ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

LXIII, № 4

1976

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. քարտուղար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Ի. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Հ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, Е. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ERFVAN

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Մ. Լ. Բուրլիշկին—Հատած դեպքում սիմետրիայի վերջավոր խմբով տիրույթում որոշված վեկտոր-ֆունկցիաների վերլուծությունը 193

Ս. Ա. Սոլախյան—Ծրագրերի կոռեկտության ապացուցման աքսիոմատիկ մոտեցում 199

Ն. Բ. Պողոսյան—Չափելի ֆունկցիաների ներկայացում $L_p[0,1]$-ի, ($p > 2$) բազիսներով 205

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Հ. Ազատյան—1-փոփոխական ցիկլիկ 2n-հաջորդականությունների թվարկման ալգորիթմի մասին 210

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Մխիթարյան, Ս. Ս. Շահինյան—Կլոր անցքով անվերջ հարթության լարվածային վիճակի մասին, երբ վերջինս թուլացված է երկու շառավղային ճեղքերով . . 218

Վ. Ս. Նիկիշին, Գ. Ս. Շապիրո—Առաձգականության տեսության միակողմանի կապերով կոնտակտային խնդիրներ 224

ՖԻԶԻԿԱ

Տ. Ի. Բուտաևա, Ա. Ա. Կամինսկի, Ա. Գ. Պետրոսյան, Խ. Ս. Բաղդասարով—300° K ջերմաստիճանում Ho^{3+} և Er^{3+} իոններով $Lu_3Al_5O_{12}$ բյուրեղների ստիպողական ճառագայթումը 232

Գ. Գ. Կարապետյան—Օնդուլյատորի ճառագայթումը ալիքատարում . . . 239

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Կ. Ի. Ավագյան, Մ. Խ. Չայլախյան—Կարճօրյա տեսակների ռեակցիան ֆոտոպերիոդիկ ռեժիմի տարբեր պայմաններում աճման կարգավորիչներով մշակման վրա . . 243

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յաբլոկով-Խնձորյան—Զատկաբզեզների նոր տեսակ Չինաստանից (Coleoptera, Coccinellidae) 250

Журнал издается с 1944 года

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

М. Л. Бурышкин—Разложения вектор-функций, определенных на области с конечной группой симметрии, в усеченном случае 193
С. А. Солахян—Аксиоматический подход к доказательству корректности программ 199
Н. Б. Погосян—Представление измеримых функций базисами $L_p[0,1]$, ($p>2$) 205

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян—Об одном алгоритме для перечисления 1-переменных циклических $2n$- последовательностей 210

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, С. С. Шагинян—О напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, расслабленной двумя радиальными разрезами . 218
В. С. Никишин, Г. С. Шапиро—Контактные задачи теории упругости с односторонними связями 224

ФИЗИКА

Т. И. Бутаева, А. А. Каминский, А. Г. Петросян, Х. С. Багдасаров—Стимулированное излучение при 300 К кристаллов $Lu_3Al_5O_{12}$ с ионами Ho^{3+} и Er^{3+} 232
Г. Г. Карапетян—Излучение ондулятора в волноводе 239

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

К. Г. Азарян, М. Х. Чайлахян—Реакция короткодневных видов на обработку регуляторами роста в условиях различного фотопериодического режима . . 243

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хизорян—Новый вид жесткокрылых-кокцинеллид из Китая (Coleoptera, Coccinellidae) 250

© Издательство АН Армянской ССР, 1976 г.

Индекс 77730

CONTENTS

p.

MATHEMATICS

M. L. Burlshkin — The expansion of the vector - functions defined on a region with finite symmetry group in the frustum case 193
S. A. Solakhian. —An axiomatic approach to proving program correctness 199
N. B. Pogosyan —The presentation of the measurable functions on bases $Lp[0,1]$. $(p>2$ 205

APPLIED MATEMATICS

A. H. Azatian — The Algorithm for the Enumeration of 1-variables of Cyclics of 2^n — consecutives 210

THEORY OF ELASTICITY

S. M. Mkhitarian, S. S. Shahinian — On Stressed State of Infinite Plate with Circular Hole weakened with Two Radial Cracks 218
W. S. Nikishian, G. S. Shapiro — Contact problems of the theory of elasticity with one-sided bonds. 224

PHYSICS

T. I. Butaeva, A. A. Kaminskii. A. G. Petrosyan, Kh. S. Bagdasarov— Stimulated Emission from Er^{3+} and Ho^{3+} doped $Lu_3AL_5O_{12}$ Crystals at 300 K 232
G. G. Karapet.an— Radiation of Undulator in the waveguide . . . 239

PLANT PHYSIOLOGY

M. Kh. Chailakhian, K. G Azarian—Reaction of short-day species to the treatment by growth regulators on the photoperiodic induction phone . . . 243

ENTOMOLOGY

S. M. Iablokoff -Khnzorian — New species of Ladybeetles from China (Coleoptera, Coccinellidae) 250

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 05059. Подписано к печати 3/III 1977 г. Тираж 550. Изд. 4560. Заказ 908.
Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0. Усл. печ. л. 5,6.
Уч. изд. листов 4,19.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутин 24.
Эчмиадзинская типография Изд. АН Армянской ССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 519.45 : 539.3

МАТЕМАТИКА

М. Л. Бурышкин

Разложения вектор-функций, определенных на области с конечной группой симметрии, в усеченном случае

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/V 1976)

В работе (1) в общем виде построено разложение функции p, определенной на области Ω^* с конечной группой H^* симметрии. Однако, если эта функция обладает некоторыми свойствами симметрии по отношению к операциям группы H^*, то практическое применение указанного разложения по функциям, преобразующимся по неприводимым представлениям τ_μ^* группы H^*, в ряде прикладных задач механики ([1,2]) оказывается излишне громоздким, а иногда даже нецелесообразным.

В данной статье исследуются разложения вектор-функций $p_{\nu\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu$), преобразующихся по m_ν-мерному неприводимому представлению τ_ν подгруппы $H \subset H^*$ и определенных на области Ω^*. Этот важный для механических приложений случай по предложению члена-корреспондента АН УССР М. Г. Крейна в дальнейшем называется усеченным.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю признательность М. Г. Крейну за внимание к его работе.

1. Вводятся следующие обозначения: m^* и m — порядки групп H^* и H; $\varkappa$ — индекс подгруппы H; $h^* \in H^*$ и $h \in H$ — элементы соответствующих групп; m_μ^* — размерность представления τ_μ^*; $h^{(t)*} \in H^*$ ($t=1, 2, \ldots, \varkappa$) — элементы, порождающие левые смежные классы $h^{(t)*}H$ при некотором разбиении группы H^* на эти классы; $h^*H(h^*)^{-1} \subset H^*$ — подобная H подгруппа, порожденная элементом h^*, $\tau_{\nu\rho\varphi}(h)$ ($\rho, \varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu$) и $\tau_{\mu\rho\varphi}^*(h^*)$ ($\rho, \varphi = 1, 2, \ldots, m_\mu^*$) — элементы матриц, отвечающих операторам $\tau_\nu(h)$ и $\tau_\mu^*(h^*)$ представлений τ_ν и τ_μ^*; $h^{(1)*}$ — единичный элемент; χ_ν и χ_μ^* — характеры неприводимых представлений τ_ν и τ_μ^*.

Под h^*p понимается заданная на Ω^* вектор-функция, значение которой в точке $x \in \Omega^*$

$$h^*p(x) = h^*[p(h^{*-1}x)] \qquad \forall x \in \Omega^*. \tag{1.1}$$

ՀԱՅԿ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԳՐԱԴԱՐԱՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

Говорят, что вектор-функции $p_{\nu\varphi}$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ преобразуются по представлению τ_ν группы H, если

$$hp_{\nu\varphi} = \sum_{\rho=1}^{m_\nu} \tau_{\nu\rho\varphi}(h) p_{\nu\rho} \quad \forall h \in H \ (\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu). \tag{1.2}$$

Предполагается линейная независимость функций $h^{(t)*}p_{\nu\varphi}$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$, которые, следовательно, порождают $m_\nu \cdot \varkappa$ — мерное пространство L. Подпространство $L^{(t)} \subset L$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ натянуто на m_ν вектор-функций $h^{(t)*}p_{\nu\varphi}$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$. Очевидно, что

$$L = \sum_{t=1}^{\varkappa} L^{(t)}. \tag{1.3}$$

Основываясь на известных свойствах (1.3) разложения группы H^* на смежные классы по подгруппе H, можно показать справедливость следующих двух лемм:

Лемма 1. *Пространство L инвариантно относительно всех элементов группы H^*, причем для каждого элемента $h^* \in H^*$ и каждого значения $t = 1, 2, \ldots, \varkappa$ найдется такое целое положительное число $\theta \leqslant \varkappa$, что*

$$h^* h^{(t)*} p_{\nu\varphi} \in L^{(\theta)} \qquad (\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu). \tag{1.4}$$

Лемма 2. *Если элемент $h^* \in h^{(t)*} H (h^{(t)*})^{-1}$, а вектор-функция $p \in L^{(t)}$, то $h^* p \in L^{(t)}$.*

Кроме того, из соотношения

$$h^{(t)*} h (h^{(t)*})^{-1} h^{(t)*} p_{\nu\varphi} = \sum_{\rho=1}^{m_\nu} \tau_{\nu\rho\varphi}(h) h^{(t)*} p_{\nu\rho} \tag{1.5}$$

$$\forall h \in H \quad (\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu; \quad t = 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

вытекает

Лемма 3. *Подпространство $L^{(t)} \subset L$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ инвариантно относительно подгруппы $h^{(t)*} H (h^{(t)*})^{-1} \subset H^*$.*

2. В силу леммы 1 пространство L преобразуется по регулярному представлению T группы H^*, для которого

$$T(h^*)p = h^* p \quad \forall p \in L, \quad \forall h^* \in H^*. \tag{2.1}$$

В качестве базиса в L естественно принять систему вектор-функций $h^{(t)*}p_{\nu\varphi}$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$, нумеруя их в следующем порядке: $h^{(1)*}p_{\nu 1}, h^{(1)*}p_{\nu 2}, \ldots, h^{(1)*}p_{\nu m_\nu}, h^{(2)*}p_{\nu 1}, h^{(2)*}p_{\nu 2}, \ldots, h^{(2)*}p_{\nu m_\nu}, \ldots, h^{(\varkappa)*}p_{\nu 1}, \ldots, h^{(\varkappa)*}p_{\nu m_\nu}$. Тогда базисные функции с номерами $m_\nu(t-1)+\varphi$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ образуют базис в подпространстве $L^{(t)} \subset L$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa)$.

Теорема 1. *Неприводимое представление τ^*_μ группы H^* входит в усеченном случае в регулярное представление T этой группы l^*_μ раз, причем*

$$l^*_\mu = \frac{1}{m} \sum_{h \in H} \chi_s(h) \overline{\chi^*_\mu(h)}. \tag{2.2}$$

Значения характера χ представления T могут быть записаны в виде

$$\chi(h^*) = \sum_{t=1}^{x} \sum_{s=(t-1)m_t+1}^{m_t t} T_{ss}(h^*) \quad \forall h^* \in H^*. \tag{2.3}$$

В соответствии со способом построения базиса в пространстве L из лемм 1, 2, 3, а также формул (1.5) и (2.1) следует, что при любом значении $t = 1, 2, \ldots, x$

$$\sum_{s=(t-1)m_t+1}^{m_t t} T_{ss}(h^*) = \begin{cases} \chi_s(h) & \forall h^* = h^{(t)*} h (h^{(t)*})^{-1}; \\ 0 & \forall h^* \overline{\in} h^{(t)*} H (h^{(t)*})^{-1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Согласно общей теории представлений групп [2,3]

$$l^*_\mu = \frac{1}{m^*} \sum_{h^* \in H^*} \chi(h^*) \overline{\chi^*_\mu(h^*)}. \tag{2.5}$$

Отсюда, опираясь на соотношения (2.3) и (2.4), легко получить:

$$l^*_\mu = \frac{1}{m^*} \sum_{h^* \in H^*} \overline{\chi^*_\mu(h^*)} \sum_{t=1}^{x} \sum_{s=(t-1)m_t+1}^{m_t t} T_{ss}(h^*) =$$

$$= \frac{1}{m^*} \sum_{t=1}^{x} \sum_{h \in H} \overline{\chi^*_\mu [h^{(t)*} h (h^{(t)*})^{-1}]}\, \chi_s(h).$$

Так как характер представления на сопряженных элементах группы принимает равные значения, то последнее выражение без затруднений преобразовывается в искомое (2.2).

Следствие. *В пространстве L_μ, преобразующемся по представлению τ^*_μ, можно выбрать стандартный относительно представления τ_s базис, в котором матрицы $\hat{\tau}^*_\mu(h)$ операторов $\tau^*_\mu(h)$ будут квазидиагональными, а именно:*

$$\hat{\tau}^*_\mu(h) = \begin{vmatrix} \hat{\tau}^{(1)}_s(h) & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \hat{\tau}^{(l_\mu)}_s(h) \\ & & & B_s(h) \end{vmatrix} \quad \forall h \in H, \tag{2.6}$$

причем представление B_μ группы H, порожденное матрицами $B_\mu(h)$, не содержит неприводимое представление τ_ν, а

$$\hat{\tau}_\nu^{(r)}(h) = \hat{\tau}_\nu \quad \forall h \in H \ (r = 1, 2, \ldots, l_\mu^*). \tag{2.7}$$

Это следствие немедленно вытекает из теоремы 1, так как определенное по формуле (2.2) число l_μ^* согласно выражению (2.5) показывает, сколько раз неприводимое представление τ_ν входит в представление τ_μ^*, редуцированное на подгруппе H.

В дальнейшем предполагается, что матрицы $\hat{\tau}_\mu^*(h^*)$ записаны в стандартном относительно представления τ_ν базисе.

3. В монографии [1] построены специальные операторы

$$P_{\mu\rho}^{(f)*} = \frac{m_\mu^*}{m^*} \sum_{h^* \in H^*} \overline{\tau_{\mu\rho f}^*(h^*)}\, h^* \qquad (\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*), \tag{3.1}$$

действующие в пространстве $L(p)$, порожденном вектор-функциями $h^* p$ ($h^* \in H^*$) и преобразующемся по регулярному представлению T группы H^*. Операторы $P_{\mu\rho}^{(f)*}$ обладают следующими важными свойствами:

$$P_{\mu\rho}^{(f)*} p = p_{\mu\rho}^{(f)*} \qquad (\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*), \tag{3.2}$$

где $p_{\mu\rho}^{(f)*}(\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*)$ — ρ-я базисная вектор-функция f-го подпространства $L_\mu^{(f)*}(p) \subset L(p)$, преобразующегося по представлению τ_μ^*:

$$P_{\mu\rho}^{(f)*} p_{\xi\sigma}^{(l)*} = \delta_{\mu\xi}\delta_{f\varepsilon} p_{\mu\rho}^{(l)*} \quad (\rho, f, l, \varepsilon = 1, 2, \ldots, m_\mu^*); \tag{3.3}$$

$$p = \sum_\mu \sum_{f=1}^{m_\mu^*} P_{\mu f}^{(f)*} p. \tag{3.4}$$

В формуле (3.4) при суммировании индекс μ пробегает все номера представлений τ_μ^*, входящих в представление T.

Нетрудно убедиться в том, что $L(p_{\cdot\varphi}) = L$ ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\cdot$). Это позволяет использовать в дальнейшем выражения (3.1)—(3.4). Следует только иметь ввиду, что в усеченном случае некоторые из операторов $P_{\mu\rho}^{(f)*}$ ($\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*$) будут переводить функции $p_{\cdot\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\cdot$) в ноль.

Теорема 2. *В усеченном случае разложение пространства L, рассматриваемого как $L(p_{\cdot\varphi})$ ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\cdot$), осуществляется операторами*

$$P_{\mu\rho}^{[(r-1)m_\nu+\varphi]*} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m_\mu^*;\ r = 1, 2, \ldots, l_\mu^*)$$

и инвариантно относительно индекса φ, причем

$$P_{\mu\rho}^{[(r-1)m_\nu+\varphi]*} p_{\nu\varphi} = p_{\mu\rho r}^* = \frac{m_\mu^*}{m_\nu \varkappa} \sum_{\sigma=1}^{m_\nu} \sum_{t=1}^{\varkappa} \tau_{\mu\rho,(r-1)m_\nu+\sigma}^*(h^{(t)*}) \times$$

$$\times h^{(l)*} p_{\nu\varphi} (\rho = 1, 2, \ldots, m_\mu^*;\ r = 1, 2, \ldots, l_\mu^*;\ \varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu). \quad (3.5)$$

В самом деле, при разложении пространства $L(p_{\nu\varphi})$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ согласно выражениям (3.1) и (3.2)

$$p_{\mu\rho}^{(l)*} = \frac{m_\mu^*}{m^*} \sum_{t=1}^{s} \sum_{h \in H} \overline{\tau_{\mu\rho f}^*(h^{(l)*}h)} h^{(l)*} h p_{\nu\varphi} = \frac{m_\mu^*}{m_\nu} \times$$

(3.6)

$$\times \sum_{\alpha=1}^{m_\mu^*} \sum_{t=1}^{s} \overline{\tau_{\mu\rho\alpha}^*(h^{(t)*})}\, h^{(t)*} \frac{m_\nu}{m} \sum_{h \in H} \overline{\tau_{\mu\alpha f}^*(h)}\, h p_{\nu\varphi} \quad (\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*).$$

В соответствии со следствием из теоремы 1 и выражениями (3.1), (3.3) и (3.6) при $f > l_\mu^* m_\nu$ вектор-функции $p_{\mu\rho}^{(l)*} = 0$ $(\rho = 1, 2, \ldots, m_\mu^*)$. Если же $f \leqslant l_\mu^* m_\nu$, то, положив $f = (r-1)m_\nu + \alpha$, где $\alpha \leqslant m_\nu$, с помощью того же следствия и формул (3.1), (3.3) легко найти, что

$$\frac{m_\nu}{m} \sum_{h \in H} \tau_{\mu\alpha f}^*(h)\ h p_{\nu\varphi} = \delta_{\alpha\varphi} \sum_{\sigma=1}^{m_\nu} \delta_{\varepsilon,(r-1)m_\nu+\sigma} p_{\nu\sigma}. \quad (3.7)$$

Из вышесказанного вытекает, что все операторы (3.1), кроме перечисленных в теореме, переводят функцию $p_{\nu\varphi}$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ в ноль. Подстановка соотношения (3.7) в равенство (3.6) окончательно доказывает теорему.

Вектор-функцию $p_{\mu\rho r}^*$ $(\rho = 1, 2, \ldots, m_\mu^*)$ естественно трактовать как ρ-ю базисную функцию r-го неприводимого подпространства $L_{\mu r} \subset L$ $(r = 1, 2, \ldots, l_\mu^*)$, которое преобразуется по представлению τ_μ^*.

С помощью теоремы 2 легко построить аналог выражения (3.4) в усеченном случае:

Теорема 3. *В усеченном случае имеет место следующее разложение*

$$p_{\nu\varphi} = \sum_{\mu} \sum_{r=1}^{l_\mu^*} p_{\mu,(r-1)m_\nu+\varphi,r}^* \quad (\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu), \quad (3.8)$$

где индекс μ при суммировании пробегает номера всех неприводимых представлений τ_μ^*, входящих в соответствии с теоремой 1 в регулярное представление T группы H^*.

В заключение нужно отметить, что исследование, проведенное в настоящей статье, включает в себя, как частную, задачу из [1] о разложении функции, определенной на области Ω^*. Данное в работе [1] решение отвечает усеченному случаю с подгруппой H, состоящей только из единичного элемента.

Одесский инженерно-строительный институт

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ

Հատած դեպքում սիմետրիայի վերջավոր խմբով տիրույթում որոշված վեկտոր-ֆունկցիաների վերլուծություն

Մեխանիկայի մի շարք կիրառական խնդիրներում ([2,4]) հաճախ օգտագործվում է H^* *սիմետրիայի խմբով օժտված* Ω^* *տիրույթում որոշված* p *վեկտոր-ֆունկցիայի վերլուծությունը ([1])։ Սակայն, եթե* p *ֆունկցիան ձևափոխվում է* $H \subset H^*$ *ենթախմբի* τ_0 *չբերվող ներկայացումով, ապա այդ վերլուծությունը դառնում է աննպատակահարմար։ Ներկա աշխատանքում ([1])-ի արդյունքները ընդհանրացվում են թեորեմ* 1, 2, 3*-ում այնպես, որ նրանք մնում են էֆեկտիվ նշված դեպքի համար, որը կոչվում է հատած։ Թեորեմ* 1*-ում ապացուցվում է, որ հատած դեպքում ռեգուլյար ներկայացման մեջ մտնող* H^* *խմբի* τ^*_μ *չբերվող ներկայացման թիվը գտնվում է* (2.2) *բանաձևով, իսկ թեորեմ 3-ում բերվում է վեկտոր-ֆունկցիայի վերլուծության* (3.8) *ընդհանուր տեսքը։* $p^*_{\mu\rho q}$ *բազիսային ֆունկցիաները* (3.8)*-ում որոշվում են* (3.5) *առնչությամբ։*

Սիմետրիկ մեխանիկական սիստեմի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը բնութագրող վեկտոր-ֆունկցիաների պրակտիկ վերլուծությունը (2.2), (3.5) *և* (3.5) *բանաձևերի միջոցով դժվարություն չի ներկայացնում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. Г. Каплан*, Симметрия многоэлектронных систем, Изд. «Наука», М., 1969. [2] *Ю. И. Самойленко*, Респ. сб. КВТ, в. 6, К. (1970). [3] *Г. Я. Любарский*, Теория групп и ее применение в физике, ГИФМЛ, 1958. [4] *М. Л. Бурышкин, В. А. Семенов* ДАН Арм. ССР, т. 55, № 3 (1972).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 681.142.2.

МАТЕМАТИКА

С. А. Солахян

Аксиоматический подход к доказательству корректности программ

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 23/VI 1976)

Проблема доказательства корректности программ становится все более актуальной. Существенной причиной этого является то, что решение ее есть первый важный шаг на пути написания „правильных" программ, для которых не требуется приводить их доказательство.

В ([1–3]) были разработаны аксиоматические методы для доказательства частичной корректности программ. Существенным их недостатком является то, что заранее предполагается сходимость доказываемой программы. В ([4]) рассматривался метод доказательства сходимости, основанный на использовании некоторой монотонно убывающей функции u, отображающей область программных переменных X в некоторое вполне упорядоченное множество $(W, \leqslant)$ с отношением порядка $\leqslant$. Однако, нахождение этой функции основано на полном понимании смысла программы и весьма затруднительно.

В настоящей работе рассматривается проблема (полной) корректности. Приводится система аксиом и правил вывода, позволяющая провести формальное доказательство. При этом необязательно полное понимание смысла программы. Мы будем использовать понятия и методы формального описания семантики языков программирования, приведенные в ([5]).

Рассмотрим:

1) непустое, конечное или счетное множество символов, называемых элементарными объектами:

$$EO = \{eo_1, eo_2, \cdots\};$$

2) непустое, конечное или счетное множество символов, называемых селекторами:

$$S = \{s_1, s_2, \cdots\}.$$

Абстрактный объект (или просто: объект) определяется как любой элементарный объект или любой составной объект. Составной объект является конечным множеством пар

$$|\langle s_1 : A_1\rangle, \cdots, \langle s_n : A_n\rangle|,$$

где компонента $\langle s : A\rangle$ навывается именованным объектом, s— именем объекта A, $s \in S$, $n \geqslant 0$, $s_i \neq s_j$ для $i \neq j$. Единственный составной объект Ω, состоящий из нулевого числа компонент, называется нуль объектом.

Для преобразования объектов вводится операция μ, операндами которой являются объект A и пары $\langle s_i : B_i\rangle$, где $s_i \in S$, B_i—объекты. Эта операция записывается следующим образом:

$$\mu(A; \langle s_1 : B_1\rangle, \cdots, \langle s_n : B_n\rangle).$$

Ее результатом является снова объект, а именно, объект A, где $s_i(A)$ объект заменяется на объект B_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Если $A = \Omega$, то имеем новую операцию μ_0, которая определяется в терминах операции μ следующим образом:

$$\mu_0(\langle s_1 : B_1\rangle, \cdots, \langle s_n : B_n\rangle) = \mu(\Omega; \langle s_1 : B_1\rangle, \cdots, \langle s_n : B_n\rangle).$$

Таким образом, можно сказать, что оператор μ_0 собирает именованные объекты в новый составной объект, т. е.:

$$\mu_0(\langle s_1 : B_1\rangle, \cdots, \langle s_n : B_n\rangle) = |\langle s_1 : B_1\rangle, \cdots, \langle s_n : B_n\rangle|.$$

В ([6]) были выведены условия $P(i, \pi, \xi)$, при которых выполнение оператора присваивания и оператора цикла *завершается* и дает определенный результат. Эти условия имеют следующий вид:

$$P(i, \pi, \xi) \supset \text{result}(x, \langle i, \pi\rangle) = \text{val}(x, \xi_n),$$

где: a) $\langle i, \pi\rangle$—i-ый сегмент программы π;
в) ξ—состояние памяти (значения входных переменных);
c) ξ_n—заключительное состояние памяти;
d) result$(x, \langle i, \pi\rangle)$—результат, выработанный при выполнении i-го сегмента со входом x;
e) $P(i, \pi, \xi) = P_{ass}(i, \pi, \xi) \vee P_{\text{while}}(i, \pi, \xi)$.

Вычисление функции val рассмотрено в ([6]).

Даны:

1) некоторый предикат $\varphi(x)$, называемый входным предикатом;
2) некоторый предикат $\psi(x, x')$, называемый выходным предикатом.

Определение 1. *Программа π корректна относительно предикатов φ и ψ, если для любого x, такого, что $\varphi(x) = T$, выполнение программы π завершается и $\psi(x, \text{result}(x, \pi)) = T$.*

Теоремы, которые мы будем использовать, имеют следующий вид:

$$|r(\xi) \& P(l, \pi, \xi)|\langle l, \pi\rangle|s(\xi, \xi')|,$$

что является условием корректности сегмента $<i, \pi>$ относительно предикатов $r(\xi)\,\&\,P(i, \pi, \xi)$ и $s(\xi, \xi')$:

$$r(\xi)\,\&\,P(i, \pi, \xi) \supset * <i, \pi>\,\&\,s(\xi, \xi'),$$

где $* <i, \pi>$ означает, что выполнение сегмента $<i, \pi>$ завершается.

Предикат $r(\xi)$ является входным предикатом для сегмента $<i, \pi>$ и имеет следующую форму:

$$r(\xi) \equiv (\xi = \mu_0(|<x : \text{Is} - \text{Int}> \| \text{Is} - \text{var}(x)|) \vee \text{Is} - \Omega),$$

где предикаты Is—Int, Is—var и Is—Ω использованы для идентификации констант, переменных и нуль-объекта, соответственно; x—вектор входных переменных.

Предикат $s(\xi, \xi')$—выходной предикат для сегмента $<i, \pi>$. Его форма следующая:

$$s(\xi, \xi') \equiv (\xi' = \mu(\xi;\ |<x : \text{result}(x, <i, \pi>)> \| \text{Is} - \text{var}(x)|)).$$

Как мы видим, построение предикатов $r(\xi)$ и $s(\xi, \xi')$ для любого сегмента $<i, \pi>$ строго определено и не требует понимания процессов, происходящих при выполнении этих сегментов.

Определение 2. *Атомарным оператором будем называть:* a) *оператор присваивания*; b) *оператор цикла, тело которого содержит один единственный оператор присваивания.*

В качестве базисных теорем—*аксиом*, возьмем те теоремы, в которых сегмент $<i, \pi>$ является атомарным оператором. Таким образом, фактически, будем иметь две аксиомы.

Правила вывода, представленные ниже, являются некоторыми правилами, преобразующими множество предпосылок $H_1, \ldots, H_n$ (условий, при которых правило применимо) в следствие H_{n+1}, которое является выведенной теоремой. Такие правила обозначены через

$$R \cdot \frac{H_1, \ldots, H_n}{H_{n+1}}.$$

Каждая предпосылка является либо ранее выведенной теоремой либо логическим требованием.

Приведем, теперь, конкретные правила вывода.

R 1. Правило свертки.

Согласно этому правилу, сегмент $<i, \pi>$ заменяется на оператор присваивания.

$$\frac{|r(\xi)\,\&\,P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s(\xi, \xi')|}{|r(\xi)\,\&\,P(i, \pi, \xi)|\xi \leftarrow \mu(\xi;\ |<x : \text{result}(x, <i, \pi>)>|)|s(\xi, \xi')|}.$$

Это означает, фактически, присваивание $x := \text{result}(x, <i, \pi>)$. Конечно, в том случае, когда сегмент $<i, \pi>$ является оператором присваивания, применение правила R1 не имеет смысла.

R2. Правило сцепления.

$$|r_1(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)|\xi \leftarrow \mu(\xi;\ |<x : \text{result}(x,\ <i, \pi>)>|)|s_1(\xi, \xi')| \qquad (1)$$

$$|r_2(\xi)\ \&\ P(j, \pi, \xi)|\xi \leftarrow \mu(\xi;\ |<x : \text{result}(x, <j, \pi>)>|)|s_2(\xi, \xi')| \qquad (2)$$

$$(\forall \xi_1, \xi_2)(s_1(\xi_1, \xi_2) \vdash r_2(\xi_2)) \qquad (3)$$

$$(\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3)(s_1(\xi_1, \xi_2)\ \&\ s_2(\xi_2, \xi_3) \vdash s_{1,2}(\xi_1, \xi_3) \qquad (4)$$

$$\frac{}{|r_1(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)\ \&\ P(j, \pi, \xi)|}$$

$$\xi \leftarrow \mu(\xi;\ |<x : \text{result}(x, <i, \pi>;\ <j, \pi>)>|)|s_{1,2}(\xi, \xi')|.$$

Условие (4) характеризует предикат $s_{1,2}(\xi_1, \xi_3)$ как отношение между ξ_1 до выполнения и ξ_3 после выполнения составного оператора $<i, \pi>; <j, \pi>$.

Как показано в (⁵), результат, полученный при выполнении составного оператора может быть вычислен следующим образом:

$$\text{result}(x, <i, \pi>; <j, \pi>) = \text{result}\,(\text{result}(x, <i, \pi>), <j, \pi>).$$

Используя правила R1 и R2, мы добиваемся того, что в теле оператора цикла будет содержаться один единственный оператор присваивания. А это дает возможность применить соответствующую аксиому.

R3. Правило следствия.

$$\frac{|p(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|q(\xi, \xi')|}{(\forall \xi)(r(\xi) \vdash p(\xi))}$$

$$\frac{(\forall \xi_1, \xi_2)(q(\xi_1, \xi_2) \vdash s(\xi_1, \xi_2))}{|r(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s(\xi, \xi')|}.$$

R4. Правила И/ИЛИ.

а)
$$\frac{|r(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s_1(\xi, \xi')|}{|r(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s_2(\xi, \xi')|}$$
$$|r(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s_1(\xi, \xi')\ \&\ s_2(\xi, \xi')|$$

в)
$$\frac{|r_1(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s(\xi, \xi')|}{|r_2(\xi)\ \&\ P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s(\xi, \xi')|}$$
$$|(r_1(\xi) \vee r_2(\xi))\ \&\ P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s(\xi, \xi')|$$

Смысл правил R3 и R4 очевиден.

Если, используя правила вывода R1—R4, мы сумеем из аксиом вывести теорему

$$|\varphi(x)\ \&\ P(\pi, \xi)|\pi|\psi(x, \text{result}\,(x, \pi))|,$$

то это будет означать, что программа π корректна относительно предикатов φ и ψ, т. е. для любого x, удовлетворяющего предикату $\varphi(x)$, выполнение π завершается и предикат $\psi(x, x')$ истинен для начальных и заключительных значений x и x', соответственно.

Схема доказательства корректности программы π имеет следующий вид:

1. Выявляется „самый внутренний" сегмент программы, который обязательно является атомарным оператором. Для него строится предикат $P(i, \pi, \xi)$ согласно (6). В случае истинности этого предиката применяется соответствующая аксиома.

2. Применяется правило вывода R1. Предпосылка обеспечивается пунктом 1.

3. Снова ищется „самый внутренний" сегмент. Применяется правило R2, а затем снова R1 и т. д.

Правила R3 и R4 используются в необходимых случаях в качестве вспомогательных правил.

В итоге получается, что в результате применения аксиом и правил вывода программа π свернулась в один единственный оператор, к которому, предварительно проверив истинность предиката $P(\pi, \xi)$, применяется соответствующая аксиома, доказывающая корректность этой программы.

Ереванский НИИ математических машин

Ս. Ա. ՈՂԱԽՅԱՆ

Սրագրերի կոռեկտության ապացուցման ալգորիթմական մոտեցում

Այս աշխատանքում դիտարկվում է ալգորիթմական մոտեցումը ծրագրերի կոռեկտության ապացույցի նկատմամբ։

Ներկում է ալգորիթմների և արտածման կանոնների համակարգ, որը հնարավորություն է տալիս կատարել ֆորմալ ապացույց։ Ընդ որում ծրագրի իմաստի լրիվ ըմբռնումը պարտադիր չէ։

(6) աշխատանքում արտածվել են $P(i, \pi, \xi)$ պայմանները, որոնց դեպքում π ծրագրի i-րդ անցմանում կատարումը ξ հիշողության վիճակում ավարտվում է և տալիս է որոշակի արդյունք։ Այդ պայմաններն ունեն հետևյալ տեսքը

$$P(i, \pi, \xi) \supset \mathrm{result}(x, <i, \pi>) = \mathrm{val}(x, \xi_n):$$

Օգտագործվող թեորեմները գրառում են այսպես՝

$$|r(\xi) \;\&\; P(i, \pi, \xi)|<i, \pi>|s(\xi, \xi')|$$

և արտահայտում են $r(\xi) \;\&\; P(i, \pi, \xi)$ և $s(\xi, \xi')$ պրեդիկատների նկատմամբ $<i, \pi>$ անցմանում կոռեկտության պայմանը՝

$$r(\xi) \;\&\; P(i, \pi, \xi) \supset * \; <i, \pi> \;\&\; s(\xi, \xi'):$$

Որպես օրինակներ վերցված են այն թեորեմները, որոնցում <l,π> սեգմենտը հանդիսանում է ատոմար օպերատոր: Բերված են արտածման չորս կանոններ, որոնք հնարավորություն են տալիս փոքր սեգմենտների համար թեորեմները համախմբել մեկ թեորեմում՝ ամբողջ ծրագրի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C. A. R. Hoare*, Lecture Notes in Mathematics, 188, 102—116, (1971). [2] *S. Igarashi*, Lecture Notes in Mathematics, 188, 117—177, (1971). [3] *S. Igarashi et al.* Acta Informatica, 4, № 2, 145—182, (1975). [4] *Z. Manna, A. Pnueli*, Acta Informatica, 3, 243—263, (1974). [5] *С. А. Солахян*, „Программирование", № 3, 3—12, (1976). [6] *С. А. Солахян*, „Программирование", № 4, 33—42, (1976). [7] *C. A. R. Hoare, P. E. Lauer*, Acta Informatica, 3, № 2, 135—153, (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 517.512.7

МАТЕМАТИКА

И. Б. Погосян

Представление измеримых функций базисами $L_p[0, 1]$, $(p \geqslant 2)$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 30/VI 1976)

Пусть Φ некоторое семейство измеримых функций, определенных на измеримом множестве E, а $\{\varphi_n(x)\}$ последовательность измеримых функций, почти везде конечных на множестве E. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется системой представления для семейства Φ в смысле сходимости почти всюду на множестве E (в смысле сходимости по мере, в смысле суммируемости почти всюду методом суммирования T), если для любой функции $F(x) \in \Phi$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

сходящейся почти всюду на E (соответственно сходящейся по мере, суммирующийся почти всюду методом T) к $F(x)$.

В настоящей работе рассматриваются ортонормированные системы функций и базисы $L_p[0,1]$, $p \geqslant 2$ являющиеся системами представления для семейства всех измеримых функций, определенных на отрезке $[0, 1]$.

Еще в 1915 г. Н. Лузин (1) поставил следующий вопрос: выяснить какие измеримые функции представляются сходящимися или суммируемыми теми или иными методами суммирования тригонометрическими рядами. Самим Лузиным было установлено (1), что тригонометрическая система функций является системой представления для всех измеримых, конечных почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$ функций, одновременно для методов суммирования Абелья-Пуассона и Римана. Что касается представления в смысле сходимости почти всюду, то этот вопрос в основном был решен Д. Е. Меньшовым (2), который доказал:

Теорема *(Д. Е. Меньшов). — Для любой почти везде конечной на отрезке $[0,2\pi]$ измеримой функции $F(x)$ существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2}$$

сходящийся почти всюду к $F(x)$, при этом выполняется условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|a_n|+|b_n|)=0.$$

Вопрос о представлении сходящимся тригонометрическим рядом произвольной измеримой функции, то есть функции, которые могут принимать и значения $+\infty$ на множествах положительной меры, остается открытым. В этом случае, если заменить сходимость почти всюду сходимостью по мере, то утвердительный ответ был получен Д. Е. Меньшовым ([3])*.

Эти теоремы Д. Е. Меньшова были распространены на другие ортонормированные системы функций, а также на базисы некоторых функциональных банаховых пространств. Подробную библиографию по этим вопросам можно найти в работах ([4–6]). Отметим еще работы ([7–10]), в которых рассматривались некоторые классы систем $\{\varphi_n(x)\}$, являющиеся системой представления в смысле сходимости почти всюду.

А. А. Талаляном ([4,11]) был поставлен следующий вопрос. Если $\{\varphi_n(x)\}$ произвольная ортонормированная система, полная в $L_2[0,1]$, а $F(x)$ почти везде конечная измеримая функция, то существует ли некоторый ряд (1), который после соответствующей перестановки членов сходится почти всюду на $[0,1]$ к $F(x)$.

П. Л. Ульяновым ([11]) был поставлен следующий вопрос. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ произвольная, полная, ортонормированная система на отрезке $[0,1]$.

Существует ли ряд (1) такой, что для любой измеримой функции $F(x)$, члены ряда (1) можно так переставить, чтобы вновь полученный ряд сходился почти всюду на $[0, 1]$ к $F(x)$.

Нами в работе ([12]) было доказано, что любая ортогональная, полная в $L_2[0, 1]$ система, состоящая из ограниченных в совокупности функций, становится системой представления в смысле сходимости почти всюду для всех измеримых функций, если удобным образом перенумеровать ортогональную систему. Далее, в работе ([13]) был приведен пример ортогональной, полной в $L_2[0, 1]$ системы функций, не являющейся системой представления в смысле сходимости почти всюду, даже для функций из $L_2[0, 1]$.

Ниже приводится распространение утверждений работы ([12]) на произвольную ортогональную, полную в $L_2[0, 1]$ систему функций, а также рассматриваются смежные вопросы. Для формулировки соответствующих утверждений приведем необходимые определения.

Определение 1. *Ряд* (1) *называется универсальным относительно перестановок в смысле сходимости почти всюду для семейства* Φ, *если для любой функции* $F(x)\in\Phi$ *можно так переставить члены ряда* (1), *чтобы вновь полученный ряд сходился почти всюду на множестве* E *к* $F(x)$.

Определение 2. *Ряд* (1) *называется универсальным отно-*

* Некоторое усиление этого результата Д. Е. Меньшова дано в работе: А. А. Талалян, Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов. Изв. АН сер. матем. 27 (1963) 621–660.

сительно знаков в смысле сходимости почти всюду для семейства Φ, *если для произвольной* $F(x)\in\Phi$, *существует последовательность знаков* γ_n, ($\gamma_n=\pm 1$) *такое, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n a_n\varphi_n(x) \tag{4}$$

сходится почти всюду на E, *к функции* $F(x)$.

Если в этих определениях заменить сходимость почти всюду, сходимостью по мере, или суммируемостью методом суммирования T, то мы соответственно получаем определения универсальных рядов в смысле сходимости по мере или в смысле суммируемости методом T.

Пусть $S^*(E)$ семейство всех измеримых функций (включая функции, принимающие бесконечные значения) определенных на множестве E, а $S(E)$ семейство всех функций, которые конечны почти всюду на E.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $|\varphi_n(x)|$ *произвольная, полная в* $L_2|0, 1|$ *ортонормированная система функций. Тогда существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \tag{5}$$

обладающий свойствами

а) *Ряд (5) универсален относительно перестановок для* $S^*[0,1]$ *в смысле сходимости почти всюду.*

б) *Существует некоторая перенумерация* $|n_k|$ *натуральных чисел, такая, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$ *универсален относительно знаков для* $S^*|0, 1|$ *в смысле сходимости почти всюду.*

в) *Ряд (5) универсален относительно знаков для* $S^*[0, 1]$ *в смысле сходимости по мере.*

г) *Для любого числа* $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{2+\varepsilon}<\infty. \tag{6}$$

К утверждениям теоремы можно добавить, что ряд (5), кроме того, универсален в $S^*|0, 1|$ относительно подпоследовательности частичных сумм и после некоторой перестановки членов универсален относительно подрядов в смысле сходимости почти всюду (определение этих видов универсальностей можно найти в работе [4]). Существование рядов (5), универсальных относительно подрядов и перестановок в смысле сходимости по мере для произвольного базиса $L_p|0, 1|$, $p>1$ впервые был установлен А. А. Талаляном [14]. А. М. Олевским [15] впервые был построен пример ограниченной в совокуп-

ности ортонормированной системы, по которой существует ряд (5), являющийся рядом Фурье функции $F(x) \in L_p|0, 1|$, для любого $p<2$ и удовлетворяющий утверждению а) теоремы 1. Утверждение б) теоремы 1 в частности означает, что система $|\varphi_n(x)|$ становится системой представления после удобной перестановки членов. Заметим, что утверждение а) теоремы 1 дает полный ответ на вопрос П. Л. Ульянова, а как утверждение а), так и б) дают полный ответ на вопрос А. А. Талаляна.

Эта теорема справедлива не только для полных в $L_2|0, 1|$ ортонормированных систем, но и для некоторых базисов пространств $L_p|0, 1|$, $p \geqslant 1$. В частности справедлива.

Теорема 2. *Пусть $|\varphi_n(x)|$ произвольный нормированный безусловный базис пространства $L_p|0, 1|$ с $p \geqslant 2$. Тогда существует ряд (5), удовлетворяющий условиям а), б), в) теоремы 1.*

Кроме того

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{p+\varepsilon} < +\infty \tag{7}$$

для любого $\varepsilon > 0$. (В случае $p>2$ можно положить $\varepsilon = 0$).

Что касается представления посредством обычных рядов (без перестановки системы $|\varphi_n(x)|$), то при некоторых условиях оно разрешается в положительном смысле. Пусть $F(x) \in L_p|0, 1|$; $p \geqslant 1$, разлагается в ряд по системе $|\varphi_n(x)|$, $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x)$ сходящейся по норме $L_p|0, 1|$ к $F(x)$. Обозначим

$$\delta_F(x) = \sup_{1<N<\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \varphi_n(x) \right|$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $|\varphi_n(x)|$ базис в $L_p|0, 1|$, $p \geqslant 2$ и существует число M такое, что*

$$\| \delta_F(x) \|_{L_p|0,1|} \leqslant M \| F(x) \|_{L_p|0,1|} \tag{8}$$

для любой $F(x) \in L_p|0, 1|$. Тогда существует ряд (5), который универсален относительно знаков в $S|0, 1|$ в смысле сходимости почти всюду. Кроме того можно добиться того, чтобы для построенного ряда выполнялись условия а), б), в) теоремы 1 и условие (7) теоремы 2 в том случае, когда $|\varphi_n(x)|$ нормированный безусловный базис пространства $L_p|0, 1|$.

В сформулированной теореме условие (8) можно заменить следующим условием: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует непрерывная монотонная неограниченная функция $\psi_\varepsilon(x) \geqslant 0$, определенная на оси $(0, \infty)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_\varepsilon^{-1}(n)} = +\infty,$$

множество E_ε, с $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$ и число M_ε, такие, что

$$\| \psi_1 (\tilde{\varphi}_i(x)) \|_{L_1[0,1]} < M_1 \| F(x) \|^2_{L_p[0,1]}$$

для любой $F(x) \in L_p[0, 1]$. Если для множеств E_1 выполняются условия: $E_1 \subset E$, $|E_1| > |E| - \varepsilon$, то представляются функции из $S(E)$.

Отметим также, что утверждение а) теоремы 1 для систем типа χ, введенных в работе ([8]) (тригонометрическая система системы Хаара и Уолша, а также все базисы в $C[0, 1]$—системы типа χ), было установлено в 1973 году Г. М. Мушегяном (неопубликовано) и докладывалось на семинаре.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ն. Ռ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Չափելի ֆունկցիաների ներկայացում $L_p[0, 1]$-ի, ($p \geq 2$) բազիսներով

Աշխատանքում դիտարկվում են $L_p[0, 1]$, ($p \geq 2$), *տարածությունների այնպիսի բազիսներ, որոնք հանդիսանում են ներկայացման սիստեմներ* $[0, 1]$ *հատվածի վրա որոշված չափելի ֆունկցիաների դասում։ Մասնավորապես ապացուցվում է, որ կամայական* $\{\varphi_n(x)\}$ *օրթոնորմավորված սիստեմի համար, որը լրիվ է* $L_2[0, 1]$ *տարածության մեջ, գոյություն ունի* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ *շարք, հետևյալ հատկությամբ, կամայական չափելի* $F(x)$ *ֆունկցիայի համար, որը որոշված է* $[0, 1]$ *հատվածի վրա, կարելի է այնպես վերադասավորել* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ *շարքի անդամները, որ նոր ստացված շարքը զուգամիտի* $F(x)$ *ֆունկցիային համարյա ամենուրեք* $[0, 1]$ *հատվածի վրա։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Н. Лузин*, Интегралы и тригонометрический ряд, М., 1915. [2] *Д. Е. Меньшов*, Матем. сб. 9, 667—692, (1941). [3] *Д. Е. Меньшов*, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 32, 1—98. (1950). [4] *А. А. Талалян*, УМН 15:5 77—141, (1960). [5] *П. Л. Ульянов*, УМН, 19:1, 3—69, (1964). [6] *П. Л. Ульянов*, УМН, 15:2, 3—52, (1972). [7] *Ф. Г. Арутюнян*, ДАН Арм. ССР, т. 57, № 2, (1973). [8] *Ф. Г. Арутюнян*, Математ. сб. т. 90 (132):4 483—540, (1973). [9] *Р. И. Овсепян*, ДАН Арм. ССР, т. 57, № 1, (1973). [10] *В. Г. Кротов*, ДАН СССР, т. 214, № 6 (1974). [11] *Р. Кук*, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, Физматгиз, М., 1960. [12] *Н. Б. Погосян*, Матем. сб. 98, 102—112 (1975). [13] *Б. С. Кашин*, Матем. сб. 99, 356—365 (1976). [14] *А. А. Талалян*, ДАН Арм. ССР, т. 28, № 4, 145—148 (1959). [15] *А. М. Олевский*, Матем. сб. 77 (119), 151—258 (1968).

ՀԱՅԿ.ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԳՐԱԴԱՐԱՆ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 518.5 : 519.5

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян

Об одном алгоритме для перечисления 1-переменных циклических 2^n- последовательностей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 25/VI 1976)

Для обоснования алгоритма нам потребуется ряд определений и доказательств.

Определение 1. Над массивом i, q, j, k-каркаса ([1-3]) определим целочисленную функцию $\gamma(i, j)$, $0 \leqslant \gamma(i, j) \leqslant 1$, и для каждого фиксированного j ($j=1, 2, \ldots, t_n$; $t_n=f(n)$; $f(n)$ - целочисленная, $f(n)>0$) будем задавать соответствующий ему n-кортеж ([1]), состоящий из значений функций $\gamma(i, j)$ при монотонно растущих значениях $i(i=1, 2, \ldots, n)$. Определим также функцию $\delta(i, k)$ следующим образом: $\forall n \forall i \forall j \forall k((k=j) \& (\delta(i, k) = \gamma(i, j+1) - \gamma(i, j) \& (\delta(i, t_n) = \gamma(i, 1) - \gamma(i, t_n)))$.

Определение 2. „m-переменной t_n-последовательностью" назовем последовательность, составленную из t_n n-кортежей таким образом, что каждый $(j+1)$-ый n-кортеж $\gamma(1, j+1)\ \gamma(2, j+1) \ldots \gamma(n, j+1)$ отличается от j-ого n-кортежа $\gamma(1, j)\gamma(2, j) \ldots \gamma(n, j)$ только $m(m \leqslant n)$ элементами, расположенными в m различных позициях так, что если $|m|$ и $|\bar{m}|$ — множества и $|n|$ — множество всех индексов i, то

$$\begin{aligned} &\forall n \forall i \forall j \forall r \forall m((|m| \to (||m|| = m)) \& (|m| \to \\ &\to (||\bar{m}|| = n - m)) \& ((|m| \cup \bar{m}|) = |n|) \& \\ &\& ((|m| \cap |m|) = \varnothing) \& (((r \in |m|) \to (\gamma(i_r, j+1) \neq \\ &\neq \gamma(i_r, j)) \vee (r \in |\bar{m}|) \to (\gamma(i_r, j+1) = \gamma(i_r, j)))). \end{aligned} \tag{1}$$

Всякие два n-кортежа, удовлетворяющие (1), назовем „взаимно-m-переменными", а отношение взаимной m-переменности обозначим через „$\sim m \sim$". Всякую m-переменную t_n-последовательность на-

зовем „циклической", если при соблюдении (1) на нее наложено дополнительное ограничение:

$$\forall n \forall i \forall j \forall r \forall m (((r \in |m|) \to (\gamma(i_r, 1) \neq$$

$$\neq \gamma(i_r, t_n))) \vee ((r \in |\bar{m}|) \to (\gamma(i_r, 1) = \gamma(i_r, t_n)))). \qquad (2)$$

Очевидно, в m-перемешой t_n-последовательности расстояние Хэммннга ([4]) между каждыми смежными j-ым и $(j+1)$-ым n-кортежами постоянно, равно m и определяется из равенства:

$$m = \sum_{i=1}^{i=n} |\delta(i, k)|,$$

где k-фиксировано.

Используя алгоритмы $AP_n^{'}$ и AC_n^m ([3]), можно построить 2-переменные 2^{n-1}-последовательности.

В известном в литературе ([4]) методе максимального правдоподобия предполагается, что наилучшим решением на приемнике будет декодирование в то кодовое слово, которое отличается от полученного в наименьшем числе мест. Этим объясняется широкое распространение 1-переменных циклических 2^n-последовательностей (далее их будем обозначать также через о. ц. п.). Рассмотрим их несколько подробнее. Заметим, что из натурального 2-ичного кода, состоящего из 2^n n-кортежей, можно построить 1-переменную циклическую 2^n-последовательность по следующему простому алгоритму.

Алгоритм $A2^n$. 1. В качестве каждого i-ого ($i=1, 2, \ldots, n$) столбца о. ц. п. взять соответствующий i-ый столбец натурального 2-ичного кода, произведя с элементами этого столбца следующие преобразования:

$$\forall n \forall i \forall j \forall s \forall r ((s \in (1, 3, \ldots, 2^{i-1}-1)) \&$$

$$\& (r \in (1, 2, \ldots, 2^{n-i+1})) \& (((p_1 = 2^{n-i+1} s) \&$$

$$\& (j \in (p_1 + 1, p_1 + 2, \ldots, (s+1) \cdot 2^{n-i+1}))) \to$$

$$\to (\gamma(i, p_1 + r) \times \gamma(i, (s+1) \cdot 2^{n-i+1} - r + 1))) \& \qquad (3)$$

$$\& (((p_2 = 2^{n-i+1} (s-1)) \& (j \in (p_2 + 1, p_2 +$$

$$+ 2, \ldots, 2^{n-i+1} s))) \to (\gamma(i, p_2 + r) \times \gamma(i, p_2 + r)))),$$

где „$\times$" — транспозиция.

Определение 3. Назовем о. ц. п., сконструированную по алгоритму $A2^n$, „z_n-последовательностью". Множество $|C_n|$ ($||C_n||=2^n$) всех элементов z_n-последовательности разобьем на подмножества $|C_n^y|$ в соответствии с числом y единиц (y—вес Хэммннга ([4])), содержащихся в каждом из n-кортежей. Для того, чтобы различать два „$n(y)$-кортежа" при одинаковых весах y и при различных по-

рядках расположения элементов, введем индексы p и l и будем обозначать эти $n(y)$-кортежи через b_{y_p} и b_{y_l}.

Определение 4. С учетом (1) и (2) и определений 2,3 построим некоторый неориентированный $(2^n,\ n\cdot 2^{n-1})$-граф (5), сопоставляя каждому из $n(y)$-кортежей b_y по одной вершине $\mathrm{vert}\, b_y$ так, чтобы с использованием символа „next" для обозначения отношения соседства между всякими двумя подмножествами $|{}_vC_n^{y'}|$ и $|{}_vC_n^{y''}|$ вершин, соответствующими подмножествам $|C_n^{y'}|$ и $|C_n^{y''}|$, можно было записать условие построения:

$$\forall n \forall y \forall p \forall l (((|y'-y''|=1)\to(|{}_vC_n^{y'}|\,\mathrm{next}\,|{}_vC_n^{y''}|))\ \&$$
$$\&\,((|y'-y''|\neq 1)\to\neg(|{}_vC_n^{y'}|\,\mathrm{next}\,|{}_vC_n^{y''}|))\ \&$$
$$\&\,((b_{y_p}\sim 1\sim b_{y_l})\to(\mathrm{vert}\, b_{y_p}\,\mathrm{adj}\,\mathrm{vert}\ b_{y_l}))\ \&$$
$$\&\,(\neg(b_{y_p}\sim 1\sim b_{y_l})\to\neg(\mathrm{vert}\, b_{y_p}\,\mathrm{adj}\,\mathrm{vert}\, b_{y_l}))) \qquad (4)$$

Всякий граф, построенный в соответствии с (4), назовем „графом ${}^1C_n$". Если в графе ${}^1C_n$ существует некоторое множество гамильтоновых циклов (5), то этому множеству, очевидно, соответствует множество различных о. ц. п. Допуская, что такое множество существует (см. леммы 1 и 2), обозначим через ${}^1\Gamma_{nu}$ каждый u-ый гамильтонов цикл, соответствующий либо α_n-последовательности, либо одной из последовательностей, конструируемых из α_n-последовательности путем последовательных односмежных транспозиций $(^{1-3})$ столбцов, а множество всех различных таких циклов обозначим через $|{}^1\Gamma_{nu}|$ (циклу, соответствующему α_n-последовательности присвоим номер $u=1$).

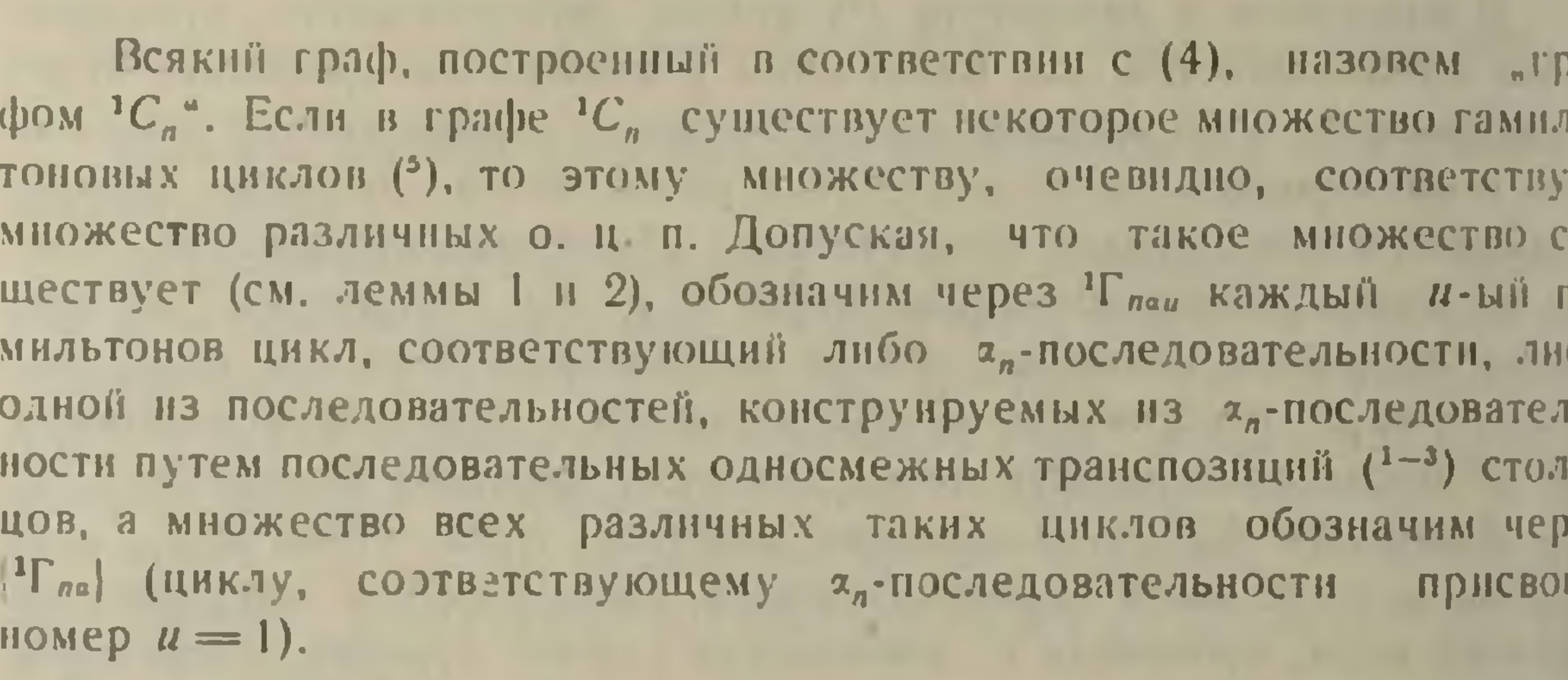

Рис. 1. Граф ${}^1C_4$ и цикл ${}^1\Gamma_{4\,1}$; соответствующий α_4—последовательности

Пример 1. На рис. 1 приведен пример построения графа ${}^1C_4$ и гамильтонова цикла ${}^1\Gamma_{4a1}$, соответствующего α_4-последовательности.

Лемма 1. *Всякий граф* ${}^1C_n$ *гамильтонов.*

Доказательство 1. Покажем, что если существует некоторая α_{n-1}-последовательность, то из нее можно построить α_n-последовательность. Допустим, что над i, q, j, k-каркасом построена некоторая α_{n-1}-последовательность, состоящая из значений функции $\gamma(i, j)$ при $i \in (2, 3, \ldots, n)$ и $j \in (1, 2, \ldots, 2^{n-1})$. Из этой последовательности построим новую последовательность $(n-1)$-кортежей в соответствии с условиями:

$$\forall n \forall i \forall j (((j \in (1, 2, \ldots, 2^{n-1})) \to (\gamma'(i, j) = \gamma(i, j))) \&$$
$$\& ((j \in (2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \ldots, 2^n)) \to (\gamma'(i, 2^{n-1}+k) =$$
$$= (\gamma(i, 2^{n-1} - k + 1)))), \qquad (5)$$

где штрихами обозначены функции во вновь построенной последовательности. Назовем эту последовательность „2^{n-1}-подструктурой" „2^n-структуры", эквивалентной 2^n-последовательности, построенной из 2^{n-1}-подструктуры путем сочленения с каждым $(n-1)$-кортежем соответствующего его j-ому аргументу значения функции $\gamma'(1, j)$, удовлетворяющего условию:

$$\gamma'(1, j) = \begin{cases} 0, \text{ если } j \in (1, 2, \ldots, 2^{n-1}); \\ 1, \text{ если } j \in (2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \ldots, 2^n). \end{cases} \qquad (6)$$

Сравнивая (5) и (6) с (1) и (3), замечаем, что эти условия непротиворечивы, а однопеременность и цикличность построенной 2^n-последовательности сохраняется; так что эта последовательность суть α_n-последовательность.

2. Очевидно, последовательность (0, 1) суть циклическая 1-переменная 2^1-последовательность, соответствующая циклу ${}^1\Gamma_{1a1}$ в графе ${}^1C_1$. Из 1 и 2 непосредственно следует, утверждение леммы.

Лемма 2. *Каждому элементу из множества* $|P_n|[1, 2]$ *циклической группы порядка* $n!$ *перестановок столбцов всякой* α_n*-последовательности взаимно однозначно соответствует один из элементов множества* $|{}^1\Gamma_{na}|$.

Доказательство 1. Из (1) и (2) следует, что любая однократная транспозиция (^{1}) столбцов всякой о. ц. п. не изменяет взаимной 1-переменности между каждыми j-м и $(j+1)$-м n-кортежами в построенной путем однократной транспозиции новой последовательности; поэтому после каждой односмежной транспозиции столбцов получается о. ц. п., соответствующая одному из циклов ${}^1\Gamma_{nai}$.

2. Для того, чтобы две о. ц. п. соответствовали одному и тому же циклу ${}^1\Gamma_{nai}$, необходимо и достаточно, чтобы при однократной транспозиции некоторой пары i'-ого и i''-ого столбцов сохранялось одно из взаимоисключающих условий: 1) порядок расположения

n-кортежей не изменяется; 2) порядок расположения n-кортежей изменяется на обратный либо циклически сдвигается. Пусть выполняется 1), тогда должно выполняться условие: $\forall i \forall j (\gamma(i', j) = \gamma(i'', j))$, что эквивалентно наличию двух столбцов с одинаковыми по составу и порядку расположения элементами, но это противоречит условию $||{}^1C_n|| = 2^n$, данному в определении 3. Пусть выполняется 2), тогда после всякой однократной транспозиции столбцов веса Хэммига всех n-кортежей должны измениться; но очевидно, что при любой транспозиции столбцов веса Хэммига n- кортежей не изменяются.

3. В ([1,2]) показано, что существует последовательность $n!$ односмежных транспозиций, образующая циклическую группу порядка $n!$ и с помощью этой последовательности перечисляются элементы всех возможных $n!$ перестановок из $[P_n]$.

Из 1.—3. непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 3. *В всяком графе* ${}^1C_n$ *каждому циклу* ${}^1\Gamma_{наи}$ *взаимно-однозначно соответствует не менее* $2(n-2)$ *гамильтоновых путей* ${}^1_p\Gamma_{наи}$.

Доказательство. 1. По построению в соответствии с (5) и (6) во всяких 2^{n-s+1}-структурах ($s=1, 2, \ldots, n$) $(n-s+1)(1)$-кортежи занимают позиции $j = 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-s+1}$.

2. Ввиду 1-переменности последовательностей, соответствующих циклам ${}^1\Gamma_{наи}$, за всеми $n(1)$-кортежами следуют $n(2)$-кортежи, за исключением $n(1)$-кортежа, занимающего позицию $j = 2^n$.

3. Так как в соответствии с (6) при всех $j > 2^{n-1}$ находятся все те n-кортежи, которые имеют единицу в одном и том же столбце $i=1$, то все $n(2)$-кортежи при $j > 2^{n-1}$ взаимно-1-переменны с $n(1)$-кортежем, занимающим позицию $j = 2^n$.

4. Из (5) следует симметрия каждой пары 2^{n-s}-подструктур, образующих 2^{n-s+1}-структуру, относительно горизонтальной оси, проходящей на i, q, j, k-каркасе через $k = 2^{n-s}$; поэтому с учетом 1. каждой i-ой позиции, в которой находится единица в n-кортежах, занимающих позиции $j = 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-s}$, соответствует та же i-ая позиция в n-кортежах, соответственно занимающих позиции $j = 2^{n-s} + 2^{n-s-1} + \ldots + 2^1 + 1, 2^{n-s} + 2^{n-s-1} + \ldots + 2^2 + 1, \ldots, 2^{n-s} + 1$.

Из 3. также следует, что во всех позициях $j = 2^{n-s} + 1, 2^{n-s} + 2^{n-s-1} + 1, \ldots, 2^{n-s} + 2^{n-s-1} + \ldots + 2^1 + 1$ существует единица, занимающая позицию $i = 1$, поэтому с учетом 2. каждый $n(2)$-кортеж, занимающий позиции: $2^{n-s} + 1, 2^{n-s} + 2^{n-s-1} + 1, \ldots, 2^{n-s} + 2^{n-s-1} + \ldots + 2^1 + 1$, суть n-кортеж, взаимно 1-переменный с $n(1)$—кортежем, находящимися в позиции $j = 2^n$. Откуда следует, что в каждой 2^n-структуре существует ровно $n-1$ $n(2)$-кортежей, взаимно 1-переменных с $n(1)$-кортежем, занимающим позицию $j = 2^n$.

5. Из 4. следует, что существует $n-1$ возможностей перехода от указанных $n(2)$-кортежей к $n(1)$-кортежу, занимающему позицию $j = 2^n$; поэтому можно построить не менее $n-2$ путей ${}^1_n\Gamma_{наи}$ в

графе ${}^1C_n$, соответствующих последовательностям n-кортежей, занимающих позиции: $j=1, 2, \ldots, 2^{n-1}+1, 2^n, 2^n-1, \ldots, 2^{n-1}+2$; $j=1, 2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}+1, 2^n, 2^n-1, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}+2$; $\ldots$; $j=1, 2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^2+1, 2^n, 2^n-1, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-1}+\ldots+2^2+2$; так что удовлетворяется условие:

$$\forall n \forall j \forall s \left((s \in (1, 2, \ldots, n-2)) \& \left(j_s = 1 + \sum_{r=1}^{r=s} 2^{n-r} \right) \right), \qquad (7)$$

где j_s — аргумент, предшествующий $j_{s+1}=2^n$.

С учетом возможности изменения направления обхода гамильтоновых путей на обратный из 5. приходим к утверждению леммы.

Теорема. *Для всякого $n \geqslant 3$ циклу ${}^1\Gamma_{n=1}$ в графе ${}^1C_n$ можно сопоставить не менее $||\Gamma_{(n+1)=}||$ циклов в графе ${}^1C_{n-1}$, где*

$$||\Gamma_{(n+1)=}|| = (n+1)! \left| n-1 + C^1_{(n-1)!} + C^2_{3!(n-2)!} \right|. \qquad (8)$$

Доказательство. 1. Так как при всевозможных перестановках столбцов x_n — последовательности единица в 2^n-ых n-кортежах занимает все n различных позиций одинаковое число раз, то в соответствии с леммой 2 в множестве $|{}^1\Gamma_{n=}|$ существует n подмножеств $|{}^1_x\Gamma_{n=}|$ $(x=1, 2, \ldots, n)$ по $(n-1)!$ циклов ${}^1\Gamma_{n=i}$, каждому из которых соответствует 2^n-последовательность, 2^n-ый n-кортеж которого идентичен со всеми остальными 2^n-ыми $n(1)$-кортежами из других циклов из $|{}^1_x\Gamma_{n=}|$. Из некоторой пары последовательностей, соответствующих двум различным циклам из $|{}^1_x\Gamma_{n=}|$ и состоящих соответственно из значений функций $\gamma'(i, j)$ и $\gamma''(i, j)$ $(i=2, 3, \ldots, n+1)$, построим некоторую 1-переменную циклическую 2^{n+1}-последовательность, исходя из условий:

$$\forall n \forall i \forall j \left((i=2, 3, \ldots, n+1) \& ((j \in (1, 2, \ldots, 2^n)) \rightarrow ((\gamma'(i, j)=\gamma(i, j) \& (\gamma(1, j)=0))) \& ((j \in (2^n+1, 2^n+2, \ldots, 2^{n+1})) \rightarrow ((\gamma''(i, j)=\gamma(i, j)) \& (\gamma(1, j)=1)))) \right). \qquad (9)$$

Учитывая 1 леммы 1 и лемму 2 заметим, что число различных гамильтоновых циклов $||{}^1_c\Gamma_{(n+1)=}||$, построенных в соответствии с условием (9) определяется из равенства

$$||{}^1_c\Gamma_{(n+1)=}|| = (n+1)! \left| 1 + C^2_{(n-1)!} \right|. \qquad (10)$$

2. Учитывая лемму 3, из каждой пары последовательностей, соответствующих одному из путей ${}^1_p\Gamma_{n=i}$ и состоящих соответственно из функций $\gamma'''(i, j)$ и $\gamma^{IV}(i, j)$ $(i=2, 3, \ldots, n+1)$, построим неко-

торую 1-переменную циклическую 2^{n+1}-последовательность в соответствии с условием, получаемым из условия (9) путем подстановок $\gamma'''(i, j)$ вместо $\gamma'(i, j)$ и $\gamma^{IV}(i, j)$ вместо $\gamma''(i, j)$.

Учитывая 1 леммы 1, лемму 2 и лемму 3, заметим, что число $||{}^{1}_{p}\Gamma_{(n+1)\alpha}||$ гамильтоновых циклов, построенных в соответствии с вышеприведенным условием определяется из равенства

$$||{}^{1}_{p}\Gamma_{(n+1)\alpha}|| = (n+1)!\,|n-2+C^{2}_{3n!(n-2)!}|. \qquad (11)$$

3. С учетом (10), (11) и леммы 2 получаем (8).

Теорема доказана.

Из хода доказательства лемм 1—3 и теоремы непосредственно следуют алгоритмы для построения всех циклов $|\Gamma_{(n+1)\alpha}|$ и всех различных 1-переменных циклических 2^{n+1}—последовательностей, число которых вдвое больше $||\Gamma_{(n+1)\alpha}||$ (8).

Пусть с использованием алгоритма $A2^n$ построена α_n-последовательность. Тогда для генерирования 1-переменных циклических 2^{n+1}-последовательностей можно сконструировать следующий.

Алгоритм A^1C_n. 1. В соответствии с леммой 2 путем последовательных односмежных транспозиций столбцов построить из α_n-последовательности $n!$ 1-переменных циклических 2^n-последовательностей.

2. Используя результат 1, в соответствии с 1 теоремы построить все возможные $2(n+1)!\,|1+C^{2}_{(n-1)!}|$ 1-переменные циклические 2^{n+1}-последовательности, соответствующие циклам из $|{}^{1}_{c}\Gamma_{(n+1)\alpha}|$.

3. Используя результат 1., каждой из $n!$ 1-переменных циклических 2^n-последовательностей сопоставить в соответствии с леммой 3 по $(n-2)$ последовательности, соответствующие гамильтоновым путям ${}^{1}_{p}\Gamma_{(n+1)n}$.

4. В соответствии с 2 теоремы, используя результат 3, построить все возможные $2(n+1)!\,|n-2+C^{2}_{3^{1}(n-2)!}|$ 1-переменные циклические 2^{n+1}-последовательности, соответствующие циклам из $|{}^{1}_{p}\Gamma_{(n+1)\alpha}|$.

Ввиду быстрого роста значений функции $\varphi(n)=||\Gamma_{(n+1)\alpha}||$ с возрастанием n ($||\Gamma_{2\alpha}||=2$, $||\Gamma_{3\alpha}||=6$, $||\Gamma_{4\alpha}||=432$, $||\Gamma_{5\alpha}||=10080$, $||\Gamma_{6\alpha}||=655200$) полный перебор элементов $|\Gamma_{(n+1)\alpha}|$ уже при $n=6$ в настоящее время практически нецелесообразен; поэтому при $n\geqslant 6$ алгоритм можно использовать вплоть до произвольного останова.

Учитывая (7), а также треугольник адресов A^{n}_{sq} $(^{1,2})$ можно организовать матричное управление процессом перечисления.

Ереванский НИИ математических машин

Ա. Հ. ԱԶԱՏՅԱՆ

1-փոխոխական ցիկլիկ 2^n-հաջորդականությունների թվարկման ալգորիթմի մասին

Տրված են 1-փոխոխական ցիկլիկ 2^n-հաջորդականությունների թվարկման մեթոդի հիմնավորումը և համապատասխան ալգորիթմը։

Ապացուցված է, որ ալգորիթմի կիրառումը հնարավորություն կտա թվարկել ամեն մի n-ի համար $2\|{}^1\Gamma_{(n+1)^0}\|$ տարբեր 1-փոխոխական ցիկլիկ 2^n-հաջորդականություններ, որտեղ

$$\|{}^1\Gamma_{(n+1)^0}\| = (n+1)!\left|n-1+C^2_{(n-1)!}+C^2_{3!(n-2)!}\right|.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Азатян*, К вопросу о перечислении элементов полного множества ассоциаций (U). Депонированная рукопись, 1974, РНР, № 3, 3—697, 1975. [2] *А. А. Азатян, Р. А. Тамразян*, ДАН Арм. ССР, LXI, № 5 (1975). [3] *А. А. Азатян*, ДАН Арм. ССР, LXII, № 1, 1976, стр. 23—28. [4] *У. Питерсон*, Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., «Мир», М., 1964. [5] *Ф. Харари*, Теория графов, пер. с англ., «Мир», М., 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIII 1976 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, С. С. Шагинян

О напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, расслабленной двумя радиальными разрезами

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 13/IV 1976)

Исследованию напряженного состояния бесконечной пластины с круговым отверстием, расслабленной двумя радиальными разрезами различных видов посвящены работы многих авторов [1–9]. В большинстве указанных работ решения этих задач сведены к решению сингулярных интегральных уравнений относительно некоторой вспомогательной функции, ядра которых имеют особенность типа Коши. Решение последних уравнений строится известными асимптотическими или, что часто встречается, численными методами.

В настоящей работе при помощи одного способа, отличного от упомянутых и представляющего, на наш взгляд, самостоятельный интерес, строится эффективное решение задачи о напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, когда имеются два разреза одинаковой длины, расположенных на одном и том же диаметре. Построенное решение позволяет со сколь угодно большой точностью определить поле напряжений и перемещений в пластине. Этим способом можно получить решение такой же задачи в случае нескольких разрезов.

1. Пусть в бесконечной пластине с круговым отверстием радиуса R имеются два разреза, расположенные на продолжении диаметра отверстия и не выходящие на его контур. Пусть далее, такая пластина деформируется единичными противоположно направленными сосредоточенными силами q, приложенными в симметричных точках вещественной оси (рис. 1). При нулевом напряженном состоянии на бесконечности, требуется определить поле упругих смещений и напряжений в рассматриваемой области.

На основе решения последней задачи при помощи принципа наложения легко может быть получено решение этой же задачи, когда пластина на бесконечности равномерно растягивается нагрузкой произвольной интенсивности, или когда на некоторых отрезках вещественной оси она нагружена касательной нагрузкой произвольной интенсивности, или же когда на нее одновременно действуют обе эти нагрузки

Заметим, что поле упругих элементов разбираемой задачи можно представить в виде суммы двух полей. Первое из них соответствует пластине с круговым отверстием без разрезов подвергающейся действиям двух единичных противоположно направленных сосредоточенных сил q. Второе соответствует пластине с круговым отверстием, расслабленной двумя симметричными радиальными разрезами, под действием симметричных нормальных нагрузок, приложенных только на берегах разрезов. Определение первого напряженного состояния при помощи аппарата интегралов Коши ([10]) приведено в работе ([11]).

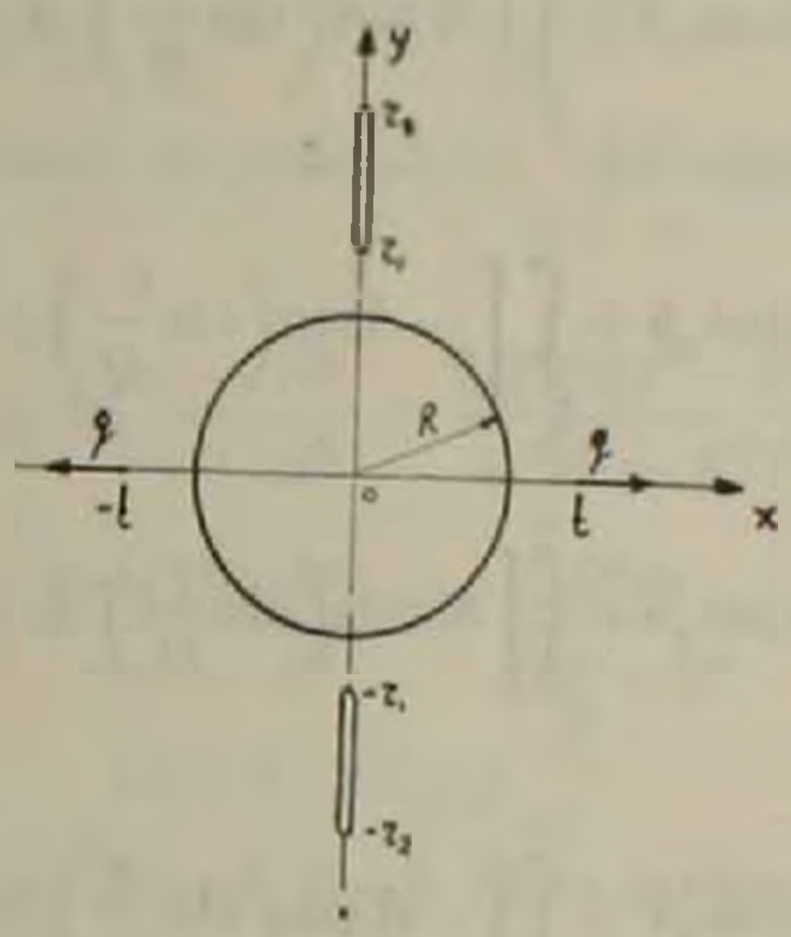

Рис. 1

Для определения второго напряженного состояния будем рассматривать, вследствие симметрии, только одну четверть исходной области, для которой граничные условия поставленной задачи запишутся в виде

$$v_\theta(r, 0) = \tau_{r\theta}(r, 0) = \tau_{r\theta}(r, \pi/2) = 0, \quad (R \leqslant r < \infty) \tag{1.1}$$

$$\sigma_r(R, \theta) = \tau_{r\theta}(R, \theta) = 0, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2) \tag{1.2}$$

$$v_\theta(r, \pi/2) = 0, \; r \in (r_1, r_2), \; \sigma_\theta(r, \pi/2) = f_R(r, t), \; r \in (r_1, r_2) \tag{1.3}$$

Здесь непрерывная от двух переменных функция $f_R(r, t)$ представляет собой нормальное напряжение на месте разрезов первого напряженного состояния с обратным знаком. Она легко определяется и имеет известное выражение.

Условия же на бесконечности будут:

$$\sigma_r(r, \theta), \; \sigma_\theta(r, \theta), \; \tau_{r\theta}(r, \theta), \; v_\theta(r, \theta), \; v_r(r, \theta) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

2. Приведем известные формулы комплексного представления компонентов смещений и напряжений в плоской задаче теории упругости ([10])

$$2\mu(v_r + iv_\theta) = e^{-i\theta}(\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}), \tag{2.1}$$

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)), \tag{2.2}$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]. \tag{2.3}$$

Представляя голоморфные в рассматриваемой области функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде $\varphi(z)=\varphi_1(r,\theta)+i\varphi_2(r,\theta)$, $\psi(z)=\psi_1(r,\theta)+i\psi_2(r,\theta)$, где $\varphi_j(r,\theta)$ и $\psi_j(r,\theta)$ $(j=1,2)$ комплексно-сопряженные гармонические функции, из (2.1)—(2.3) можно получить выражения компонентов смещений и напряжений через функции $\varphi_j(r,\theta)$ и $\psi_j(r,\theta)$ $(j=1,2)$.

Приступая теперь к выводу основного разрешающего функционального уравнения сформулированной выше задачи, неизвестные гармонические функции $\varphi_j(r,\theta)$ и $\psi_j(r,\theta)$ представляем в виде

$$\varphi_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_n}A_n\cos\lambda_n\theta+\int_0^{\infty}\left[A\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+B\sin\left(\lambda\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)\right]\mathrm{ch}\lambda\theta\,d\lambda,$$

$$\varphi_2(r,\theta)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_n}A_n\sin\lambda_n\theta+\int_0^{\infty}\left[-A\sin\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+B\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)\right]\mathrm{sh}\,\lambda\theta\,d\lambda,$$

$$\psi_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_n}K_n\cos\lambda_n\theta+\int_0^{\infty}\left[K\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+L\sin\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)\right]\mathrm{ch}\,\lambda\theta\,d\lambda,$$

$$\psi_2(r,\theta)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_n}K_n\sin\lambda_n\theta+\int_0^{\infty}\left[-K\sin\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+L\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)\right]\mathrm{sh}\lambda\theta\,d\lambda.$$

Входящие сюда коэффициенты разложений A_n, K_n, A, B, K, L и числа λ_n $(n=0,1,2,\ldots)$ подлежат определению. Принимая

$$A=0,\ B=-L,\ K+\lambda L=0,\ \lambda_n=2n+1,\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

можно убедиться в выполнении условий на бесконечности и граничных условий (1.1). С другой стороны, из граничных условий (1.2) получаются некоторые соотношения, выражающие коэффициенты A_n и K_n $(n=0,1,\cdots)$ через коэффициент $L=L(\lambda)$. Таким образом, определив $L=L(\lambda)$ можно определить все коэффициенты разложений и, тем самым, решить поставленную задачу.

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), после некоторых операций, для определения коэффициента $L=L(\lambda)$ получим систему парных интегральных уравнений

$$\frac{1}{r}\int_0^{\infty}\lambda L\,\mathrm{ch}\frac{\lambda\pi}{2}\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)d\lambda=0,\quad r\in(r_1,r_2)$$

$$\int_0^{\infty}\lambda L\left[-\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sh}\frac{\lambda\pi}{2}\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+H_0^*(r,\lambda)\right]d\lambda=F_R'(r,t)+c,\ r\in(r_1,r_2)$$

где $H_0^*(r,\lambda)$—известная функция, $2F_R'(r,t)=f_R(r,t)$, и c—постоянная интегрирования, подлежащая определению.

Далее принимая

$$\frac{1}{r}\int_0^{\infty} iL\,\mathrm{ch}\frac{i\pi}{2}\cos\left(i\ln\frac{r}{R}\right)dl=\begin{cases}0, & r\in(r_1, r_2)\\ \gamma_l(r), & r\in(r_1, r_2)\end{cases}$$

после некоторых выкладок, относительно функции $\gamma_l(r)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{r_1}^{r_2}\left|\ln\frac{1}{|s-r|}+K_R(r, s)\right|\gamma_l(s)ds=-\pi F_k(r, l)-\pi c,\ (r_1<r<r_2), \qquad (2.4)$$

где непрерывная от двух переменных функция $K_R(r, s)$ выражается формулой

$$K_R(r, s)=\ln(r+s)+\ln\frac{rs-R^2}{rs+R^2}+\frac{2R^4rs(r^2-R^2)}{(r^2s^2-R^4)^2}+\frac{2R^4(s^2-R^2)rs}{(r^2s^2-R^4)^2}-$$

$$-\frac{2rs(r^2-R^2)}{r^2s^2-R^4}-\frac{2rs(s^2-R^2)}{r^2s^2-R^4}-\frac{2R^2rs}{r^2s^2-R^4}+\frac{2r}{s}+\frac{2s}{r}-\frac{2R^2}{rs},$$

$$(r_1\leqslant r,\ s\leqslant r_2)$$

В частном случае, когда $R\to 0$ получается интегральное уравнение задачи для бесконечной пластины, расслабленной двумя симметричными разрезами. А если в последнем положить $r_1=0$, то получим интегральное уравнение задачи, родственной задаче Гриффитса [9].

3. Определяющее интегральное уравнение (2.4) решается при помощи аппарата ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Подставляя искомое решение в виде

$$\gamma_l(s)=\left|1-\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2\right|^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}x_m\,T_m\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right),$$

$$(r_1<s<r_2) \qquad (3.1)$$

где $|x_m|_{m=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, обычным способом относительно них получаем следующую бесконечную систему линейных уравнений

$$x_n+\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}x_m=e_n(t),\ (n=1, 2, \ldots)$$

Здесь введены обозначения:

$$a_{mn}=\frac{8n}{\pi^2(r_2-r_1)^2}\int_{r_1}^{r_2}\left[1-\left(\frac{2r-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2\right]^{-1/2}T_n\left(\frac{2r-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)dr\int_{r_1}^{r_2}K_R(r, s)\times$$

$$\times \left| 1-\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2 \right|^{-1/2} T_m\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right) ds, \quad m, n=1, 2 \ldots$$

$$e_n(t) = -\frac{2}{\pi(r_2-r_1)} \int_{r_1}^{r_2} f_R(r, t) \sqrt{1-\left(\frac{2r-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2} U_{n-1}\left(\frac{2r-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right) dr,$$

$$n=1, 2, \cdots$$

а функции $U_{n-1}(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ многочлены Чебышева второго рода.

Коэффициент $x_0=0$, что вытекает из условия

$$\int_{r_1}^{r_2} \chi_t(r) dr = 0,$$

которое в свою очередь вытекает из условия непрерывного продолжения смещения $v_0(r, \pi/2)$ на концевые точки разреза $r_1<r<r_2$.

Детальное исследование полученной бесконечной системы можно провести известным способом ([11,12]).

Таким образом, определив функцию $\chi_t(r)$, постоянную c можно определить из исходного интегрального уравнения (2.4) подставив в него выражение этой функции.

4. Для определения коэффициентов интенсивностей разрывающего напряжения, заметим, что для него имеет место представление

$$\sigma_0(r, \pi/2) = \frac{2}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r-s} + H_1^*(r, s) \right] \chi_t(s) ds, \quad r \in [(R, r_1), (r_2, \infty)]$$

где $H_1^*(r, s)$—известная непрерывная вместе со своими частными производными любого порядка функция.

Подставляя (3.1) в (4.1), после некоторых вычислений, для коэффициентов интенсивностей будем иметь

$$N(r_1) = \lim_{r \to r_1 - 0} \sigma_0(r, \pi/2) \sqrt{r_1 - r} = -\sqrt{r_2 - r_1} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x_m,$$

$$N(r_2) = \lim_{r \to r_2 + 0} \sigma_0(r, \pi/2) \sqrt{r - r_2} = \sqrt{r_2 - r_1} \sum_{m=1}^{\infty} x_m.$$

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ս. Ս. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Կլոր անցքով անվերջ հարթության լարվածային վիճակի մասին, երբ վերջինս թուլացված է երկու շառավղային ճեղքերով

Աշխատանքում դիտարկվում է կլոր անցքով հարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ հարթությունը թուլացված է

կոր եզր դուրս չեկող սիմետրիկ դասավորված շառավղային ճեղքերով։

Ենթադրվում է, որ հարթությունը դեֆորմացիայի է ենթարկվում հակադիր ուղղություն ունեցող երկու կենտրոնացված ուժերով։

Պահանջվում է գտնել լարումների և տեղափոխությունների դաշտը այդ տիրույթում։

Խնդրի լուծումը հիմնված է Կոլոսով-Մուսխելիշվիլու կոմպլեքս պոտենցիալների հատկությունների օգտագործման վրա և հանգում է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների միջոցով նշված ինտեգրալ հավասարման լուծումը բերված է համարժեք հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։

Ստացված են բանաձևեր, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշելու քայքայող լարումների ինտենսիվությունների գործակիցները ճեղքերի ծայրակետերում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *F. Erdogan, G. Gupta, M. Ratwani,* Journ. of Applied Mech, Trans. ASME, v. 41, № 4 (1974). [2] *C. Atkinson*, Int. Journ. Engng. Sci, v. 10 (1972). [3] *L. Wigglesworth,* Mathematika, v. 5, №9 (1958). [4] *O. Bowi* Journ. Math. and Phys., v. 35 (1956) [5] *H. Bueckner,* In. „Boundary Problems in Differential equations". Univ. Wisconsin Press, 1960. [6] *H. Bueckner, J. Giaever,* ZAMM, Bd. 46, № 5 (1966) [7] *В. Х. Сирунян,* «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. 24, № 4 (1971). [8] *Г. Жоржолиани, А. Каландия,* ПММ, т. 38 (1974). [9] *В. В. Панасюк,* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами, Изд. «Науково думка», Киев, 1968. [10] *Н. И. Мусхелишвили,* Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966. [11] *С. С. Шагинян,* ДАН Арм. ССР, т. 59, № 3 (1974). [12] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян,* ПММ, т. 36, № 5 (1972).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Никишин, Г. С. Шапиро

Контактные задачи теории упругости с односторонними связями

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 21/VIII 1976)

Традиционная постановка контактной задачи предполагает наличие полного контакта плоского или выпуклого кругового или кольцевого в плане штампа с упругой средой. Обнаружено ([1, 2]), что в случае слоистой среды при определенных характеристиках, например, когда первый (верхний) слой достаточно тонкий, но более жесткий, чем второй, условие полного контакта без сцепления приводит к появлению на площадке контакта растягивающих напряжений в некоторой круговой или кольцевой области. Это явление объясняется заметным изгибом первого слоя, в результате чего, при отсутствии связей, слой отстанет от основания штампа в некоторой внутренней области. В таком случае, если допустить полный контакт, то естественно также ожидать появления растягивающих контактных напряжений и при изгибе однородного слоя под действием кругового или кольцевого штампа. Вместе с тем ясно, что в случае несцепленного штампа растягивающие контактные напряжения недопустимы, и их появление свидетельствует о необходимости иной постановки задачи, предусматривающей возможность отставания упругой среды от основания штампа в некоторой круговой или кольцевой области, размеры которой подлежат определению. Причем, если выяснено, что упругая среда отстает от основания штампа в круговой области, то задаче о круговом штампе соответствует задача о кольцевом в плане штампе с неизвестным внутренним радиусом, подлежащим определению из условия равенства нулю контактного давления на внутреннем контуре площадки контакта.

В статье показана возможность появления растягивающих контактных напряжений на конкретных примерах слоистых сред при наличии полного контакта с ними кругового или кольцевого штампа и даны новые решения контактных задач о сжатии слоистых сред и об изгибе однородного слоя под действием кругового и кольцевого штампов с учетом отставания упругой среды от их оснований.

1. Сжатие слоистых сред под действием кругового или кольцевого штампов. В качестве слоистой среды для простоты возьмем пакет из двух скрепленных между собой слоев, лежащий без трения на недеформируемом основании. Пакет характеризуется параметрами $\delta_1 = \varepsilon_1/E_2$, $\gamma_1 = \delta_1(1+\nu_2)/(1+\nu_1)$, $t_1 = H_1/H$, где E_i, $\nu_i (i = 1, 2)$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона первого и второго слоев, H — общая толщина пакета, H_1 — толщина первого слоя. Примем начало отсчета цилиндрической системы координат r, z на нижней граничной плоскости пакета и направим ось Oz вверх. Пусть на верхней граничной плоскости $z = H$ действует кольцевой штамп $a \leqslant r \leqslant b$ с плоским основанием. Введем безразмерные переменные $\rho = r/b$, $t = z/H$ и запишем краевые условия задачи

$$\left.\frac{E_1 w_1(\rho, t)}{(1+\nu_1)b}\right|_{t=1} = -h \quad (\rho_0 \leqslant \rho \leqslant 1) \tag{1.1}$$

$$\sigma_{z1}(\rho, t)|_{t=1} = 0 \quad (0 \leqslant \rho < \rho_0, \quad 1 < \rho < \infty),$$

где $h = \delta E_1/b(1+\nu_1)$, δ — глубина погружения штампа. Характерными параметрами задачи являются $\lambda = \Delta H_1/b$ ($\Delta H_1 = H - H_1$ — толщина первого слоя) и $\rho_0 = a/b < 1$. В случае кругового штампа условия (1.1) берутся при $\rho_0 = 0$.

Решение контактной задачи (1.1) для кругового штампа получено в [1, 2]. На рис. 1 изображены графики интенсивности давления штампа $\sigma^* = \sigma_{z1}(\rho, 1)/h$ для двухслойного пакета с параметрами $\delta_1 = 100$, $t_1 = 0,95$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ и цикла значений $\lambda = 0,05$; $0,1$; $0,2$; $0,5$ $(0,25)2$. На этих графиках видно, что при $\lambda \geqslant 1,75$ σ^* качественно имеет такой же вид, как в случае однородного слоя, а при $\lambda \leqslant 1,5$ возникают круговые области растягивающих (положительного знака) напряжений, которые при убывании λ, начиная с некоторого момента, концентрируются вблизи контура площадки контакта.

Решение задачи (1.1) для кольцевого штампа дается в двух разных формах, совпадающих в численном виде. В первом случае задача (1.1) сводится к интегральному уравнению для $\varphi_1(x)$ [3]

$$\pi(1-\nu_1)\sqrt{x-\rho_0}\,\varphi_1(x) + \int_{\rho_0}^{1} \frac{K_1(x, t)}{\sqrt{t-\rho_0}}\,\varphi_1(t)\,dt = -\frac{hx}{\sqrt{x+\rho_0}}, \tag{1.2}$$

где

$$K_1(x, t) = xt\left[\frac{2(1-\nu_1)M_1(x, t)}{\pi\sqrt{(x+\rho_0)(t+\rho_0)}} + \int_0^{\infty} \Delta(\beta) l_1(x, \beta) l_1(t, \beta)\,d\beta\right], \tag{1.3}$$

$$M_1(x, t) = \frac{1}{x^2-t^2}\left[\frac{x^2-\rho_0^2}{x}\ln\frac{x+\rho_0}{x-\rho_0} - \frac{t^2-\rho_0^2}{t}\ln\frac{t+\rho_0}{t-\rho_0}\right], \tag{1.4}$$

$$l_1(x, \beta)=\frac{J_0(\rho_0\beta)}{\sqrt{x+\rho_0}}-\beta\sqrt{x-\rho_0}\int_{\rho_0}^{x}\frac{J_1(\rho\beta)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}d\rho, \tag{1.5}$$

а $\Delta(\beta)$ — известная функция, убывающая на бесконечности по экспоненциальному закону. Во втором случае задача (1.1) сводится к интегральному уравнению для $\varphi_2(x)$ ([2]).

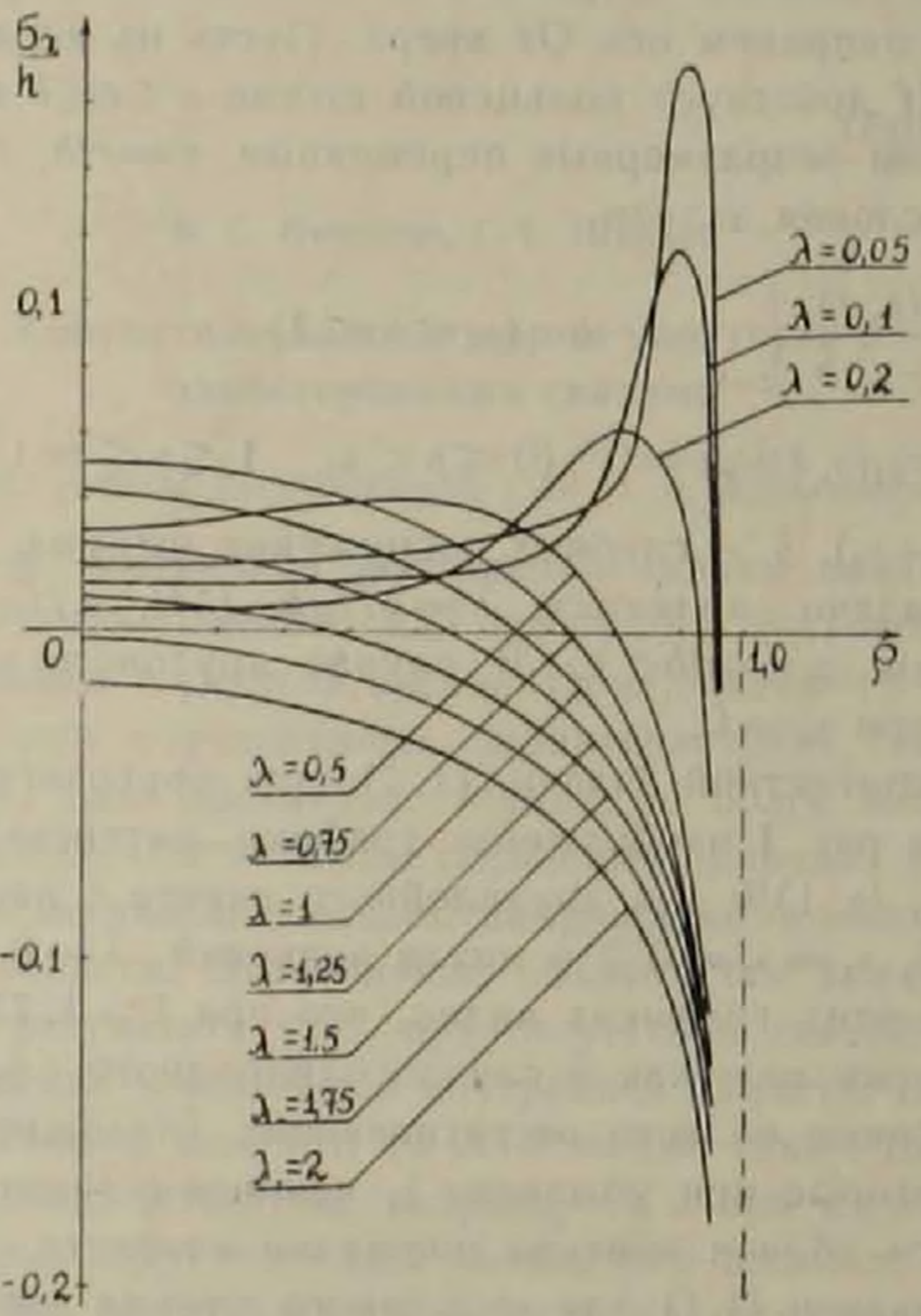

Рис. 1

$$\pi(1-\nu_1)\sqrt{1-x}\,\varphi_2(x)+\int_{\rho_0}^{1}\frac{K_2(x, t)}{\sqrt{1-t}}\varphi_2(t)dt=-\frac{hx}{\sqrt{1+x}}, \tag{1.6}$$

где

$$K_2(x, t)=xt\left|\frac{2(1-\nu_1)M_2(x, t)}{\pi\sqrt{(1+x)(1+t)}}+\int_0^{\infty}\Delta(\beta)l_2(x, \beta)l_2(t, \beta)d\beta\right|, \tag{1.7}$$

$$M_2(x, t)=\frac{1}{x^2-t^2}\left[\frac{1-x^2}{x}\ln\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-t^2}{t}\ln\frac{1-t}{1+t}\right], \tag{1.8}$$

$$l_2(x, \beta)=\frac{J_0(\beta)}{\sqrt{1+x}}+\beta\sqrt{1-x}\int_x^1\frac{J_1(\rho\beta)}{\sqrt{\rho^2-x^2}}d\rho, \tag{1.9}$$

Интенсивность давления штампа $p(\rho) = \sigma_{z_1}(\rho, 1)$ выражается через функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ по формулам:

$$p(\rho) = \frac{\varphi_1(\lambda, 1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^{1} \frac{\varphi_1'(\lambda, y)}{\sqrt{y^2-\rho^2}} dy, \tag{1.10}$$

$$p(\rho) = \frac{\varphi_2(\lambda, a_0)}{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\varphi_2'(\lambda, y)}{\sqrt{\rho^2-y^2}} dy, \tag{1.11}$$

в которых в явном виде выделены особенности на внешнем $\rho = 1$ и внутреннем $\rho = \rho_0$ контурах площадки контакта и подчеркнута очевидная зависимость $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ от параметра λ, т. е. $\varphi_1(x) = \varphi_1(\lambda, x)$, $\varphi_2(x) = \varphi_2(\lambda, x)$. Явное выделение особенностей $p(\rho)$ на обоих контурах кольцевой площадки контакта и явилось целью дублирования решения задачи (1.1) Используя оба подхода, реализовано численное решение задача (1.1) о давлении кольцевого штампа на двухслойный пакет. Расчеты проводились при параметрах $\delta_1 = 100$, $\ell_1 = 0,95$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\rho_0 = 0,5$. На рис. 2 показаны графики осевых перемещений $w^* = 1 + E_1 w_1/(1+\nu_1)bh$ и интенсивности давления штампа $\sigma^* = p(\rho)/h$ на внешней поверхности пакета при $\lambda = 0,5$; 1,418; 2. Слу-

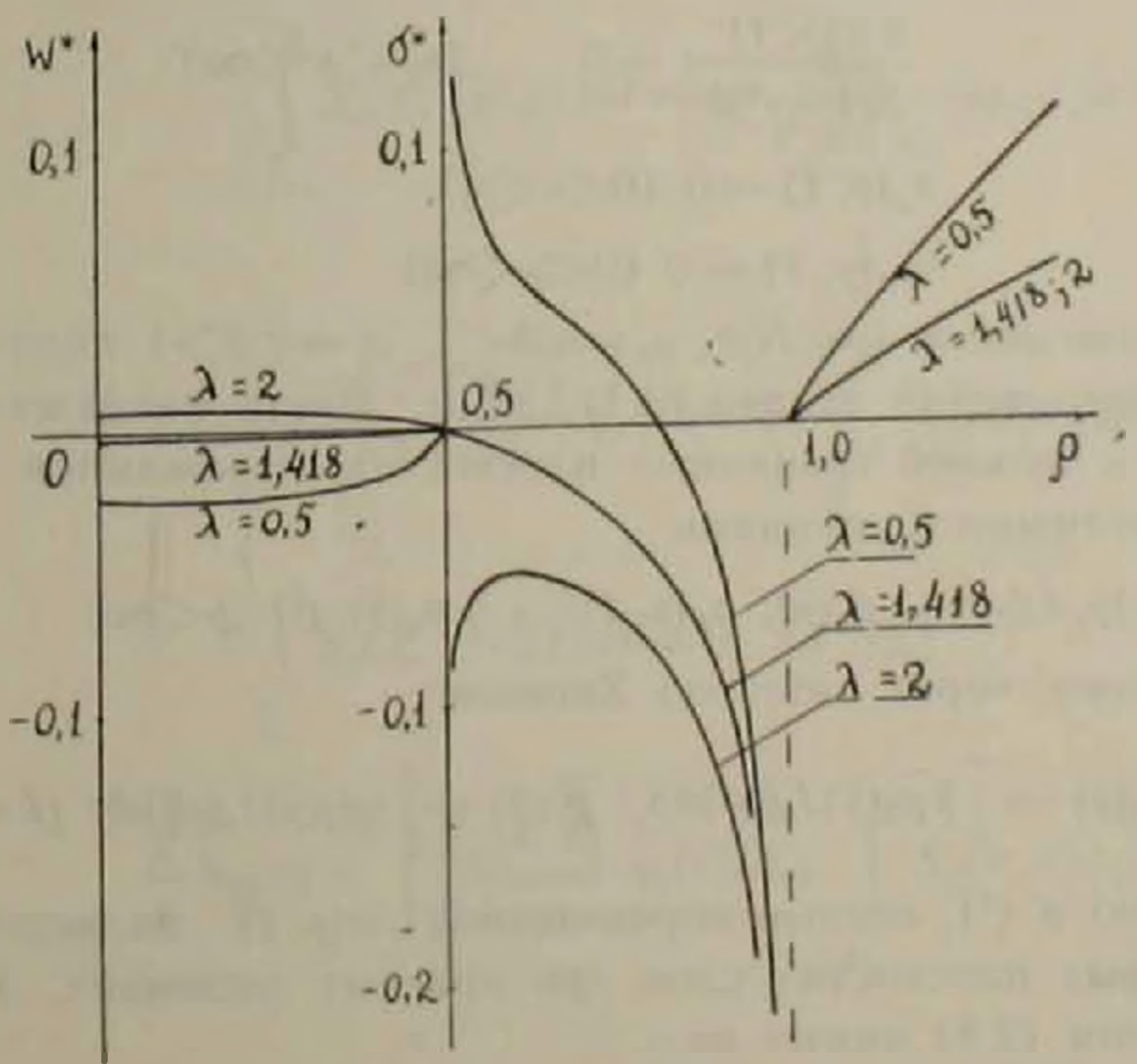

Рис. 2

чай $\lambda = 2$ качественно соответствует однородному слою. В случае $\lambda = 0,5$ вблизи внутреннего контура площадки контакта возникают растягивающие (положительного знака) напряжения σ^*, обраща-

ющиеся в $+\infty$ на самом контуре $\rho = \rho_0 = 0,5$. Для фиксированного $\rho_0 = \rho_0^*$ величина $\lambda = 1,418$ определяется из условия $\varphi_2(\lambda, \rho_0^*) = 0$ и соответствует случаю $p(\rho_0^*) = 0$, когда реализуются решения задач о давлении на пакет кругового штампа или кольцевых штампов при $\rho_0 < \rho_0^*$ с учетом отхода упругой среды от их оснований соответственно в круге $0 \leqslant \rho < \rho_0$ или кольце $\rho_0 \leqslant \rho < \rho_0^*$, что подтверждается графиком осевых перемещений w^* при $\lambda = 1,418$.

2. Осесимметричный изгиб слоя под действием кругового или кольцевого штампа. Пусть бесконечный слой произвольной толщины H закреплен на верхней и нижней граничных плоскостях при $r > c$ и на его верхней граничной плоскости действует кольцевой штамп $a \leqslant r \leqslant b$ с плоским основанием, причем $b < c$. Примем начало отсчета цилиндрической системы координат r, z на нижней граничной плоскости слоя и пусть ось Oz совпадает с осью штампа и направлена вверх. Введем безразмерные переменные $\rho = r/b$, $t = z/H$ и зададим краевые условия задачи следующими равенствами:

при $t = 1$:
$$\frac{Ew(\rho, t)}{2(1-\nu^2)b} = \begin{cases} -h & (\rho_0 \leqslant \rho \leqslant 1) \\ 0 & (\rho_1 < \rho < \infty) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\sigma_z(\rho, t) = 0 (0 \leqslant \rho < \rho_0,\ 1 < \rho < \rho_1); \tag{2.2}$$

$$\tau_{rz}(\rho, t) = 0 \ (0 \leqslant \rho < \infty) \tag{2.3}$$

при $t = 0$:
$$\frac{Ew(\rho, t)}{2(1-\nu^2)b} = 0 \qquad (\rho_1 < \rho < \infty) \tag{2.4}$$

$$\sigma_z(\rho, t) = 0 \ (0 \leqslant \rho < \rho_1); \tag{2.5}$$

$$\tau_{rz}(\rho, t) = 0 \ (0 \leqslant \rho < \infty) \tag{2.6}$$

Величины отношений $\lambda = H/b$, $\rho_0 = a/b < 1$, $\rho_1 = c/b > 1$ являются характерными параметрами задачи (2.1)—(2.6). Пусть напряжения $\sigma_z(\rho, t)$ на верхней и нижней граничных плоскостях выражаются некоторыми пока неизвестными функциями

$$\sigma_z(\rho, t)|_{t=1} = p_1(\rho),\ \sigma_z(\rho, t)|_{t=0} = p_0(\rho) \ (0 \leqslant \rho < \infty) \tag{2.7}$$

представимыми через интеграл Ханкеля:

$$p_i(\rho) = \int_0^\infty \beta \overline{p}_i(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta,\ \ \overline{p}_i(\beta) = \int_0^\infty \rho p_i(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho \ (i = 0, 1) \tag{2.8}$$

Как показано в [3], осевые перемещения $w(\rho, t)$ на верхней и нижней граничных плоскостях слоя при краевых условиях (2.3), (2.6), (2.7) с учетом (2.8) имеют вид:

$$\left.\frac{Ew(\rho, t)}{2(1-\nu^2)b}\right|_{t=1} = \int_0^\infty \Delta_{11}(\beta)\overline{p}_1(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta - \int_0^\infty \Delta_{10}(\beta)\overline{p}_0(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \tag{2.9}$$

$$\left.\frac{Ew(\rho, t)}{2(1-\nu^2)b}\right|_{t=0} = \int_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\overline{p}_1(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta - \int_0^\infty \Delta_{00}(\beta)\overline{p}_0(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \tag{2.10}$$

где $\Delta_{ij}(\beta)$ $(i, j = 0, 1)$ — известные функции, причем $\Delta_{ii}(\beta) - 1$ $(i = 0, 1)$, $\Delta_{01}(\beta)$, $\Delta_{10}(\beta)$ убывают на бесконечности по экспоненциальным законам. Заметим, что при получении формул (2.9)—(2.10) в работе [3] был устранен математический дефект, связанный с расходимостью интеграла Ханкеля для осевых перемещений слоя $w(\rho, t)$ даже в случае статически уравновешенных нагрузок (2.7) на его верхней и нижней поверхностях.

Подставляя (2.7)—(2.10) в краевые условия (2.1)—(2.2), (2.4), (2.5), получаем систему парных интегральных уравнений относительно $\overline{p_0}(\beta)$ и $\overline{p_1}(\beta)$. Затем система парных интегральных уравнений известными методами, изложенными в работах [2,3], сводится к системе линейных интегральных уравнений для трех неизвестных функций двух разных видов, позволяющих выделить особенности на обоих контурах площадки контакта кольцевого штампа со слоем, как в 1 в задаче для пакета слоев. В первом случае система линейных интегральных уравнений для новых неизвестных функций $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\theta_1(x)$ имеет вид:

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{x-\rho_0}\,\varphi_1(x)+\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{S_1(x,t)}{\sqrt{t-\rho_0}}\,\varphi_1(t)dt+\int_{\rho_1}^{\infty}S_2(x,t)\psi_1(t)dt+$$

$$+\int_{\rho_1}^{\infty}S_3(x,t)\theta_1(t)dt=-\frac{hx}{\sqrt{x+\rho_0}}\quad(\rho_0\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\frac{2}{\pi}\psi_1(x)+\int_{\rho_0}^{1}\frac{S_4(x,t)}{\sqrt{t-\rho_0}}\,\varphi_1(t)dt+\int_{\rho_1}^{\infty}S_5(x,t)\psi_1(t)dt+ \tag{2.9}$$

$$+\int_{\rho_1}^{\infty}S_6(x,t)\theta_1(t)dt=0\quad(x>\rho_1)$$

$$\frac{2}{\pi}\theta_1(x)+\int_{\rho_0}^{1}\frac{S_7(x,t)}{\sqrt{t-\rho_0}}\,\varphi_1(t)dt+\int_{\rho_1}^{\infty}S_8(x,t)\psi_1(t)dt+$$

$$+\int_{\rho_1}^{\infty}S_9(x,t)\theta_1(t)dt=0\quad(x>\rho_1)$$

Здесь ядро $S_1(x, t) = K_1(x, t)$ определяется по формуле (1.3) с учетом (1.4), (1.5) и $\Delta(\beta) = \Delta_{11}(\beta) - 1$, $S_2(x, t) = S_4(t, x)$, а ядра $S_l(x, t)$ $(l = 3, 4, \ldots, 9)$ выражаются формулами:

$$S_3(x,t) = -x\int_0^\infty \Delta_{10}(\beta)\sin(t\beta)\,l_1(x,\beta)\,d\beta,$$

$$S_4(x,t) = \frac{t\sqrt{x^2-\rho_0^2}}{(x^2-t^2)\sqrt{t+\rho_0}} + t\int_0^\infty [\Delta_{11}(\beta)-1]\sin(x\beta)\,l_1(t,\beta)\,d\beta,$$

$$S_5(x,t) = \int_0^\infty [\Delta_{11}(\beta)-1]\sin(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, \qquad (2.13)$$

$$S_6(x,t) = -\int_0^\infty \Delta_{10}(\beta)\sin(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta,$$

$$S_7(x,t) = -t\int_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\sin(x\beta)\,l_1(t,\beta)\,d\beta,$$

$$S_8(x,t) = -\int_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\sin(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta,$$

$$S_9(x,t) = \int_0^\infty [\Delta_{00}(\beta)-1]\sin(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta,$$

где $l_1(x,\beta)$ определена формулой (1.5) Давление под штампом $p(\rho)$ выражается через $\varphi_1(x)$ по формуле (1.10).

Во втором случае задача (2.1)—(2.6) сводится к системе линейных интегральных уравнений (2.12) для функций $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ $\theta_2(x)$, в которой ядро $S_1(x,t) = K_2(x,t)$ определяется по формуле (1.7) с учетом (1.8), (1.9) и $\Delta(\beta) = \Delta_{11}(\beta)-1$, $S_2(x,t) = S_1(t,x)$, а ядра $S_i(x,t)$ $(i = 3, 4, \ldots, 9)$ выражаются формулами (2.13) с заменой $l_1(x,\beta)$ на $l_2(x,\beta)$ (1.9), ρ_0 на 1. Давление под штампом $p(\rho)$ выражается через $\varphi_2(x)$ по формуле (1.11). Если при изгибе слой отходит от основания кругового или кольцевого штампа, то неизвестный параметр ρ_0 определяется из условия $\varphi_2(\lambda,\rho_0) = 0$.

Институт проблем механики Академии наук СССР

Վ. Ս. ՆԻԿԻՇԻՆ, Գ. Ս. ՇԱՊԻՐՈ

Առաձգականության տեսության միակողմանի կապերով կոնտակտային խնդիրներ

Հոդվածում ցույց է տրվում առաձգական շերտավոր միջավայրի մեջ կլոր և օղակաձև կոշտ դրոշմների ներմղման ժամանակ ձգող կոնտակտային լարումների առաջացման հնարավորությունը՝ կոնտակտի մեջ գտնվող մարմինների միջև լրիվ կոնտակտի առկայության դեպքում։

Նոր լուծումներ են տրված շերտավոր միջավայրերի սեղմման, կլոր և օղակաձև կոշտ դրոշմներով համասեռ շերտի ծռման խնդիրների համար առաձգական միջավայրի իր հիմքից հետ մնալու հաշվառմամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. С. Никишин, Г. С. Шапиро.* Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, т. I, Тбилиси, Изд «МЕЦНИЕРЕБА», 1973. [2] *В. С. Никишин*, Осесимметричные контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. Издание ВЦ АН СССР, Сообщения по прикладной математике, вып. 3, 1976. [3] *В. С. Никишин, Г. С. Шапиро*, Успехи механики деформируемых сред. Изд «Наука», 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 535.37 535.34 : 548.0

ФИЗИКА

Т. И. Бутаева, А. А. Каминский, А. Г. Петросян,
Х. С. Багдасаров

Стимулированное излучение при 300°К кристаллов $Lu_3Al_5O_{12}$ с ионами Ho^{3+} и Er^{3+}

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 8/VII 1976)

1. Исследования, проведенные ранее ([1–5]), показали, что кубические кристаллы $Lu_3Al_5O_{12}$ (пространственная группа O_h^{10}—$Ia3d$) с примесью редкоземельных ионов (TR^{3+}) относятся к перспективным активным средам для твердотельных лазеров ([1–3]) и являются чрезвычайно удобными объектами для изучения природы физических процессов в активированных кристаллах ([4,5]), непосредственно обуславливающих эффект стимулированного излучения (СИ). Дальнейшие наши исследования спектрально-генерационных свойств $Lu_3Al_5O_{12}$—TR^{3+} выявили у них ряд новых качеств, приведших нас к обнаружению у них СИ на новых каналах генерации при 300°К. В частности, было зарегистрировано СИ на волне 29460 Å ионов Ho^{3+} на дополнительном переходе ${}^5I_6 \rightarrow {}^5I_7$. Это самое длинноволновое излучение "комнатных" твердотельных (кристаллических) лазеров ([6]). Представляет определенный практический интерес обнаруженная нами генерация ионов Er^{3+} в диапазоне $\approx$0,86 *мкм*, соответствующем максимуму спектральной чувствительности ФЭУ с Ag—O—Cs фотокатодом. Краткому изложению полученных результатов и посвящено настоящее сообщение.

2. Кристалл $Lu_3Al_5O_{12}$—Ho^{3+}. До настоящей работы СИ ионов Ho^{3+} в неорганических материалах с ионной структурой было получено на линиях многих каналов генерации (рис. 1). Среди них переходы: ${}^5S_2 \rightarrow {}^5I_8(^7)$, ${}^5F_5 \rightarrow {}^5I_5(^8)$, ${}^5I_7 \rightarrow {}^5I_6(^9)$ и ${}^5S_2({}^5F_4) \rightarrow {}^5I_{5-7}$, ${}^5F_5 \rightarrow {}^5I_7(^{10})$. При этом необходимо отметить, что в несенсибилизированных кристаллах генерация ионов Ho^{3+} при 300°К была зарегистрирована и надежно идентифицирована только на одном переходе ${}^5S_2({}^5F_4) \rightarrow {}^5I_5(^{10})$. В наших исследованиях были найдены экспериментальные условия и зарегистрировано СИ на новом переходе ${}^5I_6 \rightarrow {}^5I_7$ при 300°К с длиной волны генерации $\lambda_г$=29460$\pm$5Å. Измерения также показали, что время жизни начального рабочего состояния ${}^5I_6$ слабочувствительно к концентрации активатора (до$\approx$40 *ат.%*). Это указывает, что генерация этой пер-

спективной активной среды может быть получена и с большим содержанием ионов Ho^{3+}. Некоторые спектрально-генерационные характеристики $Lu_3Al_5O_{12} - Ho^{3+}$ приведены в табл. 1.

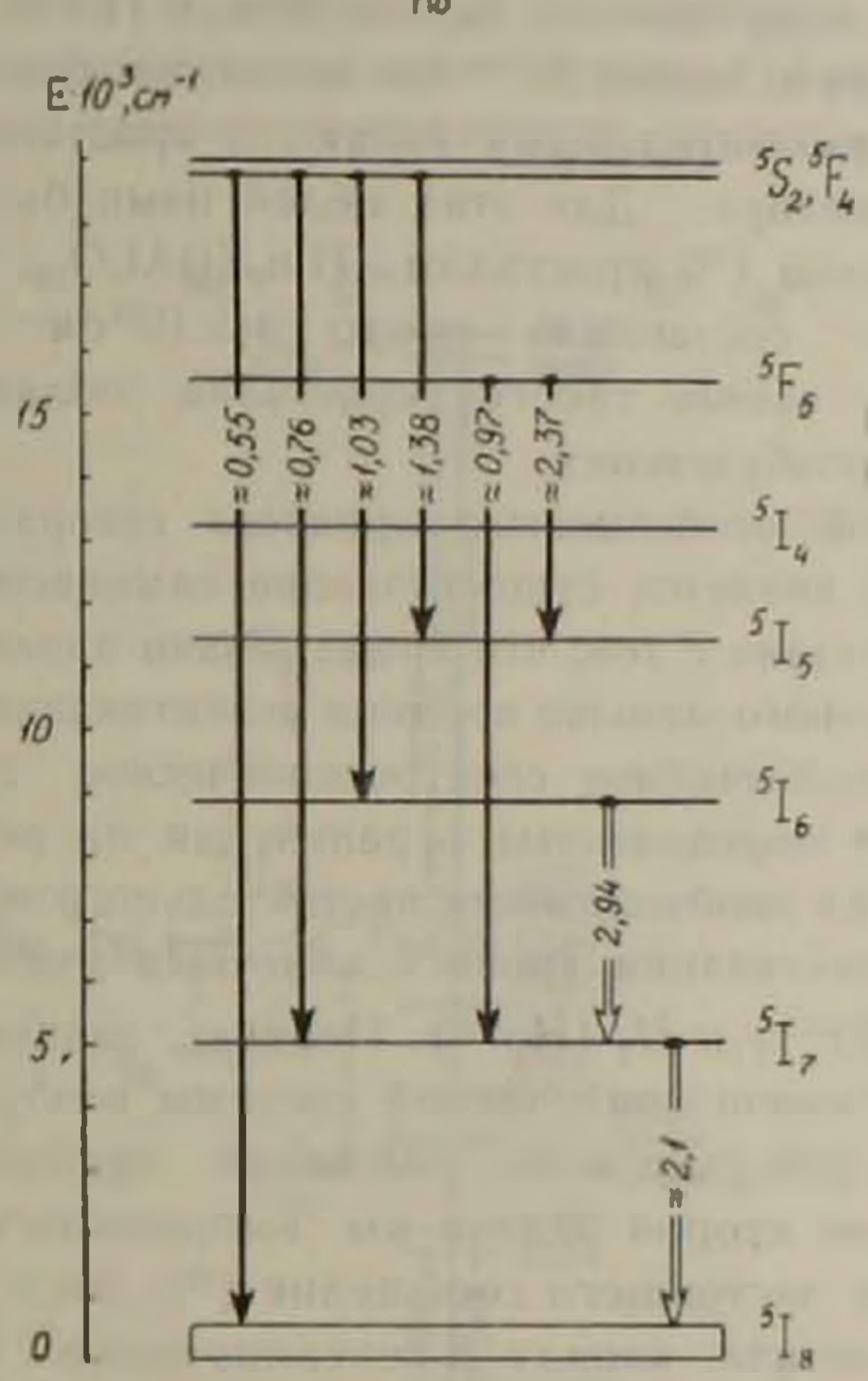

Рис. 1. Диаграмма уровней ионов Ho^{3+} с указанием генерационных каналов. Двойными стрелками показаны индуцированные переходы, обнаруженные в кристалле $Lu_3Al_5O_{12} - Ho^{3+}$

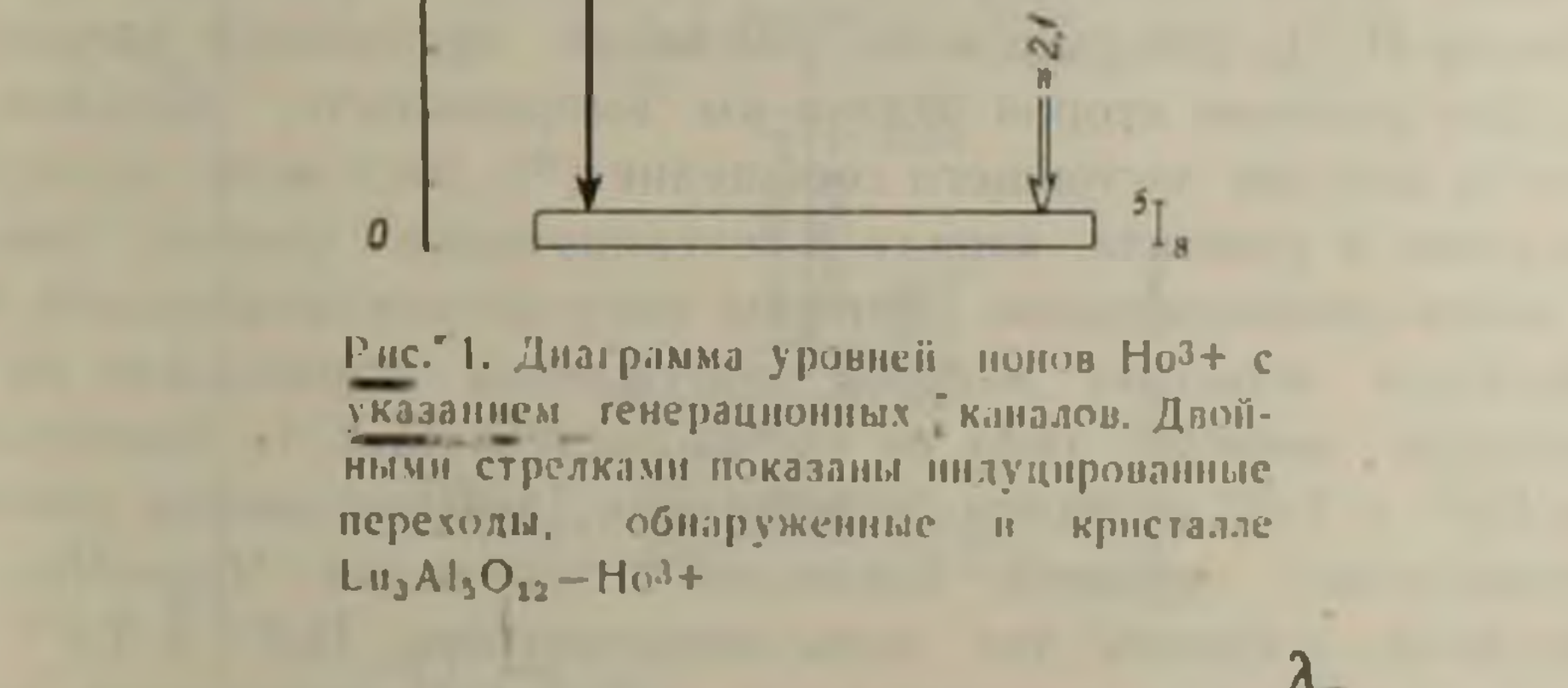

Рис. 2. Спектры стимулированного излучения ионов Er^{3+} (переход $^4S_{3/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$) в кристаллах. Стрелкой указана реперная линия с $\lambda_р = 8716{,}7$ Å

3. Кристалл $Lu_3Al_5O_{12}-Er^{3+}$. При 77 и 300°К в наших опытах СИ было обнаружено на трех переходах: $^4S_{3/2}\rightarrow{}^4I_{13/2}$ с $\lambda_г=8632{,}5\pm0{,}5$Å (см. рис. 2, где так же для сравнения приведены спектры генерации других кристаллов); $^4S_{3/2}\rightarrow{}^4I_{9/2}$ с $\lambda_г=17762\pm5$Å и $^4I_{11/2}\rightarrow{}^4I_{13/2}$ с $\lambda_г=29408\pm15$ Å. Также как и в случае ионов Ho^{3+} для возбуждения СИ (на $\lambda_г\approx2{,}94$ *мкм*) ионов Er^{3+} на дополнительном переходе $^4I_{11/2}\rightarrow{}^4I_{13/2}$ более предпочтительными являются кристаллы с высокой концентрацией активатора. Для этих целей нами были синтезированы расплавным методом ([11]) кристаллы $(Lu_2Er)Al_5O_{12}$, в которых содержание ионов Er^{3+} составляло около $4{,}5\cdot10^{21}$ *см*$^{-3}$. Как следует из табл. 1, лазер на основе такого кристалла обладает сравнительно низким порогом возбуждения.

4. Характерной особенностью процесса генерации перечисленных выше кристаллов является существование самонасыщения на рабочих переходах. Это связано с тем, что время жизни начальных метастабильных состояний намного меньше времени дезактивации конечных рабочих уровней. Такое необычайное спектроскопическое свойство лазерных сред накладывает определенные ограничения на режим их возбуждения и указывает на необходимость настоятельного поиска путей ускорения процесса дезактивации уровней конечных мультиплетов, особенно состояний $^4I_{13/2}$ (Er^{3+}) и $^5I_7$ (Ho^{3+}). Первую задачу мы решили применением эффективной оптической системы возбуждения на основе Хе лампы ИСП—250 ($\tau_{возб}=40-100$ *мксек*, предельная энергия ≈180 дж). Для решения второй задачи мы выбрали путь, предложенный одним из авторов настоящего сообщения ([12]). Этот метод заключается в введении в кристалл, наряду с генерирующими ионами, специальных ионов-дезактиваторов, которые посредством механизмов безызлучательной передачи энергии возбуждения "принимают на себя" остаточную энергию (или ее часть) после акта СИ. Известно, что ионы Ho^{3+} и Tu^{3+} являются "тушителями" люминесценции ионов Er^{3+} в алюминиевых гранатах, связанной с переходом $^4I_{13/2}\rightarrow{}^4I_{15/2}$ ([6]). К этому важно добавить, что ионы-дезактиваторы Ho^{3+} и Tu^{3+} могут также играть роль и генерирующих ионов при обеспечении условий (рабочая температура, специальный оптический резонатор) каскадного режима генерации с промежуточным актом передачи электронного возбуждения ([6, 12]). Поэтому в наших первых экспериментах по выявлению возможностей ускорения процесса дезактивации уровней состояния $^4I_{13/2}$ ионов Er^{3+} мы остановились именно на этих ионах. На рис. 3 приведена упрощенная схема уровней ионов Er^{3+}, Ho^{3+} и Tu^{3+}, которая поясняет связь (показана волнистыми стрелками) между мультиплетами этих ионов, приводящую к ускоренной дезактивации состояния $^4I_{13/2}$ ионов Er^{3+}. Если в кристалле $Lu_3Al_5O_{12}$, содержащем только ионы Er^{3+}, генерация происходит на линии с $\lambda_г=29403$Å, то при наличии ионов—дезактиваторов Ho^{3+} и Tu^{3+} СИ переключается на коротковолновую линию с $\lambda_г=26990$Å. В первом

случае из-за отсутствия быстрого стока остаточное возбуждение "распределяется„ по всем штарковским компонентам состояния $^4I_{13/2}$, что приводит к лучшим условиям для возбуждения СИ на длинноволновом переходе. В наших кристаллах, согласно спектроскопическим измерениям, в небольших количествах присутствовали и ионы Nd^{3+} (как неконтролируемая примесь). Из схемы рис. 3 следует, что эти ионы также могут служить дезактиваторами состояния

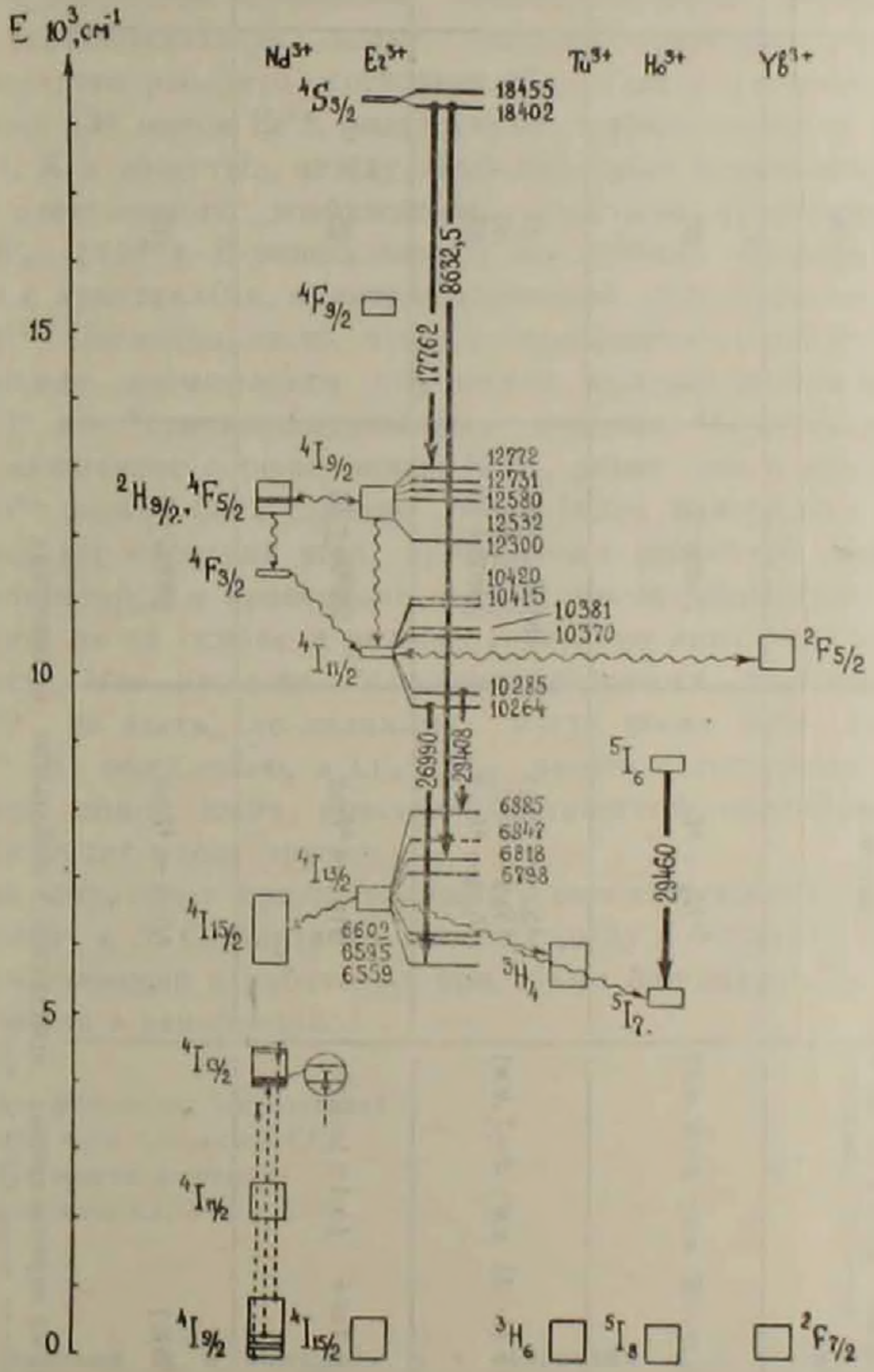

Рис. 3. Упрощенные схемы уровней TR^{3+} ионов. Для ионов Er^{3+} при 300 К энергии штарковских компонент даны в $см^{-1}$, а переходы между ними указаны в Å. Здесь же показано положение некоторых мультиплетов ионов Ho^{3+}, Tu^{3+} Nd^{3+} и Yb^{3+}. Жирными стрелками обозначены индуцированные, а штриховыми кросс релаксационные переходы (для λ_p = 26990 Å). Волнистыми стрелками показана связь между мультиплетами различных TR^{3+} ионов при безызлучательной передаче энергии и безызлучательные переходы

Таблица 1

Спектрально-генерационные характеристики кристалла $Lu_3Al_5O_{12}$ с ионами Ho^{3+} и Er^{3+}

Кристалл (концентрация ионов дана в ат. %, в скобках приведены длина и диаметр лазерного элемента)*	Лазерный переход	$\lambda_г$ Å	$E_п$, *дж*	Конечный уровень, $см^{-1}$
$Lu_3Al_5O_{12}$—Ho^{3+} (≈5%) (*l*=37 *мм*; *d*=6 *мм*)	$^5I_8 - {}^5I_7$	29460±5	60	≈5400
$Lu_3Al_5O_{12}$—Er^{3+} (≈1,5%) (*l*=43 *мм*; *d*=7 *мм*)	$^4S_{3/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$ $^4S_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$ $^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$	8632,5±0,5 17762±5 29408±10	45 30 55	6918 12772 6885
$Lu_3Al_5O_{12}$:Ho^{3+} (≈3%), Tu^{3+} (≈1%)—Er^{3+} (9%) (*l*=29 *мм*; *d*=6 *мм*)	$^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$	26990±10	25	≈6560
(Lu_2Er)Al_5O_{12}—Er^{3+} (≈35%) (*l*=31 *мм*; *d*=5 *мм*)	$^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$	29395±5	12	≈6885

Примечание. Некоторые из перечисленных кристаллов в небольших количествах (неконтролируемое) содержали ионы Nd^{3+} и Yb^{3+}.

$^4I_{13/2}$ ионов Er^{3+}. Некоторая опасность здесь может возникнуть из-за нежелательной кросс-релаксационной связи между этими ионами, которая может "потушить" люминесценцию с уровня $^4I_{11/2}$. Но как следует из рис. 3, эта связь (см. штриховые стрелки, соответствующие $\lambda_r = 26990$ Å) не может быть сильной. Говоря об ионах Nd^{3+}, необходимо отметить, что они также могут оказать ионам Er^{3+} вторую помощь при генерации последних на переходе $^4I_{11/2} \to {}^4I_{13/2}$. Ионы Nd^{3+}, благодаря возможной безызлучательной передачи возбуждения (сенсибилизация), могут несколько улучшить условия заселения верхнего рабочего состояния $^4I_{11/2}$. Для улучшения условия возбуждения СИ ионов Er^{3+} могут также оказать полезное действие ионы Yb^{3+}. Как известно, между ними возможен резонансный обмен энергией электронного возбуждения с участием мультиплетов $^4I_{11/2}$ (Er^{3+}) и $^2F_{5/2}$ (Yb^{3+}). В наших опытах мы провели предварительные измерения с кристаллами, коактивированными одновременно ионами Er^{3+} и Yb^{3+}. Несмотря на то, что все перечисленные выше эксперименты выявили возможности улучшения условий возбуждения СИ ионов Er^{3+} на "самонасыщающемся" переходе $^4I_{11/2} \to {}^4I_{13/2}$, окончательное заключение о роли ионов Nd^{3+}, равно как и ионов Ho^{3+}, Tu^{3+} и Yb^{3+} может быть сделано после более тщательных спектроскопических исследований этих кристаллов с различной концентрацией коактиваторов и проведении энергетических измерений параметров лазеров на их основе в режиме генерации импульсов различной длительности. Что касается "самонасыщающегося" перехода $^5I_6 \to {}^5I_7$ ионов Ho^{3+}, то здесь, по-видимому, могут также быть полезными ионы Nd^{3+}. К сожалению, в $Lu_3Al_5O_{12}$ ввести в достаточном количестве этих ионов из-за кристалло-химической специфики этого соединения будет очень трудно.

Авторы выражают признательность член-корреспонденту М. Л. Тер-Микаеляну и Э. С. Вартаняну за поддержку и большой творческий интерес проявленный к работе. Авторы также благодарят В. А. Федорова за участие в измерениях.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР
Институт кристаллографии
Академии наук СССР

Տ. Ի. ԲՈՒՏԱԵՎԱ, Ա. Ա. ԿԱՄԻՆՍԿԻ, Ա. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Խ. Ս. ԲԱԳԴԱՍԱՐՈՎ

300°K ջերմաստիճանում Ho^{3+} և Er^{3+} իոններով $Lu_3Al_5O_{12}$ բյուրեղների ստիպողական ճառագայթումը

Տվյալ աշխատանքում բերված են TR^{3+} իոններով $Lu_3Al_5O_{12}$ հալույթից սինթեզված մոնոբյուրեղների նոր հատկությունները։

Առաջին անգամ նկատված է ստիպողական ճառագայթում 300 K -ում. Ho^{3+} իոնների գեներացիայի լրացուցիչ ճյուղում ($^5I_6 \to {}^5I_7$), $\lambda = 29460$ Å ալիքի երկարությամբ: Դա պինդ մարմինների վրա աշխատող սենյակային լազերների ամենաերկարալիքը ճառագայթումն է:

Որոշակի հետաքրքրություն է ներկայացնում Er^{3+} իոնների ճառագայթումը ~0,86 մկմ տիրույթում ($^4S_{3/2} \to {}^4I_{13/2}$ անցումը): Հետաքրքրություն է դարձված նաև $Lu_2ErAl_5O_{12}$ բյուրեղին: Հետազոտությունները ցույց տվեցին, որ այդ բյուրեղի հիման վրա աշխատող լազերն օժտված է գրգռման համեմատաբար ցածր շեմով (12 ջ) $\lambda = 29395$ Å ալիքի երկարության համար:

Աշխատանքում բերված են նաև որոշ անցումների սպեկտրալ և ճառագայթային բնութագրերը: TR^{3+} իոնների էներգետիկ մակարդակների սխեման և քննարկված են ակտիվացված բյուրեղներում որոշ ֆիզիկական երևույթների վերաբերվող հարցեր: Մասնավորապես քննարկված են սենսիբիլիզացիայի, վերջնական աշխատանքային մակարդակների դեզակտիվացիայի, ինքնահագեցման հարցերը: Ստացված տվյալների նախնական վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ Er^{3+} իոնների համար լավ դեզակտիվատորներ կարող են լինել Ho^{3+}, Tm^{3+} և Nd^{3+} իոնները: Բացի դրանից Nd^{3+} իոնները կարող են լավացնել $^4I_{11/2}$ վերին աշխատանքային վիճակի բնակեցման պայմանները: Հնարավոր գրգռման առանց ճառագայթման փոխանցման պատճառով Yb^{3+} իոնները նույնպես կարող են դրական դեր խաղալ, քանի որ Er^{3+} և Yb^{3+} իոնների միջև հնարավոր է էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի ռեզոնանսային փոխանակում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. A. Kaminskii, Kh. S. Bagdasarov, A. G. Petrosyan, S. E. Sarkisov* Phys. Stat. Solidi (a), 18 K31 (1973). [2] *А. А. Каминский, П. В. Клевцов, Х. С. Багдасаров, А. А. Майер, А. А. Павлюк, А. Г. Петросян, М. В. Провоторов* Письма в ЖЭТФ, 16, 548 (1972). [3] *A. A. Kaminskii, S. E. Sarkisov, P. V. Klevtsov, Kh. S. Bagdasarov, A. A. Pavlyuk, A. G. Petrosyan* Phys. Stat. Solidi (a), 17, K75 (1973). [4] *A. A. Kaminskii, D. N. Vylegzhanin* IEEE J. Quantum Electronics, QE—7, 329 (1971). [5] *Г. А. Богомолова, Д. Н. Вылегжанин, А. А. Каминский*. ЖЭТФ, 69, 860 (1975). [6] *А. А. Каминский* Лазерные кристаллы, изд. «Наука», М., 1975. [7] *Ю. К. Воронько, А. А. Каминский, В. В. О[illegible]ко, А. М. Прохоров*, Письма в ЖЭТФ, 1 5 (1965). [8] *L. F. Johnson, H. G. Guggenheim*, IEEE J. Quantum Electronics, QE—10, 442 (1974). [9] *L. F. Johnson, G. D. Boyd, K. Nassau* Proc. IRE, 50, 87 (1962). [10] *Н. Г. Подколозина, А. М. Ткачук, В. А. Федоров, П. П. Феофилов*, Оптика и спектроскопия, 40 196 (1976). [11] *Х. С. Багдасаров, А. Г. Петросян*. ДАН Арм. ССР, т. 58, №3 (1974). [12] *А. А. Каминский*, Известия АН СССР, сер. Неорган. материалы, 7, 904 (1971).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 538.561 : 538.566.5

ФИЗИКА

Г. Г. Карапетян

Излучение ондулятора в волноводе

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 16/IX 1976)

В настоящее время возрос интерес к ондуляторному излучению в связи с возможностью получения с помощью ондуляторов мощного электромагнитного излучения в широком диапазоне частот (список литературы см. в [1]). Влияние проводящих поверхностей, в частности волноводных структур, на излучение мало изучено. В единственной работе [2], посвященной этому вопросу рассматривалось излучение заряда, движущегося по бесконечной синусоидальной траектории внутри волновода и показано, что при определенных частотах колебаний заряда, интенсивность ондуляторного излучения неограниченно возрастает из-за резонансного характера взаимодействия источника с возбуждаемым полем, отраженным от стенок волновода*. Представляет интерес рассмотреть ондулятор конечной длины и выяснить зависимость излученной энергии от длины (или числа звеньев).

Пусть заряд движется с постоянной продольной скоростью $v=c\beta$ по периодической траектории внутри однородного волновода. Вводя систему координат с осью oz направленной вдоль волновода и предполагая, что заряд имеет бесконечно малую толщину по оси oz для плотностей заряда и тока можем записать.

$$\rho=\rho_\perp(\xi,\eta,t)\delta(z-vt),\quad \vec{j}=\vec{j}_\perp(\xi,\eta,t)\delta(z-vt), \tag{1}$$

где ξ,η — поперечные криволинейные координаты,

$\rho_\perp$ и $\vec{j}_\perp$ — периодические по t функции с периодом $t_0=T/N=2\pi/\Omega$,

T — время движения, N — число периодов (или звеньев), Ω — частота периодического движения.

Представляя потенциалы возбужденного поля в виде разложения в ряды по собственным векторным функциям волновода согласно [4] имеем:

* На подобный резонанс впервые указал Л. И. Мандельштам [3].

$$\Phi = \sum_k \Phi_k(z, t) f_k(\xi, \zeta), \qquad \vec{A} = \sum_a \left| A_{k1}(z, t)\vec{a}_{k1}(\xi, \zeta) + A_{k2}(z, \zeta)\vec{a}_{k2}(\xi, \zeta) \right|, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \chi^2\right)\begin{pmatrix}\Phi_k \\ A_{k1,2}\end{pmatrix} = -4\pi\begin{pmatrix}\rho_k \\ \frac{1}{c} J_{k1,2}\end{pmatrix}\delta(z - vt).$$

Здесь

$$\rho_k = \int_s \rho_1 f_k^* ds, \quad J_{k1,2} = \int_s \vec{J}_1 \vec{a}_{k1,2}^* ds, \tag{3}$$

f_k и $\vec{a}_k$ — ортонормированные собственные функции, удовлетворяющие краевым задачам

$$(\nabla^2 + \chi_1^2) f_k = 0, \qquad f_k/_\Gamma = 0,$$

$$(\nabla^2 + \chi_{1,2}^2)\vec{a}_{k1,2} = 0, \qquad [\vec{n}, \vec{a}_{k1,2}]/_\Gamma = 0, \tag{4}$$

Γ — контур поперечного сечения S, n — нормаль к ней,

k — обозначает два индекса, определяющие собственную функцию, а индексы 1 и 2 соответствуют $E(H_z = 0)$ и $H(E_z = 0)$ волнам.

Опуская дальнейшие преобразования, запишем окончательные выражения потенциалов

$$\Phi_k = \int_0^t \rho_k(\tau)\psi(z, t, \tau)d\tau, \qquad A_{k1,2} = \frac{1}{c}\int_0^t J_{k1,2}(\tau)\psi(z, t, \tau)d\tau, \tag{5}$$

$$\psi(z, t, \tau) = \begin{cases} J_0|\chi\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (z - v\tau)^2}| & c(t-\tau) > |z - v\tau| \\ 0 & c(t-\tau) < |z - v\tau| \end{cases}$$

Далее вычислим электромагнитное поле и затем вектор Пойнтинга, интегрируя который по поперечному сечению получим поток энергии за единицу времени вдоль оси oz;

$$\Pi = \frac{1}{4\pi}\sum_k \left| c\chi_1^2\left(\Phi_k + \frac{1}{c\chi_1}\dot{A}_{k1}\right)\left(A_{k1}^* - \frac{1}{\chi_1}A_{k1}'^*\right) - A_{k2}^* A_{k2}'^* \right|. \tag{6}$$

Излученную энергию проще вычислять подставляя сперва в (6) $v = 0$. При этом заряд будет находиться в плоскости $z = 0$, поэтому вычисляя потоки энергии через сечения $z = \pm 0$ и интегрируя их сумму по времени в промежутке $(0, T)$ находим излученную энергию при $v = 0$.

Разлагая в полученной формуле величины $\rho_k(\tau)$ и $J_{k1,2}(\tau)$ в ряды

фурье на интервале $|0, 2\pi/\Omega|$, после соответствующих преобразований имеем:

$$W|_{v=0} = i\,\frac{2\pi\Omega}{c}\sum_{k,s,s'} s\left|\rho^*_{ks'}\rho_{ks}\left(\frac{s^2\Omega^2}{c^2\chi_1^2}-1\right)Y_1+J^*_{ks'}J_{ks}Y_2\right|, \qquad (7)$$

где

$$\rho_{ks}=\int_0^{2\pi/\Omega}\rho_k(t)e^{-is\Omega t}\,dt, \qquad J_{ks}=\int_0^{2\pi/\Omega}J_{k,2}(t)e^{-is\Omega t}\,dt,$$

$$Y_{1,2}=\int_0^T e^{it(s-s')t}\left|\int_0^t J_0(c\chi_{1,2}x)e^{-is\Omega x}dx\right|dt. \qquad (8)$$

Меняя в $Y_{1,2}$ порядок интегрирования можно показать, что при $N\to\infty$ $Y|_{s'=s}\sim NY_{s'\neq s}$, следовательно вклад смешанных членов с $s'\neq s$ в выражении энергии (7), обусловленных взаимодействием гармоник мал по сравнению с основными членами с $s'=s$. Оставляя в дальнейшем в энергии лишь члены с $s'=s$, которые очевидно являются энергиями отдельных гармоник, после несложных преобразований находим

$$W|_{v=0}=\frac{2N\Omega}{c}\sum_{k,s=1}^{\infty}\left|c^2|\rho_{ks}|^2\left(\frac{1}{\varkappa_1^2}-1\right)F(\varkappa_1, N)+|J_{ks}|^2F(\varkappa_2, N)\right|, \qquad (9)$$

где

$$F(\varkappa, N)=\int_0^{2\pi sN}\left(1-\frac{x}{2\pi sN}\right)\sin x J_0(\varkappa x)dx, \quad \varkappa_{1,2}=\frac{c\chi_{1,2}}{s\Omega}. \qquad (10)$$

Деля $W|_{v=0}$ на $\sqrt{1-\beta_{11}^2}$ и заменяя в (9) $\Omega\to\Omega/\sqrt{1-\beta_{11}^2}$ получаем искомую формулу для энергии ондулятора:

$$W=\frac{2N\Omega}{c}\sum_{k,s=1}^{\infty}\left|c^2|\rho_{ks}|^2\left(\frac{1}{\alpha_1^2}-1\right)F(\alpha_1, N)+\frac{|J_{ks}|^2}{1-\beta_{11}^2}F(\alpha_2, N)\right|, \qquad (11)$$

$\alpha_{1,2}=\varkappa_{1,2}\sqrt{1-\beta_{11}^2}=\frac{\Omega_{кр1,2}}{s\Omega}\sqrt{1-\beta_{11}^2}$, $\Omega_{кр1,2}$ — критические частоты волновода для E и H волн.

Функция $F(\alpha, N)$, описывающая зависимость излученной энергии от параметров ондулятора и волновода, существенно зависит от величины $\gamma\equiv 2\sqrt{|1-\alpha|Ns}$. Имеет место асимптотика

$$F(\alpha, N)=\frac{2\sqrt{2}}{3}(sN)^{1/2}[1+0(\gamma^2)] \qquad \gamma\ll 1 \qquad (12)$$

$$F(\alpha, N)=\frac{1}{2\sqrt{|1-\alpha^2|}}\,[1+\operatorname{sgn}(1-\alpha)+O(\gamma^{-1})] \quad \gamma\gg 1 \tag{12}$$

Из (12) следует, что при $\gamma\gg 1$ излучение ондулятора, имеющего N звеньев эквивалентно излучению N звеньев бесконечного ондулятора. В случае же $\gamma\leqslant 1$, наступает резонанс и зависимость энергии от числа звеньев приобретает нелинейный вид $\sim N^{3/2}$. При этом энергия E—волн пренебрежимо мала (11), т. е. резонанс имеет место лишь для H —волн. Из (12) также следует, что вклад в энергию членов с $\alpha>1$ составляет при $N\gg 1$ малую часть $\sim 1/\sqrt{N}$ от вклада членов с $\alpha<1$. Поэтому если подобрать размеры волновода так, чтобы условие $\gamma\ll 1$ выполнялось для наинизшего типа волны первой гармоники, то для остальных типов волн первой гармоники будут иметь место условия $\alpha>1$, $\gamma\gg 1$ и согласно (12) их вкладом в энергию можно пренебречь. Подбирая таким образом размеры волновода, для энергии, излученной на первой гармонике, из (11) получаем:

$$W_1=\frac{2N\Omega}{c}\,\frac{|J_{11}|^2}{1-\beta_{11}^2}\,F(\alpha_2, N)\simeq\frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{N^{3/2}}{1-\beta_{11}^2}\,\frac{\Omega|J_{11}|^2}{c}, \tag{13}$$

Если ондулятор излучает в дипольном приближении, то (13) является полной излученной энергией и так как в свободном пространстве $W_0\sim N$, то $W/W_0\sim N^{1/2}$, следовательно наличие волновода может заметно увеличить энергию излучения ондулятора.

Автор благодарен Г. В. Воскресенскому и Г. С. Саакяну за обсуждения.

Ереванский государственный университет

Գ. Գ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Օնդուլյատորի ճառագայթումը ալիքատարում

Դիտարկված է վերջավոր երկարության օնդուլյատորի ճառագայթումը ալիքատարում։ Հաշվված է լրիվ ճառագայթված էներգիան, որը ներկայացված է տանձին հարմոնիկաների և ալիքատարային տիպի ալիքների գումարով։ Ցույց է տրված, որ լիցքի արագաքի տատանման հաճախությունների ժամանակ էներգիայի կախվածությունը օնդուլյատորի սեկցիաների թվից (կամ երկարությունից) ունի ոչ գծային տեսք $\sim N^{3/2}$*։ Այդ պատճառով ալիքատարի առկայությունը կարող է զգալի ավելացնել ճառագայթված էներգիան։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. Ф. Алферов, Ю. А. Башмаков, Е. Г. Бессонов*, Труды ФИАН, 80, 100 (1975). [2] *H. Motz, M. Nakamura*. Annals of Physics, 7, 84 (1959) [3] *Л. И. Мандельштам*, ЖЭТФ, 15, 461 (1945). [4] *Г. В. Кисунько*, ЖТФ, 16 565 (1946)

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 631.547

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЯ

К. Г. Азарян, академик М. Х. Чайлахян

Реакция короткодневных видов на обработку регуляторами роста в условиях различного фотопериодического режима

(Представлено 20/VIII 1976)

Влияние среды на растительные организмы весьма многообразно. На рост и развитие растений заметно влияют длина дня, интенсивность и качество света, температура, влажность и другие условия внешней среды.

Одним из факторов, наиболее сильно влияющих на переход растений к цветению, является длина дня. Деление растений на несколько фотопериодических групп обусловлено их различным приспособлением к длине дня, необходимой для перехода растений к цветению. Наряду с основными видами, имеющими противоположную реакцию на длину дня,—длиннодневными, короткодневными, а также нейтральными, существуют виды с более сложной фотопериодической реакцией,—длинно-короткодневные, коротко-длиннодневные и другие [1–5].

Испытание влияния гиббереллинов-веществ, ускоряющих рост на растения различных фотопериодических групп показало, что при обработке этими веществами рост подавляющего большинства растений заметно усиливается. При этом у длиннодневных видов одновременно ускоряется и цветение так, что растения, обработанные этими веществами бутонизируют и цветут на коротком дне; у короткодневных видов при усилении роста ускорения цветения растений не наблюдаются [6–8].

После открытия ретардантов-веществ, задерживающих рост, также проводилось испытание их влияния на растения длиннодневных и короткодневных видов. При этом было установлено, что под влиянием ретардантов, в частности ретарданта ССС или хлорхолинхлорида, рост растений длиннодневных видов задерживается и одновременно отодвигаются сроки цветения; у растений короткодневных видов рост задерживается в меньшей мере, а сроки цветения не изменяются [9–11].

Целью настоящей работы было сравнительное изучение влияния обоих регуляторов роста—гиббереллина и ретарданта на растения короткодневных видов. Были взяты гиббереллин A_3 или гиббереллловая кислота (ГК) английского производства и ретардант ВСВ-бромхолинбромид, синтезированный К. С. Бокаревым в Институте физиологии

растений АН СССР и по активности примерно одинаковый с ретардантом ССС-хлорхолинхлоридом.

В качестве опытных объектов были взяты конопля однодомная (Cannabis sativa) и перилла красная (Perilla nankinensis). Конопля обладает количественной фотопериодической реакцией, так как цветет на коротком и на длинном дне, в последнем случае с запозданием; перилла красная имеет качественную реакцию на длину дня, т. е. бутонизирует и цветет лишь на коротком 9—12 часовом дне.

До начала опыта растения обоих видов выращивались на длинном естественном дне, а с начала опыта помещались в различные условия фотопериодического режима. Варианты опыта были таковы: 1) короткий 10-часовой день, который создавался с помощью специально сконструированной фотопериодической камеры ([12]), 2) индукция 14 короткими днями, 3) индукция 7 короткими днями, 4) длинный 16—18-часовой день. С начала опыта производилась обработка растений регуляторами роста—растения опрыскивались 0,01%-ным раствором гиббереллловой кислоты (ГК) и 0,5%-ным раствором ретарданта бромхолинбромида (ВСВ) до полного смачивания надземных частей.

Обработка регуляторами роста сильно повлияла на ростовые процессы конопли. Растения, опрыскиваемые раствором гиббереллина интенсивно росли в основном за счет растяжения междоузлий и их листва приобретала более светлую зеленую окраску, и наоборот, растения, опрыскиваемые раствором ретарданта, задерживались в росте и отличались более плотными листьями темно-зеленой окраски. Динамика роста растений и их состояние в конце опыта показаны в табл. 1 и на рис. 1 и 2.

Таблица 1

Рост и развитие конопли однодомной при обработке растений регуляторами роста на разной длине дня

Варианты опыта		Бутонизация	Высота растений, *см*			Учет опыта 21/VII	
длина дня	обработка		18/VI	29/VI	10/VII	высота, *см*	% к контролю
Короткий день	Вода	21/VI	21	55	69	73	100
	ГК	22/VI	38	112	148	158	210
	ВСВ	22/VI	16	27	35	40	54
14 дней индукции	Вода	22/VI	24	68	88	91	100
	ГК	22/VI	41	111	145	190	206
	ВСВ	21/VI	20	24	44	58	63
7 дней индукции	Вода	20/VI	22	74	103	116	100
	ГК	21/VI	47	148	208	320	193
	ВСВ	22/VI	21	55	86	114	98
Длинный день	Вода	25/VI	28	80	127	152	100
	ГК	27/VI	48	131	191	227	149
	ВСВ	25/VI	22	63	113	137	90

Данные табл. 1 показывают, что стимулирующее рост влияние гиббереллина было больше на постоянно коротком дне и при индукции 14 короткими днями и меньше при 7-дневной индукции и на длинном дне, высота растений соответственно 210, 206, 193 и 149%, % по отношению к контролю. Если иметь в виду, что уровень содержания эндогенных

Рис. 1. Влияние гиббереллина (ГК) на рост и цветение растений конопли в условиях короткого (*1,3*) и длинного (*4,5*) дня. *1* и *4*—контрольные растения, *3* и *6*—растения, обработанные гиббереллином

гиббереллинов на коротком дне невысок и повышается при сокращении периода индукции короткими днями ([13]), то станет ясным, что эффект экзогенного (извне вводимого) гиббереллина тем больше, чем меньше содержание в растениях эндогенных гиббереллинов. Задерживающее рост влияние ретарданта также проявлялось в наибольшей мере на коротком дне и ослабевало при уменьшении индукции короткими днями

(высота растений соответственно 54, 63, 98 и 90% к контролю). В этом случае, вероятно, задерживающее рост действие ретарданта суммируется с задерживающим действием эндогенных ингибиторов, содержание которых в растениях на коротком дне выше.

Рис. 2. Влияние ретарданта бромхолинбромида (ВСВ) на рост и цветение растений конопли в условиях короткого (*1,2*) и длинного (*4,5*) дня. *1,4*—контрольные растения; *2,5*—растения, обработанные ретардантом

В сроках бутонизации и цветения обработка растений конопли регуляторами роста на различном фотопериодическом режиме существенных изменений не вызывала.

Обработка регуляторами роста существенно повлияла и на ростовые процессы периллы красной—растения, опрыснутые гиббереллином, росли значительно более интенсивно, чем контрольные; наоборот, обработанные ретардантом задержались в росте. Динамика роста растений и их состояние в конце опыта показаны в табл. 2 и на рис. 3 и 4.

Данные табл. 2 показывают, что, как и в опыте с коноплей, эффект экзогенного гиббереллина выше на постоянном коротком дне, уменьшается при сокращении периода индукции короткими днями и меньше всего на длинном дне (высота растений соответственно 197, 157, 124 и 117% по отношению к контролю), т. е. тем больше, чем меньше содержание в растениях эндогенных гиббереллинов. Что касается ретарданта, то его действие, тормозящее рост, было примерно одинаковым во всех вариантах фотопериодического режима (высота растений соответственно 87, 89, 86 и 91% по отношению к контролю).

Рис. 3. Влияние гиббереллина (ГК) и ретарданта (ВСВ) на рост периллы красной в условиях длинного дня. *10*—контрольное растение, *11*—растение, обработанное ретардантом, *12*—гиббереллином

Рис. 4. Влияние гиббереллина (ГК) и ретарданта (ВСВ) на рост и цветение периллы красной в условиях короткого дня. *1*—контрольное растение; *2*—растение, обработанное ретардантом; *3*—гиббереллином

Таблица 2

Рост и развитие периллы красной при обработке растений регуляторами роста на разной длине дня

Варианты опыта		Фазы развития		Высота растений, *см*			Учет опыта
длина дня	обработка	бутонизация	цветение	10/VI	20/VI	5/VII	высота растений и % к контролю
Короткий день	Вода	4/VII	11/VII	8	26	40	100
	ГК	3/VII	11/VII	9	48	79	197
	ВСВ	4/VII	12/VII	8	21	35	87
14 дней индукции	Вода	13/VII	26/VII	7	42	75	100
	ГК	8/VII	18/VII	8	58	118	157
	ВСВ	18/VII	26/VII	8	36	67	89
7 дней индукции	Вода	Вегетативный рост	Вегетативный рост	8	46	75	100
	ГК	-	-	8	50	93	124
	ВСВ	-	-	8	32	65	86
Длинный день	Вода	-	-	8	41	75	100
	ГК	-	-	8	48	88	117
	ВСВ	-	-	8	36	68	91

Растения периллы бутонизировали и цвели только на постоянном коротком дне и при индукции 14 короткими днями, причем в первом случае раньше, чем во втором. При воздействии гиббереллином на постоянном коротком дне ускорения бутонизации и цветения не было (соответственно 4/VII и 3/VIII, 11/VII и 11/VII); при индукции 14 короткими днями наблюдалось ускорение сроков бутонизации и цветения (соответственно 13/VII и 8/VII, 20/VII и 18/VII).

Проведенные опыты показали, что действие регуляторов на рост и цветение растений короткодневных видов проявляется по-разному, в зависимости от условий фотопериодического режима. Стимулирующее рост влияние экзогенного гиббереллина сказывается в тем большей мере, чем меньше уровень содержания эндогенных гиббереллинов—в этом проявляется одна из закономерностей механизма влияния фитогормонов, их компенсаторность действия ([14]). Задерживающее рост влияние ретарданта сказывается на различные короткодневные виды по-разному: у конопли в зависимости от фотопериодического режима, у периллы примерно в равной мере на длинном и коротком дне.

Влияние гиббереллина и ретарданта на цветение растений короткодневных видов или не проявляется вовсе или сказывается в значительно меньшей мере, чем это известно для растений длиннодневных видов. Это различие находит объяснение в том, что гиббереллины и ретарданты являются главным образом регуляторами формирования и роста стеблей ([15]), т. е. критической фазы цветения длиннодневных, но не короткодневных видов.

Ереванский государственный университет,
Институт физиологии растений
им. К. А. Тимирязева Академии наук СССР

Կ. Դ. ԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Ի. Ա. ՉԱՅԼԱԽՅԱՆ

Կարճօրյա տեսակների ռեակցիան ֆոտոպերիոդիկ ռեժիմի տարբեր պայմաններում անման կարգավորիչներով մշակման վրա

Կարճօրյա տեսակների՝ միատուն կանեփի և կարմրատակերև պերիլայի բույսերն սրսկվել են անման կարգավորիչների-պիրներևաթթվի (պթ) և ռետարդանտ բրոմխոլինքլորիդի (BCB) լուծույթներով տարբեր ֆոտոպերիոդիկ պայմաններում՝ կարճ օր, 14 և 7 օր ինդուկցիա կարճ օրով և երկար օր։

Պիրներևինի աճը խթանող ազդեցությունը ավելի ուժեղ է կարճ օրվա պայմաններում և աստիճանաբար նվազում է երկար օրվա ինդուկցիայի երկարացման հետ։ BCB-ի աճը դանդաղեցնող ազդեցությունը նույն օրինաչափությամբ է դրսևորվել կանեփի բույսերի մոտ, մինչդեռ պերիլայի մոտ այն հատկապես միանման է ֆոտոպերիոդիկ ռեժիմի բոլոր տարբերակներում։

Պիրներևինի և ռետարդանտ BCB-ի ազդեցությունը կարճօրյա բույսերի ծաղկման վրա շատ ավելի թույլ է, քան այդ հատկությունը երկարօրյա բույսերի համար։ Հավանական է, որ այդ տարբերությունը պայմանավորված է նրանով, որ գիբբերելինները և ռետարդանտները կարգավորում են ցողունների առաջացումը և աճը; որը կրիտիկական փուլ է հանդիսանում երկարօրյա, բայց ոչ կարճօրյա բույսերի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *W. W. Garner and H. A. Allard*, Journ. Agric. Research, 18, 553 (1920). [2] *W. W. Garner and H. A. Allard* Journ. Agric. Research, 23, 871 (1923). [3] *М. Х. Чайлахян*, Гормональная теория развития растений, Изд. АН СССР, М., 1937. [4] *М. Х. Чайлахян*, Фотопериодизм растений, Изд. „Знание", М., 1956. [5] *A. G. Lang*, Encycl. of Plant Physiology, 15, 1 1380—1536 (1965). [6] *A. G. Lang*, Naturwissenschaften 43, 284—285 (1956). [7] *М. Х. Чайлахян*, „Ботанический журнал", т. 43, 927—952 (1958). [8] *М. Х. Чайлахян, К. Г. Азарян*, ДАН Арм. ССР, т. 49, № 2, 1969. [9] *H. M. Cathey*, Ann. Rev. of plant physiol., 15, 271—302 (1964). [10] *М. Х. Чайлахян*, В сб. Доклады Ереванского симпозиума по онтогенезу высших растений, Изд. АН Арм. ССР, 93—126, 1968. [11] *В. Г. Кочиков*, В сб. Онтогенез высших растений. Сообщения Ереванского симпозиума. Изд. АН Арм. ССР 184—192, 1970. [12] *К. Г. Азарян, Э. В. Асатрян*, «Биологический журнал Армении», т. 20, № 10, (1969). [13] *М. Х. Чайлахян, В. Н. Ложникова*, Физиол. раст. 11, 6, 1006—1014, (1964). [14] *М. Х. Чайлахян*, Вестник АН СССР, 10, 35—45 (1969). [15] *М. Х. Чайлахян*, XXI Тимирязевское чтение, Факторы генеративного развития растений. Изд. «Наука», 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 595.763.79

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хизорян

Новый вид жесткокрылых-кокцинеллид из Китая (Coleoptera, Coccinellidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 27/IX 1976)

1. Xanthadalia hiekei lablokoff-Khnzorian sp. nov.

Китай: Зап. Юннянь. Чао-Чо-Фу, на горных склонах, поросших кустарниками, на высоте около 2300 *м*, голотип ♂, аллотип ♀, и два паратипа, собранные 23.8—21.9 1914 С. Меллем, 3 типа в Берлине в музее Университета им. Гумбольдта, 1 паратип в коллекции Института зоологии АН Армянской ССР.

Лоб желтый с крупным черным теменным пятном, когда надкрылья светлые, и черный с 2 предглазничными светлыми пятнами, когда надкрылья пятнистые. Переднеспинка беловатая с большим черным дисковым пятном, оставляющим светлым лишь боковой край до задних углов. Щиток черный. Надкрылья желтые с черным швом или черные с беловатой боковой каймой до пришовного угла, двумя полукруглыми пятнами вдоль основания, двумя овальными срединными и двумя узкими поперечными задними (рис. 1,*а*). Эпиплевры желтые. Низ тела одноцветно черный или брюшко светлое. Ноги кроме лапок черные, передние и средние голени, иногда и бедра, могут быть светлыми. Волосистость беловатая.

Передний край наличника слабо вогнут до острых передних углов. Лоб в 1,9 раза уже головы, густо мелко точечный на шагренированном фоне. Переднеспинка с глубокой трапециевидной вырезкой вдоль переднего края, передние углы острые, с коротко закругленной вершиной, задние—тупые, боковой край слабо закруглен, с толстой каймой, основной—слабо изогнут. Диск негусто вдавленно точечный на шагренированном фоне. Плевры без ямок. Щиток в 10 раз уже тела. Надкрылья выпуклые, их скат с боков спадает круто, слабо отогнут вдоль тонкой приподнятой боковой каймы, сзади скат спадает под углом около 45°, с четким изгибом. Покровы негусто поверхностно точечные на гладком фоне, точки едва крупнее, чем на переднеспинке. Эпиплевры в 8 раз уже тела. Грудь мелко и рассеянно точечная, вдоль середины почти

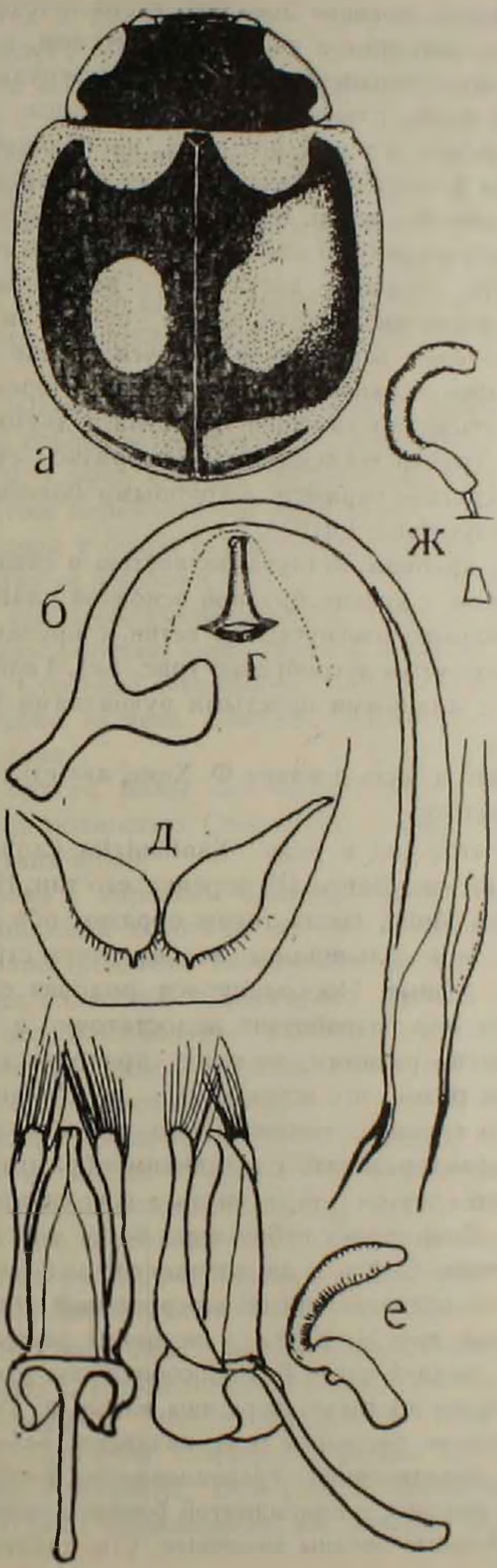

Рис. 1. *а—е*—Xanthadalia hieket Khnz., sp. nov., *а*—габитус; *б*—сифон сбоку и его вершина сверху; *в*—тегмен снизу и сбоку; *г*—воронка; *д*—генитальные пластинки; *е*—сперматека; *ж*—сперматека и воронка у X. rufescens Muls. *а* × 20; *б—ж* × 70

гладкая, фон гладкий, брюшко довольно густо точечное на шагрениро-ванном фоне. Переднегрудь с коротким выступом, едва достигающим края тазиков, с параллельными килями. Среднегрудь со слабой выем-кой, окаймленной сзади плавным килем. Бедренные линии заднегруди расходятся под косым углом к оси тела, на брюшке они загнуты на четверть круга, не достигая заднего края их стернита, иногда раздвое-ны дистально. Голени без шпор. Коготки с основным зубцом.

У ♂ анальный стернит со слабо вырезанным задним краем. Сифон загнут на полкруга, утолщен дистально, с вентральной бороздкой и перепонкой, без дорсальной щели, резко сужен в неотграниченный предвершинный отрезок, вершинный рассечен на две длинные иглы, из них нижняя длиннее верхней, жгутообразная. Перед предвершинным отрезком сифон дорсально уплощен. Капсула с двумя крупными лопа-стями (рис. 1,*б*). Трубка тегмена бутылкообразно сужена к вершине, косо отогнута к вершине парамер, с крупными боковыми перепонками. Трабес слабо изогнут (рис. 1,*в*).

У ♀ воронка крупная, втянута полностью в совокупительную сум-ку, сзади расширена, с кольцеобразной основной пластинкой (рис. 1,*г*). Сперматека своеобразно изогнута, без ветви, с крупным плоским труб-чатым узелком, изогнутым дугообразно (рис. 1,*е*). Генитальные пластин-ки грушевидные, с длинными простыми рукоятками (рис. 1,*д*). Длина 3—3,5 мм.

Этот вид назван в честь доктора Ф Хике, любезно приславшего нам материал на обработку.

Мы относим этот вид к роду Xanthadalia Crotch, ранг которого до сих пор не выяснен. Вейзе (1) перенес его тип, Harmonia rufescens Muls., в род Adalia Muls., сведя таким образом оба рода в синонимы, что было принято и в дальнейшем, но без учета строения гениталий, которые, однако, разные. Поскольку вся родовая систематика трибы Coccinellini до сих пор разработана недостаточно и разными энтомо-логами трактуется по разному, то ниже приводится таблица для оп-ределения группы родов, представленных в Палеарктике, образую-щих естественную группу, включающую и оба предыдущих. Эту группу можно характеризовать следующим образом:

Воронка имеется, трубчатая, втянута в совокупительную сумку или выступает из нее. Сперматека небольшая, более или менее С-образная, с коротким протоком. Сифон с двухлопастной капсулой, без крылатого, к вершине сужен в предвершинный и вершинный отрезки, более или менее обособленные друг от друга, у вершины расщеплен или с перепонками, в своей средней части без обособленного вздутия. Трубка тег-мена более или менее достигает вершины парамер. Трабес узко ложко-видный, у вершины не расширен и не раздвоен. Тело более или менее широко овальное, переднеспинка трапециевидная, надкрылья могут быть короче их общей ширины, с приподнятой боковой каймой, их эпиплевры без вдавлений. Ротовые органы типичные, т. е. такие же, как у рода

Coccinella L. Щиток в 10—15 раз уже тела. Бедренные линии брюшка типичные. Вертлуги ♂ без зубца. Коготки с основным зубцом (или с утолщением на его месте у Synharmonia montana Sav.)

1(2) Сперматека с длинной ветвью, сильно вздутой дистально. Тегмен с плоской трубкой, часто вырезанной у вершины. Воронка именчивая, но без основной пластинки. Сифон с дорсальной щелью или ее следом, иногда и со жгутом. Голени без четких шпор . . . . . 1. Род Synharmonia Cinglb.

2(1) Сперматека лишь со следом ветви или без него. Трубка тегмена выпуклая, без вершинной вырезки. Сифон без дистальной щели и без жгута.

3(4) Воронка сильно выступающая, с крупной удлинено-овальной или дисковидной основной пластинкой. Сперматека с крупным и широким узелком. Сифон с плохо обособленным узким предвершинным и вздутым перепончатым вершинным отрезком. Трубка тегмена сплющена с боков в виде лезвия ножа. Средние и задние голени с четкими шпорами . . . . . 2. Род Adalia Muls.

4(3) Воронка с кольцеобразной основной пластинкой или без нее.

5(6) Воронка очень длинная, выступающая, с кольцеобразной основной пластинкой. Строение сперматеки, сифона и голеней как у предыдущего. Трубка тегмена довольно широкая, к вершине сужена бутылкообразно. . . . . 3. Род Eoadalia gen. nov.

6(5) Воронка короткая, более или менее втянута в совокупительную сумку, иногда полностью. Сперматека с удлиненным узелком. Голени без четких шпор.

7(8) Трубка сифона с коротким цилиндрическим предвершинным отрезком, вершинный короткий, не уже предвершинного, иногда с короткими заостренными склеритами. Воронка втянута в сумку частично или полностью. Сперматека сильно изогнута с прямолинейным воронкообразным узелком, постепенно суженным к вершине, иногда с основным вздутием. Генитальные пластинки у основания обычно расщепленные . . . . 4. Род Harmonia Muls.

8(7) Трубка сифона с очень узким предвершинным и длинным вершинным отрезком, иногда слитым с предвершинным, кончающимся 2 иглами, расположенными одна под другой. Сперматека с длинным трубчатым, дуговидно изогнутым узелком. Воронка полностью втянута в сумку, расширена у основания. Генитальные пластинки с заостренной рукояткой . . . 5. Род Xanthadalia Crotch.

Согласно нашей трактовки с родом Synharmonia Cinglb. 1899 (тип Coccinella conglobata L.) объединен монотипичный род Protocaria Timberl. 1943 (тип P. scalaris Timb.), следуя в этом Чэпину (²), род Gyrocaria Timberl. 1943 (тип Coelophora guttata Bl.) и монотипичный род Pseudoharmonia Savojskaja, 1969 (тип P. montana Sav.). Род Gyrocaria отличается лишь вдавлениями на плеврах переднеспинки, ко-

торые достаточно изменчивые, имеются или отсутствуют даже у одного и того же вида, Pseudoharmonia — лишь строением коготков, с утолщением на месте основного зубца, что связано с обитанием его вида на можжевельниках. Поскольку других родовых отличительных признаков нами не обнаружено, то выделение этого рода лишь на основании строения его коготков нам представляется необоснованным.

Род Adalia Muls. 1850 (тип Coccinella bipunctata L.), согласно нашей трактовке насчитывает 6 палеарктических видов. Многочисленные экзоты, относимые до сих пор к этому роду, принадлежат, вероятно, к другим родам.

Род Eoadalia nov. выделен для Adalia koltzei Wse в основном ввиду своеобразного строения его воронки. Но замечательно, что и тип его окраски иной, чем у рода Adalia, несмотря на исключительное разнообразие окраски видов этого последнего.

Согласно нашей трактовке к роду Harmonia Muls., 1846 (тип Coccinella quadripunctata Pontop.) следует также отнести роды Leis Muls., 1850 (тип Coccinella dimidiata F.), Ballia Muls., 1853 (тип B. eucharis Muls.), Callineda Crotch, 1871 (тип Coccinella sedecimpunctata F.), Ptichanatis Crotch, 1874 (тип Coccinella axyridis Pallas), Stictoleis Crotch, 1874 (тип Coccinella coryphaea Guérin—M.). Синонимика для большинства этих родов была указана уже давно, для Stictoleis—Тимберлэком ([3]), но род Ballia до сих пор считается действительным, хотя его единственный отличительный признак сводится к строению переднегруди, вдоль оси приподнятой крышеобразно, но это поднятие часто меньше, чем у видов, издавна относимых к роду Harmonia, например у dimidiata F. Других родовых отличий для Ballia нам обнаружить не удалось. К роду Harmonia следует также отнести Daulis girini Muls., который в каталоге Коршефского ([4]) включен в род Cycloneda Crotch, так как нам удалось установить, что этот вид синоним Harmonia sedecimpunctata (F.).

К роду Xanthadalia Crotch, 1874 (тип Harmonia rufescens Muls.) до сих пор относили лишь несколько африканских видов, которых часто переносят в род Adalia, но статус которых остается неясным. От типа рода новый вид резко отличается по ряду признаков. У rufescens трубка тегмена к вершине сужена постепенно и не отогнута, сифон с обособленным коротким предвершинным и длинным вершинным отрезком, сперматека с более коротким и узким узелком, воронка коническая, слабо расширена у основания (рис. 1, *ж*). Тело крупнее и уже, окраска иная.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՅԱԲԼՈԿՈՎ-ԽՆԶՈՐՅԱՆ

Զատիկազգիների նոր տեսակ Չինաստանից (Coleoptera, Coccinellidae)

I. Xanthadalia hiekei Iablokoff-Khnzorian sp. nov.

Նկարագրված է աֆրիկյան Xanthadalia Cr. *սեռին դասվող նոր տեսակ արևմտյան Յուննանից (Չինաստան)։ Այս սեռը տարվում է որպես* Adalia Muls. *սեռի սինոնիմ, բայց պետք է վերականգնվի, ինչպես այն պարզվում է նրա և* Coccinellini *տրիբի այլ սեռերի համար բերված որոշիչ աղյուսակից։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. Weise*, Deutsche Entom. Z., 32, 1, 94, 1888. [2] *E. A. Chapin*, Insects of Micronesia, 16, n5, Coleoptera Coccinellidae, 224, 1975. [3] *P. H. Timberlake*, The Hawaiian Planters Rec., 47, 1, 17 (1943). [4] *R. Korschefsky*, Coleopterorum Catalogus, 118, 120, Coccinellidae, 1—11, 1931—1932.