ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXIII, № 5

1976

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Журнал издается с 1944 года

СОДЕРЖАНИЕ

Индекс **77730**

CONTENTS

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 05062. Подписано к печати 15/III 1977 г. Тираж 550. Изд. 4563. Заказ 1000.
Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$. Печ. л. 4.0. Бум. л. 2.0. Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4.11.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян 24.
Эчмиадзинская типография Изд. АН Армянск й ССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 5

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

Г. А. Назарян

О классах сложности множеств булевых функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 29/IV 1976)

В статье рассматриваются вопросы реализации булевых функций в алгорифмических языках при ограничении на время работы алгорифмов, а также классы сложности множеств булевых функций.

1. Всюду далее орф есть сокращение для выражения „общерекурсивная функция", чрф — „частично рекурсивная функция", рпм — „рекурсивно перечислимое множество", н. ч.— „натуральное число", б. ф.— „булева функция".

Определим н. ч. как слова в алфавите {0, 1}, так же как в ([1]). Булевы функции и связанные с ними понятия, здесь не определяемые, будем понимать естественным образом, например как в ([2]), в частности б. ф. размерности n рассматривается как слово длины 2^n в алфавите {0, 1} (н. ч.). Через $l(x)$ будем обозначать длину н. ч. x, $d(A)$—мощность конечного множества A. Размерность б. ф. будем указывать верхним индексом. Посредством M_n будем обозначать множество б. ф. размерности n, принадлежащих множеству M. Буквой G будем обозначать класс всех б. ф. Буквы t, T, τ (возможно с индексами) будем использовать для обозначения одноместных орф, M—для множества б. ф., F, P—для б. ф., C, p—для н. ч.

Зафиксируем некоторую аддитивно оптимальную нумерацию ([3,4]) чрф φ. Для нумерации φ зафиксируем конструктивную последовательность сигнализирующих Φ, с последовательностью сигнализирующих Φ ассоциируем последовательность чрф $\hat{\Phi}$ такую, что $\forall i \forall n(\hat{\Phi}_i(n) = \max\limits_{l(x)=n} \Phi_i(x))$. Запись $\alpha \Longrightarrow F$ будем использовать как сокращение для „чрф α вычисляет б. ф. F". Через $K(F^n)$ и $K^t(F^n)$ будем обозначать соответственно $\min l(p)(\varphi_p \Longrightarrow F^n)$, $\min l(p)((\varphi_p \Longrightarrow F^n) \& \& (\hat{\Phi}_p(n) < t(n))$ и через L_M и L^t_M соответственно $\max\limits_{F^n \in M_n} K(F^n)$ и $\max\limits_{F^n \in M_n} K^t(F^n)$. Символы $\underset{\cdot}{>}$, $\underset{\cdot}{<}$ и $\asymp$ используются в следующем смысле: $a(n) \underset{\cdot}{>} b(n) \equiv \exists C \forall n(a(n) + C > b(n))$, $a(n) \underset{\cdot}{<} b(n) \equiv \exists C \forall n(a(n) < b(n) + C)$ и $a(n) \asymp b(n) \equiv a(n) \underset{\cdot}{>} b(n) \& a(n) \underset{\cdot}{<} b(n)$. Множество M б. ф. будем называть T-мощностным, если выполнено $\exists t(L^t_M \preceq L_M \preceq l(d(M_n)))$ (нетрудно убедиться, что если M рпм, то $L_M \preceq l(d(M_n))$. В дальнейшем рассматривая поведение произвольной сигнализирующей будем иногда для краткости называть ее „время вычислений" или просто „время", под „объемом программы" будем понимать индекс p нумерации φ.

2. Следующее довольно очевидное утверждение (2.1) показывает существование множеств, допускающих „ускорения" вычислений б. ф. им принадлежащим только при существенном увеличении объема программ их вычисляющих. Утверждение 2.2 иллюстрирует возможность обратной картины—существование множеств допускающих „ускорения" вычислений б. ф. им принадлежащих при незначительном увеличении объемов программ. В 2.1 и 2.2 M—рекурсивное множество.

2.1 $$\forall t \exists M \exists C \exists t_1((L^{t_1} < C) \;\&\; (L^t_M \geq 2^n)).$$

2.2 $$\exists t_0 \forall t_1 \exists M \exists C_1 \exists C_0 \exists t > t_1((L^t_M(n) \leq C_1) \;\&\; \forall \bar{t}|(\bar{L}^t_M(n) < C_1) \supset$$
$$\supset \forall^\infty_n(\bar{t}(n) > t_1(n))| \;\&\; \forall^\infty_n(L^{t_0}_M(n) < C_0)).$$

Множество б. ф. будем называть S—множеством, где S—некоторый класс орф, если характеристическая функция этого множества принадлежит S.

2.3. *Для всякого перечислимого класса S орф можно указать t такую, что для любого S-множества M выполнено $L^t_M \preceq L_M$.*

Нетрудно убедиться, что всякое рекурсивное множество является T-мощностным, т. е. $\exists t(L^t_M \preceq L_M \preceq ld(M_n))$ (это следует например из 2.3). Иначе „ведут" себя рпм. Как будет показано в дальнейшем для них функции Шеннона L и L^t могут существенно отличаться при любых t. Но сложность множества L^t_M определяется сложностью „сечений"—M_n. Одной из возможных характеристик сложности „сечений" является сложность их характеристических функций. Через χ_{M_n} будем обозначать характеристический вектор множества M_n—вектор $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2^{2^n}}$, i-ая буква которого равна 1 если F^n_i (i-ая б. ф. в лексикографической упорядоченности среди б. ф. размерности n) принадлежит M. Будем рассматривать условную сложность ([3]) $K^t(\chi_{M_n}|n) = \mu p|\varphi_p(n) = \chi_{M_n} \& \Phi_p(n) < t(n)|$. Как показывает следующее утверждение, ограниченность функции $K^t(\chi_{M_n}|n)$ при подходящей t является достаточным условием (но не необходимым—см. 2.6) для того, чтобы множество было T-мощностным.

2.4 $$\forall t_1 \exists t_2 \forall M|L^{t_2}_M(n) \leq 2K^{t_1}(\chi_{M_n}|n) + ld(M_n)|.$$

Как следует из 2.4, множество M, задаваемое схемой $\forall n(M_n = M^l_n$ если $!P_l(n))$ (где M^l ($l = 1, \cdots, k$)—некоторые рекурсивные множества, и P_i $(i=1, \cdot \cdot \cdot, k)$ — частично рекурсивные предикаты с непересекающимися областями определения), является T-мощностным, несмотря на то, что может быть не рекурсивным.

Введем некоторые определения. Множества M и M' будем называть аддитивно равномощными, если $l(d(M_n)) \asymp l(d(M'_n))$. Множество M будем называть (n, l) — восстанавливаемым, если $\exists t \exists C (K^t(\lambda_{M_n}| < n, ld(M_n) >) < C)$. Пусть D_x обозначает конечное множество н. ч. с каноническим номером x [5]. Орф g будем называть правильной, если для всех n и m $D_{g(n, m)}$ суть множества б. ф. и выполнено $(m_1 \leqslant m_2 \supset D_{g(n,m_1)} \subseteq D_{g(n,m_2)})$. Пусть α-орф, удовлетворяющая условию $\forall n(\alpha(n) \geqslant 2^{2^n})$. Правильную орф g будем называть функцией покрытия для M если $\forall n \neg \neg \exists m \leqslant \alpha(n)$ $[D_{g(n, m)} \supseteq M_n]$. Функция покрытия для M задает таким образом некоторый единый (по n) способ покрытия сечений M_n. Пусть g есть функция покрытия для M. Множество M' будем называть покрытием M по g если $\forall n (D_{g(n, m)} = M'_n)$, где m — наименьшее н. ч. такое, что $D_{g(n, m)} \supset M_n$. M' будем называть покрытием для M если M' есть покрытие M по некоторой орф g.

Следующее утверждение устанавливает некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы M было T-мощностным.

2.5 *Условия* (а), (б) *и* (в) *эквивалентны, для* M:

(а) M *является T-мощностным,*

(б) *существует аддитивно равномощное ему* (n, l)*-восстанавливаемое надмножество* M',

(в) *существует аддитивно равномощное ему покрытие* M'.

Используя 2.5 легко доказать следующее утверждение.

2.6. *Существует T-мощностное* M *такое, что* $\forall t \forall C$ $\neg (K^t(\lambda_{M_n}|n) < C)$.

Из 2.6 следует, что ограниченность $K^t(\lambda_{M_n}|n)$ не является необходимым условием для того, чтобы M было T-мощностным.

2.7. *Пусть* M' *есть покрытие для* M, *тогда* $\exists t (L^t_M(n) \leqslant ld(M_n))$.

2.8 *Если* M' *есть покрытие для рпм* M, *тогда* M' *также рпм.*

3. В этом пункте мы сформулируем некоторые свойства множеств, очевидным образом обуславливающие скачок оценок при ограничении на время вычислений и покажем существование множеств, для которых L и L^t существенно отличаются при любых t.

Под частично рекурсивной последовательностью (чрп) б. ф. будем понимать множество значений чрф ψ, удовлетворяющей условию $!\psi(n) \supset (\psi(n)$ есть б. ф. размерности $n)$. Множество M будем называть предельным, если любая чрп S б. ф. почти содержится в M, т. е. множество $S - M$ не бесконечно.

3.1 M *предельно* $\Longleftrightarrow \min\limits_{F^n \in \overline{M}} K(F^n) \to \infty$.

На множества б. ф. естественным образом могут быть распространены понятия простоты и имунности [5].

3.2. *Если рпм* M *предельно, либо выполнено* $\min\limits_{F^n \in \overline{M}} K(F^n) \to \infty$, *то*

$\forall t(L^t_M(n) > 2^n)$ *и* M *просто (а, следовательно,* $\overline{M}$*-иммунно).*

3.3 *Для любой неограниченной, неубывающей орф* g *можно указать простое множество* M *такое, что* $\forall t(L^t_M(n) \gtrsim 2^n)$ *и* $L_M(n) \leqslant \leqslant g(n)$.

В качестве искомого в 3.3 может быть выбрано множество M, удовлетворяющее условию: $\forall n(M_n = \{F^n | K(F^n) < (g(n))\})$. Условия для M выполнены в силу его предельности, либо того, что $\min\limits_{F^n \in \overline{M}} K(F) \to \to \infty$. Орф γ будем называть мажорантой сложности для M если $\exists t(L^t_M(n) \leqslant \gamma(n))$. Довольно очевидно, что если M имеет имунное дополнение и γ есть мажоранта сложности для M, то множество $\{n | \gamma(n) < 2^n\}$ не бесконечно, с другой стороны, из факта существования сколь угодно „редких“ простых множеств следует — существует простое M такое, что $\exists t \exists C \forall n \neg \neg \exists m(L^t_M(m) < C)$. Таким образом мажоранты сложности в свою очередь могут отличаться от L^t.

3.4. *Пусть рпм* M *и орф* α *удовлетворяют условию* — $\forall n(d(M_n) < < \alpha(n))$ *и множество* $\{n | d(M_n) = \alpha(n)\}$ *не конечно. Тогда можно указать орф* t *и последовательность н. ч.* n_i *такие, что* $L^t_M(n_i) \lesssim L_M(n_i)$.

Функция α в условии 3.4 может быть выбрана равной константе C, тогда из 3.4 следует: (а) утверждение 3.3 не может быть усилено до такого — „$\exists M((L_M(n) < C)$ & $\forall t(L^t_M(n) \gtrsim 2^n))$“, или иначе функция g в условии 3.3 не может быть константной, (б) из 3.4 вкупе с тем, что если M просто, и γ есть мажоранта сложности для M, то $\forall^\infty_n(\gamma(n) \geqslant 2^n)$ следует, что параллельно с фактом существования сколь угодно „редких“ простых множеств они обладают следующим любопытным свойством — (M — просто $\supset \neg \exists C(d(M_n) < C)$.

4. Здесь мы сформулируем некоторые факты, относящиеся к сложности разрешения рпм н. ч. (ср. ([6–8])), которые представляют самостоятельный интерес, и которые позволят как следствия из них сформулировать факты о булевых функциях.

Букву П будем использовать в качестве переменной для рпм н. ч. Под сложностью разрешения (t разрешения) n-куска рпм П будем понимать $l(\min p)$, где min берется по всем p таким, что $\forall x(l(x) \leqslant n \supset (!\varphi_p(x)$ & $(x \in П \Longleftrightarrow \varphi_p(x) = 0)))$, $(\forall x(l(x) \leqslant n \supset (!\varphi_p(x)$ & $x \in П \Longleftrightarrow \varphi_p(x) = 0$ & $\Phi_p(x) < t(l(x)))$. Сложности разрешения и t разрешения n-куска рпм П будем обозначать соответственно через $K(П, n)$ и $K(П, n, t)$. Пусть $П_n$ есть множество н. ч. длины n из П и $\lambda_{П_n}$ как и в случае множеств б. ф. обозначает характеристический вектор $П_n$. Следующие соотношения легко проверяются

4.1. (а) $\forall П(K(\lambda_{П_n} | n) \lesssim K(П, n))$,

(б) $\forall t_1 \exists t_2 \forall П(K^{t_2}(\lambda_{П_n} | n) \lesssim K^{t_1}(П, n, t_1))$,

(в) $K(\lambda_{П_n} | n) \lesssim l_d(П_n)$.

Пусть β—орф. П будем называть β-редким, если $\forall n(d|x|l(x)\leqslant \leqslant n \;\&\; x\in П|\leqslant\beta(n))$. Орф g будем называть верхней оценкой сложности разрешения (сложности t разрешения) рпм П ([8]), если выполнено $K(П, n)\leqslant g(n)$, $K(П, n, t)\leqslant g(n))$.

4.2. *Для любой монотонной неограниченной орф g, такой, что $\forall n(g(n)<n)$ можно указать неограниченную монотонную орф β такую, что g является верхней оценкой сложности разрешения любого β-редкого рпм.*

Из 2.4 и 4.1 (б) легко следует

4.3. (а) *Пусть П— простое множество. Для любой орф t, для любой верхней оценки сложности t разрешения выполнено:*
$g(n)\geq \dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{2}l(d(П_n))$.

(б) *Для любой монотонной неограниченной β можно указать β-редкое рпм П такое, что $\forall t(K^t(\iota_{П_n}|n)\geqslant n/2-\beta(n)/2$.*

Из 4.1—4.3 а также факта существования сколь угодно редких простых множеств следует, что верхние оценки разрешения и ограниченного разрешения рпм могут существенно отличаться. Из этих утверждений также следует

4.4. *Пусть g-неограниченная, неубывающая орф. Существует псевдопоследовательность* ([1,9]) *б. ф. F^n_n такая, что*

$$\text{(а)}\quad K(F^n_n)\leqslant g(n) \quad \text{и} \quad \text{(б)}\,\forall t\left(K^t(F^n_n)\geq \frac{n}{2}-\frac{g(n)}{2}\right).$$

В качестве искомой псевдопоследовательности может быть выбрана $\lambda_{П_n}$ некоторого достаточно редкого простого множества. Таким образом в классе псевдопоследовательностей б. ф. описуемы „естественные" псевдопоследовательности для которых $K(F^n_n)$ и $K^t(F^n_n)$ существенно отличаются при любых t.

5. Под классом сложности R_t множеств б. ф. будем понимать класс таких рпм M, для которых выполнено $L_M \precsim L^t_M$. Многие факты, относящиеся к классам сложности чрф ([10]) легко переносятся на классы сложности множеств б. ф. Так, существует равномерная процедура получения нового класса сложности, строго включающего R_t по сигнализирующей для t (5.1), в то же время из аналога теоремы о пробелах (5.2) следует невозможность такой процедуры, равномерной относительно самой t.

5.1. *Существует орф H такая, что для любого i если φ_i есть орф, то $R_{H(n,\Phi_i(n))}\supset R_{\varphi_i}$.*

5.2. *Для любых орф f и T существует орф $t>T$ такая, что $R_t=R_{f(t)}$.*

Из 5.2 следует

5.3. *Не существует орф s такой, что для любой орф t $R_{s(t)}\supset R_t$.*

Дальше в этом пункте мы будем интересоваться вопросами представимости классов сложности (ср.([11,12])). Пусть фиксировано взаимнооднозначное соответствие между множеством н. ч. и б. ф. Н. ч., соответствующее б. ф. в этом соответствии будем называть ее кодом. Через $\bar{A}$ будем обозначать множество б. ф., для которого A есть множество кодов. Пусть w_i есть множество определенности φ_i. Множество н. ч. s будем называть представлением класса R_t множеств б. ф., если $R_t = \{\bar{w}_i | i \in s\}$. Будем говорить, что класс R_t рекурсивно представим, если существует рекурсивное представление класса R_t.

5.4. *Класс R_t рекурсивно представим для любой орф t.*

Через ΩR_t будем обозначать индексное множество класса R_t, определяемое как $\{i | \bar{w}_i \in R_t\}$. Будем пользоваться обычными обозначениями „$\leq_T$" и „$\leq_1$" для сводимостей по Тьюрингу и 1—1 сводимости, $\sum_n$ и Π_n для уровней иерархии Клини-Мостовского ([5]). Нам потребуются следующие „эталонные" множества — $\mathrm{Equal} = \{\langle i, j \rangle | \varphi_i = \varphi_j\}$ и $\mathrm{Cofinite} = \{i | w_i$ кофинитно$\}$. Известно, что эти множества являются соответственно Π_2-полным и $\sum_3$-полным. Через R будем обозначать класс всех рпм н. ч.

Доказательство 5.7 следует плану доказательства аналогичного факта, формулируемого для классов сложности чрф ([12]).

5.5. (Робертсон ([12])) *Для любой орф t, если класс $R - R_t$ имеет $\Pi_3 \cap \sum_3$ представление, то $\Omega R_t \leq_T \mathrm{Equal}$.*

5.6. $\exists \tau \forall t > \tau [\mathrm{Cofinite} \leq_1 \Omega R_t]$.

5.7. *Существует орф τ такая, что для всех $t > \tau$ неверно, что класс $R - R_t$ имеет $\Pi_3 \cap \Sigma_3$ представление.*

5.8 *Существует орф τ такая, что для всех $t > \tau$ ΩR_t $\sum_3$-полно.*

Пользуюсь случаем выразить благодарность И. Д. Заславскому за постоянное внимание к работе и ряд существенных замечаний.

Вычислительный центр
Министерства автомобильного транспорта
Армянской ССР

Հ. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Բուլյան ֆունկցիաների բազմությունների բարդության դասերի մասին

Դիտարկվում են բուլյան ֆունկցիաների բազմությունների բարդությունները բնորոշող Շեննոնի ֆունկցիաներն այն պայմաններում, երբ ուսումնասիրվող ալգորիթմների աշխատանքի ժամանակը սահմանափակվում է ընդհանուր ռեկուրսիվ ֆունկցիաներով։ Հաստատվում են որոշ անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի նշված Շեննոնի ֆունկցիաներն ունենան հզորական գնահատականներ։ Ցույց է տրվում, որ գոյություն ունեն այնպիսի

բազմություններ, որոնց համար Շեննոնի ֆունկցիաների գնահատականները էապես տարբերվում են, երբ դիտարկվում են ալգորիթմները սահմանափակումների առկայության և բացակայության դեպքերում։ Դիտարկվում են բուլյան ֆունկցիաների բազմությունների բարդության դասերը և այդ դասերի դասակարգումները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. К. Звонкин, Л. А. Левин*, УМН, т. 25, вып. 2(1970), 85—127. [2] *Г. А. Назарян*, ДАН АрмССР, том V, 3 (1972), 129—133. [3] *А. Н. Колмогоров*, Проблемы передачи информации I, 1(1965). [4] *Н. Д. Заславский*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 16, 65—76, (1969). [5] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, изд. «Мир», М., 1972. [6] *Я. М. Бардзинь*, ДАН СССР, 182, 1249—1255 (1968). [7] *Н. В. Петри*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 16, 165—174, (1969). [8] *М. И. Канович*, Исследования по теории алгоритмов и математической логике. ВЦ АН СССР, 3—42, М., 1973. [9] *М. Г. Гельфонд*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 16, 20—28, (1969). [10] *Д. Хартманис, Д. Э. Хопкрофт*, Киб. сборник (новая серия) вып. 11, 131—176, М., 1974. [11] *L. H. Landweber, E. L. Robertson*, JACM, v. 19, № 2, 296—309 (1972). [12] *E. L. Robertson*, JCSS, №1, 69—87, 9 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIII 1976 5

УДК 519.45 : 539.3

МАТЕМАТИКА

М. Л. Бурышкин

О регулярном представлении пространственной группы симметрии в усеченном случае

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 12/V 1976)

В работе ([1]) рассматривалась задача о разложении вектор-функций $p_{\nu\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu$), заданных на области Ω^* с конечной группой H^* симметрии и преобразующихся по неприводимому представлению τ_ν подгруппы $H \subset H^*$. Естественно поставить аналогичную задачу для вектор-функций $p_{k\nu\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \cdots, m_{k\nu}$), область определения которых обладает пространственной группой G^* симметрии и которые преобразуются по $m_{k\nu}$-мерному неприводимому представлению $\tau_{k\nu}$ со звездой $\{k\}$ подгруппы $G \subset G^*$. Для механических приложений характерно, что числа основных векторов подгрупп G_t^* и G_t трансляций групп G^* и G одинаковы и, следовательно, соответствующее регулярное представление группы G^*—конечномерно. Указанный тип регулярного представления, как и в ([1]), будет называться усеченным. Нетрудно указать на два более частных случая: точечно-усеченный, при котором $G_t = G_t^*$, а точечная подгруппа $H \subset G$ является подгруппой по отношению к точечной подгруппе $H^* \subset G$, и трансляционно-усеченный, при котором $H = H^*$, а $G_t \subset G_t^*$.

В данной работе исследуются разложения вектор—функций $p_{k\nu\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \cdots, m_{k\nu}$), заданных на области Ω^*, в точечно-усеченном случае и намечается путь решения такой задачи в общем случае усечения. При этом вид группы G^* симметрии области Ω^* ограничивается следующим условием:

$$g^* = t_a h^* \qquad \forall g^* \in G^*, \tag{1}$$

где $t_a^* \in G_t^*$—трансляция на некоторый вектор a; $h^* \in H^*$.

Группа H^* разбивается на $\varkappa$ левых смежных классов относительно своей подгруппы H. Пусть h_t^* $(t=1, 2, \cdots, \varkappa)$ — элементы группы H^*, порождающие эти смежные классы, а $h^{(1)*}$ — единичный элемент. Тогда согласно условию (1) пространство L, натянутое на вектор-функции $h^{(t)*}p_{k_\nu,\varphi}$ $(t=1, 2, \cdots, \varkappa;\ \nu=1, 2, \cdots, \varkappa;\ \varphi=1, 2, \cdots, m_{k_\nu})$ инвариантно относительно всех элементов группы G^* и, следовательно, преобразуется по ее регулярному представлению T.

Среди линейных комбинаций вектор-функций $p_{k,\varphi}$ $(\varphi=1, 2, ..., m_k)$ найдется m_τ линейно-независимых вектор-функций $p_k^{(s)}$ $(s=1, 2, \cdots m_\tau)$, которые под действием трансляций из G_t преобразуются в соответствии с вектором k (m_τ — размерность неприводимого представления τ_ν группы этого вектора). Известно, что под действием трансляций вектор-функция $h^{(t)*}p_k^{(s)}$ $(s=1, 2, \cdots, m_\tau;\ t=1, 2, \cdots, \varkappa)$ преобразуется по вектору $h^{(t)*}k$ ([3]). В связи с этим, так как звезда $\{k\}$ неприводима, а $H\subset H^*$, очевидна

Теорема 1. *В точечно-усеченном случае звездой регулярного представления группы G^* является неприводимая относительно этой группы звезда $\{k\}^*$.*

Соответствующая группе H^* точечная группа H_k^* вектора k, вообще говоря, отлична от группы H_k. Без нарушения общности дальнейшего изложения можно полагать, что $h^{(t)*}\in H_k^*$ $(t=1, 2, ..., \varkappa_k)$, где $\varkappa_k\leqslant\varkappa$, причем смежные классы $h^{(t)*}H$ $(\varkappa\geqslant t>\varkappa_k)$ не содержат элементов группы H_k^*. Легко заметить, что смежные относительно подгруппы $H_k\subset H^*$ классы $h^{(t)*}H_k$ $(t=1, 2, ..., \varkappa_k)$ в совокупности образуют группу H_k^*. Действительно, если элемент $h\in H_k$, то $h^{(t)*}h\in H_k^*$ $(t=1, 2, ..., \varkappa_k)$, и напротив, если $h\in H/H_k$, то $h^{(t)*}h\overline{\in} H_k^*$ $(t=1, 2, ..., \varkappa_k)$, так как иначе $h^{-1}(h^{(t)*})^{-1}k=k$ и $h^{-1}\in H_k$, что невозможно.

Через L_k обозначается подпространство пространства L, натянутое на все вектор-функции из L, которые преобразуются под действием трансляций группы G_t соответственно вектору k.

Лемма. *Подпространство L_k порождается функциями $h^{(t)*}p_k^{(s)}$ $(t=1, 2, ..., \varkappa_k;\ s=1, 2, ..., m_\tau)$.*

В связи с вышесказанным, очевидно, что $h^{(t)*}p_k^{(s)}\in L_k$ $(t=1, 2, ..., \varkappa_k;\ s=1, 2, ..., m_\tau)$. С другой стороны, $h^{(t)*}p_{k_1}^{(s)}\overline{\in} L_k$ $(t=1, 2, ..., \varkappa;\ s=1, 2, ..., m_\tau)$ при $k_1\neq k$ и $h^{(t)*}p_k^{(s)}\overline{\in} L_k$ $(t=\varkappa_k+1, \varkappa_k+2, ..., \varkappa)$; Последние утверждения легко доказываются от противного. В самом деле, если $k_1\neq k$, то $h^{(t)*}k_1\neq k$, так как иначе в силу неприводимости звезды $\{k\}$ найдется элемент $h\in H/H_k$, для которого $hk=k_1$, и тогда $h^{(t)*}hk=k$, т. е. $h^{(t)*}h\in H_k^*$ и $h\in H_k$. Если же $h^{(t)*}k=k$ $(t=\varkappa_k+1, \varkappa_k+2, ..., \varkappa)$ то $h^{(t)*}\in H_k^*$.

Следует подчеркнуть, что все эквивалентные векторы из зоны Бриллуэна имеют в данной работе одинаковые обозначения.

Согласно теории представлений пространственных групп ([3]) $k\mu$-е неприводимое представление группы G^* встречается в представлении T $l^*_{k\mu}$ раз, причем $l^*_{k\mu}$ — число раз, которое μ-е неприводимое представление τ^*_{μ} точечной группы H^*_k входит в представление T_k этой группы, индуцируемое в подпространство L_k редуцированным относительно подгруппы $H^*_k \subset G^*$ представлением T.

Представление T_k точечной группы H^*_k является несомненно регулярным. В соответствии с приведенной выше леммой его следует рассматривать как усеченное относительно подгруппы $H_k \subset H^*_k$. Это позволяет использовать здесь результаты из ([1]). Так удается установить, что

$$c^*_{k\mu} = \frac{1}{m_{Hk}} \sum_{h_k \in H_k} \chi_{\nu}(h_k^{-1}) \overline{\chi_{\mu}(h_k)}, \tag{2}$$

где $\chi_{\nu}(h_k)$ и $\chi^*_{\mu}(h_k)$ — значения характеров неприводимых представлений τ_{ν} и τ^*_{μ} точечных групп H_k и H^*_k на элементе $h_k \in H_k \subset H^*_k$. Кроме того, оказывается, что в подпространстве $L^{(r)}_{k\mu} \subset L (r = 1, 2, \ldots, l^*_{k\mu})$, преобразующемся по представлению $\tau^*_{k\mu}$, существует стандартный относительно представления $\tau_{k\nu}$ базис, в котором матрицы $\hat{\tau}^*_{k\mu}(g)$ операторов $\tau^*_{k\mu}(g)$ $(g \in H)$ квазидиагональны и состоят из $l^*_{k\mu}+1$ блоков, причем первые $l^*_{k\mu}$ блоков равны матрице $\hat{\tau}_{k\nu}(g)$, а представление группы G, порожденное последними блоками, не содержит представления $\tau_{k\nu}$. В связи с этим аналогию с работой ([1]) можно продолжить, если для матричных элементов неприводимых представлений $\tau_{k\nu}$, $\tau^*_{k\mu}$, представления T и для их характеров ввести функционал усреднения ([3]). Используя ограниченность указанных элементов и характеров можно, следуя работам ([1,2]), показать, что справедлива

Теорема 2. *В точечно-усеченном случае имеет место следующее разложение*

$$p_{k\nu\rho} = \sum_{\mu} \sum_{r=1}^{l^*_{k\mu}} p_{k\mu,(r-1)m_{k\nu}+\rho,r} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}), \tag{3}$$

где индекс μ при суммировании пробегает номера всех неприводимых представлений $\tau^*_{k\mu}$ со звездой $\{k\}$, входящих в соответствии с формулой (2) *в регулярное представление T группы G^*; вектор-функции $p^*_{k\mu\rho r}$ $(\rho = 1, 2, \ldots, m^*_{k\mu})$, образующие базис подпространства $L^{(r)}_{k\mu} \subset L$ $(r = 1, 2, \ldots, l^*_{\mu})$, определяются из выражения*

$$p^*_{k\mu\rho r} = \frac{m^*_{k\mu}}{m_{k\nu}\varkappa} \sum_{\sigma=1}^{m_\nu} \sum_{l=1}^{\varkappa} \tau_{k\mu\rho,(r-1)m_{k\nu}+\sigma} (h^{(l)*}) h^{(l)*} p_{k\nu\sigma}; \tag{4}$$

а $\tau_{k\mu pf}(g^*)$ ($p, f = 1, 2, \ldots, m^*_{k\mu}$) — *pf-ый элемент матрицы* $\tau^*_{k\mu}(g^*)$, *записанной в стандартном относительно представления* τ_k *базисе.*

Пример. На рис. 1 изображена часть бесконечной дискретной области Ω^*, состоящей из точек x_i ($i = 1, 2, \ldots$) и обладающей группой $C^{(1)}_{6v}$ симметрии ([3]) (основные векторы a_1 и a_2 подгруппы G_t указаны на рисунке, вектор $a_3=0$). Там же приведено расположение плоскостей отражений $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6$ и положительное направление поворотов C_α на угол α. Заданную на области Ω^* скалярную функцию можно представлять бесконечно-мерным вектором $p = \{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots\}$, где $p^{(i)}$ ($i=1, 2, \ldots,$) — значение функции p в точке x_i. Через b_j ($j = 1, 2$) обозначаются основные векторы обратной решетки.

На области Ω^* определена преобразующаяся по неприводимому представлению $\tau_{1/2b_1,2}$ группы $C^{(1)}_{s}$ (основными являются векторы a_1 и a_2; подгруппа $H = \sigma$ состоит из отражения σ_6 и единичного элемента e) функция $p_{1/2b_1,2,1} = \{-1; -4; 0; 2; 3; 4; -4; -3; -2; 0; 4; 1; 1; 4; 0; -2; -3; -4; 4; 3; 2; 0; -4; -1; -1; -4; 0; 2; 3; 4; -4; -3; -2; 0; 4; 1 \cdot \cdot \cdot\}$. Легко видеть, что $H^* = C_{6v}$, $\varkappa = 6$, $m_{1/2b_1,2} = 1$, $H_{1/2b_1} = \sigma$, $H^*_{1/2b_1} = C_{2v}$ (группа C_{2v} включает в себя отражения σ_6 и σ_3, e и C_{180}), $\varkappa_{1/2b_1} = 2$. В качестве элементов $g^{(t)*}$ ($t = 1, 2, \ldots, 6$) можно выбрать повороты $e, C_{60}, C_{120}, \ldots, C_{300}$. Из формулы (2) следует, что $l^*_{1/2b_1,1} = l^*_{1/2b_1,4} = 0$, а $l^*_{1/2b_1,2} = l^*_{1/2b_1,3} = 1$ (номера неприводимых представлений точечных групп даются в обозначениях работы ([3]). На основании теоремы 2

$$p_{1/2b_1,2,1} = p^*_{1/2b_1,2,1,1} + p^*_{1/2b_1,3,1,1}.$$

Матрицы $\hat{\tau}^*_{1/2b_1,\mu}(h^*)$ ($\mu = 2, 3$) в стандартном относительно представления $\tau_{1/2b_1,2}$ базисе записываются в виде:

$$\hat{\tau}^*_{1/2b_1,2}(t_{a_1}) = \hat{\tau}^*_{1/2b_1,3}(t_{a_1}) = \begin{pmatrix} -1; & 0; & 0 \\ 0; & -1; & 0 \\ 0; & 0; & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{\tau}^*_{1/2b_1,2}(t_{a_2}) = \hat{\tau}^*_{1/2b_1,3}(t_{a_2}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0 \\ 0; & -1; & 0 \\ 0; & 0; & -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{\tau}^*_{1/2b_1,2}(C_{60}) = \begin{pmatrix} 0; & 0; & -1 \\ 1; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\tau}^*_{1/2b_1,2}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0; & -1; & 0 \\ -1; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\tau}^*_{1/2b_1,3}(C_{60}) = \begin{pmatrix} 0; & 0; & 1 \\ 1; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\tau}^*_{1/2b_1,3}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0; & -1; & 0 \\ -1; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & -1 \end{pmatrix}.$$

Базисы неприводимых подпространств $L^{(1)}_{1/2b_1,2}$ и $L^{(1)}_{1/2b_1,3}$ строятся согласно формуле (4). В частности,

$$p^*_{1/2b_1,2,1,1} = \frac{1}{2}(p_{1/2b_1,2,1} - C_{180}p_{1/2b_1,2,1}) = \frac{1}{2}\{3; -1; 2; 2; -1; 3; -3; 1;$$

$-2;\ -2;\ 1;\ -3;\ -3;\ 1;\ -2;\ -2;\ 1;\ \ -3;\ \ 3;\ -1;\ 2;\ 2;\ -1;\ 3;\ 3;\ -1;$ $2;\ 2;\ -1;\ 3;\ -3;\ 1;\ -2;\ -2;\ 1;\ -3;\cdot\cdot\cdot\},\ p^*_{1/2b_1,2.2.1} = \frac{1}{2}(C_{60}\, p_{1/2b_1,2.1} -$ $- C_{240}\, p_{1/2b_1,2.1}) = \frac{1}{2}\{1;\ -3;\ 3;\ -1;\ 2;\ 2;\ -1;\ 3;\ -3;\ 1;\ -2;\ -2;\ -1;\ 3;$ $-3;\ 1;\ -2;\ -2;\ 1;\ -3;\ 3;\ -1;\ 2;\ 2;\ -1;\ 3;\ -3;\ 1;\ -2;\ -2;\ 1;\ -3;\ 3;$

$$-1;\ 2;\ 2;\cdot\cdot\cdot\},\ p^*_{1/2b_1,3.1,1} = \frac{1}{2}(p_{1/2b_1,2.1} + C_{180}\, p_{1/2b_1,2.1})$$

и т. д.

Этот простой пример достаточно полно иллюстрирует результаты исследования, проведенного для точечно-усеченного случая.

Что же касается общего случая усечения регулярного представления пространственной группы, то он характеризуется тем, что подгруппы H и G_l группы H являются нетривиальными подгруппами по отношению соответственно к группам H^* и G_l^*.

Через G' обозначается пространственная группа, состоящая из элементов подгрупп H^* и G_l и их всевозможных произведений. Легко видеть, что задачу о разложении вектор-функций $P_{k\cdot\varphi}(\varphi = 1,2,\ldots,$ $m_{k\cdot}$) и порожденного ими регулярного представления в общем случае усечения можно решать последовательно, используя только результаты для точечно- и трансляционно-усеченного случаев. В самом деле, выбирая в качестве группы симметрии области Ω^* группу G', нетрудно с помощью формулы (2) и теоремы 2 разложить пространство L на подпространства, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы G'. Базисные функции этих подпространств заданы на области с группой G^* симметрии, вследствие чего порожденное ими регулярное представление является трансляционно-усеченным.

Одесский инженерно-строительный институт

Մ. Լ. ԲՈՒՐՈՒՇԿԻՆ

Հատած դեպքում սիմետրիայի տարածական խմբի ռեգուլյար ներկայացման մասին

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է սիմետրիայի G^* խմբով օժտված Ω^* տիրույթում որոշված, $G\subset G^*$ կետային-հատած ենթախմբի $\tau_{k\cdot}$ ($m_{k\cdot}$ չափի) չբերվող ներկայացումով ձևափոխվող $p_{k\cdot\varphi}$ ($\varphi=1, 2, \ldots, m_{k\cdot}$) վեկտոր-ֆունկցիայի վերլուծությունը։ Տեքստն էապես հենվում է ([1]) աշխատանքի արդյունքների վրա։

Ընտրված դեպքում G^* խմբի ռեգուլյար ներկայացման վերջնական ստրուկտուրան բերված է թեորեմ 1-ում և (2) բանաձևում։

Թեորեմ 2—ում ապացուցվում է, որ $P_{k\varphi}$ վեկտոր—ֆունկցիան բավարարում է (3) վերլուծությանը, ընդ որում (3)—ում G^* խմբի $\tau^*_{k_1}$ չբերվող ներկայացումներով ձևափոխվող կոմպոնենտները գտնվում են (4) առնչությունից։ Բերված ուսումնասիրությունը լուսաբանվում է թվային օրինակով։ Որպես առաջնային, վերցված է դիսկրետ տիրույթում տրված (նկ. 1), $G^{(1)}_{2v}$ սիմետրիայի խմբով և $C_s^{(3)} \subset C_{2v}^{(1)}$ խմբի $\tau_{1/2b_1, 2}$ ներկայացումով ձևափոխվող սկալյար վեկտոր—ֆունկցիան։

Ստացված արդյունքները կարող են էֆեկտիվ կիրառվել մեխանիկայի կիսայրին-հատված սիմետրիայով օժտված խնդիրներում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Л. Бурышкин*, ДАН АрмССР, т. LXIII, № 4 (1976). [2] *И. Г. Каплан*, Симметрия многоэлектронных систем, Изд. «Наука», М., 1969. [3] *Г. Я. Любарский*, Теория групп и ее применение в физике, ГИФМЛ, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 5

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Г. А. Попов

О безграничной делимости времени ожидания в системе $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ с абсолютным приоритетом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 24/VI 1976)

В настоящем сообщении доказывается безграничная делимость (б. д.) стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания вызовов i-го потока (i-вызовов) в системе $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ с разновидностями абсолютного приоритета.

Потоки вызовов $L_1, \ldots, L_r$ независимые и пуассоновские. Параметр потока L_i есть $a_i > 0$. Длительность времени обслуживания i-вызова есть случайная величина (сл. в.) с функцией распределения (ф. р.) $B_i(t)$, $B_i(0) = 0$.

Промежутки между соседними поступлениями и длительности обслуживания вызовов в совокупности независимы.

Вызовы потока L_i имеют абсолютный приоритет перед вызовами потока L_j при $i < j$. Рассматриваются разновидности таких систем: а) с дообслуживанием прерванного вызова; б) потерей; в) обслуживанием заново.

Пусть $W_i(t)$ — стационарное распределение времени ожидания i — вызовом начала обслуживания. Положим:

$$\omega_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\, W_i(t), \quad \sigma_i = a_1 + \ldots + a_i.$$

Число ρ_{i1} — загрузка системы вызовами потоков $L_1, \ldots, L_i$.

Обозначим через $\Pi_i(t)$ ф. р. периода занятости (i — периода) обслуживанием вызовов потоков $L_1 \ldots, L_i$, через $\Pi_{ij}(t)$ — ф. р. i — периода, начавшегося с обслуживания j — вызова ($j = \overline{1, i}$); через $H_i(t)$ — ф. р. промежутка, начинающегося с первого поступления на прибор i — вызова и кончающегося первым последующим моментом освобождения системы от этого i-вызова и вызовов потоков $L_1, \ldots, L_{i-1}$.

Наконец, обозначим $\overline{\Pi}_i(t) = 1 - \Pi_i(t)$, $\overline{H}_i(t) = 1 - H_i(t)$.

1°. Пусть порядок обслуживания k — вызовов прямой.

Теорема 1 а) $\omega_k(s)$ *есть преобразование Лапласа-Стильтьеса (п. Л. — С) б. д. сл. в..*
б) *Каноническое представление для* $\omega_k(s)$ *имеет вид*

$$\omega_k(s) = \exp\left\{-\int_0^\infty x^{-1}(1-e^{-sx})\,\Lambda_k(\mathrm{d}x)\right\}, \tag{1}$$

где мера Λ_k *при* $\rho_{k-11} < \dfrac{1}{2}$ *равна*

$$\Lambda_k((-\infty,t]) = G_k(t) + \sigma_{k-1}\,\tilde{\tilde{\Pi}}_{k-1}(t) * \sum_{n\geq 0}(-\sigma_{k-1})^n\left[\tilde{\Pi}_{k-1}(t)\right]^n_* \tag{2}$$

а при $\rho_{k-11} > \dfrac{1}{2}$

$$\Lambda_k((-\infty,t]) = G_k(t) + \pi_{k-11}^{-1}\,\tilde{\tilde{\Pi}}_{k-1}(t) * \sum_{n\geq 0}\alpha_{kn}(t). \tag{3}$$

Здесь $*$ — *знак свертки, и обозначено*

$$G_k(t) = a_k\tilde{\tilde{H}}_k(t) * \sum_{n>0} a_k^n\left[\tilde{H}_k(t)\right]^n_*,\quad \tilde{H}_k(t) = \int_0^t \overline{H}_k(u)\mathrm{d}u,$$

$$\tilde{\tilde{H}}_k(t) = \int_0^t u\overline{H}_k(u)\mathrm{d}u,\quad \tilde{\Pi}_{k-1}(t) = \int_0^t \overline{\Pi}_{k-1}(u)\mathrm{d}u,\quad \tilde{\tilde{\Pi}}_{k-1}(t) = \int_0^t u\overline{\Pi}_{k-1}(u)\mathrm{d}u,$$

$\chi(t)$ — *функция Хевисайда,* $\alpha_{kn}(t) = [\pi_{k-11}^{-1}\tilde{\Pi}_{k-1}(t) - (1-\rho_{k-11})^{-1}\chi(t)]^n_*$.
Доказательство. Введем п. Л. — С.

$$\pi_k(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\,\Pi_k(t),\quad \pi_{ki}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\,\Pi_{ki}(t),\quad h_k(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}H_k(t).$$

Известно ([1])

$$\omega_k(s) = \frac{(1-\rho_{k1})\cdot\mu_k(s)}{s-a_k+a_kh_k(s)},\quad h_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\,B_1(t),$$

$$\pi_{kk}(s) = h_k(y_k),\quad a_k\pi_k(s) = \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(y_k) + a_k\pi_{kk}(s), \tag{4}$$

где

$$\mu_k(s) = s+\sigma_{k-1}-\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s),\quad y_k = s+a_k-a_k\pi_{kk}(s).$$

Конкретный вид функций $h_k(s)$, приведенный в ([1]), нам не понадобится.

Заметим, что $P(z) = (1-\rho)(1-\rho z)^{-1}$, $0<\rho<1$, есть производящая функция геометрического распределения, которое б. д.. Но так как $0 \leq a_k h_{k1} = -a_k h_k'(0) < 1$ (см. ([1])) и

$$\gamma_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} (sh_{k1})^{-1}(1-h_k(s)) = h_{k1}^{-1}\int_0^\infty e^{-st}\overline{H}_k(t)\,\mathrm{d}t$$

является п. Л. — С. неотрицательной сл. в., то на основании ([2]), стр. 532, зад. 17 $P(\gamma_k(s)) = (1-a_k h_{k1})(1-a_k h_{k1}\gamma_k(s))^{-1}$ есть п. Л. — С. некоторой неотрицательной б. д. сл. в..

Теперь рассмотрим функцию

$$\varphi_k(s) = [(1-\rho_{k1})/(1-a_k h_{k1})]\cdot[\mu_k(s)/s] \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}_k[\mu_k(s)/s].$$

Покажем, что $\varphi_k(s)$ есть п. Л. — С. некоторой б. д. сл. в. Утверждение будем доказывать методом математической индукции по k. Вследствие $\mu_1(s) = s$ основание индукции очевидно. Из формул (4) имеем

$$\mathrm{d}_{n+1}\frac{\mu_{n+1}(s)}{s} = \mathrm{d}_{n+1}\frac{y_n + a_{n-1} - a_{n-1}\pi_{n-1}(y_n)}{y_n}\cdot\frac{y_n}{s} =$$

$$= \mathrm{d}_n\frac{\mu_n(y_n)}{y_n}\cdot\frac{\mathrm{d}_{n+1}}{\mathrm{d}_n}\cdot\frac{y_n}{s} \tag{5}$$

По предположению индукции $\mathrm{d}_n\dfrac{\mu_n(s)}{s}$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в. В силу ([2]), стр. 516 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\dfrac{s}{\mu_n(s)}$ есть вполне монотонная функция (вп. м. ф.). Но $y_n \geqslant 0$ и $y_n'(s)$ — вп. м. ф., следовательно, вп. м. ф. будет также функция $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\dfrac{y_n}{\mu_n(y_n)}$, то есть функция $\mathrm{d}_n\dfrac{y_n}{\mu_n(y_n)}$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в. Далее, так как $P(\gamma_n(s))$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в., то в силу (1)

$$P(\gamma_n(y_n)) = \frac{(1-a_n h_{n1})y_n}{y_n - a_n + a_n h_n(y_n)} = \frac{(1-a_n h_{n1})y_n}{y_n - a_n + a_n\pi_{nn}(s)} =$$

$$= (1-a_n h_{n1})\frac{y_n}{s}$$

также есть п. Л. — С. б. д. сл. в.

Из (5) получаем, что $\mathrm{d}_{n+1}\dfrac{\mu_{n+1}(s)}{s}$, как произведение п. Л. — С. двух б. д. сл. в., само есть п. Л. — С. б. д. сл. в..

Найдем каноническое представление для $\omega_k(s)$.

В силу ([2]), стр. 517, $\omega_k(s)$ представимо в виде (1), где мера Λ_k удовлетворяет условиям $\int_0^\infty x^{-1}\Lambda_k(\mathrm{d}x) < \infty$ и $\Lambda_k(A) < \infty$ для любого ограниченного множества A.

В ([1]) показано: при $\rho_{k-11}<1$ $\sigma_{k-1}\pi_{k-11}=\dfrac{\rho_{k-11}}{1-\rho_{k-11}}$. Неравенство $\sigma_{k-1}\pi_{k-11}<1$ $(\sigma_{k-1}\pi_{k-11}>1)$ выполнено тогда и только тогда когда

$$\rho_{k-11}<\frac{1}{2} \qquad \left(\rho_{k-11}>\frac{1}{2}\right).$$

Положим

$$A_k=a_k h_{k1}(-\gamma_k'(s))\cdot[1-a_k h_{k1}\gamma_k(s)]^{-1},$$

$$B_k=\sigma_{k-1}(s\mu_k(s))^{-1}\{1-\pi_{k-1}(s)+s\pi_{k-1}'(s)\}.$$

Тогда

$$\lambda_k(s)\overset{\text{def}}{=}\int_0^\infty e^{-st}\Lambda_k(\mathrm{d}t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\frac{1}{\omega_k(s)}=A_k+B_k.$$

Нетрудно заметить, что

$$B_k=\sigma_{k-1}\left[-\left(\frac{1-\pi_{k-1}(s)}{s}\right)'\right]\cdot\left(\frac{\mu_k(s)}{s}\right)^{-1}=\int_0^\infty e^{-st}t\overline{\Pi}_{k-1}(t)\mathrm{d}t\,\cdot$$

$$\cdot\left(1+\sigma_{k-1}\frac{1-\pi_{k-1}(s)}{s}\right)^{-1}.$$

Отсюда при $\rho_{k-11}<\dfrac{1}{2}$ получаем

$$B_k=\sigma_{k-1}\int_0^\infty e^{-st}t\overline{\Pi}_{k-1}(t)\mathrm{d}t\cdot\sum_{n\geq 0}(-\sigma_{k-1})^n\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\left[\overline{\Pi}_{k-1}(t)\right]_*^n$$

и в силу ([3]), стр. 317, замеч. 2 получаем

$$B_k=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\left\{\sigma_{k-1}\overset{\approx}{\Pi}_{k-1}(t)*\sum_{n\geq 0}(-\sigma_{k-1})^n\left[\tilde{\Pi}_{k-1}(t)\right]_*^n\right\}.$$

Подобным же образом преобразуется A_k.

Окончательно, находим $\lambda_k(s)$ при $\rho_{k-11}<\dfrac{1}{2}$, которое удается обратить и получить (2).

При $\rho_{k-11}>\dfrac{1}{2}$ представим B_k в следующем виде:

$$B_k=\sigma_{k-1}\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\overset{\approx}{\Pi}_{k-1}(t)\cdot C_k$$

где

$$C_k \stackrel{\text{def}}{=} \{1+\alpha_{k-1}s^{-1}(1-\pi_{k-1}(s))\}^{-1} = (\rho_{k-11}^{-1}-1)\{1+(s\pi_{k-11})^{-1}(1-\pi_{k-1}(s))-$$
$$-(1-\rho_{k-11})^{-1}\}$$

Поскольку

$$\left|\frac{1-\pi_{k-1}(s)}{s\pi_{k-11}}-(1-\rho_{k-11})^{-1}\right| \leq \max(\rho_{k-11}^{-1}-1,\ (1-\rho_{k-11})^{-1})<1,$$

то

$$C_k=(\rho_{k-11}^{-1}-1)\sum_{n\geq 0}\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\alpha_{kn}(t).$$

Так как $\max_m \operatorname{Var}_{0<x<\infty}\sum_{n=0}^m \alpha_{kn}(x) \leq \max_m \sum_{n=0}^m \{|\lim_{x\to\infty}\alpha_{kn}(x)|+|\lim_{x\to 0}\alpha_{kn}(x)|\}<\infty,$

то в силу ([3]), стр. 317, замеч. 2 получаем

$$C_k=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\{(\rho_{k-11}^{-1}-1)\sum_{n\geq 0}\alpha_{kn}(t)\},$$

что и т. д..

Замечание 1 Положим $\bar{\Lambda}_k(A)=\Lambda_k(A\setminus\{0\})$, $D_k(\mathrm{d}x)=$ $=\dfrac{x}{1+x^2}\bar{\Lambda}_k(\mathrm{d}x)$.

Тогда

$$D_k(\{0\})=0,\ D_k((-\infty,+\infty))=\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\Lambda_k(\mathrm{d}x)<\infty.$$

$$\int_0^\infty x^{-1}D_k(\mathrm{d}x)=\int_0^\infty (1+x^2)^{-1}\bar{\Lambda}_k(\mathrm{d}x)<\infty.$$

Переписав (1) в виде

$$\omega_k(s)=\exp\left\{\int_0^\infty\left(e^{-sx}-1+\frac{sx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}D_k(\mathrm{d}x)-s\int_0^\infty x^{-1}D_k(\mathrm{d}x)\right\},$$

получаем представление Леви—Хинчина для $\omega_k(s)$.

2°. Обозначим через $w_k^{(u)}(t)$ виртуальное время ожидания в нашей системе в момент t, если порядок обслуживания k — вызовов инверсионный. При этом предполагаем, что прерванный k — вызов имеет преимущество в обслуживании перед другими k — вызовами.

Теорема 2. $\omega_k^{(u)}(s) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty} Me^{-sw_k^{(u)}(t)}$ *является п. Л. — С. б. д. сл. в.*.

Доказательство. Пусть $w_n(t)$ — виртуальное время ожидания в момент t n — вызова при прямом порядке обслуживания вызовов каждого из первых n потоков. Обозначим через $\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n+1)}, \ldots, \xi_k^{(n+1)}, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных сл. в., имеющих ф. р. периода занятости системы $M|G|1|\infty$ с интенсивностью $a_n + a_{n+1}$ входящего потока и ф. р. $B(t) = \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} B_n(t) + \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} B_{n+1}(t)$ длительности обслуживания вызовов.

Имеет место равенство

$$w_{n+1}^{(u)}(t) \overset{d}{=} w_n(t) + \xi_1^{(n+1)} + \ldots + \xi_{\nu(w_n(t))}^{(n+1)}. \qquad (6)$$

Здесь равенство понимается в смысле совпадения ф. р. обеих сторон (6), а $\nu(x)$ — сл. в. числа n — вызовов и $(n+1)$ — вызовов, поступивших в систему за время t.

Введем обобщенный пуассоновский процесс со сносом ([3]), стр. 223

$$X_{n+1}(t) = t + \xi_1^{(n+1)} + \ldots + \xi_{\nu(t)}^{(n+1)}.$$

Тогда $w_{n+1}^{(u)}(t) \overset{d}{=} X_{n+1}(w_n(t))$, то есть $w_{n+1}^{(u)}(t)$ подчинен $X_{n+1}(t)$ с направляющим процессом $w_n(t)$. Поскольку обобщенный пуассоновский процесс со сносом б. д., то при б. д. $w_n(t)$ таковым же в силу ([2]), стр. 518 будет $w_{n+1}^{(u)}(t)$. Следовательно, используя теорему 1, утверждение теоремы 2 становится очевидным.

Замечание 2. Каноническое представление в данном случае получается аналогично, но вид его довольно громоздок.

3°. Естественным образом возникает вопрос: является ли б. д. стационарное распределение времени ожидания в других приоритетных системах?

Рассмотрим, например, систему $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ с относительным приоритетом. Поскольку $\omega_r(s)$, $\omega_r^{(u)}(s)$ в данной системе и в системе с дообслуживанием совпадают, то на основании теоремы 1 заключаем

Следствие 1. Для систем с относительным приоритетом прямым и инверсионным порядком обслуживания вызовов $\omega_r(s)$, $\omega_r^{(u)}(s)$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в.,

Замечание 3. В системе с относительным приоритетом для потоков $L_1, \ldots, L_{r-1}$ времена ожидания, вообще говоря, не б. д..

Для доказательства этого утверждения возьмем $r=2$, $\beta_{11} = \beta_{21} = 1$, $\beta_2(s) = e^{-s}$. Тогда из ([4]), стр. 111.

$$\omega_1(s) = \frac{[1-(a_1+a_2)]s+a_2[1-\beta_2(s)]}{s-a_1+a_1\beta_1(s)}. \tag{7}$$

Предположим, что $\omega_1(s)$ б. д. без каких-либо дополнительных ограничений. Поскольку предел б. д. сл. в. является б. д. сл. в., то, устремляя в (7) $a_1\to 0$, $a_2\to 1$ $(a_1+a_2<1)$, находим: $\lim\limits_{a_1\to 0\, a_2\to 1} \omega_1(s) = s^{-1}(1-e^{-s})$, что является п. Л. — С. равномерного на $[0,1]$ распределения, которое не б. д..

Замечание 4. Для систем с абсолютным и относительным приоритетом $\omega_k(s)$ не есть П. Л.— С. устойчивого закона $(k=\overline{1,r})$.

Действительно, устойчивые сл. в. не имеют скачков в нуле, что следует из их канонического представления. Но

$$\lim_{s\to\infty} \omega_k(s) = \begin{cases} 1-\rho_{k1}, & \text{абсолютный приоритет.} \\ 1-\rho_{r1}, & \text{относительный приоритет.} \end{cases}$$

Замечание 5. Рассмотрим процесс восстановления, образованный точками начал k — периодов. П. Л.—С. функции восстановления указанного процесса равно $\pi_k(s)\dfrac{\sigma_k}{s+\sigma_k}$. Известно ((2), стр. 434), что у процесса восстановления с функцией восстановления $B(t)$ в стационарном режиме ф. р. остаточного и прошедшего времени ожидания равны $m^{-1}\int\limits_0^t(1-B(u))\mathrm{d}u$ $\left(m=\int\limits_0^\infty(1-B(u))\mathrm{d}u\right)$, и, следовательно, их п. Л. —С. равны $(ms)^{-1}(1-\beta(s))$, где $\beta(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}B(t)$. Отсюда следует, что п. Л. —С. времени, прошедшего с момента начала последнего перед данным моментом k — периода, а также времени до начала следующего k — периода, равны

$$\frac{1-\pi_k(s)\sigma_k\cdot(s+\sigma_k)^{-1}}{(\sigma_k^{-1}+\pi_{k_1})s} = \frac{\mu_k(s)\cdot s^{-1}}{1+\sigma_k\pi_{k_1}}\cdot\frac{\sigma_k}{s+\sigma_k},$$

и, значит, б. д. как произведение б. д. сомножителей.

Авторы признательны Б. С. Нахапетяну за ценные замечания, сделанные при чтении рукописи.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Գ. Ա. ՊՈՊՈՎ

Բացարձակ նախապատվությամբ $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ սիստեմի սպասման ժամանակի անվերջ բաժանելիության մասին

Աշխատանքում ապացուցված է $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ սիստեմի i-րդ $(i=\overline{1,r})$ հոսքի պահանջի սպասման ժամանակի անվերջ բաժանելիությունը բացարձակ նախապատվության տարբերակների համար i-րդ հոսքի պահանջների

ինչպես ուղիղ կարգով սպասարկելու դեպքում, այնպես էլ ինվերսիոն։

Ստացված են դիտարկվող սպասման ժամանակների Լեվի-Խինչինի կանոնիկ վերլուծությունները։

Նույն տիպի սխեմայում, որ ընդունված է հարաբերական նախապատվության դիսցիպլին, r-րդ հոսքի պահանջների սպասման ժամանակն անվերջ բաժանելի է, եթե այդ հոսքի պահանջների սպասարկման կարգն ուղիղ է։ Սակայն մնացած հոսքերի պահանջների սպասման ժամանակներն ընդհանրապես անվերջ բաժանելի չեն, ինչ ցույց է տալիս աշխատանքում բերված օրինակը։ Վերոհիշյալ դիսցիպլինների դեպքում դիտարկվող սպասման ժամանակները կայուն չեն։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Даниелян*, «Известия АН Арм ССР», Математика, X, № 3, 1975 г. [2] *В. Феллер*, Введение в теорию вероятности и ее приложения, «Мир», т. 2, М., 1967. [3] *Г. Е. Шилов*, Математический анализ. Специальный курс. ГИФМЛ, М., 1961. [4] *Б. В. Гнеденко* и др. Приоритетные системы обслуживания, МГУ, М., 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 5

УДК 513.8

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартиросян

Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 1/VII 1976)

1°. В работе М. М. Джрбашяна [1] был дан метод построения систем функций $\{r_k(z);\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональных на окружности $|z|=1$.

Позже в его работе [2] было показано, что примененный в работе [1] метод эффективен также для построения систем функций, биортогональных на вещественной оси*.

Биортогональные системы М. М. Джрбашяна $\{r_k(z);\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$, а также важные свойства этих систем, установленные в его работах [1] [4], послужили основой для полного решения ряда задач анализа (см. [1], [2], [3], [4], [5], [6]).

В настоящей заметке методом, примененным в работах [1], [2], на границе L_ρ угловой области $\Delta(\rho)$ строятся биортогональные системы типа М. М. Джрбашяна $\{r_k(\zeta);\ \Omega_k(\zeta)\}_1^\infty$. Затем на основе ряда результатов работы [4] устанавливается критерий базисности системы $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ в метрике классов $H_2[\rho;\ \omega]$, введенных в заметке [7] и подробно рассмотренных в монографии [8].

Этот критерий позволяет дать полное решение задачи кратной интерполяции в угловых областях, а также установить критерий базисности систем функций типа Миттаг—Леффлера, введенных в заметке М. М. Джрбашяна [9], и систем функций типа Миттаг—Леффлера, рассмотренных в заметке автора [10].

2°. Пусть $H_2[\alpha;\ \omega]$ $(1/2<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1)$—известный [8] класс функций $F(z)$, голоморфных в угловой области

$$\Delta(\alpha)=\{z;\ |\arg z|<\pi/(2\alpha),\ 0<|z|<+\infty\} \tag{1}$$

и подчиненных условию

* Подробные литературные указания по этому поводу см. в работе [3].

$$\| F \|_{\alpha,\omega} = \sup_{|\varphi| < \pi/2\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} | F(re^{i\varphi}) |^2 r^{\omega} dr \right\}^{1/2} < +\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(L_\alpha)$ класс функций $F(\zeta)$, измеримых на границе L_α области $\Delta(\alpha)$ и таких, что

$$\| F \|_{\alpha,\omega} = \left\{ \int_{L_\alpha} |F(\zeta)|^2 \, |\zeta|^{\omega} \, |d\zeta| \right\}^{1/2} < +\infty. \tag{3}$$

Известно ([8]), что *любая функция* $F(z) \in H_2[\alpha;\omega]$ *почти всюду на* L_α *имеет угловые граничные значения* $F(\zeta) \in L_{2,\omega}(L_\alpha)$.

Можно показать, что $H_2[\alpha;\omega]$ *является замкнутым подпространством гильбертова пространства* $L_{2,\omega}(L_\alpha)$.

3°. Впредь полагаем, что

$$\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, \quad \rho = \alpha/(2\alpha - 1), \quad -1 < \omega < 1 \tag{4}$$

и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, а $s_k \geqslant 1$, $p_k \geqslant 1$ — кратности появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ отнесем к классу $\Delta_{\alpha,p}$, если

$$\inf_{k \geqslant 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \bar{\lambda}_j^\alpha} \right| \geqslant \delta > 0, \tag{5}$$

$$\sup_{k \geqslant 1} \{ p_k \} = p < +\infty. \tag{6}$$

Отметим, что из условия (5) вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2\alpha})^{-1} \operatorname{Re} \lambda_k^\alpha < +\infty, \tag{7}$$

обеспечивающее существование бесконечного произведения ([8])

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^\alpha - \lambda_k^\alpha}{z^\alpha + \bar{\lambda}_k^\alpha} \, \frac{|1 - \lambda_k^{2\alpha}|}{1 - \lambda_k^{2\alpha}}, \quad z \in \Delta(\alpha). \tag{8}$$

4°. Рассматривая систему рациональных функций

$$r_k(\zeta) = (s_k - 1)! \, (\zeta + \lambda_k)^{-s_k} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

в работе ([11]) С. А. Акопян и И. О Хачатрян при условии (7) дали полную внутреннюю характеристику ее замыкания в метрике $L_{2,\omega}(L_\rho)$, а в заметках ([12]), ([10]) был установлен критерий замкнутости этой системы в метрике $H_2[\rho;\omega]$.

Отметим, что *если условие* (7) *не выполняется, то система* (9) *не минимальна в* $H_2[\rho;\omega]$ и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

При условии (7), пользуясь методом, примененным в работах ([1]), ([2]), можно построить систему функций $\{\Omega_k(\zeta)\}_1^\infty$, биортогональную с системой $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho} r_k(\zeta)\Omega_\nu(\zeta)d\zeta=\delta_{k\nu}=\begin{cases}1, & k=\nu;\\ 0, & k\neq\nu,\end{cases}\quad (k,\ \nu=1,\ 2,\ \ldots), \tag{10}$$

причем направление на L_ρ совпадает с направлением неубывания $\arg\zeta$.

Система $\{\Omega_k(\zeta)\}_1^\infty$ определяется следующим образом:

$$\Omega_k(\zeta)=(-1)^{s_k+1}T_k(-\zeta)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{11}$$

где

$$T_k(z)=\frac{B_\alpha(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{12}$$

$$a_\nu(\lambda_k)=\frac{1}{\nu!}\left\{\frac{d^\nu}{dz^\nu}\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B_\alpha(z)}\right\}_{z=\lambda_k}\quad (\nu=0,\ 1,\ \ldots;\ k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{13}$$

Теорема 1. *Условие* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_{\alpha,\rho}$ *достаточно для справедливости следующих утверждений:*

1. *Система* $\{|\lambda_k|^{-\omega/2}(|\lambda_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha)^{s_k-1/2}r_k(\zeta)\}_1^\infty$ *образует базис, эквивалентный ортонормированному, в замыкании своей линейной оболочки в метрике* $H_2[\rho;\ \omega]$.

2. *Каждая функция* $f(\zeta)$ *из замыкания линейной оболочки системы* $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ *в метрике* $H_2[\rho;\ \omega]$ *единственным образом разлагается в ряд*

$$f(\zeta)=\sum_{k=1}^\infty c_k(f)r_k(\zeta),\quad c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho}f(\zeta)\Omega_k(\zeta)d\zeta, \tag{14}$$

сходящийся абсолютно и равномерно вне замыкания $\overline{E}$ *множества точек* $E=\{-\lambda_k\}_1^\infty$ *и в метрике* $H_2[\rho;\omega]$ *на границе* L_ρ *области* $\Delta(\rho)$.

Теорема 2. *Условие* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_{\alpha,\rho}$ *необходимо и достаточно для того, чтобы система* $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ *образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике* $H_2[\rho;\ \omega]$.

Теорема 3. *Условие* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_{\alpha,\rho}$ *необходимо и достаточно для того, чтобы система* $\{T_k(z)\}_1^\infty$ *образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике* $H_2[\alpha;\ \omega]$.

5°. Последовательность $\gamma=\{\gamma_k\}_1^\infty$ комплексных чисел условимся относить к классу $l_\omega^2\{\lambda_k\}$, если

$$\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|^\omega(|\lambda_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha)^{2s_k-1}|\gamma_k|^2<+\infty. \tag{15}$$

На функциях класса $H_2[\alpha;\ \omega]$ определим линейный оператор $T_{\alpha,\omega}$, положив

$$T_{\alpha,\omega}[f]=\{|\lambda_k|^{\omega/2}(|\lambda_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha)^{s_k-1/2}f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\}_1^\infty,\ f\in H_2[\alpha;\ \omega]. \tag{16}$$

Теорема 4. *Условие* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha,\rho}$ *необходимо и достаточно для того, чтобы имело место равенство*

$$T_{\alpha,\omega}\{H_2[\alpha;\ \omega]\} = l^2. \qquad (17)$$

Теорема 5. *Пусть* $\gamma = \{\gamma_k\}_1^\infty \in l^2_{\omega}\{\lambda_k\}$. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha,\rho}$, *то ряд*

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k T_k(z) \qquad (18)$$

сходится абсолютно и равномерно внутри области $\Delta(\alpha)$, *в метрике* $H_2[\alpha;\ \omega]$ *на ее границе* L_α *и определяет функцию* $f_0(z) \in H_2[\alpha,\ \omega]$, *удовлетворяющую следующим интерполяционным условиям*:

$$f_0^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (19)$$

Теорема 6. *Пусть* $w = \{w_k\}_1^\infty$ — *произвольная последовательность комплексных чисел. Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} \Delta_{\alpha,\rho}$, *то*

$$T_w\{H_2[\alpha;\ \omega]\} \neq l^2, \qquad (20)$$

где линейный оператор T_w *определяется на функциях класса* $H_2[\alpha;\ \omega]$ *следующим образом*:

$$T_w[f] = \{w_k f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\}_1^\infty,\ f \in H_2[\alpha;\ \omega]. \qquad (21)$$

6°. В заметках [13], [9] М. М. Джрбашян ввел в рассмотрение обобщенную систему Мюнца-Саса $\{e^{-\lambda_k x} x^{(s_k-1)}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_k > 0$), отметил критерий замкнутости этой системы в $L_2(0,\ +\infty)$ и впервые дал полную внутреннюю характеристику ее замыкания в $L_2(0,\ +\infty)$ в случае незамкнутости.

В заметке [9] им была введена в рассмотрение система функций типа Миттаг-Лефлера

$$\omega_\rho^*(x;\ \lambda_k) = E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\ \mu)\, x^{s_k-1} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (22)$$

где $\mu = (1+\omega+\rho)/(2\rho)$.

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\mu + n\rho^{-1}), \qquad (23)$$

и установлен критерий замкнутости этой системы в $L_{2,\omega}(0,\ +\infty)$, являющийся существенным обобщением классической теоремы Мюнца-Саса.

$L_{2,\omega}(0,\ +\infty)$ определяется, как класс функций $f(x)$, измеримых на полуоси $(0,\ +\infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)} = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^{\omega}\, dx \right\}^{1/2} < +\infty. \qquad (24)$$

В работе [11] была дана полная внутренняя характеристика замыкания в метрике $L_{2,\omega}(0,\ +\infty)$ незамкнутой системы (22).

Теорема 7. *Условие* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha,\rho}$ *необходимо и достаточно* *для того, чтобы система $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_k)\}_1^\infty$ образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике $L_{2,\omega}(0,+\infty)$.*

Отметим, что в специальном случае $\omega=0$, $\alpha=\rho=\mu=1$, $s_k=1$ $(k=1, 2, \ldots)$, если учесть, что $E_1(z;1)=e^z$, эта теорема была установлена в работе В. И. Гурария и В. И. Мацаева [14] для положительных возрастающих λ_k, а в работе Н. К. Никольского и Б. С. Павлова [15] — для комплексных λ_k $(\mathrm{Re}\,\lambda_k>0)$.

7°. Положив

$$\alpha/(2\alpha-1)<\rho_1<+\infty,\ \mu_1=(1+\omega+\rho_1)/(2\rho_1),\ \gamma^{-1}=2-(\alpha^{-1}+\rho_1^{-1}), \tag{25}$$

рассмотрим систему функций типа Миттаг-Леффлера

$$\omega_{\rho_1}^*(z;\lambda_k)=E_{\rho_1}^{(s_k-1)}(-\lambda_k z;\mu_1)\,z^{s_k-1}\quad (k=1, 2, \ldots). \tag{26}$$

В заметке [12] в случае $\omega=0$, $1<\alpha<+\infty$, $\rho_1=1$, а затем в заметке [10] в общем случае, был установлен критерий замкнутости системы (26) в метрике $H_2[\gamma;\omega]$, а в случае незамкнутости была дана полная внутренняя характеристика ее замыкания.

Теорема 8. *Условие $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_{\alpha,\rho}$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{\omega_{\rho_1}^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2[\gamma;\omega]$.*

Отметим, что в крайнем случае, когда $\rho_1=\alpha/(2\alpha-1)$ $(\gamma=+\infty)$, если условимся отождествлять пространства $H_2[+\infty;\omega]$ и $L_{2,\omega}(0,+\infty)$, эта теорема переходит в теорему 7.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность моему научному руководителю, академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну, за постановку задач и руководство при выполнении настоящей работы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ սիստեմների բազիսությունը և ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթում

Ներկա աշխատանքում բերված է $H_2[\rho;\omega]$ դասում պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների բազիսության հայտանիշը։ Այդ հայտանիշը թույլ է տալիս լուծել ինտերպոլյացիոն խնդիրը անկյունային տիրույթում։ Բերված է նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից մտցրած Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ մետրիկայում բազիսության հայտանիշը։

Ի վերջո, բերվում է հեղինակի կողմից դիտարկված Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների $H_2[\gamma; \omega]$ մետրիկայում բազիսության հայտանիշը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, «Известия АН Арм. ССР», матем., VIII, № 5, 384—409 (1973). [2] *М. М. Джрбашян*, Матем. сб., т. 95 (137), № 3 (11), 418—444 (1974). [3] *М. М. Джрбашян*, Матем. сб., т. 91 (133), № 4 (8), 580—626 (1973). [4] *М. М. Джрбашян*, «Известия АН Арм. ССР», матем., IX, № 5, 339—373 (1974). [5] *Г. М. Айрапетян*, «Известия АН Арм. ССР» матем., VIII, № 6, 429—450 (1973). [6] *Г. М. Айрапетян*, «Известия АН Арм. ССР», матем., X, № 2, 133—152 (1975). [7] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, № 3, 457—460 (1958). [8] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. [9] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 219, № 6, 1302—1305 (1974). [10] *В. М. Мартиросян*, ДАН Арм. ССР, т. 62, № 5 (1976). [11] *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян*, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 40, № 1, 96—114 (1976). [12] *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*, ДАН СССР, т. 225, № 5, 1001—1004, (1975). [13] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 141, № 3, 539—542 (1961). [14] *В. И. Гурарий, В. И. Мацаев*, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 30, № 1, 3—14 (1966). [15] *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов*, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 34, № 1, 90—133 (1970).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 5

УДК 517

МАТЕМАТИКА

В. М. Елигарян

Комплексное обращение обобщенного преобразования типа свертки

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 15/IX 1976)

Хиршманом и Уиддером ([1]) получено комплексное обращение преобразования типа свертки

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\Phi(t)dt \tag{1.1}$$

ядер $G(t)$, у которых двусторонним преобразованием Лапласа является функция $1/E(z)$, где $E(z)$ — целая функция вида

$$E(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_k^2}\right),\quad o<a_1<a_2<\ldots,\ \lim_{k\to\infty}\frac{k}{a_k}=\Omega>0. \tag{1.2}$$

В настоящей статье устанавливается комплексное обращение преобразования (1.1) ядер $G(t)$, для которых одностороннее обобщенное преобразование Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-zt}G(t)t^{\alpha}dt \qquad -1<\alpha\leqslant 0. \tag{1.3}$$

есть функция $1/E(z)$, где $E(z)$ — целая функция экспоненциального типа, не имеющая на мнимой оси нулей и удовлетворяющая условию

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{\ln|E(iy)|}{y}=\alpha>0. \tag{1.4}$$

Известно (2), что в классе интегрируемых на $(0,\infty)$ функций с весом t^{α}, $-1<\alpha\leqslant 0$, $G(u)$ из (1.3) определяется следующим образом:

$$G(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\left\{i^{\alpha}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{E_1(itu;1+\alpha)}{E(it)}t^{\alpha}dt+i^{-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{E_1(-itu;1+\alpha)}{E(-it)}t^{\alpha}dt\right. & \text{при } u>0\\ 0 & \text{при } u<0\end{cases} \tag{1.5}$$

где $E_1(z;1+\alpha)$ — функция типа Миттаг-Лефлера.

В конце статьи для более узкого класса ядер мы даем обращение преобразования (1.1) при помощи разложений Фурье—Аппеля.

При решении поставленной задачи нами использованы метод Хиршмана и Уиддера и аппарат оператора Римана—Лиувилля. Приведем некоторые определения, используемые в дальнейшем. Все эти понятия можно найти в работе ([3]).

Определение. Пусть $f(x)$ —произвольная функция из класса $L(0, l)$, $(0<l<\infty)$. Интегралом от $f(x)$ порядка $\alpha(0<\alpha<\infty)$ в смысле Римана—Лиувилля с началом в точке $x=0$ принято называть функцию

$$D_0^{-\alpha}f(x) \equiv D^{-\alpha}f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \quad x \in (0, l).$$

В частном случае при

$$f(x) = \frac{x^k}{\Gamma(1+k)}$$

имеем

$$D^{-\alpha}\left\{\frac{x^k}{\Gamma(1+k)}\right\} = \frac{x^{k+\alpha}}{\Gamma(1+k+\alpha)}.$$

Определение. Пусть $\alpha(0<\alpha<\infty)$, и целое число $p\geqslant 1$ определяется из условия $p-1<\alpha\leqslant p$, а $f(x)\in L(0, l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left\{ D^{-(p-\alpha)}f(x) \right\}$$

почти всюду на $(0, l)$ имеет производную (не обязательно суммируемую на $(0, l)$). Тогда функция

$$D^{\alpha}f(x) \equiv \frac{d^p}{dx^p}\left\{ D^{-(p-\alpha)}f(x) \right\}$$

называется производной порядка $\alpha>0$ от функции $f(x)$ с началом в точке $x=0$.

Имеют место соотношения

$$D^{\alpha}\left\{\frac{x^k}{\Gamma(1+k)}\right\} = \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)}$$

$$D^{\alpha}D^{-\alpha}f(x) = f(x)$$

почти для всех $x\in(0, l)$.

Заметим, что если $f(z)$ аналитическая функция на некотором круге $|z|<R$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+n)} z^n,$$

то

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}f(re^{i\varphi}) \equiv G_\varkappa f(re^{i\varphi}), \quad \varkappa = \left\{\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\right\} \tag{1.6}$$

где применение оператора $G_\varkappa$ понимается в следующем смысле:

$$G_\varkappa f(re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+k)} \cdot \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)} r^k e^{ik\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+k+\alpha)} z^k. \tag{1.7}$$

Очевидно, что оператор $G_\varkappa$ аддитивен и однороден и

$$G_\varkappa \cdot G_{1/\varkappa} = G_1, \quad \frac{1}{\varkappa} = \left\{\frac{\Gamma(1+k+\alpha)}{\Gamma(1+k)}\right\}, \tag{1.8}$$

где $G_1 f \equiv f$. Мы в дальнейшем будем пользоваться обоими символами в одном и том же смысле. Очевидно также, что если $f(z)$ аналитична в круге $(z) < R$, то $G_\varkappa f(z)$ аналитична в том же круге и что порядок и тип функций $f(z)$, $G_\varkappa f(z)$ одинаковы.

Ясно, что формулой (1.1) функция $f(x)$ определяется только для $x \in (-\infty, \infty)$, а для комплексного обращения преобразования (1.1) нужно, чтобы $f(x)$ была продолжена на некоторую область комплексной плоскости. Поэтому нужны дополнительные условия на ядро $G(t)$ и на функцию $\Phi(t)$. Мы показываем, что из условия, наложенного на $E(z)$, следует аналитичность $G(w)$ в полосе $|\mathrm{Im}\, w| < \alpha$ и что определенная формулой (1.1) функция $f(x)$ аналитически продолжается в полосе $|\mathrm{Im}\, w| < \alpha$ для достаточно широкого класса функций $\Phi(x)$. Эти результаты устанавливаются соответственно в следующих двух леммах.

Лемма 1.1. *Пусть $E(z)$ целая функция экспоненциального типа, не имеющая на мнимой оси нулей, и удовлетворяет условию (1.4). Тогда ядро $G(w)$, определенное формулой (1.5), является аналитической функцией в полосе $|v| < \alpha$ $(w = u + iv)$ и удовлетворяет условию*

$$G(u+iv) = o(|u|^{-n}) \text{ при } \forall n, \text{ при } |u| \to \infty \tag{1.9}$$

Доказательство. Для функции типа Миттаг-Лефлера известно (см. ([2]), стр. 430), что при $s=1$, $\mu = 1+\alpha$, $-1 < \alpha < 0$ имеет место оценка

$$E_1(z; 1+\alpha) = z^{-\alpha}e^z + 0\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при} \quad |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{1.10}$$

Если теперь $h_n(\theta)$ — означает индикаторную функцию функции $E^{(n)}(z)$, то имеем $h_n(\theta) \leqslant h(\theta)$, где $h(\theta)$ - индикаторная функция $E(z)$. Следовательно из условия (1.4) следует

$$E^{(n)}(iy) = 0(e^{|y|(\alpha+1)}) \quad \text{при} \quad |y| \to \infty \tag{1.11}$$

и что

$$\frac{1}{E(iy)}=0(e^{-|y|(s-\epsilon)})\quad \text{при}\quad |y|\to\infty. \tag{1.12}$$

Подставляя вместо $E_1(z;1+\alpha)$ в (1.5) асимптотическую формулу (1.10) и воспользовавшись оценками (1.11) и (1.12), интегрированием по частям получим требуемое.

Лемма 1.2. *Если $\Phi(x)\ (1+x^2)^{-N}\in L(-\infty,\infty)$ для некоторого $N>0$, тогда функция $f(x)$, определенная формулой* (1.1), *аналитична в полосе $|\operatorname{Im}x|<\alpha$.*

Доказательство следует из оценки (1.9) и из того факта, что ядро $G(t)$ аналитично в той же полосе.

Теорема 1.1. *Пусть $K(w)$—преобразование Бореля функции $E(z)$. Тогда*

$$x^\alpha \lim_{s\to 1-}\int_{C_\rho} K(w)\ f(x+\rho w)dw=\psi(x) \tag{1.13}$$

где C_ρ—замкнутый контур, лежащий в полосе $|Imw|<\frac{\alpha}{s}$, охватывающий индикаторную диаграмму функции $E(z)$, если

$$\hat{\Phi}(x)=0(e^{-\delta|x|})\ \ |x|\to\infty,\ \delta>0 \tag{1.14}$$

где

$$\hat{\Phi}(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\ \Phi(t)dt \tag{1.15}$$

есть преобразование фурье функции $\psi(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)\,f(x+\rho w)dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}K(w)dw\int_{-\infty}^{\infty} G(x+\rho w-t)\Phi(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)dt\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)G(x+\rho w-t)dw. \tag{1.16}$$

Перемена порядка интегрирования возможна, так как если $w\in C_\rho$, то $x+\rho w\in[w;\ |\operatorname{Im}w|<\alpha]$, где функции f и G аналитичны и, следовательно, внутренний интеграл первого равенства сходится равномерно.

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)G(x+\rho w-t)dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)dw\,\frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\left\{i^\alpha\int_0^\infty\frac{E_1[iu(x+\rho w-t);1+\alpha]}{E(iu)}u^\alpha du+i^{-\alpha}\int_0^\infty\frac{E_1[-iu(x+\rho w-t);1+\alpha]}{E(-iu)}u^\alpha du\right\}-$$

$$
=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{i^\alpha u^\alpha}{E(iu)}\,du\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)E_1[iu(x+\rho w-t);\ 1+\alpha]\,dw+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{i^{-\alpha}u^\alpha}{E(-iu)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)E_1[-iu(x+\rho w-t);\ 1+\alpha]\,dw.
$$

Здесь перемена порядка интегрирования возможна, так как интеграл (1.5) сходится равномерно на C_ρ, если заменить w на $x+\rho w-t$.

Введем обозначения

$$
I_1(x,\rho,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)E_1[iu(x+\rho w-t);\ 1+\alpha]\,dw,
$$

$$
I_2(x,\rho,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)E_1[-iu(x+\rho w-t);\ 1+\alpha]\,dw.
$$

Имеем

$$
G_{1/\alpha}I_1(x,\rho,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)e^{iu(x+\rho w-t)}\,dw=
$$

$$
=e^{iu(x-t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)e^{iu\rho w}\,dw=e^{iu(x-t)}E(iu\rho). \tag{1.17}
$$

Следовательно

$$
I_1(x,\rho,t)=E(iu\rho)E_1[iu(x-t);\ 1+\alpha]. \tag{1.18}
$$

Аналогично получим, что

$$
I_2(x,\rho,t)=E(-iu\rho)E_1[-iu(x-t);\ 1+\alpha]. \tag{1.19}
$$

Обозначим через $I(x,\rho)$ следующий интеграл:

$$
I(x,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)f(x+\rho w)\,dw.
$$

Имеем

$$
G_{1/\alpha}I(x,\rho)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)dt\,\frac{i^\alpha}{2\pi}\int_0^\infty \frac{E(iu\rho)}{E(iu)}\,u^\alpha e^{iu(x-t)}du+
$$

$$
+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)dt\,\frac{i^{-\alpha}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{E(-iu\rho)}{E(-iu)}\,u^\alpha e^{-iu(x-t)}\,du=
$$

$$=\frac{i^{\alpha}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{E(iu\rho)}{E(iu)}u^{\alpha}e^{iux}\hat{\Phi}(u)du+\frac{i^{-\alpha}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{E(-iu\rho)}{E(-iu)}u^{\alpha}e^{-iux}\hat{\Phi}(-u)du, \quad (1.20)$$

где $\hat{\Phi}(u)$—преобразование Фурье функции $\Phi(x)$.

Из предположения (1.14) будем иметь

$$\lim_{\rho\to 1-}G_{1/\alpha}f(x,\rho)=\lim_{\rho\to 1-}\frac{i^{\alpha}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{E(iu\rho)}{E(iu)}u^{\alpha}e^{iux}\hat{\Phi}(u)du=$$

$$=\frac{i^{\alpha}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iux}u^{\alpha}\hat{\Phi}(u)du. \quad (1.21)$$

Остается заметить, что

$$\frac{i^{\alpha}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iux}u^{\alpha}\hat{\Phi}(u)du=x^{-\alpha}\Phi(x).$$

Замечание. Для ядер $G(u)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{E(z)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-zt}G(t)dt,$$

где $E(z)$—квазицелая функция, допускающая разложение

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{nh}$$

для некоторого $h>0$, можно дать другую формулу обращения преобразования типа свертки

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-t)\Phi(t)dt$$

Для этих целей обозначим $A_n(t)$ обобщенные многочлены Аппеля

$$E(z)E_1(zx)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{nh}A_n(x)$$

где $E_1(zx)$ — квазицелая функция, допускающая разложение

$$E_1(zx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{zx^{nh}}{\Gamma(1+nh)}.$$

Легко доказывается, что тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-t)A_n(t)dt=\frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D^{kh}G(x-t)\Big|_{x=0} A_n(t)dt = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq n \\ 1 \text{ при } k = n. \end{cases}$$

Это наводит на мысль, что функцию $\Phi(x)$ можно восстановить при помощи ряда Фурье—Аппеля

$$\Phi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n A_n(x),$$

где

$$\Phi_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D^{nh}G(x-t)\Big|_{x=0} \Phi(t)dt.$$

Пользуясь свойством единственности преобразования типа свертки, доказывается, что если

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\Phi(t)dt$$

то

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D^{nh}f(x)\Big|_{x=0} \cdot A_n(x).$$

Например, если

$$G(t) = t^{h-1} \text{ при } h > -2$$

то

$$A_n(x) = \frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}$$

и если

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-t)^{h-1}\Phi(t)dt,$$

то

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D^{nh}f(x)\Big|_{x=0} \cdot \frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}.$$

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Վ. Մ. ԽԳԻԳԱՐՅԱՆ

Ընդհանրացված ծալքի տիպի ձևափոխության կոմպլեքս շրջում

Հիրշմանի և Ուիդդերի կողմից (¹) *ստացված է*

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\Phi(t)dt \tag{1}$$

ծալքի տիպի ձևափոխության կոմպլեքս շրջումը, որի $G(t)$ կորիզի երկկողմանի Լապլասի ձևափոխությունն է հանդիսանում $1/E(z)$ ֆունկցիան, որտեղ

$$E(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_k^2}\right),\quad 0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots,\ \lim_{k\to\infty}\frac{k}{a_k}=\Omega>0. \tag{2}$$

Աշխատանքում բերվում է (1) ձևափոխության կոմպլեքս շրջումը այնպիսի $G(t)$ կորիզների համար, որոնց միակողմանի ընդհանրացված Լապլասի ձևափոխությունն է՝

$$\int_0^{\infty} G(t)t^{\nu}e^{-zt}dt=\frac{1}{E(z)}, \tag{3}$$

որտեղ $E(z)$ էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիա է, որը կեղծ առանցքի վրա չունի զրոներ և բավարարում է

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{\ln|E(iy)|}{y}=\alpha>0 \tag{4}$$

պայմանին։ Խնդիրը լուծելու համար օգտագործվել է Հիրշմանի և Ուիդերի աշխատանքի մեթոդը և Ռիման-Լիուվիլի օպերատորի ապարատը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Хиршман* и *Уиддер*, Преобразование типа свертки. М., 1958. [2] *М. М. Джрбашян*. ИАН СССР, сер. мат., 18, 427—448 (1954). [3] *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIII 1976 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Е. Маркосян, И. А. Карапетян

О совершенных графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 9/XI 1976)

В настоящей работе установлено одно важное свойство о критических множествах и ребрах, которое является обобщением теоремы доказанной Байнеке-Харари-Пламмером ([1]), и с его помощью доказана гипотеза Олару ([2]): если в графе G каждый цикл нечетной длины имеет по крайней мере две диагонали, то граф G—совершенный. В конце сформулировано утверждение, равносильное гипотезе Бержа.

Мы будем рассматривать обыкновенные графы.
Пусть $G=(X, U)$ некоторый граф, а $\alpha(G)$, $\sigma(G)$ и $\varphi(G)$, соответственно, число внутренней устойчивости (наибольшее число попарно несмежных вершин), кликоматическое число (наименьшее число клик, покрывающих все вершины графа G) и плотность (число вершин наибольшей клики) графа G.

Напомним следующие известные определения.
Граф G имеет α-покрытие, если $\alpha(G)=\sigma(G)$. Граф G называется совершенным, если каждый порожденный подграф графа G имеет α-покрытие. Нечетной дыркой в графе G назовем простой цикл нечетной длины без диагоналей.

Относительно совершенных графов Берж ([3]) выдвинул следующие две гипотезы:

1) дополнение совершенного графа является совершенным графом;

2) граф G совершенный тогда и только тогда, когда ни G, ни его дополненное $\overline{G}$ не содержат нечетных дырок длины $\geqslant 5$.

Ловац ([4]) доказал, что граф G является совершенным тогда и только тогда, когда для любого порожденного подграфа G' графа G.

$$\alpha(G')\ \varphi(G')\geqslant(G'),$$

где (G') число вершин графа G'.

Этот результат сильнее первой, но слабее второй гипотез Бержа.

Введем следующие определения и обозначения.

Ребро $u=(x,y)$ графа G назовем критическим, если $\alpha(G \setminus u) > \alpha(G)$. Множество ребер $U' \subseteq U$ графа G назовем критическим, если $\alpha(G \setminus U') > \alpha(G)$. Реберно-критической компонентной графа G, называется максимальный подграф H графа G, в котором для любой пары вершин существует цепь, состоящая только из критических ребер.

Пусть

$$\Gamma_x = \{y \in X / (x, y) \in U\},$$

$$U_x = \{u \in U / u = (x, y),\ y \in X\},$$

где x произвольная вершина графа $G=(X, U)$.

Очевидно, что если граф G имеет α- покрытие, то все его реберно-критические компоненты являются полными. Из справедливости второй гипотезы Бержа непосредственно следует: если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок длины ≥ 5, то его реберно - критические компоненты являются полными подграфами ([5]). Легко заметить, что последнее утверждение является более слабой гипотезой, чем вторая гипотеза и вполне естественно попробовать решить эту гипотезу.

Пусть S_1 и S_2 произвольные наибольшие внутренне устойчивые множества графа G. Обозначим через $G_{1,2}$ подграф графа G, порожденный подмножеством вершин $S_1 \cup S_2$, а его компоненты связности через $G^i_{1,2}$, где $i \geq 1$. В работе ([5]) доказана следующая

Лемма 1. $|G^i_{1,2} \cap S_1| = |G^i_{1,2} \cap S_2|$ *для любого* $i \geq 1$.

Лемма 2. *Если* $U^1 \subseteq U_x$, $U^2 \subseteq U_x$, $U^1 \subseteq U^2$, $U^2 \subseteq U'$ и U^1, U^2 *—критическое множество графа* G, *причем* $U^1 \cap U^2$ *не является критическим множеством, то существуют ребра* $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ *и* $u_2 \in U^2 \setminus U^1$, *через которые проходит нечетная дырка.*

Доказательство. Так как $U^1 (U^2)$—критическое множество для G, то существует наибольшее внутренне устойчивое множество $S_1 (S_2)$, такое что $S_1 \cup \{x\}$ $(S_2 \cup \{x\})$ является внутренне устойчивым множеством для графа $G \setminus U'$ $(G \setminus U^2)$. Пусть $\Gamma_i = S_i \cap \Gamma_x$, $i=1, 2$. Рассмотрим граф $G_{1,2}$. Пусть $z \in \Gamma_i$, $i \in 1, 2$. Через $G^{i(z)}_{1,2}$ обозначим компоненту графа $G_{1,2}$, содержащую вершину z. Докажем, что существует $x_0 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ и $y_0 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ такие, что $G^{i(x_0)}_{1,2} = G^{i(y_0)}_{1,2}$. Предположим, что не так. Тогда пользуясь леммой 1, легко убедиться, что

$$S = \Big(\bigcup_{x \in \Gamma_1 / \Gamma_2} G^{i(x)}_{1,2} \cap S_2 \Big) \cup \Big[S_1 \setminus \Big(\bigcup_{x \in \Gamma_2 / \Gamma_1} G^{i(x)}_{1,2} \cap S_1 \Big) \Big]$$

является внутренне устойчивым множеством графа G мощности $\alpha(G)$.

Из определения S следует, что вершина x смежна лишь с вершинами $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap S_1$.

Пусть $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$. Тогда $S^1 = S \cup \{x\}$ будет внутренне устойчивым множеством и $|S^1| > |S|$, что противоречит выбору S_1. Если $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$, тогда $U^1 \cap U^2$ является критическим множеством графа G, что противоречит условию леммы.

Так как $G_{1,2}^{(x_0)}=G_{1,2}^{(y_0)}$, то существует простая цепь, соединяющая x_0 и y_0 и состоящая поочередно из вершин множеств S_1 и S_2. Пусть C кратчайшая цепь с указанным свойством. Рассмотрим подцепь C_0 цепи C наименьшей длины и такую, что один конец $s_1 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$, а другой конец $s_2 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$. Цепь C_0 с ребрами (x, s_1), (x, s_2), составляет нечетную дырку, что завершает доказательство леммы.

Следствие 1. (Обобщение теоремы Байнеке, Харари и Пламмера ([1])) Через любые пары смежных критических ребер проходит нечетная дырка.

Следствие 2. Если $U^1 \subset U_x$, $U^2 \subset U_x$, $U^1 \neq U^2$ — минимальные критические множества для графа G, то существуют ребра $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ и $u_2 \in U^2 \setminus U^1$, через которые проходит нечетная дырка.

Следствие 3. Если $U^1 \subset U_x$, $U^2 \subset U_x$ — такие критические множества, что для любых $U' \subset U^1$ и $U'' \subset U^2$ объединение $U' \cup U''$ не является критическим множеством, то существуют ребра $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ и $u_2 \in U^2 \setminus U^1$ через которые проходит нечетная дырка.

Лемма 3. *Если в графе G все циклы нечетные длины имеют по крайней мере две диагонали и в некотором цикле μ нечетным длины диагонали выходят только из вершины x, то x смежна со всеми вершинами цикла μ.*

Лемма легко доказывается по индукции.

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы напомним, что граф G называется критически несовершенным, если $\alpha(G) < \theta(G)$, но $\alpha(G') = \theta(G')$, для любого порожденного подграфа G' графа G и заметим, что из теоремы 3.11 работы ([6]) следует:

Следствие а. В критически несовершенном графе G, для любой наибольшей клики Q графа G существует только одно непересекающееся с Q наибольшее внутренне устойчивое множество.

Следствие б. Для любой вершины x критически несовершенного графа G существуют ровно $\alpha(G)$ различных наибольших внутренне устойчивых множеств содержащих вершину x.

Теорема 1. *Граф, каждый цикл нечетный длины которого имеет по крайней мере две диагонали, совершенный.*

Доказательство. Пусть теорема не верна. Тогда существует критически несовершенный граф G, удовлетворяющий условиям теоремы. Пусть Q — некоторая наибольшая клика в графе G. Тогда по следствию a, существует ровно одно наибольшее внутренне устойчивое множество S, такое, что $S \cap Q = \varnothing$. Пусть x — произвольная вершина из Q. Очевидно, что $N = \Gamma_x \cap S \neq \varnothing$. Обозначим через s_0 ту вершину из множества N, для которой выполняется равенство

$$|\Gamma_{s_0} \cap Q| = \max_{s \in N} |\Gamma_s \cap Q|.$$

Ясно, что существует вершина z, принадлежащая Q и не смежная с s_0. Согласно следствию б существует наибольшее внутренне устойчивое множество S' графа G, содержащее вершину z, но не содержащее вершину s_0. Обозначим через $M=\Gamma_x \cap S'$. Рассмотрим граф G', который получается из G удалением всех ребер вида (x, y), где $y \in [N \setminus \{s_0\}] \cup [M \setminus \{z\}]$. Докажем, что $\alpha(G')=\alpha(G)$. Пусть это не так. Тогда существует внутренне устойчивое множество S'' в графе G', такое, что $|S''|>\alpha(G)$. Ясно, что $S''\cap Q=\{x\}$ и $s_0 \notin S''$. Но тогда $S''\setminus\{x\}$ будет наибольшим внутренне устойчивым множеством в графе G, отличным от S и непересекающимся с Q, что противоречит следствию a.

Теперь легко заметить, что ребра (x, s_0) и (x, z) являются критическими в графе G'. Согласно следствию 1 существует нечетная дырка $\mu=(x, z, x_1, \ldots, x_{2k}, s_0)$, проходящая через эти ребра, все вершины которой, отличные от x, принадлежат множеству $S \cup S'$. μ будет простым циклом нечетной длины в графе G, диагонали которого выходят только из вершины x. Следовательно, по лемме 3 вершина x смежна со всеми вершинами цикла μ. Легко заметить, что $x_1 \in N$. По выбору s_0 существует вершина $y \in \Gamma_{s_0} \cap Q$, несмежная с x_1. Тогда $\mu'=(y, z, x_1, \ldots, x_{2k}, s_0)$ будет простым циклом нечетной длины в графе G, все диагонали которого выходят из вершины y. Вновь, согласно лемме 3, вершина y смежна со всеми вершинами цикла μ', что противоречит выбору y. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие (Теорема Олару [2]). Если каждый простой цикл нечетный длины графа G имеет по крайней мере пару пересекающихся диагоналей, то G—совершенный.

Заметим, что если каждый цикл нечетный длины графа G имеет по крайней мере две диагонали, то G удовлетворяет условиям второй гипотезы Бержа.

Дадим определение понятия критической компоненты, которое является обобщением реберно-критической компоненты, и с его помощью сформулируем необходимое и достаточное условие для совершенных графов, а также утверждение, равносильное второй гипотезе Бержа.

Пару вершин x и y графа G назовем критической, если разрез U_A, определенный произвольным множеством A, где $x \in A$, $y \notin A$ является критическим. Максимальный подграф, у которого любая пара вершин критическая, назовем критической компонентой. Ребро $u=(x, y)$ назовем существенным, если при любом α- покрытии x и y принадлежат одному и тому же полному подграфу т. е. $\alpha(G\setminus u)>\alpha(G)$.

Существенной компонентой будем называть максимальный подграф у которого любые две вершины связаны цепью, составленной из существенных ребер.

Легко доказать следующие теоремы:

Теорема 2. *В совершенном графе критические и существенные компоненты совпадают.*

Теорема 3. *Граф совершенный тогда и только тогда, когда критические компоненты любого подграфа полные.*

Заметим, что аналогичное утверждение не верно для реберно-критических компонент. Из теоремы 3 следует, что вторая гипотеза Бержа равносильна следующему утверждению:

Если граф G и его дополнение не содержат нечетных дырок и G является критической компонентой, то G—полный граф.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Ե. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ, Ի. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Կատարյալ գրաֆների մասին

Դիցուք $G=(X, U)$ սովորական գրաֆ է, իսկ $\alpha(G)$ և $\sigma(G)$, համապատասխանաբար, G գրաֆի ներքին կայունության (ամենամեծ թվով զույգ առ զույգ իրար ոչ կից գագաթների քանակը) և ծածկույթի (G գրաֆի բոլոր գագաթները ծածկող ամենափոքր թվով լրիվ ենթագրաֆների քանակը) թվերն են։ Կասենք, որ G գրաֆն ունի α-ծածկույթ, եթե $\alpha(G)=\sigma(G)$. G գրաֆը կոչվում է կատարյալ, եթե G գրաֆի յուրաքանչյուր ծնված ենթագրաֆ ունի α-ծածկույթ։

Հոդվածում բացահայտված են կրիտիկական բազմությունների և կողերի մի քանի կարևոր հատկություններ, որոնք հանդիսանում են Բայնեկե-Խարարի-Պլամերի կողմից ապացուցված թեորեմի ընդհանրացումներ և որոնց օգնությամբ ապացուցված է Օլարուի հիպոթեզը։

Եթե G գրաֆի կենտ երկարությամբ յուրաքանչյուր ցիկլ ունի առնվազն երկու անկյունագծեր, ապա այն կատարյալ է։ Հոդվածի վերջում ձևակերպված է Բերժի երկրորդ հիպոթեզին համարժեք պնդում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. Beineke, F. Haray, M. Plummer,* Pacific J. Math., 22 (1967). [2] *E. OLaru,* Elektronische Informationverarbeitung und Kyberetik, EIK 8, 2/3 (1972). [3] *C. Berge,* Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe, 114 (1961). [4] *L. A. Lovasz,* J. Comb. Theory, v. 13, № 2 (1972). [5] *С. Е. Маркосян,* ДАН Арм. ССР, т. 60, № 4 (1975) [6] *M. Padberg,* Math. Programming 6 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIII 1976 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

Решение основной смешанной задачи плоской теории упругости для односвязных областей с углами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 2/VI 1976)

Настоящая статья посвящена решению основной смешанной задачи плоской теории упругости для односвязной области, граница которой имеет угловые точки. Основная смешанная задача для областей с гладкой границей решена Д. И. Шерманом [1]. В работах [2,3] рассмотрены решения основной смешанной задачи для полукруговой области.

В приводимом ниже решении, ограничиваясь для простоты случаем, когда упругое тело занимает на плоскости конечную область, предлагается метод решения основной смешанной задачи для односвязной области с углами, основанный на непосредственном выделении локальных решений, возникающих в окрестности угловых точек контура

В работах автора [4,5] этот метод был применен к решению плоской задачи теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе напряжениях или смещениях.

1. Пусть конечная односвязная область S ограничена кусочно-гладким замкнутым контуром L, имеющим m угловых точек a_j. Положим, что граница области имеет $2m_1$ угловых точек, в которых меняются граничные условия, m_2 угловых точек, расположенных на участках границы, на которых заданы напряжения, и m_3 угловых точек, расположенных на участках границы, на которых заданы перемещения ($m=2m_1+m_2+m_3$).

Примем, что на участках $L'_{2j-1}=a_{2j-1}a_{2j}$ ($j=1, 2, \ldots, m_1$), не имеющих общих концов, положительные напряжения которых совпадают с положительным направлением обхода контура L, заданы напряжения, а на участках $L''_{2j}=a_{2j}a_{2j+1}$, причем, $a_{2m_1+1}=a_1$, заданы перемещения. Совокупность дуг L'_{2j-1} обозначим через L', а совокупность дуг L''_{2j}—через L''.

Как известно [6], граничные условия задачи записываются так

$$\varphi^*(t) + t\overline{\varphi^{*\prime}(t)} + \overline{\psi^*(t)} = f(t) + C(t) \quad \text{при } t \in L' \tag{1.1}$$

$$\varkappa\varphi^*(t) - t\overline{\varphi^{*\prime}(t)} - \overline{\psi^*(t)} = g(t) \quad \text{при } t \in L'' \tag{1.2}$$

Здесь

$$f(t) = i\int_{a_{2j-1}}^{t} (X_n + iY_n)ds, \quad \text{при } t \in L'_{2j-1}$$

$$g(t) = 2\mu(u + iv), \quad \text{при } t \in L'_{2j}$$

$$C(t) = C_{2j-1} \quad (j = 1, 2, \ldots m_1). \tag{1.3}$$

Будем полагать, что $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гельдера соответственно на каждом из участков L'_{2j-1} и L'_{2j}.

На основании (4.5), для выделения локальных решений, возникающих в окрестности угловых точек контура, функции $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ представим в виде

$$\varphi^*(z) = \varphi(z) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z),$$

$$\psi^*(z) = \psi(z) + \sum_{j=1}^{m} [\psi_j(z) - \bar{a}_j\varphi'_j(z)]. \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и (1.2), получаем

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C(t) - \sum_{j=1}^{m} [\varphi_j(t) + (t - a_j)\overline{\varphi'_j(t)} + \overline{\psi_j(t)}]$$

$$\text{при } t \in L' \tag{1.5}$$

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = g(t) - \sum_{j=1}^{m} [\varkappa\varphi_j(t) - (t - a_j)\overline{\varphi'_j(t)} - \overline{\psi_j(t)}]$$

$$\text{при } t \in L'' \tag{1.6}$$

где

$$\varphi_j(z) = \varphi_{1j}(z - a_j) + \overline{\varphi}_{2j}(z - a_j),$$

$$\psi_j(z) = \chi'_{1j}(z - a_j) + \overline{\chi}'_{2j}(z - a_j). \tag{1.7}$$

Голоморфные функции φ_{1j}, φ_{2j}, χ_{1j} и χ_{2j} образуют комплексную бигармоническую функцию Гурса

$$U_j(x, y) = \chi_{1j}(z - a_j) + \chi_{2j}(\bar{z} - \bar{a}_j) + (\bar{z} - \bar{a}_j)\varphi_{1j}(z - a_j) + (z - a_j)\varphi_{2j}(\bar{z} - \bar{a}_j).$$

которая при значениях

$$\chi_{1j}(z - a_j) = d_{1j}(z - a_j)^{\lambda_j + 1}, \quad \chi_{2j}(z - a_j) = d_{2j}(z - a_j)^{\lambda_j + 1},$$

$$\varphi_{1j}(z - a_j) = d_{3j}(z - a_j)^{\lambda_j}, \quad \varphi_{2j}(z - a_j) = d_{4j}(z - a_j)^{\lambda_j} \text{ и } z - a_j = r_j e^{i\theta_j} \tag{1.8}$$

имеет следующее представление в полярных координатах:

$$U_j(r^j,\theta_j)=r_j^{\lambda_j+1}[b_{1j}\sin(\lambda_j+1)\theta_j+b_{2j}\cos(\lambda_j+1)\theta_j+b_{3j}\sin(\lambda_j-1)\theta_j+$$
$$+b_{4j}\cos(\lambda_j-1)\theta_j], \tag{1.9}$$

где

$$b_{1j}=i(d_{1j}-d_{2j}),\ b_{2j}=d_{1j}+d_{2j},\ b_{3j}=i(d_{3j}-d_{4j}),\ b_{4j}=d_{3j}+d_{4j} \tag{1.10}$$

i-мнимая единица.

Следуя Вильямсу ([7]), удовлетворяя с помощью (1.9) однородным условиям на прямолинейных сторонах сектора $\theta_j=\alpha_j$ и $\theta_j=\beta_j$, образованного касательными, проведенными к контуру в точке a_j так, что угол β_j-α_j представлял угол области в рассматриваемой угловой точке контура, получаем систему четырех однородных уравнений для определения коэффициентов b_{kj} ($k=1,2,3,4$; $j=1,2,...m$). Полагая, что поведение напряжений и смещений в угловой точке a_j совпадает с поведением этих же величин в окрестности вершины вышеуказанного сектора, как это имеет место также при изгибе тонких плит ([8]), комплексное число λ_j будем определять как корень с наименьшей положительной действительной частью характеристического уравнения, получающегося из условия существования нетривиальных решений однородной системы для определения коэффициентов b_{kj}.

Как известно ([7]), λ_j будет корнем одного из уравнений

$$\sin^2\lambda_j(\beta_j-\alpha_j)=\lambda_j^2\sin^2(\beta_j-\alpha_j), \tag{1.11}$$

$$\varkappa^2\sin^2\lambda_j(\beta_j-\alpha_j)=\lambda_j^2\sin^2(\beta_j-\alpha_j), \tag{1.12}$$

$$4\lambda_j^2\sin^2(\beta_j-\alpha_j)+4\varkappa\sin^2\lambda_j(\beta_j-\alpha_j)-(\varkappa+1)^2=0 \tag{1.13}$$

соответственно, в случаях, когда на сторонах угла заданы напряжения, смещения или вершина угла является точкой смены граничных условий.

Учитывая, что во всех трех случаях ранг матриц вышеуказанных однородных систем равен трем, нетривиальные решения систем имеют вид:

$$b_{1j}=X_{1j}b_{4j},\ b_{2j}=X_{2j}b_{4j},\ b_{3j}=X_{3j}b_{4j} \tag{1.14}$$

Подставляя (1.7) в (1.5) и (1.6), с учетом (1.8), (1.10.) и (1.14), получаем

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C(t)-\sum_{j=1}^{m}[b_{4j}\xi_j(t)+\overline{b}_{4j}\eta_j(t)]\ \text{при}\ t\in L' \tag{1.15}$$

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=g(t)-\sum_{j=1}^{m}[b_{4j}\zeta_j(t)+\overline{b}_{4j}\omega_j(t)]\quad\text{при}\quad t\in L'' \tag{1.16}$$

где

$$2\xi_j(t)=(1-iX_{3j})(t-a_j)^{\lambda_j}+\lambda_j(1+iX_{3j})(t-a_j)(\overline{t}-\overline{a}_j)^{\lambda_j-1}+$$
$$+(\lambda_j+1)(X_{2j}+iX_{1j})(\overline{t}-\overline{a}_j)^{\lambda_j},$$
$$2\eta_j(t)=(1-i\overline{X}_{3j})(t-a_j)^{\overline{\lambda}_j}+\overline{\lambda}_j(1+i\overline{X}_{3j})(t-a_j)(\overline{t}-\overline{a}_j)^{\overline{\lambda}_j-1}+$$
$$+(\overline{\lambda}_j+1)(\overline{X}_{2j}+i\overline{X}_{1j})(\overline{t}-\overline{a}_j)^{\overline{\lambda}_j},$$

$$2\xi_j(t)=\varkappa(1-iX_{3j})(t-a_j)^{\gamma_j}-\gamma_j(1+iX_{3j})(t-a_j)(\bar t-\bar a_j)^{\gamma_j-1}-$$
$$-(\gamma_j+1)(X_{2j}+iX_{1j})(\bar t-\bar a_j)^{\gamma_j},$$
$$2\omega_j(t)=\varkappa(1-i\bar X_{3j})(t-a_j)^{\bar\gamma_j}-\bar\gamma_j(1+i\bar X_{3j})(t-a_j)(\bar t-\bar a_j)^{\bar\gamma_j-1}-$$
$$-(\bar\gamma_j+1)(\bar X_{2j}+i\bar X_{1j})(\bar t-\bar a_j)^{\bar\gamma_j} \qquad (1.17)$$

Для решения поставленной задачи необходимо определить голоморфные в S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также m вообще комплексных постоянных b_{4j} и m_1 постоянных C_{2j-1} $(j=1,2, \ldots m_1)$ из граничных условий (1.15) и (1.16).

2. Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем представлять интегралом типа Коши с действительной плотностью [6,9].

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_1(\tau)d\tau}{\tau-z}+iD_1, \qquad (2.1)$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_2(\tau)-\bar\tau\mu_1'(\tau)}{\tau-z}d\tau+iD_2, \qquad (2.2)$$

где $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$-действительные непрерывные функции, имеющие интегрируемые производные; D_1 и D_2-действительные постоянные.

Предельные значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, определяемые по формулам Сохоцкого-Племеля, на контуре L имеют устранимые разрывы в угловых точках a_j. Будем приписывать в точке a_j функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предельные значения соответственно функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, когда точка z стремится к узлу a_j по дуге L_{j-1} или L_j. Можно показать, что эти предельные значения равны между собой.

Подставляя предельные значения (2,1) и (2,2) в граничные условия (1.15) и (1.16), предварительно переходя в них к комплексно-сопряженным значениям, после некоторых преобразований, получаем следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\mu_1(t)+\mu_2(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\mu_1(\tau)d\bar\tau}{\bar\tau-\bar t}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\mu_2(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\mu_1(\tau)d\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}=$$

$$=2\overline{f(t)}+2\overline{C(t)}+2i(D_1-D_2)-2\sum_{j=1}^{m}\{\bar b_{4j}\xi_j(t)+b_{4j}\overline{\eta_j(t)}\} \quad \text{при } t\in L' \qquad (2.3)$$

$$\varkappa\mu_1(t)-\mu_2(t)-\frac{\varkappa}{\pi i}\int\limits_L\frac{\mu_1(\tau)d\bar\tau}{\bar\tau-\bar t}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\mu_2(\tau)d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\mu_1(\tau)d\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}=$$

$$=2\overline{g(t)}+2i(\varkappa D_1+D_2)-2\sum_{j=1}^{m}\{\bar b_{4j}\overline{\xi_j(t)}+b_{4j}\overline{\omega_j(t)}\} \quad \text{при } t\in L'' \qquad (2.4)$$

Отделяя действительные и мнимые части в (2.3) и (2.4) и, далее, выделяя сингулярный оператор в мнимой части, после некоторых преобразований получаем

$$\mu_1(t)+\mu_2(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L [\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau)]\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}+\frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu_1(\tau)\,\mathrm{Im}\,d\,\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}[f(t)+C(t)]-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m} b_{1j}[\xi_j(t)+\overline{\eta_j(t)}]\quad \text{при}\quad t\in L' \tag{2.5}$$

$$\varkappa\mu_1(t)-\mu_2(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L [\varkappa\mu_1(\tau)-\mu_2(\tau)]\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu_1(\tau)\,\mathrm{Im}\,d\,\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\,g(t)-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m} b_{1j}[\zeta_j(t)+\overline{\omega_j(t)}]\quad \text{при}\quad t\in L'' \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\nu(\tau)d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}[(\varkappa-1)\mu_1(\tau)+2\mu_2(\tau)]\frac{d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L[\mu_1(\tau)-\mu_2(\tau)]\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \mu_1(\tau)\,\mathrm{Re}\,d\,\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}+2i\,\mathrm{Im}\,[f(t)+C(t)]-2i(D_1-D_2)+$$

$$+2i\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{m} b_{1j}[\overline{\eta_j(t)}-\xi_j(t)]\qquad \text{при}\ t\in L' \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\nu(\tau)d\tau}{\tau-t}=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}[(\varkappa-1)\mu_1(\tau)+2\mu_2(\tau)]\,\frac{d\tau}{\tau-t}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L[\varkappa\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau)]\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \mu_1(\tau)\,\mathrm{Re}\,d\,\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}+$$

$$+2i\,\mathrm{Im}\,g(t)-2i(\varkappa D_1+D_2)+2i\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{m} b_{1j}[\overline{\omega_j(t)}-\zeta_j(t)]\ \text{при}\ t\in L'', \tag{2.8}$$

где

$$\nu(\tau)=\begin{cases}\mu_1(\tau)-\mu_2(\tau) & \text{при}\quad \tau\in L'\\ \varkappa\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau) & \text{при}\quad \tau\in L''\end{cases}$$

Можно показать, что интегральные операторы, входящие в (2.5) и (2.6), являются равностепенно непрерывными функциями от t. Правые же части (2.7) и (2.8) являются функциями, удовлетворяющими условию H_0 на всей границе $L^{(e)}$.

Таким образом, задача отыскания функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ свелась к разрывной задаче—решению регулярного интегрального уравнения второго рода (2.5) и (2.6) и сингулярного интегрального уравнения (2.7) и (2.8). Регуляризация этого уравнения, определение неизвестных постоянных C_{2j-1}, b_{1j}, а также доказательство разрешимости полученных интегральных уравнений должны стать предметом отдельного исследования.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ

Միակապ, անկյուններով տիրույթի համար առաձգականության տեսության հարթ հիմնական խառը խնդրի լուծումը

Հոդվածում բերված է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը միակապ, անկյուններով տիրույթի համար, երբ նրա եզրագծի որոշ մասում տրված են տեղափոխությունները, իսկ մնացած մասում՝ լարումները։

Նախապես անջատելով անկյունային կետերում առաջացող տեղական լուծումները, խնդիրը բերվում է երկու ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որոնցից մեկը ռեգուլյար է, իսկ մյուսը՝ սինգուլյար։ Սինգուլյար հավասարման ռեգուլյարացումը և ինտեգրալ հավասարումների լուծելիության ապացույցը բերված է առանձին հոդվածում, որը հաջորդում է ներկայինին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. И. Шерман*, ДАН СССР, т. XXVIII, № 1 (1940). [2] *А. И. Каландия*, Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили. М., 1961. [3] *Д. И. Шерман*. Приложения теория функций в механике сплошной среды. Труды международного симпозиума в Тбилиси, М., 1965. [4] *С. С. Заргарян*, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 1 (1975). [5] *С. С. Заргарян*, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 3 (1975). [6] *Н. И. Мусхелишвили*. Сингулярные интегральные уравнения, изд. «Наука», М., 1968. [7] *M. L. Williams*, I. of Appl. Mech., vol. 19. № 4 (1952). [8] *О. М. Сапонджян*. Изгиб тонких упругих плит, изд. „Айастан“, Ереван 1975. [9] *Н. Е. Товмасян*, ДАН СССР, т. 160, № 5 (1965).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIII 1976 5

УДК 621.382.3

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Г. М. Авакьянц

S-образная вольт-амперная характеристика и шнурование тока в коллекторном переходе сверхмощных транзисторов

(Представлено 24/VI 1976)

В сверхмощных транзисторах, где концентрация носителей в режиме насыщения становится свыше 10^{17} $см^{-3}$ [1] существенную роль начинают играть электронно-дырочные столкновения. Как уже было показано [1] p-n—столкновения приводят к возникновению участка отрицательного сопротивления на ВАХ внутри коллекторного перехода.

Здесь эту особенность работы транзистора рассмотрим подробнее.

Исходя из уравнения (2) в [1] мы получаем следующее выражение для концентрации электронов внутри коллекторного перехода (см. [1] обозначения в (1)):

$$n_0=\frac{1}{2}\left[\frac{b+1}{2}\,\frac{EH_{n0}}{T}-1\right]n_{кр}\pm\left[\frac{1}{4}\left(\frac{b+1}{2}\,\frac{EH_{n0}}{T}-1\right)^2 n_{кр}^2-\right.$$

$$\left.-\frac{N_a+N_{gk}}{2\lambda_0}\,(b+1)H_{n0}\,n_{кр}\right]^{1/2}\quad b=\frac{U_p}{U_n}. \tag{1}$$

Это соотношение с постоянным $n_{кр}$ позволяет проанализировать ход ВАХ коллекторного перехода до начала участка отрицательного сопротивления (ОС) и на самом участке ОС. Следует сразу оговорить, что в [1] H_{n0} величина постоянная и равная длине высокоомной части (ВОЧ) коллектора только тогда, когда вся эта область промодулирована, причем достаточно однородно.

Поэтому, даже говоря о небольших относительно концентрациях мы все же будем предполагать, что и в этом случае ВОЧ коллектора промодулирован достаточно однородно и до конца и, что концентрации носителей по обе стороны от коллекторного перехода практически одинаковы (это имеет место, если $n_0 > N_a$, N_{kg}, см. [1]). Когда ВОЧ промодулирована лишь частично, это соответствует переходному случаю, ибо в конечном счете нас интересует режим модуляции, с наименьшим остаточным напряжением на ВОЧ. Итак, при малых концентрациях в (1) следует взять перед корнем знак минус. Разлагая подкоренное выражение находим при малых n_0:

$$n_0 = \frac{(N_a + N_{gk})T}{EH_0}. \tag{2}$$

Как видно из (2) с уменьшением E (т. е. ростом внешнего инверсионного напряжения, на коллекторном переходе см. ([1])) n_0 растет. Однако при дальнейшем уменьшении E подкоренное выражение в (1) может обратиться в нуль. При этом дальнейшее уменьшение E становится невозможным.

Если $\frac{b+1}{2}\frac{EH_{во}}{T} \gg 1$, то:

$$\frac{b+1}{2}\frac{E_{min}H_{во}}{T} = \sqrt{\frac{2H_{во}}{\lambda}\frac{N_a + N_{gk}}{n_{кр}}(b+1)}. \tag{3}$$

После достижения своего минимального значения E может только возрастать, а соответствующее инверсионное напряжение на коллекторном переходе будет падать. Это и есть участок ОС. Чтобы получить концентрацию n_0 на участке ОС теперь перед корнем в (1) надо взять знак плюс. Пренебрегая под корнем числом с $(N_n + N_{gk})$, находим:

$$n_0 = \frac{b+1}{2}\frac{EH_{во}}{T} n_{кр}. \tag{4}$$

Как мы видим с уменьшением инверсионного напряжения n_0 растет.

Окончание участка отрицательного сопротивления можно усмотреть, если принять во внимание явление экранировки заряда при p-n—столкновениях. Дело в том, что $n_{кр}$ в действительности не постоянная величина, а зависит от n_0:

$$n_{кр} = \frac{n_1}{2\left[\ln\left(1 + \frac{\bar{n}}{n_0}\right) - \frac{\bar{n}/n_0}{1 + \bar{n}/n_0}\right]} \tag{5}$$

Здесь n_1 и n_0 постоянные, имеющие размерность концентрации $\bar{n} \sim 1 \div 3 \cdot 10^{18}$ $см^{-3}$ ([2]). Как только дебаевская длина сравнивается с длиной де-бройлевской волны частицы с эффективной массой электрона и дырки, наступает достаточно сильная экранировка и p-n—столкновения становятся менее интенсивными.

Это приводит к исчезновению участка ОС.

Нетрудно теперь видеть, что в целом возможна с ростом тока (последний пропорционален n_0) характеристика S-типа. Одному значению инверсионного напряжения будет соответствовать три концентрации или три значения тока.

Как известно ([3]), указанная неоднозначность ведет к шнурованию тока. В данном случае такое шнурование может иметь место в коллекторном переходе.

Чтобы выяснить условия, при которых может возникнуть шнур тока, обратимся к уравнению непрерывности тока. Пусть ток течет по оси x. Нас интересует распределение носителей в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Причем, ограничимся изучением шнуров, размеры которых, скажем, в направлении y неограничены, а по z — конечны. Будем считать, что диффузия частиц из шнура является основной причиной приводящей к конечному его размеру (в противном случае шнур был бы бесконечно узким).

Тогда, после интегрирования уравнения непрерывности по координате x в пределах коллекторного перехода мы для плотности тока, на единицу длины по оси y получим следующий вид этого уравнения:

$$-\eta\frac{dI}{dZ}=2N+\frac{1-\xi N}{1+2\dfrac{N}{N_1}\left[\ln\left(1+\dfrac{\overline{N}}{N}\right)-\dfrac{\overline{N}}{N+\overline{N}}\right]}K. \tag{6}$$

Здесь: $\eta=\dfrac{D}{D_n}$, $\overline{N}=\dfrac{\overline{n}}{N_0}$; $N_0=N_a+N_{gk(b+1)}$, $N_1=\dfrac{\overline{n}}{N_0}$,

$$\xi=\frac{b+1}{T}E\lambda_0,\quad K=\frac{H_{\text{во}}}{\lambda_0},\quad I=\frac{j}{N_0D_n}\sqrt{H_{\text{во}}\lambda_0},$$

$$N=\frac{n_0}{N_0};\qquad Z=\frac{Z}{\dfrac{D}{D_n}\sqrt{H_{\text{во}}\lambda_0}}$$

D-амбиполярный коэффициент диффузии дырок и электронов в направлении оси Z.

К уравнению (6) нужно добавить уравнение определяющее состав тока вдоль направления z:

$$I=-\frac{dN}{dZ}. \tag{7}$$

Исключая из (6) и (7) dZ, а затем выполняя интегрирования комбинированного уравнения, получаем:

$$\frac{\eta^2}{2}I^2=\int\limits_{N_{\min}}^{N}\left(2N+\frac{1-\xi N}{1+2\dfrac{N}{N_1}\left[\ln\left(1+\dfrac{\overline{N}}{N}\right)-\dfrac{\overline{N}}{N+\overline{N}}\right]}K\right)dN. \tag{8}$$

Здесь $N_{\min}$—безразмерная концентрация носителей вне шнура. $I(N_{\min})=0$. Обозначая через $N_{\max}$ концентрацию в центре шнура и замечая, что $I(N_{\max})=0$, находим условие устойчивости шнура:

$$\int\limits_{N_{\min}}^{N}\left(2N+\frac{(1-\xi N)K}{1+2\dfrac{N}{N_1}\left[\ln\left(1+\dfrac{\overline{N}}{N}\right)-\dfrac{\overline{N}}{N+\overline{N}}\right]}\right)dN=0. \tag{9}$$

Если обозначить через $\overline{N}$—среднюю концентрацию носителей в шнуре, то согласно определению:

$$\overline{N} = N_{\min} + \frac{2}{L} \int\limits_{N_{\min}}^{N_{\max}} N \left| \frac{dZ}{dN} \right| dN, \tag{10}$$

где L —безразмерная ширина полоски тока через коллектор при однородном распределении носителей.

Из (7) и (10) находим:

$$\overline{N} - N_{\min} = \frac{2}{L} \int\limits_{N_{\min}}^{N_{\max}} \frac{NdN}{I}. \tag{11}$$

С другой стороны:

$$(\overline{N} - N_{\min})\, L = \frac{1}{2} N_{\max} L_s, \tag{12}$$

где L_s —ширина шнура.

Используя (8), (9), (11) и (12) можно найти концентрацию носителей на оси $N_{\max}$ и ширину шнура L_s.

Устойчивость шнура, согласно (9) возможна только тогда, когда уже на оси шнура имеет место заметная экранировка при р-п-рассеянии. Это значит, что для оценочного расчета мы можем в (9) разложить логорифм в ряд по отношению $\frac{\overline{N}}{N}$. Вместо (9) таким образом, приближенно имеем:

$$\int\limits_{N_{\min}}^{N_{\max}} \left(2N + \frac{1 - \xi N}{1 + \frac{\overline{N}^2}{N_1 N}} K \right) dN = 0. \tag{13}$$

Пусть сначала $\frac{\overline{N}^2}{N_1 N} < 1$, тогда из (10) без большой ошибки находим ($N_{\min} \to 0$):

$$N_{\max} = \frac{2K}{\xi K - 2}. \tag{14}$$

В том же приближении из (11):

$$(\overline{N} - N_{\min}) L = \sqrt{2\eta} \int\limits_{0}^{N_{\max}} \frac{NdN}{\sqrt{KN - (\xi K - 2)\frac{N^2}{2}}}. \tag{15}$$

Или по порядку величину:

$$2\sqrt{2\eta}\ \frac{N_{max}^{3/2}}{\sqrt{K}}=(\overline{N}-N_{min})L. \qquad (16)$$

Сравнивая правые части выражений (16) и (12) находим:

$$L_s\sim 4\sqrt{\frac{2\eta N_{max}}{K}}=\frac{8\sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi K-2}}. \qquad (17)$$

Примем теперь обратное соотношение $\frac{\overline{N}^2}{N_1N}>1$.

Из (13) находим для этого случая:

$$N_{max}\simeq 3\frac{\overline{N}^2}{N_1K\xi}. \qquad (18)$$

Теперь вместо (15) имеем:

$$(\overline{N}-N_{min})L=\sqrt{2\eta}\int\limits_0^{N_{max}}\frac{\sqrt{N_{max}}\,dN}{\sqrt{N_{max}-N}} \qquad (19)$$

или

$$(\overline{N}-N_{min})L=2\sqrt{2\eta}\ N_{max}, \qquad (20)$$

то есть:

$$L_s=4\sqrt{2\eta}. \qquad (21)$$

В размерном виде (14) и (18) принимают вид:

$$n_{max}\simeq\frac{2K(N_n+N_{gk})}{\xi K-2},\quad \frac{\overline{N}^2}{N_1N}<1, \qquad (22)$$

$$n_{max}\simeq 3\frac{\overline{n}^2}{K\xi n_1},\quad \frac{\overline{N}^2}{N_1N}>1. \qquad (23)$$

Принятые в процессе получения (22) и (23) неравенства накладывают ограничения на значения N_a обеспечивающие возникновение шнура.

В самом деле, согласно (3):

$$\xi_{min}=2\sqrt{\frac{2(N_a+N_{gk})}{n_{kp}K}}. \qquad (24)$$

Причем n_{kp} в (24) соответствует точке, где $n_0=1/4\xi_{min}Kn_{kp}$.

Значение ξ в (22) и (23) больше, чем ξ_{min}. Положим:

$$\xi=\alpha\xi_{min}, \qquad (25)$$

где $\alpha>1$. Тогда из принятых неравенств:

$$\frac{\overline{n^2}}{n_1 n_{max}} > 1, \quad n_{max} > \overline{n}, \tag{26}$$

вытекает, что

$$\frac{\left(1 + \frac{KN_0}{\overline{n}}\right)^2}{\alpha^2} < 2K\frac{N_0}{n_{кр}} < \frac{\left(1 + \frac{KN_0 n_1}{\overline{n^2}}\right)^2}{\alpha^2}. \tag{27}$$

Из (27) видно, что шнурование возможно здесь только, если:

$$n_1 > \overline{n_1}. \tag{28}$$

В случае, когда вместо (26) мы имеем:

$$\frac{\overline{n^2}}{n_1 n_{max}} < 1, \quad n_{max} > \overline{n}, \tag{29}$$

получается

$$\frac{n_{кр}}{\alpha^2 K} < N_0 < \frac{n_{кр}}{\alpha^2 K}\left(\frac{\overline{n}}{n_1}\right)^2 \tag{30}$$

Таким образом, здесь шнурование появляется только при $n > n_1$. Оценки показывают, что неравенство (13) более реально, чем (28).

В том случае, если соотношения (27) и (30) не выполняются шнурование будет отсутствовать. Так, например, согласно (30),

если $\alpha = 2$, $K = 10^2$, $\frac{\overline{n}}{n_2} = 3$, то шнурование не будет, если

$$N_0 < 2 \cdot 10^{14}\ см^{-3} \text{ и } N_0 > 2 \cdot 10^{15}\ см^{-3}.$$

В нашем исследовании шнурования тока при p-n—столкновениях мы ограничились рассмотрением коллекторного перехода. Между тем, если экранировка заряда начинается также в ВОЧ, то в этой области возникает в рамках модели (5) то же отрицательное сопротивление. Для чего n в ВОЧ должно превзойти n уже по всему объему, а не только внутри шнура, как это мы допустили выше.

Согласно (17) и (21) в случае возникновения шнура его ширина может колебаться от нескольких микрон до десятков и даже сотен (последнее если $n_1 > \overline{n}$).

Способны ли такие шнуры, если плотность тока внутри них не будет, вероятно, превышать цифру порядка нескольких тысяч ампер на квадратный сантиметр, помешать нормальной работе сверхмощного транзистора, надо решать для каждого конкретного случая в отдельности.

Ереванский государственный университет

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ Գ. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆՑ

S-ակերպ վոլտ-ամպերային բնութագիրը և հոսանքի քուղավորումը գերհզոր տրանզիստորի կոլեկտորային անցումում

Հոդվածում քննարկվում է հզոր տրանզիստորի կոլեկտորային անցումում հոսանքի համասեռ բաշխման խախտման դեպքը։

Այդպիսի խախտման պայմաններում անցնող հոսանքը հագեցման ռեժիմում կարող է կենտրոնացվել նեղ տիրույթում (քուղ)։

Արտածվում են քուղի գոյության հատկանիշները կախված սարքի պարամետրերից։

Քննարկվում է տրանզիստորի աշխատանքի վրա քուղի ազդեցության հարցը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. М. Авакьянц*, ДАН Арм. ССР, т. LXIII, № 3 (1976). [2] *Э. Конуэлл*, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, Изд. «Мир», М., 1970. [3] *В. Л. Бонч-Бруевич, И. В. Звягин, А. Г. Миронов*, Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках, Изд. «Наука», М., 1972.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ LXIII ՀԱՏՈՐԻ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

СОДЕРЖАНИЕ LXIII ТОМА

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ФИЗИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

ГЕОЛОГИЯ

ГЕОФИЗИКА

МИНЕРАЛОГИЯ

ТЕКТОНИКА

МИКРОБИОЛОГИЯ

БИОФИЗИКА

ВИРУСОЛОГИЯ

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

ЭНТОМОЛОГИЯ

ПАТОФИЗИОЛОГИЯ

CONTENTS OF VOLUME LXIII