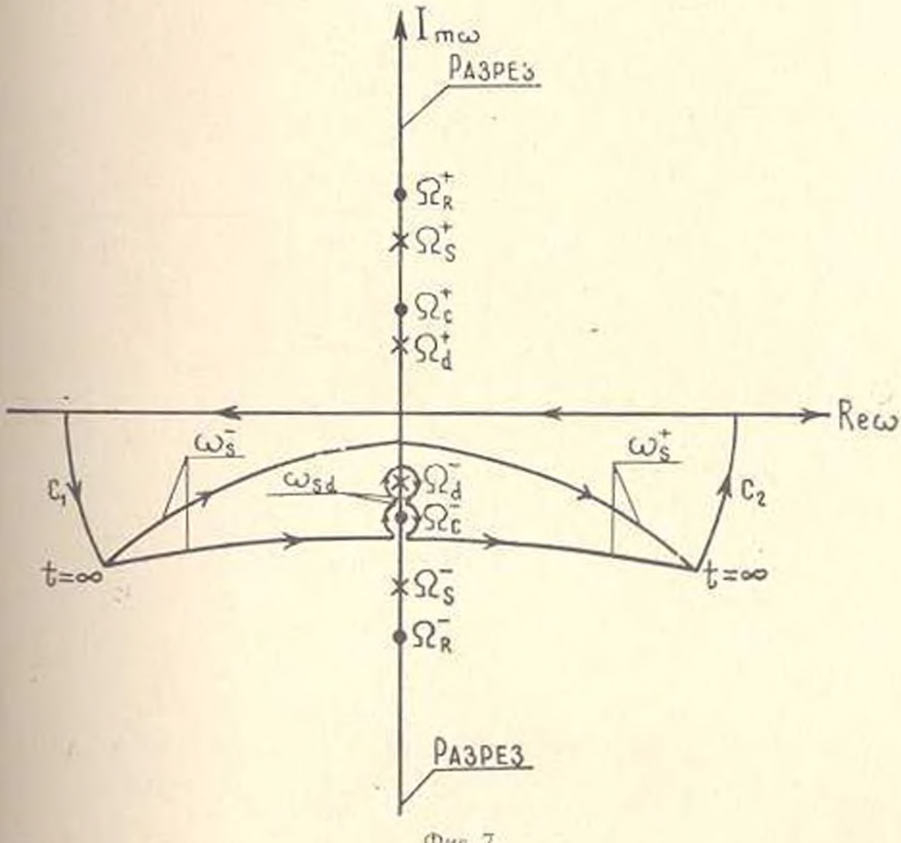
Фиг. 6.

двух достаточно маленьких полуокружностей с центром в точке $\omega = \Omega_c^-$ стремятся к нулю. Обращая $\bar{v}_{rs}$ для каждой области и комбинируя полученные результаты в одну формулу, получаем

$$\frac{\pi c \rho v_{rs}}{P_0} = H(t - t_s)\ \text{v. p.} \int\limits_0^{q_s} F_3(\omega_s, q)\, dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right) H(t - t_{sd})\, H(t_{sd}^* - t)\ \text{v. p.} \int\limits_{q_{sd}^*}^{q_{sd}} F_3(\omega_{sd}, q)\, dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{\gamma^2 - l^2}}\right) H(t - t_{sc})\, H(t_{sc}^* - t)\, \frac{\Gamma_3}{\sqrt{[c\,(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2}} \qquad (2.34)$$



Фиг. 7.

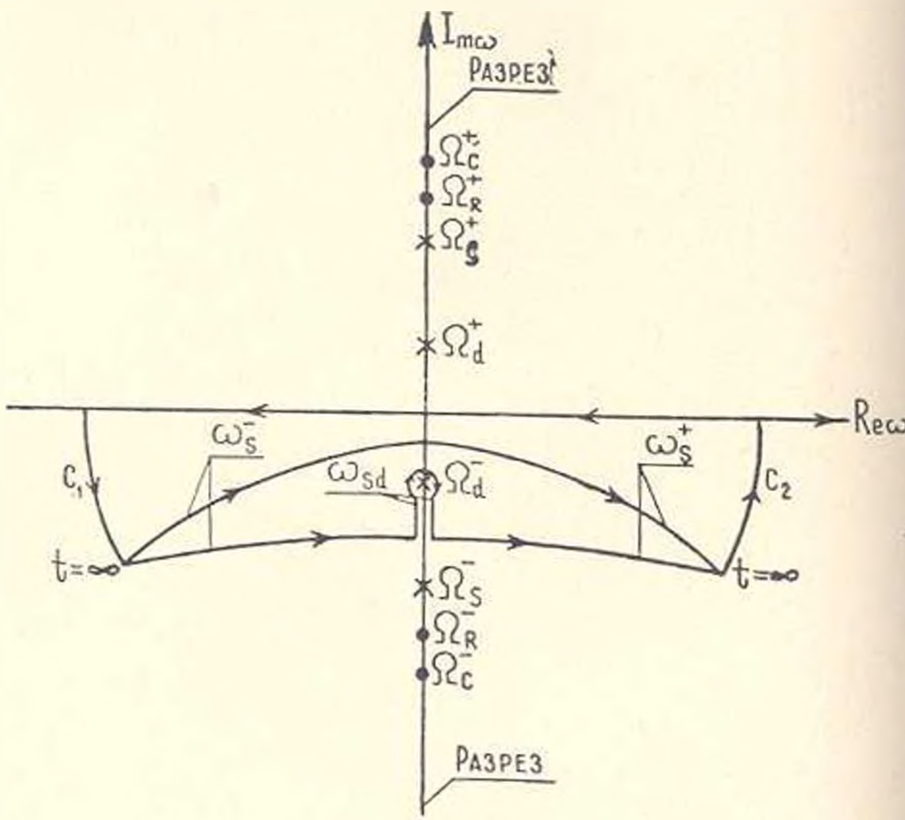
где

$$\Gamma_3 = -\frac{8\pi c_d^2 l^2 (l^2 - 1)(\gamma^2 - l^2)}{(\gamma^2 - 2l^2)^4 + 16\, l^4 (\gamma^2 - l^2)(l^2 - 1)} \qquad (2.35)$$

Второй интеграл в v_{rz} вычисляется в смысле главного значения по Коши, потому что полюс $\omega = \Omega_c^-$ находится между пределами интегрирования. Волновая картина, соответствующая этому случаю, показана на фиг. 6б.

в) Фронт нагрузки распространяется с дозвуковой скоростью.

Для $c < c_s$ полюс $\omega = \Omega_c^-$ в плоскости ω всегда лежит вне контура C (фиг. 8). Следовательно, имеем два случая обращения $\overline{v}_{rz}$, каждый из которых соответствует некоторой области полупространства.



Фиг. 8.

Область I: $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2-1}$, $z > 0$. Вершина гиперболы $\omega_s^\pm$ лежит на разрезе для $q \in [0, Q_{sd})$ и лежит вне разреза для $q \in (Q_{sd}, \infty)$.

Область II: $r/z < 1/\sqrt{\gamma^2-1}$, $z > 0$. Вершина гиперболы $\omega_s^\pm$ не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$.

Обращая $\overline{v}_{rz}$ в этих двух областях и комбинируя их в одну формулу, имеем

$$\frac{\pi \mu r v_{rz}}{P_0} = H(t - t_s) \int_0^{q_s} F_1(\omega_s, q)\, dq +$$

$$+H\left(\frac{r}{z}-\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right)H(t-t_{sd})H(t_{sd}^{*}-t)\int\limits_{q_{sd}^{*}}^{q_{sd}}F_3(\omega_{sd},\ q)\,dq \qquad (2.36)$$

Как и следовало ожидать, волна, следующая за фронтом распространяющейся нагрузки, в случае $c<c_1$ отсутствует.

Обращение выражения для $\bar{v}_{zs}$

$$\frac{\pi c\mu\,\bar{v}_{zs}}{P_0}=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_{zs}(\omega,\ q)\exp[-p(i\omega r+m_s z)]\,d\omega\,dq \qquad (2.37)$$

производится точно так же, как и для $\bar{v}_{rs}$. Приводим окончательные результаты для сверхзвуковой, трансзвуковой и дозвуковой скоростей распространения фронта нагрузки соответственно

$$\frac{\pi c\mu v_{zs}}{P}=H(t-t_s)\ \text{v. p.}\int\limits_{0}^{q_s}F_4(\omega_s,\ q)\,dq+$$

$$+H\left(\frac{r}{z}-\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right)H(t-t_{sd})H(t_{sd}^{*}-t)\int\limits_{q_{sd}^{*}}^{q_{sd}}F_4(\omega_{sd},\ q)\,dq+$$

$$+H\left(\frac{r}{z}-\frac{l}{\sqrt{\gamma^2-l^2}}\right)H(t-t_{sc})H(t_{sc}^{*}-t)\frac{\Gamma_4}{\sqrt{[c(t-t_{sc})-r]^2-r^2}}$$
$$(2.38)$$

$$\frac{\pi c\mu v_{zs}}{P_0}=H(t-t_s)\ \text{v. p.}\int\limits_{0}^{q_s}F_4(\omega_s,\ q)\,dq+$$

$$+H\left(\frac{r}{z}-\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right)H(t-t_{sd})H(t_{sd}^{*}-t)\ \text{v. p.}\int\limits_{q_{sd}^{*}}^{q_{sd}}F_4(\omega_{sd},\ q)\,dq+$$

$$+H\left(\frac{r}{z}-\frac{l}{\sqrt{\gamma^2-l^2}}\right)H(t-t_{sc})H(t_{sc}^{*}-t)\frac{\Gamma_4}{\sqrt{[c(t-t_{sc})+r]^2-r^2}}$$
$$(2.39)$$

$$\frac{\pi c\mu v_{zs}}{P_0}=H(t-t_s)\int\limits_{0}^{q_s}F_4(\omega_s,\ q)\,dq+$$

$$+H\left(\frac{r}{z}-\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right)H(t-t_{sd})H(t_{sd}^{*}-t)\int\limits_{q_{sd}^{*}}^{q_{sd}}F_4(\omega_{sd},\ q)\,dq \qquad (2.40)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$F_4(\omega, q) = 2\,\mathrm{Re}\,M_{zs}(\omega, q)\,\frac{d\omega}{dt}, \quad \Gamma_4 = -\frac{l\Gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 - l^2}}, \quad \Gamma_6 = -\frac{l\Gamma_5}{\sqrt{\gamma_2^2 - l^2}} \tag{2.41}$$

Сумма v_{jd} и v_{js} $(j = r, z)$ определяет радиальную и вертикальную скорости. Имеем

$$\frac{\pi\rho v_r}{P_0} = H(t - t_d)\,\mathrm{v.\,p.}\int_0^{q_d} F_1(\omega_d, q)\,dq + H(t - t_s)\,\mathrm{v.\,p.}\int_0^{q_s} F_3(\omega_s, q)\,dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}}\right) H(t - t_{sd})\,H(t_{sd}^* - t)\,\mathrm{v.\,p.}\int_{q_{sd}^*}^{q_{sd}} F_3(\omega_{sd}, q)\,dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{1 - l^2}}\right) H(t - t_{dc})\,H(t_{dc}^* - t)\,\frac{\Gamma_{c1}[c(t - t_{dc}) + r]}{r\sqrt{[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2}} +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{\gamma_1^2 - l^2}}\right) H(t - t_{sc})\,H(t_{sc}^* - t)\,\frac{\Gamma_{c3}}{\sqrt{[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2}} \tag{2.42}$$

$$\frac{\pi\rho v_z}{P_0} = H(t - t_d)\,\mathrm{v.\,p.}\int_0^{q_d} F_2(\omega_d, q)\,dq - H(t - t_s)\,\mathrm{v.\,p.}\int_0^{q_s} F_1(\omega_s, q)\,dq -$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}}\right) H(t - t_{sd})\,H(t_{sd}^* - t)\,\mathrm{v.\,p.}\int_{q_{sd}^*}^{q_{sd}} F_4(\omega_{sd}, q)\,dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{1 - l^2}}\right) H(t - t_{dc})\,H(t_{dc}^* - t)\,\frac{\Gamma_{c2}}{\sqrt{[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2}} +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{\gamma_1^2 - l^2}}\right) H(t - t_{sc})\,H(t_{sc}^* - t)\,\frac{\Gamma_{c4}}{\sqrt{[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2}} \tag{2.43}$$

$$\Gamma_{ci} = \begin{cases} \Gamma_i & \text{при } c > c_d, \\ 0 & \text{при } c < c_d \end{cases} \qquad \Gamma_{c,i+2} = \begin{cases} \Gamma_{i+2} & \text{при } c > c_d \\ \Gamma_{i+4} & \text{при } c_s < c < c_d \\ 0 & \text{при } c < c_s \end{cases} \quad (i = 1, 2) \tag{2.44}$$

В этих формулах одинарные интегралы представляют волны, исходящие из начального положения нагрузки, а алгебраические члены—волны, следующие за фронтом распространяющейся нагрузки.

Полученное решение справедливо для внутренних точек полупространства, то есть для области $r \geqslant 0$, $z > 0$. Когда $z \to 0$, контуры w_2^- и w_1^- обходят полюс $w = \Omega_R^-$ в плоскости w. Следовательно, при обращении $\bar{v}_{jr}$ и $\bar{v}_{jz}$ $(j = r, z)$ появляется вклад от вычета подинтегральной функции в полюсе $w = \Omega_R^-$, соответствующий поверхностной волне Рэлея.

Обращение формул (2.3) для $z=0$ мы не приводим.

§ 3. Поведение решения в окрестностях фронтов волн

Когда t стремится к характерным временам t_d, t_s, t_{sd} и t_{R}, компоненты скорости становятся неопределенными. Выясним характер этих неопределенностей, то есть поведение решения в окрестностях фронтов волн. Поведение решения вблизи фронтов волн, исходящих из начального положения нагрузки, получим, если исключим время в пределах рассматриваемых интегралов с помощью замены

$$q = \sqrt{q_1^2 + (q_2^2 - q_1^2)\sin^2\alpha} \tag{3.1}$$

где q_1 и q_2— нижний и верхний пределы рассматриваемого интеграла, а потом разложим в ряды подинтегральные выражения при $t \to t_d$, $t \to t_s$ и $t \to t_{sd}$.

Для волн, исходящих из начального положения нагрузки, имеют место разложения

$$\int_0^{q_d} [F_1(\omega_d, q) + F_2(\omega_d, q)]\, dq = \frac{\pi c_d^2 \nu z (r + z) a_1}{2a_0 (a_1^2 + 4r^2 z a_2)} + O(t - t_d)^{1/2} \tag{3.2}$$

когда $t \to t_d$

$$\int_0^{q_s} [F_3(\omega_s, q) + F_4(\omega_s, q)]\, dq = \frac{\pi c_d^2 r \mu z (r - z) a_2}{a_3(\gamma a_4^2 + 4r^2 z a_2)} + O(t - t_s)^{1/2} \tag{3.3}$$

$$\text{для} \quad \frac{r}{z} < \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \qquad \text{когда} \quad t \to t_s$$

$$\int_{q_{sd}^-}^{q_{sd}} [F_3(\omega_{sd}, q) + F_4(\omega_{sd}, q)]\, dq = \frac{8c_d^2 \sqrt[4]{(\gamma^2 - 1)^3}(\sqrt{\gamma^2 - 1} + 1)(t - t_{sd})}{\sqrt{r}\,(\gamma^2 - 2)^2 (l^2 - 1)\, a_5^3} +$$

$$+ O(t - t_{sd})^2 \qquad \text{для } r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}, \quad \text{когда } t \to t_{sd} \tag{3.4}$$

$$\int\limits_{q^*_{sd}}^{q_{sd}} [F_3(\omega_{sd},\ q) - F_4(\omega_{sd},\ q)]\,dq = \frac{4c_d^2 r z^2 \rho a_0 (\gamma_1 a_4^2 - 4r^3 a_2) \ln \left| \frac{t}{t_s} - 1 \right|}{a_3 (\gamma_1^2 a_4^4 + 16 r^4 z^2 a_2^2)} +$$

$$+ \mathrm{O}(1) \qquad \text{для } r/z > 1/\sqrt{\gamma_1^2 - 1}, \text{ когда } t \to t_s \tag{3.5}$$

где

$$a_0 = l^2\rho^2 - r^2, \qquad a_1 = \gamma_1^2\rho^2 - 2r^2, \qquad a_2 = \sqrt{\gamma_1^2\rho^2 - r^2}$$

$$a_3 = l^2\rho^2 - \gamma_1^2 r^2, \qquad a_4 = \rho^2 - 2r^2, \qquad a_5 = \sqrt{r\sqrt{\gamma_1^2 - 1} - z} \tag{3.6}$$

Волны, следующие за фронтом распространяющейся нагрузки, в окрестностях фронтов $t = t_{dc}$ и $t = t_{sc}$ имеют разложения

$$\frac{\Gamma_{c1}[c(t - t_{dc}) + r] + r\Gamma_{c3}}{r\sqrt{[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2}} = \frac{\Gamma_{c1} + \Gamma_{c3}}{\sqrt{2cr}} (t - t_{dc})^{-1/2} + \mathrm{O}(t - t_{dc})^{1/2} \tag{3.7}$$

$$\text{для } r/z > l/\sqrt{1 - l^2}, \text{ когда } t \to t_{dc}$$

$$\frac{\Gamma_{c2} + \Gamma_{c4}}{\sqrt{[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2}} = \frac{\Gamma_{c2} + \Gamma_{c4}}{\sqrt{2cr}} (t - t_{sc})^{-1/2} + \mathrm{O}(t - t_{sc})^{1/2}$$

$$\text{для } r/z > l/\sqrt{\gamma_1^2 - l^2}, \text{ когда } t \to t_{sc}$$

Полученные результаты справедливы для области $r \geq 0$, $z > 0$, за исключением конических поверхностей $lz - r\sqrt{1 - l^2} = 0$, $lz - r\sqrt{\gamma_1^2 - l^2} = 0$, $z - r\sqrt{\gamma_1^2 - 1} = 0$ — следов линий смыкания сферических и конических фронтов волн, так как при этом формулы теряют смысл. Поведение решения вблизи этих особых поверхностей может быть получено из общей теории [2].

Прифронтовые разложения показывают следующее.

1. Скорости v_j ($j = r, z$) терпят конечный разрыв на фронтах полусферических продольных волн при $t = t_d$ и поперечных волн при $t = t_s$ для $r/z < 1/\sqrt{\gamma_1^2 - 1}$. Скорости остаются непрерывными на фронте конической волны при $t = t_{sd}$. Вблизи фронта $t = t_s$ для $r/z > 1/\sqrt{\gamma_1^2 - 1}$ скорости имеют логарифмическую двухстороннюю симметричную особенность.

2. На конических фронтах, исходящих от фронта нагрузки, скорости имеют особенности половинного порядка $(t - t_{dc})^{-1/2}$ и $(t - t_{sc})^{-1/2}$ при $t \to t_{dc}$ и $t \to t_{sc}$, то есть ту же особенность, что и внешняя нагрузка. Физически такие сильные разрывы и особенности в окрестностях фронтов волн нереальны, и, по-видимому, обусловлены тем, что фронт распространяющейся нагрузки сам несет особенность половинного порядка и начинает распространяться из точки. Заметим, что логарифмические особенности в окрестностях фронтов волн были найдены также в работах [3, 4].

3. По мере удаления от точки приложения нагрузки в глубину полупространства компоненты скорости убывают как $r^{-\frac{1}{2}}$ на фронтах конических волн при $t = t_{a}$ и $t = t_{b}$. Поэтому в областях $r/z > l/\sqrt{1-l^2}$, $z>0$ и $r/z > l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$, $z > 0$ существенные эффекты могут оказать эти волны.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 21 VI 1973

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՎԱԶՈՂ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՆՈՐՄԱԼ ԲԵՌԻՑ ԱՌԱՋԱՑՈՂ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է համասեռ, իզոտրոպ կիսատարածությունում առաձգական ալիքների տարածման մասին առանցքասիմետրիկ խնդիրը, երբ ալիքներն առաջանում են մակերևույթի վրա վազող նորմալ բեռից։ Նորմալ բեռն իրենից ներկայացնում է ճնշումը հարվածային ալիքի ճակատի հետևում, որը տարածվում է կիսատարածության մակերևույթի վրա՝ որևէ կետից, հաստատուն արագությամբ։

Խնդիրը լուծելու համար օգտագործվում են Լապլասի և Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխությունները և կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեթոդները։

Բացահայտված են ալիքի ճակատների մոտ լուծման եզակիությունները։ Ստացված են առաձգական միջավայրում ալիքի ճակատների մոտ փնտրվող մեծությունների համար ասիմպտոտիկ գնահատականներ։

WAVES IN AN ELASTIC SEMISPACE INDUCED BY A RUNNING AXISYMMETRIC NORMAL LOAD

S. G. SAHAKIAN

Summary

The axisymmetric problem on propagation of elastic waves in a uniform isotropic semispace induced by a normal load running on its surface is considered. The normal load represents a pressure behind the front of the blast wave propagating at a steady velocity on the surface of the semispace from a certain point.

For solving the problem the Laplas and Hankel integral transformations are applied. The solution to the problem is built on images satisfying initial and boundary conditions. After the conversion of the

Hankel transformation the Laplas transformation cenversion is found by the methods of the theory of functions of a complex variable. An analysis of the formulas derived and their expansions on wave fronts are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Erdelyi A.* ed. Tables of Integral Transforms, vol. 2. McGraw-Hill, N. Y. 1954.
2. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Ж. вычислит. матем. и мат. физики, т. 12, № 6, 1972.
3. *Gakenheimer D. C., Miklowitz J.* Transient Excitation of an Elastic Half Space by a Point Load Traveling on the Surface. Transaction of the ASME, E 36, № 3, 1969.
4. *Gakenheimer D. C.* Response of an Elastic Half Space to Expanding Surface Loads. Transactions of the ASME, E 37, № 1, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 1, 1974 Механика

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, Б. Г. ШЕЛЕСТОВСКИЙ

К ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ О ВДАВЛИВАНИИ НАГРЕТОГО ШТАМПА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Контактные задачи теории упругости служат теоретической базой многих инженерных методов расчета на прочность и жесткость в строительной механике и машиностроении. Задача о вдавливании штампа в упругое полупространство или слой конечной толщины рассматривалась многими авторами. Сравнительно мало работ посвящено исследованию влияния температуры нагретого штампа на распределение контактных напряжений. Впервые осесимметричная задача о вдавливании горячего штампа в изотропное полупространство при условии, что граница полупространства вне штампа поддерживается при нулевой температуре, поставлена и решена в работах [1], [2]. В публикациях [3], [4] рассматривается аналогичная задача для упругого изотропного слоя. В работе [5] исследована задача о вдавливании системы нагретых штампов в полупространство. В статье авторов [6] изучено влияние теплоизоляции границы полупространства вне штампа на распределение напряжений под горячим штампом.

В данной работе исследуется осесимметричная контактная задача термоупругости для трансверсально изотропного полупространства при условии теплоотдачи на границе полупространства вне штампа. Изучается влияние температуры штампа и величины коэффициента теплоотдачи на распределение контактных напряжений.

1. Воспользуемся цилиндрической системой координат r, φ, z, ось oz которой направлена во внутрь полупространства. На поверхности упругой среды расположен штамп с заданной температурой основания, представляющего собой поверхность вращения. На штамп действует сила P, направленная вдоль оси симметрии штампа, под действием которой нагретый штамп вдавливается в полупространство. Предполагаем, что тепловой контакт штампа с полупространством идеальный, силы трения отсутствуют, поверхность полупространства вне штампа свободна от внешней нагрузки. Вне штампа на границе полупространства происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

Требуется определить нормальные контактные напряжения под штампом и величину радиуса площадки контакта.

Граничные условия задачи при $z=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} & w(r,0) = w(r), \\ & T(r,0) = T_0(r), \end{aligned} \quad 0 < r < a; \qquad \sigma_{zz}(r,0) = 0, \qquad r > a$$

$$\sigma_{rz}(r,0) = 0, \quad 0 < r < \infty; \qquad \frac{\partial T(r,0)}{\partial z} = k' T(r,0), \; k' = \frac{\alpha}{\lambda} \tag{1.1}$$

где α и λ — соответственно коэффициенты теплообмена и теплопроводности упругого тела.

В работе [6] получена формула, связывающая нормальные перемещения границы трансверсально изотропного полупространства с нормальными напряжениями и температурой на границе

$$- c_0 w(r, 0) = \int_0^\infty [\bar{\sigma}(\xi) + k_0 \bar{T}(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \tag{1.2}$$

Здесь

$\bar{\sigma}(\xi)$ и $\bar{T}(\xi)$ — трансформанты Ханкеля нулевого порядка нормального напряжения и температуры, $J_0(x)$—функция Бесселя первого рода; c_0, k_0— параметры, зависящие от механических и теплофизических характеристик материала; для изотропного полупространства, например, они принимают значения

$$c_0 = \frac{\mu}{1-\nu}, \qquad k_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \mu$$

где ν—коэффициент Пуассона, μ—постоянная Ляме, α_t — коэффициент линейного температурного расширения.

Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + L^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{1.3}$$

для трансверсально изотропного полупространства ищем в виде

$$T(r, z) = \int_0^\infty E(p) e^{-\frac{pz}{L}} J_0(pr) dp, \qquad E(p) = p\bar{T}(p) \tag{1.4}$$

где L^2—отношение коэффициента теплопроводности тела в направлении оси oz к коэффициенту теплопроводности в плоскостях изотропии.

Удовлетворив температурной части граничных условий (1.1) рассматриваемой задачи, получим парные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty E(\alpha) J_0(\alpha\rho) d\alpha = a T_0(\rho), && 0 < \rho < 1 \\ &\int_0^\infty \frac{\alpha E(\alpha)}{1 - g(\alpha)} J_0(\alpha\rho) d\alpha = 0, && \rho > 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь

$$g(\alpha) = \frac{k}{\alpha + k}, \qquad k = k' a L, \qquad \rho = \frac{r}{a}, \qquad \zeta = \frac{z}{a}$$

Следуя работе [7], решение уравнений (1.5) ищем в виде

$$E(\alpha)=[1-g(\alpha)]\int\limits_0^1 \varphi(t)\cos\alpha t \tag{1.6}$$

где функция $\varphi(t)$ в данном случае удовлетворяет следующему интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода

$$\varphi(x)-\frac{2}{\pi}k\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x\cos\alpha t}{\alpha+k}\,d\alpha=aF(x),\quad 0\leq x\leq 1 \tag{1.7}$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\left[T_0(0)+x\int\limits_0^{\pi/2} T_0'(x\sin\theta)\,d\theta\right]$$

Используя соотношения (1.4)—(1.7) и следуя работе [6], формулу (1.2) представим в виде

$$\int\limits_0^\infty \bar{\sigma}(\alpha)J_0(\alpha\rho)\,d\alpha-k_0a\int\limits_0^1 \varphi(y)\,dy\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha y\,J_0(\alpha\rho)}{\alpha+k}\,d\alpha=$$

$$=-ac_0w(a\rho)+k_0a\ln\frac{1+k}{k}\int\limits_0^1 \varphi(y)\,dy \tag{1.8}$$

Удовлетворив силовой части граничных условий (1.1), приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int\limits_0^\infty \bar{\sigma}(p)J_0(p\rho)\,dp=-ac_0w(a\rho)-k_0a\int\limits_0^1 \varphi(y)\,dy\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha y\,J_0(\alpha\rho)}{\alpha-k}\,d\alpha+$$

$$+k_0a\ln\frac{k+1}{k}\int\limits_0^1 \varphi(y)\,dy,\qquad 0\leqslant\rho<1 \tag{1.9}$$

$$\int\limits_0^\infty p\bar{\sigma}(p)J_0(p\rho)\,dp=0,\qquad \rho>1$$

Рассмотрим случай, когда функцию $w(r)$ $(0\leqslant r<a)$, входящую в правую часть первого соотношения (1.9), можно представить в виде следующего степенного ряда:

$$w(r)=\sum_{i=0}^\infty A_i r^i,\quad \text{где}\ A_i=\text{const}$$

Применяя к соотношениям (1.9) формулу обращения парных интегральных уравнений и теорему обращения интегрального преобразования Ханкеля, найдем выражение для определения контактных напряжений под штампом

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = -\frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+\frac{i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)} a^{i-1} A_i \int_0^{\infty} \xi \left[\cos\xi + \right.$$

$$\left. + \xi \int_0^1 x^{i-1} \sin \xi x dx \right] J_0(\xi r)\, d\xi + \omega(\rho) - \psi(\rho) \quad 0 \leq \rho < 1 \qquad (1.10)$$

где

$$\psi(\rho) = \frac{k_0\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_0(j_n) J_0(j_n\rho)}{J_1(j_n)} \int_0^1 \varphi(y)\, dy \left\{ \left[j_n \cos j_n B(y, j_n) - \right.\right.$$

$$\left. - j_n \sin j_n A(y, j_n) + k^2 \sin j_n A(y, k) - k j_n \cos j_n B(y, k) \right] \frac{1}{k^2 - j_n^2} +$$

$$\left. + \frac{\pi \cos j_n y}{k - j_n} \right\} \qquad (1.11)$$

$$A(y, k) = \sin(1+y)k\, \mathrm{si}(1-y)k + \cos(1-y)k\, \mathrm{ci}(1-y)k +$$

$$+ \sin(1-y)k\, \mathrm{si}(1-y)k - \cos(1-y)k\, \mathrm{ci}(1-y)k$$

$$B(y, k) = \sin(1+y)k\, \mathrm{ci}(1-y)k - \cos(1-y)k\, \mathrm{si}(1-y)k +$$

$$+ \sin(1-y)k\, \mathrm{ci}(1-y)k - \cos(1-y)k\, \mathrm{si}(1-y)k$$

$$\omega(\rho) = \frac{k_0\pi}{a\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \left[2\ln\frac{1+k}{k} - A(y, k) \right] \varphi(y)\, dy \qquad (1.12)$$

Здесь

$N_0(x)$—функция Бесселя второго рода; $\mathrm{si}(x)$ и $\mathrm{ci}(x)$ — интегральный синус и косинус, j_n — положительные нули функции $J_0(x)$.

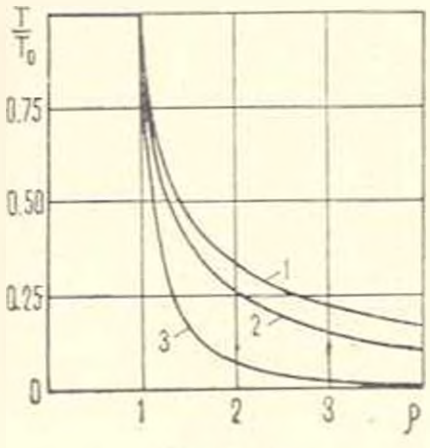
В формулы (1.11) и (1.12) входит функция $\varphi(y)$, определяемая из уравнения (1.7), решение которого находим методом последовательных приближений, который, как доказано при помощи принципа сжатых отображений, сходится, если параметр k удовлетворяет неравенству $0 \leq k < 1.35$. При этом рассмотрим случай $T_0(r) = T_0 = \mathrm{const}$. Для аналитических исследований и расчетов ограничимся вторым приближением, с учетом которого для определения функции $\varphi(x)$ получаем соотношение

$$\tau(x) = a T_0 \left\{ \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}[\pi - B(x, k)] + \frac{4}{\pi^2} k^2 \int_0^\infty \left[(k \sin \alpha\, A(x, \alpha) - \right.\right.$$

$$- k \cos \alpha\, B(x, \alpha) + \alpha \cos \alpha\, B(x, k) - k \sin \alpha\, A(x, k)) \frac{1}{\alpha^2 - k^2} -$$

$$\left.\left. - \frac{\pi \cos \alpha x}{\alpha + k} \right] \frac{\sin \alpha}{\alpha(\alpha + k)} d\alpha \right\} \tag{1.13}$$

Для значений k, не удовлетворяющих указанному неравенству, уравнение (1.17) решалось численным методом, то есть путем сведения к конечной системе алгебраических уравнений. Сначала брали систему «11» уравнений с «11» неизвестными. При этом получаем, в результате решения системы уравнений, значения функции $\varphi(x)$ в точках от 0 до 1 через 0.1. В следующем шаге брали систему «21» уравнения и получали значения $\varphi(x)$ от 0 до 1 через 0.05. Значения функции в точках, подсчитанные в первом шаге, совпадали тремя знаками со значениями функции, полученными при повторном разбиении отрезка. Функция $\varphi(x)$ протабулирована для значений k от 1 до 10 с интервалом в 1. При подстановке $\varphi(x)$ в формулу для температуры и ее определении, граничное условие при $0 \leqslant \rho < 1$, $\zeta = 0$ выполнялось с точностью до 1%.



Фиг. 1.

На фиг. 1 показано распределение температуры на границе полупространства соответственно для $k=0$, 1, 10 (кривые 1, 2 и 3).

2. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие влияние температуры и коэффициента теплоотдачи k на распределение контактных напряжений под штампом.

Пример 1. Цилиндрический круговой штамп с плоским основанием

$$w(r) = b_0, \quad 0 \leqslant r < a; \quad A_0 = b_0, \quad A_n = 0, \quad n \geqslant 1 \tag{2.1}$$

Используя формулу (1.10), найдем

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = -\frac{2c_0 b_0}{\pi a\sqrt{1-\rho^2}} + \omega(\rho) - \psi(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{2.2}$$

Из условия равновесия штампа определим зависимость между его вертикальным смещением, температурой и силой, вдавливающей штамп в полупространство

$$P = -2\pi a^2 \int_0^1 \rho\sigma_{zz}(\rho, 0)\, d\rho = \delta + 4ac_0 b_0 \tag{2.3}$$

где δ зависит от величины параметра k. Подставляя b_0 из (2.3) в соотношение (2.2), будем иметь

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = \frac{\delta - P}{2\pi a^2\sqrt{1-\rho^2}} - \omega(\rho) - \psi(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{2.4}$$

Отметим, что для значений k, равных 0, 1 и 10, δ равно соответственно $1.03\, a^2 k_0 T_0$; $1.82\, a^2 k_0 T_0$ и $3.01\, a^2 k_0 T_0$.

Формула (2.4) верна при условии, что под штампом не возникает растягивающих напряжений, откуда следует условие ее применимости

$$P - \delta - k_3\pi a \int_0^1 \left| 2\ln\frac{1+k}{k} + A(y, k) \right| \varphi(y)\, dy > 0 \tag{2.5}$$

Пример 2. Штамп в виде параболоида вращения

$$w(r) = b_0 + b_1\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad 0 \leqslant r < a; \quad A_0 = b_0 + b_1$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{b_1}{a^2}, \quad A_n = 0, \quad n > 2$$

Нормальные контактные напряжения, согласно (1.10), определяются по формуле

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = -\frac{2c_0}{\pi}\left| \frac{b_0 - b_1}{a\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{4b_1}{a}\sqrt{1-\rho^2} \right| + \omega(\rho) - \psi(\rho) \tag{2.6}$$

$$0 \leqslant \rho < 1$$

Из условия ограниченности нормальных напряжений на краю площадки контакта получим

$$b_0 = \frac{b_1 c_0 + \beta k_0 T_0 a}{c_0}, \qquad P = \delta_0 + \frac{16}{3} a c_0 b_1 \tag{2.7}$$

Как и в предыдущем случае, β и δ_0 вычисляются для заданных значений k

$$b_0 = 1.72\, a^2 k_0 T_0, \qquad \beta = 0.175, \qquad k = 0$$

$$b_0 = 2.27\, a^2 k_0 T_0, \qquad \beta = 0.113, \qquad k = 1$$

$$b_0 = 3.08\, a^2 k_0 T_0, \qquad \beta = 0.062, \qquad k = 10$$

Если $R = \dfrac{a^2}{2b_2}$, где R—радиус кривизны параболоида в его вершине, то радиус площадки контакта определяется из уравнения

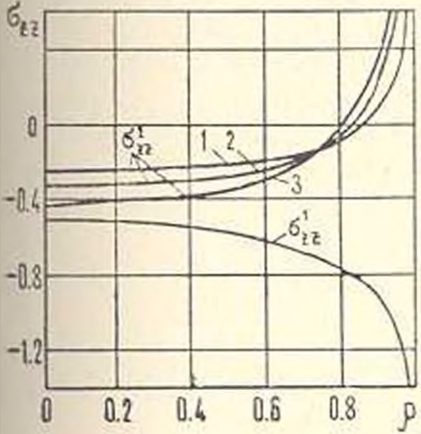
$$a^3 + \frac{3}{8}\frac{R}{c_0} b_0 = \frac{3PR}{8c_0}$$

Подставляя b_1 из (2.7) в (2.6), будем иметь

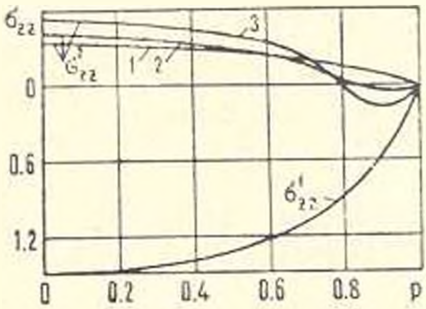
$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = \frac{3(b_0 - P)}{2\pi a^2} \sqrt{1-\rho^2} - \psi(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{2.8}$$

Функция $\psi(\rho)$ определяется соотношением (1.11), условием применимости формулы (2.8) служит неравенство

$$P > b_0$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 2 и 3 показано распределение контактных напряжений соответственно для штампа с плоским основанием и параболоидального штампа. При этом

$$\sigma_{zz}^1 = \frac{\pi a^2 \sigma_{zz}^P}{P} \text{ — силовая часть напряжений,}$$

$$\sigma_{zz}^2 = \frac{\sigma_{zz}^T}{k_0 T_0} \text{ — температурная часть напряжений.}$$

Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям параметра k, равным 0, 1 и 10. Суммарное напряжение получим, наложив напряжения

$$\frac{P}{\pi a^2}\sigma^1_{zz} \quad \text{и} \quad \lambda_0 T_0 \sigma^2_{zz}$$

Как видно из приведенных графиков, наибольшая величина температурной части напряжений будет в том случае, если поверхность полупространства вне штампа поддерживается при нулевой температуре, наименьшая—при теплоизолированной границе.

Львовский государственный
физико-механический институт
АН УССР

Поступило 7 II 1972

Դ. Վ. ԳՐԻԼԻՑԿԻ, Բ. Գ. ՇԵԼԵՍՏՈՎՍԿԻ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՏԱՔԱՑՎԱԾ ԴՐՈՇՄԻ ՆԵՐՄՂՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվել է տրանսվերսալ իզոտրոպ կիսատարածության մեջ տաքացված դրոշմի ներմղման մասին ջերմաառաձգականության առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդիրը այն պայմանով, որ դրոշմից դուրս գտնվող կիսատարածության մակերևույթի վրայից ջերմափոխանակությունը շրջապատող միջավայրի հետ իրագործվում է Նյուտոնի օրենքով։ Ջերմությունը և նորմալ կոնտակտային լարումը արտահայտվել են Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարմանը բավարարող ֆունկցիայի միջոցով։ Այդ հավասարման թվային լուծումը կառուցվել է հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։ Դիտարկվել են օրինակներ։

ON AXISYMMETRIC PROBLEM ON A HEATED PUNCH PRESSED INTO TRANSVERSALLY ISOTROPIC SEMISPACE

D. V. GRILITSKY, B. G. SHELESTOVSKY

Summary

The axisymmetric contact thermoelastic problem on a heated punch pressed into transversally isotropic semispace is considered under condition that beyond the punch the heat exchange with environment takes plase according to Newton's law. The temperature and normal contact stresses are expressed through the function satisfying the integral equation of the Fredholm type of the second kind whose solution is constructed by the method of consecutive approximations as well as numerically. Some examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородачев Н. М.* О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1962.
2. *George D. L., Sneddon I. N.* The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch. J. Math. and Mech., vol. 11, № 5, 1962.
3. *Петришин В. И., Шевляков Ю. А.* Вдавливание нагретого штампа в упругий слой конечной толщины в случае осевой симметрии. Прикл. механ., т. 4, в. 3, 1968.
4. *Keer L. M., Fu W. S.* Some stress distributions in an elastic plate due to rigid heated punches. Internat. J. Engng. Sci., vol. 5, No. 7, 1967.
5. *Андрейкив А. Е.* О решении некоторых задач термоупругости путем использования гармонических функций. Прикл. механика, т. 7, в. 9, 1971.
6. *Грилицкий Д. В., Шелестовский Б. Г.* Осесимметричная контактная задача термоупругости для трансверсально изотропного полупространства. Прикл. механ., т. 6, в. 8, 1970.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во „Наука". Л., 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 1, 1974 Механика

Г. Б. ВЕРМИШЯН

КРУЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОГО СОСТАВНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Исследовано кручение составного призматического вязко-упругого стержня некругового сечения при действии вибрационной нагрузки.

Прилагаемая нагрузка меняется по гармоническому закону, причем ее амплитуда постоянна. Для установления связи между деформациями сдвига и касательными напряжениями, возникающими в стержне, необходимо знать составляющие комплексного модуля для отдельных материалов.

Как показано в работе [1], составляющие комплексного модуля существенно зависят от частоты колебаний и температуры. При этом за счет диссипативных сил происходит выделение тепла. Поэтому для определения температуры в каждом участке стержня получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находятся экспериментальным путем.

В предельном стационарном случае температура не будет зависеть от времени, и вопрос сводится к решению дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Задача решена для стержня, составленного из двух различных вязко-упругих материалов.

Принято, что на боковой поверхности стержня температура неизменна и равна температуре окружающей среды, а на линии раздела различных материалов одной и другой областей температура и тепловой поток равны. Кроме того, предполагается, что температура вдоль оси стержня не изменяется.

1. Рассмотрим кручение призматического стержня, составленного из двух различных вязко-упругих материалов, на одном основании которого действуют усилия, меняющиеся по гармоническому закону, статически эквивалентные некоторому крутящему моменту.

Пусть компоненты деформации в поперечном сечении стержня в каждой области изменяются следующим образом:

$$\gamma_{xz}^{(j)} = \alpha^0 (\partial\varphi_j/\partial x - y)\cos\omega t$$
$$\gamma_{yz}^{(j)} = \alpha^0 (\partial\varphi_j/\partial y + x)\cos\omega t \quad \text{на} \quad S_j \ (j = 1, 2) \qquad (1.1)$$

В этом случае соответствующие компоненты напряжения будут

$$\tau_{xz}^{(j)} = \tilde{\tau}_{xz}^{(j)} \cos(\omega t - \varphi_j^{(0)})$$
$$\tau_{yz}^{(j)} = \tilde{\tau}_{yz}^{(j)} \cos(\omega t - \varphi_j^{(0)}) \quad \text{на} \quad S_j \ (j = 1, 2) \qquad (1.2)$$

Здесь $\varkappa^0$—постоянная, равная углу закручивания, $\varphi_j(x, y)$—некоторые функции, подлежащие определению, $\psi_j^{(0)}$— сдвиг фаз между деформацией и напряжением, S_j— области поперечного нормального сечения стержня, соответствующие различным материалам. Остальные компоненты деформации и напряжения отсутствуют.

Связь между компонентами напряжения и деформации возьмем в виде

$$\tau_{xz}^{(j)} = \int_{-\infty}^{t} K_j(T, t-\tau)\,\gamma_{xz}^{(j)}(\tau)\,d\tau, \qquad \tau_{yz}^{(j)} = \int_{-\infty}^{t} K_j(T, t-\tau)\,\gamma_{yz}^{(j)}(\tau)\,d\tau \quad (1.3)$$

$$(j = 1, 2)$$

Подставляя значения $\gamma_{xz}^{(j)}$, $\gamma_{yz}^{(j)}$ из (1.1) в (1.3) и вводя переменную $\zeta = t - \tau$, получим

$$\tau_{xz}^{(j)} = \varkappa^0\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} - y\right)\left\{\left[\mathrm{Re}\int_0^\infty K_j(T, \zeta)\,e^{i\omega\zeta}d\zeta\right]\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \left[\mathrm{Im}\int_0^\infty K_j(T, \zeta)\,e^{i\omega\zeta}d\zeta\right]\sin\omega t\right\}$$

$$\tau_{yz}^{(j)} = \varkappa^0\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} + x\right)\left\{\left[\mathrm{Re}\int_0^\infty K_j(T, \zeta)\,e^{i\omega\zeta}d\zeta\right]\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \left[\mathrm{Im}\int_0^\infty K_j(T, \zeta)\,e^{i\omega\zeta}d\zeta\right]\sin\omega t\right\} \quad (1.4)$$

Введем комплексный модуль [1]

$$E_j^*(T, \omega) = \int_0^\infty K_j(T, \zeta)\,e^{i\omega\zeta}d\zeta = E_j'(T, \omega) + iE_j''(T, \omega) =$$

$$= E_j(T, \omega)\cos\psi_j^{(0)} + iE_j(T, \omega)\sin\psi_j^{(0)} \quad (j = 1, 2) \quad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) получаем

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(j)} &= \varkappa^0(\partial\varphi_j/\partial x - y)\left[E_j'(T, \omega)\cos\omega t + E_j''(T, \omega)\sin\omega t\right] \\ \tau_{yz}^{(j)} &= \varkappa^0(\partial\varphi_j/\partial y + x)\left[E_j'(T, \omega)\cos\omega t + E_j''(T, \omega)\sin\omega t\right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Можно установить связь между амплитудами напряжения и деформации

$$\begin{aligned} \bar\tau_{xz}^{(j)} &= \varkappa^0(\partial\varphi_j/\partial x - y)\,E_j(T, \omega) \\ \bar\tau_{yz}^{(j)} &= \varkappa^0(\partial\varphi_j/\partial y + x)\,E_j(T, \omega) \end{aligned} \quad (1.7)$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для $E_j(T,\omega)$ и $E'_j(T,\omega)$ можно воспользоваться линейной аппроксимацией. При этом $E_j(T,\omega)$ можно считать постоянным

$$E_j(T,\omega) = A_j, \quad E'_j(T,\omega) = B_j + C_j T \quad (j = 1, 2) \tag{1.8}$$

Кроме того, так как обычно $E'_j(T,\omega) \ll E_j(T,\omega)$, то величиной $E'_j(T,\omega)$ по сравнению с $E_j(T,\omega)$ можно пренебречь. Из уравнений равновесия и совместности получаем, что искомые функции $\varphi_j(x,y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа в каждой области S_j

$$\Delta\varphi_j(x,y) = 0 \quad \text{на} \quad S_j \quad (j = 1, 2) \tag{1.9}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{на} \quad l_1 \\ &d\varphi_2/dn = y\cos(n,x) - x\cos(n,y) \quad \text{на} \quad l_2 \\ &E_2 d\varphi_2/dn - E_1 d\varphi_1/dn = (E_2 - E_1)[y\cos(n,x) - x\cos(n,y)] \quad \text{на} \quad l_1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

где l_1 — граница области S_1, l_2 — граница области S_2. Введем сопряженные гармонические функции $\Psi_j(x,y)$. Находим, что на границах области S_j функции $\Psi_j(x,y)$ удовлетворяют следующему граничному условию:

$$\begin{aligned} &d\Psi_1/dn = d\Psi_2/dn \quad \text{на} \quad l_1 \\ &\Psi_2(x,y) = 1/2\,(x^2 + y^2) \quad \text{на} \quad l_2 \\ &E_2\Psi_2(x,y) - E_1\Psi_1(x,y) = 1/2\,(E_2 - E_1)(x^2 + y^2) \quad \text{на} \quad l_1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Введем аналитические функции комплексного переменного в области S_j

$$F_j(z) = \varphi_j(x,y) + i\Psi_j(x,y) \quad (j = 1, 2) \tag{1.12}$$

Пусть

$$z = x + iy = \omega_1(\zeta) \tag{1.13}$$

соотношение, отображающее плоскость $z = x + iy$ на плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ так, чтобы контурам l_1 и l_2 соответствовали концентрические окружности γ_1 и γ_2 на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ радиусов $\rho = R$ и $\rho = 1$ ($R < 1$). Области S_1 будет соответствовать круг $|\zeta| < R$, а области S_2 — круговое кольцо $R < |\zeta| < 1$.

Из (1.12) и (1.13) получаем

$$\varphi_j + i\Psi_j = F_j(z) = F_j[\omega_1(\zeta)] = f_j(\zeta) \quad (j = 1, 2) \tag{1.14}$$

соответственно в круге $|\zeta| < R$ и в кольце $R < |\zeta| < 1$. Граничные условия (1.11) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\partial\Psi_1/\partial\rho = \partial\Psi_2/\partial\rho \quad \text{на } \gamma_1\\
&\Psi_2 = 1/2\omega_1(\sigma_2)\overline{\omega_1(\sigma_2)} + \text{const} \quad \text{на } \gamma_2\\
&E_2\Psi_2 - E_1\Psi_1 = 1/2(E_2 - E_1)\omega_1(\sigma_1)\overline{\omega_1(\sigma_1)} + \text{const} \quad \text{на } \gamma_1
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где через σ_1 и σ_2 обозначены точки на окружностях γ_1 и γ_2.

Возьмем

$$\begin{aligned}
&f_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k' + ib_k')\zeta^k \quad \text{в круге } |\zeta| < R\\
&f_2(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_k' + ib_k')\zeta^k \quad \text{в кольце } R < |\zeta| < 1
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Функции $\omega_1(\zeta)$ представляем в виде степенного ряда

$$\omega_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)}\zeta^k \tag{1.17}$$

где $a_k^{(0)}$ — действительные постоянные.

Используя граничные условия (1.15), после элементарных вычислений получаем

$$f_1(\zeta) = i\sum_{k=1}^{\infty} b_k'\zeta^k, \quad f_2(\zeta) = i\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^{*}\zeta^k + b_{-k}^{*}\zeta^{-k}) \tag{1.18}$$

где

$$\begin{aligned}
&b_k' = \frac{(1+\lambda_0)R^k q_k(1) - \lambda_0 q_k(R)(1 - R^{2k})}{2R^k(1 - \lambda_0 R^{2k})}, \quad b_k^{*} = \frac{q_k(1) - \lambda_0 R^k q_k(R)}{2(1 - \lambda_0 R^{2k})}\\
&b_{-k}^{*} = -\frac{\lambda_0 R^k[R^k q_k(1) - q_k(R)]}{2(1 - \lambda_0 R^{2k})}, \quad \lambda_0 = \frac{E_2 - E_1}{E_2 + E_1}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

где $q_k(\rho)$ — коэффициенты разложения

$$\omega_1(\sigma)\overline{\omega_1(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\rho)\cos k\theta, \quad \sigma = \rho e^{i\theta} \tag{1.20}$$

Вычислим момент, действующий на основание стержня

$$M = \sum_{j=1}^{2}\iint_{S_j}(x\tau_{yz}^{(j)} - y\tau_{xz}^{(j)})\,dxdy = \sum_{j=1}^{2}\iint_{S_j}(x\tau_{yz}^{(j)} - y\tau_{xz}^{(j)})\cos(\omega t - \varphi_j^{(0)})\,dxdy =$$

$$= \tau^0\left[\sum_{j=1}^{2}\iint_{S_j}\left|x\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} + x\right) - y\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} - y\right)\right| E_j(T, \omega)\cos\varphi_j^{(0)}dxdy\right]\cos\omega t +$$

$$+\varkappa^0\left\{\sum_{j=1}^{2}\iint\limits_{S_j}\left[x\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}+x\right)-y\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}-y\right)\right]E_j(T,\omega)\sin\varphi_j^{(0)}dxdy\right\}\sin\omega t=$$

$$=M_0\cos(\omega t-\varphi_0^{(0)}) \qquad (1.21)$$

Здесь M_0 — амплитуда момента M, а $\varphi_0^{(0)}$ — соответствующий сдвиг фаз. На основании этого получаем

$$M_0=\varkappa^0\left\{\left[\sum_{j=1}^{2}\iint\limits_{S_j}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)E_j(T,\omega)\cos\varphi_j^{(0)}dxdy\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{j=1}^{2}\iint\limits_{S_j}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)E_j(T,\omega)\sin\varphi_j^{(0)}dxdy\right]^2\right\}^{1/2} \qquad (1.22)$$

Принимая во внимание (1.5) и (1.22), получим

$$\varkappa^{0^2}=M_0^2/Q \qquad (1.23)$$

где

$$Q=\left[\sum_{j=1}^{2}\iint\limits_{S_j}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)E_j'(T,\omega)\,dxdy\right]^2+$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{2}\iint\limits_{S_j}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)E_j''(T,\omega)\,dxdy\right]^2 \qquad (1.24)$$

откуда, переходя на плоскость $\zeta=\xi+i\eta$, получаем [2]

$$Q=\left\{\sum_{j=1}^{2}\iint\limits_{\sigma_j}\left[|\omega_1(\zeta)|^2-\mathrm{Im}\left(\omega_1(\zeta)\frac{f_j(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)}\right)\right]E_j'(T,\omega)\,|\omega_1'(\zeta)|^2d\xi d\eta\right\}^2+$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{2}\iint\limits_{\sigma_j}\left[|\omega_1(\zeta)|^2-\mathrm{Im}\left(\omega_1(\zeta)\frac{f_j(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)}\right)\right]E_j''(T,\omega)\,|\omega_1'(\zeta)|^2d\xi d\eta\right\}^2 \qquad (1.25)$$

где через σ_1 обозначена область, представляющая круг $|\zeta|<R$, а через σ_2 — кольцо $R<|\zeta|<1$.

$\omega_1(\zeta)$ — отображающая функция, а $f_j(\zeta)$ дается по формуле (1.18).

Работа, совершаемая при вязко-упругой деформации, будет равна

$$W_j=\int\limits_{-\varepsilon_j^0}^{\varepsilon_j^0}\tau_j^*d\varepsilon_j^* \quad \text{на } S_j\ (j=1,2) \qquad (1.26)$$

$$\tau_j^* = \sqrt{[\tau_{xz}^{(j)}]^2 + [\tau_{yz}^{(j)}]^2}, \qquad \varepsilon_j^* = \sqrt{[\varepsilon_{xz}^{(j)}]^2 + [\varepsilon_{yz}^{(j)}]^2} \qquad (1.27)$$

Вводя безразмерные координаты $\alpha^* = \tau_j/\tau_j^0$, $\beta^* = \varepsilon_j/\varepsilon_j^0$, получим [1]

$$W_j = \int_{-1}^{1} \tau_j^0 \varepsilon_j^0 \alpha^* d\beta^* = \pi \tau_j^0 \varepsilon_j^0 \sin \varphi_j^{(0)} = \pi \varkappa^{02} \left[\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + x \right)^2 \right] E_j(T, \omega) \qquad (1.28)$$

откуда на основании (1.23) после перехода на плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ будем иметь

$$W_j = \frac{|f_j(\zeta) - i\omega_1(\zeta)\overline{\omega_1(\zeta)}|^2}{|\omega_1(\zeta)|^2} \frac{\pi M_0^2 E_j(T, \omega)}{Q} \qquad (1.29)$$

Работа, совершаемая за один цикл при деформации вязко-упругого тела, позволяет определить интенсивность выделения тепла в каждой области

$$q_j^* = \frac{|f_j(\zeta) - i\omega_1(\zeta)\overline{\omega_1(\zeta)}|^2}{|\omega_1(\zeta)|^2} \frac{\lambda\omega k_j^* M_0^2 E_j(T, \omega)}{2Q} \quad \text{на } S_j \ (j = 1, 2) \qquad (1.30)$$

Здесь k_j^* — величины, обратные механическому эквиваленту тепла, λ — коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. Для установления максимального нагрева будем полагать этот коэффициент постоянным и равным единице.

Для стационарного случая уравнение теплопроводности в каждой области S_j $(j = 1, 2)$ принимает вид

$$L_j(T_j^*) = \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial \eta^2} + \frac{\mu_j^*}{Q} E_j(T_j^*, \omega) |f_j(\zeta) - i\omega_1(\zeta)\overline{\omega_1(\zeta)}|^2 = 0 \qquad (1.31)$$

$$\text{на } S_j \ (j = 1, 2)$$

где

$$\mu_j^* = \frac{\lambda\omega k_j^* M_0^2}{2a_j^* c_j^*} \qquad (1.32)$$

Здесь a_j^* — коэффициент температуропроводности различных материалов, c_j^* — объемная теплоемкость.

Граничные условия для температуры таковы

$$T_1^* = T_2^* \quad \text{на окружности} \quad |\zeta| = R$$

$$k_2 \, dT_2^*/dn = k_1 \, dT_1^*/dn \quad \text{на окружности} \quad |\zeta| = R \qquad (1.33)$$

$$T_2^* = T_0 \quad \text{на окружности} \quad |\zeta| = 1$$

то есть на линии раздела различных материалов температура и тепловой поток равны, а температура на боковой поверхности стержня равна температуре окружающей среды; k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности одного и другого материала.

Используя (1.8) и вводя полярные координаты, уравнение (1.31) приводим к виду

$$L_j(T_j) = \Delta T_j + f_j^*(\rho, \vartheta)\, T_j = -F_j^*(\rho, \vartheta) \quad \text{на} \quad \sigma_j \quad (j = 1, 2) \tag{1.34}$$

где

$$\begin{aligned} f_j^*(\rho, \vartheta) &= \frac{\mu_j^* C_j}{Q} \left| f_j'(\zeta) - i\omega_1'(\zeta)\overline{\omega_1(\zeta)} \right|^2 \\ F_j^*(\rho, \vartheta) &= \frac{\mu^* B_j}{Q} \left| f_j'(\zeta) - i\omega_1'(\zeta)\overline{\omega_1(\zeta)} \right|^2, \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta} \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \tag{1.36}$$

Граничное условие преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &T_1 = T_2 && \text{при} \quad \rho = R \\ &k_2 \partial T_2/\partial \rho = k_1 \partial T_1/\partial \rho && \text{при} \quad \rho = R \\ &T_2 = T_0 && \text{при} \quad \rho = 1 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Примем

$$T_1 = T_2 = T_*(\vartheta) \qquad \text{при} \quad \rho = R \tag{1.38}$$

где $T_*(\vartheta)$ — пока неизвестная функция, подлежащая определению.

Ищем решение уравнений (1.34) при граничном условии (1.37), соответственно, в виде

$$T_1(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{\rho_0^2}{R^2} T_*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi}\int_0^R G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\, \mu_1(\rho, \vartheta)\, \rho\, d\rho\, d\vartheta \tag{1.39}$$

$$T_2(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{(\rho_0^2 - R^2)\, T_0 + (1 - \rho_0^2)\, T_*(\vartheta_0)}{1 - R^2} + \int_0^{2\pi}\int_R^1 G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\, \mu_2(\rho, \vartheta)\, \rho\, d\rho\, d\vartheta \tag{1.40}$$

где $G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$ — функция Грина уравнения Лапласа для круга; $G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$ — функция Грина уравнения Лапласа для кольца $R < |\zeta| < 1$ [3]; $\mu_1(\rho, \vartheta)$ и $\mu_2(\rho, \vartheta)$ — произвольные неизвестные функции, непрерывные и имеющие непрерывные производные соответственно в круге и в кольце.

После подстановки (1.39) и (1.40) в (1.34) для нахождения $\mu_1(\rho, \vartheta)$ и $\mu_2(\rho, \vartheta)$ получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода [2]

$$\mu_j(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi_j(\rho_0, \vartheta_0) + \iint_{\sigma_j} K_j^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\, \mu_j(\rho, \vartheta)\, \rho\, d\rho\, d\vartheta \quad (j = 1, 2) \tag{1.41}$$

где

$$\Phi_1(\rho_0, \vartheta_0) = F_1^*(\rho_0, \vartheta_0) + L_1\left[\frac{\rho_0^2}{R^2}T_*(\vartheta_0)\right]$$

$$\Phi_2(\rho_0, \vartheta_0) = F_2^*(\rho_0, \vartheta_0) + L_2\left[\frac{(\rho_0^2 - R^2)\,T_0 + (1-\rho_0^2)\,T_*(\vartheta_0)}{1-R^2}\right] \tag{1.42}$$

$$K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = f_1^*(\rho_0, \vartheta_0)\,G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$$

$$K_2^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = f_2^*(\rho_0, \vartheta_0)\,G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \tag{1.43}$$

$f_j^*(\rho_0, \vartheta_0)$ и $F_j^*(\rho, \vartheta)$ — даются формулой (1.35).

Из граничных условий (1.37) первое и третье удовлетворяются автоматически; из второго условия получаем уравнение для определения неизвестной функции $T_*(\vartheta_0)$

$$T_*(\vartheta_0) = \frac{k_2R^2T_0}{k_1(1-R^2)+k_2R^2} + \frac{R(1-R^2)}{2[k_1(1-R^2)-k_2R^2]} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\rho_0}\left\{k_2\int_0^{2\pi}\int_R^1 G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\,\mu_2(\rho, \vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta - \right.$$

$$\left. - k_1\int_0^{2\pi}\int_0^R G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\,\mu_1(\rho, \vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta\right\}\Bigg|_{\rho_0=R} \tag{1.44}$$

2. Для решения интегральных уравнений (1.41) их ядра заменим вырожденными. Разлагаем ядра в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций соответственно в круге $|\zeta| < R$ и в кольце $R < |\zeta| < 1$

$$\{\varphi_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0),\ \varphi_m^{(j)}(\rho, \vartheta)\} \quad \text{на} \quad \sigma_j\ (j = 1, 2;\ k,\ m = 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

в виде

$$K_j^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \sum_{k,\,m=1}^{\infty} A_{km}^{(j)}\,\varphi_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0)\,\varphi_m^{(j)}(\rho, \vartheta) \ \text{на}\ \sigma_j\ (j = 1, 2) \tag{2.2}$$

Для коэффициентов $A_{km}^{(j)}$ получаем следующее выражение:

$$A_{km}^{(j)} = \iint\limits_{\sigma_j}\left[\iint\limits_{\sigma_j} K_j^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\,\varphi_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0)\,\rho_0\,d\rho_0\,d\vartheta_0\right]\varphi_m^{(j)}(\rho, \vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta \tag{2.3}$$

$$(j = 1, 2)$$

После преобразования интегральные уравнения (1.41) принимают вид

$$\mu_j(\rho_0, \vartheta_0) - \sum_{k,\,m=1}^{N} A_{km}^{(j)}\,\varphi_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0)\iint\limits_{\sigma_j}\varphi_m^{(j)}(\rho, \vartheta)\,\mu_j(\rho, \vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta = \Phi_j(\rho_0, \vartheta_0) \tag{2.4}$$

$$(j = 1, 2)$$

Как известно [4], решение интегральных уравнений с вырожденным ядром можно свести к решению линейной системы алгебраических уравнений.

После некоторых вычислений получаем [2]

$$\mu_j(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi_j(\rho_0, \vartheta_0) + \sum_{k=1}^{N} Y_k^{(j)} \varphi_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0) \text{ на } s_j \quad (j = 1, 2) \tag{2.5}$$

$$Y_k^{(j)} = \sum_{m=1}^{N} A_{km}^{(j)} X_m^{(j)} \tag{2.6}$$

где постоянное $X_m^{(j)}$ определяется из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m^{(j)} - \sum_{k=1}^{N} A_{mk}^{(j)} X_k^{(j)} = \Phi_m^{(j)} \quad (j = 1, 2;\ m = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.7}$$

где

$$\Phi_m^{(j)} = \iint_{s_j} \Phi_j(\rho_0, \vartheta_0)\, \varphi_m^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0)\, \rho_0 d\rho_0 d\vartheta_0 \quad (m = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.8}$$

Подставляя значения $\mu_1(\rho_0, \vartheta_0)$ и $\mu_2(\rho_0, \vartheta_0)$ из (2.5) в (1.39) и (1.40), соответственно получаем

$$T_1(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{\rho_0^2}{R^2} T_a(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\, \Phi_1(\rho, \vartheta)\, \rho d\rho d\vartheta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} Y_k^{(1)} \int_0^{2\pi}\int_0^{R} G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\, \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta)\, \rho d\rho d\vartheta, \quad 0 < \rho_0 < R \tag{2.9}$$

$$T_2(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{(\rho_0^2 - R^2)\, T_0 + (1 - \rho_0^2)\, T_a(\vartheta_0)}{1 - R^2} + \int_0^{2\pi}\int_R^{1} G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\, \Phi_2(\rho, \vartheta) \times$$

$$\times \rho d\rho d\vartheta + \sum_{k=1}^{N} Y_k^{(2)} \int_0^{2\pi}\int_R^{1} G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\, \varphi_k^{(2)}(\rho, \vartheta)\, \rho d\rho d\vartheta, \quad R < \rho_0 < 1 \tag{2.10}$$

где $\Phi_1(\rho, \vartheta)$ и $\Phi_2(\rho, \vartheta)$ даются формулами (1.42).

В решение задачи входит неизвестная функция $T_a(\vartheta)$, для определения которой из (2.5) подставляем значения $\mu_1(\rho_0, \vartheta_0)$ и $\mu_2(\rho_0, \vartheta_0)$ в уравнение (1.44), после преобразования получаем следующие сингулярные интегро-дифференциальные уравнения относительно функции $T_a(\vartheta_0)$

$$T_a(\vartheta_0) = \Psi(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \left[\frac{\lambda_1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} + H_1(\vartheta - \vartheta_0) \right] T_a(\vartheta)\, d\vartheta +$$

$$+\int_0^{2\pi} H_2(\theta, \theta_0)\, T_*(\theta)\, d\theta \tag{2.11}$$

при граничных условиях

$$T_*(0) = T_*(2\pi), \quad T_*'(0) = T_*'(2\pi) \tag{2.12}$$

Функция $\Psi(\theta_0)$ и ядра $H_1(\theta-\theta_0)$, $H_2(\theta, \theta_0)$ — некоторые регулярные функции (явные выражения для них не приводим).

$$\lambda_1 = \frac{k_2(1-R^2)+k_2}{2[k_1(1-R^2)+k_2R^2]} \tag{2.13}$$

3. Для решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения (2.11) при граничных условиях (2.12) сведем его к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этого преобразуем его и воспользуемся известной формулой обращения Гильберта [5, 6]

$$T_*'(\theta_0) = -\frac{1}{2\pi\lambda_1}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_0}{2}\Big[T_*(\theta) - \Psi(\theta) +$$

$$+\int_0^{2\pi}[H_{1t}(t-\theta) - H_2(t, \theta)]\, T_*(t)\, dt\Big]\, d\theta + \alpha_0 \tag{3.1}$$

при этом должно выполняться равенство

$$\int_0^{2\pi}\Big[T_*(\theta_0) - \Psi(\theta_0) + \int_0^{2\pi}[H_{1t}(t-\theta_0) - H_2(t, \theta_0)]\, T_*(t)\, dt\Big]\, d\theta_0 = 0 \tag{3.2}$$

В (3.1) α_0 — постоянная, подлежащая определению.

Интегрируя обе части (3.1), для определения $T_*(\theta_0)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$T_*(\theta_0) = \int_0^{2\pi} K(t, \theta_0)\, T_*(t)\, dt + f(\theta_0) + \alpha_0\theta_0 + \alpha_1 \tag{3.3}$$

где

$$K(t, \theta_0) = \frac{1}{\pi\lambda_1}\Big[\ln 2\left|\sin\frac{t-\theta_0}{2}\right| +$$

$$+\int_0^{2\pi}[H_{1t}(y-t) - H_2(y, t)]\ln 2\left|\sin\frac{y-\theta_0}{2}\right| dy\Big] \tag{3.4}$$

$$f(\theta_0) = -\frac{1}{\pi\lambda_1}\int_0^{2\pi}\ln 2\left|\sin\frac{t-\theta_0}{2}\right|\Psi(t)\, dt \tag{3.5}$$

α_1 — постоянная интегрирования.

Из граничных условий (2.12) находим, что $\alpha_0=0$, а из (3.2) и (3.3) получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(y, t)\, T_*(y)\,dy dt \tag{3.6}$$

4. Для решения интегрального уравнения (3.3) его ядро заменим вырожденным. Разлагаем ядро в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos k\vartheta, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\vartheta_0\right\} \quad (k, m = 1, 2,\ldots) \tag{4.1}$$

в виде

$$K(t, \vartheta) = \frac{1}{\pi}\sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km}^{(0)}\cos kt\cos m\vartheta_0 \tag{4.2}$$

где

$$A_{km}^{(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} K(t, \vartheta_0)\cos kt dt\right\}\cos m\vartheta_0 d\vartheta_0 \tag{4.3}$$

После преобразования интегральное уравнение (3.3) принимает следующий вид:

$$T_*(\vartheta_0) - \frac{1}{\pi}\sum_{k, m=1}^{N} A_{km}^{(0)}\cos m\vartheta_0\int_0^{2\pi} T_*(t)\cos kt dt = f(\vartheta_0) + \alpha_1 \tag{4.4}$$

Решение интегрального уравнения (4.4) имеет вид

$$T_*(\vartheta_0) = \alpha_1 + f(\vartheta_0) + \sum_{k=1}^{N} Y_k^{(0)}\cos k\vartheta_0 \tag{4.5}$$

где

$$Y_k^{(0)} = \sum_{m=1}^{N} A_{km}^{(0)} X_m^{(0)} \tag{4.6}$$

а постоянная $X_m^{(0)}$ определяется из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m^{(0)} - \sum_{k=1}^{N} A_{mk}^{(0)} X_k^{(0)} = F_m^{(0)} \qquad (m = 1, 2,\ldots, N) \tag{4.7}$$

где

$$F_m^{(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\cos m\vartheta d\vartheta \quad (m = 1, 2,\ldots, N) \tag{4.8}$$

5. В качестве примера отображающую функцию $\omega_1(\zeta)$ возьмем в виде

$$z = \omega_1(\zeta) = a(\zeta + \alpha\zeta^2), \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2} \tag{5.1}$$

Окружности $\rho = R$ соответсвтует кривая l_1 на плоскости $z = x + iy$, а окружности $\rho = 1$ — кривая l_2, которые представляют собой кардиоиды.

Тогда $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ согласно формуле (1.18) соответственно в круге $|\zeta| < R$ и в кольце $R < |\zeta| < 1$ даются в виде:

$$f_1(\zeta) = i\alpha a^2 b_1 \zeta, \quad f_2(\zeta) = i\alpha a^2 (b_2\zeta + b_3\zeta^{-1}) \tag{5.2}$$

где b_1, b_2, b_3 и λ_0 определяются из (1.19).

На основании формулы (1.35) после элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} f_j^*(\rho, \vartheta) &= \frac{a^4\mu_j^* C_j}{Q}\left[g_0^{(j)}(\rho) + g_1^{(j)}(\rho)\cos\vartheta + g_2^{(j)}(\rho)\cos 2\vartheta\right] \quad (j = 1, 2) \\ F_j(\rho, \vartheta) &= \frac{a^4\mu_j^* B_j}{Q}\left[g_0^{(j)}(\rho) + g_1^{(j)}(\rho)\cos\vartheta + g_2^{(j)}(\rho)\cos 2\vartheta\right] \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $g_i^{(j)}(\rho)$ $(j = 1, 2;\ i = 0, 1, 2)$ — определенные функции.

В формуле (2.1) ортонормированные системы функций возьмем в виде

$$\left\{\sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}}\frac{\rho^k}{R^{k+1}}\cos k\vartheta, \quad \sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi}}\frac{\rho_0^m}{R^{m+1}}\cos m\vartheta_0\right\}$$

$$\text{в круге } |\zeta| < R \quad (k, m = 1, 2, \ldots) \tag{5.4}$$

$$\left\{\sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi(1-R^{2k+2})}}\rho^k\cos k\vartheta, \quad \sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi(1-R^{2m+2})}}\rho_0^m\cos m\vartheta_0\right\}$$

$$\text{в кольце } R < |\zeta| < 1 \quad (k, m = 1, 2, \ldots)$$

На основании формул (1.43), (2.3), (3.4), (4.3), (5.3) и (5.4) получены выражения для коэффициентов Фурье $A_{km}^{(j)}$ и $A_{km}^{(0)}$. Из-за громоздкости не приводим явное выражение для $A_{km}^{(j)}$ и $A_{km}^{(0)}$.

После некоторых вычислений находим из (3.5) и (4.5) неизвестную функцию $T_*(\vartheta_0)$, то есть температуру на линии раздела различных материалов, в виде

$$T_*(\vartheta_0) = \alpha_1 + \sum_{k=1}^{N} X_k^{(0)}\cos k\vartheta_0 \tag{5.5}$$

Постоянные $X_k^{(0)}$ определяются из уравнений (4.7), где $F_k^{(0)}$ даются на основании (4.8). После вычисления получим

$$F_1^{(0)} = c_1 + a_1 a^4/\lambda_1 Q, \quad F_2^{(0)} = c_2/2 - a_2 a^4/2\lambda_1 Q$$

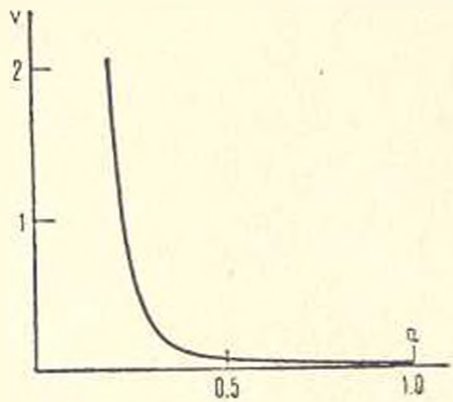
$$F_m^{(0)} = c_m/m \quad (m = 3, 4, \dots, N) \tag{5.6}$$

Явные выражения для c_m, a_1 и a_2 не приводятся из-за громоздкости.

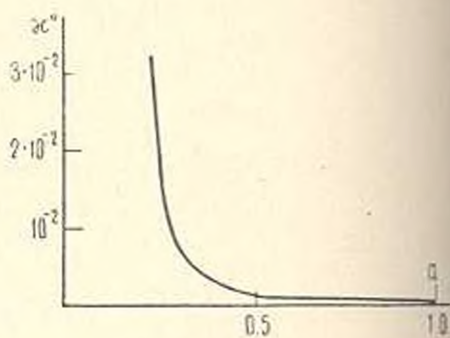
Подставляя выражение (5.5) в (2.9) и (2.10), получаем решение задачи. Затем полученный результат подставим в (1.25), после чего найдем уравнения для определения параметра Q.

Заметим, что в формулы (2.11), (3.4), (3.5) входят интегралы, которые следует понимать в смысле главного значения.

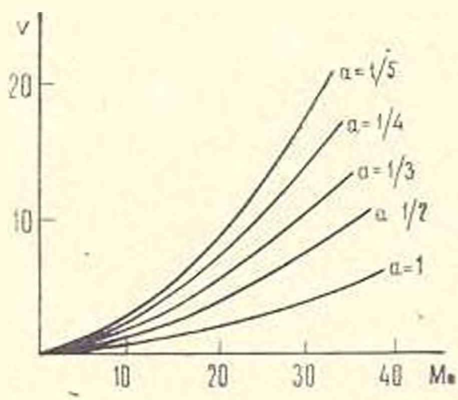
На основании формул (1.23), (1.25) и (5.5) построен график. На фиг. 1 показано соотношение между перепадом температур $v = T_* - T_0$ и величиной a, входящей в уравнение кардиоиды, на фиг. 2—связь между углом закручивания и величиной a, на фиг. 3—соотношение между амплитудой момента и перепадом температур.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Ниже в таблице даны значения T_* и $\varkappa'$ в зависимости от a. При этом использованы данные, соответствующие двум видам полиэтилена

Таблица 1

a	1	1/2	1/3	1/4	1/5
χ^0	10^{-4}	$1.59\cdot10^{-3}$	$8.055\cdot10^{-3}$	$2.552\cdot10^{-2}$	$6.233\cdot10^{-2}$
$T_*(0)$	20.0029	20.0519	20.2624	20.8311	22.0287
$T_*(\pi/2)$	20.0029	20.0513	20.2593	20.8210	22.0042
$T_*(\pi)$	20.0029	20.0508	20.2566	20.8127	21.9839

$$A_1 = 3.4\cdot10^3\ \text{кг/см}^2;\quad A_2 = 5.1\cdot10^1\ \text{кг/см}^2;\quad B_1 = B_2 = 3.87\cdot10^2\ \text{кг/см}^2$$

$$k_1^* = k_2^* = 0.00234\ \text{ккал/кгм};\quad a_1^* c_1 = a_2^* c_2 = 0.23\ \text{ккал/м час град}$$

$$k_1 = k_2;\quad \omega = 100\ \text{гц};\quad T_0 = 20^\circ;\quad M_0 = 10\left|\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}\right|\text{см}$$

$$\alpha = 0.25;\quad R = 0.5;\quad C_1 = C_2 = 3.87\ \text{кг/см}^2\ \text{град}$$

Автор искренне признателен Л. А. Галину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 26 IV 1973

Դ. Ռ. ՎԵՐՄԻՇՅԱՆ

ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՄԱԾՈՒՑԻԿ-ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՎԻԲՐԱՑԻՈՆ ՈՒԺԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ամփոփում

Դիտարկված է պրիզմատիկ մածուցիկ-առաձգական բաղադրյալ ու կլոր կտրվածքով ձողի ոլորումը վիբրացիոն ուժի ազդեցության տակ։

Ազդող բեռը փոփոխվում է հաստատուն ամպլիտուդայով հարմոնիկ օրենքով։

Ինչպես հայտնի է, կոմպլեքս մոդուլի բաղադրիչները նշանակալիորեն կախված են տատանման հաճախականությունից և ջերմաստիճանից, որի հետևանքով դիսսիպատիվ ուժի հաշվին տեղի է ունենում ջերմության անջատում, այդ պատճառով ձողի յուրաքանչյուր տեղամասում ջերմաստիճանը որոշելու համար, ջերմաստիճանի ստացիոնար բաշխման դեպքում, ստացվում է էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարում։

Խնդիրը լուծված է երկու տարբեր մածուցիկ-առաձգական նյութերից կազմված բաղադրյալ ձողի համար։

Ձողի կողմնային մակերևույթի վրա ջերմաստիճանը ընդունվում է հաստատուն և հավասար շրջապատող միջավայրի ջերմաստիճանին, իսկ տարբեր նյութերի միացման գծի վրա մեկ և մյուս տիրույթներում հավասար են ջերմաստիճանը և ջերմային հոսքը։ Ընդունվում է, որ ձողի առանցքի երկարությամբ ջերմաստիճանը չի փոխվում։

Բերված են հաշվումներ մեկ մասնավոր դեպքի համար։

THE TWISTING OF A VISCOUS-ELASTIC PRISMATIC COMPOSITE ROD UNDER VIBRATIONAL LOAD

G. B. VERMISHIAN

Summary

The twisting of a prismatic viscous-elastic composite rod with a non-circular cross-section under vibrational load has been studied.

The applied load changes according to the harmonic law, with a constant amplitude.

As is known, the components of the complex modulus essentially depend on the frequency of vibration and temperature, with heat being evolved due to dissipative forces. Therefore to determine the temperature at each part of the rod for a stationary case a differential equation of an elliptic type is derived.

The problem is solved for a rod consisting of two different viscous-elastic materials.

The temperature on the boundary surface of the rod is equal to the ambient temperature but on the interface of different materials the temperature and heat flow are equal. The temperature along the rod axis is assumed to be invariable. Calculations for a special case are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. Изв. АН СССР. Механика, № 6, 1965.
2. *Вермишян Г. Б., Галин Л. А.* Кручение вязко-упругого призматического стержня при действии вибрационной нагрузки. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.
3. *Арсенин В. Я.* Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. Изд. „Наука", М., 1966.
4. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, М., 1959.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. „Наука", М., 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 1, 1974 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОТЕРМОМАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ ВБЛИЗИ ФРОНТОВ ВОЛН

1. Рассматривается задача определения параметров движения вязкотермомагнитоупругой среды в окрестности фронтов волн малой интенсивности. Предположено, что волна распространяется в неоднородной среде, невозмущенные параметры которой зависят от координат x, y, z.

Уравнения движения произвольной среды в окрестности фронта волны имеют вид [1, 2]

$$\frac{du}{dt}-\frac{d\ln\Phi}{dt}u-\frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}-2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_3}\right)=$$

$$=\lambda^1\frac{u}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\tau} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\partial v_{x_2}}{H_1\partial\tau},\qquad \frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{\partial v_{x_3}}{H_1\partial\tau}$$

где u есть проекция скорости возмущенного движения частицы на нормаль $\bar{n}$ к невозмущенной волне, τ—время пробега по нормали от волны до данной точки, $H_1=c_n-u_n$ — нормальная скорость невозмущенной волны, u_n — невозмущенная скорость частицы, координаты x_2, x_3 выбраны в касательной плоскости волны, Φ есть амплитуда одномерного по τ линейного или лучевого решения, $\alpha=\alpha(\beta,\gamma)$ есть дисперсионное уравнение или уравнение характеристики, которое имеет вид

$$\alpha V_x+\beta V_y+\gamma V_z-1=-c_n\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \tag{1.2}$$

где (V_x, V_y, V_z) есть вектор невозмущенной скорости частиц. При получении (1.1) предположено, что ось $x=x_1$ выбрана по нормали к волне, поэтому при вычислении производных α по β и γ в (1.1), согласно (1.2), нужно учитывать, что $\beta=0$, $\gamma=0$. Значение λ^1 дает нелинейный добавок в нормальной скорости волны λ, причем $\lambda=H_1+\lambda^1 u$. Смысл v_{x_2}, v_{x_3} выясняется из проекций уравнений движения среды на направление медленного, по сравнению с τ, изменения параметров движения, которые обычно предельно упрощаются. Таким образом, для определения уравнения движения вблизи волны (1.1) нужно знать лучевое решение Φ, формулу для нормальной скорости волны λ в нелинейной задаче, формулу для нормальной скорости c_n волны относительно частиц в линейной задаче, а также выяснить смысл v_{x_2}, v_{x_3}.

Следует отметить, что при определении λ^1 из условий совместности на характеристике нелинейной задачи можно малые слагаемые, содержащие диссипативные члены, формально включить в формулу для λ, и тогда (1.1) будет описывать движение среды в окрестности волны для произвольной диссипативной среды.

Уравнения движения вязкотермомагнитоупругой среды в переменных Лагранжа x_k имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial X_k} + \frac{\partial \sigma^{(v)}_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.3}$$

где эйлерова координата $X_k = x_k + u_k$, u_k — вектор перемещений, $v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t}$, ρ — плотность среды, тензор максвелловских напряжений

$$\Pi_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}\right) \tag{1.4}$$

H_i — вектор напряженности магнитного поля и за волной $H_i = H_i^0 + h_i$, $|h_i| \ll |H_i^0|$, $\sigma^{(v)}_{ik}$ есть тензор вязких напряжений, имеющий вид

$$\sigma^{(v)}_{ik} = \mu^{(1)} \operatorname{div} \vec{v}\, \delta_{ik} + \mu^{(2)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

σ_{ik} в (1.3) есть тензор термомагнитоупругих напряжений.

Полагая для энергии термомагнитоупругой среды

$$U = U_0 - \gamma_0 \theta Y_1 + \frac{1}{2} \nu_1 \theta Y_1^2 + \nu_2 \theta Y_2 + \nu_3 \theta^2 Y_1$$

где U_0 есть энергия нелинейно-упругого тела в отсутствие температурных напряжений, $\theta = T - T_0$, T — температура, $Y_1 = u_{\alpha\alpha}$, $Y_2 = \frac{1}{2}(u_{\alpha\alpha}^2 - u_{\alpha\beta}^2)$ суть инварианты тензора деформаций

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k}\right)$$

γ_0, $\nu_{1,2,3}$ — постоянные, можно получить

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial U_0}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)} - \gamma_0 \theta \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ \left(\nu_1 \theta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \nu_3 \theta^2 + \nu_2 \theta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) \delta_{ik} - \nu_2 \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{1.6}$$

где первый член в правой части дает тензор напряжений в нелинейной теории упругости и имеет вид формулы (8.16), стр. 297, в работе [3].

Кроме того, имеет место уравнение энергии и обобщенный закон теплопроводности [4, 5]

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div}\bar{q}, \qquad \bar{q} + \tau_0\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \lambda_1 \operatorname{grad}\theta \tag{1.7}$$

где постоянные τ_0, λ_1 малы, S — энтропия. Вязкостью и джоулевой диссипацией в (1.7) вблизи волны можно пренебречь.

Учитывая соотношения [4]

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_{ik}}\right)_T = -\left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial T}\right)_{u_{ik}}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{u_{ik}} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{u_{ik}}$$

можно получить во втором порядке по u_{ik}, θ, $T\frac{dS}{dt} = \varphi_1$,

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = c\frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma_0 T\frac{\partial^2 u_e}{\partial t\partial x_e} + 2\gamma_0 T\frac{\partial u_k}{\partial x_e}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t\partial x_e} -$$

$$- T\left(\nu_1\frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \nu_0\frac{\partial u_e}{\partial x_e} + 2\nu_2\theta\right)\frac{\partial^2 u_e}{\partial t\partial x_e} +$$

$$+ \nu_2 T\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial t} - \gamma_0\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\frac{\partial \theta}{\partial t}, \qquad \varphi_1 + \tau_0\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \lambda_1\nabla^2\theta \tag{1.8}$$

где $c = \left(\frac{\partial U_0}{\partial T}\right)_{u_{ik}}$ есть коэффициент теплоемкости. Можно предполагать $|\tau_0| \ll \lambda_1$, тогда для основных волн теплопроводность будет, как и вязкость, влиять на размазывание профиля волны, не влияя на ее скорость. Далее, предполагается $\tau_0 \sim \lambda_1$. В силу того, что τ_0 мало, хоть и $\frac{\lambda_1}{\tau_0}$ конечно, и поскольку определяются лишь условия на нелинейной волне, на которые влияют коэффициенты при старших производных, а также лучевое решение Φ, которое дается линейной теорией, в (1.8) существенны лишь линейные слагаемые и можно написать по (1.7), вводя обозначения

$$\varkappa = \frac{\lambda_1}{c}, \qquad \eta = \gamma_0\frac{T}{\lambda_1} \tag{1.9}$$

$$\nabla^2\theta = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta\frac{\partial \operatorname{div}\bar{u}}{\partial t} + \tau_0\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2 \operatorname{div}\bar{u}}{\partial t^2}\right) \tag{1.10}$$

Учитывая, что имеет место для начальных магнитных напряжений $\frac{\partial \Pi^0_{ik}}{\partial X_k} = 0$, а также то, что вблизи волны можно в (1.3) заменять X_i на x_k, с учетом (1.3)—(1.6), а также уравнения магнитной индукции [6] можно получить окончательные уравнения

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \mu \Delta u_i - (\lambda_0 + \mu) \frac{\partial^2 u_e}{\partial x_e \partial x_i} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (H_i^0 h_k + H_k^0 h_i - H_e^0 h_e \delta_{ik})}{\partial x_k} +$$

$$+ \gamma_0 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = F_i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \left(h_k h_i - \frac{1}{2} h_e^2 \delta_{ik} \right)}{\partial x_k} - (\gamma_0 + \gamma_2) \frac{\partial \left(\theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left| (\gamma_1 + \gamma_2) \theta \frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \gamma_3 \theta^2 \right| + |\lambda^{(1)} + \lambda^{(0)}| \frac{\partial \operatorname{div} \bar{v}}{\partial x_i} + \lambda^{(0)} \Delta v_i$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = H_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - H_i \frac{\partial v_e}{\partial x_e} - H_k \frac{\partial u_e}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_e} + H_i \frac{\partial u_e}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_e} + \zeta^0 \Delta h_i \tag{1.11}$$

В последнем уравнении совершен переход от X_i к переменным x_i. Здесь λ_0, μ — постоянные Ламе [3], $\zeta^0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ есть малый коэффициент электрического сопротивления. F_i — нелинейная часть в тензоре упругих напряжений, причем во втором порядке [3]

$$F_i = \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_e} + 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_e \partial x_k} \frac{\partial u_e}{\partial x_k} \right) +$$

$$+ \left(K + \frac{\mu}{3} + \frac{A}{4} + B \right) \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_e}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_e \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_e} \right) +$$

$$+ \left(K - \frac{2}{3} \mu + B \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \left(\frac{A}{4} + B \right) \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_e \partial x_k} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u_e}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_e} \right) + (B + 2C) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} \tag{1.12}$$

где K, A, B, C — постоянные, причем $K = \lambda_0 + \frac{2}{3} \mu$.

2. Таким образом, для определения v_i, u_i, θ, h_i имеем $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ и уравнения (1.10), (1.11). В линейном приближении, отбрасывая также члены с вязкостью и конечной электропроводностью σ, получим уравнения

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = (\lambda_0 + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \bar{u}) + \mu \Delta u_i +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (H_i^0 h_k + H_k^0 h_i - H_e^0 h_e \delta_{ik})}{\partial x_k} - \gamma_0 \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = H_k^0 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - H_i^0 \frac{\partial v_e}{\partial x_e}$$

$$\nabla^2 \theta = \left(\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \operatorname{div} \bar{u}}{\partial t} \right) + \tau_0 \left(\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial^2 \operatorname{div} \bar{u}}{\partial t^2} \right) \tag{2.1}$$

В дальнейшем, при определении условий на линейной, а также и нелинейной характеристике, выберем ось x по нормали к волне линейной задачи (невозмущенной волне), уравнение поверхности нормалей к которой дается (1.2). Кроме того, удобно выбрать плоскость (x, y), проходящую через невозмущенное магнитное поле $(H_x^0, H_y^0, 0)$. Далее предположено $V_x = V_y = V_z = 0$, поскольку при $\bar{V} \neq 0$ невозмущенный вектор перемещения $\bar{u}$ будет зависеть от времени t, а выше предположено, что невозмущенные волной параметры среды зависят лишь от x, y, z. Поэтому скорость невозмущенной волны $H_t = c_n$.

Обозначая через $\delta = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right]$ скачок производной параметров по нормали к волне, можно получить из (2.1) условия на линейных характеристиках $c_n = c_n^{(1,2)}$

$$\delta h_y = \frac{H_x}{c_n}\,\frac{c_n^2 - b^2}{c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}}\,\delta v_y, \qquad \delta v_y = -\frac{H_x}{H_y}\,\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} P_0 c_n^2}{c_n^2 - b^2}\,\delta v_x$$

$$\delta h_x = \delta h_z = \delta v_z = 0, \quad \delta\theta = P_0 c_n \delta v_x$$

$$\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} P_0 c_n^2\right)\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) = \frac{H_y^2}{4\pi\rho_0}\left(c_n^2 - b^2\right) \tag{2.2}$$

где $\quad P_0 = -\tau_0\gamma_0\left(1 - \frac{\tau_0}{\varkappa} c_n^2\right)^{-1}, \quad c_n = c_n^{(3)}$

$$\delta h_z = -\frac{H_x}{c_n}\,\delta v_z, \quad \delta v_x = \delta v_y = \delta h_y = \delta h_x = \delta\theta = 0$$

$$c_n^2 = b^2 + \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} \tag{2.3}$$

Здесь индекс 0 в выражениях H_x^0, H_y^0 опущен, $a^2 = \frac{\lambda_0 + 2\mu}{\rho_0}$, $b^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$.

Уравнения (2.2) относятся к быстрым и медленным термомагнитоупругим волнам, уравнение (2.3) соответствует поперечной волне, которая при $\bar{H} = 0$ совпадает с упругой поперечной волной, а при $b = 0$ совпадает с волной Альфвена. Последние соотношения в (2.2), (2.3) дают уравнения скоростей волн. Те же уравнения (2.2), (2.3) имеют место и для величин возмущений параметров h_x, h_y, h_z, v_x, v_y, v_z, θ за волной.

Для получения условий на нелинейной волне для полных уравнений (1.8), (2.1) следует заменить [6] $\frac{\partial}{\partial t} = -\lambda\delta$, $\frac{\partial}{\partial x_k} = n_k\delta$, где n_k есть вектор единичной нормали к возмущенной волне. Тогда можно показать, что вблизи волн $c_{1,2}$, соответствующих в линейной задаче (2.2), производные по z не дают вклада в решение, а вблизи волны $\lambda^{(3)}$, соответствующей в линейной задаче (2.3), в уравнениях выпадут члены, содержащие δ_x, а также нелинейные слагаемые.

Для волн $\lambda = \lambda_{1,2}$ получим соотношения на характеристике

$$\left[\lambda^2 - a^2 - \lambda^2 \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0} + 2\frac{A_1}{c_n} v_x - \frac{1}{c_n} \frac{\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0\right)^2}{H_y^2} 4\pi\rho_0 v_x + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_0 + \mu}{\rho_0} n_y \frac{H_x\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0\right)}{H_y (c_n^2 - b^2)} + \zeta v_x \right] \delta v_x =$$

$$= \frac{c_n}{4\pi\rho_0} H_y \delta h_x - \frac{c_n}{\rho_0} (\mu^{(1)} + 2\lambda^{(0)}) \delta \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{2.4'}$$

$$(c_n^2 - b^2)\delta v_y + \left(-\frac{1}{c_n} 2A_2 v_x - \frac{\lambda_0 + \mu}{\rho_0} n_y - \lambda^2 \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0} n_y + \eta v_x\right) \delta v_x =$$

$$= -\frac{c_n}{4\pi\rho_0} H_x \delta h_y - \frac{c_n}{\rho_0} \mu^{(0)} \delta \frac{\partial v_y}{\partial x} \tag{2.4''}$$

$$-\delta v_x \left(H_y + \frac{v_x}{c_n} \frac{H_x^2}{H_y^2} \frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0}{c_n^2 - b^2} + H_y \frac{v_x}{c_n}\right) +$$

$$+ H_x \delta v_y = -c_n \delta h_y - \nu_m \frac{\partial h_y}{\partial x} \tag{2.4'''}$$

где

$$\zeta = 2P_0(\gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 P_2)\frac{c_n}{\rho_0} -$$

$$-\frac{c_n \gamma_0}{\rho_0} \frac{T(\nu_1 - \nu_2) - 2\nu_3 T P_0 c_n^2 - 2(\nu_0 + \nu_2) T\left(1 - \frac{c_n^2}{c^2}\right) - c_n^2 \gamma_0 P_0}{c_n c - \frac{\gamma_1}{\gamma_0}}$$

$$\eta = -2(\gamma_0 + \nu_2) P_0 \frac{H_x}{H_y} \frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0}{c_n^2 - b^2} \frac{c_n}{\rho_0}$$

Значения A_1, A_2 соответствуют нелинейным слагаемым в формуле для сил F_x, F_y, причем согласно (1.12) получим, заменяя v_y и h_y через v_x по (2.2),

$$\frac{c_n}{\rho_0} F_x \approx \frac{1}{c_n} A_1 \delta v_x^2, \qquad A_1 = \frac{1}{\rho_0}\left(\mu + \frac{A}{4}\right) \frac{H_x^2\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0} c_n^2\right)^2}{(c_n^2 - b^2)^2 H_y^2} +$$

$$+\frac{2\mu+A+3B+\frac{3}{2}K+C}{\rho_0} \tag{2.5}$$

$$\frac{c_n}{\rho_0}F_y \approx -\frac{1}{c_n}A_2\delta v_x^2$$

$$A_2=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{4\mu}{3}+\frac{A}{2}+K+B\right)\frac{H_x}{H_y}\frac{c_n^2-a^2-\frac{\gamma_0}{\rho_0}c_n^2P_0}{\frac{H_y^2}{4\pi\rho_0}}$$

Полагая $\lambda=c_n+\bar{\lambda}$, где c_n удовлетворяет (2.2), $\bar{\lambda}$ — мало, учитываем, что $\bar{n}$ есть нормаль к возмущенной волне, а H_x, H_y — проекции $\bar{H}$ на нормаль и касательную к невозмущенной волне и вводим проекции $\bar{H}$ на нормаль и касательную к возмущенной волне, причем

$$H_x \approx H_n - H_t n_y, \quad H_y \approx H_t + H_n n_y \tag{2.6}$$

Введем, кроме того, нормальную скорость невозмущенной волны (c^1), даваемую (2.2), где заменены H_x, H_y на H_n, H_t. Полагая еще $c_n=c^1+\lambda^1 v_{x_0}$ получим $v_x\lambda^1=c_n-c^1+\bar{\lambda}$ и из уравнений (2.4), (2.5) дающих соотношение для $\bar{\lambda}$, после упрощений получится уравнение

$$D\lambda^1=(c_n^2-b^2)\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}+\left(c_n^2-a^2-\frac{\gamma_0}{\rho_0}P_0c_n^2\right)\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}-$$

$$-\frac{\frac{4}{3}\mu+\frac{A}{2}+K+B}{\rho_0}\,\frac{c_n^2-a^2-\frac{\gamma_0}{\rho_0}P_0c_n^2}{c_n^2-b^2}\,\frac{H_t^2}{4\pi\rho_0}-$$

$$-\frac{\mu+\frac{A}{4}}{\rho_0}\,\frac{c_n^2-a^2-\frac{\gamma_0P_0}{\rho_0}c_n^2}{c_n^2-b^2}\,\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}-$$

$$-\left(c_n^2-b^2-\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{A-3B+\frac{3}{2}\lambda_0+C}{\rho_0}-\frac{\gamma c_n}{2}\left(c_n^2-b^2-\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)+$$

$$+\frac{\gamma c_n}{2}\frac{H_xH_y}{4\pi\rho_0}+\frac{\Gamma}{c_n}D\frac{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}} \tag{2.7}$$

где

$$D=2c_n^2\left|2c_n^2-a^2-b^2-\frac{H^2}{4\pi\rho_0}-c_n^2\frac{\gamma_0P_0}{\rho_0}+\frac{c_n^2-b^2-\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}}{\left(1-\frac{\gamma_0}{\varkappa}c_n^2\right)^2}\frac{\gamma_0\delta_0\chi}{\rho_0}\right|$$

$$-2\frac{1}{c_n}\Gamma D = c_n\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{\lambda^{(1)} + 2\lambda^{(a)}}{\rho_0} +$$

$$+\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}c_n\frac{\lambda^{(a)}}{\rho_0}\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0}c_n^2}{c_n^2 - b^2} + \frac{1}{c_n}(c_n^2 - b^2)\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0}c_n^2\right)\Gamma^0 \tag{2.8}$$

Полагая в (2.7) $\lambda^1 = \Lambda - \frac{\Gamma}{c_n}\frac{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}}$, причем Λ дает значение коэффициента при v_x в нелинейной скорости волны в недиссипативной задаче, то есть при $\Gamma = 0$, подставляя (2.7) в (1.1), где $v_x = u$, можно получить для первого уравнения в (1.1) в задаче термомагнитоупругости вблизи волны $\lambda_{1,2}$ следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{d\ln\Phi}{dt}u - \frac{1}{2}c_n\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial\beta^2}\frac{\partial v_x}{\partial x_2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial\gamma^2}\frac{\partial v_x}{\partial x_3} + 2\frac{\partial^2\tau}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial v_x}{\partial x_3}\right) =$$

$$= \frac{\Lambda u}{c_n}\frac{\partial u}{\partial\tau} + \Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad dx = H_1 d\tau,\ H_1 = c_n \tag{2.9}$$

Сравним значение для Λ из (2.7) со значением, полученным в магнитной газодинамике [1]. Для членов порядка $\frac{v_x^2}{\lambda^2}$ включительно имеет место $\frac{\rho_0}{\rho} \approx 1 + \operatorname{div}\bar{u}$ вблизи волн (2.2) и эйлеров тензор напряжений в жидкости $\sigma'_{ik} = -(P - P_0)\delta_{ik}$, согласно уравнению адиабаты, в указанном порядке примет вид

$$P = P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = P_0\left(\frac{1}{1 - \operatorname{div}\bar{u}}\right)^n \approx P_0 - nP_0\operatorname{div}\bar{u} - \frac{n(n-1)}{2}P_0(\operatorname{div}\bar{u})^2$$

Лагранжев тензор напряжений выражается в виде [7]

$$\sigma_{ik} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial x_k}{\partial X_l}\sigma'_{il}, \qquad X_i = x_i + u_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_l} \approx \delta_{il} - \frac{\partial u_i}{\partial x_l}$$

или поскольку вблизи волны $\operatorname{div}\bar{u} \approx -\frac{v_n}{\lambda}$,

$$\sigma_{ik} \approx -\frac{nP_0}{\lambda}v_n\delta_{ik} - nP_0\frac{n+1}{2}\frac{v_n^2}{\lambda^2}\delta_{ik} + \frac{v_n^2}{\lambda^2}nP_0\delta_{ik} - nP_0\frac{v_i n_k}{\lambda^2}v_n$$

Сравнивая со значением σ_{ik} работы [3], стр. 297, (8.16), которое вблизи волн (2.2) имеет вид

$$\sigma_{xx} = -\lambda_0\frac{v_n}{\lambda} + \frac{A}{4}\frac{v_n^2}{\lambda^2} + \frac{v_n^2}{\lambda^2}\left(A + 3B - \frac{3}{2}\lambda_0 + C\right)$$

$$\sigma_{yy} = -\lambda_0 \frac{v_n}{\lambda} + \frac{A}{4} \frac{v_y^2}{\lambda^2} + \frac{v_z^2}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda_0}{2} + B + C \right)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{A}{4} v_n v_y \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{A}{4} + B \right) \frac{v_y v_n}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{A}{4} v_n v_y \frac{1}{\lambda^2} + \frac{v_y v_n}{\lambda^2} \left(\frac{A}{4} + \lambda_0 + B \right)$$

получим значения постоянных

$$\lambda_0 = nP_0, \quad \frac{A}{2} + B + \lambda_0 = 0, \quad A + 3B + \frac{3}{2} \lambda_0 + C = -\lambda_0 \frac{n+1}{2} -$$

$$- \frac{A}{4} \frac{H_z^2 (\lambda^2 - a^2)^2}{H_y^2 \lambda^4} \tag{2.10}$$

Подставляя в (2.7), получим при $b = \mu = \zeta^0 = \eta = \Gamma = 0$,

$$\lambda^2 = \Lambda, \quad \lambda^1 = \frac{c_n^2 - \dfrac{H^2}{4\pi\rho_0}}{2c_n^2 - a^2 - \dfrac{H^2}{4\pi\rho_0}} \frac{n+1}{2} + \frac{c_n^2 - a^2}{2c_n^2 - a^2 - \dfrac{H^2}{4\pi\rho_0}} \tag{2.11}$$

что совпадает со значением, полученным в [1].

Для волны $\lambda = \lambda_3$ имеет место по (2.3) $\delta v_n = 0$, и уравнения (1.11) дают условия на характеристике

$$-(\lambda^2 - b^2)\,\delta v_z - \frac{\lambda}{4\pi\rho_0} H_n \delta h_z = \frac{\lambda}{\rho_0} \mu^{(a)} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}, \qquad -\lambda \delta h_z = H_n \delta v_z + \zeta^0 \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2}$$

При $\mu^{(a)} = 0$, $\zeta^0 = 0$ получится $\lambda_3^2 = b^2 + \dfrac{H_n^2}{4\pi\rho_0}$, то есть скорость волны не зависит ни от температурных, ни от нелинейных эффектов. В общей задаче

$$v_z \lambda^1 = -\frac{1}{2c_n^2} \frac{H_n^2}{4\pi\rho_0} \zeta^0 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \frac{1}{\delta v_z} - \frac{1}{2\rho_0} \mu^{(a)} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \frac{1}{\delta v_z}$$

где

$$v_z \lambda^1 = \lambda_3 = \sqrt{b^2 + \frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}}$$

Учитывая, что для волны λ_3 величиной основного порядка является v_z, в первом уравнении (1.1) следует взять $u = v_z$ и, подставляя λ^1 в (1.1), можно получить

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{d \ln \Phi}{dt} v_z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_2 \partial x_3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \zeta^0 \frac{H_n^2}{\lambda_3^2 4\pi\rho_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \mu^{(a)} \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}, \qquad dx = \lambda_3 dt \tag{2.12}$$

Как видно из (2.12), нелинейные члены выпали из уравнения (1.1) вблизи поперечной волны $\lambda=\lambda_3$.

3. Для определения лучевого решения Φ в (1.1) применим к линейным уравнениям термомагнитоупругости (2.1) метод [8]. В целях общности можно рассмотреть анизотропную упругую среду, для которой при отсутствии температурных напряжений

$$\sigma_{ik} = a_{ikjl}\varepsilon_{jl}, \quad a_{ikjl} = a_{kijl} = a_{iklj} = a_{jlik} \tag{3.1}$$

В [8] рассмотрен лучевой метод для такой среды.

В задаче магнитотермоупругости имеем уравнения § 1

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial b_{ikjl}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_l}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_j H_m}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial H_i H_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \gamma_0\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

$$\nabla^2\theta = \left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\,\partial t}\right) + \tau_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\,\partial t}\right) \tag{3.2}$$

где

$$b_{ikjl} = a_{ikjl} + A_{ikjl}$$

$$A_{ikjl} = H_i H_l\delta_{kj} + H_k H_l\delta_{ij} - 2H_i H_k\delta_{lj} - H_j H_l\delta_{ik} + H^2\delta_{lj}\delta_{ik} \tag{3.3}$$

Следует отметить, что $A_{iklj} = A_{kijl}$, но $A_{ikjl} \neq A_{iklj}$, $A_{jlik} \neq A_{ikjl}$, то есть не все свойства симметрии коэффициентов a_{ikjl} сохраняются для A_{ikjl}, что несколько затрудняет применение лучевого подхода [8] к данной задаче.

Трудности представляет также и термоупругий член, что приводит к тому, что характеристическая форма $A = \frac{1}{\rho}(b_{ikjl} + \gamma_0 P\lambda_k\lambda_l)\times S_i S_j \tau_k \tau_l$, где $\tau_k = \frac{\partial\tau}{\partial x_k}$ — компоненты вектора нормали к волне, S_i — координаты собственного вектора характеристической матрицы для уравнений (3.2), не является однородной функцией по τ_k. Тем не менее, лучевой метод применим к (3.2), и в результате получается решение вдоль луча для вектора перемещения

$$u_i = S_i\Phi f_0(t-\tau), \qquad \Phi = \frac{1}{\sqrt{\rho J}}\, e^{-\int\frac{K}{\rho}d\tau_A}\ \text{const} \tag{3.4}$$

где S_i есть собственный вектор характеристической матрицы, J — функциональный определитель для перехода от декартовых к лучевым координатам, причем $J = c_n\Sigma$ [6], Σ — площадь волны внутри заданной лучевой трубки, τ_A — параметр вдоль луча, даваемый уравнением луча

$$\frac{dt}{d\tau_A} = \tau_k\frac{\partial A}{\partial\tau_k}, \quad K = \frac{\tau^2\gamma_0\eta(\tau_i S_i)^2}{\left(\tau^2 - \dfrac{\tau_0}{\varkappa}\right)^2}, \quad f_0(t-\tau)$$

дает профиль волны. Лишь для квадратичной однородной по τ_k зависимости, то есть в магнитоупругости, $\tau_k \frac{\partial A}{\partial \tau_k} = 1$, $\tau_k = t$. В частности, в одномерной задаче по x получится

$$\tau_1 = \frac{1}{2} x \frac{1 - \frac{\tau_0}{\varkappa} c_n^2}{a^2 - c_n^4 \frac{\tau_0}{\varkappa}}$$

Для задачи магнитоупругости получится из (3.4)

$$\rho \Phi^2 \sum c_n = \mathrm{const} \qquad (3.5)$$

что выражает закон сохранения энергии волнового фронта [9, 10]. Для определения $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}$ в уравнениях (2.9), (2.12) следует использовать (1.2) и уравнения (2.2), (2.3) для скоростей волн $c_n^{1,2}$ и $c_n^{(3)}$. Для волны $c_n = c_n^{(3)}$ получится

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = c_n - 2 \frac{b^2}{c_n} - \frac{a_1^2 b^2}{c_n^3} - \frac{1}{c_n^3} (c_n^2 - b^2)^2 + \frac{1}{c_n^3} \frac{H_z^2}{4\pi\rho_0} b^2$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} = c_n - 2 \frac{b^2}{c_n} - \frac{a_1^2 b^2}{c_n^3} - \frac{1}{c_n^3} (c_n^2 - b^2)^2 + \frac{1}{c_n^3} \frac{H_y^2}{4\pi\rho_0} b^2$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = - b^2 \frac{H_y H_z}{c_n^3 4\pi\rho_0}, \qquad a_1^2 = \frac{H^2}{4\pi\rho_0} \qquad (3.6)$$

Для $H_z = 0$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$, то есть выбором осей y, z всегда можно (и в общей задаче) добиться выпадения из (1.1) смешанной производной. При $b = 0$, то есть в магнитной газодинамике, в уравнении (2.12) [10], $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$.

Для волн $c_n^{1,2}$, даваемых (2.2), указанные коэффициенты несколько громоздки, однако в задаче магнитоупругости они упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = \frac{c_n^2 \mu^2 - \omega\nu}{c_n^3 \mu^3} \left\{ (a^2 - b^2) a_1^2 - c_n^2 (a^2 - b^2 - a_1^2) - \frac{H_y^2}{4\pi\rho_0} (a^2 - b^2) \right\} +$$

$$+ \frac{2 c_n^2 (a^2 + a_1^2) b^2 \mu^2 - \omega\nu (c_n^4 - a^2 b^2 - a_1^2 b^2)}{c_n^3 \mu^4}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = (a^2 - b^2) \frac{H_z H_y}{4\pi\rho_0} \frac{c_n^2 \mu^2 - \nu\omega}{c_n^3 \mu^3} \qquad (3.7)$$

причем формула для $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma_1^2}$ имеет то же выражение, что и $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta_1^2}$, где заменено H_z на H_y,

$$\omega = c_n^4 - c_n^2 (a^2 + b^2 + a_1^2) - b^2 (a^2 + a_1^2)$$

$$\nu = 6c_n^2 - a^2 - a_1^2 - b^2$$

Остается выяснить смысл величин v_{x_2}, v_{x_3}, фигурирующих в (1.1), для задачи магнитоупругости вблизи волн $\lambda_{1,2}$. Из уравнения индукции в проекции на оси x, z и уравнения движения в проекции на ось z в (2.1) можно найти после упрощения

$$-c_n \frac{\partial h_x}{\partial x} = H_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - H_x \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$-c_n \frac{\partial h_z}{\partial x} = H_z \frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad \theta = P_0 c_n v_x$$

$$-\frac{\partial K}{\partial x} = \left(\frac{\mu}{\rho_0} - c_n^2 + \frac{\gamma_0}{\rho_0} P_0 c_n^2\right) \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\gamma_0}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_n \tag{3.8}$$

где $K = \left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_z^2}{4\pi\rho_0}\right) v_z$.

Используя (2.2) и обозначая $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, окончательно можно получить, что в (1.1) $v_{x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$, $v_{x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$

$$h_x = -\frac{1}{c_n} H_y \frac{c_n^2 - b^2}{c_n^2 - b^2 - \frac{H_z^2}{4\pi\rho_0}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad h_z = -\frac{H_z}{c_n} v_x$$

$$v_z = \frac{c_n^2 - b^2}{c_n^2 - b^2 - \frac{H_z^2}{4\pi\rho_0}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{3.9}$$

откуда ясен смысл v_{x_2}, v_{x_3}, причем термические эффекты не влияют на (3.9). Таким образом, получены упрощенные нелинейные уравнения (1.1), (1.9) вблизи волн $\lambda_{1,2}$ и (2.12) вблизи волны λ_3.

4. Определим теперь нелинейные уравнения вблизи волн $\lambda_{1,5}$, близких по свойствам магнитоупругим волнам и соответствующих колебаниям низкой частоты, что дает низшие производные в (1.10). Из (1.10) получим в основном порядке

$$\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial \operatorname{div} \bar{u}}{\partial t} = 0, \qquad \delta\theta = \frac{\gamma_0 T}{c_n \gamma} \delta v, \tag{4.1}$$

Тогда в линейном решении вблизи волны получится $\lambda_{4,5} = c_n$,

$$\delta h_y = \frac{1}{c_n}\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{c\rho_0}}{\frac{H_y}{4\pi\rho_0}}\delta v_x$$

$$\delta v_y = -\frac{H_x}{H_y}\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{c\rho_0}}{c_n^2 - b^2}\delta v_x, \quad \delta h_z = \delta v_z = \delta h_x = 0 \tag{4.2}$$

где для скорости волны c_n имеет место

$$c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c} = \frac{\frac{H_y^2}{4\pi\rho_0}(c_n^2 - b^2)}{c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}} \tag{4.3}$$

В основном порядке из (1.10) и (4.1) $\operatorname{div}\bar{q} = \varkappa_1\nabla^2\theta$,

$$\delta\theta = \frac{T\gamma_0}{c\rho_0}\delta v_x + \chi v_x\delta v_x - \frac{1}{c^2 c_n^2}T\gamma_0\varkappa_1\nabla^2 v_x + \frac{T\gamma_0}{cc_n}n_y\delta v_y \tag{4.4}$$

где $\chi = -\frac{T}{cc_n^2}\left(2\gamma_0 - \nu_1 - \frac{2\nu_2 T\gamma_0}{c} + \frac{\gamma_0^2}{c}\right) - \frac{2T\gamma_0 + T\nu_0}{cc_n^2}\frac{v_y\delta v_y}{v_x\delta v_x}$, причем $\frac{v_y}{v_x}$ дается (4.2).

Повторяя выкладки § 2, получим $c_n = c^0 + \lambda^1 v_x$

$$D_1\lambda^1 = (c_n^2 - b^2)\frac{H_y^2}{4\pi\rho_0} + \left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}\right)\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} -$$

$$-\frac{\frac{7}{3}\mu + \frac{3A}{4} + K + B}{\rho_0}\,\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{4\pi\rho_0}}{c_n^2 - b^2}\,\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} -$$

$$-\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{A + 3B + \frac{3}{2}\lambda_0 + C}{\rho_0} +$$

$$+\frac{\chi}{2}\frac{\gamma_0}{\rho_0}c_n^2\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) - \frac{\gamma_0 c_n}{2}\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) +$$

$$+\frac{\gamma_0 c_n}{2}\frac{H_x H_y}{4\pi\rho_0} - \Gamma_1 D_1\frac{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}} \tag{4.5}$$

где

$$\zeta_3 = \left(\frac{\gamma_0 - \nu_1}{c_n^2}\frac{\gamma_0 T}{c} + \nu_3\frac{\gamma_0^2 T^2}{c^2 c_n^2}\right)\frac{c_n}{\rho_0}$$

$$\nu_4 = -2(\gamma_0 + \nu_2)\frac{\gamma_0 T}{\rho_0 c c_n}\frac{H_x}{H_y}\frac{c_n^2 - a^2 - \dfrac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}}{c_n^2 - b^2}$$

$$D_1 = c_n^2\left(2c_n^2 - a^2 - b^2 - \frac{H^2}{4\pi\rho_0} - \frac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}\right)$$

$$-2D_1\Gamma_1 = c_n^2\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}{\rho_0} +$$

$$+\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}c_n^2\frac{\lambda^{(a)}}{\rho_0}\frac{c_n^2 - a^2 - \dfrac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}}{c_n^2 - b^2} + (c_n^2 - b^2)\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}\right)\zeta^0 \quad (4.6)$$

Полагая в (4.5) $\lambda^1 = \Lambda_1 + \dfrac{\Gamma_1}{c_n}\dfrac{\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}}$, причем Λ_1 дает значение λ^1 при $\Gamma_1 = 0$, подставляя (4.5) и (1.1), где $v_x = u$, можно для первого уравнения в (1.1) в задаче вязкотермомагнитоупругости вблизи волн $\lambda_{4,5}$ получить

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{d\ln\Phi}{dt}u - \frac{1}{2}c_n\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial v_x}{\partial x_2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial v_x}{\partial x_3} - 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial v_x}{\partial x_3}\right) =$$

$$= \frac{\Lambda_1 u}{c_n}\frac{\partial u}{\partial\tau} + \Gamma_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad dx = c_n d\tau \qquad (4.7)$$

где Λ_1, Γ_1 даются (4.5), (4.6). Мы видим, что для волн $\lambda_{4,5}$ параметр τ_0 не влияет на вид уравнения (4.7), что также отмечено в [11, 12], в то время как λ_1 входит как эффект диффузии волны наряду с вязкими коэффициентами $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ и ζ^0. Смысл величин v_{x_2}, v_{x_3}, как видно из (3.9), не зависит от температурных эффектов, поэтому v_{x_2}, v_{x_3} даются и здесь (3.9).

Значение лучевого решения совпадает с магнитоупругим и дается (3.5), только вместо a^2 нужно писать $a^2 + \dfrac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}$. Наконец, коэффициенты $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}$, $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}$, $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}$ в (4.7) совпадают с магнитоупругими (3.7), где a^2 заменяется вышеуказанным способом. Таким образом, получены упрощенные нелинейные уравнения движения термомагнитоупругой среды (1.1), которые конкретизированы в виде (2.9), (2.7), (2.8), (3.4), (3.7) для волн $\lambda_{1,2}$, в виде (2.12), (3.6), (3.5) для волны λ_3 и в виде (4.5), (4.6), (4.7), (3.7) для волн $\lambda_{4,5}$.

Институт Механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 III 1973

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՋԵՐՄԱՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՃԱԿԱՏՆԵՐԻ ՄՈՏ

Ամփոփում

Որոշվում են մածուցիկ ջերմամագնիսաառաձգական միջավայրի շարժման պարամետրերը թույլ հարվածային ալիքների շրջակայքում։ Ստացված են պարզեցված հավասարումներ, որոնք նկարագրում են պարամետրերի փոփոխությունները դանդաղ և արագ ջերմաառաձգական, ձևափոխված ալֆենյան դանդաղ և արագ ձևափոխված մագնիսաառաձգական ալիքների մոտ։

THE EQUATIONS OF VISCOUS THERMOMAGNETOELASTIC NONLINEAR MEDIUM NEAR THE WAVE FRONTS

A. G. BAGDOEV

Summary

The problem of determination of the parameters of medium motion near a wave for a viscous thermomagnetoelastic medium is considered. The simplified equations, describing the neighbourhood of fast and slow thermoelastic, modified Alfen waves as well as of fast and slow modified magnetoelastic waves, are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн. Ж. вычис. матем. и матем. физики, т. 12, № 6, 1972.
2. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Вывод нелинейных уравнений движения среды вблизи волны. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXV, № 1, 1972.
3. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. Изд. „Наука", М., 1966.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. „Мир", М., 1970.
5. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.* Газовая динамика. Изд. „Высшая школа", М., 1965.
6. *Jeffrey A., Tanutti T.* Nonlinear wave propagation, New-York, 1964.
7. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. „Мир" М., 1972.
8. *Бабич В. М.* Лучевой метод для анизотропной упругой среды. Вопросы динамической теории. Л., т. V, 1961.
9. *Рыжов О. С., Шефтер Г. П.* Об энергии звуковых волн. ПММ. т. XXVI, в. 5, 1962.
10. *Минасян М. М.* О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. Докл. АН Арм.ССР, т. LV, № 5, 1972.
11. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Изд. АН Эстонской ССР, Таллин, 1972.
12. *Попов Е. Б.* Динамическая связная задача термоупругости. ПММ, № 2, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 1, 1974 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

О СВЯЗИ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА, ПОЛУЧЕННЫМИ В УПРУГОЙ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКАХ

В рамках соотношений теории малых упруго-пластических деформаций в геометрически линейной постановке рассматривается равновесие тел при смешанных краевых условиях. С помощью минимальных принципов краевой задачи при подходящем выборе статически и кинематически возможных распределений напряжений и деформаций получены некоторые неравенства, связывающие решения краевой задачи в упругой и упруго-пластической постановках.

1. В прямоугольной декартовой системе координат x_i рассмотрим тело объема v, находящееся под действием массовых сил X_i, поверхностных нагрузок p_i, приложенных на части поверхности тела s_p, и перемещений u_{i0}, заданных на остальной части поверхности s_u.

В качестве физических соотношений принимаются уравнения теории малых упруго-пластических деформаций упрочняющегося материала при только активных процессах деформирования [1] во всей среде

$$
\begin{aligned}
\sigma &= K\theta \\
\sigma_i &= 3G\varepsilon_i\,[1-\omega(\varepsilon_i)]
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь σ — среднее гидростатическое давление, θ — объемная деформация, σ_i и ε_i — интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига, K и G — постоянные, определяющие материал с точностью обобщенного закона Гука.

Отклонение связи между напряжениями и деформациями от линейного закона характеризуется функцией $\omega(\varepsilon_i)$, которая удовлетворяет условиям упрочнения

$$
1 > \omega + \varepsilon_i \frac{d\omega}{d\varepsilon_i} > \omega \geq 0, \qquad \frac{d\omega}{d\varepsilon_i} > 0 \tag{1.2}
$$

С помощью (1.1) связь между компонентами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij}, \qquad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} \\
\varepsilon'_{ij} = A_{ijhk}\sigma_{hk}, \qquad \varepsilon''_{ij} = \overline{A}_{ijhk}\sigma_{hk}, \qquad \sigma'_{ij} = A^{-1}_{ijhk}\varepsilon_{hk}, \qquad \sigma''_{ij} = \overline{A}^{-1}_{ijhk}\varepsilon_{hk}
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

где ε'_{ij} и ε''_{ij} — упругая и пластическая составляющие тензора деформаций, A_{ijhk} и A^{-1}_{ijhk} — тензоры упругих коэффициентов и модулей упругости материала. Тензор $\overline{A}_{ijhk}$ получается из тензора A_{ijhk} путем замены коэффициента Пуассона ν и модуля Юнга E через

$$\tilde{\nu} = 1/2, \qquad \overline{E} = \frac{3G(1-\omega)}{\omega} \tag{1.4}$$

Очевидно, что в рассмотренной постановке упруго-пластическая краевая задача ничем не отличается от соответствующей краевой задачи нелинейной теории упругости.

В силу однозначной разрешимости краевой задачи минимальные принципы для напряжений и деформаций приобретают абсолютный характер.

Это означает, что сопряженная полная потенциальная энергия*)

$$\overline{\Pi}^* = \int_v \left[\int_0^{\sigma_{ij}^*} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right] dv - \int_{s_u} \sigma_{ij}^* n_j u_i^0 ds \tag{1.5}$$

и полная потенциальная энергия

$$\Pi^0 = \int_v \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}^0} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right] dv - \int_v X_i u_i^0 dv - \int_{s_p} P_i u_i^0 ds \tag{1.6}$$

определенные соответственно для всех статически возможных напряжений σ_{ij}^* и для всех кинематически возможных деформаций ε_{ij}^0 свои абсолютно минимальные значения получают только при истинных напряжениях σ_{ij} и истинных деформациях ε_{ij}.

С помощью (1.3) дополнительную работу деформаций

$$\overline{A}^* = \int_v \left| \int_0^{\sigma_{ij}^*} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right| dv \tag{1.7}$$

соответствующую статически возможным напряжениям σ_{ij}^*, и работу кинематически возможных деформаций ε_{ij}^0

$$A^0 = \int_v \left| \int_0^{\varepsilon_{ij}^0} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right| dv \tag{1.8}$$

можно представить в виде

$$\overline{A}^* = \overline{A}^{*\prime} - \Delta\overline{A}^{*\prime\prime}, \quad A^0 = A^{0\prime} - A^{0\prime\prime} \tag{1.9}$$

где приняты обозначения

---

*) Для простоты сохранена терминология теории упругости.

$$\overline{A}^{*\prime} = \frac{1}{2}\int_v A_{ijhk}\sigma^*_{hk}\sigma^*_{ij}dv \tag{1.10}$$

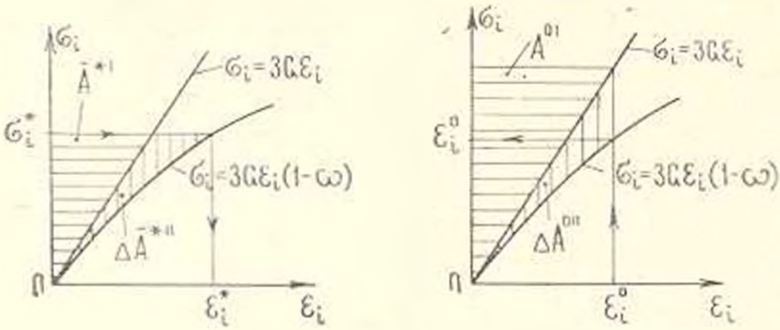
$$A^{0\prime} = \frac{1}{2}\int_v A^{-1}_{ijhk}\varepsilon^0_{hk}\varepsilon^0_{ij}dv \tag{1.11}$$

$$\Delta\overline{A}^{*\prime\prime} = \int_v\left[\int_0^{\sigma^*_{ij}}\varepsilon^*_{ij}d\sigma_{ij}\right]dv \tag{1.12}$$

$$\Delta A^{0\prime\prime} = \int_v\left[\int_0^{\varepsilon^0_{ij}}A^{-1}_{ijhk}\varepsilon^*_{hk}d\varepsilon_{ij}\right]dv \tag{1.13}$$

Здесь $\overline{A}^{*\prime}$ и $A^{0\prime}$ — дополнительная работа и работа деформаций, которые соответствуют статически возможным напряжениям σ^*_{ij} и кинематически возможным деформациям ε^0_{ij} по обобщенному закону Гука, а $\Delta\overline{A}^{*\prime\prime}$ и $\Delta A^{0\prime\prime}$ — их поправки из-за нелинейности физических соотношений.

На плоскости σ_i, ε_i (фиг. 1) даны механические изображения представлений (1.9) для единичного объема.



Фиг. 1.

Из минимального принципа для напряжений, когда в качестве статически возможного распределения выбрано распределение напряжений классической теории упругости $\sigma^{(e)}_{ij}$, получим

$$\frac{1}{2}\int_v A_{ijhk}\sigma^{(e)}_{hk}\sigma^{(e)}_{ij}dv - \Delta\overline{A}^{(e)\prime\prime} - \int_{s_u}\sigma^{(e)}_{ij}n_j u_{i0}ds -$$

$$- \frac{1}{2}\int_v A_{ijhk}\sigma_{hk}\sigma_{ij}dv - \Delta\overline{A}'' - \int_{s_u}\sigma_{ij}n_j u_{i0}ds \geqslant 0 \tag{1.14}$$

С другой стороны, из минимального принципа краевой задачи классической теории упругости в случае, когда в качестве статически возможного принято действительное распределение напряжений упруго-пластической краевой задачи σ_{ij}, следует

$$\frac{1}{2}\int\limits_v A_{ijhk}\sigma_{hk}\sigma_{ij}dv - \int\limits_{s_u}\sigma_{ij}n_j u_{i0}ds - \frac{1}{2}\int\limits_v A_{ijhk}\sigma_{hk}^{(e)}\sigma_{ij}^{(e)}dv + \int\limits_{s_u}\sigma_{ij}^{(e)}n_j u_{i0}ds \geqslant 0 \tag{1.15}$$

Складывая неравенства (1.14) и (1.15), приходим к результату

$$\Delta \bar{A}^{(e)''} \geqslant \Delta \bar{A}'' \tag{1.16}$$

Таким образом, действительная поправка к дополнительной работе $\Delta\bar{A}''$ не больше, чем та, которая соответствует напряжениям классической теории упругости $\sigma_{ij}^{(e)}$.

Аналогичным образом из минимальных принципов деформаций для поправки к работе деформаций $\Delta A''$ можно получить неравенство обратного смысла

$$\Delta A'' \geqslant \Delta A^{(e)''} \tag{1.17}$$

то есть действительная поправка к работе деформаций $\Delta A''$ не меньше, чем та, которая соответствует деформациям классической теории упругости $\varepsilon_{ij}^{(e)}$.

Очевидно, что значения поправок к дополнительной работе $\Delta\bar{A}''$ и работе деформаций $\Delta A''$ могут играть роль своеобразных интегральных критериев развития пластического деформирования во всем теле. С этой точки зрения неравенства (1.16) и (1.17) позволяют на базе краевой задачи классической теории упругости получить односторонние интегральные оценки сверху и снизу пластического деформирования во всем теле.

Целесообразно неравенствам (1.16) и (1.17) придать удельный характер, разделив их на объем тела v,

$$0 \leqslant \frac{1}{v}\int\limits_v\left[\int\limits_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon'_{ij}d\sigma_{ij}\right]dv \leqslant \frac{1}{v}\int\limits_v\left[\int\limits_0^{\sigma_{ij}^{(e)}} \varepsilon'_{ij}d\sigma_{ij}\right]dv$$
$$\frac{1}{v}\int\limits_v\left[\int\limits_0^{\varepsilon_{ij}} A^{-1}_{ijhk}\varepsilon'_{hk}d\varepsilon_{ij}\right]dv \geqslant \frac{1}{v}\int\limits_v\left[\int\limits_0^{\varepsilon_{ij}^{(e)}} A^{-1}_{ijhk}\varepsilon'_{hk}d\varepsilon_{ij}\right]dv \tag{1.18}$$

2. На основе уравнения виртуальных работ для самоуравновешенной разности напряжений $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}$ и совместных деформаций ε_{ij}, которым на s_u отвечают перемещения u_{i0}, справедливо равенство

$$\int_v [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}] \varepsilon_{ij} dv = \int_{s_u} [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}] n_j u_{i0} ds \tag{2.1}$$

Имея в виду (2.1) и представление

$$\int_v A_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} dv = \int_v \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dv = \int_v \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon^{*}_{ij}) dv \tag{2.2}$$

из (1.15) получим

$$I \geqslant \int_v \sigma_{ij} \varepsilon^{*}_{ij} dv \tag{2.3}$$

где

$$I = \int_v [2\sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij}^{(e)}] dv \tag{2.4}$$

Так как

$$\sigma_{ij} \varepsilon^{*}_{ij} \geqslant 0 \tag{2.5}$$

из (2.3) следует

$$I \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Вычитая из (2.6)

$$\int_v [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}][\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(e)}] dv = 0 \tag{2.7}$$

получим

$$\int_v [\sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{(e)}] dv \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Рассмотрим частные случаи:

а) случай защемленного тела ($u_{i0} = 0$ на s_u).

В этом случае

$$\int_v [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}] \varepsilon_{ij} dv = 0 \tag{2.9}$$

Вычитая из (2.6) два раза (2.9) и имея в виду уравнение виртуальных работ, приходим к результату

$$\int_v [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij}^{(e)}] dv - \int_v X_i [u_i - u_i^{(e)}] dv + \int_{s_p} P_i [u_i - u_i^{(e)}] ds \geqslant 0 \tag{2.10}$$

б) случай штампов, когда отсутствуют массовые силы в объеме тела и поверхностные нагрузки на s_p. Тогда

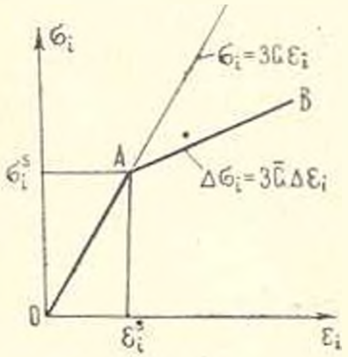
$$\int_v \sigma_{ij}^{(e)}[\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(e)}]\, dv = 0 \tag{2.11}$$

и с учетом (2.6) получим

$$\int_v [\sigma_{ij}^{(e)}\varepsilon_{ij}^{(e)} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}]\, dv = \int_{s_u} [\sigma_{ij}^{(e)} - \sigma_{ij}]\, n_j u_{i0}\, ds \geqslant 0 \tag{2.12}$$

Отметим, что аналогичные вопросы без каких-либо осложнений можно рассмотреть как с учетом нелинейности связи между объемной деформацией и средним гидростатическим давлением, так и с учетом изменения температуры тела.

3. Хотя и вычисление значений удельных поправок, соответствующих решениям краевой задачи по классической теории упругости, не связано со специальными трудностями, целесообразно пользоваться упрощенными схемами физических соотношений. Здесь уместно отметить, что, конкретизируя физические соотношения, можно получить двусторонние одинаковые оценки для дополнительной работы и работы деформаций. Проиллюстрируем это на примере кусочно-линейной зависимости между интенсивностями касательных напряжений и деформаций сдвига.



Фиг. 2.

Пусть [1] (фиг. 2)

$$\begin{gathered} \sigma_i - \sigma_i^s = 3G(1-\lambda)(\varepsilon_i - \varepsilon_i^s), \quad (\lambda = \text{const}) \\ \sigma_i^{(e)} - \sigma_i^s = 3G(\varepsilon_i^{(e)} - \varepsilon_i^s) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Тогда неравенства (1.18) примут вид

$$\frac{1}{v}\int_{v_p} (\sigma_i - \sigma_i^s)^2\, dv \leqslant \frac{1}{v}\int_{v_p^{(e)}} (\sigma_i^{(e)} - \sigma_i^s)^2\, dv$$

$$\frac{1}{v}\int\limits_{v_p}(\varepsilon_i-\varepsilon_i^s)^2\,dv \geqslant \frac{1}{v}\int\limits_{v_p^{(e)}}(\varepsilon_i^{(e)}-\varepsilon_i^s)^2\,dv \tag{3.2}$$

Здесь v_p — часть объема тела, где действительные пластические деформации отличны от нуля $(\varepsilon_i > \varepsilon_i^s)$, $v_p^{(e)}$ — та часть, в которой отличны от нуля пластические деформации, вычисленные по напряжениям классической теории упругости $(\varepsilon_i^{(e)} > \varepsilon^s)$.

С учетом (3.1) первое неравенство (3.2) запишем в виде

$$\frac{(1-\lambda)^2}{v}\int\limits_{v_p}(\varepsilon_i-\varepsilon_i^s)^2\,dv \leqslant \frac{1}{v}\int\limits_{v_p^{(e)}}(\varepsilon_i^{(e)}-\varepsilon^s)^2\,dv \tag{3.3}$$

Разделив обе части (3.3) на $(1-\lambda)^2$ и присоединив полученное со вторым неравенством (3.2), приходим к следующей двусторонней оценке для работы деформаций:

$$A=\frac{1}{v}\int\limits_{v_p^{(e)}}(\varepsilon_i^{(e)}-\varepsilon_i^s)^2\,dv \leqslant \frac{1}{v}\int\limits_{v_p}(\varepsilon_i-\varepsilon_i^s)^2\,dv \leqslant \frac{1}{v(1-\lambda)^2}\int\limits_{v_p^{(e)}}(\varepsilon_i^{(e)}-\varepsilon_i^s)^2\,dv=B \tag{3.4}$$

Используя соотношения (3.1), неравенствам (3.4) можно придать другой вид, записывая их в терминах напряжений

$$C=\frac{(1-\lambda)^2}{v}\int\limits_{v_p^{(e)}}(\sigma_i^{(e)}-\sigma_i^s)^2\,dv \leqslant \frac{1}{v}\int\limits_{v_p}(\sigma_i-\sigma_i^s)^2\,dv \leqslant \frac{1}{v}\int\limits_{v_p^{(e)}}(\sigma_i^{(e)}-\sigma_i^s)^2\,dv=D \tag{3.5}$$

Очевидно, оценки (3.4) и (3.5) идентичны.

Эти оценки дают возможность на базе решений классической теории упругости сравнивать совершенно разные задачи и иногда определять, в какой задаче более интенсивно развит процесс действительного пластического деформирования в среднем. Например, если в одной задаче интервал AB (CD) на числовой оси целиком находится правее аналогичного интервала другой задачи A_1B_1 (C_1D_1), то, очевидно, средний уровень развития процесса пластического деформирования в этой задаче более высок.

Полезно заметить, что ширина вилки AB (CD) при таком сравнении никакого значения не имеет, так как относительное расхождение ее границ не зависит от характера задачи и для данного материала всегда одинаково

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=(1-\lambda)^2 \tag{3.6}$$

Варьируя способ приложения одних и тех же внешних воздействий, с помощью двусторонних оценок (3.4) можно добиться более удачного нагружения данного тела в смысле рационального использования материала.

Рассмотрим кручение сплошного круглого цилиндра радиуса R. Обозначая угол закручивания на единицу длины цилиндра вокруг его оси z через α, а радиус поверхности раздела упругой и пластической области через a, на основе гипотез [2]

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \alpha x, \quad \varepsilon_{zx} = -\alpha y \tag{3.7}$$

имеем

$$\varepsilon_i = \frac{\alpha r}{\sqrt{3}}, \qquad \sigma_i = \begin{cases} \sqrt{3}\, G\alpha r, & 0 \leqslant r \leqslant a \\ \sqrt{3}\, G\alpha r \left[1 - \lambda\left(1 - \dfrac{a}{r}\right)\right], & a \leqslant r \leqslant R \end{cases} \tag{3.8}$$

При этом связь между углом закручивания α и крутящим моментом M выражается формулой

$$M = \frac{\pi\alpha G}{2} R^4 (1 - \lambda k), \qquad k = 1 - \frac{4}{3}\frac{a}{R} + \frac{1}{3}\frac{a^4}{R^4} \tag{3.9}$$

Из решения задачи по классической линейно-упругой теории при том же значении крутящего момента (3.9) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(e)} &= \frac{\alpha^{(e)} r}{\sqrt{3}} = \varepsilon_i (1 - \lambda k) \\ \sigma_i^{(e)} &= \sqrt{3}\, G\alpha^{(e)} r = \sqrt{3}\, G\alpha r (1 - \lambda k) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Используя (3.8) и (3.10), получим

$$m = \frac{\int\limits_{v_p^{(e)}} (\sigma_i^{(e)} - \sigma_i^s)^2\, dv}{\int\limits_{v_p} (\sigma_i - \sigma_i^s)^2\, dv} =$$

$$= \frac{\dfrac{(1-\lambda k)^2}{4}[1 - \rho^4(1+h)^4] - \dfrac{2\rho}{3}(1-\lambda k)[1 - \rho^3(1+h)^3] + \dfrac{\rho^2}{2}[1 - \rho^2(1+h)^2]}{(1-\lambda)^2\left[\dfrac{1}{4}(1-\rho^4) - \dfrac{2\rho}{3}(1-\rho^3) + \dfrac{\rho^2}{2}(1-\rho^2)\right]}$$

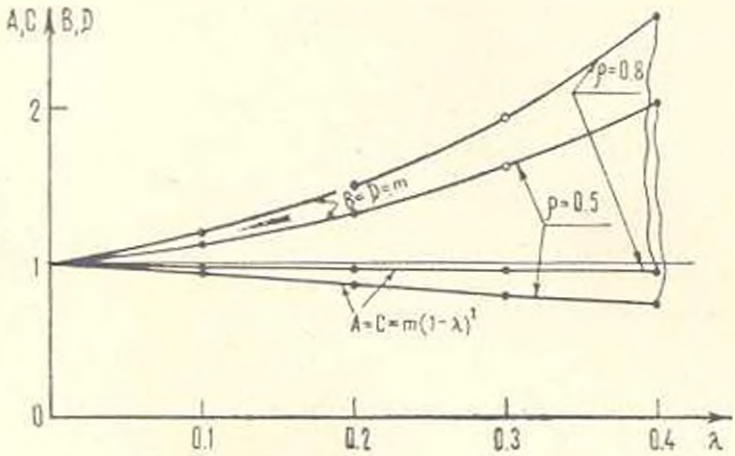
$$n = \frac{\int\limits_{v_p} (\varepsilon_i - \varepsilon_i^s)^2\, dv}{\int\limits_{v_p^{(e)}} (\varepsilon_i^{(e)} - \varepsilon_i^s)^2\, dv} = \frac{1}{m(1-\lambda)^2}, \quad \rho = \frac{a}{R}, \qquad h = \frac{\lambda k}{1 - \lambda k} \tag{3.11}$$

В нижеприведенной таблице представлены значения m для некоторых λ и относительного радиуса поверхности раздела упругой и пластической областей цилиндра ρ.

Таблица 1

λ \ ρ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	2	3	4	5	6	7
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.1487	1.1752	1.1986	1.2174	1.2300	1.2346
0.2	1.3490	1.4142	1.4722	1.5191	1.5508	1.5625
0.3	1.6302	1.7539	1.8651	1.9562	2.0180	2.0408
0.4	2.0465	2.2636	2.4613	2.6247	2.7364	2.7778

С помощью данных этой таблицы на фиг. 3 построены области, заключенные между верхними и нижними относительными границами оценок (3.4) и (3.5) для случаев, когда толщина пластического слоя составляет 0.5 и 0.2 части радиуса цилиндра (второй и пятый столбцы таблицы). Из



Фиг. 3.

фигуры и таблицы видно, что с увеличением пластической области (с уменьшением ρ) верхняя оценка улучшается, приближаясь, а нижняя оценка — ухудшается, удаляясь от действительных значений работы деформаций. Следовательно, для случаев хорошо развитых пластических областей можно с определенной уверенностью пользоваться верхней оценкой B или D.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 IX 1972

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՄԱՐՄՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԴՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ՍՏԱՑՎԱԾ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԵՂԱԾ ԿԱՊԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության շրջանակներում դիտարկվում է մարմնի հավասարակշռությունը խառը եզրային պայմանների առկայությամբ։ Ստատիկորեն և կինեմատիկորեն հնարավոր լարումների ու դեֆորմացիաների դաշտերի համապատասխան ընտրությամբ օգտագործվում են եզրային խնդրի մինիմալ սկզբունքները և ստացվում են մի քանի անհավասարություններ, որոնք կապ են հաստատում եզրային խնդրի առաձգական և առաձգա-պլաստիկական դրվածքներով ստացված լուծումների մեջ։

ON CORRELATION BETWEEN SOLUTIONS TO A BOUNDARY PROBLEM FOR A DEFORMED BODY RECEIVED IN ELASTIC AND ELASTIC-PLASTIC STATEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

Equilibrium of bodies under mixed boundary conditions in terms of correlations of the theory of small elastic-plastic deformations is considered in geometrically linear statement.

Using minimum principles of a boundary problem with pertinent choice of statically and kinematically possible stress-strain distributions, certain inequalities are obtained correlating the boundary problem solutions in elastic and elastic-plastic statements.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. ИЛ, М., 1961.