

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

LXIII, № 5

1976

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՉՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. քննա-
ծու (պատ. Բարտուղար), Շ. Գ. ԱՅՐԻՎՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱՐԱ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
ՑԻԼԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
ԲԱՆԱՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
Վ. Մ. ԲԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-ան-
դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
(պատ. Խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի),
Գ. Ս. ՍԻԼՎԵՍՏՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
Ս. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-
անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ
ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՉՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНЯН, канд техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
мик АН АрмССР, Е. О. КАЗАРЯН, ака-
демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),
И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм
ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
АрмССР.

Ք Ո Վ Ա Ն Գ Լ Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԸԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Հ. Նազարյան—Քուլյան ֆունկցիաների բազմությունների բարդության դասերի մասին	257
Մ. Լ. Սուրիշկին—Հատած դեպքում սիմետրիկայի տարածական խմբի ուղղայնաձևերի կայացման մասին	264
Է. Ա. Դանիելյան, Կ. Ա. Պոպով—Մացարձակ նախապատվությամբ $M_r G_r 1 _\infty$ սխեմի սպասման ժամանակի անվերջ բաժանելիության մասին	270
Վ. Մ. Սարտիրոսյան—Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ սխեմաների բազիսությունը և ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթում	278
Վ. Մ. Եղիզարյան—Հնդահանրացված ձալքի տիպի ձևափոխության կոմպլեքս շրջում	284
Ա. Ե. Մարկոսյան, Ի. Ա. Կարապետյան—Կատարյալ գրաֆների մասին	292

ՄԵԿԱՆԻԿԱ

Ա. Ա. Չարգարյան—Միկապ, անկյուններով տիրույթի համար առաձգականության տեսության հարթ հիմնական խառը խնդրի լուծումը	297
--	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Կ. Մ. Ավազյանց—S-ակերպ վոլտ-ամպերային ընդհանրացումը և հոսանքի ջուղավորումը գերհզոր տրանզիստորի կոլեկտորային անցումում	303
Բովանդակություն L.XIII հատորի	310

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
<i>Г. А. Назарян</i> —О классах сложности множества булевых функций	257
<i>М. Л. Бурыйшкин</i> —О регулярном представлении пространственной группы симметрии в усеченном случае	264
<i>Э. А. Даниелян, Г. А. Попов</i> —О бесграничной делимости времени ожидания в системе $M_r G_r 1 \infty$ с абсолютным приоритетом	270
<i>В. М. Мартиросян</i> —Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла	278
<i>В. М. Едигарян</i> —Комплексное обращение обобщенного преобразования типа свертки	284
<i>С. Е. Маркосян, И. А. Карапетян</i> —О совершенных графах	292
МЕХАНИКА	
<i>С. С. Заргарян</i> —Решение основной смешанной задачи плоской теории упругости для односвязных областей с углами	297
ФИЗИКА	
<i>Г. М. Авакьянц</i> —S-образная вольт-амперная характеристика и шнурование тока в коллекторном переходе сверхмощных транзисторов	303
Содержание LXIII тома	310

CONTENTS

MATHEMATICS

	p.
<i>G. A. Nazarian</i> — On the complexity classes of Boolean function sets	257
<i>M. L. Burishkin</i> — On the regular representation of the solid group of symmetry in the frustum case.	264
<i>E. A. Daniellun, G. A. Popov</i> — About infinite divisibility of the waiting time in $M G 1 x$ queue system with primitive priority	270
<i>V. M. Martirosian</i> — The baseness of some systems of analytic functions and the solution of the interpolation problem in the angle domain.	278
<i>V. M. Edgarian</i> — Complex inversion for the generalized convolution transformator.	284
<i>S. E. Markosyan, I. A. Karapettian</i> — The perfect graphs	292

MECHANICS

<i>S. S. Zargarian</i> — Solution of the basic mixed problem of the two-dimensional elasticity for single connected regions with angles	297
---	-----

PHYSICS

<i>G. M. Avaklantz</i> — S - type VC characteristics and current pinch - in in the collector junction of super - power transistors.	303
Contents of volume LXIII	310

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 05062. Подписано к печати 15/III 1977 г. Тираж 550. Изд. 4563. Заказ 1000.
Формат бумаги 70X108^{1/16}. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0. Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,11.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян 24
Эсмадзкиская типография Изд. АН Армянской ССР

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

Г. А. Назарян

О классах сложности множеств булевых функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалянном 29/IV 1976)

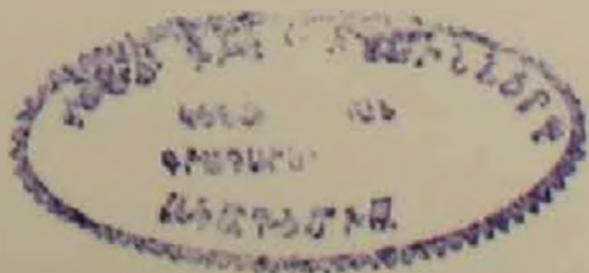
В статье рассматриваются вопросы реализации булевых функций в алгоритмических языках при ограничении на время работы алгоритмов, а также классы сложности множеств булевых функций.

1. Всюду далее орф есть сокращение для выражения „общерекурсивная функция“, чрф — „частично рекурсивная функция“, рпм — „рекурсивно перечислимое множество“, н. ч. — „натуральное число“, б. ф. — „булева функция“.

Определим н. ч. как слова в алфавите $\{0, 1\}$, так же как в ⁽¹⁾. Булевы функции и связанные с ними понятия, здесь не определяемые, будем понимать естественным образом, например как в ⁽²⁾, в частности б. ф. размерности n рассматривается как слово длины 2^n в алфавите $\{0, 1\}$ (н. ч.). Через $l(x)$ будем обозначать длину н. ч. x , $d(A)$ — мощность конечного множества A . Размерность б. ф. будем указывать верхним индексом. Посредством M_n будем обозначать множество б. ф. размерности n , принадлежащих множеству M . Буквой G будем обозначать класс всех б. ф. Буквы t, T, τ (возможно с индексами) будем использовать для обозначения одноместных орф, M — для множества б. ф., F, P — для б. ф., C, p — для н. ч.

Зафиксируем некоторую аддитивно оптимальную нумерацию ^(3,4) чрф φ . Для нумерации φ зафиксируем конструктивную последовательность сигнализирующих Φ , с последовательностью сигнализирующих Φ ассоциируем последовательность чрф $\hat{\Phi}$ такую, что $\forall i \forall n (\Phi_i(n) = \max_{l(x)=n} \Phi_i(x))$. Запись $x \Rightarrow F$ будем использовать как сокращение для „чрф x вычисляет б. ф. F “. Через $K(F^n)$ и $K'(F^n)$ будем обозначать соответственно $\min l(p)(\varphi_p \Rightarrow F^n)$, $\min l(p)((\varphi_p \Rightarrow F^n) \& (\Phi_p(n) < t(n)))$ и через L_n и L'_n соответственно $\max_{F^n \in M_n} K(F^n)$ и $\max_{F^n \in M_n} K'(F^n)$. Символы \succ, \prec и \asymp используются в следующем смысле:

$a(n) \succ b(n) \equiv \exists C \forall n (a(n) + C > b(n))$, $a(n) \prec b(n) \equiv \exists C \forall n (a(n) < b(n) + C)$ и $a(n) \asymp b(n) \equiv a(n) \succ b(n) \& a(n) \prec b(n)$. Множество M б. ф. будем



называть T -мощным, если выполнено $\exists t(L_M^t \simeq L_M \simeq l(d(M_n)))$ (нетрудно убедиться, что если M рпм, то $L_M \simeq l(d(M_n))$). В дальнейшем рассматривая поведение произвольной сигнализирующей будем иногда для краткости называть ее „время вычислений“ или просто „время“, под „объемом программы“ будем понимать индекс p нумерации φ .

2. Следующее довольно очевидное утверждение (2.1) показывает существование множеств, допускающих „ускорения“ вычислений б. ф. им принадлежащим только при существенном увеличении объема программ их вычисляющих. Утверждение 2.2 иллюстрирует возможность обратной картины—существование множеств допускающих „ускорения“ вычислений б. ф. им принадлежащих при незначительном увеличении объемов программ. В 2.1 и 2.2 M —рекурсивное множество.

$$2.1 \quad \forall t \exists M \exists C \exists t_1 ((L_M^t < C) \& (L_M^{t_1} > 2^n)).$$

$$2.2 \quad \exists t \forall t_1 \exists M \exists C_1 \exists C_0 \exists t_2 > t_1 ((L_M^{t_1}(n) \leq C_1) \& \forall n (L_M^{t_2}(n) < C_1) \supset \\ \supset \forall n^\infty (t_1(n) > t_2(n))) \& \forall n^\infty (L_M^{t_2}(n) < C_0)).$$

Множество б. ф. будем называть S -множеством, где S —некоторый класс орф, если характеристическая функция этого множества принадлежит S .

2.3. Для всякого перечислимого класса S орф можно указать t такую, что для любого S -множества M выполнено $L_M^t \simeq L_M$.

Нетрудно убедиться, что всякое рекурсивное множество является T -мощным, т. е. $\exists t(L_M^t \simeq L_M \simeq l(d(M_n)))$ (это следует например из 2.3). Иначе „ведут“ себя рпм. Как будет показано в дальнейшем для них функции Шеннона L и L^t могут существенно отличаться при любых t . Но сложность множества L_M^t определяется сложностью „сечений“— M_n . Одной из возможных характеристик сложности „сечений“ является сложность их характеристических функций. Через i_{M_n} будем обозначать характеристический вектор множества M_n —вектор $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{2^n}$, i -ая буква которого равна 1 если F_i^n (i -ая б. ф. в лексикографической упорядоченности среди б. ф. размерности n) принадлежит M . Будем рассматривать условную сложность $(^3) K^t(i_{M_n}|n) = \mu p[\varphi_p(n) = i_{M_n} \& \Phi_p(n) < t(n)]$. Как показывает следующее утверждение, ограниченность функции $K^t(i_{M_n}|n)$ при подходящей t является достаточным условием (но не необходимым—см. 2.6) для того, чтобы множество было T -мощным.

$$2.4 \quad \forall t_1 \exists t_2 \forall M [L_M^{t_2}(n) \leq 2K^{t_1}(i_{M_n}|n) + l(d(M_n))].$$

Как следует из 2.4, множество M , задаваемое схемой $\forall n(M_n = M_n^i$ если $!P_i(n))$ (где M^i ($i=1, \dots, k$)—некоторые рекурсивные мно-

жества, и P_i ($i=1, \dots, k$) — частично рекурсивные предикаты с непересекающимися областями определения), является T -мощностным, несмотря на то, что может быть не рекурсивным.

Введем некоторые определения. Множества M и M' будем называть аддитивно равномошными, если $l(d(M_n)) \asymp l(d(M'_n))$. Множество M будем называть (n, l) -восстанавливаемым, если $\exists t \in C(K^{l(\lambda_{M_n})} | \langle n, ld(M_n) \rangle) < C$. Пусть D_x обозначает конечное множество н. ч. с каноническим номером x (³). Орф g будем называть правильной, если для всех n и m $D_{g(n, m)}$ суть множества б. ф. и выполнено $(m_1 \leq m_2 \supset D_{g(n, m_1)} \subseteq D_{g(n, m_2)})$. Пусть α -орф, удовлетворяющая условию $\forall n (\alpha(n) \geq 2^{2^n})$. Правильную орф g будем называть функцией покрытия для M если $\forall n \exists m \leq \alpha(n) [D_{g(n, m)} \supseteq M_n]$. Функция покрытия для M задает таким образом некоторый единый (по n) способ покрытия сечений M_n . Пусть g есть функция покрытия для M . Множество M' будем называть покрытием M по g если $\forall n (D_{g(n, m)} = M'_n)$, где m — наименьшее н. ч. такое, что $D_{g(n, m)} \supseteq M_n$. M' будем называть покрытием для M если M' есть покрытие M по некоторой орф g .

Следующее утверждение устанавливает некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы M было T -мощностным.

2.5 Условия (а), (б) и (в) эквивалентны, для M :

(а) M является T -мощностным,

(б) существует аддитивно равномошное ему (n, l) -восстанавливаемое надмножество M' ,

(в) существует аддитивно равномошное ему покрытие M' .

Используя 2.5 легко доказать следующее утверждение.

2.6. Существует T -мощностное M такое, что $\forall t \in C \neg (K^{l(\lambda_{M_n})} | n) < C$.

Из 2.6 следует, что ограниченность $K^{l(\lambda_{M_n})} | n$ не является необходимым условием для того, чтобы M было T -мощностным.

2.7. Пусть M' есть покрытие для M , тогда $\exists t (L'_M(n) \leq ld(M'_n))$.

2.8 Если M' есть покрытие для рпм M , тогда M' также рпм.

3. В этом пункте мы сформулируем некоторые свойства множеств, очевидным образом обуславливающие скачок оценок при ограничении на время вычислений и покажем существование множеств, для которых L и L^t существенно отличаются при любых t .

Под частично рекурсивной последовательностью (чрп) б. ф. будем понимать множество значений чрф ψ , удовлетворяющей условию $l(\psi(n)) \supset (\psi(n) \text{ есть б. ф. размерности } n)$. Множество M будем называть предельным, если любая чрп S б. ф. почти содержится в M , т. е. множество $S - M$ не бесконечно.

3.1 M предельно $\iff \min_{F^n \in \bar{M}} K(F^n) \rightarrow \infty$.

На множества б. ф. естественным образом могут быть распространены понятия простоты и иммунности (³).

3.2. Если рпм M предельно, либо выполнено $\min_{F^n \in \bar{M}} K(F^n) \rightarrow \infty$, то

$\forall t(L'_M(n) > 2^n)$ и M просто (а, следовательно, \bar{M} -иммунно).

3.3 Для любой неограниченной, неубывающей орф g можно указать простое множество M такое, что $\forall t(L'_M(n) > 2^n)$ и $L_M(n) \leq g(n)$.

В качестве искомого в 3.3 может быть выбрано множество M , удовлетворяющее условию: $\forall n(M_n = |F^n|K(F^n) < (g(n)))$. Условия для M выполнены в силу его предельности, либо того, что $\min_{F^n \in \bar{M}} K(F^n) \rightarrow \infty$.

Орф γ будем называть мажорантой сложности для M если $\exists t(L'_M(n) \leq \gamma(n))$. Довольно очевидно, что если M имеет иммунное дополнение и γ есть мажоранта сложности для M , то множество $\{n | \gamma(n) < 2^n\}$ не бесконечно, с другой стороны, из факта существования сколь угодно „редких“ простых множеств следует — существует простое M такое, что $\exists t \exists C \forall n \neg \exists m(L'_M(m) < C)$. Таким образом мажоранты сложности в свою очередь могут отличаться от L' .

3.4. Пусть рпм M и орф α удовлетворяют условию $\forall n(d(M_n) < \alpha(n))$ и множество $\{n | d(M_n) = \alpha(n)\}$ не конечно. Тогда можно указать орф t и последовательность н. ч. n_i такие, что $L'_M(n_i) \leq L_M(n_i)$.

Функция α в условии 3.4 может быть выбрана равной константе C , тогда из 3.4 следует: (а) утверждение 3.3 не может быть усилено до такого $\neg \exists M((L_M(n) < C) \& \forall t(L'_M(n) > 2^n))$, или иначе функция g в условии 3.3 не может быть константной, (б) из 3.4 вкупе с тем, что если M просто, и γ есть мажоранта сложности для M , то $\forall_n(\gamma(n) \geq 2^n)$ следует, что параллельно с фактом существования сколь угодно „редких“ простых множеств они обладают следующим любопытным свойством — $(M \text{ — просто} \supset \neg \exists C(d(M_n) < C))$.

4. Здесь мы сформулируем некоторые факты, относящиеся к сложности разрешения рпм н. ч. (ср. (6-8)), которые представляют самостоятельный интерес, и которые позволят как следствия из них сформулировать факты о булевых функциях.

Букву Π будем использовать в качестве переменной для рпм н. ч. Под сложностью разрешения (t разрешения) n -куска рпм Π будем понимать $l(\min p)$, где \min берется по всем p таким, что $\forall x(l(x) \leq n \supset (!\varphi_p(x) \& (x \in \Pi \iff \varphi_p(x) = 0)))$, $(\forall x(l(x) \leq n \supset (!\varphi_p(x) \& x \in \Pi \iff \varphi_p(x) = 0 \& \Phi_p(x) \leq t(l(x))))$. Сложности разрешения и t разрешения n -куска рпм Π будем обозначать соответственно через $K(\Pi, n)$ и $K(\Pi, n, t)$. Пусть Π_n есть множество н. ч. длины n из Π и λ_{Π_n} как и в случае множеств б. ф. обозначает характеристический вектор Π_n . Следующие соотношения легко проверяются

$$4.1. \quad (a) \quad \forall \Pi(K(\lambda_{\Pi_n} | n) \leq K(\Pi, n)),$$

$$(b) \quad \forall t_1 \exists t_2 \forall \Pi(K^{t_2}(\lambda_{\Pi_n} | n) \leq K^{t_1}(\Pi, n, t_1)),$$

$$(в) \quad K(\lambda_{\Pi_n} | n) \leq L_d(\Pi_n).$$

Пусть β -орф. Π будем называть β -редким, если $\forall n(d|x|l(x) \leq n \& x \in \Pi \leq \beta(n))$. Орф g будем называть верхней оценкой сложности разрешения (сложности t разрешения) рпм Π ⁽⁸⁾, если выполнено $K(\Pi, n) \leq g(n)$, $K(\Pi, n, t) \leq g(n)$.

4.2. Для любой монотонной неограниченной орф g , такой, что $\forall n(g(n) < n)$ можно указать неограниченную монотонную орф β такую, что g является верхней оценкой сложности разрешения любого β -редкого рпм.

Из 2.4 и 4.1 (б) легко следует

4.3. (а) Пусть Π — простое множество. Для любой орф t , для любой верхней оценки сложности t разрешения выполнено:

$$g(n) \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2} l(d(\Pi_n)).$$

(б) Для любой монотонной неограниченной β можно указать β -редкое рпм Π такое, что $\forall t(K^t(\Pi_n|n) \geq n/2 - \beta(n)/2)$.

Из 4.1—4.3 а также факта существования сколь угодно редких простых множеств следует, что верхние оценки разрешения и ограниченного разрешения рпм могут существенно отличаться. Из этих утверждений также следует

4.4. Пусть g -неограниченная, неубывающая орф. Существует псевдопоследовательность ^(1,9) б. ф. F_n^n такая, что

$$(a) K(F_n^n) \leq g(n) \quad \text{и} \quad (б) \forall t \left(K^t(F_n^n) \geq \frac{n}{2} - \frac{g(n)}{2} \right).$$

В качестве искомой псевдопоследовательности может быть выбрана λ_{Π_n} некоторого достаточно редкого простого множества. Таким образом в классе псевдопоследовательностей б. ф. описуемы „естественные“ псевдопоследовательности для которых $K(F_n^n)$ и $K^t(F_n^n)$ существенно отличаются при любых t .

5. Под классом сложности R_t множество б. ф. будем понимать класс таких рпм M , для которых выполнено $L_M \preceq L'_M$. Многие факты, относящиеся к классам сложности чрф ⁽¹⁰⁾ легко переносятся на классы сложности множеств б. ф. Так, существует равномерная процедура получения нового класса сложности, строго включающего R_t по сигнализирующей для t (5.1), в то же время из аналога теоремы о пробелах (5.2) следует невозможность такой процедуры, равномерной относительно самой t .

5.1. Существует орф H такая, что для любого i если φ_i есть орф, то $R_{H(n, \varphi_i(n))} \supset R_{\tau_i}$.

5.2. Для любых орф f и T существует орф $t > T$ такая, что $R_t = R_{f \circ t}$.

Из 5.2 следует

5.3. Не существует орф s такой, что для любой орф t $R_{s \circ t} \supset R_t$.

Дальше в этом пункте мы будем интересоваться вопросами представимости классов сложности (ср. ^(11,12)). Пусть фиксировано

взаимнооднозначное соответствие между множеством н. ч. и б. ф. Н. ч., соответствующее б. ф. в этом соответствии будем называть ее кодом. Через \bar{A} будем обозначать множество б. ф., для которого A есть множество кодов. Пусть ω_i есть множество определенности φ_i . Множество н. ч. s будем называть представлением класса R_i , множеств б. ф., если $R_i = \{\bar{\omega}_i | i \in s\}$. Будем говорить, что класс R_i рекурсивно представим, если существует рекурсивное представление класса R_i .

5.4. Класс R_i рекурсивно представим для любой орф t .

Через ΩR_i будем обозначать индексное множество класса R_i , определяемое как $\{i | \omega_i \in R_i\}$. Будем пользоваться обычными обозначениями " \leq_T " и " \leq_1 " для сводимостей по Тьюрингу и 1-1 сводимости, Σ_n и Π_n для уровней иерархии Клини-Мостовского (5). Нам потребуются следующие "эталонные" множества — $\text{Equal} = \{\langle i, j \rangle | \varphi_i = \varphi_j\}$ и $\text{Cofinite} = \{i | \omega_i \text{ кофинитно}\}$. Известно, что эти множества являются соответственно Π_2 -полным и Σ_3 -полным. Через R будем обозначать класс всех рпм н. ч.

Доказательство 5.7 следует плану доказательства аналогичного факта, формулируемого для классов сложности чрф (12).

5.5. (Робертсон (12)) Для любой орф t , если класс $R - R_t$ имеет $\Pi_3 \cap \Sigma_3$ представление, то $\Omega R_t \leq_T \text{Equal}$.

5.6. $\exists \forall t \langle \rangle : [\text{Cofinite} \leq_1 \Omega R_t]$.

5.7. Существует орф τ такая, что для всех $t \langle \rangle \tau$ неверно, что класс $R - R_t$ имеет $\Pi_3 \cap \Sigma_3$ представление.

5.8 Существует орф τ такая, что для всех $t \langle \rangle \tau$ ΩR_t Σ_3 -полно.

Пользуюсь случаем выразить благодарность И. Д. Заславскому за постоянное внимание к работе и ряд существенных замечаний.

Вычислительный центр
Министерства автомобильного транспорта
Армянской ССР

2. 2. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Բուլլան ֆունկցիաների բազմությունների բարդության դասերի մասին

Դիտարկվում են բուլլան ֆունկցիաների բազմությունների բարդությունները բնորոշող Շենոնի ֆունկցիաներն այն պայմաններում, երբ ուսումնասիրվող ալգորիթմների աշխատանքի ժամանակը սահմանափակվում է բնականորեն սահմանափակ ֆունկցիաներով: Հաստատվում են որոշ անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի նշված Շենոնի ֆունկցիաներն ունենան հարական զնահատականներ: Ցույց է տրվում, որ դոյություն ունեն այնպիսի

բազմություններ, որոնց համար Շենոնի ֆունկցիաների գնահատականները էապես տարրերվում են, երբ դիտարկվում են ալգորիթմները սահմանափակումների սուկայություն և բացակայության դեպքերում: Դիտարկվում են բուլյան ֆունկցիաների բազմությունների բարդության դասերը և այդ դասերի դասակարգումները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. К. Звонкин, Л. А. Левин, УМН, т. 25, вып. 2 (1970), 85—127. ² Г. А. Назарян, ДАН АрмССР, том V, 3 (1972), 129—133. ³ А. Н. Колмогоров, Проблемы передачи информации I, 1 (1965). ⁴ И. Д. Заславский, Зап. научн. семинаров ЛОМН АН СССР, т. 16, 65—76, (1969). ⁵ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, изд. «Мир», М., 1972. ⁶ Я. М. Барздинь, ДАН СССР, 182, 1249—1255, (1968). ⁷ Н. В. Петри, Зап. научн. семинаров ЛОМН АН СССР, т. 16, 165—174, (1969). ⁸ М. И. Канович, Исследования по теории алгоритмов и математической логике. ВЦ АН СССР, 3—42, М., 1973. ⁹ М. Г. Гельфонд, Зап. научн. семинаров ЛОМН АН СССР, т. 16, 20—28, (1969). ¹⁰ Д. Хартманис, Д. Э. Холкрофт, Кибб. сборник (новая серия) вып. 11, 131—176, М., 1974. ¹¹ L. H. Landweber, E. L. Robertson, JACM, v. 19, № 2, 296—309 (1972). ¹² E. L. Robertson, ICSS, №1, 69—87, 9 (1974).

УДК 519.45 : 539.3

МАТЕМАТИКА

М. Л. Бурышкин

О регулярном представлении пространственной группы симметрии в усеченном случае

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 12/V 1976)

В работе ⁽¹⁾ рассматривалась задача о разложении вектор-функций p_{φ} ($\varphi = 1, 2, \dots, m_{\varphi}$), заданных на области Ω^* с конечной группой H^* симметрии и преобразующихся по неприводимому представлению τ , подгруппы $H \subset H^*$. Естественно поставить аналогичную задачу для вектор-функций $p_{k,\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \dots, m_{k,\varphi}$), область определения которых обладает пространственной группой G^* симметрии и которые преобразуются по m_k -мерному неприводимому представлению τ_k со звездой $[k]$ подгруппы $G \subset G^*$. Для механических приложений характерно, что числа основных векторов подгрупп G_i^* и G_i трансляций групп G^* и G одинаковы и, следовательно, соответствующее регулярное представление группы G^* — конечномерно. Указанный тип регулярного представления, как и в ⁽¹⁾, будет называться усеченным. Нетрудно указать на два более частных случая: точечно-усеченный, при котором $G_i = G_i^*$, а точечная подгруппа $H \subset G$ является подгруппой по отношению к точечной подгруппе $H^* \subset G$, и трансляционно-усеченный, при котором $H = H^*$, а $G_i \subset G_i^*$.

В данной работе исследуются разложения вектор-функций $p_{k,\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \dots, m_{k,\varphi}$), заданных на области Ω^* , в точечно-усеченном случае и намечается путь решения такой задачи в общем случае усечения. При этом вид группы G^* симметрии области Ω^* ограничивается следующим условием:

$$g^* = t_a h^* \quad \forall g^* \in G^*, \quad (1)$$

где $t_a \in G_i^*$ — трансляция на некоторый вектор a ; $h^* \in H^*$.

Группа H^* разбивается на x левых смежных классов относительно своей подгруппы H . Пусть h_t^* ($t=1, 2, \dots, x$) — элементы группы H^* , порождающие эти смежные классы, а $h^{(1)*}$ — единичный элемент. Тогда согласно условию (1) пространство L , натянутое на вектор-функции $h^{(t)*} p_{k,\varphi}$ ($t=1, 2, \dots, x$; $\varphi=1, 2, \dots, x$; $\varphi=1, 2, \dots, m_{k,\varphi}$) инвариантно относительно всех элементов группы G^* и, следовательно, преобразуется по ее регулярному представлению T .

Среди линейных комбинаций вектор-функций $p_{k,\varphi}$ ($\varphi=1, 2, \dots, m_k$) найдется m линейно-независимых вектор-функций $p_k^{(s)}$ ($s=1, 2, \dots, m$), которые под действием трансляций из G_t преобразуются в соответствии с вектором k (m — размерность неприводимого представления τ группы этого вектора). Известно, что под действием трансляций вектор-функция $h^{(t)*} p_k^{(s)}$ ($s=1, 2, \dots, m$; $t=1, 2, \dots, x$) преобразуется по вектору $h^{(t)*} k$ (³). В связи с этим, так как звезда $|k|$ неприводима, а $H \subset H^*$, очевидна

Теорема 1. *В точечно-усеченном случае звездой регулярно-го представления группы G^* является неприводимая относительно этой группы звезда $|k|^*$,*

Соответствующая группе H^* точечная группа H_k^* вектора k , вообще говоря, отлична от группы H_k . Без нарушения общности дальнейшего изложения можно полагать, что $h^{(t)*} \in H_k^*$ ($t=1, 2, \dots, x_k$), где $x_k \leq x$, причем смежные классы $h^{(t)*} H$ ($x \geq t > x_k$) не содержат элементов группы H_k^* . Легко заметить, что смежные относительно подгруппы $H_k \subset H^*$ классы $h^{(t)*} H_k$ ($t=1, 2, \dots, x_k$) в совокупности образуют группу H_k^* . Действительно, если элемент $h \in H_k$, то $h^{(t)*} h \in H_k^*$ ($t=1, 2, \dots, x_k$), и наоборот, если $h \in H/H_k$, то $h^{(t)*} h \notin H_k^*$ ($t=1, 2, \dots, x_k$), так как иначе $h^{-1}(h^{(t)*})^{-1}k = k$ и $h^{-1} \in H_k$, что невозможно.

Через L_k обозначается подпространство пространства L , натянутое на все вектор-функции из L , которые преобразуются под действием трансляций группы G_t соответственно вектору k .

Лемма. *Подпространство L_k порождается функциями $h^{(t)*} p_k^{(s)}$ ($t=1, 2, \dots, x_k$; $s=1, 2, \dots, m$).*

В связи с вышесказанным, очевидно, что $h^{(t)*} p_k^{(s)} \in L_k$ ($t=1, 2, \dots, x_k$; $s=1, 2, \dots, m$). С другой стороны, $h^{(t)*} p_{k_1}^{(s)} \notin L_k$ ($t=1, 2, \dots, x$; $s=1, 2, \dots, m$) при $k_1 \neq k$ и $h^{(t)*} p_k^{(s)} \notin L_k$ ($t=x_k+1, x_k+2, \dots, x$). Последние утверждения легко доказываются от противного. В самом деле, если $k_1 \neq k$, то $h^{(t)*} k_1 \neq k$, так как иначе в силу неприводимости звезды $|k|$ найдется элемент $h \in H/H_k$, для которого $hk = k_1$, и тогда $h^{(t)*} hk = k$, т. е. $h^{(t)*} h \in H_k^*$ и $h \in H_k$. Если же $h^{(t)*} k = k$ ($t=x_k+1, x_k+2, \dots, x$) то $h^{(t)*} \in H_k^*$.

Следует подчеркнуть, что все эквивалентные векторы из зоны Бриллюэна имеют в данной работе одинаковые обозначения.

Согласно теории представлений пространственных групп $(^2)$ $k\mu$ -е неприводимое представление группы G^* встречается в представлении T $l_{k\mu}^*$ раз, причем $l_{k\mu}^*$ — число раз, которое μ -е неприводимое представление $\tau_{k\mu}^*$ точечной группы H_k^* входит в представление T_k этой группы, индуцируемое в подпространство L_k редуцированным относительно подгруппы $H_k^* \subset G^*$ представлением T .

Представление T_k точечной группы H_k^* является несомненно регулярным. В соответствии с приведенной выше леммой его следует рассматривать как усеченное относительно подгруппы $H_k \subset H_k^*$. Это позволяет использовать здесь результаты из $(^1)$. Так удается установить, что

$$c_{k\mu}^* = \frac{1}{m_{H_k}} \sum_{h_k \in H_k} \chi_{\tau_{k\mu}^*}(h_k) \overline{\chi_{\tau_k}(h_k)}, \quad (2)$$

где $\chi_{\tau_k}(h_k)$ и $\chi_{\tau_{k\mu}^*}(h_k)$ — значения характеров неприводимых представлений τ_k и $\tau_{k\mu}^*$ точечных групп H_k и H_k^* на элементе $h_k \in H_k \subset H_k^*$. Кроме того, оказывается, что в подпространстве $L_{k\mu}^{(r)} \subset L$ ($r=1, 2, \dots, l_{k\mu}^*$), преобразуемом по представлению $\tau_{k\mu}^*$, существует стандартный относительно представления $\tau_{k\mu}^*$ базис, в котором матрицы $\tau_{k\mu}^*(g)$ операторов $\tau_{k\mu}^*(g)$ ($g \in H$) квазидиагональны и состоят из $l_{k\mu}^* + 1$ блоков, причем первые $l_{k\mu}^*$ блоков равны матрице $\tau_{k\mu}^*(g)$, а представление группы G , порожденное последними блоками, не содержит представления $\tau_{k\mu}^*$. В связи с этим аналогично с работой $(^1)$ можно продолжить, если для матричных элементов неприводимых представлений $\tau_{k\mu}^*$, $\tau_{k\mu}^*$, представления T и для их характеров ввести функционал усреднения $(^3)$. Используя ограниченность указанных элементов и характеров можно, следуя работам $(^1, ^2)$, показать, что справедлива

Теорема 2. *В точечно-усеченном случае имеет место следующее разложение*

$$p_{k\mu}^* = \sum_{\mu} \sum_{r=1}^{l_{k\mu}^*} p_{k\mu, (r-1)m_{k\mu} + \mu}^* \quad (\mu=1, 2, \dots, m_{k\mu}), \quad (3)$$

где индекс μ при суммировании пробегает номера всех неприводимых представлений $\tau_{k\mu}^*$ со звездой $\{k\}$, входящих в соответствии с формулой (2) в регулярное представление T группы G^* ; вектор-функции $p_{k\mu, \mu}^*$ ($\mu=1, 2, \dots, m_{k\mu}^*$), образующие базис подпространства $L_{k\mu}^{(r)} \subset L$ ($r=1, 2, \dots, l_{k\mu}^*$), определяются из выражения

$$p_{k\mu, \mu}^* = \frac{m_{k\mu}^*}{m_{k\mu}} \sum_{s=1}^{m_{k\mu}} \sum_{l=1}^x \tau_{k\mu, \mu, (r-1)m_{k\mu} + \mu}^* (h^{(l)*}) h^{(l)*} p_{k\mu, \mu}^* \quad (4)$$

а $\tau_{k\rho f}(g^*)$ ($\rho, f=1, 2, \dots, m_{k\rho}^*$) — ρf -ый элемент матрицы $\tau_{k\rho}^*(g^*)$, записанной в стандартном относительно представления $\tau_{k\rho}$ базисе.

Пример. На рис. 1 изображена часть бесконечной дискретной области Ω^* , состоящей из точек x_i ($i=1, 2, \dots$) и обладающей группой $C_{6v}^{(1)}$ симметрии ⁽²⁾ (основные векторы a_1 и a_2 подгруппы C_2 указаны на рисунке, вектор $a_3=0$). Там же приведено расположение плоскостей отражений $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ и положительное направление поворотов C_6 на угол α . Заданную на области Ω^* скалярную функцию можно представлять бесконечно-мерным вектором $p=(p^{(1)}, p^{(2)}, \dots)$, где $p^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots$) — значение функции p в точке x_i . Через b_j ($j=1, 2$) обозначаются основные векторы обратной решетки.

На области Ω^* определена преобразующаяся по неприводимому представлению $\tau_{1/2b_{1,2}}$ группы $C_s^{(3)}$ (основными являются векторы a_1 и a_2 ; подгруппа $H=Z$ состоит из отражения σ_6 и единичного элемента e) функция $p_{1/2b_{1,2,1}} = 1 - 1; -4; 0; 2; 3; 4; -4; -3; -2; 0; 4; 1; 1; 4; 0; -2; -3; -4; 4; 3; 2; 0; -4; -1; -1; -4; 0; 2; 3; 4; -4; -3; -2; 0; 4; 1 \dots 1$. Легко видеть, что $H^* = C_{6v}$, $\kappa = 6$, $m_{1/2b_{1,2}} = 1$, $H_{1/2b_1} = Z$, $H_{1/2b_2}^* = C_{2v}$ (группа C_{2v} включает в себя отражения σ_6 и σ_3 , e и C_{180}), $\kappa_{1/2b_1} = 2$. В качестве элементов $g^{(t)*}$ ($t=1, 2, \dots, 6$) можно выбрать повороты $e, C_{60}, C_{120}, \dots, C_{300}$. Из формулы (2) следует, что $L_{1/2b_{1,1}}^* = L_{1/2b_{1,1}}^* = 0$, а $L_{1/2b_{1,2}}^* = L_{1/2b_{1,3}}^* = 1$ (номера неприводимых представлений точечных групп даются в обозначениях работы ⁽²⁾). На основании теоремы 2

$$p_{1/2b_{1,2,1}} = p_{1/2b_{1,2,1,1}}^* + p_{1/2b_{1,3,1,1}}^*$$

Матрицы $\hat{\tau}_{1/2b_{1,\mu}}^*(h^*)$ ($\mu=2, 3$) в стандартном относительно представления $\tau_{1/2b_{1,2}}$ базисе записываются в виде:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{1/2b_{1,2}}^*(ta_1) = \hat{\tau}_{1/2b_{1,3}}^*(ta_1) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{\tau}_{1/2b_{1,2}}^*(ta_2) = \hat{\tau}_{1/2b_{1,3}}^*(ta_2) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{\tau}_{1/2b_{1,2}}^*(C_{60}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\tau}_{1/2b_{1,2}}^*(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \hat{\tau}_{1/2b_{1,3}}^*(C_{60}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\tau}_{1/2b_{1,3}}^*(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Базисы неприводимых подпространств $L_{1/2b_{1,2}}^{(1)}$ и $L_{1/2b_{1,3}}^{(1)}$ строятся согласно формуле (4). В частности,

$$p_{1/2b_{1,2,1,1}}^* = \frac{1}{2} (p_{1/2b_{1,2,1}} - C_{180} p_{1/2b_{1,2,1}}) = \frac{1}{2} (3; -1; 2; 2; -1; 3; -3; 1;$$

$$\begin{aligned}
& -2; -2; 1; -3; -3; 1; -2; -2; 1; -3; 3; -1; 2; 2; -1; 3; 3; -1; \\
& 2; 2; -1; 3; -3; 1; -2; -2; 1; -3; \dots), p_{1/2b_1, 2, 2, 1}^* = \frac{1}{2} (C_{60} p_{1/2b_1, 2, 1} - \\
& - C_{240} p_{1/2b_1, 2, 1}) = \frac{1}{2} (1; -3; 3; -1; 2; 2; -1; 3; -3; 1; -2; -2; -1; 3; \\
& -3; 1; -2; -2; 1; -3; 3; -1; 2; 2; -1; 3; -3; 1; -2; -2; 1; -3; 3; \\
& -1; 2; 2; \dots), p_{1/2b_1, 3, 1, 1}^* = \frac{1}{2} (p_{1/2b_1, 2, 1} + C_{180} p_{1/2b_1, 2, 1})
\end{aligned}$$

и т. д.

Этот простой пример достаточно полно иллюстрирует результаты исследования, проведенного для точечно-усеченного случая.

Что же касается общего случая усечения регулярного представления пространственной группы, то он характеризуется тем, что подгруппы H и G_i группы H являются нетривиальными подгруппами по отношению соответственно к группам H^* и G_i^* .

Через G' обозначается пространственная группа, состоящая из элементов подгрупп H^* и G_i и их всевозможных произведений. Легко видеть, что задачу о разложении вектор-функций $P_{k, \varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \dots, m_k$) и порожденного ими регулярного представления в общем случае усечения можно решать последовательно, используя только результаты для точечно- и трансляционно-усеченного случаев. В самом деле, выбирая в качестве группы симметрии области Ω^* группу G' , нетрудно с помощью формулы (2) и теоремы 2 разложить пространство L на подпространства, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы G' . Базисные функции этих подпространств заданы на области с группой G^* симметрии, вследствие чего порожденное ими регулярное представление является трансляционно-усеченным.

Одесский инженерно-строительный институт

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ

Հատած դեպքում սիմետրիայի տառածական խմբի ռեզուլյար ներկայացման մասին

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է սիմետրիայի G^* խմբով օժտված Ω^* տիրույթում որոշված, $G \subset G^*$ կետային-հատած ենթախմբի τ_k (m_k չափի) շրջիկող ներկայացումով ձևափոխվող $p_{k, \varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \dots, m_k$) վեկտոր-ֆունկցիայի վերլուծությունը: Տեքստն էապես հենվում է ⁽¹⁾ աշխատանքի արդյունքների վրա:

Քննարկվող դեպքում G^* խմբի սեպուլյար ներկայացման վերջնական սարահարանը բերված է թեորեմ 1-ում և (2) բանաձևում:

Թեորեմ 2—ում պնդվում է, որ $P_{k, \sigma}$ վեկտոր—ֆունկցիան թուլատրում է (3) վերլուծությունը, ընդ որում (3)—ում G^* խմբի $\tau_{k, \sigma}^*$ շրջվող ներկայացումներով ձևափոխվող կոմպոնենտները դասվում են (4) առնչությունից: Ինքնավոր մասնասիրությունը լուսաբանվում է թվային օրինակով: Որպես σ ընտրելով σ զնային, վերցվում է դիսկրետ տիրույթում արված (նկ. 1), $G_{\sigma}^{(1)}$ սիմետրիալի խմբով և $C_{\sigma}^{(3)} \subset C_{\sigma}^{(1)}$ խմբի $\tau_{1, 2, \sigma}^*$ ներկայացումով ձևափոխվող սեպուլյար վեկտոր—ֆունկցիան:

Ստացված արդյունքները կարող են էֆեկտիվ կիրառվել մեխանիկայի կետային-հատված սիմետրիայով օժտված ինդիբններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. Л. Бурныкин, ДАН АрмССР, т. LXIII, № 4 (1976). ² Н. Г. Каплан, Симметрия многоэлектронных систем, Изд. «Наука», М., 1969. ³ Г. Я. Любирский, Теория групп и ее применение в физике, ГИФМЛ, 1958.

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Г. А. Попов

О безграничной делимости времени ожидания в системе

$$\bar{M}_r|\bar{G}_r|1|\infty \text{ с абсолютным приоритетом}$$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 24/VI 1976)

В настоящем сообщении доказывается безграничная делимость (б. д.) стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания вызовов i -го потока (i -вызовов) в системе $\bar{M}_r|\bar{G}_r|1|\infty$ с разновидностями абсолютного приоритета.

Потоки вызовов L_1, \dots, L_r независимые и пуассоновские. Параметр потока L_i есть $a_i > 0$. Длительность времени обслуживания i -вызова есть случайная величина (сл. в.) с функцией распределения (ф. р.) $B_i(t)$, $B_i(0) = 0$.

Промежутки между соседними поступлениями и длительности обслуживания вызовов в совокупности независимы.

Вызовы потока L_i имеют абсолютный приоритет перед вызовами потока L_j при $i < j$. Рассматриваются разновидности таких систем: а) с дообслуживанием прерванного вызова; б) потерей; в) обслуживанием заново.

Пусть $W_i(t)$ — стационарное распределение времени ожидания i — вызовом начала обслуживания. Положим:

$$\omega_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dW_i(t), \quad \alpha_i = a_1 + \dots + a_i.$$

Число ρ_{11} — загрузка системы вызовами потоков L_1, \dots, L_1 .

Обозначим через $\Pi_i(t)$ ф. р. периода занятости (i — периода) обслуживанием вызовов потоков L_1, \dots, L_i , через $\Pi_{ij}(t)$ — ф. р. i — периода, начавшегося с обслуживания j — вызова ($j = \overline{1, i}$); через $H_i(t)$ — ф. р. промежутка, начинающегося с первого поступления на прибор i — вызова и кончающегося первым последующим моментом освобождения системы от этого i -вызова и вызовов потоков L_1, \dots, L_{i-1} .

Наконец, обозначим $\bar{\Pi}_i(t) = 1 - \Pi_i(t)$, $\bar{H}_i(t) = 1 - H_i(t)$.

1°. Пусть порядок обслуживания k — вызовов прямой.

Теорема 1 а) $\omega_k(s)$ есть преобразование Лапласа-Стилтьеса (п. Л. — С) б. д. с л. в..

б) Каноническое представление для $\omega_k(s)$ имеет вид

$$\omega_k(s) = \exp \left| - \int_0^\infty x^{-1} (1 - e^{-sx}) \Lambda_k(dx) \right|, \quad (1)$$

где мера Λ_k при $\rho_{k-1} < \frac{1}{2}$ равна

$$\Lambda_k((-\infty, t]) = G_k(t) + \sigma_{k-1} \tilde{\Pi}_{k-1}(t) * \sum_{n \geq 0} (-\sigma_{k-1})^n \left[\tilde{\Pi}_{k-1}(t) \right]_*^n \quad (2)$$

а при $\rho_{k-1} > \frac{1}{2}$

$$\Lambda_k((-\infty, t]) = G_k(t) + \pi_{k-1}^{-1} \tilde{\Pi}_{k-1}(t) * \sum_{n \geq 0} \alpha_{kn}(t). \quad (3)$$

Здесь $*$ — знак свертки, и обозначено

$$G_k(t) = a_k \tilde{H}_k(t) * \sum_{n \geq 0} a_k^n \left[\tilde{H}_k(t) \right]_*^n, \quad \tilde{H}_k(t) = \int_0^t \bar{H}_k(u) du,$$

$$\tilde{H}_k(t) = \int_0^t u \bar{H}_k(u) du, \quad \tilde{\Pi}_{k-1}(t) = \int_0^t \bar{\Pi}_{k-1}(u) du, \quad \tilde{\tilde{\Pi}}_{k-1}(t) = \int_0^t u \bar{\Pi}_{k-1}(u) du,$$

$\chi(t)$ — функция Хевисайда, $\alpha_{kn}(t) = \left| \pi_{k-1}^{-1} \tilde{\Pi}_{k-1}(t) - (1 - \rho_{k-1})^{-1} \chi(t) \right|_*^n$.

Доказательство. Введем п. Л. — С.

$$\pi_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\Pi_k(t), \quad \pi_{ki}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\Pi_{ki}(t), \quad h_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH_k(t).$$

Известно (1)

$$\omega_k(s) = \frac{(1 - \rho_{k1}) \cdot \mu_k(s)}{s - a_k + a_k h_k(s)}, \quad h_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB_1(t), \quad (4)$$

$$\pi_{kk}(s) = h_k(y_k), \quad \sigma_k \pi_k(s) = \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(y_k) + a_k \pi_{kk}(s),$$

где

$$\mu_k(s) = s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(s), \quad y_k = s + a_k - a_k \pi_{kk}(s).$$

Конкретный вид функций $h_k(s)$, приведенный в (1), нам не понадобится.

Заметим, что $P(z) = (1 - \rho)(1 - \rho z)^{-1}$, $0 < \rho < 1$, есть производящая функция геометрического распределения, которое б. д.. Но так как

$$0 \leq a_k h_{k1} = -a_k h_k(0) < 1 \text{ (см. (1)) и}$$

$$\gamma_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} (sh_{k1})^{-1}(1-h_k(s)) = h_{k1}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{H}_k(t) dt$$

является п. Л. — С. неотрицательной сл. в., то на основании (2), стр. 532, зад. 17 $P(\gamma_k(s)) = (1-a_k h_{k1})(1-a_k h_{k1} \gamma_k(s))^{-1}$ есть п. Л. — С. некоторой неотрицательной б. д. сл. в..

Теперь рассмотрим функцию

$$\varphi_k(s) = [(1-p_{k1})/(1-a_k h_{k1})] \cdot [\mu_k(s)/s] \stackrel{\text{def}}{=} d_k [\mu_k(s)/s].$$

Покажем, что $\varphi_k(s)$ есть п. Л. — С. некоторой б. д. сл. в. Утверждение будем доказывать методом математической индукции по k . Вследствие $\mu_1(s) = s$ основание индукции очевидно. Из формул (4) имеем

$$\begin{aligned} d_{n+1} \frac{\mu_{n+1}(s)}{s} &= d_{n+1} \frac{y_n + \sigma_{n-1} - \sigma_{n-1} \pi_{n-1}(y_n)}{y_n} \cdot \frac{y_n}{s} = \\ &= d_n \frac{\mu_n(y_n)}{y_n} \cdot \frac{d_{n+1}}{d_n} \cdot \frac{y_n}{s} \end{aligned} \quad (5)$$

По предположению индукции $d_n \frac{\mu_n(s)}{s}$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в. В силу (2), стр. 516 $\frac{d}{ds} \ln \frac{s}{\mu_n(s)}$ есть вполне монотонная функция (вп. м. ф.). Но $y_n \geq 0$ и $y'_n(s)$ — вп. м. ф., следовательно, вп. м. ф. будет также функция $\frac{d}{ds} \ln \frac{y_n}{\mu_n(y_n)}$, то есть функция $d_n \frac{y_n}{\mu_n(y_n)}$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в. Далее, так как $P(\gamma_n(s))$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в., то в силу (1)

$$\begin{aligned} P(\gamma_n(y_n)) &= \frac{(1-a_n h_{n1}) y_n}{y_n - a_n + a_n h_n(y_n)} = \frac{(1-a_n h_{n1}) y_n}{y_n - a_n + a_n \pi_{nn}(s)} = \\ &= (1-a_n h_{n1}) \frac{y_n}{s} \end{aligned}$$

также есть п. Л. — С. б. д. сл. в.

Из (5) получаем, что $d_{n+1} \frac{\mu_{n+1}(s)}{s}$, как произведение п. Л. — С. двух б. д. сл. в., само есть п. Л. — С. б. д. сл. в..

Найдем каноническое представление для $\omega_k(s)$.

В силу (2), стр. 517, $\omega_k(s)$ представимо в виде (1), где мера Λ_k удовлетворяет условиям $\int_0^{\infty} x^{-1} \Lambda_k(dx) < \infty$ и $\Lambda_k(A) < \infty$ для любого ограниченного множества A .

В (1) показано: при $\rho_{k-1} < 1$ $\sigma_{k-1}\pi_{k-1} = \frac{\rho_{k-1}}{1-\rho_{k-1}}$. Неравенство $\sigma_{k-1}\pi_{k-1} < 1$ ($\sigma_{k-1}\pi_{k-1} > 1$) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\rho_{k-1} < \frac{1}{2} \quad \left(\rho_{k-1} > \frac{1}{2} \right).$$

Положим

$$A_k = a_k h_{k1}(-\gamma'_k(s)) \cdot |1 - a_k h_{k1} \gamma'_k(s)|^{-1},$$

$$B_k = \sigma_{k-1} (\mu'_k(s))^{-1} |1 - \pi_{k-1}(s) + s \pi'_{k-1}(s)|.$$

Тогда

$$\lambda_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} \Lambda_k(dt) = \frac{d}{ds} \ln \frac{1}{\omega_k(s)} = A_k + B_k.$$

Нетрудно заметить, что

$$B_k = \sigma_{k-1} \left[- \left(\frac{1 - \pi_{k-1}(s)}{s} \right)' \right] \cdot \left(\frac{\mu'_k(s)}{s} \right)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{\Pi}_{k-1}(t) dt \cdot \left(1 + \sigma_{k-1} \frac{1 - \pi_{k-1}(s)}{s} \right)^{-1}.$$

Отсюда при $\rho_{k-1} < \frac{1}{2}$ получаем

$$B_k = \sigma_{k-1} \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{\Pi}_{k-1}(t) dt \cdot \sum_{n>0} (-\sigma_{k-1})^n \int_0^{\infty} e^{-st} d \left[\bar{\Pi}_{k-1}(t) \right]_*^n$$

и в силу (3), стр. 317, замеч. 2 получаем

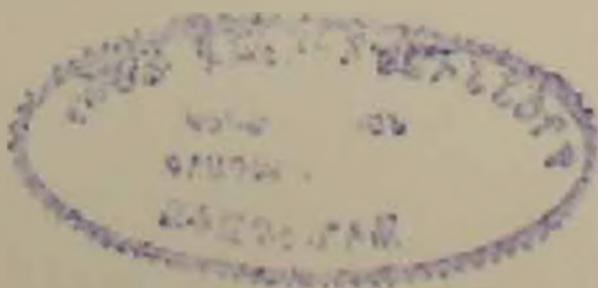
$$B_k = \int_0^{\infty} e^{-st} d \left\{ \sigma_{k-1} \bar{\Pi}_{k-1}(t) * \sum_{n>0} (-\sigma_{k-1})^n \left[\bar{\Pi}_{k-1}(t) \right]_*^n \right\}.$$

Подобным же образом преобразуется A_k .

Окончательно, находим $\lambda_k(s)$ при $\rho_{k-1} < \frac{1}{2}$, которое удастся обратить и получить (2).

При $\rho_{k-1} > \frac{1}{2}$ представим B_k в следующем виде:

$$B_k = \sigma_{k-1} \int_0^{\infty} e^{-st} d \bar{\Pi}_{k-1}(t) \cdot C_k$$



где

$$C_k \stackrel{\text{def}}{=} |1 + \sigma_{k-1} s^{-1} (1 - \pi_{k-1}(s))|^{-1} = (\rho_{k-1}^{-1} - 1) |1 + (s \pi_{k-1})^{-1} (1 - \pi_{k-1}(s)) - (1 - \rho_{k-1})^{-1}|$$

Поскольку

$$\left| \frac{1 - \pi_{k-1}(s)}{s \pi_{k-1}} - (1 - \rho_{k-1})^{-1} \right| \leq \max(\rho_{k-1}^{-1} - 1, (1 - \rho_{k-1})^{-1}) < 1,$$

то

$$C_k = (\rho_{k-1}^{-1} - 1) \sum_{n \geq 0} \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha_{kn}(t).$$

$$\text{Так как } \max_m \text{Var} \sum_{n=0}^m \alpha_{kn}(x) \leq \max_m \sum_{n=0}^m (|\lim_{x \rightarrow x} \alpha_{kn}(x)| + |\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_{kn}(x)|) < \infty,$$

то в силу (3), стр. 317, замеч. 2 получаем

$$C_k = \int_0^{\infty} e^{-st} d\left\{ (\rho_{k-1}^{-1} - 1) \sum_{n \geq 0} \alpha_{kn}(t) \right\},$$

что и т. д..

$$\text{З а м е ч а н и е 1} \quad \text{Положим } \bar{\Lambda}_k(A) = \Lambda_k(A \setminus \{0\}), \quad D_k(dx) = \frac{x}{1+x^2} \bar{\Lambda}_k(dx).$$

Тогда

$$D_k(\{0\}) = 0, \quad D_k((-\infty, +\infty)) = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \Lambda_k(dx) < \infty.$$

$$\int_0^{\infty} x^{-1} D_k(dx) = \int_0^{\infty} (1+x^2)^{-1} \bar{\Lambda}_k(dx) < \infty.$$

Перепишав (1) в виде

$$\omega_k(s) = \exp \left\{ \int_0^{\infty} \left(e^{-sx} - 1 + \frac{sx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} D_k(dx) - s \int_0^{\infty} x^{-1} D_k(dx) \right\},$$

получаем представление Леви—Хинчина для $\omega_k(s)$.

2°. Обозначим через $\omega_k^{(u)}(t)$ виртуальное время ожидания в нашей системе в момент t , если порядок обслуживания k — вызовов инверсионный. При этом предполагаем, что прерванный k — вызов имеет преимущество в обслуживании перед другими k — вызовами.

Теорема 2. $\omega_k^{(u)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} M e^{-s \omega_k^{(u)}(t)}$ является п. Л. — С. б. д.

сл. в.

Доказательство. Пусть $\omega_n(t)$ — виртуальное время ожидания в момент t n -вызова при прямом порядке обслуживания вызовов каждого из первых n потоков. Обозначим через $\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n+1)}, \dots, \xi_n^{(n+1)}, \dots$ последовательность независимых одинаково распределенных сл. в., имеющих ф. р. периода занятости системы $M|G|1|\infty$ с интенсивностью $a_n + a_{n+1}$ входящего потока и ф. р. $B(t) = \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} B_n(t) + \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} B_{n+1}(t)$ длительности обслуживания вызовов.

Имеет место равенство

$$\omega_{n+1}^{(u)}(t) \stackrel{d}{=} \omega_n(t) + \xi_1^{(n+1)} + \dots + \xi_{\nu(\omega_n(t))}^{(n+1)}. \quad (6)$$

Здесь равенство понимается в смысле совпадения ф. р. обеих сторон (6), а $\nu(x)$ — сл. в. числа n — вызовов и $(n+1)$ — вызовов, поступивших в систему за время t .

Введем обобщенный пуассоновский процесс со сносом (1), стр. 223

$$X_{n+1}(t) = t + \xi_1^{(n+1)} + \dots + \xi_{\nu(t)}^{(n+1)}.$$

Тогда $\omega_{n+1}^{(u)}(t) \stackrel{d}{=} X_{n+1}(\omega_n(t))$, то есть $\omega_{n+1}^{(u)}(t)$ подчинен $X_{n+1}(t)$ с направляющим процессом $\omega_n(t)$. Поскольку обобщенный пуассоновский процесс со сносом б. д., то при б. д. $\omega_n(t)$ таковым же в силу (2), стр. 518 будет $\omega_{n+1}^{(u)}(t)$. Следовательно, используя теорему 1, утверждение теоремы 2 становится очевидным.

З а м е ч а н и е 2. Каноническое представление в данном случае получается аналогично, но вид его довольно громоздок.

3°. Естественным образом возникает вопрос: является ли б. д. стационарное распределение времени ожидания в других приоритетных системах?

Рассмотрим, например, систему $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ с относительным приоритетом. Поскольку $\omega_r(s), \omega_r^{(u)}(s)$ в данной системе и в системе с дообслуживанием совпадают, то на основании теоремы 1 заключаем

С л е д с т в и е 1. Для систем с относительным приоритетом прямым и инверсионным порядком обслуживания вызовов $\omega_r(s), \omega_r^{(u)}(s)$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в.,

З а м е ч а н и е 3. В системе с относительным приоритетом для потоков L_1, \dots, L_{r-1} времена ожидания, вообще говоря, не б. д.

Для доказательства этого утверждения возьмем $r=2, \beta_{11} = \beta_{21} = 1, \beta_2(s) = e^{-s}$. Тогда из (4), стр. 111,

$$\omega_1(s) = \frac{|1 - (a_1 + a_2)|s + a_2[1 - \beta_2(s)]}{s - a_1 + a_1\beta_1(s)}. \quad (7)$$

Предположим, что $\omega_1(s)$ б. д. без каких-либо дополнительных ограничений. Поскольку предел б. д. сл. в. является б. д. сл. в., то, устремляя в (7) $a_1 \rightarrow 0$, $a_2 \rightarrow 1$ ($a_1 + a_2 < 1$), находим: $\lim_{a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow 1} \omega_1(s) = s^{-1}(1 - e^{-s})$, что является п. л. — С. равномерного на $[0, 1]$ распределения, которое не б. д..

З а м е ч а н и е 4. Для систем с абсолютным и относительным приоритетом $\omega_k(s)$ не есть П. Л. — С. устойчивого закона ($k = \overline{1, r}$).

Действительно, устойчивые сл. в. не имеют скачков в нуле, что следует из их канонического представления. Но

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \omega_k(s) = \begin{cases} 1 - \rho_{k1}, & \text{абсолютный приоритет.} \\ 1 - \rho_{r1}, & \text{относительный приоритет.} \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 5. Рассмотрим процесс восстановления, образованный точками начал k — периодов, П. Л. — С. функции восстановления указанного процесса равно $\pi_k(s) \frac{\sigma_k}{s + \sigma_k}$. Известно ((²), стр. 434), что

у процесса восстановления с функцией восстановления $B(t)$ в стационарном режиме ф. р. остаточного и прошедшего времени ожидания равны $m^{-1} \int_0^t (1 - B(u)) du$ ($m = \int_0^\infty (1 - B(u)) du$), и, следовательно, их п.

Л. — С. равны $(ms)^{-1}(1 - \beta(s))$, где $\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB(t)$. Отсюда следует, что п. Л. — С. времени, прошедшего с момента начала последнего перед данным моментом k — периода, а также времени до начала следующего k — периода, равны

$$\frac{1 - \pi_k(s)\sigma_k \cdot (s + \sigma_k)^{-1}}{(\sigma_k^{-1} + \pi_{k1})s} = \frac{\mu_k(s) \cdot s^{-1}}{1 + \sigma_k \pi_{k1}} \cdot \frac{\sigma_k}{s + \sigma_k},$$

и, значит, б. д. как произведение б. д. сомножителей.

Авторы признательны Б. С. Нахапетяну за ценные замечания, сделанные при чтении рукописи.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ԴԱՆԻՆԻՑԱՆ, Գ. Ա. ԳՈՊՈՎ

Բացարձակ նախապատվությունը $M_r/G_r|1|_\infty$ սխտեմի սպասման ժամանակի անվերջ բաժանելիությունը մասին

Աշխատանքում ապացուցված է $M_r/G_r|1|_\infty$ սխտեմի i -րդ ($i = \overline{1, r}$) հոսքի պահանջի սպասման ժամանակի անվերջ բաժանելիությունը բացարձակ նախապատվության տարրերակներին համար i -րդ հոսքի պահանջների

ինչպես ուղիղ կարգով սպասարկելու դեպքում, այնպես էլ ինվերսիոն:

Ստացված են դիտարկվող սպասման ժամանակների Լևի-հինչինի կանոնի վերլուծությունները:

Նույն տիպի սխեմանում, ուր բնութանված է հարաբերական նախապատվության դիսցիպլին, r -րդ հոսքի պահանջների սպասման ժամանակն անվերջ բաժանելի է, եթե այդ հոսքի պահանջների սպասարկման կարգն ուղիղ է: Սակայն մնացած հոսքերի պահանջների սպասման ժամանակներն ընդհանրապես անվերջ բաժանելի չեն, ինչ ցույց է տալիս աշխատանքում բերված օրինակը: Վերահիշյալ դիսցիպլինների դեպքում դիտարկվող սպասման ժամանակները կայուն չեն:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. А. Даниелян, «Известия АН Арм ССР», Математика, X, № 3, 1975 г. ² В. Феллер, Введение в теорию вероятности и ее приложения, «Мир», т. 2, М., 1967. ³ Г. Е. Шолов, Математический анализ. Специальный курс. ГИФМЛ, М., 1961. ⁴ Б. В. Гнеденко и др. Приоритетные системы обслуживания, МГУ, М., 1973.

УДК 513.8

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартиросян

Базисность некоторых систем аналитических функций и решение
 интерполяционной задачи в области угла

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 1/VII 1976)

1°. В работе М. М. Джрбашяна (1) был дан метод построения систем функций $\{r_k(z); \Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональных на окружности $|z|=1$.

Позже в его работе (2) было показано, что примененный в работе (1) метод эффективен также для построения систем функций, биортогональных на вещественной оси*.

Биортогональные системы М. М. Джрбашяна $\{r_k(z); \Omega_k(z)\}_1^\infty$, а также важные свойства этих систем, установленные в его работах (1) (4), послужили основой для полного решения ряда задач анализа (см. (1), (2), (3), (4), (5), (6)).

В настоящей заметке методом, примененным в работах (1), (2), на границе L_ρ угловой области $\Delta(\rho)$ строятся биортогональные системы типа М. М. Джрбашяна $\{r_k(\cdot); \Omega_k(\cdot)\}_1^\infty$. Затем на основе ряда результатов работы (4) устанавливается критерий базисности системы $\{r_k(\cdot)\}_1^\infty$ в метрике классов $H_2[\rho; \omega]$, введенных в заметке (7) и подробно рассмотренных в монографии (8).

Этот критерий позволяет дать полное решение задачи кратной интерполяции в угловых областях, а также установить критерий базисности систем функций типа Миттаг—Леффлера, введенных в заметке М. М. Джрбашяна (9), и систем функций типа Миттаг—Леффлера, рассмотренных в заметке автора (10).

2°. Пусть $H_2[\alpha; \omega]$ ($1/2 < \alpha < +\infty$, $-1 < \omega < 1$) — известный (8) класс функций $F(z)$, голоморфных в угловой области

$$\Delta(\alpha) = \{z; |\arg z| < \pi/(2\alpha), 0 < |z| < +\infty\} \quad (1)$$

и подчиненных условию

* Подробные литературные указания по этому поводу см. в работе (3).

$$\|F\|_{a,\infty} = \sup_{|z| < r/2\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\tau})|^2 r^\omega dr \right\}^{1/2} < +\infty. \quad (2)$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(L_\alpha)$ класс функций $F(\cdot)$, измеримых на границе L_α области $\Delta(\alpha)$ и таких, что

$$\|F\|_{a,\omega} = \left(\int_{L_\alpha} |F(\cdot)|^2 |\cdot|^\omega |d\cdot| \right)^{1/2} < +\infty. \quad (3)$$

Известно (8), что любая функция $F(z) \in H_2[\alpha; \omega]$ почти всюду на L_α имеет угловые граничные значения $F(\cdot) \in L_{2,\omega}(L_\alpha)$.

Можно показать, что $H_2[\alpha; \omega]$ является замкнутым подпространством гильбертова пространства $L_{2,\omega}(L_\alpha)$.

3°. Впредь полагаем, что

$$\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, \quad \rho = \alpha/(2\alpha - 1), \quad -1 < \omega < 1 \quad (4)$$

и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, а $s_k \geq 1$, $\rho_k \geq 1$ — кратности появления числа λ_k на отрезке $(\lambda_j)_1^k$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ отнесем к классу $\Delta_{a,\rho}$, если

$$\inf_{k>1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \bar{\lambda}_j^\alpha} \right| \geq \delta > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{k>1} \rho_k = \rho < +\infty. \quad (6)$$

Отметим, что из условия (5) вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2\alpha})^{-1} \operatorname{Re} \lambda_k^\alpha < +\infty, \quad (7)$$

обеспечивающее существование бесконечного произведения (9)

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^\alpha - \lambda_k^\alpha}{z^\alpha + \bar{\lambda}_k^\alpha} \frac{|1 - \lambda_k^{2\alpha}|}{1 - \lambda_k^{2\alpha}}, \quad z \in \Delta(\alpha). \quad (8)$$

4°. Рассматривая систему рациональных функций

$$r_k(\cdot) = (s_k - 1)! (\cdot + \lambda_k)^{-s_k} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (9)$$

в работе (11) С. А. Акопян и Н. О. Хачатрян при условии (7) дали полную внутреннюю характеристику ее замыкания в метрике $L_{2,\omega}(L_\alpha)$, а в заметках (12), (10) был установлен критерий замкнутости этой системы в метрике $H_2[\rho; \omega]$.

Отметим, что если условие (7) не выполняется, то система (9) не минимальна в $H_2[\rho; \omega]$ и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

При условии (7), пользуясь методом, примененным в работах (1), (2), можно построить систему функций $\{\Omega_k(\zeta)\}_{\Gamma^\infty}$, биортогональную с системой $\{r_k(\zeta)\}_{\Gamma^\infty}$ в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} r_k(\zeta) \Omega_\nu(\zeta) d\zeta = \delta_{k\nu} = \begin{cases} 1, & k = \nu; \\ 0, & k \neq \nu. \end{cases} \quad (k, \nu = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

причем направление на L_p совпадает с направлением неубывания $\arg \zeta$.

Система $\{\Omega_k(\zeta)\}_{\Gamma^\infty}$ определяется следующим образом:

$$\Omega_k(\zeta) = (-1)^{s_k+1} T_k(-\zeta) \quad (k=1, 2, \dots), \quad (11)$$

где

$$T_k(z) = \frac{B_s(z)}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{a_\nu(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-\nu+1}} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$a_\nu(\lambda_k) = \frac{1}{\nu!} \left[\frac{d^\nu}{dz^\nu} \frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B_s(z)} \right]_{z=\lambda_k} \quad (\nu=0, 1, \dots; k=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Теорема 1. Условие $\{\lambda_k\}_{\Gamma^\infty} \in \Delta_{\alpha, p}$ достаточно для справедливости следующих утверждений:

1. Система $\{|\lambda_k|^{-\omega/2} (|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} \lambda_k^\alpha)^{s_k-1/2} r_k(\zeta)\}_{\Gamma^\infty}$ образует базис, эквивалентный ортонормированному, в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2[\rho; \omega]$.

2. Каждая функция $f(\zeta)$ из замыкания линейной оболочки системы $\{r_k(\zeta)\}_{\Gamma^\infty}$ в метрике $H_2[\rho; \omega]$ единственным образом разлагается в ряд

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) r_k(\zeta), \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) \Omega_k(\zeta) d\zeta, \quad (14)$$

сходящийся абсолютно и равномерно вне замыкания \bar{E} множества точек $E = \{-\lambda_k\}_{\Gamma^\infty}$ и в метрике $H_2[\rho; \omega]$ на границе L_p области $\Delta(\rho)$.

Теорема 2. Условие $\{\lambda_k\}_{\Gamma^\infty} \in \Delta_{\alpha, p}$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{r_k(\zeta)\}_{\Gamma^\infty}$ образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2[\rho; \omega]$.

Теорема 3. Условие $\{\lambda_k\}_{\Gamma^\infty} \in \Delta_{\alpha, p}$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{T_k(z)\}_{\Gamma^\infty}$ образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2[\alpha; \omega]$.

5°. Последовательность $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_{\Gamma^\infty}$ комплексных чисел условимся относить к классу $L_\omega^2(\lambda_k)$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^\omega (|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} \lambda_k^\alpha)^{2s_k-1} |\gamma_k|^2 < +\infty. \quad (15)$$

На функциях класса $H_2[\alpha; \omega]$ определим линейный оператор $T_{\alpha, \omega}$, положив

$$T_{\alpha, \omega}[f] = \{|\lambda_k|^\omega (|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} \lambda_k^\alpha)^{s_k-1/2} f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\}_{\Gamma^\infty}, \quad f \in H_2[\alpha; \omega]. \quad (16)$$

Теорема 4. Условие $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha, \rho}$ необходимо и достаточно для того, чтобы имело место равенство

$$T_{\alpha, \omega}\{H_2|\alpha; \omega|\} = l^2. \quad (17)$$

Теорема 5. Пусть $\gamma = \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_m^2\{\lambda_k\}$. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha, \rho}$, то ряд

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k T_k(z) \quad (18)$$

сходится абсолютно и равномерно внутри области $\Delta(\alpha)$, в метрике $H_2|\alpha; \omega|$ на ее границе L_α и определяет функцию $f_0(z) \in H_2|\alpha; \omega|$, удовлетворяющую следующим интерполяционным условиям:

$$f_0^{(s_{k-1})}(\lambda_k) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Теорема 6. Пусть $\omega = \{\omega_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha, \rho}$, то

$$T_\omega\{H_2|\alpha; \omega|\} \neq l^2, \quad (20)$$

где линейный оператор T_ω определяется на функциях класса $H_2|\alpha; \omega|$ следующим образом:

$$T_\omega\{f\} = \{\omega_k f^{(s_{k-1})}(\lambda_k)\}_1^\infty, \quad f \in H_2|\alpha; \omega|. \quad (21)$$

6°. В заметках (13), (9) М. М. Джрбашян ввел в рассмотрение обобщенную систему Мюнца-Саса $\{e^{-\lambda_k x} x^{(s_{k-1})}\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re} \lambda_k > 0$), отметил критерий замкнутости этой системы в $L_2(0, +\infty)$ и впервые дал полную внутреннюю характеристику ее замыкания в $L_2(0, +\infty)$ в случае незамкнутости.

В заметке (9) им была введена в рассмотрение система функций типа Миттаг-Леффлера

$$\omega_p^*(x; \lambda_k) = E_p^{(s_{k-1})}(-\lambda_k x; \mu) x^{s_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (22)$$

где $\mu = (1 + \omega + \rho)/(2\rho)$.

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\mu + n\rho^{-1}), \quad (23)$$

и установлен критерий замкнутости этой системы в $L_{2, \omega}(0, +\infty)$, являющийся существенным обобщением классической теоремы Мюнца-Саса.

$L_{2, \omega}(0, +\infty)$ определяется, как класс функций $f(x)$, измеримых на полуоси $(0, +\infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L_{2, \omega}(0, +\infty)} = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^\omega dx \right\}^{1/2} < +\infty. \quad (24)$$

В работе (11) была дана полная внутренняя характеристика замыкания в метрике $L_{2, \omega}(0, +\infty)$ незамкнутой системы (22).

Теорема 7. Условие $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha, \rho}$ необходимо и достаточно

для того, чтобы система $\{\omega_r^*(x; \lambda_k)\}_1^\infty$ образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике $L_{2,\omega}(0, +\infty)$.

Отметим, что в специальном случае $\omega=0$, $\alpha=\rho=\mu=1$, $s_k=1$ ($k=1, 2, \dots$), если учесть, что $E_1(z; 1)=e^z$, эта теорема была установлена в работе В. И. Гулария и В. И. Мацаева⁽¹⁴⁾ для положительных возрастающих λ_k , а в работе Н. К. Никольского и Б. С. Павлова⁽¹⁵⁾—для комплексных λ_k ($\text{Re } \lambda_k > 0$).

7°. Положив

$$\alpha/(2\alpha-1) < \rho_1 < +\infty, \mu_1 = (1 + \omega + \rho_1)/(2\rho_1), \gamma^{-1} = 2 - (\alpha^{-1} + \rho_1^{-1}), \quad (25)$$

рассмотрим систему функций типа Миттаг-Леффлера

$$\omega_{\rho_1}^*(z; \lambda_k) = E_{\rho_1}^{(s_k-1)}(-\lambda_k z; \mu_1) z^{\alpha k-1} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (26)$$

В заметке⁽¹²⁾ в случае $\omega=0$, $1 < \alpha < +\infty$, $\rho_1=1$, а затем в заметке⁽¹⁰⁾ в общем случае, был установлен критерий замкнутости системы (26) в метрике $H_2[\gamma; \omega]$, а в случае незамкнутости была дана полная внутренняя характеристика ее замыкания.

Теорема 8. Условие $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha,\rho}$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{\omega_{\rho_1}^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2[\gamma; \omega]$.

Отметим, что в крайнем случае, когда $\rho_1 = \alpha/(2\alpha-1)$ ($\gamma = +\infty$), если условимся отождествлять пространства $H_2[+\infty; \omega]$ и $L_{2,\omega}(0, +\infty)$, эта теорема переходит в теорему 7.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность моему научному руководителю, академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну, за постановку задач и руководство при выполнении настоящей работы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ի. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ սիստեմների բազիսությունը և ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթում

Ներկա աշխատանքում բերված է $H_2[\rho; \omega]$ դասում պարզազույն ուղիղ կոտորակների բազիսության հայտանիշը: Այդ հայտանիշը թույլ է տալիս լուծել ինտերպոլյացիոն խնդիրը անկյունային տիրույթում: Բերվում է նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից մտցրած Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ մետրիկայում բազիսության հայտանիշը:

Ի վերջո, բերվում է հեղինակի կողմից դիտարկված Միտագ-Լեֆլերի
տիպի ֆունկցիաների սիստեմների $H_2[7; \omega]$ մետրիկայում բազիսություն
հայտանիշը:

ЛИТЕРАТУРА — ՊՐԱՎԱՆՈՒՄՆԵՐ

- ¹ М. М. Джрбашян, «Известия АН Арм. ССР», матем., VIII, № 5, 384—409 (1973).
² М. М. Джрбашян, Матем. сб., т. 95 (137), № 3 (11), 418—444 (1974). ³ М. М. Джрба-
шян, Матем. сб., т. 91 (133), № 4 (8), 580—626 (1973). ⁴ М. М. Джрбашян, «Известия
АН Арм. ССР», матем., IX, № 5, 339—373 (1974). ⁵ Г. М. Айрапетян, «Известия АН
Арм. ССР» матем., VIII, № 6, 429—450 (1973). ⁶ Г. М. Айрапетян, «Известия АН Арм.
ССР», матем., X, № 2, 133—152 (1975). ⁷ М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян, ДАН СССР,
т. 120, № 3, 457—460 (1958). ⁸ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и пред-
ставления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. ⁹ М. М. Джрбашян,
ДАН СССР, т. 219, № 6, 1302—1305 (1974). ¹⁰ В. М. Мартиросян, ДАН Арм. ССР, т. 62,
№ 5 (1976). ¹¹ С. А. Аюпян, Н. О. Хачатрян, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 40,
№ 1, 96—114 (1976). ¹² М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, ДАН СССР, т. 225, № 5,
1001—1004, (1975). ¹³ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 141, № 3, 539—542 (1961).
¹⁴ В. И. Гуририй, В. И. Мацеев, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 30, № 1, 3—14
(1966). ¹⁵ Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 34, № 1,
90—133 (1970).

УДК 517

МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

Комплексное обращение обобщенного преобразования
 типа свертки

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 15/IX 1976)

Хиршманом и Унддером (1) получено комплексное обращение преобразования типа свертки

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\Phi(t)dt \quad (1.1)$$

ядер $G(t)$, у которых двусторонним преобразованием Лапласа является функция $1/E(z)$, где $E(z)$ — целая функция вида

$$E(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right), \quad 0 < a_1 < a_2 < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k} = \Omega > 0. \quad (1.2)$$

В настоящей статье устанавливается комплексное обращение преобразования (1.1) ядер $G(t)$, для которых одностороннее обобщенное преобразование Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} G(t) t^{\alpha} dt \quad -1 < \alpha \leq 0. \quad (1.3)$$

есть функция $1/E(z)$, где $E(z)$ — целая функция экспоненциального типа, не имеющая на мнимой оси нулей и удовлетворяющая условию

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\ln |E(iy)|}{y} = \alpha > 0. \quad (1.4)$$

Известно (2), что в классе интегрируемых на $(0, \infty)$ функций с весом t^{α} , $-1 < \alpha \leq 0$, $G(u)$ из (1.3) определяется следующим образом:

$$G(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \left\{ i^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{E_1(itu; 1+\alpha)}{E(it)} t^{\alpha} dt + i^{-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{E_1(-itu; 1+\alpha)}{E(-it)} t^{\alpha} dt \right. & \text{при } u > 0 \\ & (1.5) \\ \left. \right\} & \text{при } u < 0 \end{cases}$$

где $E_1(z; 1+\alpha)$ — функция типа Миттаг-Лефлера.

В конце статьи для более узкого класса ядер мы даем обращение преобразования (1.1) при помощи разложений Фурье—Аппеля.

При решении поставленной задачи нами использованы метод Хиршмана и Унддера и аппарат оператора Римана—Лиувилля. Приведем некоторые определения, используемые в дальнейшем. Все эти понятия можно найти в работе (2).

Определение. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L(0, l)$, $(0 < l < \infty)$. Интегралом от $f(x)$ порядка α $(0 < \alpha < \infty)$ в смысле Римана—Лиувилля с началом в точке $x = 0$ принято называть функцию

$$D_0^{-\alpha} f(x) \equiv D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x \in (0, l).$$

В частном случае при

$$f(x) = \frac{x^k}{\Gamma(1+k)}$$

имеем

$$D^{-\alpha} \left\{ \frac{x^k}{\Gamma(1+k)} \right\} = \frac{x^{k+\alpha}}{\Gamma(1+k+\alpha)}.$$

Определение. Пусть α $(0 < \alpha < \infty)$, и целое число $p \geq 1$ определяется из условия $p-1 < \alpha \leq p$, а $f(x) \in L(0, l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left\{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \right\}$$

почти всюду на $(0, l)$ имеет производную (не обязательно суммируемую на $(0, l)$). Тогда функция

$$D^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^p}{dx^p} \left\{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \right\}$$

называется производной порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ с началом в точке $x = 0$.

Имеют место соотношения

$$D^{\alpha} \left\{ \frac{x^k}{\Gamma(1+k)} \right\} = \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)}$$

$$D^{\alpha} D^{-\alpha} f(x) = f(x)$$

почти для всех $x \in (0, l)$.

Заметим, что если $f(z)$ аналитическая функция на некотором круге $|z| < R$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+n)} z^n,$$

то

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} f(re^{i\varphi}) \equiv G_{\alpha} f(re^{i\varphi}), \quad \alpha = \left\{ \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)} \right\} \quad (1.6)$$

где применение оператора G_{α} понимается в следующем смысле:

$$G_{\alpha} f(re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+k)} \cdot \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)} r^k e^{ik\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+k+\alpha)} z^k. \quad (1.7)$$

Очевидно, что оператор G_{α} аддитивен и однороден и

$$G_{\alpha} \cdot G_{1/\alpha} = G_1, \quad \frac{1}{\alpha} = \left\{ \frac{\Gamma(1+k+\alpha)}{\Gamma(1+k)} \right\}, \quad (1.8)$$

где $G_1 f \equiv f$. Мы в дальнейшем будем пользоваться обоими символами в одном и том же смысле. Очевидно также, что если $f(z)$ аналитична в круге $|z| < R$, то $G_{\alpha} f(z)$ аналитична в том же круге и что порядок и тип функций $f(z)$, $G_{\alpha} f(z)$ одинаковы.

Ясно, что формулой (1.1) функция $f(x)$ определяется только для $x \in (-\infty, \infty)$, а для комплексного обращения преобразования (1.1) нужно, чтобы $f(x)$ была продолжена на некоторую область комплексной плоскости. Поэтому нужны дополнительные условия на ядро $G(t)$ и на функцию $\Phi(t)$. Мы показываем, что из условия, наложенного на $E(z)$, следует аналитичность $G(w)$ в полосе $|\operatorname{Im} w| < \alpha$ и что определенная формулой (1.1) функция $f(x)$ аналитически продолжается в полосе $|\operatorname{Im} w| < \alpha$ для достаточно широкого класса функций $\Phi(x)$. Эти результаты устанавливаются соответственно в следующих двух леммах.

Лемма 1.1. Пусть $E(z)$ целая функция экспоненциального типа, не имеющая на мнимой оси нулей, и удовлетворяет условию (1.4). Тогда ядро $G(w)$, определенное формулой (1.5), является аналитической функцией в полосе $|v| < \alpha$ ($w = u + iv$) и удовлетворяет условию

$$G(u + iv) = o(|u|^{-n}) \quad \text{при } \forall n, \quad \text{при } |u| \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

Доказательство. Для функции типа Миттаг-Лефлера известно (см. (2), стр. 430), что при $s=1$, $\mu=1+\alpha$, $-1 < \alpha < 0$ имеет место оценка

$$E_1(z; 1+\alpha) = z^{-\alpha} e^z + o\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.10)$$

Если теперь $h_n(\theta)$ — означает индикаторную функцию функции $E^{(n)}(z)$, то имеем $h_n(\theta) \leq h(\theta)$, где $h(\theta)$ — индикаторная функция $E(z)$. Следовательно из условия (1.4) следует

$$E^{(n)}(iy) = o(e^{|y|^{(\alpha+1)}}) \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty \quad (1.11)$$

и что

$$\frac{1}{E(iy)} = O(e^{-|y|(\alpha-1)}) \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty. \quad (1.12)$$

Подставляя вместо $E_1(z; 1+\alpha)$ в (1.5) асимптотическую формулу (1.10) и воспользовавшись оценками (1.11) и (1.12), интегрированием по частям получим требуемое.

Лемма 1.2. Если $\Phi(x) (1+x^2)^{-N} \in L(-\infty, \infty)$ для некоторого $N > 0$, тогда функция $f(x)$, определенная формулой (1.1), аналитична в полосе $|\operatorname{Im} x| < \alpha$.

Доказательство следует из оценки (1.9) и из того факта, что ядро $G(t)$ аналитично в той же полосе.

Теорема 1.1. Пусть $K(w)$ — преобразование Бореля функции $E(z)$. Тогда

$$x^\alpha \lim_{s \rightarrow 1-0} \int_{C_\rho} K(w) f(x + \rho w) dw = \psi(x) \quad (1.13)$$

где C_ρ — замкнутый контур, лежащий в полосе $|\operatorname{Im} w| < \frac{\alpha}{s}$, охватывающий индикаторную диаграмму функции $E(z)$, если

$$\hat{\Phi}(x) = O(e^{-\delta|x|}) \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \delta > 0 \quad (1.14)$$

где

$$\hat{\Phi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} \Phi(t) dt \quad (1.15)$$

есть преобразование Фурье функции $\psi(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) f(x + \rho w) dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) dw \int_{-\infty}^{\infty} G(x + \rho w - t) \Phi(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) G(x + \rho w - t) dw. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Перемена порядка интегрирования возможна, так как если $w \in C_\rho$, то $x + \rho w \in \{w; |\operatorname{Im} w| < \alpha\}$, где функции f и G аналитичны и, следовательно, внутренний интеграл первого равенства сходится равномерно.

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) G(x + \rho w - t) dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) dw \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ i^\alpha \int_0^\infty \frac{E_1[iu(x + \rho w - t); 1 + \alpha]}{E(iu)} u^\alpha du + i^{-\alpha} \int_0^\infty \frac{E_1[-iu(x + \rho w - t); 1 + \alpha]}{E(-iu)} u^\alpha du \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{i^\alpha u^\alpha}{E(iu)} du \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) E_1[iu(x + \rho w - t); 1 + \alpha] dw +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{i^{-\alpha} u^\alpha}{E(-iu)} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) E_1[-iu(x + \rho w - t); 1 + \alpha] dw.$$

Здесь перемена порядка интегрирования возможна, так как интеграл (1.5) сходится равномерно на C_ρ , если заменить w на $x + \rho w - t$.

Введем обозначения

$$I_1(x, \rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) E_1[iu(x + \rho w - t); 1 + \alpha] dw,$$

$$I_2(x, \rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) E_1[-iu(x + \rho w - t); 1 + \alpha] dw.$$

Имеем

$$G_{11} J_1(x, \rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) e^{iu(x + \rho w - t)} dw =$$

$$= e^{iu(x-t)} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) e^{i u \rho w} dw = e^{iu(x-t)} E(iu\rho). \quad (1.17)$$

Следовательно

$$I_1(x, \rho, t) = E(iu\rho) E_1[iu(x-t); 1 + \alpha]. \quad (1.18)$$

Аналогично получим, что

$$I_2(x, \rho, t) = E(-iu\rho) E_1[-iu(x-t); 1 + \alpha]. \quad (1.19)$$

Обозначим через $I(x, \rho)$ следующий интеграл:

$$I(x, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} K(w) f(x + \rho w) dw.$$

Имеем

$$G_{11} J(x, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt \frac{i^\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(iu\rho)}{E(iu)} u^\alpha e^{iu(x-t)} du +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt \frac{i^{-\alpha}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(-iu\rho)}{E(-iu)} u^\alpha e^{-iu(x-t)} du =$$

$$= \frac{i^\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(iu\rho)}{E(iu)} u^\alpha e^{iux} \hat{\Phi}(u) du + \frac{i^{-\alpha}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(-iu\rho)}{E(-iu)} u^\alpha e^{-iux} \hat{\Phi}(-u) du, \quad (1.20)$$

где $\hat{\Phi}(u)$ — преобразование Фурье функции $\Phi(x)$.

Из предположения (1.14) будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1-} G_{1/2} I(x, \rho) &= \lim_{\rho \rightarrow 1-} \frac{i^\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(iu\rho)}{E(iu)} u^\alpha e^{iux} \hat{\Phi}(u) du = \\ &= \frac{i^\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} u^\alpha \hat{\Phi}(u) du. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Остается заметить, что

$$\frac{i^\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} u^\alpha \hat{\Phi}(u) du = x^{-\alpha} \Phi(x).$$

Замечание. Для ядер $G(u)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{E(z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} G(t) dt,$$

где $E(z)$ — квазицелая функция, допускающая разложение

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{nh}$$

для некоторого $h > 0$, можно дать другую формулу обращения преобразования типа свертки

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) \Phi(t) dt$$

Для этих целей обозначим $A_n(t)$ обобщенные многочлены Аппеля

$$E(z)E_1(zx) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{nh} A_n(x)$$

где $E_1(zx)$ — квазицелая функция, допускающая разложение

$$E_1(zx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{zx^{nh}}{\Gamma(1+nh)}.$$

Легко доказывается, что тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) A_n(t) dt = \frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} D^{kh} G(x-t) \Big|_{x=0} A_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ 1 & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Это наводит на мысль, что функцию $\Phi(x)$ можно восстановить при помощи ряда Фурье—Аппеля

$$\Phi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n A_n(x),$$

где

$$\Phi_n = \int_{-\infty}^{\infty} D^{nh} G(x-t) \Big|_{x=0} \Phi(t) dt.$$

Пользуясь свойством единственности преобразования типа свертки, доказываем, что если

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) \Phi(t) dt$$

то

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D^{nh} f(x) \Big|_{x=0} \cdot A_n(x).$$

Например, если

$$G(t) = t^{h-1} \quad \text{при } h > -2$$

то

$$A_n(x) = \frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}$$

и если

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-t)^{h-1} \Phi(t) dt,$$

то

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D^{nh} f(x) \Big|_{x=0} \cdot \frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}.$$

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Վ. Մ. ԿԻՐԿՈՐՅԱՆ

Ընդհանրացված ծայրի տիպի ձևափոխության կոմպլեքս շրջում

Հիշումների և Ուիդերի կողմից ⁽¹⁾ ստացված է

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) \Phi(t) dt \quad (1)$$

ձալքի տիպի ձևափոխություն կոմպլեքս շրջումը որի $G(t)$ կորիզի երկկողմանի կապլասի ձևափոխությունն է հանդիսանում $1/E(z)$ ֆունկցիան, որտեղ

$$E(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right), \quad 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k} = \Omega > 0. \quad (2)$$

Աշխատանքում բերվում է (1) ձևափոխության կոմպլեքս շրջումը անպիսի $G(t)$ կորիզների համար, որոնց միակողմանի ընդհանրացված կապլասի ձևափոխությունն է՝

$$\int_0^{\infty} G(t)t^z e^{-zt} dt = \frac{1}{E(z)}, \quad (3)$$

որտեղ $E(z)$ էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիա է, որը կեղծ առանցքի վրա չունի զրոներ և բավարարում է

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\ln|E(iy)|}{y} = \alpha > 0 \quad (4)$$

պայմանին: Խնդիրը լուծելու համար օգտագործվել է Հիրշմանի և Ուիդերի աշխատանքի մեթոդը և Լիման-Լիուվիլի օպերատորի ապարատը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Хиршман и Уиддер, Преобразование типа свертки. М., 1958. ² М. М. Джрбашян. ИАН СССР, сер. мат., 18, 427—448 (1954). ³ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Е. Маркосян, И. А. Карапетян

О совершенных графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 9/XI 1976)

В настоящей работе установлено одно важное свойство о критических множествах и ребрах, которое является обобщением теоремы доказанной Байнеке - Харари-Пламмером ⁽¹⁾, и с его помощью доказана гипотеза Олару ⁽²⁾: если в графе G каждый цикл нечетной длины имеет по крайней мере две диагонали, то граф G — совершенный. В конце сформулировано утверждение, равносильное гипотезе Бержа.

Мы будем рассматривать обыкновенные графы.

Пусть $G=(X, U)$ некоторый граф, а $\alpha(G)$, $\sigma(G)$ и $\varphi(G)$, соответственно, число внутренней устойчивости (наибольшее число попарно несмежных вершин), кликоматическое число (наименьшее число клик, покрывающих все вершины графа G) и плотность (число вершин наибольшей клики) графа G .

Напомним следующие известные определения.

Граф G имеет α -покрытие, если $\alpha(G)=\tau(G)$. Граф G называется совершенным, если каждый порожденный подграф графа G имеет α -покрытие. Нечетной дыркой в графе G назовем простой цикл нечетной длины без диагоналей.

Относительно совершенных графов Берж ⁽³⁾ выдвинул следующие две гипотезы:

1) дополнение совершенного графа является совершенным графом;

2) граф G совершенный тогда и только тогда, когда ни G , ни его дополненное \bar{G} не содержат нечетных дырок длины > 5 .

Ловац ⁽⁴⁾ доказал, что граф G является совершенным тогда и только тогда, когда для любого порожденного подграфа G' графа G .

$$\alpha(G') \varphi(G') \geq (G'),$$

где (G') число вершин графа G' .

Этот результат сильнее первой, но слабее второй гипотез Бержа.

Введем следующие определения и обозначения.

Ребро $u=(x, y)$ графа G назовем критическим, если $\alpha(G \setminus u) > \alpha(G)$.

Множество ребер $U' \subseteq U$ графа G назовем критическим, если $\alpha(G \setminus U') > \alpha(G)$. Реберно-критической компонентой графа G , называется максимальный подграф H графа G , в котором для любой пары вершин существует цепь, состоящая только из критических ребер.

Пусть $\Gamma_x = \{y \in X / (x, y) \in U\}$,

$U_x = \{u \in U / u = (x, y), y \in X\}$,

где x произвольная вершина графа $G=(X, U)$.

Очевидно, что если граф G имеет α -покрытие, то все его реберно-критические компоненты являются полными. Из справедливости второй гипотезы Бержа непосредственно следует: если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок длины ≥ 5 , то его реберно-критические компоненты являются полными подграфами ⁽³⁾. Легко заметить, что последнее утверждение является более слабой гипотезой, чем вторая гипотеза и вполне естественно попробовать решить эту гипотезу.

Пусть S_1 и S_2 произвольные наибольшие внутренние устойчивые множества графа G . Обозначим через $G_{1,2}$ подграф графа G , порожденный подмножеством вершин $S_1 \cup S_2$, а его компоненты связности через $G_{1,2}^i$, где $i \geq 1$. В работе ⁽³⁾ доказана следующая

Лемма 1. $|G_{1,2}^i \cap S_1| = |G_{1,2}^i \cap S_2|$ для любого $i \geq 1$.

Лемма 2. Если $U^1 \subseteq U_x$, $U^2 \subseteq U_x$, $U^1 \subseteq U^2$, $U^2 \subseteq U'$ и U^1, U^2 — критическое множество графа G , причем $U^1 \cap U^2$ не является критическим множеством, то существуют ребра $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ и $u_2 \in U^2 \setminus U^1$, через которые проходит нечетная дырка.

Доказательство. Так как $U^1 \setminus U^2$ — критическое множество для G , то существует наибольшее внутренне устойчивое множество $S_1(S_2)$, такое что $S_1 \cup \{x\}$ ($S_2 \cup \{x\}$) является внутренне устойчивым множеством для графа $G \setminus U^1$ ($G \setminus U^2$). Пусть $\Gamma_i = S_i \cap \Gamma_x$, $i=1, 2$. Рассмотрим граф $G_{1,2}$. Пусть $z \in \Gamma_i$, $i \in \{1, 2\}$. Через $G_{1,2}^{(z)}$ обозначим компоненту графа $G_{1,2}$, содержащую вершину z . Докажем, что существует $x_0 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ и $y_0 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ такие, что $G_{1,2}^{(x_0)} = G_{1,2}^{(y_0)}$. Предположим, что не так. Тогда пользуясь леммой 1, легко убедиться, что

$$S = \left(\bigcup_{x \in \Gamma_1 / \Gamma_2} G_{1,2}^{(x)} \cap S_2 \right) \cup \left[S_1 \setminus \left(\bigcup_{x \in \Gamma_2 / \Gamma_1} G_{1,2}^{(x)} \cap S_1 \right) \right]$$

является внутренне устойчивым множеством графа G мощности $\alpha(G)$.

Из определения S следует, что вершина x смежна лишь с вершинами $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap S_1$.

Пусть $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Тогда $S^1 = S \cup \{x\}$ будет внутренне устойчивым множеством и $|S^1| > |S|$, что противоречит выбору S_1 . Если $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$, тогда $U^1 \cap U^2$ является критическим множеством графа G , что противоречит условию леммы.

Так как $G_{1,2}^{(x_0)} \equiv G_{1,2}^{(y_0)}$, то существует простая цепь, соединяющая x_0 и y_0 и состоящая поочередно из вершин множеств S_1 и S_2 . Пусть C кратчайшая цепь с указанным свойством. Рассмотрим подцепь C_0 цепи C наименьшей длины и такую, что один конец $s_1 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$, а другой конец $s_2 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$. Цепь C_0 с ребрами (x, s_1) , (x, s_2) , составляет нечетную дырку, что завершает доказательство леммы.

Следствие 1. (Обобщение теоремы Байнеке, Харари и Пламера ⁽¹⁾) Через любые пары смежных критических ребер проходит нечетная дырка.

Следствие 2. Если $U^1 \subset U_x$, $U^2 \subset U_x$, $U^1 \neq U^2$ — минимальные критические множества для графа G , то существуют ребра $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ и $u_2 \in U^2 \setminus U^1$, через которые проходит нечетная дырка.

Следствие 3. Если $U^1 \subset U_x$, $U^2 \subset U_x$ — такие критические множества, что для любых $U' \subset U^1$ и $U'' \subset U^2$ объединение $U' \cup U''$ не является критическим множеством, то существуют ребра $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ и $u_2 \in U^2 \setminus U^1$ через которые проходит нечетная дырка.

Лемма 3. Если в графе G все циклы нечетные длины имеют по крайней мере две диагонали и в некотором цикле μ нечетной длины диагонали выходят только из вершины x , то x смежна со всеми вершинами цикла μ .

Лемма легко доказывается по индукции.

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы напомним, что граф G называется критически несовершенным, если $\alpha(G) < \alpha(G')$, но $\alpha(G') = \alpha(G')$, для любого порожденного подграфа G' графа G и заметим, что из теоремы 3.11 работы ⁽⁸⁾ следует:

Следствие а. В критически несовершенном графе G , для любой наибольшей клики Q графа G существует только одно непересекающееся с Q наибольшее внутренне устойчивое множество.

Следствие б. Для любой вершины x критически несовершенного графа G существуют ровно $\alpha(G)$ различных наибольших внутренне устойчивых множеств содержащих вершину x .

Теорема 1. Граф, каждый цикл нечетной длины которого имеет по крайней мере две диагонали, совершенный.

Доказательство. Пусть теорема не верна. Тогда существует критически несовершенный граф G , удовлетворяющий условиям теоремы. Пусть Q — некоторая наибольшая клика в графе G . Тогда по следствию а, существует ровно одно наибольшее внутренне устойчивое множество S , такое, что $S \cap Q = \emptyset$. Пусть x — произвольная вершина из Q . Очевидно, что $N = \Gamma_x \cap S \neq \emptyset$. Обозначим через s_0 ту вершину из множества N , для которой выполняется равенство

$$|\Gamma_{s_0} \cap Q| = \max_{z \in N} |\Gamma_z \cap Q|.$$

Ясно, что существует вершина z , принадлежащая Q и не смежная с s_0 . Согласно следствию б существует наибольшее внутренне устойчивое множество S' графа G , содержащее вершину z , но не содержа-

шее вершину s_0 . Обозначим через $M = \Gamma_x \cap S'$. Рассмотрим граф G' , который получается из G удалением всех ребер вида (x, y) , где $y \in (M \setminus \{s_0\}) \cup (M \setminus \{z\})$. Докажем, что $\alpha(G') = \alpha(G)$. Пусть это не так. Тогда существует внутренне устойчивое множество S'' в графе G' , такое, что $|S''| > \alpha(G)$. Ясно, что $S'' \cap Q = \{x\}$ и $s_0 \notin S''$. Но тогда $S'' \setminus \{x\}$ будет наибольшим внутренне устойчивым множеством в графе G , отличным от S и непересекающимся с Q , что противоречит следствию a .

Теперь легко заметить, что ребра (x, s_0) и (x, z) являются критическими в графе G' . Согласно следствию 1 существует нечетная дырка $\mu = (x, z, x_1, \dots, x_{2k}, s_0)$, проходящая через эти ребра, все вершины которой, отличные от x , принадлежат множеству $S \cup S'$. μ будет простым циклом нечетной длины в графе G , диагонали которого выходят только из вершины x . Следовательно, по лемме 3 вершина x смежна со всеми вершинами цикла μ . Легко заметить, что $x_1 \in N$. По выбору s_0 существует вершина $y \in \Gamma_{s_0} \cap Q$, несмежная с x_1 . Тогда $\mu' = (y, z, x_1, \dots, x_{2k}, s_0)$ будет простым циклом нечетной длины в графе G , все диагонали которого выходят из вершины y . Вновь, согласно лемме 3, вершина y смежна со всеми вершинами цикла μ' , что противоречит выбору y . Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие (Теорема Олару ⁽²⁾). Если каждый простой цикл нечетной длины графа G имеет по крайней мере пару пересекающихся диагоналей, то G — совершенный.

Заметим, что если каждый цикл нечетной длины графа G имеет по крайней мере две диагонали, то G удовлетворяет условиям второй гипотезы Бержа.

Дадим определение понятия критической компоненты, которое является обобщением реберно-критической компоненты, и с его помощью сформулируем необходимое и достаточное условие для совершенных графов, а также утверждение, равносильное второй гипотезе Бержа.

Пару вершин x и y графа G назовем критической, если разрез U_A , определенный произвольным множеством A , где $x \in A$, $y \notin A$ является критическим. Максимальный подграф, у которого любая пара вершин критическая, назовем критической компонентой. Ребро $u = (x, y)$ назовем существенным, если при любом α -покрытии x и y принадлежат одному и тому же полному подграфу т. е. $\alpha(G \setminus u) > \alpha(G)$.

Существенной компонентой будем называть максимальный подграф у которого любые две вершины связаны цепью, составленной из существенных ребер.

Легко доказать следующие теоремы:

Теорема 2. В совершенном графе критические и существенные компоненты совпадают.

Теорема 3. Граф совершенный тогда и только тогда, когда критические компоненты любого подграфа полные.

Заметим, что аналогичное утверждение не верно для реберно-

критических компонент. Из теоремы 3 следует, что вторая гипотеза Бержа равносильна следующему утверждению:

Если граф G и его дополнение не содержат нечетных дырок и G является критической компонентой, то G — полный граф.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Ն. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ, Ի. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Կատարյալ գրաֆիկների մասին

Գրքով $G = (X, U)$ սովորական գրաֆ է, իսկ $\alpha(G)$ և $\sigma(G)$, համապատասխանաբար, G գրաֆի ներքին կալունություն (ամենամեծ թվով պուլզ ստ պուլզ իրար ոչ կից պագաթների քանակը) և ժածկույթի (G գրաֆի բոլոր պագաթները ժածկող ամենափոքր թվով արիվ ենթագրաֆների քանակը) թվերն են: Կասենք, որ G գրաֆն ունի α -ժածկույթ, եթե $\alpha(G) = \sigma(G)$, G գրաֆը կոչվում է կատարյալ, եթե G գրաֆի յուրաքանչյուր ծնված ենթագրաֆն ունի α -ժածկույթ:

Հոդվածում բացահայտված են կրիտիկական բազմությունների և կողերի մի քանի կարևոր հատկություններ, որոնք հանդիսանում են Բաշենկե-Խարարի-Պլամների կողմից ապացուցված թեորեմի ընդհանրացումներ և որոնց օգնությամբ ապացուցված է Օլարուի հիպոթեզը:

Եթե G գրաֆի կենտ երկարությամբ յուրաքանչյուր ցիկլ ունի առնվազն երկու անկյունագծեր, ապա այն կատարյալ է: Հոդվածի վերջում ձևակերպված է Բերժի երկրորդ հիպոթեզին համարժեք պնդում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ I. Beineke, F. Harary, M. Plummer, Pacific J. Math., 22 (1967). ² E. O'Leary, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, EIK 8, 2/3 (1972). ³ C. Berge, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe, 114 (1961). ⁴ L. A. Lovasz, J. Comb. Theory, v. 13, № 2 (1972). ⁵ С. Е. Маркосян, ДАН Арм. ССР, т. 60, № 4 (1975) ⁶ M. Padberg, Math. Programming 6 (1974).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

**Решение основной смешанной задачи плоской теории упругости
 для односвязных областей с углами**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 2/VI 1976)

Настоящая статья посвящена решению основной смешанной задачи плоской теории упругости для односвязной области, граница которой имеет угловые точки. Основная смешанная задача для областей с гладкой границей решена Д. И. Шерманом ⁽¹⁾. В работах ^(2,3) рассмотрены решения основной смешанной задачи для полукруговой области.

В приводимом ниже решении, ограничиваясь для простоты случаем, когда упругое тело занимает на плоскости конечную область, предлагается метод решения основной смешанной задачи для односвязной области с углами, основанный на непосредственном выделении локальных решений, возникающих в окрестности угловых точек контура.

В работах автора ^(4,5) этот метод был применен к решению плоской задачи теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе напряжениях или смещениях.

1. Пусть конечная односвязная область S ограничена кусочно-гладким замкнутым контуром L , имеющим m угловых точек a_j . Положим, что граница области имеет $2m_1$ угловых точек, в которых меняются граничные условия, m_2 угловых точек, расположенных на участках границы, на которых заданы напряжения, и m_3 угловых точек, расположенных на участках границы, на которых заданы перемещения ($m = 2m_1 + m_2 + m_3$).

Примем, что на участках $L'_{2j-1} = a_{2j-1} a_{2j}$ ($j = 1, 2, \dots, m_1$), не имеющих общих концов, положительные напряжения которых совпадают с положительным направлением обхода контура L , заданы напряжения, а на участках $L''_{2j} = a_{2j} a_{2j+1}$, причем, $a_{2m_1+1} = a_1$, заданы перемещения. Совокупность дуг L'_{2j-1} обозначим через L' , а совокупность дуг L''_{2j} — через L'' .

Как известно ⁽⁶⁾, граничные условия задачи записываются так

$$\varphi^*(t) + t\overline{\varphi^{*'}(t)} + \overline{\psi^*(t)} = f(t) + C(t) \quad \text{при } t \in L' \quad (1.1)$$

$$x\varphi^*(t) - t\overline{\varphi^{*'}(t)} - \overline{\psi^*(t)} = g(t) \quad \text{при } t \in L'' \quad (1.2)$$

Здесь

$$f(t) = i \int_{a_{2j-1}}^t (X_n + iY_n) ds, \quad \text{при } t \in L'_{2j-1}$$

$$g(t) = 2\mu(u + iv), \quad \text{при } t \in L''_{2j}$$

$$C(t) = C_{2j-1} \quad (j = 1, 2, \dots, m_1). \quad (1.3)$$

Будем полагать, что $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гельдера соответственно на каждом из участков L'_{2j-1} и L''_{2j} .

На основании (4.5), для выделения локальных решений, возникающих в окрестности угловых точек контура, функции $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) &= \varphi(z) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(z), \\ \psi^*(z) &= \psi(z) + \sum_{j=1}^m |\psi_j(z) - \bar{a}_j \varphi_j'(z)|. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и (1.2), получаем

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C(t) - \sum_{j=1}^m |\varphi_j(t) + (t-a_j)\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}| \quad \text{при } t \in L' \quad (1.5)$$

$$x\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = g(t) - \sum_{j=1}^m |x\varphi_j(t) - (t-a_j)\overline{\varphi_j'(t)} - \overline{\psi_j(t)}| \quad \text{при } t \in L'' \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \varphi_{1j}(z-a_j) + \overline{\varphi_{2j}}(z-a_j), \\ \psi_j(z) &= \chi_{1j}(z-a_j) + \overline{\chi_{2j}}(z-a_j). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Голоморфные функции φ_{1j} , φ_{2j} , χ_{1j} и χ_{2j} образуют комплексную бигармоническую функцию Гурса

$$U_j(x, y) = \chi_{1j}(z-a_j) + \chi_{2j}(\bar{z}-\bar{a}_j) + (\bar{z}-\bar{a}_j)\varphi_{1j}(z-a_j) + (z-a_j)\varphi_{2j}(\bar{z}-\bar{a}_j),$$

которая при значениях

$$\begin{aligned} \chi_{1j}(z-a_j) &= d_{1j}(z-a_j)^{\lambda_j+1}, \quad \chi_{2j}(z-a_j) = d_{2j}(z-a_j)^{\lambda_j+1}, \\ \varphi_{1j}(z-a_j) &= d_{3j}(z-a_j)^{\lambda_j}, \quad \varphi_{2j}(z-a_j) = d_{4j}(z-a_j)^{\lambda_j} \quad \text{и } z-a_j = r_j e^{i\theta_j} \end{aligned} \quad (1.8)$$

имеет следующее представление в полярных координатах:

$$U_j(r^j, \theta_j) = r_j^{\lambda_j-1} [b_{1j} \sin(\lambda_j+1)\theta_j + b_{2j} \cos(\lambda_j+1)\theta_j + b_{3j} \sin(\lambda_j-1)\theta_j + b_{4j} \cos(\lambda_j-1)\theta_j], \quad (1.9)$$

где

$$b_{1j} = i(d_{1j} - d_{2j}), \quad b_{2j} = d_{1j} + d_{2j}, \quad b_{3j} = i(d_{3j} - d_{4j}), \quad b_{4j} = d_{3j} + d_{4j} \quad (1.10)$$

i -мнимая единица.

Следуя Вильямсу (⁷), удовлетворяя с помощью (1.9) однородным условиям на прямолинейных сторонах сектора $\theta_j = \alpha_j$ и $\theta_j = \beta_j$, образованного касательными, проведенными к контуру в точке a_j так, что угол $\beta_j - \alpha_j$ представлял угол области в рассматриваемой угловой точке контура, получаем систему четырех однородных уравнений для определения коэффициентов b_{kj} ($k=1,2,3,4$; $j=1,2,\dots,m$). Полагая, что поведение напряжений и смещений в угловой точке a_j совпадает с поведением этих же величин в окрестности вершины вышеуказанного сектора, как это имеет место также при изгибе тонких плит (⁸), комплексное число λ_j будем определять как корень с наименьшей положительной действительной частью характеристического уравнения, получающегося из условия существования нетривиальных решений однородной системы для определения коэффициентов b_{kj} .

Как известно (⁷), λ_j будет корнем одного из уравнений

$$\sin^2 \lambda_j (\beta_j - \alpha_j) = \lambda_j^2 \sin^2 (\beta_j - \alpha_j), \quad (1.11)$$

$$x^2 \sin^2 \lambda_j (\beta_j - \alpha_j) = \lambda_j^2 \sin^2 (\beta_j - \alpha_j), \quad (1.12)$$

$$4\lambda_j^2 \sin^2 (\beta_j - \alpha_j) + 4x \sin^2 \lambda_j (\beta_j - \alpha_j) - (x+1)^2 = 0 \quad (1.13)$$

соответственно, в случаях, когда на сторонах угла заданы напряжения, смещения или вершина угла является точкой смены граничных условий.

Учитывая, что во всех трех случаях ранг матриц вышеуказанных однородных систем равен трем, нетривиальные решения систем имеют вид:

$$b_{1j} = X_{1j} b_{4j}, \quad b_{2j} = X_{2j} b_{4j}, \quad b_{3j} = X_{3j} b_{4j} \quad (1.14)$$

Подставляя (1.7) в (1.5) и (1.6), с учетом (1.8), (1.10.) и (1.14), получаем

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C(t) - \sum_{j=1}^m |b_{4j} \xi_j(t) + \overline{b_{4j}} \eta_j(t)| \quad \text{при } t \in L' \quad (1.15)$$

$$x\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = g(t) - \sum_{j=1}^m |b_{4j} \tilde{\xi}_j(t) + \overline{b_{4j}} \omega_j(t)| \quad \text{при } t \in L'' \quad (1.16)$$

где

$$2\xi_j(t) = (1 - iX_{2j})(t - a_j)^{\lambda_j} + \lambda_j(1 + iX_{2j})(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{\lambda_j-1} + (\lambda_j + 1)(X_{2j} + iX_{1j})(\bar{t} - \bar{a}_j)^{\lambda_j},$$

$$2\eta_j(t) = (1 - i\bar{X}_{2j})(t - a_j)^{\bar{\lambda}_j} + \bar{\lambda}_j(1 + i\bar{X}_{2j})(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{\bar{\lambda}_j-1} + (\bar{\lambda}_j + 1)(\bar{X}_{2j} + i\bar{X}_{1j})(\bar{t} - \bar{a}_j)^{\bar{\lambda}_j},$$

$$\begin{aligned}
z_j(t) &= x(1 - iX_{2j})(t - a_j)^{2j} - i_j(1 + iX_{2j})(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{2j-1} - \\
&\quad - (i_j + 1)(X_{2j} + iX_{1j})(\bar{t} - \bar{a}_j)^{2j}, \\
2\omega_j(t) &= x(1 - i\bar{X}_{2j})(t - a_j)^{2j} - \bar{i}_j(1 + i\bar{X}_{2j})(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{2j-1} - \\
&\quad - (\bar{i}_j + 1)(\bar{X}_{2j} + i\bar{X}_{1j})(\bar{t} - \bar{a}_j)^{2j}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Для решения поставленной задачи необходимо определить голоморфные в S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также m вообще комплексных постоянных b_{4j} и m_1 постоянных C_{2j-1} ($j=1, 2, \dots, m_1$) из граничных условий (1.15) и (1.16).

2. Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем представлять интегралом типа Коши с действительной плотностью (6.9).

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu_1(\tau) d\tau}{\tau - z} + iD_1, \tag{2.1}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu_2(\tau) - \bar{\tau}\mu_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + iD_2, \tag{2.2}$$

где $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$ - действительные непрерывные функции, имеющие интегрируемые производные; D_1 и D_2 - действительные постоянные.

Предельные значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, определяемые по формулам Сохоцкого-Племеля, на контуре L имеют устранимые разрывы в угловых точках a_j . Будем приписывать в точке a_j функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предельные значения соответственно функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, когда точка z стремится к узлу a_j по дуге L_{j-1} или L_j . Можно показать, что эти предельные значения равны между собой.

Подставляя предельные значения (2.1) и (2.2) в граничные условия (1.15) и (1.16), предварительно переходя в них к комплексносопряженным значениям, после некоторых преобразований, получаем следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
\mu_1(t) + \mu_2(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu_1(\tau) d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{t}} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu_2(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi i} \int_L \mu_1(\tau) d \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} = \\
= 2\bar{f}(t) + 2\bar{C}(t) + 2i(D_1 - D_2) - 2 \sum_{j=1}^m \{ \bar{b}_{4j} \bar{z}_j(t) + b_{4j} z_j(t) \} \text{ при } t \in L' \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x\mu_1(t) - \mu_2(t) - \frac{x}{\pi i} \int_L \frac{\mu_1(\tau) d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{t}} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu_2(\tau) d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{\pi i} \int_L \mu_1(\tau) d \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} = \\
= 2\bar{g}(t) + 2i(xD_1 + D_2) - 2 \sum_{j=1}^m \{ \bar{b}_{4j} \bar{z}_j(t) + b_{4j} \omega_j(t) \} \text{ при } t \in L'' \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Отделяя действительные и мнимые части в (2.3) и (2.4) и, далее, выделяя сингулярный оператор в мнимой части, после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \mu_1(t) + \mu_2(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L |\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau)| d \ln \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} + \frac{1}{\pi} \int_L \mu_1(\tau) \operatorname{Im} d \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} = \\ = 2 \operatorname{Re} [f(t) + C(t)] - 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m b_{sj} [\xi_j(t) + \overline{\eta_j(t)}] \quad \text{при } t \in L' \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} x\mu_1(t) - \mu_2(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L |x\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)| d \ln \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} - \frac{1}{\pi} \int_L \mu_1(\tau) \operatorname{Im} d \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} = \\ = 2 \operatorname{Re} g(t) - 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m b_{sj} [\zeta_j(t) + \overline{\omega_j(t)}] \quad \text{при } t \in L'' \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{v(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{\pi i} \int_{L'} |(\alpha - 1)\mu_1(\tau) + 2\mu_2(\tau)| \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L |\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)| d \ln \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_L \mu_1(\tau) \operatorname{Re} d \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} + 2i \operatorname{Im} [f(t) + C(t)] - 2i(D_1 - D_2) + \\ + 2i \operatorname{Im} \sum_{j=1}^m b_{sj} [\overline{\eta_j(t)} - \xi_j(t)] \quad \text{при } t \in L' \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{v(\tau) d\tau}{\tau - t} = - \frac{1}{\pi i} \int_{L'} |(\alpha - 1)\mu_1(\tau) + 2\mu_2(\tau)| \frac{d\tau}{\tau - t} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_L |x\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau)| d \ln \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} - \frac{1}{\pi i} \int_L \mu_1(\tau) \operatorname{Re} d \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} + \\ + 2i \operatorname{Im} g(t) - 2i(\alpha D_1 + D_2) + 2i \operatorname{Im} \sum_{j=1}^m b_{sj} [\overline{\omega_j(t)} - \zeta_j(t)] \quad \text{при } t \in L'', \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$v(\tau) = \begin{cases} \mu_1(\tau) - \mu_2(\tau) & \text{при } \tau \in L' \\ x\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau) & \text{при } \tau \in L'' \end{cases}$$

Можно показать, что интегральные операторы, входящие в (2.5) и (2.6), являются равностепенно непрерывными функциями от t .

Правые же части (2.7) и (2.8) являются функциями, удовлетворяющими условию H_0 на всей границе $L^{(e)}$.

Таким образом, задача отыскания функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ свелась к разрывной задаче — решению регулярного интегрального уравнения второго рода (2.5) и (2.6) и сингулярного интегрального уравнения (2.7) и (2.8). Регуляризация этого уравнения, определение неизвестных постоянных C_{2j-1} , b_{sj} , а также доказательство разрешимости полученных интегральных уравнений должны стать предметом отдельного исследования.

Միկայ, անկյուններով տիրույթի համար առաձգականության տեսության
հարթ հիմնական խառը խնդրի լուծումը

Հոդվածում բերված է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը միակայ, անկյուններով տիրույթի համար, երբ նրա եզրագծի որոշ մասում տրված են տեղափոխությունները, իսկ մնացած մասում՝ լարումները։ Նախապես անջատելով անկյունային կետերում առաջացող տեղական լուծումները, խնդիրը բերվում է երկու ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որոնցից մեկը ռեգուլյար է, իսկ մյուսը՝ սինգուլյար։ Սինգուլյար հավասարման ռեգուլյարացումը և ինտեգրալ հավասարումների լուծելիության ապացույցը բերված է առանձին հոդվածում, որը հաջորդում է ներկայինիս։

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Д. И. Шерман, ДАН СССР, т. XXVIII, № 1 (1940). ² А. И. Каландия, Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили, М., 1961. ³ Д. И. Шерман, Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды международного симпозиума в Тбилиси, М., 1965. ⁴ С. С. Заргарян, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 1 (1975). ⁵ С. С. Заргарян, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 3 (1975). ⁶ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, изд. «Наука», М., 1968. ⁷ M. L. Williams, I. of Appl. Mech., vol. 19, № 4 (1952). ⁸ О. М. Салонджян, Изгиб тонких упругих плит, изд. «Айастан», Ереван 1975. ⁹ Н. Е. Товмасян, ДАН СССР, т. 160, № 5 (1965).

УДК 621.382.3

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Г. М. Авакьянц

**S-образная вольт-амперная характеристика и шнурование тока
 в коллекторном переходе сверхмощных транзисторов**

(Представлено 24/VI 1976)

В сверхмощных транзисторах, где концентрация носителей в режиме насыщения становится свыше 10^{17} см⁻³ ⁽¹⁾ существенную роль начинают играть электронно-дырочные столкновения. Как уже было показано ⁽¹⁾ *p-n*-столкновения приводят к возникновению участка отрицательного сопротивления на ВАХ внутри коллекторного перехода.

Здесь эту особенность работы транзистора рассмотрим подробнее.

Исходя из уравнения (2) в ⁽¹⁾ мы получаем следующее выражение для концентрации электронов внутри коллекторного перехода (см. ⁽¹⁾ обозначения в (1)):

$$n_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{b+1}{2} \frac{EH_{no}}{T} - 1 \right] n_{кр} \pm \left[\frac{1}{4} \left(\frac{b+1}{2} \frac{EH_{no}}{T} - 1 \right)^2 n_{кр}^2 - \frac{N_a + N_{kg}}{2\lambda_0} (b+1) H_{no} n_{кр} \right]^{1/2} \quad b = \frac{U_p}{U_n} \quad (1)$$

Это соотношение с постоянным $n_{кр}$ позволяет проанализировать ход ВАХ коллекторного перехода до начала участка отрицательного сопротивления (ОС) и на самом участке ОС. Следует сразу оговорить, что в ⁽¹⁾ H_{no} величина постоянная и равная длине высокоомной части (ВОЧ) коллектора только тогда, когда вся эта область промодулирована, причем достаточно однородно.

Поэтому, даже говоря о небольших относительно концентрациях мы все же будем предполагать, что и в этом случае ВОЧ коллектора промодулирован достаточно однородно и до конца и, что концентрации носителей по обе стороны от коллекторного перехода практически одинаковы (это имеет место, если $n_0 > N_a, N_{kg}$, см. ⁽¹⁾). Когда ВОЧ промодулирована лишь частично, это соответствует переходному случаю, ибо в конечном счете нас интересует режим модуляции, с наименьшим остаточным напряжением на ВОЧ. Итак, при малых концентрациях в (1) следует взять перед корнем знак минус. Разлагая подкоренное выражение находим при малых n_0 :

$$n_0 = \frac{(N_a + N_{гк})T}{E\lambda_0} \quad (2)$$

Как видно из (2) с уменьшением E (т. е. ростом внешнего инверсионного напряжения, на коллекторном переходе см. (1)) n_0 растет. Однако при дальнейшем уменьшении E подкоренное выражение в (1) может обратиться в нуль. При этом дальнейшее уменьшение E становится невозможным.

Если $\frac{b+1}{2} \frac{EH_{во}}{T} \gg 1$, то:

$$\frac{b+1}{2} \frac{E_{min}H_{во}}{T} = \sqrt{\frac{2H_{во}}{\lambda} \frac{N_a + N_{гк}}{n_{кр}}} (b+1). \quad (3)$$

После достижения своего минимального значения E может только возрастать, а соответствующее инверсионное напряжение на коллекторном переходе будет падать. Это и есть участок ОС. Чтобы получить концентрацию n_0 на участке ОС теперь перед корнем в (1) надо взять знак плюс. Пренебрегая под корнем числом с $(N_n + N_{гк})$, находим:

$$n_0 = \frac{b+1}{2} \frac{EH_{во}}{T} n_{кр}. \quad (4)$$

Как мы видим с уменьшением инверсионного напряжения n_0 растет.

Окончание участка отрицательного сопротивления можно усмотреть, если принять во внимание явление экранировки заряда при p - n -столкновениях. Дело в том, что $n_{кр}$ в действительности не постоянная величина, а зависит от n_0 :

$$n_{кр} = \frac{n_1}{2 \left[\ln \left(1 + \frac{\bar{n}}{n_0} \right) - \frac{\bar{n}/n_0}{1 + \bar{n}/n_0} \right]} \quad (5)$$

Здесь n_1 и n_0 постоянные, имеющие размерность концентрации $\bar{n} \sim 1 + 3 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (2). Как только дебаевская длина сравнивается с длиной де-бройлевской волны частицы с эффективной массой электрона и дырки, наступает достаточно сильная экранировка и p - n -столкновения становятся менее интенсивными.

Это приводит к исчезновению участка ОС.

Нетрудно теперь видеть, что в целом возможна с ростом тока (последний пропорционален n_0) характеристика S -типа. Одному значению инверсионного напряжения будет соответствовать три концентрации или три значения тока.

Как известно (3), указанная неоднозначность ведет к шнурованию тока. В данном случае такое шнурование может иметь место в коллекторном переходе.

Чтобы выяснить условия, при которых может возникнуть шнур тока, обратимся к уравнению непрерывности тока. Пусть ток течет по оси x . Нас интересует распределение носителей в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Причем, ограничимся изучением шнуров, размеры которых, скажем, в направлении y неограничены, а по z — конечны. Будем считать, что диффузия частиц из шнура является основной причиной приводящей к конечному его размеру (в противном случае шнур был бы бесконечно узким).

Тогда, после интегрирования уравнения непрерывности по координате x в пределах коллекторного перехода мы для плотности тока, на единицу длины по оси y получим следующий вид этого уравнения:

$$-\eta \frac{dI}{dZ} = 2N + \frac{1 - \xi N}{1 + 2 \frac{N}{N_1} \left[\ln \left(1 + \frac{\bar{N}}{N} \right) - \frac{\bar{N}}{N + \bar{N}} \right]} K, \quad (6)$$

$$\text{Здесь: } \eta = \frac{D}{D_n}, \quad \bar{N} = \frac{\bar{n}}{N_0}; \quad N_0 = N_a + N_{Rk(b+1)}, \quad N_1 = \frac{\bar{n}}{N_0},$$

$$\xi = \frac{b+1}{T} E \lambda_0, \quad K = \frac{H_{\text{во}}}{\lambda_0}, \quad I = \frac{j}{N_0 D_n} \sqrt{H_{\text{во}} \lambda_0},$$

$$N = \frac{n_0}{N_0}; \quad Z = \frac{Z}{\frac{D}{D_n} \sqrt{H_{\text{во}} \lambda_0}}$$

D -амбиполярный коэффициент диффузии дырок и электронов в направлении оси Z .

К уравнению (6) нужно добавить уравнение определяющее состав тока вдоль направления z :

$$I = - \frac{dN}{dZ}. \quad (7)$$

Исключая из (6) и (7) dZ , а затем выполняя интегрирования комбинированного уравнения, получаем:

$$\frac{\eta^2}{2} I^2 = \int_{N_{\text{min}}}^N \left(2N + \frac{1 - \xi N}{1 + 2 \frac{N}{N_1} \left[\ln \left(1 + \frac{\bar{N}}{N} \right) - \frac{\bar{N}}{N + \bar{N}} \right]} K \right) dN. \quad (8)$$

Здесь N_{min} — безразмерная концентрация носителей вне шнура. $I(N_{\text{min}}) = 0$. Обозначая через N_{max} концентрацию в центре шнура и замечая, что $I(N_{\text{max}}) = 0$, находим условие устойчивости шнура:

$$\int_{N_{\text{min}}}^N \left(2N + \frac{(1 - \xi N)K}{1 + 2 \frac{N}{N_1} \left[\ln \left(1 + \frac{\bar{N}}{N} \right) - \frac{\bar{N}}{N + \bar{N}} \right]} \right) dN = 0. \quad (9)$$

Если обозначить через N — среднюю концентрацию носителей в шнуре, то согласно определению:

$$\bar{N} = N_{\min} + \frac{2}{L} \int_{N_{\min}}^{N_{\max}} N \left| \frac{dZ}{dN} \right| dN, \quad (10)$$

где L — безразмерная ширина полоски тока через коллектор при однородном распределении носителей.

Из (7) и (10) находим:

$$\bar{N} - N_{\min} = \frac{2}{L} \int_{N_{\min}}^{N_{\max}} \frac{NdN}{I}. \quad (11)$$

С другой стороны:

$$(\bar{N} - N_{\min}) L = \frac{1}{2} N_{\max} L_s, \quad (12)$$

где L_s — ширина шнура.

Используя (8), (9), (11) и (12) можно найти концентрацию носителей на оси N_{\max} и ширину шнура L_s .

Устойчивость шнура, согласно (9) возможна только тогда, когда уже на оси шнура имеет место заметная экранировка при р-п-рассеянии. Это значит, что для оценочного расчета мы можем в (9) разложить логорифм в ряд по отношению $\frac{\bar{N}}{N}$. Вместо (9) таким образом, приближенно имеем:

$$\int_{N_{\min}}^{N_{\max}} \left(2N + \frac{1 - \xi N}{1 + \frac{\bar{N}^2}{N_1 N}} K \right) dN = 0. \quad (13)$$

Пусть сначала $\frac{\bar{N}^2}{N_1 N} < 1$, тогда из (10) без большой ошибки находим ($N_{\min} \rightarrow 0$):

$$N_{\max} = \frac{2K}{\xi K - 2}. \quad (14)$$

В том же приближении из (11):

$$(\bar{N} - N_{\min}) L = \sqrt{2\tau_l} \int_0^{N_{\max}} \frac{NdN}{\sqrt{KN - (\xi K - 2) \frac{N^2}{2}}}. \quad (15)$$

Или по порядку величины:

$$2\sqrt{2\eta} \frac{N_{\max}^{3/2}}{\sqrt{K}} = (\bar{N} - N_{\min})L. \quad (16)$$

Сравнивая правые части выражений (16) и (12) находим:

$$L_s \sim 4 \sqrt{\frac{2\eta N_{\max}}{K}} = \frac{8\sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi K - 2}}. \quad (17)$$

Примем теперь обратное соотношение $\frac{\bar{N}^2}{N_1 N} > 1$.

Из (13) находим для этого случая:

$$N_{\max} \approx 3 \frac{\bar{N}^2}{N_1 K \xi}. \quad (18)$$

Теперь вместо (15) имеем:

$$(\bar{N} - N_{\min})L = \sqrt{2\eta} \int_0^{N_{\max}} \frac{\sqrt{N_{\max}} dN}{\sqrt{N_{\max} - N}} \quad (19)$$

или

$$(\bar{N} - N_{\min})L = 2\sqrt{2\eta} N_{\max}, \quad (20)$$

то есть:

$$L_s = 4\sqrt{2\eta}. \quad (21)$$

В размерном виде (14) и (18) принимают вид:

$$n_{\max} \approx \frac{2K(N_n + N_{gk})}{\xi K - 2}, \quad \frac{\bar{N}^2}{N_1 N} < 1, \quad (22)$$

$$n_{\max} \approx 3 \frac{\bar{n}^2}{K \xi n_1}, \quad \frac{\bar{N}^2}{N_1 N} > 1. \quad (23)$$

Принятые в процессе получения (22) и (23) неравенства накладывают ограничения на значения N_a обеспечивающие возникновение шнура.

В самом деле, согласно (3):

$$\xi_{\min} = 2 \sqrt{\frac{2(N_a + N_{gk})}{n_{кр} K}}. \quad (24)$$

Причем $n_{кр}$ в (24) соответствует точке, где $n_0 = 1/4 \xi_{\min} K n_{кр}$.

Значение ξ в (22) и (23) больше, чем ξ_{\min} . Положим:

$$\xi = \alpha \xi_{\min}, \quad (25)$$

где $\alpha > 1$. Тогда из принятых неравенств:

$$\frac{\bar{n}^2}{n_1 n_{\max}} > 1, \quad n_{\max} > \bar{n}, \quad (26)$$

вытекает, что

$$\frac{\left(1 + \frac{KN_0}{\bar{n}}\right)^2}{\alpha^2} < 2K \frac{N_0}{n_{\text{кр}}} < \frac{\left(1 + \frac{KN_0 n_1}{\bar{n}^2}\right)^2}{\alpha^2}. \quad (27)$$

Из (27) видно, что шнурование возможно здесь только, если:

$$n_1 > \bar{n}_1. \quad (28)$$

В случае, когда вместо (26) мы имеем:

$$\frac{\bar{n}^2}{n_1 n_{\max}} < 1, \quad n_{\max} > \bar{n}, \quad (29)$$

получается

$$\frac{n_{\text{кр}}}{\alpha^2 K} < N_0 < \frac{n_{\text{кр}}}{\alpha^2 K} \left(\frac{\bar{n}}{n_1}\right)^2 \quad (30)$$

Таким образом, здесь шнурование появляется только при $n > n_1$. Оценки показывают, что неравенство (13) более реально, чем (28).

В том случае, если соотношения (27) и (30) не выполняются шнурование будет отсутствовать. Так, например, согласно (30),

если $\alpha = 2$, $K = 10^2$, $\frac{\bar{n}}{n_1} = 3$, то шнурование не будет, если

$$N_0 < 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \text{ и } N_0 > 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

В нашем исследовании шнурования тока при р-п-столкновениях мы ограничились рассмотрением коллекторного перехода. Между тем, если экранировка заряда начинается также в ВОЧ, то в этой области возникает в рамках модели (5) то же отрицательное сопротивление. Для чего n в ВОЧ должно превзойти n_1 уже по всему объему, а не только внутри шнура, как это мы допустили выше.

Согласно (17) и (21) в случае возникновения шнура его ширина может колебаться от нескольких микрон до десятков и даже сотен (последнее если $n_1 > \bar{n}$).

Способны ли такие шнуры, если плотность тока внутри них не будет, вероятно, превышать цифру порядка нескольких тысяч ампер на квадратный сантиметр, помешать нормальной работе сверхмощного транзистора, надо решать для каждого конкретного случая в отдельности.

Ереванский государственный университет

**S-ակերպ վոլտ-ամպերային բնութագիրը և հոսանքի բուդավորումը
գերհզուր տրանզիստորի կոլեկտորային անցումում**

Հոդվածում քննարկվում է հզոր տրանզիստորի կոլեկտորային անցումում հոսանքի համասեռ բաշխման խախտման դեպքը:

Այդպիսի խախտման պայմաններում անցնող հոսանքը հազեցման ուժի-
մում կարող է կենտրոնացվել նեղ տիրույթում (բուլ):

Արտածվում են բուլի գոյություն հատկանիշները կախված սարքի
սարամետրերից:

Քննարկվում է տրանզիստորի աշխատանքի վրա բուլի ազդեցության
հարցը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Գ. Մ. Ավաղյան, ДАН Арм. ССР, т. LXIII, № 3 (1976) ² Э. Конуэлл, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, Изд. «Мир», М., 1970.

³ В. Л. Бонч-Буревич, Н. В. Звягин, А. Г. Миронов, Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках, Изд. «Наука», М., 1972.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն L X I I I Հ Ա Տ Ո Ր Ի

ԽՈՒԹԵՄԱՏԻԿԱ

	էջ
Հ. Ս. Ասատրյան—Կլիկի համարակալված բազմությունների ուստրակտների մասին	3
Ա. Մ. Անտոնյան—Արեւիյան խմբային հանրահաշիվների շտրոհվող իդեմպոտենտների սխտեմները	8
Յու. Մ. Մովսիսյան—Երկրորդ աստիճանի հանրահաշիվների կոնգրուենցիաների ստրուկտուրան	11
Ս. Մ. Հովհաննիսյան—Օրթոգոնալ շարքերի T միջինների սահմանային ֆունկցիանե- րի մասին	17
Լ. Հ. Դալստյան—Անալիտիկ j -ձգող մատրից-ֆունկցիաները և Ֆեյերի պրոբլեմը	22
Ս. Կ. Շուբուրյան— X - Y -ավտոմատների ֆունկցիոնալ էկվիվալենտության հատուկ պրոբլեմի որոշ լուծելի դեպքեր	27
Ի. Ա. Կաբալյետյան—Կրիտիկական և չական կողեր կատարյալ գրաֆներում	65
Լ. Խ. Մեհրաբյան—Քլյաշկեի տիպի արտադրյալների մասին կիսահարթություննե- րում	71
Ս. Թ. Կաբալյետյան— (X_0, m) -մինիմալ կտրվածք և ծառերի տրոհում	129
Վ. Ա. Զոլոտարյով—Երկու անգամ տեղափոխելի օպերատորների սխտեմների եռանկյան մոդելների մասին	136
Ի. Վ. Խաչատրյան—Դիֆերենցիալ խաղեր դիսկրետ ինֆորմացիայով	141
Մ. Լ. Բուրիշկին—Հատած դեպքում սիմետրիայի վերջավոր խմբով տիրույթում որոշ- ված վեկտոր-ֆունկցիաների վերլուծությունը	193
Ս. Ա. Սոլախյան—Սրահրերի կորեկտության ապացուցման արսիսմատիկ մոտեցում	199
Ն. Բ. Պողոսյան—Զափելի ֆունկցիաների ներկայացում $L_p[0, 1]$ -ի, $(p > 2)$ բազիս- ներով	203
Հ. Հ. Նազարյան—Բուլյան ֆունկցիաների բազմությունների բարդության դասերի մասին	257
Մ. Լ. Բուրիշկին—Հատած դեպքում սիմետրիայի տարածական խմբի ուղղալար ներկայացման մասին	264
Է. Ա. Դանիելյան, Գ. Ա. Պուլով—Քաղաքակց նախասպատվությամբ $M_r(\overline{O}_r 1 \infty$ սխտեմի սպասման ժամանակի անվերջ բաժանելիության մասին	270
Վ. Մ. Մաբախոսյան—Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ սխտեմների բազիսությունը և ինտեգրալային խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթում	278
Վ. Մ. Լոդիգարյան—Հեղհանրացված ծալրի տիպի ձևափոխության կոմպլեքս շրջում	284
Ս. Խ. Մաբախոսյան, Ի. Ա. Կաբալյետյան—Կատարյալ գրաֆների մասին	292

ԿԻՐԱԽԱԿԱՆ ԽՈՒԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ռ. Ս. Մինասյան—Ջերմահաղորդականության խառը եզրային խնդիրն ուղղանկյան համար	146
Ա. Հ. Ազատյան—1-փոփոխականան ցիկլիկ Ջ ⁿ -հաջորդականությունների թվարկման ալգորիթմի մասին	210
Մեխանիկա	
Լ. Ա. Մովսիսյան—Լցունած ողակի կայունությունն ուժային և ջերմային ազդեցու- թյունների դեպքում	77
Ս. Ս. Զաբաբյան—Միկապ, անկյուններով տիրույթի համար առաձգականության տեսության հարթ հիմնական խառը խնդրի լուծումը	297

ԷԼԵԿՏՐՈԼԻՏԻԱԿԱՆԻԿԱ

Ա. Ղ. Իսսիֆյան, Գ. Լ. Արեշյան—Սրկկոդմանի (դուայ) պրոդաման սիստեմով սին-
խրոն—ասինխրոն մեքենայի անսությունը 84

ԱՌԱՋԻԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՄՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Մխիթարյան, Ս. Ս. Շանիկյան—Կլոր անցքով անվերջ հարթության շարվածա-
յին վիճակի մասին, երբ վերջինս թույլացված է երկու շառավղային ճեղքերով 218

Վ. Ս. Նիկիշին, Գ. Ս. Շապիրո—Առաձգականության տեսության միակոդմանի կասկերով
կոնտակտային խնդիրներ 224

ՖԻԶԻԿԱ

Գ. Ա. Վարդանյան—Ատոմների տեղափոխանակումը րվանտային րյուրեղում 33

Ս. Ի. Մովսեսյան, Ռ. Խ. Գրամվյան—Ճառագայթման ինտենսիվության ազդեցու-
թյունը մագնիսական դաշտում բևեռացման հարթության պտույտի վրա 91

Յու. Ա. Թավյան, Գ. Ա. Տոնոյան, Լ. Պ. Գալիվանյան, Վ. Ն. Վարդանյան—Հաստա-
տուն մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ կոլագենային մանրաթելերում կառուց-
վածքային փոփոխությունների ունեցնելու ուսումնասիրությունը 152

Գ. Մ. Ավագյանց—Գերհզոր տրանզիստորների մասին 157

Գ. Ա. Վարդանյան—Պինդ լուծույթը արսաբին դաշտում 164

Տ. Ի. Բուտանա, Ա. Ա. Կամինսկի, Ա. Գ. Պետրոսյան, Խ. Ս. Խաղասաբով—300° Կ
ջերմաստիճանում H_2O^3 և Et^3+ իոններով $Lu_2Al_3O_{12}$ րյուրեղների ստիպողական
ճառագայթումը 232

Գ. Գ. Կարապետյան—Օնդուլյատորի ճառագայթումը ալիքատարում 239

Գ. Ս. Ավագյանց—Տ-ակերպ վոլտ-ամպերային բնութագիրը և հոսանքի բուղա-
վորումը գերհզոր տրանզիստորի կոլեկտորային անդամում 303

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՔԻՄԻԱ

Վ. Մ. Խառայան, Ն. Վ. Սիրգոյան, Ժ. Վ. Սարգսյան—Ակրիդինային օրանո Նիմ-
նային ներկանյութերով սլերոնեատ իոնի էրստրակցիայի առանձնահատկությունները 36

Վ. Մ. Խառայան, Ֆ. Վ. Սիրգոյան, Չ. Ա. Կարապետյան—Հիմնային ներկանյութերով
ֆոսֆորի, արսենի և սիլիցիումի ֆոտոմետրիկ որոշման մասին 168

ԻՐԿԻՐԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Տ. Ասլանյան, Ա. Ի. Լիկին, Ա. Վ. Հաբուրյունյան—Նրկրաշարժների առաջացման
մի հնարավոր մեխանիզմի մասին 96

ԳԵՈՖԻԶԻԿԱ

Խ. Գ. Դավրյան—Ըստ պրոֆիլի ուղղության սահմանային արագության փոփոխու-
թյան որոշման ալգորիթմի տրամաբանական հիմքը 173

ՀԱՆՔԱՔԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ռ. Գ. Գեորգյան, Ֆ. Վ. Կամինսկի, Ռ. Ս. Լուեն, Ռ. Մ. Օսովեցկի, Լ. Ա. Տկաչենկո,
Կ. Ա. Շեպելևա, Ն. Գ. Խաչատրյան—Այմաստների նոր հայտնաբերումներ Հայաստանի
ուլտրամաֆիտներում 176

ՏԵԿՏՈՆԻԿԱ

Ա. Ն. Գաբրիելյան, Ս. Ա. Փիրուզյան, Գ. Պ. Սիմոնյան—Հայկական ՍՍՀ տարածքի
սեյսմիկ շրջանացման նոր սխեմա 182

ՄԻԿՐՈՐԻՈԼՈԳԻԱ

Ռ. Ա. Չախարյան, Ա. Ս. Աղարսյան, Լ. Ա. Չիլ-Հակոբյան, Ն. Ս. Գասպարյան,
Կ. Ա. Բակունց, Պ. Ե. Թաղևոսյան, Է. Գ. Աֆրիկյան—Bac thuringiensis-ի կողմից
լնտոմոցիդ էնդոտոքսիսի առաջացման համար էրստրաբրոմոսոմայ Գնթ-ի հնարավոր
ղերի մասին 42

Ա. Մ. Գիլանյան—Ակտիվ թթվայնությունը կոլիևտերիտների հարուցիչների և ոչ պաթոգեն <i>Escherichia coli</i> կուլտուրաներում տարբեր ածխաջրատների ֆերմենտացիայի ժամանակ	102
Ռ. Խ. Կատարյան, Գ. Գ. Տորոպչովա—2,4-դիացեստիլֆորոզյունի հերքիցիդային ազդեցության սպեկտրը և ակտիվությունը	109

ԲԻՈՅԻՉԻԿԱ

Ա. Ա. Շանինյան, Լ. Ա. Խանամիրյան, Հ. Մ. Այվազյան—Մոլեկուլի կոնֆորմացիայի և դիֆիչ նյութի տեսակի ազդեցությունը լիպիդ-սպիտակուց հիդրոֆոր կոմպլեքսները մոդելավորող խառը ազդեցատների կառուցվածքի վրա	113
---	-----

ՎԻՐՈՒՍՈՒՆՈՒԿԱ

Լ. Հ. Թամրազյան, Ա. Է. Պրոզենկո—Նոր վիրուս, տարածված Հայաստանի ժխտխոտի պլանտացիաներում	48
--	----

ԲՈՒՅԱՆՐԻ ՖԻՉԻՈՒՆՈՒԿԱ

Վ. Հ. Վազարյան, Ի. Ա. Գեուրջյան—Տարբեր արմատաասյահովվածության դեպքում սերնդներում նուկլեինային թթուների բանակակառուցվածքի փոփոխության մասին	52
Ս. Ա. Մաբուրյան, Ռ. Ա. Աբաջյան—Հիստոլոգիկական խաղողի վազի ցրտադիմացկունության հարցում	58
Ս. Ա. Մաբուրյան—Խաղողի շիվերի ֆերմենտատիվ ակտիվությունը դածր ջերմաստիճաններում	119
Կ. Գ. Ազարյան, Մ. Ք. Չալոյան—Կարճօրյա տեսակների ունակցիան ֆոտոսինթեզիկ սկզբնական սարքերի պայմաններում ածխածնի կարգավորիչներով մշակման վրա	243

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յարյուկով-Խենձորյան—Փայտափորիկ ըզեզների նոր տեսակ Գարվազից (<i>Coleoptera, Anobiidae</i>)	124
Ս. Մ. Յարյուկով-Խենձորյան—Ջատկաբզեզների նոր տեսակ Չինաստանից (<i>Coleoptera, Coccinellidae</i>)	250

ՊԼԹՈՅԻՉԻՈՒՆՈՒԿԱ

Ա. Կ. Քյանդարյան—Նրիկամային բարդությունների զարգացման ախտաձևության մեխանիզմները ծայրանդամների մագիստրալ զարկերակների սուր անանցելիության ժամանակ	62
Ա. Կ. Քյանդարյան—Նրիկամների էֆեկտիվ արյան հոսքի որոշումը սուր զարկերակային անանցելիության ժամանակ	189

СОДЕРЖАНИЕ LXIII ТОМА

	Стр
МАТЕМАТИКА	
О. С. Асатрян—О ретрактах нумерованного множества Клини	3
А. М. Антонян—Системы неразложимых идемпотентов абелевых групповых алгебр	8
Ю. М. Мовсисян—Решетка конгруэнций алгебр второй степени	11
С. М. Оганесян—О предельных функциях Т-средних ортогональных рядов	17
Л. А. Галстян—Аналитические растягивающие матрицы-функции и проблема Фейера	22
С. К. Шукурян—О некоторых разрешимых случаях специальной проблемы функциональной эквивалентности X—У-автоматов	27
И. А. Карапетян—Критические и существенные ребра в совершенных графах	65
Л. Х. Меграбян—О произведениях типа Пляшке в полуплоскости	71
С. Т. Карапетян— (X_0, m) минимальный разрез в разбиение дерева	129
В. А. Золотарев—О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов	136
Р. В. Хачатрян—Дифференциальные игры с дискретной информацией	141
М. Л. Бурнышкин—Разложения вектор-функций, определенных на области с конечной группой симметрии, в усеченном случае	193
С. А. Солахян—Аксиоматический подход к доказательству корректности программ	199
И. Б. Погосян—Представление измеримых функций базисами $L_p[0, 1], (p \geq 2)$	205
Г. А. Назарян—О классах сложности множеств булевых функций	257
М. Л. Бурнышкин—О регулярном представлении пространственной группы симметрии в усеченном случае	264
Э. А. Даниелян, Г. А. Попов—О безграничной делимости времени ожидания в системе $M_r G_r 1 \infty$ с абсолютным приоритетом	270
В. М. Мартиросян—Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла	278
В. М. Едигарян—Комплексное обращение обобщенного преобразования типа свертки	284
С. Е. Маркосян, И. А. Карапетян—О совершенных графах	292
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА	
Р. С. Минасян—Смешанная граничная задача теплопроводности для прямоугольника	146
А. А. Азатян—Об одном алгоритме для перечисления 1-переменных циклических 2^n последовательностей	210
МЕХАНИКА	
Л. М. Мовсисян—Устойчивость кольца с заполнителем при силовых и температурных воздействиях	77
С. С. Зиргарян—Решение основной смешанной задачи плоской теории упругости для односвязных областей с углами	297
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА	
А. Г. Носифьян, Г. Л. Арешян—Теория синхронно-асинхронной машины с дуальной системой возбуждения	84

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- С. М. Мхитарян, С. С. Шигинян*—О напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, расслабленной двумя радиальными разрезами 218
- В. С. Никишин, Г. С. Шапиро*—Контактные задачи теории упругости с односторонними связями 224

ФИЗИКА

- Г. А. Вартанян*—Обмен местами атомов в квантовом кристалле 33
- М. Е. Мовсесян, Р. Х. Драмлян*—Влияние интенсивности излучения на вращение плоскости поляризации в магнитном поле 91
- Ю. А. Рипян, Г. А. Тоноян, Л. П. Дадивян, В. А. Вурданян*—Рентгенографические исследования структурных изменений в коллагеновых волокнах под действием постоянного магнитного поля 152
- Г. М. Авакьянц*—О сверхмощных транзисторах 157
- Г. А. Вурданян*—Твердый раствор He^3 — He^4 во внешнем поле 164
- Т. И. Бутево, А. А. Каминский, А. Г. Петросян, Х. С. Багдасарян*—Стимулированное излучение при 300°К кристаллов $Lu_2Al_3O_{12}$ с ионами Ho^{3+} и Er^{3+} 232
- Г. Г. Карпетян*—Излучение модулятора в волноводе 239
- Г. М. Авакьянц*—S-образная вольт-амперная характеристика и шпурование тока в коллекторном переходе сверхмощных транзисторов 303

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- В. М. Тараян, Ф. В. Мирзоян, Ж. В. Сиркисян*—Особенности экстракции перренат-иона основным красителем акридиновым оранжевым 36
- В. М. Тараян, Ф. В. Мирзоян, Э. А. Карпетян*—К фотометрическому определению фосфора, мышьяка и кремния основными красителями 168

ГЕОЛОГИЯ

- А. Т. Асланян, А. И. Левыкин, А. В. Арутюнян*—Об одном возможном механизме возникновения землетрясений 96

ГЕОФИЗИКА

- Х. Г. Давтян*—Логическая основа алгоритма определения изменения граничной скорости по направлению профиля 173

МИНЕРАЛОГИЯ

- Р. Г. Геворкян, Ф. А. Каминский, Б. С. Мунев, Б. М. Осовецкий, Н. Д. Хачатрян*—Новые находки алмазов в ультрамафитах Армении 176

ТЕКТОНИКА

- А. А. Габриелян, С. А. Пирузян, Г. П. Симонян*—Новая схема сейсмического районирования территории Армянской ССР 182

МИКРОБИОЛОГИЯ

- Р. А. Захарян, А. С. Агабабян, Л. А. Чил-Акопян, Н. С. Гаспарян, К. А. Бакунц, П. Е. Татевосян, Э. К. Африкян*—О возможной роли экстрахромосомальной ДНК в образовании энтомоцидного эндотоксина *Bac. thuringiensis* 42
- А. М. Диланян*—Активная кислотность в культурах возбудителей колиэнтеритов и банальной *Escherichia coli* при ферментации различных углеводов 102
- Б. Т. Катарьян, Г. Г. Торгишева*—Спектр и активность гербицидного действия 2,4-дихлорфлороглюцина 109

БИОФИЗИКА

- А. А. Шагинян, Л. А. Ханамирян, О. М. Айвазян*—О влиянии конформации макромолекулы и типа дифильного вещества на структуру смешанных агрегатов, моделирующих гидрофобные комплексы липид-белок 113

ВИРУСОЛОГИЯ

- Л. Г. Тамразян, А. Е. Проценко*—Новый вирус, распространенный на плантациях табака в Армении 48

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- В. О. Казарян, Н. А. Геворкян*—О количественных изменениях нуклеиновых кислот в листьях при различной их корнеобеспеченности 52
- С. А. Марутян, Р. А. Абаджян*—Липопротеиды в морозоустойчивости виноградной лозы 58

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- С. А. Марутян*—Ферментативная активность побегов винограда в условиях низких температур 119
- К. Г. Азарян, М. А. Чайлахян*—Реакция короткодневных видов на обработку регуляторами роста в условиях различного фотопериодического режима 243

ЭНТОМОЛОГИЯ

- С. М. Яблоков-Хизорян*—Новый вид жука-точильщика из Дарваза (Coleoptera, Anobiidae) 124
- С. М. Яблоков-Хизорян*—Новый вид жесткокрылых-кокциnellид из Китая (Coleoptera, Coccinellidae) 250

ПАТОФИЗИОЛОГИЯ

- А. К. Кяндарян*—Патогенетические механизмы развития почечных осложнений при острой непроходимости магистральных артерий конечностей 62
- А. К. Кяндарян*—Определение эффективного почечного кровотока при острой артериальной непроходимости 189

CONTENTS OF VOLUME LXIII

MATHEMATICS	P.
<i>H. S. Asatryan</i> — On retracts of Kleene's enumerated set	3
<i>A. M. Antonian</i> — The systems of Irreducible idempotents of Abelian group algebras	8
<i>Y. M. Mousislan</i> — The congruent lattice of the algebras of the second degree	11
<i>S. M. Hovhannisian</i> — On limit functions of T—means of orthogonal series	17
<i>L. H. Galstian</i> — Analytic j —stretching matrix—functions and the Fejer's problem.	22
<i>S. K. Shukoorian</i> — Some decidable cases of the special problem of functional equivalence for X — Y —automat	27
<i>I. A. Karapetian</i> — Critical and essential edges in the perfect graphs	65
<i>L. KH. Megrabian</i> — On the products of Blascke types in a half plane.	71
<i>S. T. Karapetian</i> — (x_0m) —Minimal cut and parting trees	129
<i>V. A. Solotarev</i> —On the three—cornered models of systems of the twice permuteless operators	136
<i>R. V. Kechachatrian</i> Differential games with discrete information	141
<i>M. L. Burishkin</i> — The expansion of the vector—functions defined on a region with finite symmetry group in the frustum case	193
<i>S. A. Solakhian</i> An axiomatic approach to proving program correctness	199
<i>N. B. Pogosyan</i> — The presentation of the measurable functions on bases $L_p[0,1]$ ($P > 2$).	205
<i>G. A. Nazarian</i> — On the complexity classes of Boolean function sets	257
<i>M. L. Burtshkin</i> — On the regular representation of the solid group of symmetry in the frustum case	264
<i>E. A. Danelian, G. A. Popov</i> — About infinite divisibility of the waiting time in $M_r G_r 1 \infty$ queue system with primitive priority	270
<i>V. M. Martirosian</i> —The basisness of some systems of analytic functions and the solution of the interpolation problem in the angle domain	278
<i>V. M. Edlgarian</i> — Complex inversion for the generalized convolution transformation	284
<i>S. E. Markosian, I. A.</i> —The perfect graphs	292
APPLIED MATHEMATICS	
<i>R. S. Minasian</i> — Mixed boundary—value heat conduction problem for rectangle	146
<i>A. H. Azatian</i> — The algorithm for the enumeration of 1—variables cycles on 2 — consecutives	210
MECHANICS	
<i>L. A. Mousislan</i> — The stability of circular ring with core under action both of forces and temperature	77

<i>S. S. Zurgarian</i> — Solution of the basic mixed problem of the two dimensional elasticity for single connected regions with angles	297
---	-----

ELECTROMECHANICS

<i>A. G. Iosifian, G. L. Areshian</i> — The theory of synchronous — asynchronous machines with dual system of excitation.	84
---	----

THEORY OF ELASTICITY

<i>S. M. Mkhitarian, S. S. Shahinian</i> —On stressed state of infinite plate with circular hole weakened with two radial cracks.	218
---	-----

<i>W. S. Niklshin, G. S. Shapiro</i> —Contact problems of the theory of elasticity with one-sided bonds	224
---	-----

PHYSICS

<i>G. A. Vardanian</i> The exchange of place of atoms in quantum crystal.	33
---	----

<i>M. E. Mousessian, R. Ch. Drampian</i> — The effect of radiation intensity on polarization rotation in the magnetic field.	91
--	----

<i>Yu. A. Ropian, G. A. Tonoyan, L. P. Dadivanian, V. A. Vardanian</i> — X-ray study of the structural alteration of collagen filaments under the influence of direct magnetic field	152
--	-----

<i>G. M. Avakiantz</i> — About super-power transistors	157
--	-----

<i>G. A. Vardanian</i> — Solid mixtures in the external field.	164
--	-----

<i>T. I. Butaeva, A. A. Kaminskii, A. G. Petrosian, Kh. S. Bagdasarov</i> . Stimulated emission from Er^{3+} and Ho^{3+} doped $Lu_3Al_5O_{12}$ crystals at $300^{\circ}K$	232
--	-----

<i>G. G. Karabetian</i> — Radiation of undulator in the waveguide	239
---	-----

<i>G. M. Avakiantz</i> — S - type VC characteristics and current pinch - in in the collector junction of super-power transistors.	303
---	-----

ANALYTICAL CHEMISTRY

<i>V. M. Tarayan, F. V. Mirzoyan, Zh. V. Sarkissian</i> —On the peculiarities of extraction of perchlorate--ion basic dye of acridine orange	36
--	----

<i>V. M. Tarayan, F. V. Mirzoyan, Z. A. Karapetian</i> —About the photometric determination of phosphorus, arsenic and silicon with the basic dyes	168
--	-----

GEOLOGY

<i>A. T. Aslanian, A. I. Levtkin, A. V. Harutunian</i> About a possible mechanism of arising earthquakes	96
--	----

GEOPHYSICS

<i>Ch. G. Davtian</i> — Logical basis of determination changes algorithm of boundary velocity in direction of profile	173
---	-----

MINERALOGY

<i>R. G. Gevorkian, F. V. Kaminsky, B. S. Lunev, B. M. Osovetsky, N. D. Khachatryan</i> —New discoveries of diamonds in ultramafic rocks of Armenia	176
---	-----

TECTONICS

<i>A. A. Gabriellian, S. A. Pluzian, G. P. Simonian</i> — New scheme of seismic zoning of Armenia	182
---	-----

MICROBIOLOGY

<i>R. A. Zakharian, A. S. Agabalian, L. A. Chil-Hakobian, N. S. Gasparian, K. A. Bakunz, P. E. Tatevosian, E. G. Afrikan</i> — On the possible role of the extrachromosomal DNA in the biosynthesis of entomocide endotoxin of <i>Bac. thuringiensis</i>	42
--	----

<i>A. M. Dilanlan</i> — The active acidity in cultures of the causative agents of colenterites and of the banal <i>Escherichia coli</i> during the fermentation of different carbohydrates.	102
<i>B. T. Kataryan, G. G. Torgashova</i> — Spectrum and herbicide activity of 2,4-diacetylphloro- glucin	109

BIOPHYSICS

<i>A. A. Shahinian, L. A. Khanamiryan, H. M. Ayyuzian</i> — On the influence of macromolecule conformation and the type of dilute substance on the structure of mixtured aggregates, the models of lipid-protein complexes.	113
---	-----

VIROLOGY

<i>L. G. Tamrazian, A. E. Protsenko</i> — A new virus propagated on tobacco plantations in Armenia	48
--	----

PLANT PHYSIOLOGY

<i>V. O. Kasarian, I. A. Gevorkian</i> — On the quantitative change of nucleic acids in leaves of different root securing	52
---	----

<i>S. A. Marutian</i> — The lipoproteids of vines in connection with their frost resistance	58
---	----

PLANT PHYSIOLOGY

<i>S. A. Marutian</i> — Fermentative activity of the vine shoots under conditions of low temperatures.	119
--	-----

<i>M. Kh. Chailakhan, K. G. Azarian</i> — Reaction of short-day species to the treatment by growth regulators on the photoperiodic induction phone.	243
---	-----

ENTOMOLOGY

<i>S. M. Yablokoff-Khuzorian</i> — New species of anobiidae beetles from Darvaz	124
---	-----

<i>S. M. Yablokoff-Khuzorian</i> —New species of ladybeetles from China (Coleoptera, Coccinellidae)	250
---	-----

PATHOPHYSIOLOGY

<i>A. K. Kiandarian</i> — Pathogenetic mechanisms of renal complications of acute obstruction of magistral arteries of limbs	62
--	----

<i>A. K. Kiandarian</i> — Acute arterial obstruction; effective renal blood flow measurement	189
--	-----

