

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

էշ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Յու. Մ. Մովսիսյան—Ավտոմորֆիզմների և թվազիավտոմորֆիզմների խմբեր 65

Ն. Ա. Միրզախանյան—Անվերջ շափանի համոտոպիկ խմբերի համոտոպիական ինվարիանտությունը 71

Յու. Մ. Բաղդասարյան—Ա. Շ.—բազմությունների որոշ հատկությունների մասին 75

Ա. Գ. Հովսեփյան—Տոպոլոգիական տարածությունների բոլոր բիկոմպակտ և բոլոր տիխոնովյան յայնաքոմների կառուցումը 81

Վ. Լ. Իսախանյան—Գծային կառուցվածքի արտաքին ղիմադրությունների և հաղորդակցությունների պերատորներ 87

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ռ. Կ. Ալեքսանյան Ի. Ն. Մկրտչյան—Նրջանային ներդրակով ուղղանկյուն սալի ջերմառաձգական կայունությունը 92

ԳՐՈՒՆՏՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Ռ. Մեսչյան, Ռ. Գ. Մալախյան—ՈՒՆՈՂ րեահողերի ունիտարիական հատկությունները 101

ԱՌՈՉԳԱՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Խ. Հաբույրյունյան, Ա. Ս. Լոզովսկի—Ֆազային ձևափոխություններով մարմինների համար առաձգամածուցիկության տեսության մի խնդրի մասին 109

Կ. Լ. Աղայան—Ճաթերով թայացված անվերջ առաձգական սալի և վերադիրների կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական մի խնդրի մասին 115

Վ. Ս. Տոնոյան, Ա. Ա. Մելիքումյան—Ներթին ուղղաձիգ վերջավոր ճեղքով կիսաճարթային կոնտակտային խնդիրը 122

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
<i>К. М. Мовсисян</i> —Группы автоморфизмов и квазиавтоморфизмов	66
<i>Э. А. Мирзаян</i> —Гомотопическая инвариантность бесконечномерных гомотопических групп	71
<i>Ю. М. Багдасарян</i> —О некоторых свойствах $A. C.$ множества	75
<i>С. Г. Овсепян</i> —Построение всех бикомпактных и всех тихоновских расширений топологических пространств	81
<i>В. Л. Даллакян</i> —Операторы внешних сопротивлений и проводимостей линейной структуры	87
МЕХАНИКА	
<i>Р. К. Алексанян, Ц. А. Мкртчян</i> —Термоупругая устойчивость прямоугольной пластинки с круговым включением	92
МЕХАНИКА ГРУНТОВ	
<i>С. Р. Месчан, Р. П. Малакян</i> —Резьбовые свойства набухающих грунтов	101
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ	
<i>И. Х. Арутюнян, А. С. Лазовский</i> —Об одной задаче теории вязкоупругости для тел с фазовыми превращениями	109
<i>К. Л. Агаян</i> —Об одной периодической задаче контактного взаимодействия струнгеров с упругой бесконечной пластиной, расслабленной трещинами	115
<i>В. С. Тонян, С. А. Мелкумян</i> —Контактная задача для упругих тел с внутренним вертикальным конечным разрезом	122

CONTENTS

MATHEMATICS

	P.
<i>Yu. M. Movsisian</i> — Automorphism and quasiautomorphism groups	65
<i>E. A. Mirsakhantun</i> — The homotopic invariant of infinite-dimensional homotopic groups	71
<i>J. M. Bagdasarian</i> — Some properties of A. C. sets.	75
<i>S. G. Ovsepian</i> — Construction of all compact and all Tychonoff extensions of topological spaces	81
<i>V. L. Dullakian</i> — Operators of external resistances and conductances of linear structure	87

MECHANICS

<i>R. K. Alexanian, S. A. Mhrtchian</i> — Thermoelastic stability of rectangular plate with a circular inclusion.	92
---	----

SOIL MECHANICS

<i>S. R. Meschian, R. P. Malakian</i> — Rheological Properties of Swelling Soils.	101
---	-----

THEORY OF ELASTICITY

<i>N. Kh. Arutunian, A. S. Lozowski</i> — On the problem of the theory of viscoelasticity for the solids with phase transformations.	109
<i>K. L. Agayan</i> — On a periodical problem of a contact interaction of stiffeners with an elastic infinite plate weakened by means of cracks.	115
<i>V. S. Tonoyan, S. A. Melkumian</i> — The contact problem for semi-plane with an internal vertical finite crack	122

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 07167. Подписано к печати 6.XII 1977 г. Тираж 535. Изд. 4711. Заказ 635
 Формат бумаги 70x108^{1/16}. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0.
 Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 423.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24
 Эчмнадзинская типография Издательства АН Армянской ССР

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Группы автоморфизмов и квазиавтоморфизмов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 11/V 1977)

1. Пусть $Q(\cdot)$ произвольная группа с единичным элементом 1 . Биективное отображение $\varphi: Q \rightarrow Q$ называется квазиавтоморфизмом группы $Q(\cdot)$, если для любых $x, y \in Q$ справедливо равенство

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi x \cdot (\varphi 1)^{-1} \cdot \varphi y.$$

Каждый автоморфизм группы, очевидно, является ее квазиавтоморфизмом. В этом случае (и только в этом случае) справедливо равенство $\varphi 1 = 1$. Нетрудно проверить, что множество всех квазиавтоморфизмов заданной группы $Q(\cdot)$ образует группу. Обозначим ее через $KAut[Q(\cdot)]$. Группа всех автоморфизмов есть подгруппа в группе всех квазиавтоморфизмов.

Правые трансляции (отображения $R_a: x \rightarrow x \cdot a$) и левые трансляции (отображения $L_a: x \rightarrow a \cdot x$) группы являются ее квазиавтоморфизмами. Соответствие $a \rightarrow L_a$ есть вложение группы $Q(\cdot)$ в группу $KAut[Q(\cdot)]$. Группа $Q(\cdot)$ при этом вложении становится даже нормальным делителем.

Каждый квазиавтоморфизм φ группы $Q(\cdot)$ можно представить в виде

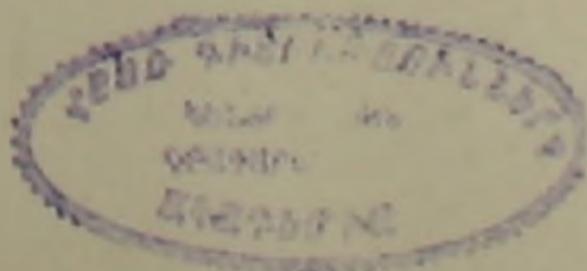
$$\varphi = R_a \alpha, \quad \varphi = L_a \alpha,$$

где α — автоморфизм группы $Q(\cdot)$ и $a \in Q$. Иначе говоря подгруппы $Q(\cdot)$ и $Aut[Q(\cdot)]$ совместно порождают группу $KAut[Q(\cdot)]$. Поскольку отображение L_a является автоморфизмом группы $Q(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $a = 1$, то подгруппы $Q(\cdot)$ и $Aut[Q(\cdot)]$ обладают одноэлементным пересечением.

Соотношение

$$a L_x a^{-1} = L_{ax}, \quad \text{для } a \in Aut[Q(\cdot)], x \in Q$$

означает, что каждый автоморфизм α группы $Q(\cdot)$ является сужением некоторого внутреннего автоморфизма группы $KAut[Q(\cdot)]$. Мы пришли к следующему результату.



Теорема 1. Группа квазиавтоморфизмов $KAut[Q(\cdot)]$ является полупрямым произведением групп $Q(\cdot)$ и $Aut[Q(\cdot)]$, сверх того гомоморф и группа квазиавтоморфизмов одной и той же группы всегда изоморфны.

Можно дать и абстрактное определение понятия квазиавтоморфизма. Пусть $Q(\cdot)$ произвольная группа и $Aut[Q(\cdot)]$ есть ее группа автоморфизмов. Рассмотрим множество Φ всевозможных упорядоченных пар (α, a) , где $\alpha \in Aut[Q(\cdot)]$ и $a \in Q$, умноженные по правилу

$$(\alpha, a) \cdot (\alpha', a') = (\alpha\alpha', a\alpha' \cdot a).$$

Относительно этого умножения множество Φ образует группу, изоморфную группе квазиавтоморфизмов $KAut[Q(\cdot)]$. В самом деле, если $\varphi \in KAut[Q(\cdot)]$, то существуют $\alpha \in Aut[Q(\cdot)]$ и $a \in Q$ такие, что

$$\varphi x = \alpha x \cdot a$$

причем элементы α и a определяются единственным образом. Если при этом

$$\varphi' x = \alpha' x \cdot a',$$

то

$$(\varphi\varphi')x = \varphi(\varphi'x) = \varphi(\alpha'x \cdot a') = a(\alpha'x \cdot a') \cdot a = \alpha\alpha'x \cdot (aa' \cdot a).$$

Соответствие $\varphi \rightarrow (\alpha, a)$ есть искомый изоморфизм.

2. Следуя (1.3), под автоморфизмом универсальной алгебры $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ понимаем пару $(\varphi, \bar{\psi})$ биективных отображений $\varphi: Q \rightarrow Q$, $\bar{\psi}: \Sigma \rightarrow \Sigma$ таких, что отображение $\bar{\psi}$ сохраняет аридность операций и для любых $A \in \Sigma$, $|A| = n$ и $x_1, \dots, x_n \in Q$ справедливо равенство

$$\varphi|A(x_1, \dots, x_n)| = [\bar{\psi}A](\varphi x_1, \dots, \varphi x_n).$$

Аналогичные морфизмы для линейных пространств ранее были исследованы под названием полулинейных соответствий (2.4).

Совокупность всех автоморфизмов образует группу $Aut D$. Автоморфизмы вида $(\varphi, \bar{\epsilon})$ называются главными,* их совокупность также образует группу, обозначаемую через $Aut^{(0)}D$ (это есть группа обычных автоморфизмов). Группа главных автоморфизмов $Aut^{(0)}D$ является нормальным делителем в группе всех автоморфизмов $Aut D$.

Если

$$Aut D = \{(\varphi_i, \bar{\psi}_j) \mid i \in I, j \in J\},$$

то

$$Aut^{(0)}D = \{\varphi_i \mid i \in I\}$$

и

$$Aut^{(0)}D = \{\bar{\psi}_j \mid j \in J\}$$

* Через $\bar{\epsilon}$ обозначается тождественное отображение множества Σ .

также являются группами и называются, соответственно, первой и второй группой автоморфизмов алгебры D .

Лемма. Первая группа автоморфизмов изоморфна группе всех автоморфизмов. Группа всех автоморфизмов является расширением группы главных автоморфизмов при помощи второй группы автоморфизмов.

Доказательство. Если $\varphi \in \text{Aut}^{(1)}D$, то существует $\bar{\varphi} \in \text{Aut}^{(2)}D$ такое, что $(\varphi, \bar{\varphi}) \in \text{Aut}D$. Легко заметить, что отображение $\bar{\varphi}$ при этом определяется единственным образом. Поэтому соответствие $\varphi \rightarrow (\varphi, \bar{\varphi})$ определено корректно, оно биективно и сохраняет произведение. Таким образом $\text{Aut}^{(1)}D \cong \text{Aut}D$. Если же $(\varphi, \bar{\varphi}) \in \text{Aut}D$, то соответствие $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ есть эпиморфизм группы $\text{Aut}^{(1)}D$ на группу $\text{Aut}^{(2)}D$ с ядром $\text{Aut}^{(0)}D$.

Можно показать, что группа всех автоморфизмов каждой свободной алгебры (в рассматриваемой категории универсальных алгебр) расщепляема как расширение группы главных автоморфизмов. Для линейных пространств этот факт был замечен Бэром (4). Группа всех автоморфизмов каждой булевой алгебры также расщепляема. Группа всех автоморфизмов алгебры слов есть полупрямое произведение симметрических групп.

Теорема 2. Группа квазиавтоморфизмов $K\text{Aut}[Q(\cdot)]$ является группой всех автоморфизмов некоторой производной алгебры группы $Q(\cdot)$.

Доказательство. Пусть $Q(\cdot)$ исходная группа. Для любого натурального $n \geq 1$ рассмотрим n -арную производную операцию

$$A_a(x_1, \dots, x_{2k-1}) = x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot \dots \cdot x_{2k-2} \cdot x_{2k-1}^{-1} \cdot a \cdot x_{2k-1},$$

если $n = 2k - 1, a \in Q$

$$A_a(x_1, \dots, x_{2k}) = x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot \dots \cdot x_{2k-1} \cdot x_{2k}^{-1} \cdot a \cdot x_{2k},$$

если $n = 2k, a \in Q$

Обозначим через Σ_n класс всех n -арных производных операций вида A_a , т. е.

$$\Sigma_n = \{A_a \mid a \in Q, |A_a| = n\}$$

и вычислим первую группу автоморфизмов производной алгебры $D_n = \langle Q; \Sigma_n \rangle$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что каждый квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$ содержится в первой группе автоморфизмов алгебры D_n . Пусть теперь $\varphi \in \text{Aut}^{(1)}D_n$ и $n = 2k$, тогда

$$\varphi[A_a(x_1, \dots, x_{2k})] = [\bar{\varphi}A_a](\varphi x_1, \dots, \varphi x_{2k}),$$

$$\varphi(x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot \dots \cdot x_{2k-1} \cdot x_{2k}^{-1} \cdot a \cdot x_{2k}) = \varphi x_1 \cdot (\varphi x_2)^{-1} \cdot \dots \cdot \varphi x_{2k-1} (\varphi x_{2k})^{-1} a' \varphi x_{2k}.$$

Если $x_1 = x_2 = \dots = x_{2k}$, то

$$\varphi(a \cdot x_{2k}) = a' \varphi x_{2k}.$$

Если же $x_{2k} = 1$, то

$$a' = \varphi a \cdot (\varphi 1)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\varphi(a \cdot x_{2k}) = \varphi a \cdot (\varphi 1)^{-1} \cdot \varphi x_{2k}$$

и поскольку $a \in Q$ есть произвольный элемент, то φ — квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$.

Мы показали, что

$$Aut^{(1)} D_n = K Aut[Q(\cdot)]$$

и в силу предыдущей леммы

$$Aut D_n \cong K Aut[Q(\cdot)].$$

Рассуждения для нечетных n аналогичны. Теорема доказана.

Вычислим теперь группу главных автоморфизмов n -арной алгебры D_n . При этом универсальная алгебра называется n -арной, если все ее операции n -арны. В частности 2-арная алгебра называется бинарной алгеброй, а 1-арная алгебра — унарной алгеброй.

В случае главных автоморфизмов имеем $a' = a$ для любого $a \in Q$.

$$a' = \varphi a \cdot (\varphi 1)^{-1} = a,$$

$$\varphi a = a \varphi 1,$$

$$\varphi = R_c$$

где $c = \varphi^2$. Таким образом, группа главных автоморфизмов алгебры D_n совпадает с группой всех правых трансляций группы $Q(\cdot)$. Однако, соответствие $c \rightarrow R_c$ является антиизоморфизмом групп и поэтому $Q(\cdot) \cong Aut^{(0)} D_n$.

Вычислим теперь вторую группу автоморфизмов алгебры D_n . Для любого $a \in Q$ имеем

$$\bar{\psi} A_a = A_{a'}, \quad \text{где } a' = \varphi a \cdot (\varphi 1)^{-1}$$

Отображение $\bar{\psi}$ индуцирует биективное отображение $\psi: Q \rightarrow Q$ определенное по правилу $\psi(a) = a'$, являющееся автоморфизмом группы

$Q(\cdot)$. Соответственно $\bar{\psi} \rightarrow \psi$ является изоморфизмом группы $Aut^{(2)} D_n$ на группу $Aut[Q(\cdot)]$. Следовательно в следующей коммутативной диаграмме все строки и все столбцы точны:

$$\begin{array}{ccccccc} & & O & & O & & O \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ O & \rightarrow & Aut^{(0)} D_n & \rightarrow & Aut^{(1)} D_n & \rightarrow & Aut^{(2)} D_n \rightarrow O \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ O & \rightarrow & Q(\cdot) & \rightarrow & Hol[Q(\cdot)] & \rightarrow & Aut[Q(\cdot)] \rightarrow O \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & O & & O & & O \end{array}$$

Итак, более полная формулировка предыдущей теоремы является
 Теорема 3. Каждое расширение групп вида $O \rightarrow Q \rightarrow \text{Hol}Q \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Aut}Q \rightarrow O$ изоморфно некоторому расширению вида $O \rightarrow \text{Aut}^{(0)}D \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Aut}^{(1)}D \rightarrow \text{Aut}^{(2)}D \rightarrow O$. Алгебру D при этом можно выбрать произ-
 вольного типа.

Будем говорить, что расширение групп

$$O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow O \quad (*)$$

обладает представлением, если существует алгебра D такая, что рас-
 ширение $(*)$ изоморфно расширению групп вида

$$O \rightarrow \text{Aut}^{(0)}D \rightarrow \text{Aut}^{(1)}D \rightarrow \text{Aut}^{(2)}D \rightarrow O$$

Иначе говоря существуют изоморфизмы $A \rightarrow \text{Aut}^{(0)}D$, $C \rightarrow \text{Aut}^{(1)}D$ и
 $B \rightarrow \text{Aut}^{(2)}D$ такие, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} O & \rightarrow & A & \rightarrow & C & \rightarrow & B \rightarrow O \\ & & \downarrow & & \searrow & & \searrow \\ & & O & \rightarrow & \text{Aut}^{(0)}D & \rightarrow & \text{Aut}^{(1)}D \rightarrow \text{Aut}^{(2)}D \rightarrow O. \end{array}$$

Последний результат (теорема 3) означает, что каждое расши-
 рение групп вида $O \rightarrow Q \rightarrow \text{Hol}Q \rightarrow \text{Aut}Q \rightarrow O$ обладает представлением.

Обладает ли каждое расширение групп представлением?

Этот вопрос в общем случае остается открытым, однако для
 полупрямого произведения двух групп утвердительный ответ дает сле-
 дующая

Теорема 4. Каждое расширение групп вида

$$O \rightarrow A \rightarrow A \rtimes B \rightarrow B \rightarrow O$$

обладает представлением.

Доказательство последней теоремы мы опускаем, из-за ее гро-
 моздкости.

* Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ավտոմորֆիզմների և հվազիստոմորֆիզմների խմբեր

Որևէ $Q(\cdot)$ խմբի քվազիավտոմորֆիզմ ասելով հասկանում են այն
 բիեկտիվ $\varphi: Q \rightarrow Q$ արտապատկերումը, որը բավարարում է հետևյալ հավա-
 սարու թվանք՝

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi x \cdot (\varphi 1)^{-1} \cdot \varphi y$$

ցանկացած $x, y \in Q$ էլեմենտների համար, որտեղ 1 -ը հանդիսանում է տրված
 խմբի միավորը: Յուրաքանչյուր խմբի բոլոր քվազիավտոմորֆիզմների
 բազմությունը կազմում է խումբ:

Ներկա աշխատանքում տրվում է բվազիավտոմորֆիզմների խմբի տարրեր ներկայացումներ: Մասնավորապես ամեն մի խմբի բվազիավտոմորֆիզմների խումբը իզոմորֆ է նրա հոլոմորֆին: Հողվածում մտցվում է նաև խմբային ընդլայնումների ներկայացման գաղափարը և ցույց է տրվում, որ հոլոմորֆը և կիսաուղիղ արտադրյալը (որպես ընդլայնումներ) օժտված են ներկայացումներով:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Ю. М. Мовсисян, «Известия АН Арм. ССР», сер. Математика, № 6, 485—502 (1976). ² Ю. М. Мовсисян, ДАН, Арм ССР, т. LXII, № 4 (1976). ³ Н. Джекобсон, Строение колец, М., 1961. ⁴ Р. Бэр, Линейная алгебра и проективная геометрия, М., 1955

УДК 513836

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

Гомотопическая инвариантность бесконечномерных
 гомотопических групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 12/V 1977)

Результаты, приведенные в (1), позволяют доказать гомотопическую инвариантность бесконечномерных гомотопических групп $\Pi_q(X)$ (2) и бесконечномерных групп компактного типа $\Pi_q^c(X)$ (3) подмножеств X вещественного сепарабельного гильбертова пространства H в классе K_0 отображений подмножеств пространства H , введенном В. Г. Болтянским (4). Другими словами, если линейно связанные подмножества X и Y пространства H гомотопически эквивалентны в классе K_0 , то имеют место изоморфизмы

$$\Pi_q(X) \approx \Pi_q(Y) \text{ и } \Pi_q^c(X) \approx \Pi_q^c(Y).$$

Будем рассматривать категории \mathcal{W} и \mathcal{W}^c объектами, каждой из которых служат всевозможные пары (X, x_0) , где $X \subset H$, т. е. подмножества с отмеченными точками пространства H ; морфизмами категории \mathcal{W} являются непрерывные отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, принадлежащие классу K_0 , а морфизмами категории \mathcal{W}^c являются непрерывные отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, принадлежащие классу K_0 и обладающие тем свойством, что для каждого компактного множества $M \subset (Y - \{y_0\})$ прообраз $f^{-1}(M)$ компактен и на этом прообразе терминальная производная отображения f отлична от нуля (5).

Предложение 1. Всякий морфизм $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ категории \mathcal{W} индуцирует гомоморфизм $f_*: \Pi_q(X, x_0) \rightarrow \Pi_q(Y, y_0)$ для всякого целого q причем, если $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ тоже такой морфизм, то $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Аналогично, всякий $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ категории \mathcal{W}^c индуцирует гомоморфизм $f^c: \Pi_q^c(X, x_0) \rightarrow \Pi_q^c(Y, y_0)$, причем $(g \circ f)^c = g^c \circ f^c$.

Замечание. В силу этого предложения пара $(\Pi_q(X, x_0), f_*)$ (соответственно пара $(\Pi_q^c(X, x_0), f^c)$) представляет собой ковариантный функтор из категории \mathcal{W} (соответственно из категории \mathcal{W}^c) в категорию абелевых групп и их гомоморфизмов.

Пусть, снова, X и Y — произвольные подмножества гильбертова пространства H , R — числовая прямая, а I — ее единичный отрезок $[0, 1]$.

Определение. Непрерывное отображение $f, g: X \rightarrow Y$ будем называть гомотопными в классе K_0 или короче K_0 -гомотопными, если существует связывающая их гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, обладающая тем свойством, что при любом t отображение f_t принадлежит классу K_0 и отображение $F: I \times X \rightarrow Y$, задаваемое по формуле $F((t, x)) = f_t(x)$ принадлежит классу K_0 в гильбертовом пространстве $H^* = R \times H$; каждую такую гомотопию f_t будем называть K_0 -гомотопией связывающей f с g .

Замечание. Если от K_0 -гомотопии f_t требовать, чтобы при любом t прообраз $f_t^{-1}(M)$ каждого компактного множества $M \subset Y$ был компактен и на этом прообразе терминальная производная $f_t'(x)$ отображения f_t была отлична от нуля, то ее мы будем называть K_0^c -гомотопией, связывающей f с g ; при этом сами отображения f и g будут называться K_0^c -гомотопными.

Лемма. Пусть $f, g: X \rightarrow Y$ K_0 -гомотопные отображения, $f_t: X \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, некоторая связывающая их K_0 -гомотопия, $x_0 \in X$ — произвольная точка и $\varepsilon: I \rightarrow Y$ путь в Y , определяемый по формуле $\varepsilon(t) = f_t(x_0)$, $0 \leq t \leq 1$; пусть, далее,

$$f_*: \Pi_q(X, x_0) \rightarrow \Pi_q(Y, f(x_0)),$$

$$g_*: \Pi_q(X, x_0) \rightarrow \Pi_q(Y, g(x_0)) —$$

гоморфизмы, индуцированные соответственно морфизмами $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, f(x_0))$ и $g: (X, x_0) \rightarrow (Y, g(x_0))$ категории W (см. предложения 1), а

$$\varepsilon_*: \Pi_q(Y, g(x_0)) \rightarrow \Pi_q(Y, f(x_0)) —$$

изоморфизм индуцированный ⁽¹⁾ путем ε . Тогда имеет место равенство $f_* = \varepsilon_* \circ g_*$, т. е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \Pi_q(X, x_0) & \\ g_* \swarrow & & \searrow f_* \\ & \Pi_q(Y, g(x_0)) & \xrightarrow{\varepsilon_*} \Pi_q(Y, f(x_0)) \end{array}$$

Замечание. Сформулированная лемма остается справедливой. Если рассматривать бесконечномерные гомотопические группы компактного типа, а K_0 -гомотопии заменить K_0^c -гомотопиями, а именно, имеет место равенство $f_*^c = \varepsilon_*^c \circ g_*^c$.

Замечание. Из этой леммы, в частности, следует, что если f_t является K_0 -гомотопией (соответственно K_0^c -гомотопией) относительно точки x_0 , т. е. $f_t(x_0) = f(x_0)$ при любом t , то $f_* = g_*$ (соответственно $f_*^c = g_*^c$) ибо ε_* (соответственно ε_*^c) — будучи автоморфизмом, порожденным постоянным путем ε в точке $f(x_0) = g(x_0)$ будет тожд-

дественным автоморфизмом группы $\Pi_q(Y, f(x_0))$ (соответственно группы $\Pi_q^c(Y, f(x_0))$).

О п р е д е л е н и е. Подмножество X и Y гильбертова пространства будем называть K_0 -гомотопически эквивалентными (соответственно K_0^c -гомотопически эквивалентными), если существуют принадлежащие классу K_0 отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ такие, что композиции $g \circ f: X \rightarrow X$ и $f \circ g: Y \rightarrow Y$ K_0 -гомотопны (соотв. K_0^c -гомотопны) соответствующим тождественным отображениям. При этом f и g называются гомотопически взаимнообратными K_0 -гомотопическими эквивалентностями (соотв. K_0^c -гомотопическими эквивалентностями).

Основным результатом этой статьи является следующая теорема о K_0 -гомотопической инвариантности бесконечномерных групп.

Т е о р е м а. Если линейные связные множества X и Y из H K_0 -гомотопически эквивалентны (соотв. K_0^c -гомотопически эквивалентны), то имеют место изоморфизмы: $\Pi_q(X) \cong \Pi_q(Y)$ (соотв. $\Pi_q^c(X) \cong \Pi_q^c(Y)$), и именно, всякая K_0 -гомотопическая эквивалентность (соотв. K_0^c -гомотопическая эквивалентность) $f: X \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизм $f_*: \Pi_q(X, x_0) \rightarrow \Pi_q(Y, f(x_0))$ (соотв. изоморфизм $f_*^c: \Pi_q^c(X, x_0) \cong \Pi_q^c(Y, f(x_0))$) для любой точки $x \in X$ и любого целого q .

З а м е ч а н и е. Приведенные выше все понятия и результаты определяются и доказываются для бесконечномерных относительных гомотопических групп $\Pi_q(X, A)$ и $\Pi_q^c(X, A)$, построенных в (3).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՄԻՐՉԱԿԱՆՅԱՆ

Անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի հոմոտոպիական ինվարիանտությունը

Հիմնվելով (1) հոդվածում բերված արդյունքների վրա, հնարավոր է դառնում սպասուցել իրական սեպարարել հիլբերտյան H տարածություն X ենթարազմությունների $\Pi_q(X)$ և $\Pi_q^c(X)$ անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի (2), (3) հոմոտոպիական ինվարիանտությունը H տարածության ենթարազմությունների արտապատկերումների վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից մտցված K_0 դասում (4)։

Այլ կերպ ասած, տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝
Թեորեմ։ Եթե X և Y հանդիսանում են H տարածության K_0 -հոմոտոպորեն համարժեք (համապ. K_0^c -հոմոտոպորեն համարժեք) զծորեն կապակցված ենթարազմություններ, ապա տեղի ունեն $\Pi_q(X) \cong \Pi_q(Y)$ և $\Pi_q^c(X) \cong \Pi_q^c(Y)$ իզոմորֆիզմերը։

Նույն արդյունքը մտած է ճիշտ նաև անվերջ շարանի հարարերական համաստուպիկ խմբերի (2) համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

¹ Э. А. Мирзаханян, ДАН Арм. ССР, т. LXIV, № 5 (1977). ² Э. А. Мирзаханян, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем. т. VIII, № 2 (1973). ³ Э. А. Мирзаханян, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., т. X, № 2 (1975). ⁴ В. Г. Болтянский, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., IX, № 2, 1974, 107—120. ⁵ Э. А. Мирзаханян, ДАН Арм. ССР, т. LVIII, № 1 (1974).

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Багдасарян

О некоторых свойствах А. С. множеств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалянном 13/VI 1977)

В настоящей статье изучаются некоторые свойства множеств абсолютной сходимости для кратных тригонометрических рядов.

Для дальнейшего изложения напомним необходимые определения (1).

Определение 1. Множество $E \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ называется множеством абсолютной сходимости (А. С.—множеством), если из сходимости ряда

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn} \sin mx \sin ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \cos mx \cos ny|$$

всюду на E , следует неравенство

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| + |b_{mn}| + |c_{mn}| + |d_{mn}| < \infty.$$

Если множество не является А. С.—множеством, то оно называется N —множеством.

Определение 2. Множество $E \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ называется N^* —множеством, если существует ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin mx \sin ny,$$

сходящийся абсолютно на множестве E , но

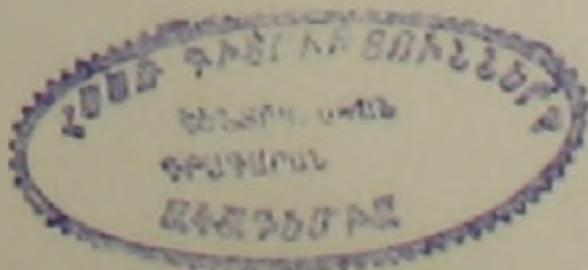
$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| = +\infty.$$

Если множество не является N^* —множеством, то оно называется А. С.*—множеством.

Для n -кратных ($n \geq 3$) тригонометрических рядов эти понятия определяются аналогично.

Справедлива следующая

Теорема 1. Если к N^* множеству добавить прямую $x = \frac{\pi}{2}$, то получим снова N^* —множество.



Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие предложения (2).

Предложение 1. Если $u_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$), последовательность $\{u_n\}$ ограничена и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n}$$

расходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^{1+\epsilon}}$$

сходится при любом $\epsilon > 0$ (здесь $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$).

Предложение 2. (Следствие теоремы Минковского). Для любых действительных чисел t_1, t_2, \dots, t_r и для любого $\epsilon > 0$, можно найти такое целое ν , что

$$\|Mt_i\| \leq 2\epsilon \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

и $\nu \leq (1/\epsilon)^\nu$ (здесь $\{a\}$ — означает дробная часть числа a).

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Для удобства будем считать, что множества лежат на квадрате $[0,1] \times [0,1]$, рассматриваемые ряды имеют вид:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y.$$

Пусть E есть N^* -множество. Обозначим через E' множество

$$E' = E \cup \Delta, \quad \text{где } \Delta = \{(\xi_0, y), -\infty < y < +\infty\}.$$

Докажем, что E' есть N^* -множество.

Так как E есть N^* -множество, то существует ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y, \quad (1)$$

сходящийся абсолютно на E и такой, что

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| = +\infty.$$

Легко заметить, что числа a_{mn} можно предполагать положительными.

Расположив члены матрицы (a_{mn}) в виде последовательности $\{a_{m_k n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k n_k}.$$

Положим $\rho_k = \frac{a_{m_k n_k}}{S_k}$, где $S_k = \sum_{j=1}^k a_{m_j n_j}$.

Согласно предложению 1, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{S_k} < +\infty. \quad (2)$$

Далее, на основании предложения 2, для заданных чисел $m_k \xi_0$ и $\varepsilon_k = \frac{1}{S_k}$ можно найти целое λ_k , что

$$\lambda_k < S_k \quad \text{и} \quad |(\lambda_k m_k \xi_0)| < \frac{2}{S_k}. \quad (3)$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \sin i_k m_k \pi x \sin n_k \pi y \quad (4)$$

сходится абсолютно на E' .

Действительно, для $(x, y) \in E$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k |\sin \lambda_k m_k \pi x \sin n_k \pi y| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \lambda_k |\sin m_k \pi x \sin n_k \pi y| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k n_k} |\sin m_k \pi x \sin n_k \pi y| < \infty. \end{aligned}$$

так как последний ряд есть некоторая перестановка ряда составленного из абсолютных величин членов ряда (1).

С другой стороны, в силу (3),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k |\sin \lambda_k m_k \pi \xi_0 \sin n_k \pi y| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k |\sin \pi |\lambda_k m_k \xi_0|| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k / S_k < +\infty.$$

А это означает, что ряд (4) сходится абсолютно на Δ .

В ряде (4) могут быть подобные члены в зависимости от порядка расположения членов матрицы (a_{mn}) в последовательность $|a_{m_k n_k}|_{k=1}^{\infty}$ и от выбора множителей i_k . Сгруппировав подобные члены (а их в каждой группе может быть конечное число, так как число разложений всякого целого числа в произведение двух целых — конечно), получим новый ряд

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} a'_{mn} \sin m \pi x \sin n \pi y,$$

который абсолютно сходится на E' и имеет расходящийся ряд коэффициентов, что и показывает, что E' есть N^{∞} — множество.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что этот результат для простых тригонометрических рядов, получен Салемом (2).

З а м е ч а н и е 1: Некоторая модификация доказательства теоремы 1, позволяет сделать следующее утверждение: Если к N^* —множеству добавить счетное множество прямых параллельных осям координат, то получим снова N^* —множество.

Хорошо известно, что любой числовой базис на оси (множество точек S , лежащее на прямой, называется базисом, если для любой точки x на этой прямой найдутся такие точки x_1, x_2, \dots, x_n из S и такие целые числа k_1, k_2, \dots, k_n , что $x = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$) является $A. C.$ —множеством (теорема Немыцкого-Салема ⁽²⁾).

В работе ⁽³⁾ в частности доказано, что граница прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат, является множеством типа N^* (значит и по-прежнему N), т. е. существует N множество на плоскости, проекции которого на осях координат являются базисами.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 2. Множество $E = A \times B \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, где A и B базисы на осях X и Y , есть $A. C.$ —множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что класс $A. C.$ —множеств остается инвариантным при сдвигах (⁽²⁾ или ⁽¹⁾). Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что один из сдвигов множества E есть $A. C.$ —множество. Для удобства рассмотрим такой сдвиг \bar{E} множества E , который лежит в $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и содержит свои проекции на осях координат. Проекции \bar{E} на X и Y обозначим соответственно через \bar{A} и \bar{B} . Очевидно, они являются сдвигами множеств A и B на соответствующих осях и, следовательно базисы на этих осях ⁽⁴⁾.

Пусть

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn} \sin mx \sin ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \cos mx \cos ny| < +\infty \quad (5)$$

при $(x, y) \in \bar{E}$.

Нужно доказать, что отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| + |b_{mn}| + |c_{mn}| + |d_{mn}|.$$

Не нарушая общности предположим, что $(0, 0) \in \bar{E}$, тогда

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |d_{mn}| < +\infty. \quad (6)$$

Так как условие (5) имеет место на множестве \bar{A} , то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |b_{mn} \sin mx + d_{mn} \cos mx| < \infty. \quad (7)$$

Из условий (6) и (7) следует

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |b_{mn} \sin mx| < \infty \quad \text{при } x \in \bar{A} \quad (8)$$

Раз \bar{A} — базис, то для любого x из числовой оси, имеем

$$x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_p x_p,$$

где все $x_i \in \bar{A}$, а все k_i целые. Но если так, то

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} |b_{mn} \sin mx| &\leq \sum_{m,n=1}^{\infty} |b_{mn}| \sum_{i=1}^p |k_i \sin mx_i| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^p |k_i| \sum_{m,n=1}^{\infty} |b_{mn}| |\sin mx_i| < \infty, \end{aligned}$$

т. е. ряд (7) сходится абсолютно для любых x .

Отсюда в силу теоремы Лузина—Данжуа, следует неравенство

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |b_{mn}| < \infty. \quad (9)$$

Аналогично, так как условие (5) выполняется на множестве \bar{B} , то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |c_{mn}| < \infty. \quad (10)$$

В силу (5), (6), (9) и (10) получим

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn} \sin mx \sin ny| < \infty$$

на \bar{E} . Повторяя те рассуждения, которые были сделаны в случае ряда (8), получаем

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty,$$

что вместе с (6), (9), (10) завершает доказательство теоремы.

Замечание 2: Для простоты, теоремы 1 и 2 мы сформулировали для двойных рядов. Они справедливы и для n -кратных ($n \geq 3$) тригонометрических рядов.

В заключение благодарю моего научного руководителя Р. А. Аветисяна за постановку задач и постоянную помощь.

Ереванский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна.

ՅՈՒ. Մ. ԲԱԳՅԱՆՐԵՍԱՆ.

Ա. Շ. — բազմությունների որոշ հատկությունների մասին

Հոդվածում ասացուցված են բազմապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի բացարձակ զուգամիտության բազմությունների երկու հատկություն:

Առաջինը, որ N^* տիպի բազմությունները մնում են N^* տիպի, եթե նրանց ափսոսանքներ կոորդինատային առանցքին զուգահեռ ուղիղ:

Այնուհետև, ապացուցված է, որ եթե A և B բազիսներ են համապատասխանաբար X և Y առանցքների վրա, ապա նրանց զեկարտյան արտադրյալը $A \times B$ հանդիսանում է A, C տիպի բազմություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ *P. A. Аветисян*, Кандидатская диссертация, М., 1973. ² *Н. К. Барн*, Тригонометрические ряды, М., 1961. ³ *R. Salem*, The absolute convergence of trigonometric series DMJ, 8, 317—334 (1941). ⁴ *В. В. Немыцкий*, О некоторых классах линейных множеств в связи с абсолютной сходимостью тригонометрических рядов, МС, 5—32, 33 (1926). ⁵ *P. A. Аветисян*, О множествах абсолютной сходимости двойных тригонометрических рядов, Мат. заметки, т. 11, в. 5, 473—480 (1972).

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

**Построение всех бикompактных и всех тихоновских расширений
 топологических пространств**

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 19/VI 1977)

В 1939 г. П. С. Александров ⁽¹⁾ предложил новый метод построения расширений топологических пространств, широко известный в литературе под названием метода центрированных систем открытых множеств и применил его, в частности, к новому построению стоун-чеховского расширения произвольного вполне регулярного пространства. Этот метод позволил П. С. Александрову и многим его последователям получить фундаментальные результаты в теории расширений топологических пространств (см. например ⁽¹⁻⁵⁾).

Применяя в несколько видоизмененном виде метод центрированных систем открытых множеств и комбинируя его с понятием близости в смысле В. А. Ефремовича, Ю. М. Смирнов ⁽²⁾ впервые описал все бикompактные расширения произвольного вполне регулярного пространства.

Построение всех бикompактных расширений произвольного вполне регулярного пространства получено и в работе ⁽⁴⁾ методом, основанным на понятии „подчинения“.

В настоящей заметке, используя введенное П. С. Александровым понятие вполне регулярной центрированной системы открытых множеств ^(1,3) и применяя подходы работы ⁽⁶⁾, строятся все тихоновские и в частности все бикompактные расширения произвольного тихоновского пространства. Кроме того обобщаются также известные результаты, приведенные в работах ⁽⁷⁻⁹⁾.

Определения приводимых здесь понятий можно найти, например, в работах ^(10,11).

Псевдотопологическое пространство (п. т. п.) (Φ, \mathcal{P}) назовем регулярным, если для любого $\varphi \in \Phi$ и для любого $p \in \varphi$ существует $p_0 \in \varphi$ такое, что если $\psi \in \Phi$ и $p \in \psi$, то существует $q \in \psi$ такое, что $p_0 \dot{\cap} q = \mathcal{H}_p$, где $\dot{\cap}$ — знак псевдопересечения, а \mathcal{H}_p наименьший элемент псевдотопологии \mathcal{P} .

Пусть (X, \mathcal{V}) топологическое пространство и $\mathcal{X}_0 = \{V_x : x \in X\}$, где V_x система всех открытых окрестностей точки $x \in X$. Тогда

$[X_0, V]$ п. т. п. Легко видеть, что если (X, V) — регулярное топологическое пространство, то $[X_0, V]$ — регулярное п. т. п.

Как и в (°) рассмотрим отображение F , которое каждому п. т. п. $[\Phi, P]$, сопоставляет топологическое пространство $(\Phi, W) = F[\Phi, P]$, где топология W порождена базой, образованной подмножествами Φ вида $W_p = \{\varphi : p \in \varphi\}$, когда p пробегает все P .

Предложение 1. Для любого п. т. п. $[\Phi, P]$ такого, что Φ покрывает P $F[\Phi, P]$ является регулярным топологическим пространством тогда и только тогда, когда $[\Phi, P]$ регулярное п. т. п.

Определение. Открытый фильтр φ топологического пространства X называется вполне регулярным фильтром этого пространства, если для любого $v \in \varphi$ найдется $v_0 \in \varphi$ и непрерывная на X функция f со значениями в замкнутом интервале $[0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in v_0$ и $f(x) = 1$ при $x \in X \setminus v$.

Вполне регулярный фильтр φ пространства X называется вполне регулярным ультрафильтром, если φ не содержится ни в каком, отличном от себя вполне регулярном фильтре пространства X .

Открытый фильтр пространства X называется свободным, если он лишен точек прикосновения в X .

Лемма 1. Пересечение бикомпактного множества свободных открытых фильтров топологического пространства X является свободным открытым фильтром пространства X .

Лемма 2. Пересечение бикомпактного множества вполне регулярных фильтров произвольного пространства X является вполне регулярным фильтром пространства X .

Каждая пара $[U, D]$, где U — некоторое непустое множество свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства X , а D — некоторое разбиение множества U на бикомпактные подмножества, порождает систему $\Phi_{[U, D]} = \{\varphi_d : d \in D\}$, где $\varphi_d = \bigcap \{u : u \in d\}$, которая в силу лемм 1 и 2 состоит из свободных вполне регулярных фильтров пространства X .

В случае, когда U совпадает с множеством $\bar{U} = \bar{U}(X)$ всех свободных вполне регулярных ультрафильтров пространства X систему $\Phi_{[U, D]}$ будем обозначать через Φ_U .

Теорема 1. Пусть A произвольное открытое покрытие тихоновского пространства X такое, что каждый свободный вполне регулярный ультрафильтр пространства X содержит некоторый элемент из A . Тогда A содержит конечное подпокрытие пространства X .

Следствие 1. Тихоновское пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда всякий его вполне регулярный ультрафильтр сходится.

Следствие 2. Пусть (X, V) тихоновское пространство и D произвольное разбиение множества $\bar{U}(X)$ на бикомпактные под-

множества. Тогда $F|X_0 \cup \Phi_D, V|$ является H — замкнутым расширением пространства (X, V) .

Следствие 3. Каждый свободный открытый ультрафильтр тихоновского пространства X содержит некоторый свободный вполне регулярный ультрафильтр пространства X .

Разбиение D множества $\bar{U}(X)$ на бикомпактные подмножества назовем согласованным, если для любого $\varphi \in X_0 \cup \Phi_D$ и для любого $v \in \varphi$ существует $v_0 \in \varphi$ такое, что если $\varphi \in \Phi_D$ и $v \notin \varphi$, то каждый вполне регулярный ультрафильтр пространства X , содержащий φ , не содержит v_0 .

Разбиение D произвольного непустого подмножества U множества $\bar{U}(X)$ на бикомпактные подмножества назовем согласованным, если существует согласованное разбиение D' множества $\bar{U}(X)$ такое, что $D \subset D'$. При этом $[U, D]$ будем называть согласованной парой пространства X .

Лемма 3. Для любого бикомпактного множества U свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства X разбиение D множества U является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $\varphi \in \Phi_{[U, D]}$ и для любого $v \in \varphi$ существует $v_0 \in \varphi$ такое, что если $\psi \in \Phi_{[U, D]}$ и $v \notin \psi$, то ни один вполне регулярный ультрафильтр пространства X , содержащий ψ , не содержит v_0 .

Лемма 4. Пусть U некоторое множество свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства X и D — такое разбиение множества U на бикомпактные подмножества, что все элементы разбиения D кроме, может быть, конечного числа, одноточечные подмножества множества U . Тогда D — согласованное разбиение множества U .

Предложение 2. Для любой согласованной пары $[U, D]$ тихоновского пространства $(X, V) |X_0 \cup \Phi_{[U, D]}, V|$ является регулярным п. т. п..

Теорема 2. Для любой согласованной пары $[U, D]$ тихоновского пространства (X, V) пространство $F|X_0 \cup \Phi_{[U, D]}, V|$ является тихоновским расширением пространства (X, V) . Оно является бикомпактным расширением пространства (X, V) тогда и только тогда, когда U совпадает с множеством всех свободных вполне регулярных ультрафильтров пространства (X, V) .

Доказательство части теоремы, касающейся бикомпактных расширений непосредственно следует из следствия 2 теоремы 1 и из предложений 1 и 2.

Следствие. Если $U = \bar{U}(X)$, а D — разбиение на одноточечные подмножества, то, очевидно, $\Phi_D = \bar{U}(X)$, поэтому $F|X_0 \cup \bar{U}, V|$ — бикомпактное расширение.

Теорема 3. Для каждого тихоновского расширения $[Y, f]$ пространства (X, V) существует единственная согласованная пара

$[U, D]$ пространства (X, V) такая, что $F|X_0 \cup \Phi_{[U, D]}, V|$ эквивалентно расширению $[Y, f]$.

Таким образом, в силу теорем 2 и 3, множество всех построенных выше расширений $F|X_0 \cup \Phi_{[U, D]}, V|$ тихоновского пространства (X, V) , когда $[U, D]$ пробегает всевозможные согласованные пары, совпадает, с точностью до эквивалентности расширений, с совокупностью всех тихоновских расширений пространства (X, V) , а множество всех $F|X_0 \cup \Phi_D, V|$, когда D пробегает всевозможные согласованные разбиения множества $\bar{U}(X)$, совпадает (с точностью до эквивалентности расширений) с совокупностью всех бикомпактных расширений пространства (X, V) , причем различные пары порождают различные (неэквивалентные) расширения.

Зафиксируем теперь некоторое множество U свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства (X, V) и обозначим через $B_U(X)$ множество всех тихоновских расширений $X_{[U, D]} = F|X_0 \cup \Phi_{[U, D]}, V|$ пространства (X, V) , когда D пробегает всевозможные согласованные разбиения множества U . В случае, когда D является разбиением множества U на одноточечные подмножества, расширение $X_{[U, D]}$ будем обозначать через $\exists X_U$.

Из сказанного выше следует, что $B_U(X)$ совпадает с множеством $B(X)$ всех бикомпактных расширений пространства (X, V) тогда и только тогда, когда U совпадает с множеством всех свободных вполне регулярных ультрафильтров пространства (X, V) .

На множестве $B_U(X)$ рассмотрим отношение порядка, при котором $Y > Z$, если существует непрерывное отображение пространства Y в Z , тождественное на X_0 .

Лемма 5. Для любых двух расширений $Y = X_{[U, D_1]}$ и $Z = X_{[U, D_2]}$ $Y > Z$ тогда и только тогда, когда разбиение D_1 вписано в D_2 .

Следствие 1. Расширение $\exists X_U$ является наибольшим элементом частично упорядоченного множества $B_U(X)$.

Следствие 2. Построенное выше бикомпактное расширение $\exists X_U = F|X_0 \cup \bar{U}, V|$ тихоновского пространства (X, V) является его стоун-чеховским расширением.

Отметим, что описанный в этой заметке метод построения расширений, в части касающейся построения стоун-чеховского расширения, полностью совпадает с методом центрированных систем открытых множеств П. С. Александрова (см. (1.5)).

Теорема 4. Пусть U произвольное бикомпактное множество свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства (X, V) . Тогда для любых двух расширений Y и Z из $B_U(X)$ $Y > Z$ в том и только в том случае, когда Z является фактор-пространством пространства Y , соответствующим не-

прерывному разбиению Y на бикомпактные подмножества, при котором X_0 разбивается на одноточечные подмножества. при этом фактор-отображение неприводимо и совершенно. Кроме того для любого расширения Y из $V_U(X)$ фактор-пространство пространства Y , соответствующее разбиению такого же типа, является расширением пространства (X, V) , принадлежащим $V_U(X)$.

Следствие. Для любого бикомпактного множества U свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства X расширение Y этого пространства принадлежит $V_U(X)$ тогда и только тогда, когда Y является фактор-пространством пространства βX_U , соответствующим такому непрерывному разбиению βX_U на бикомпактные подмножества, при котором X_0 разбивается на одноточечные подмножества.

Теорема 5. Для любого бикомпактного множества U свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства (X, V) частично упорядоченное множество $V_U(X)$ образует полную решетку.

Учитывая, что множество всех свободных вполне регулярных ультрафильтров локально бикомпактного пространства X бикомпактно, из следствия теоремы 4 и из теоремы 5 в частности получаются известные результаты, приведенные в работах (1,9).

Пусть K_1 и K_2 -категории, определенные следующим образом: $Ob(K_1)$ (соответственно $Ob(K_2)$) состоит из наростов расширений βX_U (соответственно из решеток $V_U(X)$), когда X пробегает все небикомпактные тихоновские пространства, в U — все (кроме двухэлементных) бикомпактные подмножества множества всех свободных вполне регулярных ультрафильтров пространства X ; $Mor(K_1)$ — гомеоморфизмы, а $Mor(K_2)$ — изоморфизмы.

Теорема 6. Между категориями K_1 и K_2 существует изоморфизм такой, что образом объекта $\beta X_U \setminus X$ служит $V_U(X)$.

Следствие 1. Пусть U и U' произвольные бикомпактные множества свободных вполне регулярных ультрафильтров соответственно тихоновских пространств X и Y . Решетки $V_U(X)$ и $V_{U'}(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны наросты тихоновских расширений βX_U и $\beta Y_{U'}$.

Следствие 2. Для любого, за исключением двухэлементного, бикомпактного множества U свободных вполне регулярных ультрафильтров произвольного тихоновского пространства X группа гомеоморфизмов пространства $\beta X_U \setminus X$ изоморфна группе автоморфизмов решетки $V_U(X)$.

Следствие 3. Для любого бикомпактного множества U свободных вполне регулярных ультрафильтров произвольного тихоновского пространства X существует локально бикомпактное пространство Y такое, что $V_U(X)$ изоморфна $V(Y)$.

В следствиях 1 и 2 теоремы 6, предполагая X и Y локально

бикompактными и взяв в качестве U и U' все свободные вполне регулярные ультрафильтры соответственно пространств X и Y , получим известные результаты К. Д. Магилла (⁹).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

II. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

Տոպոլոգիական տարածությունների բոլոր բիկոմպակտ և բոլոր տիխոնովյան լայնացումների կառուցումը

Օգտագործելով Պ. Ա. Ալեքսանդրովի կողմից մտցված բաց բազմությունների լիովին ուկուլյար կենտրոնացված սիստեմի զաղափարը և կիրառելով հեղինակի կողմից նախկինում առաջադրված մոտեցումները, որոնք թույլ տվեցին կառուցել կամայական տոպոլոգիական տարածության բոլոր H -փակ և բոլոր հատադորժյան լայնացումները, ներկա հոդվածում տրվում է կամայական տիխոնովյան տարածության բոլոր բիկոմպակտ և բոլոր տիխոնովյան լայնացումները կառուցելու մեթոդ:

Լիովին ուկուլյար տարածության ստորուն—չեխյան լայնացումը կառուցելիս այդ մեթոդը համընկնում է Պ. Ա. Ալեքսանդրովի կողմից առաջարկված բաց բազմությունների կենտրոնացված սիստեմների մեթոդի հետ:

Բացի դրանից, տիխոնովյան լայնացումների համար ընդհանրացվում են նաև (⁷⁻⁹) հոդվածներում բերված գլխավոր արդյունքները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ П. С. Александров, Матем. сборн., 5 (47), 403 (1939). ² S. Fomin, Ann. Math. 44, 171 (1943). ³ Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., 31, 543 (1952). ⁴ П. С. Александров, В. Пономарев, ДАН СССР, т. 121, №4, 575 (1958). ⁵ С. Илиадис, С. Фомин, УМН, 21, №4, 47 (1966). ⁶ С. Г. Овсепян, ДАН СССР, т. 224, №4, 764 (1975). ⁷ N. Boboc, ch. Stretchi, Bull. Math. soc. sci., Math. Phys., R. P. Roumanie, Y. 5 (53), 155 (1961). ⁸ O. Njastad, J. London Math. Soc., 40, 526 (1965). ⁹ K. D. Magill jr., Proc. London Math. Soc., (3) v. 18, 231 (1968). ¹⁰ С. Г. Овсепян, ДАН СССР, т. 206, №4, 819 (1972). ¹¹ С. Г. Овсепян, "Известия АН Арм. ССР," математика, т. 8, №3, 235 (1973).

УДК 517.8 519.9

МАТЕМАТИКА

В. Л. Даллакян

**Операторы внешних сопротивлений и проводимостей
 линейной структуры**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/VII 1977)

1. J — растягивающие матрицы-функции, какой является передаточная матрица многополюсника (в конечномерном случае), рассматриваются в работах М. С. Лившица (¹), А. В. Ефимова и В. П. Потапова (²). Изучению условий существования и свойств передаточной оператор-функции и функции рассеяния линейной структуры (в бесконечном случае) посвящены работы А. Г. Руткаса и Н. И. Хиргий (^{3,4}), Хелтона (⁵).

В данной работе рассматривается аналогичная задача для оператора внешних сопротивлений и оператора внешних проводимостей линейной структуры: по этим операторам (матрицам) часто в теории электрических цепей и радиофильтров осуществляется синтез физических систем.

2. Предположим, что ориентированный граф G наделен структурой линейной цепи в сепарабельном гильбертовом пространстве Λ (⁶). Внутреннее пространство обозначается через H , а внешнее через E ($\Lambda = E \oplus H$). Известен оператор $X: H \rightarrow H$, называемый оператором внутренних сопротивлений такой, что

$$V^{in} = X I^{in}.$$

Необходимо найти условия существования и вид оператора $Z: E \rightarrow E$ такого, что

$$-V^{ex} = Z I^{ex}$$

называемого оператором внешних сопротивлений.

Необходимо, также найти условия существования и вид оператора $Y: E \rightarrow E$ такого, что

$$I^{ex} = Y(-V^{ex})$$

называемого оператором внешних проводимостей.

Для решения поставленной задачи вводится

Определение. Каркас графа называется z -каркасом (y -каркасом), если он содержит только внутренние (все внешние и еще внутренние) дуги. Каркас называется регулярным; если фундаментальные матрицы разрезов и циклов, определяемые этим каркасом, задают ограниченные операторы в пространстве Λ .

Матрица разрезов s_z и матрица циклов q_z по z -каркасу могут быть представлены в виде

$$s_z = [a_{11} \quad 1 \quad a_{12}], \quad q_z = \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & 0 \\ 0 & b_{21} & 1 \end{bmatrix},$$

где первый блок-столбец соответствует внешним дугам, второй — соответствует внутренним дугам, вошедшим в z -каркас, а третий — остальным внутренним дугам.

Из блоков этих матриц можно образовать матрицы

$$\gamma = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_0 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix},$$

задающие в базисах θU^{ex} и θU^{in} операторы соответственно

$$\Gamma: E \rightarrow H, \quad S_0: H \rightarrow H, \quad Q_0: H \rightarrow H.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть для линейной структуры на графе существует регулярный z -каркас. Тогда оператор внешних сопротивлений совпадает с оператор-функцией

$$Z(X) = \Gamma^* X (Q_0 X + S_0)^{-1} \Gamma \quad (1)$$

при всяком X из области определения функции $Z(X)$.

С точки зрения синтеза цепи интересна

Теорема 2. Пусть функция $Z(X)$ представлена в виде (1) с коэффициентами, задаваемыми соответственно матрицами типа

$$\gamma = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_0 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b^* & 1 \end{bmatrix}.$$

Если матрица $[a \quad 1 \quad b]$, как матрица разрезов допускает реализацию в виде некоторого графа G , то эта реализация задает на графе G структуру линейной цепи с оператором внешних сопротивлений $Z(X)$.

Пусть Ω_E — оператор сопряжения, действующий в пространстве E , Ω — в пространстве H .

Теорема 3. Оператор $Z(X)$, как функция от X обладает следующими свойствами

1. $\Omega_E Z(X) \Omega_E = Z(\Omega X \Omega)$;
2. $Z^*(X) = Z(X^*)$;
3. $Z(-X) = -Z(X)$;
4. $\operatorname{Re} Z(X) = 0$, если $\operatorname{Re} X = 0$.

и при обратимости X , кроме того,

$$\operatorname{Re} Z(X) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \operatorname{Re} X \geq 0 \\ \leq 0, & \text{если } \operatorname{Re} X \leq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим структуру линейной цепи с изменяющейся зависимостью вида

$$V^{1n}(\lambda) = X(\lambda)/I^n(\lambda), \quad (2)$$

где λ — комплексное число. Пусть подпространства H_r, H_l, H_c, H_g ($H = H_r \oplus H_l \oplus H_c \oplus H_g$) приводят оператор $X(\lambda)$, который индуцирует в них операторы

$$X_r = R, \quad X_l = iL, \quad X_c = (iC)^{-1}, \quad X_g = G.$$

Линейная структура с таким оператором $X(\lambda)$ называется *rlcg*-структурой, причем пассивной *rlcg*-структурой, если операторы R, L, C положительны, а $G^* = -G$.

При таких предположениях оператор внешних сопротивлений является функцией от скалярного аргумента λ .

$$z(\lambda) = Z(X(\lambda)).$$

Следствие. Для пассивной *rlcg*-структуры оператор-функция $z(\lambda)$ обладает свойствами:

1. $\Omega_E z(\lambda) \Omega_E = z(\bar{\lambda})$;
2. $\operatorname{Re} z(\lambda) \geq 0$, если $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Кроме того, для пассивной *rlc*-структуры ($H_g = 0$)

3. $z^*(\lambda) = z(\bar{\lambda})$,

а для пассивной *lsg*-структуры ($H_r = 0$)

4. $\operatorname{Re} z(\lambda) \begin{cases} = 0, & \text{если } \operatorname{Re} \lambda = 0 \\ \leq 0, & \text{если } \operatorname{Re} \lambda < 0 \end{cases}$

для пассивной *lс*-структуры ($H_r = 0, H_g = 0$)

5. $z(-\lambda) = -z(\lambda)$

для пассивной *rl*-структуры ($H_c = 0, H_g = 0$)

6. $\operatorname{Im} z(\lambda) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda > 0 \\ = 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda = 0 \\ \leq 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda < 0 \end{cases}$

для пассивной *rc*-структуры ($H_l = 0, H_g = 0$)

7. $\operatorname{Im} z(\lambda) \begin{cases} \leq 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda > 0 \\ = 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda = 0 \\ \geq 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda < 0 \end{cases}$

Необходимое условие существования оператора внешних сопротивлений задает

Теорема 4. Пусть для линейной структуры на графе существует оператор внешних сопротивлений $Z(X)$. Тогда этот граф обладает z — каркасом.

3. Перейдя к вопросу существования оператора внешних проводимостей, отметим, что матрица разрезов s_y и матрица циклов q_y по y — каркасу могут быть представлены блочными матрицами

$$s_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{yy} \\ 0 & 1 & a_{yy} \end{bmatrix}, \quad q_y = \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yy} & 1 \end{bmatrix},$$

где первый блок-столбец соответствует внешним дугам, второй — соответствует внутренним дугам, вошедшим в y — каркас, а третий — остальным внутренним дугам.

Матрицы, образованные из блоков матриц s_y и q_y ,

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{yy} \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{yy} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{yy} & 1 \end{bmatrix}$$

задают в базисах \mathcal{U}^{ex} и \mathcal{U}^{in} операторы, соответственно

$$\Gamma_1: E \rightarrow H, \quad S_1: H \rightarrow H, \quad Q_1: H \rightarrow H$$

Теорема 5. Пусть для линейной структуры на графе существует регулярный y — каркас. Тогда оператор внешних проводимостей совпадает с оператор-функцией.

$$Y(X) = \Gamma_1^*(Q_1 X + S_1)^{-1} \Gamma_1 \quad (3)$$

для всякого X из области определения функции $Y(X)$.

Теорема 6. Пусть функция $Y(X)$ представлена в виде (3) с коэффициентами, заданными соответственно матрицами

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a^* & 1 \end{bmatrix}$$

Если матрица $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -b^* \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, как матрица разрезов, допускает реализацию в виде некоторого графа G , то эта реализация задает на графе G структуру линейной цепи с оператором внешних проводимостей $Y(X)$.

Теорема 7. Оператор $Y(X)$, как функция от X , обладает следующими свойствами

$$1. \Omega_E Y(X) \Omega_E = Y(\Omega X \Omega);$$

$$2. Y^*(X) = Y(X^*);$$

$$3. Y(-X) = -Y(X);$$

$$4. \operatorname{Re} Y(X) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \operatorname{Re} X \geq 0 \\ = 0, & \text{если } \operatorname{Re} X = 0 \\ \leq 0, & \text{если } \operatorname{Re} X \leq 0 \end{cases}$$

Когда структура линейной цепи имеет изменяющуюся зависимость типа (2), оператор внешних проводимостей является функцией от λ

$$y(\lambda) = Y(X(\lambda)).$$

Для пассивной $rlcg$ — структуры $y(\lambda)$ обладает теми же свойствами, что и оператор-функция $z(\lambda)$.

Теорема 8. Пусть для линейной структуры на графе существует оператор внешних проводимостей $Y(X)$. Тогда этот граф обладает y — каркасом.

Таким образом, условия существования и вид оператора внешних сопротивлений $Z(X)$ и оператора внешних проводимостей $Y(X)$ тесно связаны с геометрией линейной структуры.

В заключении выражаю признательность А. Г. Руткасу за постановку задачи и внимание при выполнении работы.

Армянский научно-исследовательский институт энергетики

Վ. Լ. ԴԱՎԱՅԱՆ

Գծային կառուցվածքի արտաքին դիմադրությունների և հաղորդակցությունների սպերատորներ

Կողմնորոշված գրաֆի համար, որը ստացված է գծային շղթայի կառուցվածքով, դիտարկվում են արտաքին դիմադրությունների Z և արտաքին հաղորդակցությունների Y սպերատորները. նրանց գոյության պայմանները U ստացված են Z և Y սպերատորների արտահատությունները՝ ներքին դիմադրությունների X սպերատորի միջոցով: Նկարագրված են $Z(X)$ և $Y(X)$, ինչպես նաև $z(\lambda) = Z(X(\lambda))$, $y(\lambda) = Y(X(\lambda))$ (գծային կառուցվածքի փոփոխական կախվածության դեպքում), սպերատոր-ֆունկցիաների հատկությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. С. Лившиц, Операторы, колебания, волны «Наука», М., 1966, ² А. В. Ефимов, В. П. Поганов УМН, т. 28, № 1 (1973) ³ А. Г. Руткас, Н. Н. Хирсид, Сб. Автоматизированные системы управления и приборы автоматки. Вып. 3, Харьков, 1974 ⁴ А. Г. Руткас, ДАН СССР, т. 230, № 1 (1976). ⁵ J. W. Helton, Indiana Univ. Math. J., v. 22, № 5 (1972).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Р. К. Алексанян, Ц. А. Мкртчян

Термоупругая устойчивость прямоугольной пластинки с круговым включением

(Представлено чл-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапоиджяном 9/IV 1977)

Рассматривается задача термоупругой устойчивости составной прямоугольной пластинки с круговым включением радиуса R .

Предполагается, что пластинка и включение имеют одинаковые упругие и различные теплофизические характеристики материалов и соединены между собой при некоторой начальной температуре. Начальные напряжения и деформации в пластинке отсутствуют. Пластинка подвергается равномерному нагреву.

Составную неизогнутую пластинку с толщиной $2h$ отнесем к декартовой системе координат (x, y, z) , совмещая плоскость (x, y) со средней плоскостью пластинки. Используется также полярная система координат (r, φ) с полюсом в центре кругового включения (рис. 1).

Рассматриваемая задача термоустойчивости приводится к интегрированию следующих дифференциальных уравнений (¹).

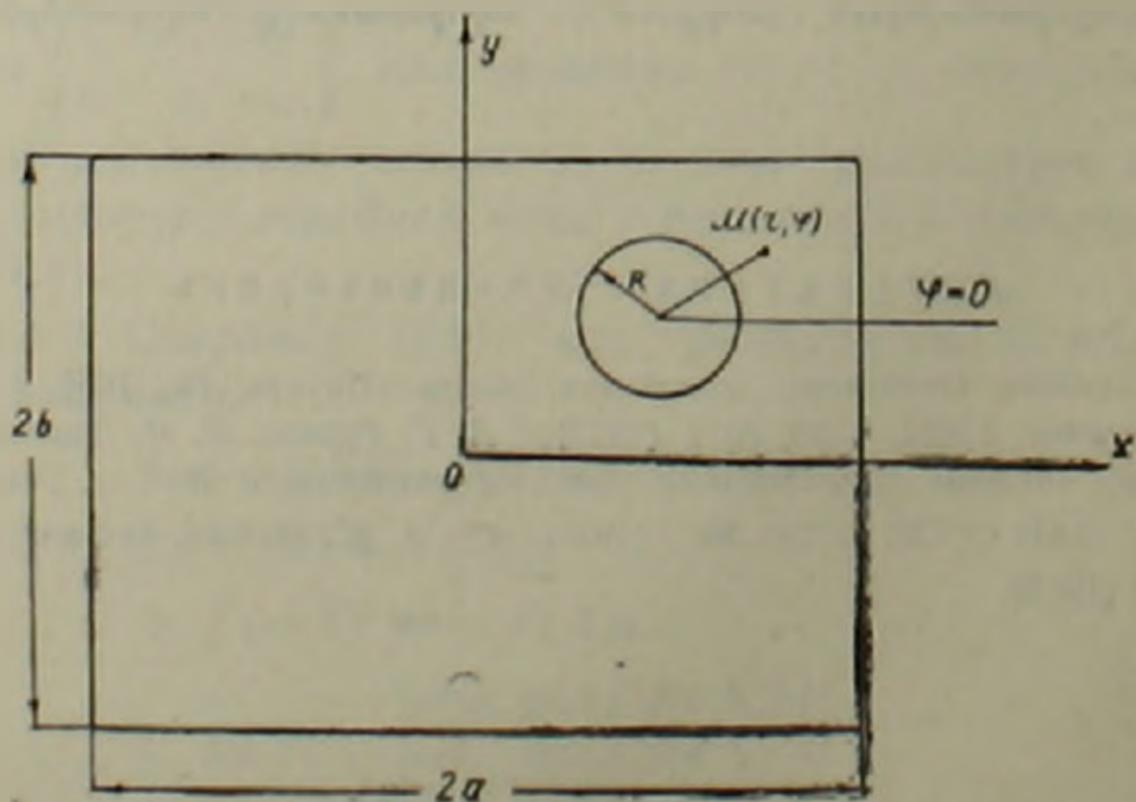


Рис. 1

$$\Delta\Delta\Phi_l = 0 \quad l = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$D\Delta\Delta w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.2)$$

где Φ_l — функция напряжений для плоского напряженного состояния пластинки. Индекс $l=1$ относится к области $r < R$, а $l=2$ — к области $r > R$, w — прогиб пластинки, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, Δ — двумерный оператор Лапласа.

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \Phi = \begin{cases} \Phi_1, & r < R \\ \Phi_2, & r > R \end{cases} \quad (1.3)$$

Зависимости между термоупругими усилиями и деформациями в полярной системе имеют вид (1):

$$\begin{aligned} N_r^{(i)} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_r^{(i)} + \nu \varepsilon_\theta^{(i)}) - \frac{E\alpha_l}{1-\nu} N_T^{(i)}, \\ N_\theta^{(i)} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta^{(i)} + \nu \varepsilon_r^{(i)}) - \frac{E\alpha_l}{1-\nu} N_T^{(i)}, \\ N_{r\theta}^{(i)} &= \frac{2Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{r\theta}^{(i)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь α_l — коэффициенты линейного теплового расширения, $N_T = 2hT$.

Деформации и перемещения срединной плоскости пластинки связаны формулами:

$$\varepsilon_r^{(i)} = \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{u_r^{(i)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta}, \quad (1.5)$$

$$\gamma_{r\theta}^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(i)}}{r}.$$

Усилия выражаются через функции напряжений следующим образом:

$$N_r^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_l}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial \theta^2}, \quad N_\theta^{(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial r^2}, \quad N_{r\theta}^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_l}{\partial \theta} \right). \quad (1.6)$$

На поверхности раздела $r=R$ должны выполняться условия непрерывности усилий и перемещений (2)

$$N_r^{(1)} = N_r^{(2)}, \quad N_{r\theta}^{(1)} = N_{r\theta}^{(2)} \quad \text{при } r=R \quad (1.7)$$

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad v_r^{(1)} = v_r^{(2)}.$$

Рассматривается два случая условий

$$\begin{aligned} \text{а) } N_{xy}^{(2)} = u_x^{(2)} = 0 & \quad \text{при } x = \pm a \\ N_{xy}^{(2)} = u_y^{(2)} = 0 & \quad \text{при } y = \pm b \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } N_{xy}^{(2)} = u_x^{(2)} = 0 & \quad \text{при } x = \pm a \\ N_{xy}^{(2)} = N_{xy}^{(2)} = 0 & \quad \text{при } y = \pm b \end{aligned} \quad (1.9)$$

Поставленная задача термоустойчивости пластинки решается в двух этапах. Вначале определяются функции напряжений Φ_i ($i=1, 2$) при контактных условиях (1.7) и при граничных условиях (1.8) или (1.9). В последующем определяется критическая температура нагрева пластинки, при которой наступает потеря устойчивости.

2. Решение уравнений (1.1) представим в виде

$$\Phi_i = \Phi_0 + F_i. \quad (2.1)$$

Здесь F_i — частные решения уравнений (1.1), удовлетворяющие контактным условиям (1.7). Бигармоническая функция Φ_0 на основании (1.8), (1.9) и (2.1) должна удовлетворять следующим граничным условиям:

в случае а)

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y}, \quad u_x^{(2)} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y}, \quad u_y^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = \pm b$$

в случае б)

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}, \quad u_x^{(2)} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} \quad \text{при } y = \pm b$$

Частные решения бигармонических уравнений (1.1) представим в виде (3)

$$F_1 = \left(C_1 + C_2 \ln \frac{r}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2, \quad F_2 = C_3 + C_4 \ln \frac{r}{R}, \quad (2.4)$$

которые в силу (1.4)–(1.7) должны удовлетворять условиям (4)

$$F_1 = F_2, \quad F_1' = F_2', \quad F_1'' = F_2'' + M, \quad F_1''' = F_2''' - \frac{M}{r}, \quad \text{при } r = R \quad (2.5)$$

Здесь штрих означает производную по r , $M = 2EhT(a_2 - a_1)$.

Удовлетворяя условиям (2.5), для F_1, F_2 получаем выражения

$$F_1 = \frac{M}{4} r^2, \quad F_2 = \frac{MR^2}{4} \left(1 + \ln \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (2.6)$$

В декартовой системе координат для усилий имеем следующие выражения:

$$N_x^{(1)} = N_y^{(1)} = \frac{M}{2}, \quad N_{xy}^{(1)} = 0 \quad (2.7)$$

$$N_x^{(2)} = -N_y^{(2)} = \frac{MR^2}{2} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad N_{xy}^{(2)} = \frac{MR^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.8)$$

Перемещения определяются по формулам:

$$u_x^{(i)} = \frac{1}{2Eh} \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right) + \alpha_i x T + a_i y + b_i, \quad (2.9)$$

$$u_y^{(i)} = \frac{1}{2Eh} \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) + \alpha_i y T + a_i x + c_i.$$

Рассмотрим симметричную составную пластинку, когда центры прямоугольника и включения совпадают.

Имеем условия симметрии:

$$u_x(0, y) = u_y(x, 0) = N_{xy}(0, y) = N_{xy}(x, 0) = 0. \quad (2.10)$$

Граничные условия (2.2) и (2.3) для рассматриваемой пластинки на основании (2.8), (2.9) преобразуются к виду

в случае а)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} &= \frac{MaR^2 y}{(a^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{y=b} &= \frac{MbR^2 x}{(x^2 + b^2)^2}, \\ \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} &= -2Eha\alpha_2 T + \frac{(1+\nu)MaR^2}{2(a^2 + y^2)}, & (2.12) \\ \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) \Big|_{y=b} &= -2Ehb\alpha_2 T + \frac{(1+\nu)MbR^2}{2(x^2 + b^2)}; \end{aligned}$$

в случае б)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} &= \frac{MaR^2 y}{(a^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{y=b} &= \frac{MbR^2 x}{(x^2 + b^2)^2}, \\ \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} &= -2Eha\alpha_2 T + \frac{(1+\nu)MaR^2}{2(a^2 + y^2)}, & (2.13) \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \Big|_{y=b} &= \frac{MR^2}{2} \frac{x^2 - b^2}{(x^2 + b^2)^2}. \end{aligned}$$

Имея в виду симметричность задачи, функцию Φ_0 представим в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{\sigma_1}{2} x^2 + \frac{\sigma_2}{2} y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y) \cos \alpha_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (E_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x) \cos \beta_k y. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.12), (2.13), для неопределенных коэффициентов $\sigma_1, \sigma_2, A_k, D_k, E_k, H_k$ получим выражения: при граничных условиях а)

$$A_k = M \frac{2a_k - [(1+\nu)a_k - \sigma_k c_k](1 + b a_k \operatorname{cth} a_k b)}{2\alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k b},$$

$$D_k = M \frac{(1+\nu)a_k - \alpha_k c_k}{2\alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k b}, \quad H_k = M \frac{(1+\nu)b_k - \beta_k d_k}{2\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k a},$$

$$E_k = M \frac{2b_k - [(1+\nu)b_k - \beta_k d_k](1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a)}{2\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k a},$$

$$\sigma_1 = \frac{M}{\nu - 1} \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{R^2}{2ab} \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \nu \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) \right|,$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{\nu - 1} \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{R^2}{2ab} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \nu \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \right|;$$

при граничных условиях б)

$$A_k = M \frac{g_k (\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b + \operatorname{sh} \alpha_k b) - a_k \alpha_k b \operatorname{sh} \alpha_k b}{\alpha_k^2 (\alpha_k b + \operatorname{sh} \alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b)},$$

$$D_k = M \frac{a_k \operatorname{ch} \alpha_k b - g_k \operatorname{sh} \alpha_k b}{\alpha_k^2 (\alpha_k b + \operatorname{sh} \alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b)}, \quad H_k = M \frac{(1+\nu)b_k - \beta_k d_k}{2\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k a},$$

$$E_k = M \frac{2b_k - [(1+\nu)b_k - \beta_k d_k](1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a)}{2\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k a},$$

$$\sigma_1 = -\frac{M}{2} \left[\frac{R^2}{a^2 + b^2} + \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p b_p}{\beta_p} \right],$$

$$\sigma_2 = -M \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\nu}{2} \left[\frac{R^2}{a^2 + b^2} + \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p b_p}{\beta_p} \right] - \frac{(1+\nu)R^2}{2ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right].$$

Здесь приняты обозначения:

$$a_k = -2R^2 \int_0^a \frac{x \sin \alpha_k x dx}{(x^2 + b^2)^2}, \quad b_k = -2k^2 \frac{a}{b} \int_0^b \frac{y \sin \beta_k y dy}{(a^2 + y^2)^2},$$

$$c_k = -(1+\nu)R^2 \frac{b}{a} \int_0^a \frac{\cos \alpha_k x dx}{x^2 + b^2}, \quad d_k = -(1+\nu)R^2 \frac{a}{b} \int_0^b \frac{\cos \beta_k y dy}{a^2 + y^2},$$

$$g_k = -\frac{R^2}{a} \int_0^a \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cos \alpha_k x dx - \frac{(-1)^k}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\beta_p} \left\{ 2b_p - \right.$$

$$-\frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \left[2b_p + \left(1 - \frac{\alpha_k^2 - \beta_p^2}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \operatorname{th}^2 \rho a \right) (\beta_p^2 \rho - (1 + \nu)b_p) \right]$$

3. Подставляя найденные значения усилий N_x , N_y , N_{xy} в уравнение устойчивости (1.2), получаем дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$D\Delta\Delta w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.1)$$

В случае шарнирно-опертой по всему контуру пластинки имеем граничные условия

$$w|_{x=\pm a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad w|_{y=\pm b} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm b} = 0. \quad (3.2)$$

Для отыскания w воспользуемся методом Бубнова—Галеркина. С этой целью изогнутую поверхность пластинки представим в виде

$$w = w_0 \cos \lambda_m x \cos \mu_n y, \quad (3.3)$$

где

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{2a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{2b} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots)$$

Представление (3.3) удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания.

Подставляя (3.3) в уравнение (3.1), при помощи метода Бубнова—Галеркина найдем критическую температуру, при которой пластинка теряет устойчивость.

при граничных условиях а)

$$T_{кр} = \frac{h^2}{3(1+\nu)} \frac{\lambda_m^2 + \mu_n^2}{(1 - K_{mn})\alpha_2 + \alpha_1 K_{mn}}; \quad (3.4)$$

при граничных условиях б)

$$T_{кр} = \frac{h^2}{3\lambda_m^2(1-\nu^2)} \frac{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{(1 - Q_{mn})\alpha_2 + \alpha_1 Q_{mn}}; \quad (3.5)$$

где введены обозначения:

$$K_{mn} = \frac{1}{2ab(\lambda_m^2 + \mu_n^2)} \left\{ R^2 \left[(\lambda_m^2 + \nu\mu_n^2) \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + (\nu\lambda_m^2 + \mu_n^2) \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[b\lambda_m^2 \left(\frac{\nu}{\mu_n} b_n - 2d_n \right) + a\mu_n^2 \left(\frac{\nu}{\lambda_m} a_m - 2c_m \right) + 4(1-\nu)I_{mn} \right] \right\}, \\ Q_{mn} = \frac{1}{2ab\lambda_m^2} \left[(1+\nu)R^2\lambda_m^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + b\lambda_m^2 \left(\frac{\nu}{2\mu_n} b_n - d_n \right) + \right. \\ \left. + \frac{a\mu_n^2}{2\lambda_m} \frac{a_m(\operatorname{sh} 4\lambda_m b - 4b\lambda_m) - 4g_m \operatorname{sh}^2 2\lambda_m b}{4\lambda_m b + \operatorname{sh} 4\lambda_m b} + 4I_{mn} \right] - \quad (3.6)$$

$$-\frac{\nu\lambda_m^2 + \mu_n^2}{2\lambda_m^2} \left[\frac{R^2}{a^2 + b^2} + \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p b_p}{\beta_p} \right],$$

$$I_{mn} = \int_0^R \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^b f_{mn}(x, y) dx dy + \int_R^a \int_0^b f_{mn}(x, y) dx dy +$$

$$+ (\lambda_m^2 + \mu_n^2) \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos^2 \lambda_m x \cos^2 \mu_n y dx dy,$$

$$f_{mn} = \frac{R^2(\lambda_m^2 - \mu_n^2)(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cos^2 \lambda_m x \cos^2 \mu_n y - \frac{R^2 \lambda_m \mu_n x y}{(x^2 + y^2)^2} \sin 2\lambda_m x \cos 2\mu_n y.$$

В частности, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ или $R=0$ из формулы (3.4) и (3.5) имеем:

$$\text{а) } T_{кр} = \frac{h^2(\lambda_m^2 + \mu_n^2)}{3\alpha(1+\nu)}; \quad \text{б) } T_{кр} = \frac{h^2(\lambda_m^2 + \mu_n^2)}{3\alpha\lambda_m^2(1-\nu^2)}, \quad (3.7)$$

которые совпадают с результатами, полученными в работе (1).

Наибольший интерес представляют те значения m и n , при которых критическая температура (3.4) или (3.5) принимает минимальное значение. Эти значения могут быть определены из следующей системы уравнений

$$\frac{\partial T_{кр}}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial T_{кр}}{\partial n} = 0. \quad (3.8)$$

В общем случае система (3.8) может быть решена численным методом. В случае квадратной пластинки исследование показывает, что критическая температура достигает минимального значения при $m=n=1$.

На основании (3.4) проведен численный анализ критической температуры в зависимости от отношения R/a в случае $a=b$, $\nu=0,3$.

На рис. 2 изображены графики изменения минимальной критической температуры $T_{кр}^* = T_{кр}/T_{кр}^0$, ($T_{кр}^0 = \pi^2 h^2 / 6(1+\nu)\alpha_2 a^2$) в зависимости от отношения R/a при фиксированном значении α_1 для различных значений параметра $\eta = \alpha_1/\alpha_2$. В частности, значение $\eta = 0,8$ соответствует случаю пластинки из сталей 30Х или 35Х и включению из стали 35ХНЗМ (для сталей 30Х и 35Х $E \cdot 10^{-6} \text{ кг/см}^2 = 2,0-2,19$, $\nu = 0,24-0,33$, $\alpha_2 = \alpha_{ср} = 13,4 \cdot 10^{-6}$, для стали 35ХНЗМ $E \cdot 10^{-6} \text{ кг/см}^2 =$

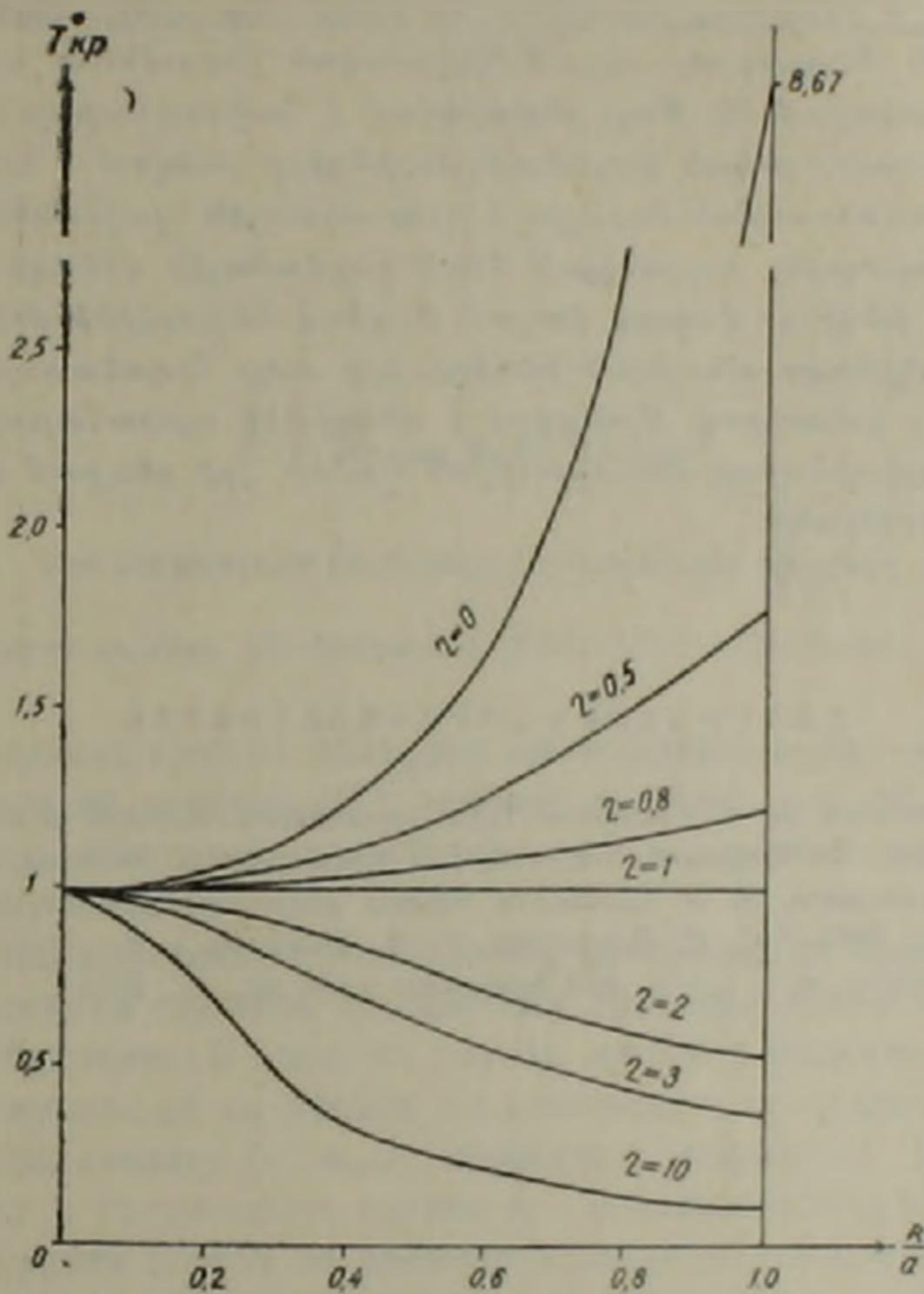


Рис. 2

$= 2,04-2,11$, $\alpha_1 = \alpha_{ср} = 10,8 \cdot 10^{-6}$, (⁴) при интервале температур $20^\circ-100^\circ\text{C}$. Как видно из рис. 2, критическая температура в зависимости от отношения R/a возрастает, когда $\eta < 1$ и убывает, если $\eta > 1$. При фиксированном R/a критическая температура уменьшается с возрастанием параметра η .

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета
Ереванский политехнический институт

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Մ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Շրջանային ներդրակով ուղղանկյուն սալի ջերմառածգական կայունությունը

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային ներդրակով բաղադրյալ ուղղանկյուն սալի ջերմառածգական կայունության խնդիրը:

Նյութերի միևնույն առաձգական և տարրեր ջերմային հատկություններ ունեցող սալը և ներդրակը միացված են իրար հետ որոշ սկզբնական ջերմաստիճանում: Բաղադրյալ սալում սկզբնական յարումներն ու ղեֆորմացիաները բացակայում են: Սալը ենթարկվում է հալստարաչափ տարացման:

Սալի ջերմառաձգական կայունության խնդիրը լուծվում է երկու փուլով: Սկզբում համապատասխան եղրային և կոնտակտային պայմանների դեպքում լուծվում է բաղադրյալ ուղղանկյան հարթ լարվածային վիճակի ջերմառաձգականության խնդիրը: Հաջորդ փուլում Բուրնով-Պալյորկինի մեթոդով լուծվում է սալի ջերմակայունության խնդիրը, երբ սալը հողակապորեն ամրացված է ամբողջ կոնտուրով: Ստացված է անալիտիկ արտահայտություն ջերմաստիճանի կրիտիկական տարրերության համար, որի դեպքում սալը կորցրնում է կայունությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ П. М. Огибалов, В. Ф. Грибанов, Термоустойчивость пластин и оболочек, Изд. МГУ, 1968. ² С. А. Амбарцумян, Общая теория анизотропных оболочек, «Наука», М., 1974. ³ Р. К. Алексанян, М. К. Сагателян, Тезисы докладов научно-технической конференции, ЕрПИ, 1975. ⁴ С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман и др., Расчеты на прочность в машиностроении, т. 1, Изд. машиностроительной лит. М., 1956.

УДК 624.131

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян, Р. П. Малакян

Реологические свойства набухающих грунтов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. И. Тер-Степаняном 11/V 1977)

Набухающие грунты обладают ярко выраженным свойством деформирования во времени (^{1,2}), которое в одном случае проявляется без внешнего силового воздействия, а в другом — под действием внешних нагрузок.

В случае компрессии замачивание набухающего грунта при отсутствии внешних силовых воздействий приводит к длительному свободному набуханию. В этом же случае внешняя нормальная нагрузка (в зависимости от ее уровня по отношению к давлению набухания $\sigma_{наб}$) ограничивает ($\sigma < \sigma_{наб}$), полностью исключает ($\sigma = \sigma_{наб}$) или же приводит к уплотнению грунта во времени ($\sigma > \sigma_{наб}$). Свободное набухание грунта ($\sigma = 0$) во времени всецело обусловлено внутренними физико-химическими процессами, протекающими в набухающем грунте в результате его взаимодействия с водой (³). При действии внешней нормальной нагрузки набухание грунта является физико-химическим и механическим процессом, который, как и свободное набухание, хорошо аппроксимируется реологическими уравнениями состояния. Поэтому длительное набухание грунтов при наличии внешней нормальной нагрузки и без нее можно, хотя бы формально, трактовать как реологическое явление — явление компрессионной ползучести.

Деформация набухающего грунта во времени при сдвиге подчиняется всем закономерностям ползучести обычных глинистых грунтов. При всех равных условиях эта деформация существенно зависит от состояния плотности — влажности грунта в момент испытания. Состояние набухающего грунта и его сопротивление сдвигу $\tau_{сд}$ в свою очередь, зависят от степени набухания (или уплотнения), обусловленной внешней нормальной нагрузкой, давлением набухания и длительностью их действия.

Очевидно, что для определения начального сопротивления грунта сдвигу $\tau_{сд}$ и сдвиговой ползучести набухающего грунта необходимо знать закономерности давления набухания — развитие давле-

ния набухания во времени и его зависимость от внешней нормальной нагрузки σ .

Несмотря на большое распространение набухающих грунтов и, в связи с этим, на необходимость расчета оснований по предельным деформациям с учетом фактора времени, их реологические свойства (ползучесть, релаксация напряжений, прочность) исследованы исключительно слабо. Имеются всего несколько работ, посвященных исследованию сопротивления набухающих грунтов сдвигу и компрессионной ползучести (1-4). Нет ни одной работы по исследованию сдвиговой ползучести набухающих грунтов с учетом влияния начальной влажности на этот процесс. Чтобы в какой-то степени восполнить этот пробел, нами исследованы начальное сопротивление сдвигу и сдвиговая ползучесть ряда набухающих грунтов в двух различных значениях их влажности: при начальной влажности w_0 и их водонасыщении (замачивании) w , после приложения внешних нормальных нагрузок.

Исследовано сопротивление сдвигу бентонитовой глины № 11—76 ($\gamma = 1,77 \text{ г/см}^3$, $w_0 = 46,5\%$, $w_L = 112,36\%$, $w_p = 43,92\%$, $J_p = 68,44\%$) нарушенного сложения и глины № 13—76 ($\gamma = 1,98 \text{ г/см}^3$, $\gamma_s = 2,68 \text{ г/см}^3$, $w_0 = 26\%$, $w_L = 60,16\%$, $w_p = 30,31\%$, $J_p = 29,95\%$) естественного сложения по стандартной методике на приборах М—5 кручения сплошных образцов без возможности бокового расширения при $w = w_0$ и $w = w_s$.

С целью установления диапазона изменения нормального напряжения при определении сопротивления сдвигу бентонитовой глины предварительно исследована зависимость $\sigma_{наб} - \sigma$ на компрессионных приборах М—4 (5) по методу компенсаций деформации набухания (6) при непрерывном водонасыщении в течение 19 дней. Установлено, что давление набухания в данном состоянии грунта, обусловленного σ , равно (6)

$$\sigma_{наб}(\sigma) = \sigma_{наб,0} - \sigma, \quad (1)$$

где $\sigma_{наб,0}$ — давление набухания при $\sigma = 0$.

Диаграмма сдвига бентонитовой глины при $w = w_0$ является прямой. Она аппроксимирована (сплошная линия на рис. 1,а) выражением закона Кулона

$$\tau_{ст, w_0} = \sigma \operatorname{tg} \varphi_0 + c_0, \quad (2)$$

при следующих данных: $\varphi_0 = 10^\circ 43'$; $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,19$; $c_0 = 0,0356 \text{ МПа}$.

Диаграмма сдвига бентонитовой глины при $w = w_s$ является ломанной (6), точка перелома которой соответствует нормальному напряжению, равному максимальному давлению набухания $\sigma = \sigma_{наб,0} = \sigma_{наб, w_{вз}}$. Выражение сопротивления сдвигу набухающей глины при замачивании $w = w_s$, с учетом $\sigma_{наб}$, представлено в следующем виде (6):

$$\tau_{ст, w_s} = [\sigma - \sigma_{наб}(\sigma)] \operatorname{tg} \varphi_0 + c_0, \quad (3)$$

где $\sigma_{наб}(\sigma)$ — зависящая от нормального напряжения σ давление набухания; φ_0 и c_0 — параметры, определяемые из испытания образцов при естественной влажности $w = w_0$.

$$\sigma_{наб}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{для } w = w_0; \\ 0 & \text{для } w > w_0, \sigma \geq \sigma_{наб,0}; \\ (\sigma_{наб,0} - \sigma) & \text{для } w > w_0, \sigma < \sigma_{наб,0}. \end{cases} \quad (4)$$

Выражение (3) справедливо в пределах $-|\sigma - \sigma_{наб}(\sigma)| \operatorname{tg} \varphi_0 \geq c_0$.

В случае $w = w_0$, диаграмма сдвига рассматриваемого грунта аппроксимирована как по выражению (3) с учетом условия (4) и определенных из опыта $\varphi_0 = 10^\circ 43'$; $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,19$; $c_0 = 0,0356$ МПа и $\sigma_{наб,0} = 0,3$ МПа для $t = 10$ дней (штриховая линия на рис. 1,а), так и выражением (2) (сплошная линия). В последнем случае при $\sigma < \sigma_{наб,0}$ использованы следующие данные: $\varphi = 16^\circ 4'$; $\operatorname{tg} \varphi = 0,288$; $c = -0,00086$ МПа, а при $\sigma > \sigma_{наб,0}$: $\varphi = 10^\circ 12'$; $\operatorname{tg} \varphi = 0,18$; $c = 0,0320$ МПа.

Аппроксимация диаграммы сдвига при $w = w_0$ по выражению (3) вполне удовлетворительная и мало отличается от аппроксимации по соотношению (2) (рис. 1,а).

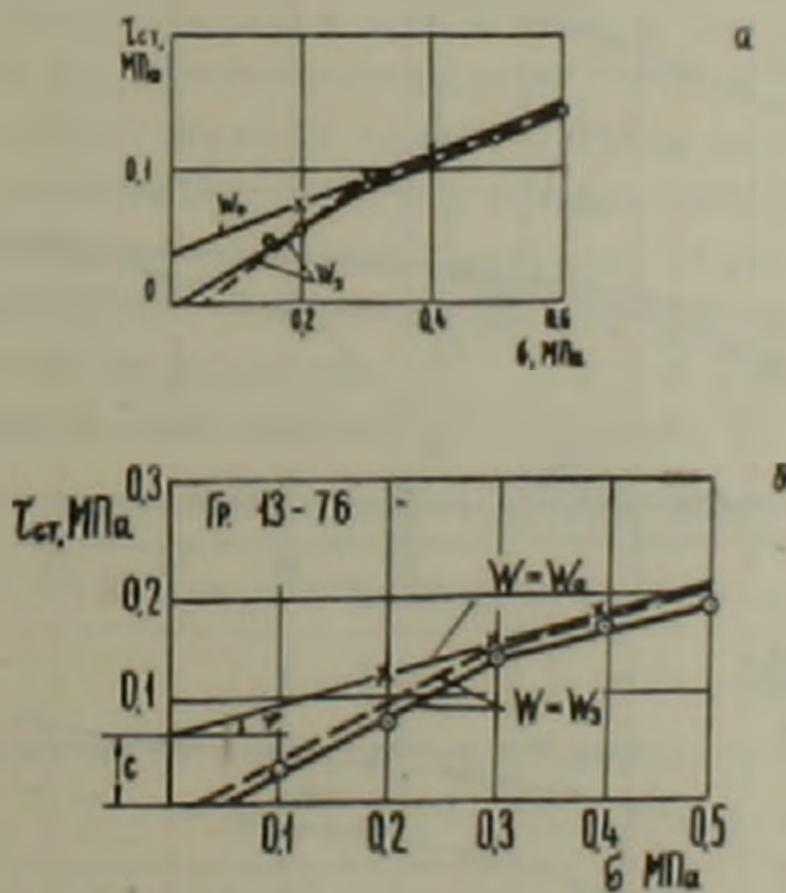


Рис. 1

Аналогичные результаты были получены при испытании глины № 13—76 (рис. 1,б). Диаграммы сдвига при $w = w_0$ и $w = w_2$ аппроксимированы выражением (3), с использованием условия (4), при следующих опытных данных: $\varphi_0 = 14^\circ 36'$; $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,26$; $c_0 = 0,067$ МПа; $\sigma_{наб,0} = 0,3$ МПа.

Из изложенного выше следует, что для определения (3) набухающего грунта при его замачивании следует из опыта определить параметры φ_0 и c_0 выражения (2) при естественной влажности w_0 и величину давления свободного набухания $\sigma_{наб,0}$.

II. Исследования сдвиговая ползучесть бентонитовой глины № 11—76 нарушенного сложения (см. выше) под действием $\sigma = 0,2$ и $0,5$

МПа и глины № 13—76 под действием $\sigma = 0,3$ МПа при начальной (естественной) влажности w_0 и в условиях замачивания w_2 до полного водонасыщения после приложения нормального напряжения σ .

В каждом состоянии бентонитовой глины испытаны по четыре пары образцов-близнецов. Из них по паре использованы для определения стандартного сопротивления сдвигу $\tau_{ст}$ и диаграмм сдвига (рис. 1,а), а остальные использованы для испытания на ползучесть при трех различных постоянных относительных касательных напряжениях $\tau/\tau_{ст}$ (рис. 2).

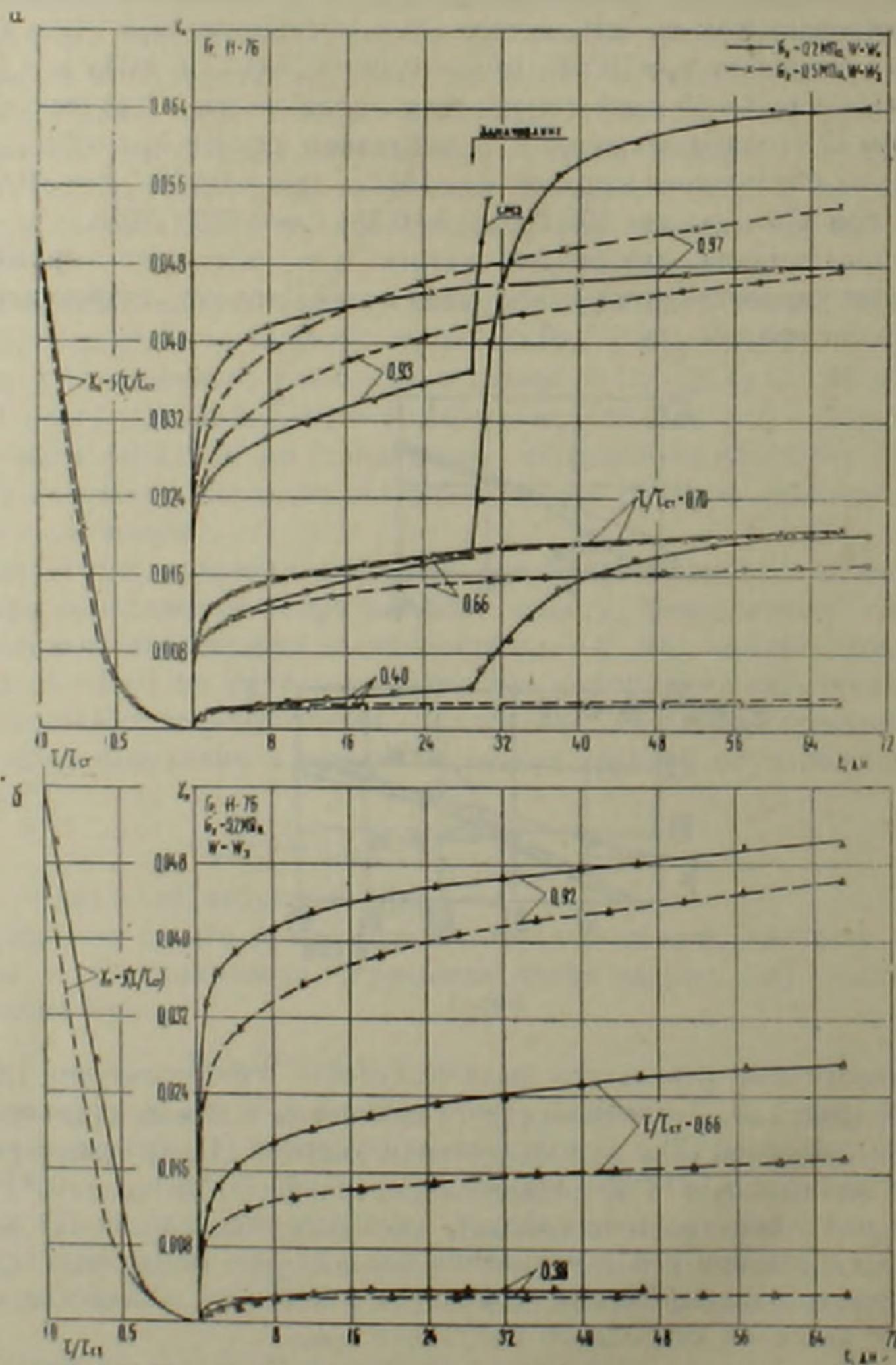


Рис. 2

В различных состояниях грунта образцы испытаны под действием практически равных относительных касательных напряжениях $\tau/\tau_{ст}$.

Выражение ползучести деформации сдвига $\gamma_n(t)$ представлено в следующем виде (7.9)

$$\gamma_n(t) = \omega(t) \cdot f(\tau/\tau_{ст}) = A \cdot t^m (\tau/\tau_{ст})^n, \quad (5)$$

где $\omega(t)$ — мера ползучести при сдвиге; $f(\tau/\tau_{ст})$ — функция относительного касательного напряжения, удовлетворяющая условию $f(\tau/\tau_{ст} = 1) = 1$.

Соотношение (5) с учетом (3) можно записать в следующем виде

$$\gamma_n(t) = A \cdot t^m \left(\frac{\tau}{[\sigma - \sigma_{наб}(\sigma)] \lg \varphi_0 + c_0} \right)^n. \quad (6)$$

Из (6) следует, что для определения $\gamma_n(t)$ с учетом нелинейного закона деформации ползучести сдвига, влияния нормального напряжения σ (состояния грунта) и давления $\sigma_{наб}$ достаточно иметь одно семейство экспериментальных кривых ползучести (рис. 2), определенное при некотором заданном постоянном нормальном напряжении σ , диаграмму сдвига при $w = w_0$ и наибольшее давление набухания грунта $\sigma_{наб,0}$, соответствующее условию $\sigma = 0$.

Для аппроксимации семейств экспериментальных кривых ползучести бентонитовой глины (на правых частях графиков рис. 2 показаны сплошными линиями) описано семейство экспериментальных кривых (рис. 2,а), определенное при $w = w_0$ и $\sigma = 0,5 \text{ МПа} > \sigma_{наб,0} = 0,3 \text{ МПа}$ по выражению (6), с учетом условия $\sigma_{наб}(\sigma) = 0$. Для этого определены зависимость $\gamma_n = f_1(\tau/\tau_{ст})$ (7):

$$\gamma_n = B \cdot (\tau/\tau_{ст})^n = 0,0524 (\tau/\tau_{ст})^{2,94}, \quad (7)$$

выражение функции относительного касательного напряжения

$$f(\tau/\tau_{ст}) = (\tau/\tau_{ст})^n = (\tau/\tau_{ст})^{2,94} \quad (8)$$

и меру ползучести деформации сдвига ($\tau/\tau_{ст} = 1$)

$$\omega(t) = At^m = 0,0314 \cdot t^{0,132}. \quad (9)$$

Кривые ползучести рассмотренного выше случая, построенные по выражению (6) с учетом (8), (9) и условия $\sigma_{наб}(\sigma = 0,5 \text{ МПа}) = 0$ на рис. 2, а показаны штрихкрестиками.

Экспериментальные кривые ползучести, определенные при $w = w_0$, $\sigma = 0,2 \text{ МПа}$ и $\sigma_{наб} = 0$, аппроксимированы по выражению (6) с учетом (8), (9) и условия (4). Результаты аппроксимации на рис. 2, а показаны штрихкружочками.

Наконец, семейство экспериментальных кривых ползучести (рис. 2,б), определенное при водонасыщении образцов ($w = w_0$) после приложения нормальных напряжений $\sigma = 0,2 \text{ МПа}$ аппроксимировано выражением (6) с учетом (8), (9) и (4), то есть при $[\sigma - \sigma_{наб}(\sigma)] =$

$= (2c - \sigma_{\text{наб.0}}) = 0,1$ МПа. Результаты аппроксимации этого семейства на рис. 2,б показаны штрихтреугольниками.

С целью проверки поведения сдвиговой ползучести набухающего грунта при нормальных нагрузках, равных давлению свободного набухания $\sigma = \sigma_{\text{наб.0}}$, испытаны образцы глины № 13-76. На рис. 3 показаны два семейства экспериментальных кривых сдвиговой ползучести этого грунта, определенные при $w = w_0$ (штрихкружочки) и при замачивании $w = w_2$ (штрихкрестики) после приложения нормального напряжения $\sigma = 0,3$ МПа.

В обоих случаях образцы испытаны под действием трех различных относительных касательных напряжений τ/τ_{ct} . Причем, одно из них ($\tau/\tau_{ct} = 0,41$, при $w = w_2$) было ступенями доведено до $\tau/\tau_{ct} = 0,91$ (рис. 3). Как и в рассмотренном выше случае, в различных состояниях влажности образцы испытаны при практически равных τ/τ_{ct} (рис. 3).

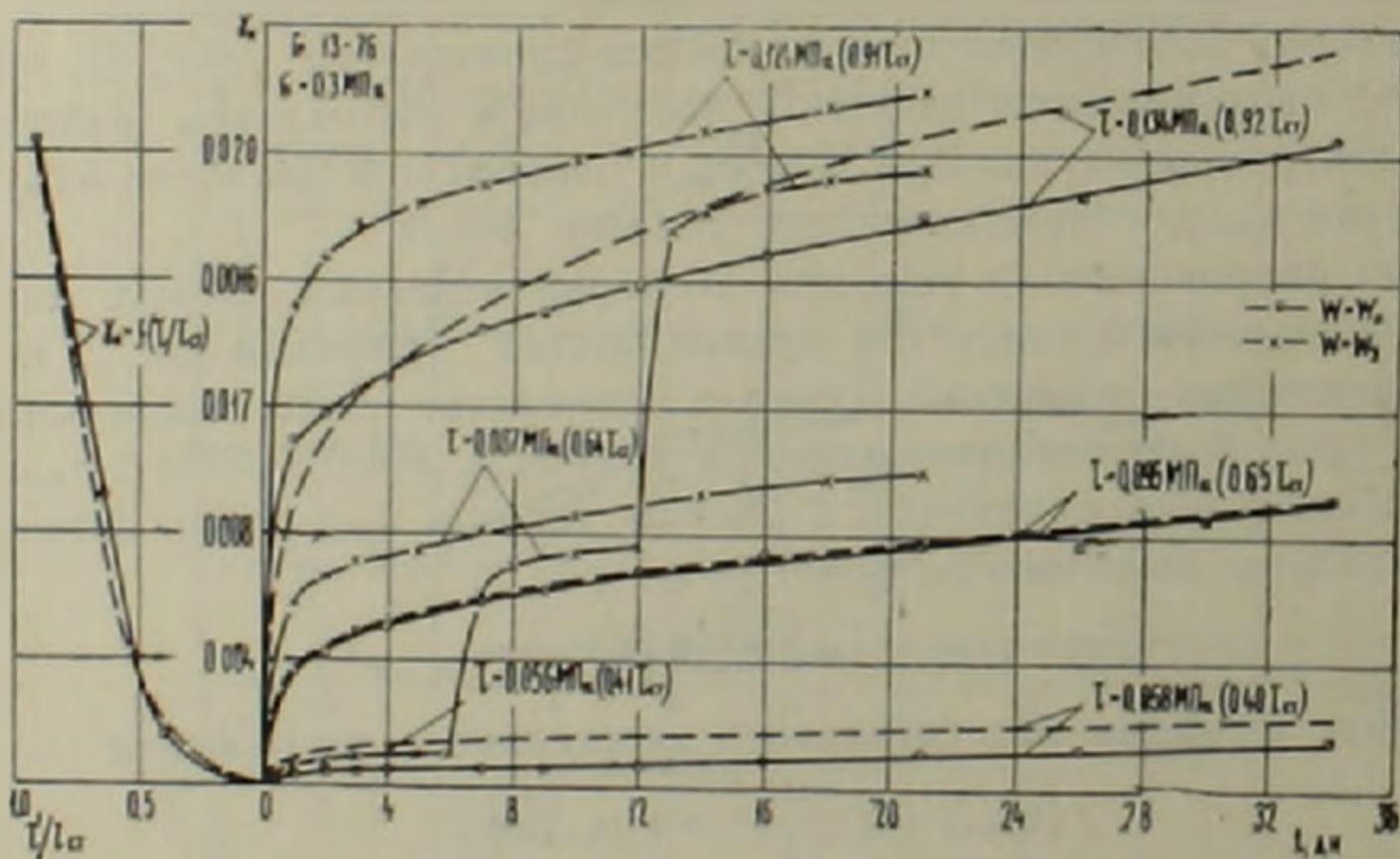


Рис. 3

Поскольку сопротивление сдвигу образцов, испытанных при $w = w_0$ и $w = w_2$ ($\sigma = 0,3$ МПа), практически равны, то их экспериментальные кривые ползучести, определенные при равных τ/τ_{ct} , достаточно близки (рис. 3). Именно поэтому аппроксимация рассматриваемых семейства экспериментальных кривых ползучести осуществлено одним общим выражением (6) при следующих параметрах: $A = 0,0116$; $m = 0,226$; $n = 2,71$; $\varphi = 14^\circ 30'$; $\text{tg} \varphi = 0,2586$; $c = 0,067$ МПа; $\sigma_{\text{наб.}(\sigma)} = \sigma_{\text{наб.0}} - \sigma = 0$. Результаты аппроксимаций на рис. 3 показаны штриховыми линиями.

На рис. 2 и 3 видно, что аппроксимация семейства экспериментальных кривых ползучести деформации сдвига набухающих грунтов по выражению (6), с учетом условия (4), вполне удовлетворительная.

Следовательно, это выражение пригодно для рассматриваемой цели как при различных состояниях набухающих грунтов, характеризующихся величиной σ , так и при действии давления набухания и без него. Это в свою очередь значит, что проведенные эксперименты подтверждают полученные ранее (1) результаты о равенстве деформации ползучести, определенных в различных состояниях грунта при равных значениях относительного касательного напряжения τ/τ_{cr} .

Опыты показали, что деформации сдвиговой ползучести, полученные при ступенчато-возрастающем относительном касательном напряжении, достаточно близки к деформациям, определенным под действием постоянных относительных касательных напряжений (рис. 3). Следовательно, процесс сдвиговой ползучести набухающего грунта в данном его состоянии, как обычно (2), можно описать реологическими уравнениями состояния различных теорий ползучести (3).

Интересно также отметить, что замачивание образцов набухающего грунта, подвергнутых сдвиговой ползучести при $\omega = \omega_0$ ($\sigma = 0,2$ МПа) в течение 28 дней приводит к резкому возрастанию деформации сдвига, а при высоких относительных касательных напряжениях ($\tau/\tau_{cr} = 0,93$) к разрушению материала (рис. 2).

Ереванский государственный университет

И. П. ИСХԱՅԱՆ, Բ. Գ. ՄԱՆԱՔՅԱՆ

Ուռչող բնահողերի ռեոլոգիական հատկությունները

Հողվածում քննարկվում են ուռչող կավային բնահողերի սահքի դիմադրության և սահքի պայմաններում սողքի փորձառական հետազոտության արդյունքները դրանց խոնավության երկու տարրեր պայմաններում:

Բերված են երկու տարրեր ուռչող կավային բնահողների սահքի ստանդարտ դիմադրության դիագրամները, որոնք ստացված են կողային ընդարձակման բացակայության պայմաններում նմուշների ոլորման միջոցով սկզբնական (բնական) խոնավության և նորմալ լարումների կիրառումից հետո ջրահագեցնելու վիճակներում: Ստացված է ուռչող բնահողերի սահքի դիմադրության առնչությունը, որը հաշվի է առնում այդ բնահողերում (լրացուցիչ խոնավացման հետևանքով) ուռձեցման ճնշման առաջացման ազդեցությունը:

Սահքի պայմաններում բնահողերի խոնավության երկու վիճակներում ստացված սողքի փորձառական կորերի ընտանիքների պրանցման միջոցով ստացված է պարզ սահքի ձևափոխության ռեոլոգիական առնչությունը: Հիշյալ առնչությունը հնարավորություն է բնթելում որոշել պարզ սահքի ձևափոխությունները՝ կախված շոշափող լարումից, ժամանակից, նորմալ լարման մեծությունից և ուռձեցման ճնշումից: Բերված են ստացված առնչությունով կառուցված սողքի կորերի ընտանիքները, որոնք շատ չեն տարբերվում փորձառական կորերի ընտանիքներից:

ЛИТЕРАТУРА — Ф Р Ц Ч Ц Ы П Р * З П Р Ъ

- ¹ А. А. Мустафеев, Г. Д. Чигиев, Г. Р. Назиров, Основания, фундаменты и механика грунтов, № 5, 1974. ² Е. А. Сорочан, Строительство сооружений на набухающих грунтах. Стройиздат, М., 1974. ³ М. Д. Аленина, В кн.: Грунтоведение и инженерная геология, вып. 1, Л., с. 81—84, 1976. ⁴ С. С. Бабицкая, В. Д. Полднякова, В кн.: Вопросы геотехники, № 15, Днепропетровск, «Будивельник», с. 96—100, 1969. ⁵ Л. Г. Балаев, Г. Н. Виноградова, В кн.: Труды второго всесоюзного симпозиума по реологии грунтов, с. 128—133, Ереван, 1976. ⁶ С. Р. Месчян, Р. П. Малакян, В кн.: Тезисы докладов третьего межведомственного совещания по вопросам прогнозирования гидрогеол., инж.-геологических и почвенно-мелиоративных условий, вып. IV, с. 108—117, М., 1976. ⁷ С. Р. Месчян, «Известие вузов», Строительство и архитектура, № 2, с. 172—176, 1976. ⁸ С. Р. Месчян, Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения. «Недра», М., 1974. ⁹ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М—Л., 1952.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик АН Армянской ССР Н. Х. Арутюнян, А. С. Лозовский

Об одной задаче теории вязкоупругости для тел с фазовыми превращениями

(Представлено 29/III 1977)

Исследование устойчивости горных выработок в мерзлых породах при взаимодействии их с движущимся внутри потоком теплого воздуха приводит к необходимости решения задачи о напряженном состоянии вязкоупругой среды с изменяющейся со временем поверхностью фазового перехода $S(t)$. Определение поверхности $S(t)$ и соответствующего температурного поля связано с решением задачи Стефана (1). В дальнейшем изложении поверхность $S(t)$ предполагается известной.

Будем считать, что поверхность фазового перехода разделяет среду на две области с модулями Юнга E_1, E_2 и ядрами релаксации $R_1(t-\tau), R_2(t-\tau)$ соответственно. В этом случае традиционные уравнения теории вязкоупругости требуют определенной модификации для точек образующейся фазы 2 с целью учета истории их деформирования до момента фазового перехода $\tau_1^*(\bar{x})$ в точке \bar{x} . Истинную кривую релаксации схематически можно представить так, как это показано на рис. 1 (кривая 3). Кривые 1 и 2 определяются ядрами $R_1(t-\tau)$ и $R_2(t-\tau)$ соответственно.

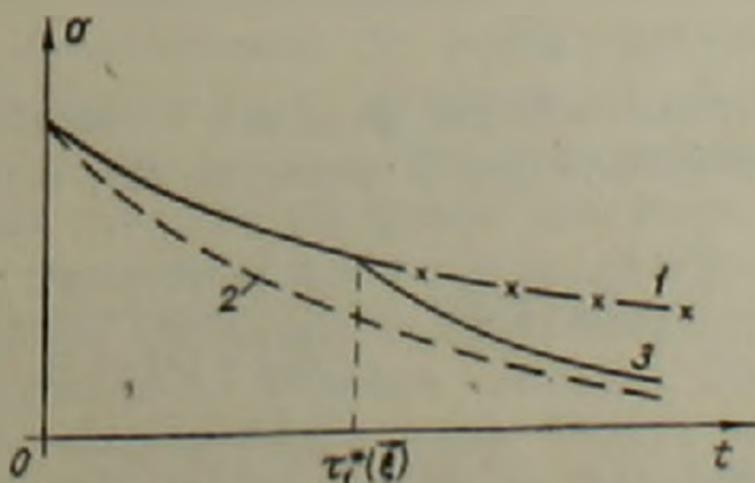


Рис. 1. Кривые, представляющие ядра $R_1(t-\tau)$, $R_2(t-\tau)$ и истинную релаксацию (кривая 3)

Для описания кривой 3 введем следующую гипотезу: истинная кривая остаточных напряжений, непрерывна и при $t > \tau_1^*(\xi)$ подобна кривой остаточных напряжений, определяемой ядром $R_2(t-\tau)$, т. е. при $t > \tau_1^*(\xi)$ может быть представлена функцией $R_2(t-\tau)\varepsilon^*(\tau)$. Условие непрерывности кривой остаточных напряжений позволяет определить $\varepsilon^*(\tau)$ в виде

$$\varepsilon^*(\tau) = \frac{R_1[\tau_1^*(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1^*(\xi) - \tau]} \varepsilon(\tau). \quad (1)$$

Тогда уравнение связи напряжений и деформаций в одномерном случае при $t > \tau_1^*(\xi)$ будет

$$\varepsilon(t) = E_2 \varepsilon(t) - E_1 \int_{\tau_1^*(\xi)}^{\tau_1^*(\xi)} R_2(t-\tau) \frac{R_1[\tau_1^*(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1^*(\xi) - \tau]} \varepsilon(\tau) d\tau - E_2 \int_{\tau_1^*(\xi)}^t R_2(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2)$$

а для сложного напряженного состояния при простом нагружении

$$T(t) = A_2 \Gamma(t) - A_1 \int_{\tau_1^*(\xi)}^{\tau_1^*(\xi)} R_2(t-\tau) \frac{R_1[\tau_1^*(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1^*(\xi) - \tau]} \Gamma(\tau) d\tau - A_2 \int_{\tau_1^*(\xi)}^t R_2(t-\tau) \Gamma(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где T и Γ интенсивности тензоров напряжений и деформаций, соответственно.

Первый интеграл в формуле (3) учитывает развитие деформации до момента фазового перехода, а второй — дальнейшую историю.

Если $t \leq \tau_1^*(\xi)$, то справедливо соотношение

$$T(t) = A_1 \left\{ \Gamma(t) - \int_{\tau_1^*(\xi)}^t R_1(t-\tau) \Gamma(\tau) d\tau \right\}. \quad (4)$$

Используя известные свойства функции Хевисайда, можно объединить интегралы, фигурирующие в формуле (2), в один:

$$\varepsilon(t) = E_2 \varepsilon(t) - \int_{\tau_1^*(\xi)}^t \left\{ E_1 H[\tau_1^*(\xi) - \tau] \frac{R_1[\tau_1^*(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1^*(\xi) - \tau]} R_2(t-\tau) + \right. \\ \left. + E_2 H[\tau - \tau_1^*(\xi)] R_2(t-\tau) \right\} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Введем обозначение

$$\bar{R}(t, \tau) = E_1 H(-\tau) \frac{R_1(-\tau)}{R_2(-\tau)} R_2(t-\tau) + E_2 H(\tau) R_2(t-\tau).$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\sigma(t) = E_2 \varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^t \bar{R}[t - \tau_1^*(\xi), \tau - \tau_1^*(\xi)] \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \geq \tau_1^*(\xi). \quad (6)$$

Интересно сравнить полученное соотношение с определяющими уравнениями для неоднородно-стареющих наследственных тел ^(2,3):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{\tau_1}^t K[t - \tau_1^*(\xi), \tau - \tau_1^*(\xi)] \sigma(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что резольвента ядра $K[t - \tau_1^*, \tau - \tau_1^*]$ имеет вид $R[t - \tau_1^*, \tau - \tau_1^*]$, где $R(t, \tau)$ резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Поэтому из уравнения (7) непосредственно следует:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^t R[t - \tau_1^*(\xi), \tau - \tau_1^*(\xi)] \sigma(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Таким образом, соотношение (6) для тел с фазовыми превращениями и уравнение (8) для неоднородно-стареющих наследственных тел близки по структуре. Момент фазового превращения в уравнении (6) играет роль, аналогичную моменту $\tau_1^*(\xi)$ изготовления элемента среды в соотношении (8). Однако имеются и некоторые отличия. Если в (8) моменты изготовления $\tau_1^*(\xi)$ всех элементов среды должны предшествовать моменту нагружения τ_1 , то в соотношении (6) предполагается, что момент загрузки τ_1 предшествует моменту фазового перехода $\tau_1^*(\xi)$. Более того, сами истоки неоднородности различны. В теории, неоднородно-стареющих наследственных тел материал является сам по себе стареющим. Если же свойства среды инвариантны относительно сдвигов времени, то моменты изготовления элементов среды не существенны. В рассмотренном построении материал первоначально описывается разностными ядрами, а неоднородность является следствием процесса фазового превращения.

В качестве примера на основе полученных соотношений рассмотрим задачу о ползучести стенок неподкрепленной бесконечной горизонтальной горной выработки с круглым поперечным сечением радиуса a , пройденной в мерзлых породах. В процессе теплообмена мерзлых пород выработки с теплым воздухом образуется ореол оттаивания, ограниченный круговой цилиндрической поверхностью фазового перехода $S(t) > a$. В работе ⁽⁴⁾ показано, что при глубине за-

ложения выработки h ($20 \div 50$) а задача о напряженном состоянии несомой полуплоскости с отверстием может быть заменена задачей о несомой бесконечной плоскости с отверстием под действием сил горного давления.

Считая среду несжимаемой, представим граничные условия в виде:

$$\sigma_r(r, t) = -\gamma h, \quad r \rightarrow \infty \quad (9)$$

$$\sigma_r[S(t) - 0, t] = \sigma_r[S(t) + 0, t], \quad (10)$$

$$u_r[S(t) - 0, t] = u_r[S(t) + 0, t], \quad (11)$$

$$\sigma_r(a, t) = 0. \quad (12)$$

Из уравнения неразрывности, находим

$$u_r^{(i)} = \frac{c_i(t)}{r}, \quad i=1, 2 \quad (13)$$

При этом из (12) следует, что

$$c_1(t) = c_2(t). \quad (14)$$

Так как

$$\Gamma(t) = \frac{2|c_i(t)|}{r^2}, \quad (15)$$

то используя соотношения

$$e_{ij} = \frac{\Gamma}{2T} s_{ij} \quad (16)$$

и уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (17)$$

находим

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{2}{3} \frac{aE_1}{r^2} \left\{ u_r(a, t) - \int_{\tau_1}^t R_1(t-\tau) u_r(a, \tau) d\tau \right\} - \gamma h, \quad r \geq S(t) \quad (18)$$

$$\sigma_r(r, t) = \frac{2}{3} aE_2 u_r(a, t) |a^{-2} - r^{-2}| -$$

$$- \frac{4}{3} aE_2 \int_a^r \int_{\tau_1}^{\tau_2(\xi)} R_2(t-\tau) \frac{R_1[\tau_1(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1(\xi) - \tau]} \frac{u_r(a, \tau)}{\xi^2} d\tau d\xi -$$

$$- \frac{4}{3} aE_2 \int_a^r \int_{\tau_1(t)}^{\tau_2(t)} R_2(t-\tau) \frac{u_r(a, \tau)}{\xi^2} d\tau d\xi, \quad r \leq S(t) \quad (19)$$

Здесь e_{ij} , s_{ij} — компоненты дивергентов тензоров деформаций и напряжений.

Условие непрерывности напряжений (10) позволяет получить интегральное уравнение относительно функции $u_r(a, t)$

$$u_r(a, t) = \int_0^t M(t, \tau) u_r(a, \tau) d\tau - f(t). \quad (20)$$

Здесь обозначено

$$M(t, \tau) = \frac{E_1 S^{-2}(t) R_1(t-\tau) + E_1 R_2(t-\tau) K(t, \tau) + E_2 R_2(t-\tau) |a^{-2} - S^{-2}(\tau)|}{E_2 |a^{-2} - S^{-2}(t)| + E_1 S^{-2}(t)}$$

$$f(t) = \frac{3\gamma h}{2a |E_1 S^{-2}(t) + E_2 |a^{-2} - S^{-2}(t)|}$$

$$K(t, \tau) = 2 \int_0^{\tau} \frac{R_1(\lambda - \tau) S(\lambda)}{R_2(\lambda - \tau) S^2(\lambda)} d\lambda$$

Использованный здесь метод сведения задачи (9) — (12) к интегральному уравнению аналогичен методу решения задачи о напряженном состоянии цилиндра из несжимаемого вязкоупругого материала в работах (6,7). Уравнение (20), ввиду сложности его ядра, решалось численно. Результаты вычислений для ядер абелевского типа при следующих значениях параметров (5,8)

$$\delta_1 = 3,44 \text{ час}^{-0,91}, \quad \alpha_1 = 0,09, \quad E_1 = 1,67 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \delta_2 = 4,05 \text{ час}^{-0,3},$$

$$\alpha_2 = 0,7, \quad E_2 = 0,95 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

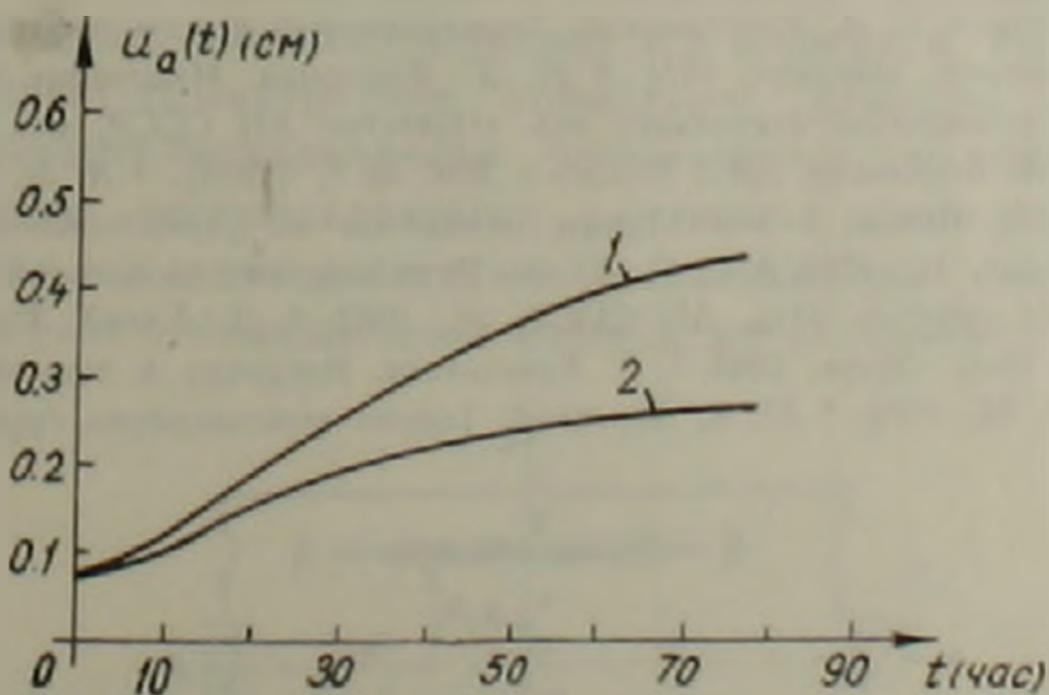


Рис. 2. Кривые, описываемые интегральным уравнением (20) при значениях параметров $\delta_1 = 3,41 \text{ час}^{-0,91}$; $\alpha_1 = 0,09$; $E_1 = 1,67 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $\delta_2 = 4,05 \text{ час}^{-0,3}$; $\alpha_2 = 0,7$; $E_2 = 0,95 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$. 1 — при наличии фазового перехода; 2 — при отсутствии фазового перехода

приведены на рис. 2 (кривая 1). Здесь же (кривая 2) приведено решение аналогичной задачи в отсутствие фазового перехода. Сравнение этих кривых показывает, что фазовый переход существенно ускоряет ползучесть.

Ереванский государственный университет
Институт физико-технических проблем Севера

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Ս. ԼՈՉՈՎՍԿԻ

Ֆազային ձևափոխություններով մարմինների համար առաձգամածուցիկության տեսության մի խնդրի մասին

Աշխատանքում կառուցվել են լարումների և դեֆորմացիաների կասյի հավասարումները տարբեր առաձգամածուցիկ հատկություններով տիրույթները բաժանող ֆազային ձևափոխության շարժվող մակերևույթով միջավայրերի համար:

Ցույց է տրվում, որ կասյի առաջարկված հավասարումները ունեն ոչ համասեռ ժառանգականորեն ծերացող մարմնի որոշիչ հավասարումների կառուցվածքին նման կառուցվածք:

Հուծվել է սահած հանրատեսակների լեռնային մշակման պատերի սողքի վերաբերյալ խնդիրը հալեցման ընթացքի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Э. А. Бондарев, Б. А. Красовицкий, Температурный режим нефтяных и газовых скважин, Новосибирск, «Наука», 1974. ² Н. Х. Арутюнян, Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. «Известия АН СССР, мех. тверд. тела», № 3, 1976. ³ Н. Х. Арутюнян, ДАН СССР, т. 229, № 3, (1976). ⁴ А. Н. Динник, А. Б. Моргаевский, Г. Н. Савин, В кн.: «Труды совещания по управлению горным давлением», Академиздат, М., 1938. ⁵ С. С. Вялов, Реологические свойства и несущая способность мерзлых грунтов. Изд. АН СССР, М., 1962. ⁶ Д. Бленд, Теория линейной вязкоупругости. Изд. «Мир», 1965. ⁷ Р. Кристенсен, Введение в теорию вязкоупругости. Изд. «Мир», М., 1974. ⁸ Ю. К. Зарецкий, Теория консолидации грунтов. «Наука», М., 1967.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. Л. Агаян

Об одной периодической задаче контактного взаимодействия стрингеров с упругой бесконечной пластиной, расслабленной трещинами

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 30/VI 1977)

Рассматривается периодическая контактная задача о взаимодействии тонкостенных элементов в виде стрингеров с упругой бесконечной пластиной, которая расслаблена периодической системой трещин, расположенных на одной линии. По исследованию указанного вопроса имеется довольно большое число работ, о которых упоминается в (1-3).

1. Пусть упругий лист в виде тонкой упругой пластины расслаблен периодической системой трещин вдоль отрезков $[2nL - l, 2nL + l]$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) оси Oy , а по конечным отрезкам $[-a, a]$ линий $y=2nL \pm b$ ($b \leq L, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) усилен упругими стрингерами прямоугольного поперечного сечения с малой величиной площади, имеющей толщину h и ширину d . На берегах трещины действует симметричное нормальное давление $\sigma_r(0, y) = f(y)$. Сама пластина на бесконечности растягивается по направлению оси Ox равномерно распределенными усилиями интенсивности p_0 , а на обоих концах накладок действуют растягивающие сосредоточенные силы P (на рис. 1 показан один период, когда $n=0$).

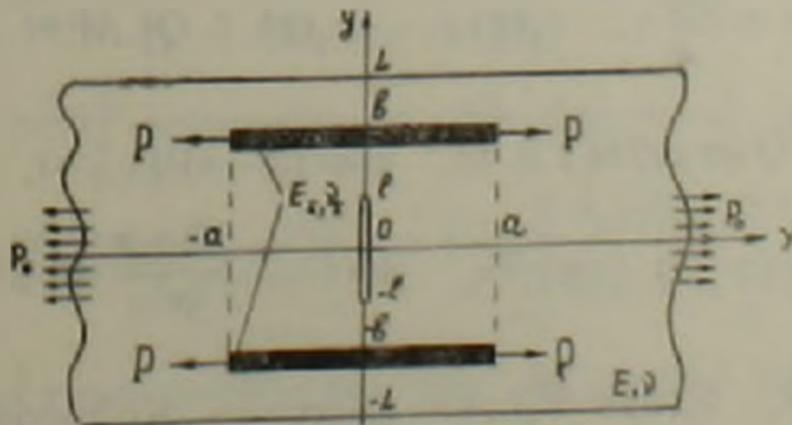


Рис. 1

При известных предположениях относительно стрингеров (1,2), сводящихся в основном к тому, что они находятся в одноосном нап-

$$u^{(1)}(x, \eta, \xi, \tau) = \frac{xQ}{\mu} \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \lambda(x + \xi)}{\operatorname{sh} \lambda(x - \xi)} \right| + \frac{Q}{2\mu} F_1(x, \xi, \tau) + \frac{1+x}{8\mu} p_0 x. \quad (1.4)$$

где

$$F_1(x, \xi, \tau) = x \ln \frac{A^{(+)}}{A^{(-)}} + N^{(-)} - N^{(+)}$$

$$A^{(\pm)} = \operatorname{sh}^2 \lambda(x \pm \xi) + \operatorname{sn}^2 \lambda \tau, \quad N^{(\pm)} = 2\lambda(x \pm \xi) \operatorname{ch} \lambda(x \pm \xi) \left[1 + \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda(x \pm \xi)}{A^{(\pm)}} \right],$$

а для $\sigma_x^{(1)}(0, y)$ будем иметь формулу

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(1)}(0, y, \xi, \tau) = \lambda Q \left\{ \left[(1+x) \operatorname{sh} 2\lambda \xi - 4\lambda \xi \operatorname{ch} 2\lambda \xi \right] \left(\frac{1}{B^{(+)}} + \frac{1}{B^{(-)}} \right) + 2\lambda \xi \operatorname{sh}^2 2\lambda \xi \left[(B^{(+)})^{-2} + (B^{(-)})^{-2} \right] \right\} + p_0 \quad (1.6)$$

$B^{(\pm)} = \operatorname{sn}^2 \lambda(y \pm \tau) + \operatorname{sh}^2 \lambda \xi$, μ — постоянная Ляме.

Соответствующие комплексные потенциалы в задаче 2 ищем в виде (4)

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^{i} \frac{G(y) d(iy)}{iy-z}, \quad \Psi_2(z) = z\Phi_2'(z), \quad (1.7)$$

где

$$G(y) = \begin{cases} f_2(y) & \text{при } 0 \leq |y| \leq l \\ g_2(y) & \text{при } l < |y| \leq L \end{cases}, \quad \int_{-l}^l G(y) dy = 0 \quad (1.8)$$

а $g_2(y)$ неизвестная периодическая функция с периодом $2L$.

Тогда для перемещения $u^{(2)}(x, y)$ будем иметь формулу

$$u^{(2)}(x, y) = u^{(2)}(x, y, \xi, \tau) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[(1+x)\vartheta_2(x, y) - 2x \frac{\partial \vartheta_2(x, y)}{\partial x} \right], \quad (1.9)$$

где

$$\vartheta_2(x, y) = \vartheta_2(x, y, \xi, \tau) = \int_{-l}^l \ln |\operatorname{sn}^2 \lambda(y-t) + \operatorname{sh}^2 \lambda \xi| G(t) dt.$$

Удовлетворяя второму граничному условию из (1.1), получим

$$\frac{2}{\pi E} \int_{-l}^l \ln |\operatorname{sn}^2 \lambda(y-t)| G(t) dt = u^{(2)}(0, y) = \begin{cases} q_2(y), & 0 \leq |y| \leq l \\ 0, & l \leq |y| \leq L \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь $q_2(y)$ неизвестная периодическая функция, подчиненная условиям

$$q_2(l) = q_2(-l) = 0, \quad (1.11)$$

а E модуль упругости материала пластины.

Обращая интегральное уравнение (1.10) ⁽³⁾ и используя условия (1.8) и (1.11), для неизвестных функций $q_2(y)$ и $g_2(y)$ находим

$$q_2(y) = - \frac{1}{LE \sqrt{\cos 2\lambda y - \cos 2\lambda l}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{\cos 2\lambda t - \cos 2\lambda l}}{\sin \lambda(t-y)} f_2(t) dt, \quad (-l < y < l)$$

$$g_2(y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = \frac{1}{2L \sqrt{\cos 2\lambda l - \cos 2\lambda y}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{\cos 2\lambda t - \cos 2\lambda l}}{\sin \lambda(t-y)} f_2(t) dt, \\ l < |y| \leq L \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.7), получаем решение задачи 2, которую можно рассматривать как задачу для бесконечной пластины с периодическими трещинами, когда на берегах трещины заданы нормальные напряжения.

Теперь очевидно, что функцию влияния исходной задачи можно получить наложением решений задач 1 и 2:

$$u(x, \eta, \xi, \tau) = u^{(1)}(x, \eta, \xi, \tau) + u^{(2)}(x, \eta, \xi, \tau), \quad x \geq 0$$

где $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ даются соответственно формулами (1.4) и (1.9).

Так как $\sigma_x^{(1)}(0, y)$ ограничена вблизи концов трещины, то коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещины можно подсчитать по формуле (1.12). В частном случае, когда $\tau_1 = 0$, этот коэффициент будет

$$k = \frac{p}{L^2(1+\alpha)} \sqrt{\frac{L}{\pi} \operatorname{tg} \lambda l} \left| \frac{L(1+\alpha) \operatorname{ch} \lambda \xi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \lambda \xi + \sin^2 \lambda l}} + \frac{\pi \xi \operatorname{sh} \lambda \xi \cdot \cos^2 \lambda l}{(\operatorname{sh}^2 \lambda \xi + \sin^2 \lambda l)^{3/2}} \right| + K(l, L)$$

а если $\tau_1 = L$, то

$$k = \frac{p}{L^2(1+\alpha)} \sqrt{\frac{L}{\pi} \operatorname{tg} \lambda l} \left| \frac{L(1+\alpha) \operatorname{sh} \lambda \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda \xi - \sin^2 \lambda l}} - \frac{\pi \xi \operatorname{ch} \lambda \xi \cdot \cos^2 \lambda l}{(\operatorname{ch}^2 \lambda \xi - \sin^2 \lambda l)^{3/2}} \right| + K(l, L),$$

где

$$K(l, L) = p_0 \sqrt{\frac{L}{\pi} \operatorname{tg} \lambda l} + \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\pi}{L \sin \lambda l}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{\cos 2\lambda t - \cos 2\lambda l}}{\sin \lambda(t-l)} f(t) dt.$$

Заметим еще, что при $\tau_1 = p_0 = f = 0$ и $l \rightarrow L$ функции (1.3) и (1.7) дают решение задачи, рассмотренной в работе ⁽⁸⁾.

2. Обращаясь теперь к поставленной выше контактной задаче, заметим, что аналогичным путем, как это сделано в работах ⁽¹⁻³⁾, ее решение можно привести к решению следующего сингулярного интегродифференциального уравнения с ядром Гильберта:

$$\int_0^a [\operatorname{cth} \lambda(\xi - x) + \operatorname{cth} \lambda(\xi + x) + K(\xi, x)] \varphi'(\xi) d\xi =$$

$$= \lambda^2 \varphi(x) - \frac{4L\mu(1+x)}{x} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{L(1+x)^2}{2x} p_0 \quad (2.1)$$

при граничных условиях

$$\varphi(a) = P, \quad \varphi(0) = P - \int_0^a \tau(s) ds, \quad (2.2)$$

где

$$K(\xi, x) = K(x, b, \xi, b) = \frac{L}{\pi x} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{4L\mu(1+x)}{x} \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

$$\varphi(x) = P - \int_x^a \tau(s) ds, \quad \varphi'(x) = \tau(x), \quad \lambda^2 = \frac{4L\mu(1+x)}{hdE_s x}$$

$\tau(x)$ — неизвестные контактные напряжения под стрингерами, E_s — модуль упругости материала стрингеров, F_1 — дается формулой (1.5), а

$$F = u^{(2)}(x, b) \quad \text{при } p = 0$$

$$F_2 = u^{(2)}(x, b) \quad \text{при } p_0 = f = 0.$$

Отметим, что первый интеграл в (2.1) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Относительно решения уравнения (2.1) заметим следующее. Если $b < l$, то функция $\varphi'(x)$ должна иметь особенности на обоих концах отрезка интегрирования, притом она имеет традиционную особенность в виде квадратичного корня при $x = a$, а при $x = 0$ порядок ее особенности меньше $1/2$. В указанном случае решения уравнения (2.1) обычно строят численными методами.

Если же $b > l$, то решение уравнения (2.1) при граничных условиях (2.2) можно представить в виде ряда

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x \sqrt{2(\operatorname{ch} 2la - \operatorname{ch} 2lx)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_{2n+1}(\operatorname{th} lx / \operatorname{th} la), \quad (2.3)$$

где $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, а $T_{2n+1}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода нечетного индекса.

Подставляя (2.3) в (2.1) и используя функциональную зависимость

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \left[\operatorname{cth} \frac{s-x}{2} + \operatorname{cth} \frac{s+x}{2} \right] \frac{T_{2k+1} \left(\operatorname{th} \frac{s}{2} \cdot \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} \right) ds}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s) \operatorname{ch} \frac{s}{2}}} =$$

$$= \frac{U_{2k} \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

и непосредственно вытекающую из известного интегрального соотношения [7, формула—7 · 344] ($U_{2n}(x)$ — многочлены Чебышева второго рода), для определения неизвестных коэффициентов $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ получаем квази вполне регулярную (^{6.9}) бесконечную систему линейных уравнений

$$X_m + \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} X_n = a_m, \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$A_{m,n} = B_{m,n} + C_{m,n},$$

$$B_{m,n} = \frac{1}{L^2 \operatorname{th} \lambda a} \int_0^a U_{2m} \left(\frac{\operatorname{th} \lambda x}{\operatorname{th} \lambda a} \right) \frac{\chi(x, a)}{\operatorname{ch} \lambda x} dx \int_0^a K(\xi, x) \frac{T_{2n+1}(\operatorname{th} \lambda \xi \cdot \operatorname{ch} \lambda a)}{\operatorname{ch} \lambda \xi \cdot \chi(\xi, a)} d\xi,$$

$$C_{m,n} = \frac{4i^* \operatorname{th} \lambda a}{\pi^2 (2n+1)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cdot \sin(2m+1)t \cdot \sin(2n+1)t}{1 - \operatorname{th}^2 \lambda a \cdot \cos^2 t} dt,$$

$$a_m = \frac{1}{L^2 \operatorname{th} \lambda a} \int_0^a \left[i^* P - p_0 L \frac{(1+x)^2}{2x} - \frac{4L\mu(1+x)}{x} \frac{\partial F}{\partial x} \right] U_{2m} \left(\frac{\operatorname{th} \lambda x}{\operatorname{th} \lambda a} \right) \frac{\chi(x, a)}{\operatorname{ch} \lambda x} dx,$$

$$\chi(x, a) = \sqrt{2(\operatorname{ch} 2\lambda a - \operatorname{ch} 2\lambda x)}.$$

Подставляя $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ в (2.3), получаем распределение контактных напряжений под струнгерами, а по формуле (1.12) можно определить коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещины.

В заключение автор благодарит С. М. Мхитаряна за внимание к работе и ценные советы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Լ. ԱՂԱՅԱՆ

Ճախերով բույացված անվերջ առաձգական սալի և վերադիրների կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական մի խնդրի մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգական վերադիրների և առաձգական անվերջ սալի կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական խնդիրը, երբ սալը թուլացված է մի գծի վրա գտնվող և վերադիրների նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված ճաքերով:

Ենթադրելով, որ վերադիրները գտնվում են միառանց լարվածային վիճակում, խնդրի լուծումը բերվում է անհայտ կոնտակտային լարումն սրտահայտող ֆունկցիայի նկատմամբ Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ-դիֆերենցիալ հավասարման:

Այդ հավասարման լուծումը փնտրվում է Չերիշևի առաջին սեռի բազմանդամներով շարքի տեսքով: Շարքի անհայտ գործակիցների որոշման

Համար ստացվում է քվարի լիովին ուղղակի դժարին հակասարուժների ան-
վերջ համակարգ:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱՇԱԿՆԵՐՔԱՆՆԵՐ

¹ P. Муки, E. Стернберг, Прикладная механика, Тр. Америк. о-ва инж.-мех., сер. E., т. 35, № 4 (1968). ² И. X. Арутюнян, ПММ, т. 32, № 4 (1968). ³ К. Л. Агаян, «Известия АН Арм. ССР, Механика», т. 29, № 4 (1976). ⁴ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. 5, «Наука», М., 1966. ⁵ И. Я. Штерман, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, М., 1949. ⁶ W. Engl, Der Spannungszustand einer Reihe vor Kräften, die in der unendlichen Halbane angreifen, ZAMM, Bd 39, 1959. ⁷ И. С. Градштейн, И. М. Ризик, Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4, Физматгиз, 1962. ⁸ И. X. Арутюнян, С. М. Мхитарян, ПММ №5, 1972. ⁹ К. Л. Агаян МТТ, №5, 1972.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян, С. А. Меякумян

Контактная задача для полуплоскости с внутренним
вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 30/VI 1977)

Задача о растяжении полуплоскости с внутренней конечной трещиной, нормальной к границе полуплоскости, исследовалась в работе М. Исиды, Е. Итагаки (¹), где дано ее решение, которое представлено в виде ряда по степеням малого параметра. В наиболее общем случае нагрузки на берегах трещины в полуплоскости с нагруженным краем Л. Н. Карпенко (²) свел решение задачи к сингулярному интегральному уравнению. При действии на берега трещины нормальной самоуравновешенной нагрузки аналогичное интегральное уравнение получено В. А. Свекло (³). М. Исиды (⁴) исследовал задачу о полуплоскости с внутренней трещиной, перпендикулярной к жестко защемленному краю полуплоскости. Г. П. Черепанов (⁵) получил замкнутое решение для аналогичной задачи, когда на границу полуплоскости действует бесконечный жесткий штамп при отсутствии трения на линии контакта.

Некоторые задачи для полуплоскости с конечным вертикальным разрезом, выходящим на границу полуплоскости, или полубесконечным вертикальным разрезом, идущим с некоторой точки полуплоскости, когда на границу полуплоскости действует или распределенная нагрузка, или конечный жесткий штамп при отсутствии трения, рассматривались в работе авторов(^{6,7})

Исследованию плоской смешанной задачи теории упругости для плоскости и полуплоскости с разрезом посвящено много других работ. Подробные обзоры об этих работах даются в монографии (⁸) и в сборнике (⁹).

В настоящей работе рассматривается плоская контактная задача для упругой полуплоскости с внутренним конечным разрезом, когда на полуплоскости действует конечный жесткий штамп с основанием произвольной формы, симметрично расположенный относительно оси разреза. Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. На горизонтальной границе вне штампа и на кромках разреза действует произвольное нормальное давление (рис. 1).

Решение задачи получено методом Фурье. В конечном счете решение задачи сводится к системе из парных и тройных интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

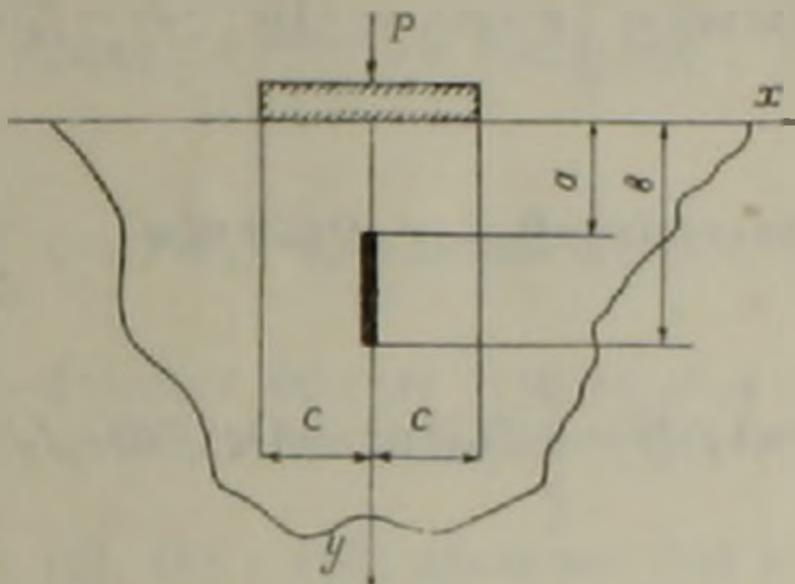


Рис. 1

В частных случаях, когда $a \rightarrow 0$ или $b \rightarrow \infty$ соответственно получаются контактные задачи плоской теории упругости для полуплоскостей с вертикальными конечным и полубесконечным разрезами ранее рассмотренные авторами (*).

В силу симметрии граничных условий достаточно рассматривать только область квадрата $(0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty)$, при этом граничные условия задачи будут иметь вид:

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < \infty), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (1)$$

$$u(0, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq a) \quad v(x, 0) = f_1(x) \quad 0 \leq x < c$$

$$\sigma_x(0, y) = f_2(y) \quad a < y < b \quad \sigma_y(x, 0) = f_3(x) \quad c < x < \infty$$

$$u(0, y) = 0 \quad b \leq y < \infty \quad (2)$$

Для решения задачи бигармоническую в области $0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty$ функцию $\Phi(x, y)$ берем в виде суммы двух интегралов Фурье:

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\infty} (1 + \alpha x) A(\alpha) e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha + \int_0^{\infty} (1 + \beta y) C(\beta) e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \quad (3)$$

$$(0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty)$$

Напряжения и перемещения определяются при помощи функции (3) обычными формулами (*).

Удовлетворяя граничным условиям (2) для определения функций $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ получаем следующую систему, состоящую из следующих парных и тройных интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} \beta C(\beta) \cos(\beta x) d\beta = \frac{E}{2} f_1(x), \quad 0 \leq x \leq c \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} \beta^2 C(\beta) \cos(\beta x) d\beta = \int_0^{\infty} a^2 A(\alpha) (\alpha x - 1) e^{-\alpha x} d\alpha - f_2(x) \quad c < x < \infty$$

$$\int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \cos(\alpha y) d\alpha = 0 \quad 0 \leq y \leq a$$

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 A(\alpha) \cos(\alpha y) d\alpha = \int_0^{\infty} \beta^2 C(\beta) (\beta y - 1) e^{-\beta y} d\beta - f_2(y) \quad a < y < b \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \cos(\alpha y) d\alpha = 0, \quad b \leq y < \infty$$

Подобные „парные“ и „тройные“ уравнения рассматривались в работах (6,7,10,11) и в других.

Используя результаты работы (6) из (4) для функции $c(\beta)$ получаем

$$C(\beta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_0^c \varphi_1(r) J_1(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_c^{\infty} \varphi_2(r) J_1(\beta r) dr - \\ - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} a^2 A(\alpha) d\alpha \int_c^{\infty} r^2 K_0(\alpha r) J_1(\beta r) dr, \quad (6)$$

где введены следующие обозначения:

$$\varphi_1(r) = -\frac{Er}{2} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{f_1(x) dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \varphi_2(r) = \int_c^{\infty} \frac{x f_2(x) dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}. \quad (7)$$

Следуя (11) и (10) $A(\alpha)$ ищем в виде

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_n J_{2n-1}(b\alpha) \quad (8)$$

и из (5) получим

$$A_n = \frac{2n+1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_0^c \frac{F(\varphi) d\varphi}{(\cos \theta - \cos \varphi)^{1/2}} \quad (9)$$

где введены следующие обозначения:

$$F(\varphi) = c_1 + b \int_{\varphi_1}^{\pi} f_2(b \sin z/2) \cos z/2 dz - \\ - 2b \int_0^{\varphi_1} \beta^2 (\sin \varphi/2 e^{-\beta b \sin \varphi/2} - e^{-\beta b}) C(\beta) d\beta, \quad (10)$$

$$c_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n, \quad \varphi_1 = 2 \arcsin a/b. \quad (11)$$

Здесь $J_n(z)$ — функция Бесселя первого рода от действительного аргумента $K_n(z)$ — функции Макдональда, $P_n(z)$ — полиномы Лежандра.

Имея в виду (6), (8) и (10), исключая $C(\beta)$ из (9) и произведя замену неизвестных A_n

$$(2n+1) G_n = \sqrt{2\pi} A_n, \quad (12)$$

для определения G_n получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$G_n = \Omega_n + \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} G_m, \quad (13)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_n = \int_{\varphi_1}^{\pi} P_n(\cos \theta) N(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$N(\theta) = \int_0^{\pi} \frac{1}{(\cos \theta - \cos \varphi)^{1/2}} \left[c_1 - b \int_{\varphi_1}^{\pi} \cos z/2 \Psi(b \sin z/2) dz \right] d\varphi, \quad (14)$$

$$\Psi(b \sin z/2) = -f_2(b \sin z/2) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r(4b^2 \sin^2 z/2 + r^2)}{(b^2 \sin^2 z/2 + r^2)^{3/2}} \varphi_1(r) dr +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r(4b^2 \sin^2 z/2 + r^2)}{(b^2 \sin^2 z/2 + r^2)^{3/2}} \varphi_2(r) dr,$$

$$K_{mn} = \int_{\varphi_1}^{\pi} P_n(\cos \theta) M_m(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (15)$$

$$M_m(\theta) = \frac{b(4m^2 - 1)}{\pi \sqrt{2}} \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{d\varphi}{(\cos \theta - \cos \varphi)^{1/2}} \int_{\varphi_1}^{\pi} L_m(b \sin z/2) \cos z/2 dz,$$

$$I_m(b \sin z/2) = \int_0^{\infty} I_{2m-1}(bz) dz \int_0^{\infty} \frac{K_0(zr)r^3(4b^2 \sin^2 z/2 + r^2)}{(b^2 \sin^2 z/2 + r^2)^{3/2}} dr, \quad (16)$$

Покажем, что система (13) регулярна. Нетрудно видеть, что

$$\int_0^{\infty} \frac{K_0(zr)r^3(4b^2 \sin^2 z/2 + r^2)}{(b^2 \sin^2 z/2 + r^2)^{3/2}} dr < \frac{4}{a^2 b^2 \sin^2 z/2} K_1(ab^2 \sin^2 z/2),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{I_{2m-1}(bz) K_1(ab^2 \sin^2 z/2)}{a^2} dz < \quad (17)$$

$$< \frac{b^{2m-1} \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{3}{2}\right)}{8b^{4(m-1)} \sin^{4(m-1)} z/2 \Gamma(2m)} F\left(m - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{3}; 2m; -\frac{1}{b^2 \sin^4 z/2}\right)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрический ряд.

Учитывая (16), (17) и используя асимптотическое разложение функции $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ и известные интегралы от тригонометрических функций и полиномов Лежандра для K_{mn} получим следующую оценку

$$K_{mn} < \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)(4m^2-1)}, \quad (18)$$

Следовательно

$$\sum_{m=1}^{\infty} |K_{mn}| < \frac{\sqrt{2}}{2n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1} = \frac{\sqrt{2}}{2(2n-1)} < 1, \quad (19)$$

то есть система (13) вполне регулярна.

Из (14) видно, что свободные члены системы (13) ограничены сверху и при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, как $O(1/n)$.

Решая систему уравнений (13) методом последовательных приближений, коэффициенты G_n можно определить с любой точностью.

После определения G_n или A_n составляется уравнение (11), которое будет линейным относительно c_1 и определится постоянная c_1 . Определением c_1 неизвестные A_n будут определены полностью. Далее, по формулам (8) и (6) можно определить все неизвестные функции и, следовательно, напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ներհին ուղղաձիգ վերջավոր ճեղքով կիսահարթույթյան կոնտակտային խնդիրը

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից վերջավոր հեռավորության վրա վերջավոր ուղղաձիգ ճեղքով թուլացված իզոտրոպ, առաձգական կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը:

Կիսահարթության եզրին ճնշում է վերջավոր շափով ճեղքի նկատմամբ համաչափ դասավորված կոշտ դրոշմը: Ընթացում է, որ շփումը՝ դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է: Կիսահարթության եզրի վրա դրոշմից դուրս և ճեղքի ամբիւրին աղդում է կամայական նորմալ ճնշում:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով: Խնդիրն սկզբում բերվում է ռզուլթատ և սիրիցսս ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի, այնուհետև ռեզուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի:

Մասնավոր դեպքերում, երբ $\alpha \rightarrow 0$ կամ $\alpha \rightarrow \infty$ համապատասխանաբար ստացվում է հարթ առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրը կիսահարթության համար, երբ կիսահարթությունը թուլացված է եզրը դուրս եկող վերջավոր կամ կիսաանվերջ ուղղաձիգ ճեղքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ M. Isida, Y. Itagaki In: Proc. Oth US Nat. Congr. Appl. Mech, 2 Oxford, 1962.
² Л. Н. Карпенко. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №4, 3-7 1965. ³ В. А. Савкля, Инженерный журнал, МТТ, 2, 71—76, 1966. ⁴ M. Isida Eng. Fract. Mech, 2, 1, 61—99, 1970. ⁵ Г. П. Черепанов, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 4, 61—70, 1962. ⁶ В. С. Тохояч, С. А. Мелкумян, ДАН Арм ССР, т. 51, №3, (1970). «Известия АИ Арм ССР», механика, т. 24, №4, 3—15, (1971); «Известия АН Арм. ССР», механика, т. 25, №3 (1972), ДАН Арм. ССР, т. 57, №5, (1973). ⁷ С. А. Мелкумян, ДАН Арм. ССР, т. 55, №2, (1972). ⁸ В. В. Пинасюк, М. П. Саврук, А. П. Дзцышин, Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках, Изд. «Наука» Думка», Киев, 1976. ⁹ Развитие теории контактных задач в СССР. Изд. «Наука» М., 1976. ¹⁰ А. А. Библиоян, ДАН Арм. ССР, т. 39, №3, (1964). ¹¹ С. J. Tranter Quart. J. Mech. and Appl. Math. vol. 4, part 3, 283 — 292 (1961).

