ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXII, № 5

1976

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. խմբագիր), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱԹՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ԻՍԱԳՈՒԼՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀԱՀԱ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ թղթակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀԱՀԱ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, Е. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Է. Ա. Դանիելյան, Ն. Ս. Չիտչյան—«Արագ» սպասարկման ցիկլում GI/G/r/n—r տիպի սիստեմների ասիմպտոտիկ հետազոտում 257

Տ. Է. Փիլիպոսյան—Դասավորության մի խնդրի մասին 265

Վ. Մ. Մարտիրոսյան—Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների և պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներից կազմած սիստեմների փակության մասին . 269

Կ. Գ. Վալեև, Ի. Ռ. Կարզանյան—Պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնական սիստեմի բերման մասին 275

Յու. Մ. Մովսիսյան—Ասոցիատիվության գերնույնությունները կիսախմբային համակարգերում 282

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Հ. Ազատյան, Ա. Ա. Բալասանյան—Ամեն մի ամբողջական n-ի բոլոր չկարգավորված տրոհումների թվարկման ալգորիթմի ծրագրային իրականացում . . . 287

ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ա. Իսաև, Մ. Ա. Ղազարյան, Մ. Ն. Մովսեսյան, Գ. Գ. Պետրաշ, Ա. Կ. Սահակյան, Ա. Մ. Խանբեկյան—Երկրորդ հարմոնիկի գրգռումը ներկանյութի վրա կրկնման մեծ հաճախականությամբ աշխատող և ըստ ալիքի երկարության վերալարվող լազերի ճառագայթման օգնությամբ 293

ԵՐԿՐԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ի. Ա. Հայրապետյան—Նոր տվյալներ Հայաստանի պլեյստոցենի ֆաունայի մասին 295

ՄԻԿՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

Է. Գ. Աֆրիկյան, Ջ. Գ. Ավագյան Ս. Ն. Բաղդասարյան—Վիտամինների և ամինաթթուների ազդեցությունը Bac. popilliae աճեցման վրա 301

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յաբլոկով-Խնձորյան—Զատկաբզեզների երկու նոր տեսակ ՍՍՀՄ-ի Ասիական մասից (Coleoptera, Coccinellidae) 305

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной—Асимптотический анализ системы GI/G/r/n—r при «быстром» обслуживании 257

Т. Э. Пилипосян—Об одной задаче размещения 265

В. М. Мартиросян—О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей 269

К. Г. Салеев, И. Р. Карганян—О приведении канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами . 275

Ю. М. Мовсисян—Сверхтождества ассоциативности в системах полугрупп . 282

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян, А. А. Баласанян—Программная реализация алгоритма для перечисления разбиений всякого целого n 287

ФИЗИКА

А. А. Исаев, М. А. Казарян, М. Е. Мовсесян, Г. Г. Петраш, А. К. Саакян, А. М. Ханбекян—Возбуждение второй гармоники излучением перестраиваемого лазера на красителе, работающего с большой частотой повторения 293

ГЕОЛОГИЯ

Т. А. Айропетян—Новые данные о фауне плейстоцена Армении . . 295

МИКРОБИОЛОГИЯ

Э. К. Африкян, З. Г. Авакян, С. Н. Багдасарян—О влиянии витаминов и аминокислот на рост Bac. popilliae 301

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян—Два новых жесткокрылых-кокцинеллид из азиатской части СССР (Coleoptera, Coccinellidae) 305

Содержание LXII тома 311

Индекс 77730

CONTENTS

p.

MATHEMATICS

E. A. Danielian, N. S. Zemlianoy—Asymptotic analysis of $GI/G/r_1n-r$ systems with „fast" serving 257

T. E. Piliposian—On one of the problems of placing 265

V. M. Martirosian—On the closeness of systems of Mittag-Leffler type functions and systems of simpliest rational fractions 269

K. G. Valeev, I R Karganian—The reduction of the canon system of linear differential equations with periodic coefficients 275

Yu. M. Mousisian—The associativity of hyperidentities in half group systems 282

APPLIED MATEMATICS

A. A. Azatian, A. A. Balasanian—Program realization of algorithm for the enumerated partitioning of any whole n 287

PHYSICS

A. A. Isaev, M. A. Kazarian, M. E. Nousesian, G. G. Petrash, A. K. Sahakian, A M Khanbekian—Second harmonic excitation by radiation of tunable dye laser acting with high repetition rate 293

GEOLOGY

T A Hairapetian—Recent data of the Pleistocene Fauna of Armenia . . 295

MICROBIOLOGY

E. G. Afrikian, Z. G. Avakian, S. N. Bagdasarian—On the influence of vitamins and aminoacids on the growth of Bac. popilliae 301

ENTOMOLOGY

S. M. Yablokoff-Khnzorian—Two new species of lady-beetles from the Asiatic part of the USSR 305

Contents of LXII volume 311

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 07001. Подписано к печати 14/X 1976 г. Тираж 550. Изд. 4195. Заказ 483
Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 4. Бум. л. 5,6.
Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,49.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24.
Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной

Асимптотический анализ системы $GI/G/r/n-r$ при „быстром" обслуживании

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 30/XII 1975)

Настоящая заметка является продолжением работы [1], где изучалась система $GI/G/r/n-r$ в случае „быстрого" обслуживания.

Рассматривается система $GI/G/r/n-r$ массового обслуживания. Пусть промежутки времен между соседними поступлениями вызовов в совокупности независимы и одинаково распределены с функцией распределения (ф. р.) $A(t)$, $A(0)=0$.

Длительности обслуживания вызовов в совокупности независимы, не зависят от процесса поступления и имеют ф. р. $B(t)$, $B(0)=0$.

Нас интересует асимптотическое распределение момента первой потери вызова τ при „быстром" обслуживании.

Положим

$$\beta_\gamma = \int_0^\infty t^\gamma \, dB(t) \quad (\gamma > 0).$$

Мгновенная интенсивность $a(t)$ определяется из уравнения

$$A(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t a(u)\,du\right\}.$$

Пусть: а) $A(t)$ — фиксированная ф. р. и

$$a_u^{-1} = [\bar{A}(u)]^{-1} \cdot \int_0^\infty t \, dA(t+u)$$

по $u (0 \leqslant u < +\infty)$ в совокупности ограничены, где $\bar{A}(u) = 1 - A(u)$;

б) $a(t)$ ограничена $(0 \leqslant a(t) < C < +\infty, \quad 0 \leqslant t < +\infty)$;

в) в окрестности нуля $a(t)$ представима в виде

$$a(t) = \alpha t^m + O(t^{m+1}) \quad (t \downarrow 0, \ \alpha > 0, \ m \geqslant 0).$$

Теорема. *Если выполнены условия* а), б), в), *то*

$$\lim P\{a_0 J\tau > x\} = e^{-x} \quad (x \geqslant 0),$$

$$\frac{\beta_{(n+1)(m+1)}}{\beta_1^{(n+1)(m+1)-1}} \to 0,$$

где

$$J = a^n \int_{x_n > \ldots > x_1 > 0} \ldots \int \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^m \prod_{j=0}^{r-1} \bar{B}(x_n - x_j) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{a^n \cdot (m!)^{n-r+1}}{[(n-r+1)(m+1)-1]!} \int \ldots \int x_1^m (x_2 - x_1)^m \ldots (x_{r-1} - x_{r-2})^m (x_n -$$

$$x_n > x_{r-1} > \ldots > x_1 > 0$$

$$- x_{r-1})^{(n-r+1)(m+1)-1} \prod_{i=0}^{r-1} \bar{B}(x_n - x_j) dx_1 \ldots dx_{r-1} dx_n;$$

$$\bar{B}(x) = 1 - B(x).$$

Доказательство. *A*. Пусть A_k —событие, заключающееся в том, что за последний период занятости до первой потери вызова обслужено ровно k штук вызовов ($k \geqslant 0$).

Положим: $q_k = P(A_k)$. Тогда имеем $q = q_0 + q_1 + \ldots$

Просто выписывается равенство

$$q_0 = \int_{x_n > \ldots x_1 > 0} \ldots \int \prod_{i=1}^{n} \left\{ a(x_i - x_{i-1}) \exp\left[- \int_0^{x_i - x_{i-1}} a(u) du \right] \right\} \prod_{i=0}^{r-1} \bar{B}(x_n - x_j) dx_1 \ldots dx_n \qquad (1)$$

Пусть $\vec{k} = (k_1 \ldots, k_n)$, $|\vec{k}| = k_1 + \ldots + k_n$ и $S_{\vec{k}}(\varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$ есть область

$$S_{\vec{k}}(\varepsilon) = S_n \cap |\vec{k}|, \quad S_n = \{x_n > \ldots > x_1 > 0\},$$

где

$$k_l = \begin{cases} 0, & \text{если } x_l - x_{l-1} < \varepsilon, \\ 1, & \text{если } x_l - x_{l-1} \geqslant \varepsilon. \end{cases} \qquad (l = 1, n)$$

Введем в рассмотрение следующие интегралы:

$$Q = \int_{S_n} \ldots \int \prod_{i=1}^{n} a(x_i - x_{i-1}) \prod_{j=0}^{r-1} \bar{B}(x_n - x_j) dx_1 \ldots dx_n,$$

$$Q_{s\vec{k}}(\varepsilon) = \int_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)} \ldots \int \prod_{i=1}^{n} a(x_i - x_{i-1}) \prod_{j=0}^{s-1} \bar{B}(x_n - x_j) dx_1 \ldots dx_n,$$

$$(s = 1, r)$$

$$J_{s\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^n\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\ldots\int\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{j=0}^{s-1}\overline{B}(x_n-x_j)dx_1\ldots dx_n$$

$$(s=1,\ r)$$

$$N=\alpha^n\int\limits_{S_n}\ldots\int\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{j=0}^{n-1}\overline{B}(x_n-x_j)dx_1\ldots dx_n,$$

$$D=\int\limits_{S_n}\ldots\int e^{-Cx_n}\cdot\prod_{l=1}^{n}a(x_l-x_{l-1})\prod_{j=0}^{r-1}\overline{B}(x_n-x_j)dx_1\ldots dx_n,$$

$$R=\int\limits_{S_n}\ldots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{l=1}^{n}a(x_l-x_{l-1})dx_1\ldots dx_n,$$

$$R_{\vec{k}}(\varepsilon)=\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\ldots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{l=1}^{n}a(x_l-x_{l-1})dx_1\ldots dx_n,$$

$$V=\alpha^n\int\limits_{S_n}\ldots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m dx_1\ldots dx_n,$$

$$V_{\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^n\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\ldots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m dx_1\ldots dx_n,$$

$$W_{\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^{n-|\vec{k}|}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\ldots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{\{k_l=0\}}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{\{k_l=1\}}a(x_l-x_{l-1})dx_1\ldots dx_n,$$

$$M_{s\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^{n-|\vec{k}|}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\ldots\int\prod_{\{k_l=0\}}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{\{k_l=1\}}a(x_l-x_{l-1})\prod_{j=0}^{s-1}\overline{B}(x_n-x_j)dx_1\ldots dx_n$$

$$(s=1,\ r).$$

Б. Покажем, что $J\sim q_0$ при $\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$.

Для каждого $\varepsilon>0$ существует $C_1(\varepsilon)\geqslant 1$ такое, что $C_1(\varepsilon)a\varepsilon^m\geqslant C$. Поскольку

$$R=R_{\vec{0}}(\varepsilon)+\sum_{|\vec{k}|>0}R_{\vec{k}}(\varepsilon)$$

и при $\varepsilon\downarrow 0$

$$R_{\vec{0}}(\varepsilon)=V_{\vec{0}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon)),$$

$$\sum_{|\vec{k}|>0}R_{\vec{k}}(\varepsilon)=\sum_{|\vec{k}|>0}W_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\vec{k}|>0} C^{|\vec{k}|}\alpha^{n-|\vec{k}|}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\cdots\int x_n\prod_{(k_l=0)}(x_l-x_{l-1})\bar{B}(x_n)dx_1\ldots dx_n(1+O(\varepsilon))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\vec{k}|>0}|C_1(\varepsilon)|^{|\vec{k}|}V_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon)),$$

то

$$R\leqslant\sum_{|\vec{k}|>0}V_{\vec{k}}(\varepsilon)\,|C_1(\varepsilon)|^{|\vec{k}|}(1+O(\varepsilon))\leqslant|C_1(\varepsilon)|^nV\cdot(1+O(\varepsilon)). \qquad (2)$$

Для вычисления интеграла V в (2) воспользуемся тождеством

$$\int_{x-y}^{z}(z-x)^m(x-y)^{km+k-1}dx=(z-y)^{k(m+1)+m}\,\mathrm{Be}\,(m+1,\ k(m+1)),$$

где $\mathrm{Be}\,(u,\ v)$ — бета—функция ($u\geqslant 1$, $v\geqslant 1$) Имеем

$$V=\alpha^n\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{Be}\,(m+1,\ k(m+1))\cdot\int_0^\infty x^{n(m+1)}\bar{B}(x)dx=$$

$$=\alpha^n[(n(m+1)+1)!]^{-1}\cdot[m!]^n n(m+1)\beta_{n(m+1)+1}. \qquad (3)$$

Нетрудно получить следующее неравенство

$$N\geqslant\alpha^n[m!]^n[((m+1)n)!]^{-1}\beta_1^{n(m+1)}. \qquad (4)$$

Далее, при $\varepsilon\downarrow 0$

$$|J-Q|\leqslant|J_{\vec{0}}(\varepsilon)-Q_{\vec{0}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|J_{\vec{k}}(\varepsilon)-M_{\vec{k}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|M_{\vec{k}}(\varepsilon)-Q_{\vec{k}}(\varepsilon)|\leqslant$$

$$\leqslant|J_{\vec{0}}(\varepsilon)-J_{\vec{0}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))|+\sum_{|\vec{k}|>0}|J_{\vec{k}}(\varepsilon)+M_{\vec{k}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|M_{\vec{k}}(\varepsilon)-$$

$$-M_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))|\leqslant JO(\varepsilon)+\sum_{|\vec{k}|>0}|J_{\vec{k}}(\varepsilon)+M_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))|\leqslant JO(\varepsilon)+$$

$$+\sum_{|\vec{k}|>0}|J_{\vec{k}}(\varepsilon)+J_{\vec{k}}(\varepsilon)C_1^{|\vec{k}|}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))|\leqslant 2C_1^n(\varepsilon)\sum_{|\vec{k}|>0}J_{\vec{k}}(\varepsilon)+JO(\varepsilon).$$

Таким образом, при $\varepsilon\downarrow 0$

$$|J-Q|\leqslant 2C_1^n(\varepsilon)\sum_{|\vec{k}|>0}J_{\vec{k}}(\varepsilon)+JO(\varepsilon). \qquad (5)$$

Так как при $|\vec{k}|>0$

$$J_{1\vec{k}}(\varepsilon)\leqslant\alpha^n\int\limits_{\substack{x_n>\ldots>x_1>0\\ x_n>\varepsilon}}\cdots\int\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m\bar{B}(x_n)dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\alpha^n|m!|^n|(n(m+1)-1)!|^{-1}\int_{x>\varepsilon}x^{n(m+1)-1}\bar{B}(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^n|m!|^n|(n(m+1)-1)!|^{-1}\varepsilon^{-1}\int_{x>\varepsilon}x^{n(m+1)}\bar{B}(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^n|m!|^n|(n(m+1)+1)!|^{-1}n(m+1)\beta_{n(m+1)+1},$$

то по (4)

$$J^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0} J_{r\vec{k}}(\varepsilon)\leqslant N^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0} J_{1\vec{k}}(\varepsilon)\leqslant \frac{n(m+1)}{\varepsilon[n(m+1)+1]}(2^n-1)\,\frac{\beta_{n(m+1)+1}}{\beta_1^{n(m+1)}}. \qquad (6)$$

Теперь сравнивая (5) и (6), приходим к оценке

$$J^{-1}|J-Q|\leqslant O(\varepsilon)+C_2\frac{C_1^n(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\frac{\beta_{n(m+1)+1}}{\beta_1^{n(m+1)}}, \qquad (7)$$

где

$$C_2=2(2^n-1)\,\frac{n(m+1)}{n(m+1)+1}.$$

Выбираем $C_1(\varepsilon)=C\varkappa^{-1}\varepsilon^{-m}$, а $\varepsilon=(\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{n(m+1)})^{\frac{\delta}{nm+1}}$ $(0<\delta<1)$, откуда на основе (7) находим $J\sim Q$.

С другой стороны

$$J^{-1}(Q-q_0)\leqslant N^{-1}(Q-D)\leqslant N^{-1}\cdot C\cdot R$$

и

$$J^{-1}|J-q_0|\leqslant J^{-1}|J-Q|+J^{-1}(Q-q_0)\leqslant J^{-1}|J-Q|+N^{-1}CR \qquad (8)$$

Наконец, при выбранных $\varepsilon>0$ и $C_1(\varepsilon)$, когда $\varepsilon\downarrow 0$, из (2)—(4)

$$N^{-1}R\leqslant C_3|C_1(\varepsilon)|^n(\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{n(m+1)})\to 0,$$

откуда, вкупе с (7), (8), заключаем при $\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$, $J^{-1}(J-q_0)\to 0$, что и т. д.

В. Покажем, что $q\sim q_0$ при $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$.

Можно вывести неравенство

$$q_1+q_2+\ldots\leqslant\int\limits_{x_{n+1}>\ldots>x_1>0}\ldots\int G(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}|a(x_l-x_{l-1})\exp|-\int_0^{x_l-x_{l-1}}a(u)du||dx_1\ldots dx_{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{x_{n+1}>\ldots>x_1>0}\ldots\int \bar{G}(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}a(x_l-x_{l-1})dx_1\ldots dx_{n+1}\overset{\text{def}}{=}H, \qquad (9)$$

где

$$G(x)=1-|B(x)|_*^{n+1}.$$

Для доказательства эквивалентности

$$H\sim T\overset{\text{def}}{=}\varkappa^{n+1}\int\limits_{x_{n+1}>\ldots>x_1>0}\ldots\int \bar{G}(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}(x_l-x_{l-1})^m\,dx_1\ldots dx_{n+1}$$

введем в рассмотрение интегралы ($S_{\vec{k}}(\varepsilon)$ совпадает с введенным ранее, но при $n+1$).

$$H_{\vec{k}}(\varepsilon)=\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\ldots\int G(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}a(x_l-x_{l-1})dx_1\ldots dx_{n+1},$$

$$T_{\vec{k}}(\varepsilon)=\varkappa^{n+1}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\ldots\int \bar{G}(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}(x_l-x_{l-1})^m dx_1\ldots dx_{n+1},\quad(\varepsilon>0)$$

$$L_{\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^{n-|\vec{k}|+1}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\dots\int G(x_{n+1})\prod_{\{k_l=0\}}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{\{k_l=1\}}a(x_l-x_{l-1})dx_1\dots dx_{n+1}.$$

При любом $\varepsilon\downarrow 0$ произведем оценки

$$|H-T|\leqslant|H_{\vec{0}}(\varepsilon)-T_{\vec{0}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|H_{\vec{k}}(\varepsilon)-L_{\vec{k}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|L_{\vec{k}}(\varepsilon)-T_{\vec{k}}(\varepsilon)|\leqslant$$

$$\leqslant|T_{\vec{0}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))-T_{\vec{0}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|L_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))-L_{\vec{k}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|L_{\vec{k}}(\varepsilon)+T_{\vec{k}}(\varepsilon)|=$$

$$=T_{\vec{0}}(\varepsilon)O(\varepsilon)+\sum_{|\vec{k}|>0}|L_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))+T_{\vec{k}}(\varepsilon)|\leqslant$$

$$\leqslant T\,O(\varepsilon)+\sum_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon)\,|C|^{|\vec{k}|}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))+1],$$

откуда при каждом $\varepsilon\downarrow 0$

$$N^{-1}|H-T|\leqslant N^{-1}\cdot T\cdot O(\varepsilon)+2C_1^{n+1}(\varepsilon)\cdot N^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon). \qquad (10)$$

Аналогично V подсчитывается T

$$T=\frac{\alpha^{n+1}\cdot|m!|^{n+1}}{|(n+1)(m+1)|!}\,g_{(n+1)(m+1)}, \qquad (11)$$

где

$$g_j=\int\limits_0^{\infty}t^j\,dG(t)\qquad(j\geqslant 1).$$

Выражение $N^{-1}\sum\limits_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon)$ оценивается аналогично $N^{-1}\cdot\sum\limits_{|\vec{k}|>0}J_{1\vec{k}}(\varepsilon)$ при $\varepsilon\downarrow 0$

$$N^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon)\leqslant\frac{(n+1)(m+1)g_{(n+1)(m+1)}}{|(n+1)(m+1)+1|\,g_1^{n(m+1)}}.$$

Поскольку $g_1=(n+1)\beta_1$ и из неравенства (2) ($p>0$; $a_1>0,\dots,a_n>0$)

$$(a_1+\dots+a_n)^p\leqslant n^{p-1}(a_1^p+\dots+a_n^p)$$

следует

$$g_{(n+1)(m+1)}=M(\eta_1+\dots+\eta_{(n+1)})^{(n+1)(m+1)}\leqslant(n+1)^{(n+1)(m+1)}\beta_{(n+1)(m+1)},$$

где случайные величины $\eta_1,\dots,\eta_{n+1}$ независимы и имеют ф. р. $B(t)$, то условие $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$ влечет за собой $g_{(n+1)(m+1)}/g_1^{n(m+1)}\to 0$, т. е.

$$N^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon)\to 0.$$

Следовательно, вспоминая формулы (4), (10), (11), при выборе $C_1(\varepsilon)=C\alpha^{-1}\varepsilon^{-m}$ и $\varepsilon=(\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)})^{\delta/m(n+1)}\to 0$ ($0<\delta<1$), заключаем

$$N^{-1}\cdot|H-T|\to 0. \tag{12}$$

Наконец, по (9)

$$q_0^{-1}\sum_{i>1} q_i \leqslant q_0^{-1}\cdot H\sim J^{-1}\cdot H \leqslant N^{-1}\cdot H \leqslant N^{-1}\cdot|H-T|+N^{-1}T,$$

и, возвращаясь к (4), (11), (12), получаем, что при $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$

$$q_0^{-1}\sum_{i>1} q_i\to 0, \qquad \text{т. е. } q\sim q_0$$

Г. Из условия $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{(n+1)(m+1)-1}\to 0$ по неравенству моментов следуют $\beta_1\to 0$ и условию $\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{(n+1)(m+1)}\to 0$. Очевидно также выполнение условия $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$. Тогда

$$J\sim q\sim q_0$$

и имеет место теорема 3. 2 работы ([1]), что и т. д.

Замечание. Теорема верна также при условии

$$\frac{\max(\beta_{(n+1)(m+1)}, \beta_{n(m+1)+1})}{\beta_1^{n(m+1)}}\to 0.$$

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Ն. Ս. ՉԵՄԼՅԱՆՈՎ

«Արագ» սպասարկման դեպքում $GI/G/r/n-r$ տիպի սիստեմների ասիմպտոտիկ հետազոտում

Դիտարկվում է r հատ սարք և $n-r$ սպասման տեղ ունեցող մի սիստեմ։ Առաջացող պահանջները կազմում են $A(t)$ բաշխման ֆունկցիայով ռեկուրենտ ներմուծող հոսք ($A(0)=0$)։

Պահանջները սպասարկվում են միմյանցից անկախ և մի պահանջի սպասարկման ժամանակը հանդիսանում է $B(t)$ բաշխման ֆունկցիա ունեցող պատահական մեծություն ($B(0)=0$)։ Սպասարկման և պահանջների առաջացման պրոցեսներն անկախ են։ Սկզբնական մոմենտին սիստեմն ազատ է պահանջներից։

Սպասարկման ժամանակի «փոքր» լինելու դեպքում պահանջի առաջին կորուստի τ պատահական մոմենտի վերաբերյալ ապացուցված է սահմանային թեորեմ.

$$\beta_\gamma=\int_0^\infty t^\gamma\, dB(t)\quad (\gamma>0),\quad A(t)=1-\exp\left\{-\int_0^\infty a(u)du\right\}.$$

Դիցուք՝ ա) $A(t)$-ն ֆիքսած բաշխման ֆունկցիա է և

$$a_u^{-1}=[1-A(u)]^{-1}\int_0^\infty t\,dA(t+u)$$

բոլոր u-ի $[0\leqslant u<+\infty]$ սահմանափակ են.

բ) $0 \leqslant a(t) < C < +\infty$, $0 \leqslant t < +\infty$.

գ) *փոքր t-ի համար՝*

$$a(t) = at^m + O(t^{m+1}) \quad (t \downarrow 0,\ a > 0),$$

ուր m-ը դրական ամբողջ թիվ է.

Թեորեմ. $$\lim_{\beta_{(n+1)(m+1)} \to 0} P\{a_0/\tau > x\} = e^{-x} \qquad (x \geqslant 0),$$
β_1

ուր

$$J = a^n \int_{x_n > \ldots > x_1 > 0} \ldots \int \prod_{l=1}^{n} (x_l - x_{l-1})^m \prod_{j=0}^{r-1} [1 - B(x_n - x_j)]\, dx_1 \ldots dx_n.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной*, ДАН Арм. ССР, т. LXII, № 3, 1976. [2] *Д. Б. Гнеденко, А. Д. Соловьев*. «Известия АН СССР», техническая кибернетика, № 6, 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 519.14

МАТЕМАТИКА

Т. Э. Пилипосян

Об одной задаче размещения

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 28/IV 1976)

Пусть P^m m — мерная целочисленная решетка, т. е. множество тех точек m — мерного евклидова пространства, которые имеют целочисленные координаты. В P^m введем метрику следующим образом: если $a=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ и $b=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ точки множества P^m, то $\rho(a, b)=\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i-\beta_i|$.

Введем следующие обозначения:

$$C^m(a, i)=|b/b\in P^m \quad \rho(a, b)=i|$$

$$D^m(a, i)=|b/b\in P^m \quad \rho(a, b)\leqslant i|$$

$$\delta^m(i)=|C^m(a, i)|$$

$$\gamma^m(i)=|D^m(a, i)|$$

$r_{m,n}$ —целочисленное решение неравенства

$$\gamma^m(x+1)>n\geqslant\gamma^m(x), \qquad (1)$$

где $a\in P^m$, i, m, n натуральные числа, $|A|$ мощность множества A. $C^m(a, i)$ $[D^m(a, i)]$ называется m — мерной сферой [шаром] с радиусом i, с центром в точке a. Очевидно, что $\delta^m(i)$ и $\gamma^m(i)$ не зависят от точки a.

Определение 1. n — окрестностью точки $a\in P^m$ назовем любое множество $A\subset P^m$, удовлетворяющее условиям:

$$|A|=n$$

$$D^m(a, r_{m,n})\subseteq A\subset D^m(a, r_{m,n}+1).$$

Определение 2. Размещением графа $G(X, U)$ в P^m называется однозначное отображение $\varphi: X\to P^m$, такое, что $x_1\neq x_2\Rightarrow\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$

Определение 3. Длиной ребра $e=(x_1, x_2)\in U$ при размещении φ назовем величину $E^m(\varphi, e)=\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$, а величину

$E^m(\varphi, G) = \sum_{e \in U} E^m(\varphi, e)$ назовем длиной графа G при размещении φ. Величину $E^m(G) = \min_{\varphi} E^m(\varphi, G) = E^m(\varphi_0, G)$ назовем длиной графа G, а φ_0 оптимальным размещением.

Через T_n — обозначим класс всех деревьев n вершинами и положим $E^m(T_n) = \max_{t \in T_n} E^m(t)$

В работе ([1]) показано, что $\frac{n^2-1}{4} \leqslant E^1(T_n) < \frac{n^2}{3}$.

В работе ([2]) показано, что $E^1(T_n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

В работе ([3]) показано, что $E^m(T_n) \sim 0(n^{1+\frac{1}{m}})$.

В настоящей работе получено точное выражение для $E^m(T_n)$.

Рассмотрим n — вершинную звезду R_n. Пусть a некоторая точка из P^m. Рассмотрим любую n — окрестность точки a. Вершины звезды разместим в точках n — окрестности точки a таким образом, чтобы вершина с наибольшей степенью попала в точку a. Очевидно, что такое размещение φ является оптимальным для звезды для которого

$$E^m(R_n) = E^m(\varphi, R_n) = \sum_{i=1}^{r_{m,n}} i\delta^m(i) + (r_{m,n}+1)(n - \gamma^m(r_{m,n})) \quad (2)$$

Теорема. *Для любого m, и для любого $t \in T_n$*

$$E^m(R_n) \geqslant E^m(t)$$

Доказательство проведем индукцией по n. Для $n = 1,2$ справедливость утверждения теоремы очевидна. Пусть она верна для любого дерева $t \in T_n$ докажем, что она верна и для любого $t \in T_{n+1}$.

Пусть $t \in T_{n+1}$ некоторое дерево, x_2 — некоторая его висячая вершина, а (x_1, x_2) является ребром.

Рассмотрим дерево $t' \in T_n$, которое получается из t удалением вершины x_2.

Пусть φ — оптимальное размещение дерева t' в P^m. Так как теорема для t' верна, то $E^m(R_n) \geqslant E^m(\varphi, t')$. Рассмотрим точку $\varphi(x_1)$ и некоторую ее $n+1$ — окрестность. Очевидно, что в этой окрестности найдется некоторая точка b, которой не соответствует ни одна вершина из t'. Положим $\varphi(x_2) = b$. Получим некоторое размещение дерева t.

Ясно, что $\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leqslant r_{m,n} + 1$, но так как $E^m(R_{n+1}) = E^m(R_n) + r_{m,n} + 1$ и $E^m(R_n) \geqslant E^m(\varphi, t')$ получим, что $E^m(R_{n+1}) \geqslant E^m(\varphi, t)$, откуда, $E^m(R_{n+1}) \geqslant E^m(t)$ что и требовалось доказать.

Следствие. $E^m(R_n) = E^m(T_n)$

Замечание. Пусть в P^m введена любая метрика ρ. Аналогичным образом определим $C^m(a, r)$ и $D^m(a, r)$, где $r \in R$ (R множество действительных неотрицательных чисел). Рассмотрим множество $B(\rho) =$

$= \{r/r \in R,\ C^m(a,r) \neq \varnothing\}$. Нетрудно заметить, что если $|C^m(a,r)|$ — независит от точки a, и $B(\rho)$ является вполне упорядоченным множеством, то все до сих пор доказанное остается верным и в этом случае.

Теперь перейдем к вычислению значений $\delta^m(n)$, $\gamma^m(n)$, $r_{m,n}$.

Ясно, что $\gamma^m(n) = \sum_{i=0}^{n} \delta^m(i)$. Легко видеть, что существует взаимоодно-

значное соответствие между точками множества $C^m(a,n)$ и множеством векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ удовлетворяющих следующим условиям:

α) $a_i \in \{1,-1,2,-2,\ldots,m,-m\}$ $\quad i = 1,2,\ldots,n$,

β) $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \leqslant |a_n|$,

γ) $a_i \neq -a_j$ $\quad i,j = 1,2,\ldots,n$.

Количество векторов удовлетворяющие условиям α, β, γ и имеющие i различные отрицательные компоненты, равно $C_m^i \cdot \bar{C}_m^{n-i}$ где $C_m^i (\bar{C}_m^i)$ количество сочетаний из m элементов по i без повторений (с повторениями).

Следовательно

$$\delta^m(n) = \sum_{i=0}^{m} \bar{C}_m^{n-i} \cdot C_m^i = \sum_{i=0}^{m} C_{m+n-i-1}^{m-1} \cdot C_m^i \sim O(n^{m-1}),$$

$$\gamma^m(n) = \sum_{i=0}^{n} \delta^m(i) \sim O(n^m).$$

Отсюда и из (1) следует $r_{m,n} \sim O(n^{\frac{1}{m}})$

Из этих оценок и из (2) видно, что $E^m(T_n) \sim O(n^{1+\frac{1}{m}})$

В частности, при $m = 1$ из (2) получим, что $E^1(T_n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, а при

$m = 2$ $E^2(T_n) = \frac{k_0+1}{3}(3n - 2(k_0+1)^2 - 1)$ где $k_0 = \left\lfloor \frac{\sqrt{2n-1}-1}{2} \right\rfloor$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Տ. Է. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

Խաչավորության մի խնդրի մասին

Դիցուք P^m-ը m չափանի էվկլիդյան տարածության ամբողջարժեք կոորդինատներով կետերի բազմությունն է հետևյալ մետրիկայով

$$\rho(a,b) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - \beta_i| \quad \text{որտեղ՝} \quad a = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m).$$

Դիցուք $G(X,U)$ որևէ գրաֆ է, իսկ T_n-ը n գագաթանի ծառերի բազմությունն է: $\varphi : X \to P^m$ միարժեք արտապատկերումը կանվանենք գրաֆի ձևավորություն P^m-ում, եթե այն բանից, որ $x_1 \neq x_2$, հետևում է, որ $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Դիցուք $e=(x_1, x_2)\in U$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$E^m(\varphi, e)=\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

$$E^m(\varphi, G)=\sum_{e\in U} E^m(\varphi, e)$$

$$E^m(G)=\min_{\varphi} E^m(\varphi, G)$$

$$E^m(T_n)=\max_{t\in T_n} E^m(t)$$

R_n-ով նշանակենք n գագաթանի աստղը։

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ $E^m(R_n)=E^m(T_n)$ և տրվում է բանաձև $E^m(T_n)$-ը հաշվելու համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Шейдвассер*, «Об оптимальной нумерации вершин дерева», Дискретный анализ, вып. 17, 56—74 (1970). [2] *М. А. Иорданский*, ДАН СССР, т. 218, № 2, 272—275 (1974). [3] *М. А. Шейдвассер*, Сб. «Пробл. киб.», № 29, 63—102 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

В. М. Мартиросян

О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера и систем простейших рациональных дробей

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22/V 1976)

1°. Обозначим через $H_2[\alpha;\ \omega]$ $\left(\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1\right)$ известный (1) (см. также (2), главу VII) класс функций $F(z)$, голоморфных в угловой области

$$\Delta(\alpha)=\{z;\ |\arg z|<\pi/(2\alpha),\ 0<|z|<+\infty\} \tag{1}$$

и удовлетворяющих условию

$$\|F\|^*_{\alpha,\omega}=\sup_{|\varphi|<\pi/(2\alpha)}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^2r^{\omega}\,dr\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(L_\alpha)$ класс функций $F(\xi)$, измеримых на границе L_α области $\Delta(\alpha)$ и таких, что

$$\|F\|_{\alpha,\omega}=\left(\int_{L_\alpha}|F(\xi)|^2|\xi|^{\omega}|d\xi|\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty. \tag{3}$$

Известно (2), что *любая функция* $F(z)\in H_2[\alpha;\ \omega]$ *почти всюду на* L_α *имеет угловые граничные значения* $F(\xi)\in L_{2,\omega}(L_\alpha)$.

Можно показать, что *со скалярным произведением*

$$(F,\ G)_{\alpha,\omega}=\int_{L_\alpha}F(\xi)\overline{G(\xi)}|\xi|^{\omega}|d\xi| \tag{4}$$

$H_2[\alpha;\ \omega]$ *является гильбертовым, а с нормой* (2) *— банаховым пространством и* $\forall F(z)\in H_2[\alpha;\ \omega]$

$$\|F\|^*_{\alpha\omega}\leqslant\|F\|_{\alpha,\omega}=\sqrt{(F,\ F)_{\alpha,\omega}}\leqslant\sqrt{2}\,\|F\|^*_{\alpha,\omega}. \tag{5}$$

2°. В совместной работе (1) М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна (см. также (2), стр. 419) для функций $F(z)\in H_2[\alpha;\ \omega]\left(\frac{1}{2}<\alpha<+\right.$

$+\infty,\ -1<\omega<1\Big)$ было построено преобразование типа Бореля $G_{\rho,\mu}(\xi;F)$ $\Big(\rho\geqslant\frac{\alpha}{2\alpha-1},\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}\Big)$, которым задается ограниченный линейный оператор из $H_2|\alpha;\omega|$ в $H_2|\gamma;-\omega|$ $(\gamma^{-1}=\alpha^{-1}+\rho^{-1})$. В связи с этим устанавливается

Теорема 1. *Класс* $H_2|\gamma;-\omega|\Big(\frac{1}{2}<\gamma<+\infty,\ -1<\omega<1\Big)$ *совпадает с классом функций, допускающих представление вида*

$$f(\xi)=G_{\rho,\mu}(\xi;F),\ \xi\in\Delta(\gamma), \tag{6}$$

где $F(z)\in H_2|\alpha;\omega|$ *произвольна,* $\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$, $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}$, $\mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$.

При этом справедлива формула обращения

$$F(re^{i\theta})=G^{-1}_{\rho,\mu}(re^{i\theta};f)\equiv\frac{e^{-i\theta}r^{1-\mu\rho}}{2\pi\rho}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iyr^\rho}-1}{iy}\times$$

$$\times f(e^{i(-\theta+\frac{\pi}{2\rho}\operatorname{sign} y)}|y|^{\frac{1}{\rho}})(e^{i\frac{\pi}{2\rho}\operatorname{sign} y}|y|^{\frac{1}{\rho}})^{1-\mu\rho}dy,\ z=re^{i\theta}\in\Delta(\alpha), \tag{7}$$

и имеют место неравенства

$$\|F\|_{\alpha,\omega}\leqslant\sqrt{4/\sqrt{\pi}}\,\|f\|_{\gamma,-\omega}\leqslant\sqrt{32/\sqrt{\pi}}\,\|F\|_{\alpha,\omega}. \tag{8}$$

Отметим, что в случае $\omega=0$, $\rho=1$, но $0<\alpha,\ \gamma<+\infty$ теорема 1 установлена в работе М. М. Джрбашяна и автора ([3]).

3°. Как хорошо известно ([2]), целая функция типа Миттаг—Леффлера $E_\rho(z;\mu)$ $(\rho>0,\mu>0)$ определяется разложением

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/\Gamma(\mu+k\rho^{-1}).$$

В дальнейшем полагаем, что

$$\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ \rho=\frac{\alpha}{2\alpha-1},\quad -1<\omega<1 \tag{9}$$

и $|\lambda_k|_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, а $s_k\geqslant1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $|\lambda_j|_1^k$ этой последовательности.

М. М. Джрбашяном было установлено следующее предложение ([4]), являющееся существенным обобщением известной теоремы Мюнца—Саса.

Теорема А. *Для замкнутости системы функций типа Миттаг—Леффлера*

$$\omega_\rho^{s_k}(t;\lambda_k)=E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k t;\mu)t^{s_k-1},\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}\ (1\leqslant k<+\infty) \tag{10}$$

в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\alpha})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_k^{\alpha}=+\infty. \tag{11}$$

Существенно опираясь на эту теорему, в силу теоремы Винера—Пэли ([5]) (см. также ([2]), стр. 413) и формулы (см. ([3]), стр. 149, а также ([6]), лемму 2)

$$\frac{(n-1)!}{(\zeta+\lambda)^n}=\rho^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty}e^{-(\zeta+\lambda)t}t^{\mu\rho-1}E_\rho^{(n-1)}(-\lambda t;\mu)t^{n-1}dt\,(1\leqslant n<+\infty), \tag{12}$$

где $\zeta\in\Delta(\rho)$, $\lambda\in\Delta(\alpha)$, устанавливается

Теорема 2. *Для замкнутости системы рациональных дробей*

$$r(\zeta;\lambda_k)=(s_k-1)!\,(\zeta+\lambda_k)^{-s_k}(1\leqslant k<+\infty) \tag{13}$$

в $H_2[\rho;\omega]$ *необходимо и достаточно выполнение условия* (11).

Теорема 3*. *Пусть*

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1}<\rho_1<+\infty,\quad \mu_1=\frac{1+\omega+\rho_1}{2\rho_1}, \tag{14}$$

Для замкнутости системы функций типа Миттаг—Леффлера

$$\omega_{\rho_1}^{*}(z;\lambda_k)=E_{\rho_1}^{(s_k-1)}(-\lambda_k z;\mu_1)z^{s_k-1}(1\leqslant k<+\infty) \tag{15}$$

в $H_2[\gamma;\omega]$, *где*

$$\frac{1}{\gamma}=2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho_1}\right), \tag{16}$$

необходимо и достаточно выполнение условия (11).

4°. Пусть

$$\Delta^*(\alpha)=\{z;\pi/(2\alpha)<|\arg z|\leqslant\pi,\quad 0<|z|<+\infty\}. \tag{17}$$

При условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\alpha})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_k^{\alpha}<+\infty \tag{18}$$

обозначим через $\lambda_2\{\Delta(\rho);\lambda_k;\omega\}$ класс функций $F(z)$, определенных и аналитических в $\Delta(\rho)\cup\Delta^*(\rho)\setminus\{-\lambda_k\}_1^{\infty}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1. $F(z)\in H_2[\rho;\omega]$, $z\in\Delta(\rho)$;

2. $F(-z)B_\alpha(z)\in H_2[\alpha;\omega]$, $z\in\Delta(\alpha)$, где $B_\alpha(z)$ — сходящееся произведение типа Бляшке для угловой области $\Delta(\alpha)$ с нулями в точках $z=\lambda_k$:

---

* В специальном случае $\omega=0$ теорема 2, а в специальном случае $\omega=0$, $\rho=1$ теорема 3 и приводимая дальше теорема 4 были установлены в совместной работе М. М. Джрбашяна и автора ([3]).

$$B_a(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z^a-\lambda_k^a}{z^a+\overline{\lambda_k^a}}\,\frac{|1-\lambda_k^{2a}|}{1-\lambda_k^{2a}};$$

3. Угловые граничные значения функции $F(z)$ слева и справа контура L_ρ почти всюду совпадают.

Обозначим также через $\lambda_2^*|\Delta(\rho);\lambda_k;\omega|$ класс функций, который *при условии* (11) совпадает с классом $H_2[\rho;\omega]$, а *при условии* (18) — с классом $\lambda_2|\Delta(\rho);\lambda_k;\omega|$.

В совместной работе С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна (6) был установлен (в процессе доказательства теоремы 1) следующий результат.

Теорема В. *При условии* (18) *замыкание системы* (13) *в метрике* $L_{2,\omega}(L_\rho)$ *совпадает с множеством граничных значений на* L_ρ *функций класса* $\lambda_2|\Delta(\rho);\lambda_k;\omega|$.

На основании этого результата, теоремы 1 и формулы (12) устанавливается

Теорема 4. *При условии* (18) *замыкание системы* (15) *в метрике* $H_2[\gamma;\omega]$ *совпадает с классом функций, допускающих представление вида*

$$f(\zeta)=G^{-1}_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;F),\ \zeta\in\Delta(\gamma),\tag{19}$$

где $F(z)\in\lambda_2|\Delta(\rho);\lambda_k;-\omega|$ *произвольна.*

Отметим, что в специальном случае, когда $\omega=0$, $\alpha=1$, $\rho_1=1$ $(\gamma=+\infty)$, если условимся отождествлять пространство $H_2[+\infty,0]$ с $L_2(0,+\infty)$, теорема 4 переходит в теорему М. М. Джрбашяна (7). В этой теореме впервые была установлена полная внутренняя характеристика замыкания линейной оболочки обобщенной системы Мюнца—Саса $\{e^{-\lambda_k x}x^{\lambda_k-1}\}_1^\infty$ $(\mathrm{Re}\,\lambda_k>0)$ в случае ее незамкнутости в $L_2(0,+\infty)$.

5°. Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty\subset\Delta(\alpha)\cup\Delta^*(\alpha)$ — последовательность комплексных чисел, а m_k — кратность появления числа μ_k на отрезке $\{\mu_j\}_1^k$. При этом предполагаем, что в каждой области $\Delta(\alpha)$ и $\Delta^*(\alpha)$ содержится бесконечное число членов последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$, так что ее можно разбить на две последовательности $\{\mu_k^+\}_1^\infty\subset\Delta(\alpha)$, $\{\mu_k^-\}_1^\infty\subset\Delta^*(\alpha)$.

Теорема 5. *Для замкнутости системы рациональных дробей*

$$r(\zeta;\mu_k)=(m_k-1)!\,(\zeta+\mu_k)^{-m_k}\ (1\leqslant k<+\infty)\tag{20}$$

в $L_{2,\omega}(L_\rho)$ *необходимо и достаточно, чтобы расходились ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\mu_k^+|^{2\alpha})^{-1}\mathrm{Re}(\mu_k^+)^\alpha,\quad \sum_{k=1}^{\infty}(1+|\mu_k^-|^{2\rho})^{-1}\mathrm{Re}(-\mu_k^-)^\rho.\tag{21}$$

Теорема 6. *Если хотя бы один из рядов* (21) *сходится, то замыкание системы* (20) *в метрике* $L_{2,\omega}(L_\rho)$ *совпадает с классом функций* $F(\zeta)$, *представимых в виде*

$$F(\zeta)=F^{(+)}(\zeta)+F^{(-)}(\zeta),\ \zeta\in L_\rho,\tag{22}$$

где $F^{(\pm)}(\zeta)$ — *граничные значения на* L_ρ *произвольных функций* $F^{(\pm)}(z)$ *таких, что* $F^{(+)}(z)\in\lambda_2^*|\Delta(\rho);\mu_k^+;\omega|$, $F^{(-)}(-z)\in\lambda_2^*|\Delta(\alpha);-\mu_k^-;\omega|$.

6°. Пусть $\frac{2\alpha}{2\alpha-1}<\rho_1<+\infty$ и $\{\nu_k\}_1^\infty\subset\Delta^*\left(\frac{\alpha\rho_1}{2\alpha+\rho_1}\right)$ $\cup\Delta(\alpha)$ — последовательность комплексных чисел, а $n_k\geqslant 1$ — кратность появления числа ν_k на отрезке $\{\nu_j\}_1^k$. При этом предполагаем, что в каждой области $\Delta(\alpha)$ и $\Delta^*(\alpha\rho_1/(2\alpha+\rho_1))$, содержится бесконечное число членов последовательности $\{\nu_k\}_1^\infty$, так что ее можно разбить на две последовательности $\{\nu_k^+\}_1^\infty\subset\Delta(\alpha)$, $\{\nu_k^-\}_1^\infty\subset\Delta^*(\alpha\rho_1/(2\alpha+\rho_1))$.

Рассмотрим систему функций типа Миттаг—Леффлера

$$\omega_{\rho_1}^*(\zeta;\nu_k)=E_{\rho_1}^{(n_k-1)}(-\nu_k\zeta;\mu_1)\zeta^{n_k-1}\quad(1\leqslant k<+\infty),\tag{23}$$

где

$$\mu_1=\frac{1+\omega+\rho_1}{2\rho_1}.\tag{24}$$

Теорема 7. *Пусть*

$$\frac{1}{\gamma}=2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho_1}\right),\quad\frac{1}{\beta}=2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\rho_1}\right).\tag{25}$$

Для замкнутости системы (23) *в* $L_{2,\omega}(L_\gamma)$ *необходимо и достаточно, чтобы расходились ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\nu_k^+|^{2\alpha})^{-1}\mathrm{Re}(\nu_k^+)^\alpha,\ \sum_{k=1}^{\infty}(1+|\nu_k^-|^{2\beta})^{-1}\mathrm{Re}(-\nu_k^-)^\beta,\tag{26}$$

Теорема 8. *Если хотя бы один из рядов* (26) *сходится, то замыкание системы* (23) *в метрике* $L_{2,\omega}(L_\gamma)$ *совпадает с классом функций* $f(\zeta)$, *представимых в виде*

$$f(\zeta)=f^{(+)}(\zeta)+f^{(-)}(\zeta),\ \zeta\in L_\gamma.\tag{27}$$

Здесь $f^{(+)}(\zeta)$ *— угловые граничные значения функции*

$$f^{(+)}(z)=G_{\rho_1,\mu_1}^{-1}(z;F^{(+)}),\quad z\in\Delta(\gamma),\tag{28}$$

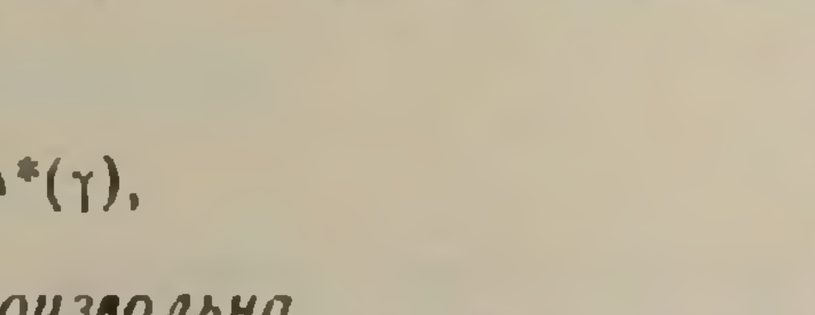
где $F^{(+)}(z)\in\lambda_2^*\{\Delta(\rho);\ \nu_k^+;\ -\omega\}$ *произвольна, а* $f^{(-)}(\zeta)$ *— угловые граничные значения функции*

$$f^{(-)}(z)=G_{\rho_1,\mu_1}^{-1}(-z;F^{(-)}),\quad z\in\Delta^*(\gamma),\tag{29}$$

где $F^{(-)}(z)\in\lambda_2^*\{\Delta(\beta/(2\beta-1));-\nu_k^-;-\omega\}$ *произвольна.*

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность моему научному руководителю академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство при выполнении настоящей работы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР



Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների և պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներից կազմած սիստեմների փակության մասին

Ներկա աշխատանքում տրվում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի և Ա. Ե. Ավետիսյանի համատեղ մի հոդվածում կառուցած Բորելի տիպի ձևափոխության շրջումը։ Այդ արդյունքի օգնությամբ, էապես հենվելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ստացված Միտտագ-Լեֆլերի տիպի սիստեմների լրիվության հայտանիշի վրա, ստացվել են համապատասխան հիլբերտյան տարածություններում անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ սիստեմների լրիվության հայտանիշներ։ Տրված է նաև այդ սիստեմների փակույթի ներքին նկարագրությունը նրանց ոչ լրիվության դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, № 3, 457—460 (1958). [2] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», М., 1966. [3] *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*, ДАН СССР, т. 225, № 5, 1001—1004, (1975). [4] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 219 № 6, 1302—1305 (1974). [5] *Н. Винер, Р. Пэли*, Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964. [6] *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян*, Известия. АН СССР, матем. сер. т. 40, № 1, (1976), 96—114. [7] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 141, № 3, 539—542 (1961).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 917.5

МАТЕМАТИКА

К. Г. Валеев, И. Р. Карганян

О приведении канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 24/V 1976)

В ряде работ К. А. Бреуса ([1–3]) указан способ построения канонической замены переменных. для приведения канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Здесь указываются достаточные условия существования этой замены и дается новый способ ее построения, связанный с методом усреднения. В качестве приложения рассмотрен вопрос о построении границы областей неустойчивости решений уравнения второго порядка.

1. Рассматривается каноническая система дифференциальных уравнений порядка $2n$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = JH(t)Z(t), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t+2\pi) \equiv H(t), \qquad (1)$$

где $H(t)$—симметрическая (или эрмитова), 2π—периодическая по t матрица порядка $2n$. E_n—единичная матрица порядка n.

Найдем фундаментальную матрицу решений $U(t)$, нормированную в точке $t=0$ из матричного интегрального уравнения

$$U(t) = E_{2n} + \int_0^t JH(\tau)U(\tau)d\tau. \qquad (2)$$

Метод последовательных приближений позволяет найти $U(t)$ на конечном интервале с любой степенью точности. С помощью неравенства Гронуолла—Беллмана ([4]) получим оценку

$$\| U(2\pi) - E_{2n} \| \leqslant \exp\left| \int_0^{2\pi} \| H(\tau) \| d\tau \right| - 1. \qquad (3)$$

Здесь $\| A \|$ —норма матрицы A. Дальше предполагаем везде, что

$$\| E_{2n} \| = 1, \qquad \| J \| = 1.$$

Ищем представление $U(t)$ в форме Флоке:

$$U(t)=\Phi(t)e^{Pt}, \qquad \Phi(t+2\pi)\equiv\Phi(t). \tag{4}$$

Для показательной матрицы P имеем разложение

$$P=\frac{1}{2\pi}\ln U(2\pi)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,|E_{2n}-U(2\pi)|^k. \tag{5}$$

Из оценки (3) следует то, что матричный ряд (5) сходится при условии

$$\int_0^{2\pi}\|H(\tau)\|\,d\tau<\ln 2. \tag{6}$$

Этот вывод общеизвестен также, как и способ построения показательной матрицы P с помощью ряда (5) ([5,6]). Дадим новое доказательство результата К. А. Бреуса того, что система дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt}=JDY, \qquad JD\equiv P \tag{7}$$

является канонической. Это доказывает каноничность, приводящей к (7), замены

$$Z=\Phi(t)Y. \tag{8}$$

Матрица $U(t)$ является симплектической матрицей, т. е. удовлетворяет, легко проверяемое дифференцированием, тождеству

$$U^*(t)JU(t)=J.$$

Звездочкой обозначается переход к сопряженной матрице. В частности, из этого тождества имеем равенство

$$(E_{2n}-U^*(2\pi))J=J(E_{2n}-U^{-1}(2\pi)). \tag{9}$$

Сравним два матричных ряда:

$$D^*=P^*J=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,|E_{2n}-U^*(2\pi)|^k\,J,$$

$$D=-JP=J\frac{1}{2\pi}\ln U^{-1}(2\pi)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}J[E_{2n}-U^{-1}(2\pi)]^k.$$

В силу равенства (9) найдем то, что $D=D^*$, т. е. система (7) будет канонической. Это доказательство является более общим и простым, чем известное ранее доказательство К. А. Бреуса.

2. При построении матрицы $U(t)$ из (2) возникают вычислительные трудности, которые упрощаются при следующем способе отыскания замены (8). А именно, ищем замену (8) вида

$$Z=(E+S(t))Y,\ S(0)=0,\ S(t+2\pi)\equiv S(t). \tag{10}$$

Дифференцируя эту замену и исключая вектор Z, приходим к матричному уравнению для периодической матрицы $S(t)$

$$\frac{dS(t)}{dt}=JH(t)(E+S(t))-(E+S(t))JD. \tag{11}$$

Покажем, что при выполнении некоторых условий постоянную матрицу D можно выбрать так, чтобы матрица $S(t)$ была 2π — периодической. Для операторов осреднения и интегрирования с осреднением и аннулированием при $t=0$ используем следующие обозначения:

$$<H(t)>\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H(\tau)d\tau, \tag{12}$$

$$LH(t)\equiv|H(t)|\equiv\int_0^{2\pi}[H(\tau)-<H(\tau)>]d\tau.$$

Представим матрицу $H(t)$ с помощью ряда Фурье

$$H(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_ne^{int},\qquad H_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H(\tau)e^{-in\tau}d\tau\qquad(n=0,\pm1,\ldots).$$

Из (12) найдем другое представление для оператора L:

$$LH(t)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}H_n(e^{int}-1)(in)^{-1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n(t-\tau)}{n}+\frac{\sin n\tau}{n}\right)H(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{s}{\pi}\right)H(t-s)ds-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{s}{\pi}\right)H(-s)ds,$$

из которого находим оценку для нормы оператора L в пространстве 2π—периодических матриц с нормой

$$|H(t)|=\sup_t\|H(t)\|.$$

Имеем неравенство

$$|LH(t)|\leqslant|H(t)|\int_0^{2\pi}\left|1-\frac{s}{\pi}\right|ds=\pi|H(t)|,\quad|L|\leqslant\pi. \tag{13}$$

Для того, чтобы матрица $S(t)$ (11) была 2π—периодической, необходимо и достаточно, чтобы среднее значение правой части уравнения (11) равнялось нулю:

$$<JH(t)(E+S(t))-(E+S(t))JD>=0.$$

То же самое условие можно записать по другому

$$D=<H(t)>+<H(t)S(t)>+<JS(t)JD>. \tag{14}$$

Для $S(t)$ имеем интегральное матричное уравнение

$$S(t)=|J(H(t)-D)+JH(t)S(t)-S(t)JD|. \tag{15}$$

Для решения уравнений (14), (15) применим метод последовательных приближений (дальше пропускаем аргумент t у матриц $H(t)$, $S(t)$)

$$D_{k+1}=<H>+<HS_k>+<JS_kJD_k>, \quad D_0=0, \tag{16}$$
$$S_{k+1}=|JH+JHS_k-S_kJD_k|, \qquad S_0=0.$$

Найдем условия, при выполнении которых последовательности матриц D_k, S_k сходятся. Сначала найдем условия ограниченности.

Пусть при некотором значении $k=0, 1, \ldots$ выполнены неравенства

$$|D_k|\leqslant\frac{a}{\pi}, \qquad |S_k|\leqslant b. \tag{17}$$

Из (16) находим оценки для D_{k+1}, S_{k+1}:

$$|D_{k+1}|\leqslant|H|+|H|b+ab\pi^{-1}, \quad |S_{k+1}|\leqslant\pi(|H|+|H|b+ab\pi^{-1}).$$

Отсюда следует то, что неравенства (17) будут выполнены при всех значениях $k=0, 1, \ldots$, если выполняются условия

$$|H|(1+b)+ab\pi^{-1}\leqslant a\pi^{-1}, \quad \pi(|H|(1+b)+ab\pi^{-1})\leqslant b$$

или

$$c+cb+ab\leqslant a, \quad c+cb+ab\leqslant b, \quad c\equiv\pi|H|.$$

В свою очередь эти неравенства имеют положительные решения, если квадратное уравнение относительно a $(a=b)$

$$a^2+(c-1)a+c=0$$

имеет положительное решение. Находим выражение для границ в неравенствах (17)

$$a=b=0{,}5(1-c)-\sqrt{0{,}25(1-c)^2-c}.$$

Наибольшее допустимое значение c определяется из уравнения

$$(1-c)^2-4c=0, \quad c_0=3-2\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{-1}. \tag{18}$$

Следовательно, при $0\leqslant c\leqslant c_0$ последовательности матриц D_k, S_k будут ограничены при всех k.

Пусть теперь $0\leqslant c\leqslant c_0$. Исследуем сходимость этих последовательностей. Из (16) находим неравенства

$$|D_{k+1}-D_k|\leqslant|S_k|\cdot|D_k-D_{k-1}|+(|H|+|D_k|)\cdot|S_k-S_{k-1}|,$$
$$|S_{k+1}-S_k|\leqslant\pi|S_{k-1}|\cdot|D_k-D_{k-1}|+\pi(|H|+|D_k|)|S_k-S_{k-1}|.$$

Если собственные числа матрицы, мажорирующих коэффициентов этих неравенств

$$A=\begin{pmatrix} b & \pi^{-1}(a+c) \\ \pi b & (a+c) \end{pmatrix}$$

по модулю не превышают единицы, то последовательности D_k, S_k

равномерно сходятся. Элементы матрицы положительны и монотонно возрастают при увеличении c. В крайнем случае $c=c_0$ матрица A принимает вид

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1 & \pi^{-1}(2-\sqrt{2})\\ \pi(\sqrt{2}-1) & 2-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

и имеет собственные числа 0 и 1. Следовательно, при $0\leqslant c\leqslant c_0$, т. е. при выполнении условия

$$\sup_t \|H(t)\|<\frac{c_0}{\pi}=\frac{1}{\pi(3+2\sqrt{2})}=0{,}109226\ldots \qquad (19)$$

модули собственных чисел матрицы A меньше единицы, и последовательности матриц D_k, $S_k(t)$ сходятся равномерно. А изложенный способ пригоден для отыскания канонической замены переменных (10). По существу этот метод близок методу Л. Чезари для отыскания периодических решений ([7,8]).

3. В последнее время в ряде работ ([9–12]) было указано на принципиальные затруднения, возникающие при применении метода малого параметра для построения границы областей неустойчивости. Речь шла о случае, когда коэффициенты уравнения второго порядка зависят голоморфно от нескольких малых параметров. Изложенный выше способ позволяет обойти эти затруднения.

Рассматривается уравнение Хилла

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y+\psi(t,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r)y=0,\quad \psi(t,\ 0,\ldots,\ 0)=0,\quad n=1,\ 2,\ldots, \qquad (20)$$

где $\psi(t,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r)$ — π — периодическая по t функция, аналитически или непрерывно зависящая от $\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r$, вещественная при вещественных значениях $\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r$.

Произведем замену переменных

$$y=q\cos nt+p\sin nt,\quad y'=-qn\sin nt+pn\cos nt.$$

Приходим к канонической системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\psi(t,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r)}{n}(q\cos^2 nt+p\sin nt\cos nt),$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\psi(t,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r)}{n}(q\cos nt\sin nt+p\sin^2 nt). \qquad (21)$$

Из условия (19) следует, что при выполнении неравенства

$$\sup_t|\psi(t,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r)|<0{,}218452\,n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

существует каноническая замена переменных, приводящая систему (21) к канонической системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)x - \beta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)x + \alpha(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)y. \quad (22)$$

В первом приближении имеем выражения

$$\alpha = \frac{1}{n}\langle \psi \cos nt \sin nt \rangle, \qquad \beta = \frac{1}{n}\langle \psi \cos^2 nt \rangle, \quad \gamma = \frac{1}{n}\langle \psi \sin^2 nt \rangle.$$

Легко устанавливается, что решение системы (22) а, следовательно и уравнения (20), устойчивы при выполнении условия

$$D(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = \beta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)\,\gamma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) - \alpha^2(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) > 0$$

и неустойчивы при $D<0$. Граница определяется неявным уравнением

$$D(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = 0,$$

которое можно представить в явном виде и разрешить относительно любого параметра. В частности, для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + \psi(\theta t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)y = 0 \quad (23)$$

для границы всегда можно получить аналитическое представление ([13])

$$\theta = \frac{\omega}{n} + \varphi_1(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \pm \sqrt{\varphi_2(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)\varphi_2^*(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (24)$$

Если $\psi(\theta t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ аналитически зависит от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, то и функции φ_1, φ_2 аналитически зависят от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$. Если $\psi(\theta t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$—функция вещественная при вещественных значениях $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, то выражение (24) принимает вид

$$\theta = \frac{\omega}{n} + \varphi_1(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \pm |\varphi_2(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пример. Найдем границу областей неустойчивости уравнения ([11])

$$\frac{d^2u}{dt^2} + [\lambda + \varepsilon_1(1 + \cos 2t) + \varepsilon_2(\cos t + 2\sin 2t)]u = 0, \quad \lambda \approx 1.$$

Используя указанный выше способ, найдем во втором приближении уравнения

$$\lambda = 1 - \varepsilon_1 - \frac{1}{32}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{24}\varepsilon_2^2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{4}\varepsilon_2^2\right)^2}, \quad (25)$$

которые отличаются от аналогичных уравнений в ([11]). Правильность уравнений (25) подтверждена другими способами.

Ереванский политехнический институт

Կ. Դ. ՎԱԼԵԵՎ, Ի. Ռ. ԿԱՐԳԱՆՅԱՆ

Պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնական սիստեմի բերման մասին

Ուսումնասիրվում է պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնական սիստեմների բերման հարցը։ Ներկայացվում են կանոնական փոխարինման գոյության բավարար պայմանները և միջնացման մեթոդի օգնությամբ տրվում է այդ փոխարինման կառուցման նոր միջոց։ Առաջարկվող միջոցը հնարավորություն է ստեղծում ուսումնասիրել պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնական սիստեմների լուծումների կայունության տիրույթի սահմանների կառուցման հարցը այն դեպքի համար, երբ սիստեմի գործակիցները մի քանի փոքր պարամետրերի հոլոմորֆ ֆունկցիաներ են։ Գործնական կիրառման կարգով ստացվել է երկու փոքր պարամետրից կախված գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծման կայունության տիրույթի սահմանների անալիտիկ ներկայացումը երկրորդ մոտարկումով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. А. Бреус*, Укр. мат. ж., 12, № 4, 436—466 (1960). [2] *К. А. Бреус*, ДАН СССР т. 123, № 1, 21—24 (1958). [3] *К. А. Бреус*, Укр. мат. ж., 18, № 1, 3—10 (1966). [4] *Р. Беллман*, Теория устойчивости движения, Изд. ИЛ, М., 1954. [5] *Н. П. Еругин*, Приводимые системы, Труды МИАН им. Стеклова, 12 (1946). [6] *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн*, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд. «Наука», М., 1970. [7] *Дж. Хейл*, Колебания в нелинейных системах, Изд. «Мир», 1966. [8] *Л. Чезари*, Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. «Мир», 1964. [9] *Рэнд*, Об устойчивости уравнения Хилла с четырьмя независимыми параметрами. «Прикладная механика» № 4, изд. «Мир», 243, 1969. [10] *Хэмер, Смит*, «Прикладная механика», № 1, Изд. «Мир», 118—120, 1972. [11] *Рубенфельд*, «Прикладная механика», № 4, 285—287, Изд. «Мир», 1973. [12] *Найфех*, «Прикладная механика», № 4, 301—302. Изд. «Мир», 1972. [13] *К. Г. Валеев, И. Р. Каргинян*, Сб. «Математическая физика», Изд. АН УССР, в. 5, 26—34 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Сверхтождества ассоциативности в системах полугрупп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/V 1976)

Под сверхтождеством ассоциативности мы понимаем абсолютно замкнутую формулу второй ступени ([1]) следующего вида:

$$\forall X, Y, Z, U \forall x, y, z\,(X[Y(x, y), z] = Z[x, U(y, z)]).$$

Грубо говоря сверхтождества это тождества с переменными операциями.

В настоящей работе исследуется выполнимость сверхтождества ассоциативности в системах полугрупп. При этом универсальную алгебру $\langle Q; \Sigma \rangle$ будем называть системой полугрупп, если для любого $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$ является бинарной полугруппой с единицей (полагаем, что порядок $\Sigma > 1$). Алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется системой групп (квазигрупп), если для любого $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$ есть бинарная группа (квазигруппа). Понятно, что каждая система групп одновременно является как системой полугрупп, так и системой квазигрупп.

Выполнимость сверхтождеств ассоциативности в системах квазигрупп была рассмотрена в работе ([2]). Однако, полученные там результаты, относительно сверхтождеств ассоциативности, по существу вытекают из результатов настоящей работы, так как, если в системе квазигрупп $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется сверхтождество ассоциативности, то алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ автоматически оказывается системой групп, следовательно и системой полугрупп.

Сверхтождество, в котором участвует только один символ операции, назовем тривиальным. В противном случае, сверхтождество называется нетривиальным.

В дальнейшем приставки во всех формулах (т. е. во всех сверхтождествах ассоциативности) опускаем,—имеется в виду, что все символы операции и все предметные переменные находятся под действием квантора всеобщности.

Теорема. *Если в системе полугрупп* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, то оно может быть одним из следующих видов:*

$$X|Y(x, y), z| = Y|x, X(y, z)| \quad (1)$$

$$X|Y(x, y), z| = X|x, Y(y, z)| \quad (2)$$

$$X|X(x, y), z| = Y|x, Y(y, z)| \quad (3)$$

Доказательство. Если некоторый символ операции в сверхтождестве ассоциативности

$$X|Y(x, y), z| = U|x, V(y, z)|$$

встречается всего один раз, то оказывается, что такое сверхтождество не может выполняться в некоторой системе полугрупп. Предположим например, что символ операции X в рассматриваемом сверхтождестве встречается всего один раз и что это сверхтождество выполняется в некоторой системе полугрупп $\langle Q; \Sigma \rangle$.

Пусть $A, B \in \Sigma$ и $A \neq B$, тогда

$$A|A(x, y), z| = A|x, A(y, z)|$$

и

$$B|A(x, y), z| = A|x, A(y, z)|.$$

Таким образом

$$A|A(x, y), z| = B|A(x, y), z|.$$

Если e — единичный элемент полугруппы $Q(A)$, то при $y = e$ из последнего равенства следует

$$A(x, z) = B(x, z),$$

т. е. $A = B$, что противоречит выбору операций $A, B \in \Sigma$.

Аналогично показываются, что если сверхтождество ассоциативности выполняется в некоторой системе полугрупп, то символы операций Y, Z и U также не могут встречаться всего один раз. Следовательно, если сверхтождество ассоциативности выполняется в некоторой системе полугрупп ,то каждый символ операций в нем должен появляться в точности два раза, т. е. такое сверхтождество должно быть либо вида (1), либо вида (2), либо вида (3).

Следствие. *Если в системе групп $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, то оно может быть одного из видов (1)—(3).*

Далее мы описываем те системы полугрупп, в которых выполняются сверхтождества (1)—(3).

Теорема 1. *В системе полугрупп $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется сверхтождество (1), если и только если существует полугруппа $Q(\cdot)$ такая, что для любого $A_i \in \Sigma$ всегда*

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y,$$

где $t_i \in Q$.

Доказательство. Достаточность показывается простой проверкой. Докажем необходимость. Если $(\cdot)$ и $(\circ)$ — произвольные полугруппы из множества Σ и $X = (\cdot)$, $Y = (\circ)$, то справедливо равенство

$$(x \circ y) \cdot z = x \circ (y \cdot z).$$

Пусть e—единичный элемент полугруппы $Q(\cdot)$, тогда при $y=e$ получим

$$(x\circ e)\cdot z = x\circ z$$

или

$$\lambda x\cdot z = x\circ z,$$

где отображение λ определяется по правилу $x\to x\circ e$.

Аналогичным путем показывается, что

$$x\cdot z = \mu x\circ z$$

для любых $x, z\in Q$ и для некоторого отображения $\mu: Q\to Q$.
Сравнивая последние два равенства получим:

$$x\circ z = (\mu\lambda)x\circ z$$

$$x\cdot z = (\lambda\mu)x\cdot z.$$

Из последних двух равенств, когда z есть единичный элемент соответственно полугрупп $Q(\circ)$ и $Q(\cdot)$, следует

$$\mu\lambda = \varepsilon,\quad \lambda\mu = \varepsilon,$$

где ε—тождественное отображение множества Q. Иначе говоря, отображение λ—биекция множества Q.

Таким образом, существует полугруппа $Q(\cdot)$ такая, что для любой операции $A_i\in\Sigma$ выполняется равенство

$$A_i(x, y) = \lambda_i x\cdot y,$$

где λ_i — биекция множества Q. Определим отображение λ_i с помощью операции $(\cdot)$.

Выполнимость формулы (6) в системе полугрупп теперь означает:

$$\lambda_i(\lambda_j x\cdot y)\cdot z = \lambda_j x\cdot \lambda_l y\cdot z$$

откуда при $z=e$, получим:

$$\lambda_i(\lambda_j x\cdot y) = \lambda_j x\cdot \lambda_i y.$$

Однако, поскольку λ_j — биекция, то $\lambda_j x = u$ есть произвольный элемент множества Q и

$$\lambda_i(u\cdot y) = u\cdot \lambda_i y.$$

Из последнего равенства, при $y=e$ следует

$$\lambda_i u = u\cdot t_i,$$

где $t_i=\lambda_i e$. Таким образом справедливо равенство

$$A_i(x, y) = x\cdot t_i\cdot y.$$

Следствие 1. *В системе групп* $\langle Q; \Sigma\rangle$ *выполняется сверхтождество* (1), *если и только если существует группа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A_i\in\Sigma$ *справедливо равенство*

$$A_i(x, y) = x\cdot t_i\cdot y,$$

где $t_i\in Q$.

Доказательство. Достаточно показать, что полугруппа $Q(\cdot)$ из предыдущей теоремы здесь на самом деле является группой. В доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что отображение $\lambda_i : x \to x \cdot t_i$ есть биекция, поэтому равенство

$$A_i(x, y) = \lambda_i x \cdot y$$

показывает, что полугруппа $Q(\cdot)$ и группа $Q(A_i)$ изотопны. В силу теоремы Брака-Хъюза ([3]) в таком случае, они будут и изоморфны.

Теорема 2. *В системе полугрупп* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *выполняется сверхтождество* (2) *если и только если существует полугруппа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A_i \in \Sigma$ *справедливо равенство*

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y,$$

где t_i *— элемент из центра полугруппы* $Q(\cdot)$.

Доказательство. Достаточность показывается непосредственной проверкой. При доказательстве необходимости, рассуждая как и выше, находим

$$A_i(x, y) = x \cdot \lambda_i y.$$

Далее показывается, что отображение λ_i имеет вид

$$\lambda_i y = t_i \cdot y$$

и является биекцией. Таким образом,

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y.$$

Из выполнимости сверхтождества (2) в системе полугрупп $\langle Q; \Sigma \rangle$ следует (при $X = (\cdot)$, $Y = A_i$) равенство

$$x \cdot t_i \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot t_i \cdot z.$$

Откуда при $x = z = e$, где e — единичный элемент полугруппы $Q(\cdot)$, получим

$$t_i \cdot y = y \cdot t_i$$

т. е. элемент t_i лежит в центре полугруппы $Q(\cdot)$.

Следствие 2. *В системе групп* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *выполняется сверхтождество* (2), *если и только если, существует группа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A_i \in \Sigma$ *справедливо равенство*

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y,$$

где t_i *— элемент из центра группы* $Q(\cdot)$.

Доказательство. См. доказательство следствия 1.

Теорема 3. *В системе полугрупп* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *выполняется сверхтождество* (3), *если и только если, существует полугруппа* $Q(\cdot)$ *с единицей такая, что для любого* $A_i \in \Sigma$ *справедливо равенство*

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y,$$

где t_i *— элемент второго порядка из центра полугруппы* $Q(\cdot)$.

Доказательство. Полагая в равенстве (3) $X=(\cdot)$ и $Y=A_l$, где операции $(\cdot)$ и A_l берутся из множества Σ, мы получаем

$$x \cdot y \cdot z = A_l[x, A_l(y, z)].$$

Откуда, при $y=t_l$, где t_l — единичный элемент полугруппы $Q(A_l)$, следует равенство

$$A_l(x, z) = x \cdot t_l \cdot z.$$

Из выполнимости сверхтождества (3) в системе полугрупп $\langle Q; \Sigma \rangle$ теперь вытекает

$$x \cdot y \cdot z = x \cdot t_l \cdot y \cdot t_l \cdot z.$$

Если $x=y=z=e$, где e — единичный элемент полугруппы $Q(\cdot)$, то

$$e = t_l^2,$$

а если $x=z=e$, то

$$y = t_l \cdot y \cdot t_l$$

или

$$t_l \cdot y = y \cdot t_l,$$

т. е. элемент t_l лежит в центре полугруппы $Q(\cdot)$ и имеет порядок два.

Достаточность доказывается непосредственной проверкой.

Следствие 3. *В системе групп $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется сверхтождество* (3), *если и только если, существует группа $Q(\cdot)$ такая, что для любого $A_l \in \Sigma$ справедливо равенство*

$$A_l(x, y) = x \cdot t_l \cdot y,$$

где t_l — элемент второго порядка из центра группы $Q(\cdot)$.

Доказательство. См. доказательство следствия 1.

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Ի. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ասոցիատիվության գերնույնություններ կիսախմբային համակարգերում

Գերնույնությունները հանդիսանում են փոփոխական գործողություններով նույնություններ, ճշգրիտ սահմանումը տանք մեզ հետաքրքրող դեպքի համար։ Ասոցիատիվության գերնույնություն ասելով հասկանում են հետևյալ տիպի երկրորդ աստիճանի բանաձևը՝

$$\forall X, Y, Z, U \; \forall x, y, z (X[Y(x, y), z] = Z[x, U(y, z)]).$$

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է ասոցիատիվության գերնույնությունների իրացնելիությունը կիսախմբային համակարգերում։ Ընդ որում $\langle Q; \Sigma \rangle$ ունիվերսալ հանրահաշիվը մենք անվանում ենք կիսախմբային համակարգ, եթե ցանկացած $A \in \Sigma$ գործողության համար $Q(A)$ խմբոիդը հանդիսանում է միավորով օժտված կիսախումբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Мальцев*, Алгебранческие системы, «Наука», 1970. [2] *В. Д. Белоусов*, УМН, 20, 1(121), 75—145, (1965). [3] *А. Г. Курош*, Общая алгебра, «Наука», 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 518.5 : 681.3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян, А. А. Баласанян

Программная реализация алгоритма для перечисления всех неупорядоченных разбиений всякого целого n

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 5/V 1976)

Проблематичность многих задач теоретической и прикладной комбинаторики, связанная с большими мощностями множеств исследуемых комбинаторных объектов, обуславливает необходимость конструирования специализированных алгоритмов и программ. В частности, программные реализации алгоритмов для перечисления элементов полных множеств неупорядоченных разбиений ([1]) имеют приложение как в проблематике самой теории разбиений, так и при решении многочисленных прикладных задач.

Программа для перечисления элементов полного множества неупорядоченных разбиений всякого целого n основана на алгоритме, описанном в работе ([2]) (алгоритм AS_n). Основными достоинствами алгоритма AS_n являются простота перечислительного процесса и древовидность структуры, дающие возможность исследования и использования структурных особенностей полных множеств неупорядоченных разбиений $\{S_n\}$ при достаточно простых программных реализациях, особенно при программировании для многопроцессорных систем.

Реализация алгоритма AS_n на машинах семейства ЕС/ЭВМ показала, что для однопроцессорных реализаций возможна модификация алгоритма AS_n (алгоритм AS_n') в направлении дальнейшего упрощения перечислительного процесса и уменьшения объема используемой оперативной памяти.

Каждый треугольник, перечисляемый в соответствии с алгоритмом AS_n', оструктурно разбивается на два подмножества: множество чисел, отличных от единиц $\{\overline{1}\}$ и составляющих вертикальный катет, и множество единиц $\{1\}$, которые собственно и образуют треугольник (рис. 1). Вертикальный катет каждого треугольника состоит из слоев, число которых равно номеру той колонки, которой принадлежит треугольник. При переходе от каждого треугольника к следующему в пределах колонки изменяются только элементы, принадлежащие некото-

рому числу первых слоев катета, и соответственно изменяется количество единиц. Прежде, чем будет затронут какой-либо i-ый слой в пределах данной колонки, изменяются во всех возможных вариантах все слои с номерами: 1, 2, . . ., $i-1$. В связи с этим вводится понятие «глубины треугольника» в качестве величины, соответствующей числу слоев, которые изменяются при переходе от треугольника к треугольнику. Очевидно, что эта величина ограничена сверху номером колонки (рис. 1).

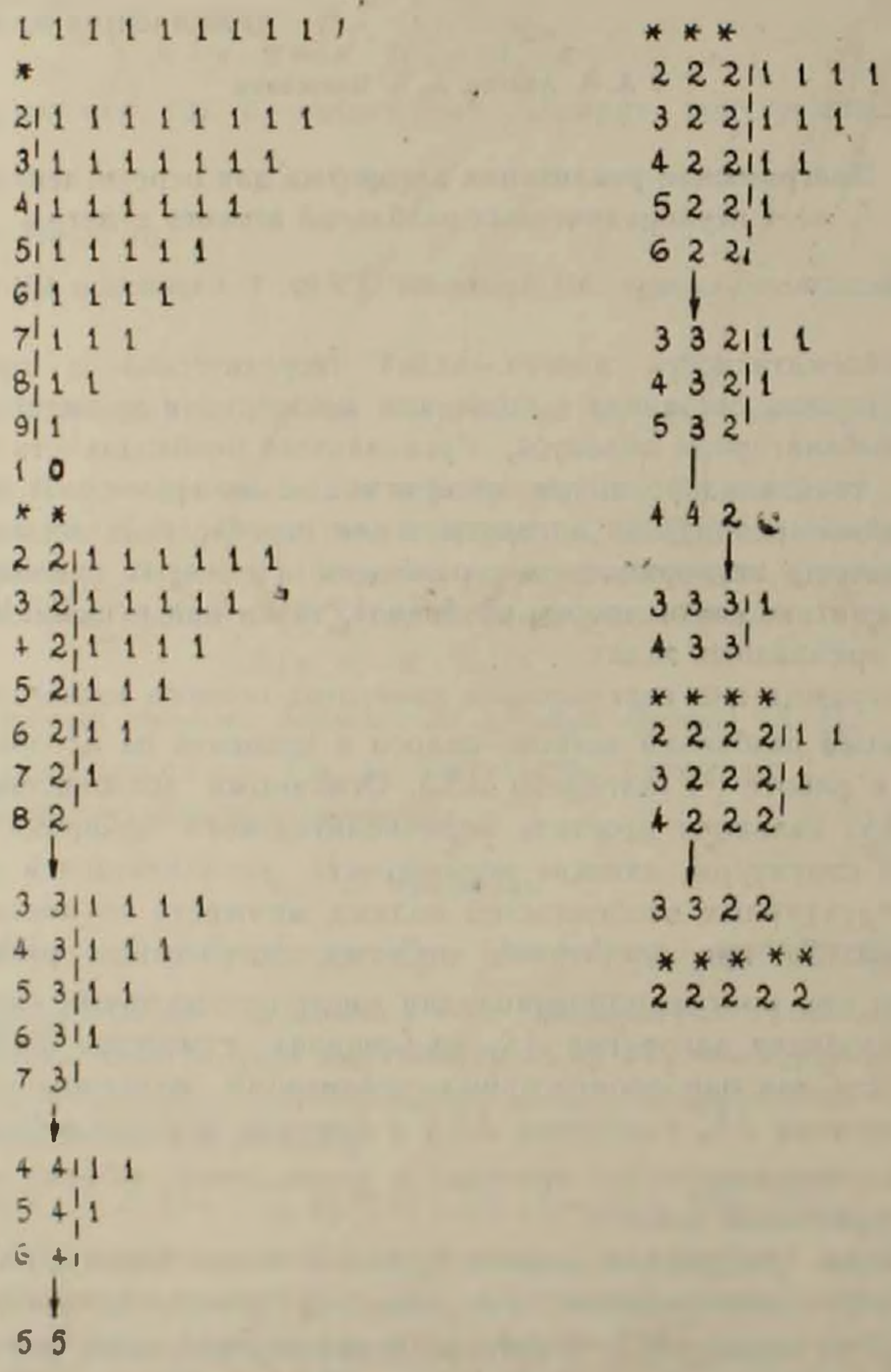


Рис. 1. Структура алгоритма AS'_{10}, $[S_{10}]$. Множества $\overline{[1]}$ и $[1]$ отделены пунктиром, колонки отмечены звездочками, причем число звездочек соответствует номеру колонки

Алгоритм $AS_n^{'}$ дает возможность генерировать первую строку каждого следующего в колонке треугольника из первой строки предыдущего, в отличие от алгоритма AS_n, где при генерировании каждого нового треугольника требуется обращение к некоторой строке одного из треугольников, сгенерированных на предыдущем этале (рис. 1).

Алгоритм $AS_n^{'}$ описывается следующим образом.

1. Начать процесс разбиений, сопоставив числу n последовательность из n единиц (первоначальное разбиение).

2. Задать в качестве номера колонки k число 0.

3. Увеличить значение k на единицу.

4. Сравнить значение k, полученное в 3-с $n-k$; если $k>n-k$, то перейти к 14.; если $k\leqslant n-k$, то записать k в качестве номера очередной колонки.

5. Записать в качестве первой строки треугольника (первой строки колонки) последовательность, состоящую из k двоек и $n-2k$ единиц ($n-k=N$).

6. Проверить, есть ли в данной j-ой строке треугольника ($j=1, 2, \ldots$) единицы ($N-k=0$?); если есть, то перейти к 7.; если нет, то придать i значение 2 и перейти к 8.

7. Из последовательности, записанной в j-ой строке, построить последовательность, записываемую в $(j+1)$-ой строке, увеличив значение 1-го элемента ($i=1$) на единицу и отбросив последний ($i=N$) элемент. Перейти к 6.

8. Сравнить i с k; если $i>k$, то перейти к 3.; если $i\leqslant k$, то перейти к 9.

9. Увеличить значение i-ого элемента ($i=2, 3, \ldots, k$) данной строки на единицу и запомнить полученное значение в качестве возможного значения 1-го, 2-ого, . . ., i-ого элементов новой строки:

10. Умножить полученное в 9· число на i и к полученному произведению прибавить значения $(i+1)$-го, $(i+2)$-го, . . . k-го элементов данной строки.

11. Полученную в 10. сумму S сравнить с n; если $S>n$, то увеличить i на единицу и перейти к 8.; если $S\leqslant n$, то перейти к 12.

12. Записать—в качестве 1-го, 2-го . . ., i-го элементов нового треугольника значение, полученное в 9· в качестве $(i+1)$-го, $(i+2)$-го,..., k-го элементов значения $(i+1)$-го, $(i+2)$-го,..., k-го элементов последней строки предыдущего треугольника; в качестве $(k+1)$-го, $(k+2)$-го, ..., N-го элементов единицы ($N=k+n-S$).

13. Принять $j=1$ и перейти к 6.

14. Закончить процесс разбиений.

Программа составлена на языке Ассемблер ([3]) для машин семейства ЕС/ЭВМ с операционной системой ДОС/ЕС и отлажена на машине ЕС-1030. С учетом требований большинства прикладных задач и исходя из производительности машины ЕС--1030 число n ограничивается следующим образом $1\leqslant n\leqslant 99$, хотя нет принципиальных ограниче-

ний для использования программы при $n > 99$. Объем программы не зависит от n и требует оперативной памяти в 1330 байтов. В программу включена подпрограмма подсчета времени перечисления элементов полного множества $|S_n|$, объем которой составляет 194 байта.

Применение ДОС/ЕС дает возможность загружать программу в память в любой момент рабочего времени.

Программа имеет возможность многократного перечисления элементов полных множеств $|S_n|$ с заданием числа C циклов повторе-

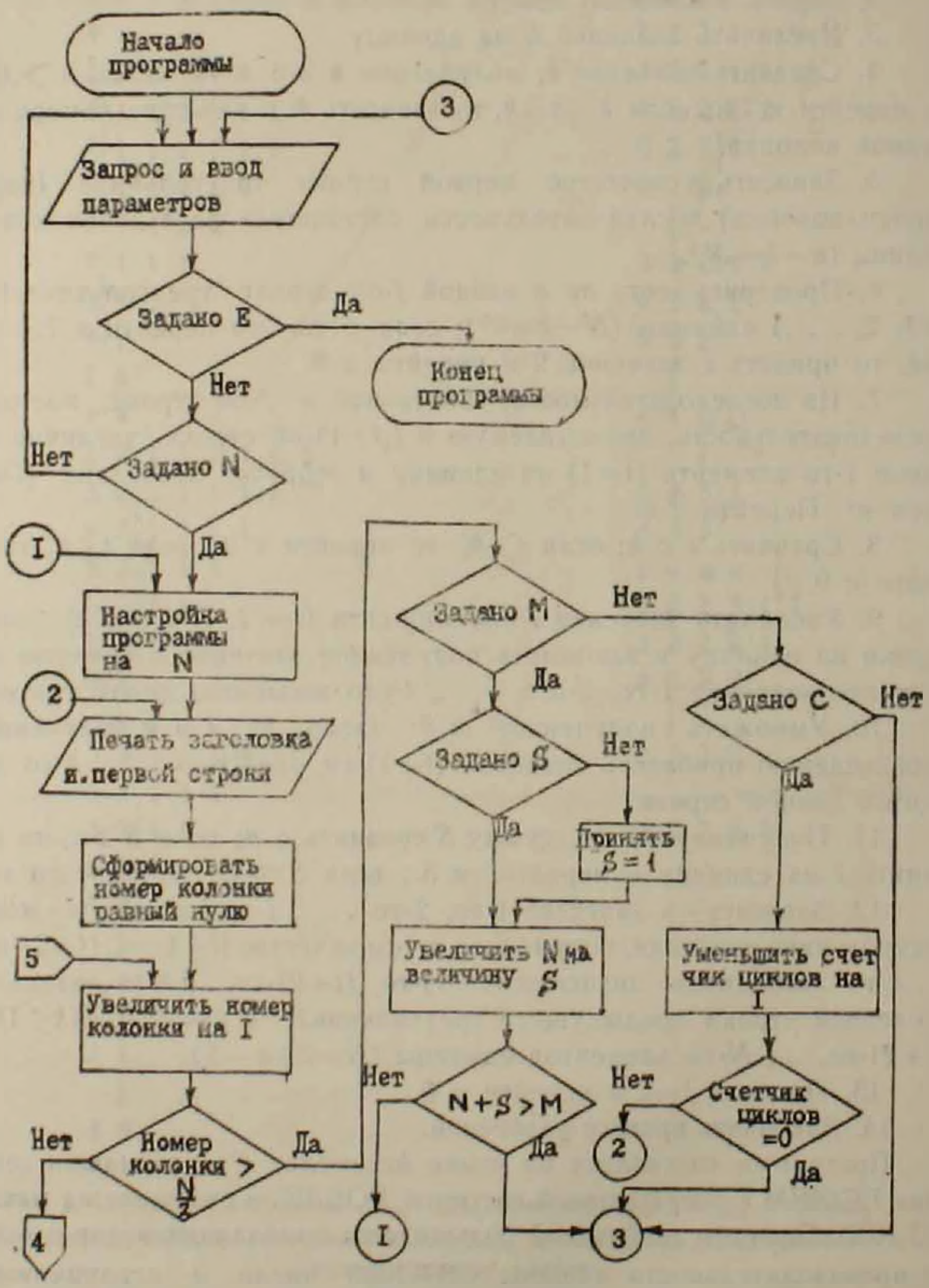


Рис. 2. Блок-схема программы (продолжение см. на рис. 3)

ния. Программа предусматривает также автоматические переходы (с заданием шага S перехода) от одного n к другому ($0 \leqslant S \leqslant 9$) вплоть до задаваемого верхнего предела M. Программа выдает на пишущую машинку запрос о параметрах (N, M, S, C), которые в различных сочетаниях дают возможность задания различных режимов работы.

Блок-схема программы показана на рис. 2 и 3.

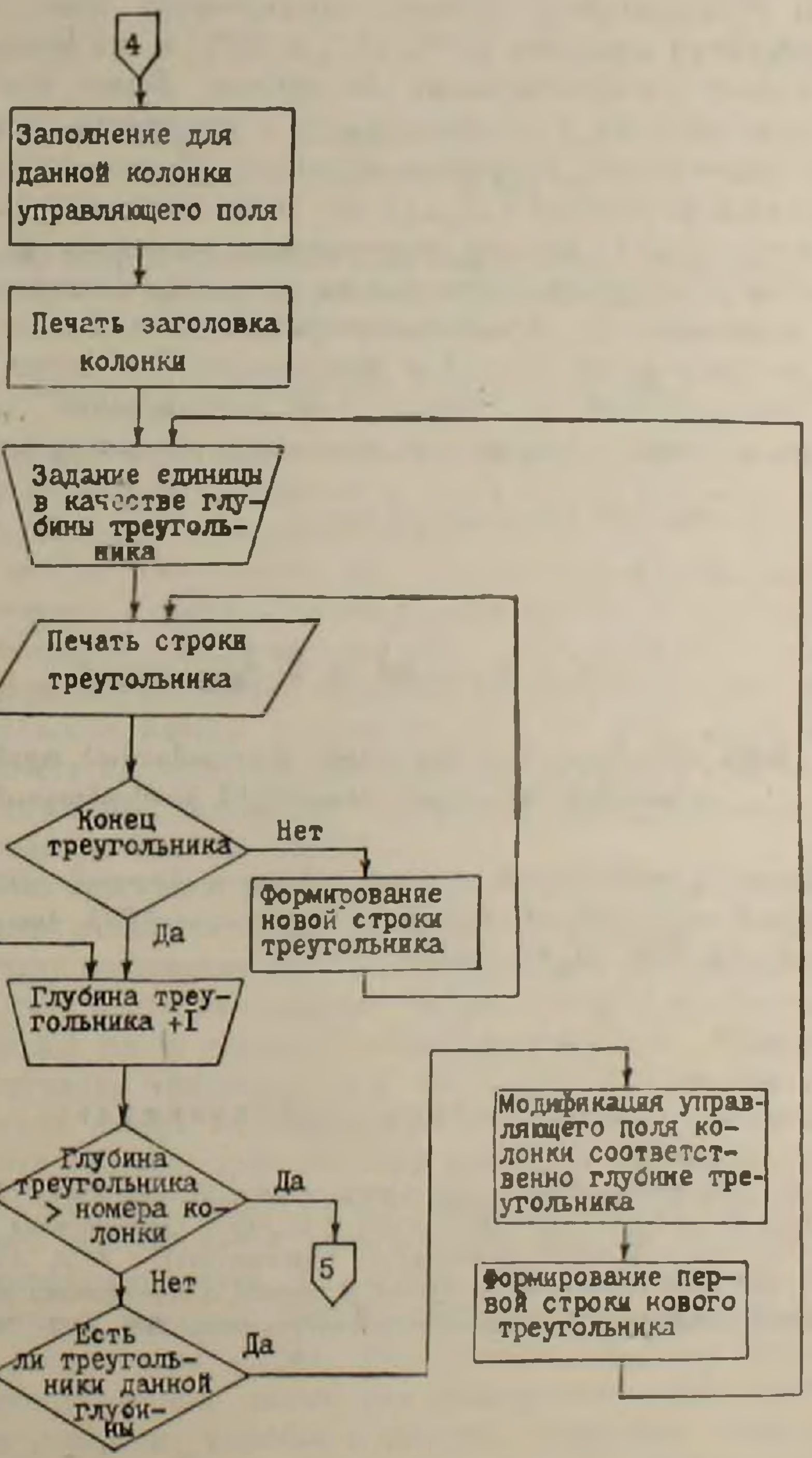


Рис. 3. Продолжение блок схемы программы

Контрольными тестовыми задачами являлись задачи по перечислению элементов полных множеств $|S_n|$ неупорядоченных разбиений при $n=15, 20, 25, 30, 35$, время перечисления для которых составило соответственно 6, 7, 11, 18, 40 *сек.* (без вывода на печать) и 0,53; 1,50; 4,50; 12,55; 33,00 *мин* (с выводом на печать).

Программа отлаживалась на машине ЕС-1030, результаты решения задач сравнивались с теоретически ожидаемыми и полностью совпали с ними.

В ([4]) выдвигались проблема табулирования зависимостей списочных структур множеств $|U^m|$, $|K^l|$ и $|R^l|$ и их мощностей от распределений соответствующих m—таблиц. Было показано, что эта проблема сводится в первую очередь к разработке эффективных методов перечисления элементов множеств $|U|$ и к табулированию зависимостей мощностей $|(U)_{n.k,q}|$ от различных значений a_k и b_q. В ([5]) дается один из методов перечисления элементов $|U)_{n,k,q}$. Однако с ростом n все усложняется задача создания списочной структуры всех возможных не упорядоченных разбиений n. Таким образом, задача табулирования указанной зависимости не могла быть решена без использования программы для перечисления элементов $|S_n|$. Теперь эта задача решается с помощью рассмотренной программы.

Ереванский НИИ математических машин

Ա. Հ. Ազատյան, Ա. Ա. Բալասանյան

Ամեն մի ամբողջական n-ի բոլոր չկարգավորված տրոհումների թվարկման ալգորիթմի ծրագրային իրականացում

Տրվում է ամեն մի ամբողջական n-ի բոլոր չկարգավորված տրոհումների թվարկման ալգորիթմ։ Նկարագրվում է այդ ալգորիթմի ծրագրային իրականացումը ԵՍ-1030 մեքենայում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Холл*, Комбинаторика, пер. с англ., «Мир», М., стр. 45—58, 1972. [2] *А. А. Азатян*, ДАН Арм. ССР, т. LXII, № 2, (1976). [3] ЕС/ЭВМ. Операционная система ДОС/ЕС Ассемблер. Описание языка (Информация пользователя). [4] *А. А. Азатян*, ДАН Арм ССР, т. LVI, № 4 (1973). [5] *А. А. Азатян*. К вопросу о перечислении элементов полного множества ассоциаций (U). Депонированная рукопись, 1974, РИР, № 3, 1975, 3—69.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 621.375.826

ФИЗИКА

А. А. Исаев, М. А. Казарян, М. Е. Мовсесян,
Г. Г. Петраш, А. К. Саакян, А. М. Ханбекян

Возбуждение второй гармоники излучением перестраиваемого лазера на красителе, работающего с большой частотой повторения

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 11/II 1976)

В последние 2—3 года появилось много работ по перестраиваемым лазерам на органических красителях и среди них особое место занимают лазеры со свободно истекающей струей ([1,2]).

В настоящей статье сообщается об осуществлении перестраиваемого лазера, работающего с высокой частотой повторения, на органическом красителе со свободно истекающей струей и об использовании излучения такого лазера для получения второй гармоники в кристаллах КДП и $LiJO_3$. Импульсные лазеры с большой частотой повторения дают возможность сочетать преимущества непрерывных лазеров с большими мощностями импульсных лазеров, что особенно важно при исследовании нелинейных процессов высоких порядков.

Для накачки красителя использовали излучение лазера на парах меди ([3]). Средняя мощность лазера на длине волны 5105 Å составляла 0,5 Вт при частоте повторения 10 *кгц* и длительности импульса генерации 10 *нсек*. Струя раствора красителя родамина 6Ж в этиленгликоле имела толщину 0,3 *мм* и скорость истекания 3,5 *м/сек*. Применяли разные концентрации раствора: от $2 \cdot 10^{-3}$ до $2 \cdot 10^{-2}$ *моль/л*. Для накачки излучение лазера на парах меди фокусировали сферическим зеркалом в центр плоской струи раствора красителя. Резонатор лазера на красителе состоял из сферического зеркала и дифракционной решетки. Для лучшего использования разрешающей способности последней применяли расширитель пучка. В данной схеме осуществляли перестройку излучения в пределах 5600 Å—6200 Å со спектральной шириной ~1Å (без расширителя ~10Å). Поляризация излучения была линейная. При использовании схемы без расширителя эффективность преобразования энергии накачки в энергию излучения лазера на красителе вблизи максимума полосы люминесценции раствора составляла 10—12%.

Излучение перестраиваемого лазера со спектральной шириной ~10 Å после фокусировки направляли на кристаллы КДП или $LiJO_3$. Преобразование во вторую гармонику в обоих кристаллах осуществляли по схеме ooe. При перестройке излучения лазера на красителе производили поворот кристаллов в соответствии с условием синхронизма. Кристалл КДП имел размеры 20×20×40 *мм* и оптическая ось составляла угол $\Theta=63°$ с геометрической осью. Кристалл $LiJO_3$ имел размеры 20×20×28 *мм* и оптическая ось была перпендикулярна ($\Theta=90°$) геометрической оси кристалла. В случае использования кристалла $LiJO_3$ область перестройки составляла 2930—3100 Å. Эффективность преобразования во вторую гармонику при 90°-м синхронизме составляла 5%. Для кристалла КДП область перестройки была шире (2800—3100 Å), но эффективность преобразования несколько меньше.

Вторая гармоника возбуждалась также при широком спектре излучения лазера на красителе (300 Å). В этом случае селекция длин волн для второй гармоники происходила из-за условий синхронизма кристалла. Область перестройки второй гармоники при широком спектре возбуждения такая же, как и при узком спектре накачки. Спектральная ширина излучения второй гармоники полученная в кристалле $LiJO_3$ измерялась эталоном Фабри-Перо и на длине волны 2930 Å составляла ~0,2 Å.

Институт физических исследований Академии наук Армянской ССР
Физический институт им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР

Ա. Ա. ԻՍԱԵՎ, Մ. Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Մ. Ե. ՄՈՎՍԵՍՅԱՆ, Գ. Գ. ՊԵՏՐԱՇ,
Ա. Կ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Վ. Մ. ԽԱՆԲԵԿՅԱՆ

Երկրորդ հարմոնիկի գրգռումը ներկանյութի վրա կրկնման մեծ հաճախությամբ աշխատող և լատ ալիքի երկարության վերալարվող լազերի ճառագայթման օգնությամբ

Հաղորդվում է կրկնման մեծ հաճախությամբ (10 կՀց), ապատ հատող օրգանական ներկանյութի շիթի վրա աշխատող, լատ ալիքի երկարության վերալարվող լազերի իրականացման և ոչ գծային բյուրեղներում լազերի ճառագայթման երկրորդ հարմոնիկի ստացման մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *B. Wellegehausen, H. Welling, R. Belgang*, Appl. Phys., 3, 387, (1974). [2] *Е. Н. Антонов, В. Г. Калошников, В. Р. Мироненко*, Препринт ИСАН, № 10 (1975)
[3] *А. А. Исаев, М. А. Казарян, Г. Г. Петраш*, Письма ЖЭТФ, 16, 40 (1972).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 551.79+551.89](479.25)

ГЕОЛОГИЯ

Т. А. Айрапетян

Новые данные о фауне плейстоцена Армении

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 11/V 1976)

В 1973 г. на левом берегу р. Тандзут, правого притока р. Памбак, у с. Лермонтово, в озерных отложениях, геологической экспедицией института «Армгипрозем» найден скелет слона. В обрывистом склоне III террасы высотой 25 м вскрываются почти горизонтальные слои чередующихся глин, суглинков, супесей, диатомовых глин, торфа перекрытых толщей галечников.

Судя по расположению костного скелета можно предполагать, что слон застрял в болоте и его скелет находился in situ. Цельность скелета была сохранена также и в период формирования отложения аллювиальной террасы, покрывающих озерные глинисто-суглинистые отложения, однако, в последующем, в результате интенсивного понижения базиса эрозии, происходило глубокое врезание реки в пойменные наносы и подстилающие их озерные отложения. Наиболее ценная для видового определения часть скелета (череп и первый шейный позвонок) из подножья террасы были снесены подмывом боковой эрозии, чему способствовали также возникшие на обрывистых склонах оползнево-обвальные явления.

Были обнаружены около 150 костей. Наиболее хорошо сохранились мелкие кости кисти и стопы. Длинные кости конечностей представлены только обломками (рис. 1). Скелет принадлежит к довольно молодому животному, поскольку эпифизарные швы не окостенели и эпифизы легко отделяются от тела костей.

Судя по абсолютным размерам костей он сходен с такими крупными видами, как южный слон, слон Вюста или древний слон из Аппора (Англия).

Отсутствие черепа и коренных зубов затрудняют определение видовой принадлежности слона, поскольку систематика семейства Elephantidae построена на особенностях строения черепа и коренных зубов. По предварительному определению Л. И. Алексеевой, костные остатки хоботного животного могут принадлежать только слону рода Mammuthus, к которому многие исследователи относят сейчас все виды

слонов мамонтовой линии, начиная с вида trogontherii. Материал находится в хранилище геологического факультета Ереванского государственного университета.

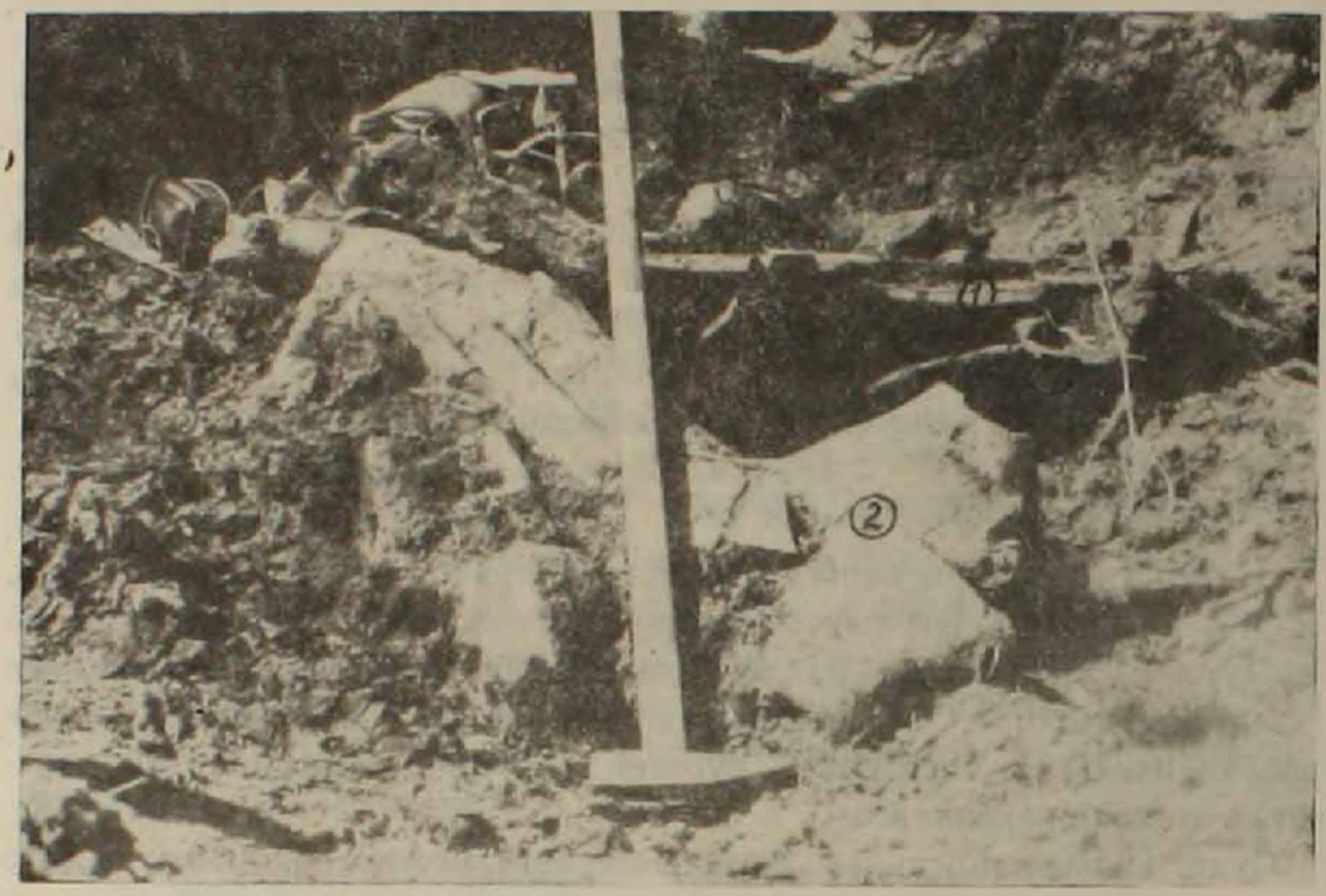


Рис. 1. Раскопанные костные остатки слона.
1—обломки ребер; *2*—обломки таза

В литературных источниках имеются указания о находках остатков ископаемых мамонтов в районе долины р. Памбак (1) и др.

Достоверно известны остатки слонов мамонтовой линии, найденные в Ширакской котловине, отнесенные Л. А. Авакяном (2) к виду Elephas trogontherii Pohl., отмеченный в качестве одного из характерных представителей ленинаканского фаунистического комплекса. Этот комплекс связан с озерными гравелисто-песчано-глинистыми отложениями Ширакской котловины, сопоставляемыми Ю. В. Саядяном с сингильским горизонтом Нижнего Поволжья (3), т. е. с частью миндель-рисского межледниковья.

Следует указать на находку остатков слона Palaeoloxodon antiguus Falc. (4) в озерных отложениях Араратской котловины, близких по возрасту к ленинаканскому комплексу. На территории Армянского нагорья известен вид слона близкородственный трогонтериевому, найденного Дж. Шиллем в озерных отложениях Хнусской котловины (Западная Армения), отнесенный Фальконером (5) к новому виду— Elephas armeniacus.

О видовой принадлежности найденного скелета мамонта и возрасте вмещающих пород, может дать анализ богатого пыльцевого спектра, остатков других позвоночных, пресноводных моллюсков, а также данные палеоморфологического анализа формирования долины р. Тандзут.

В горизонте торфяника, кроме скелета слона были найдены обломок лопатки оленя Cervus ex gr. elaphus L. (определение Л. И. Алексеевой), нижняя челюсть ежа Erinaceus sp., отдельные зубы водяной полевки Arvicola ex gr. terrestris L. (определение А. К. Агаджаняна). Этот вид воляной полевки по возрасту может быть отнесен ко второй половине плейстоцена.

Два горизонта разреза включают много раковин моллюсков. По определению В. И. Курсаловой и П. М. Асланяна моллюски представлены следующими видами: Lymnaea sp., Planorbaris banaticus, Anisus leucostoma (Millet), Armiger crista (L.), Succinea sp., Sigmentina nitidaa (Millet), Valvata cf. piscinalis (Müller), Potamopyrgus aff. sieversi (Bttg.), Radix peregra (Müller) var. ovata (Drap.), Planorbis planorbis (L.), Lithynia tentaculata (L.), Theodoxus sp.. Viviparus sp.

Эти формы моллюсков жили в южной зоне Европейской части СССР и сопредельных районах, начиная с нижнего плейстоцена.

Микрофаунистические исследования слоев №№ 20, 21, 22, 24 показали наличие фауны остракод (определение С. Бубикян): Candona fracfa Mandelst., Candona neglecfa Sars, Candoniella sp., Cypris magna Negadaev, Cypris mandelstami Lubimova, Candoniella albicans (Brady), Cyclocypris triangula Negadaev, Cypridopsis triangularis Aslanova, Candona ex gr. compressaformis Mandelst., Candoniella subellipsoida Sharapova, Ilyocypris bradyi Sars, Eucypris sp. являющиеся в основном пресноводными формами и относящиеся к постплиоцену—верхнему плейстоцену.

Послойный разрез озерно-аллювиальных отложений был подвергнут детальному спорово-пыльцевому анализу (116 обр.)*. Из всех образцов выделено большое количество пыльцы и спор, от 300 до 600 зерен. Результаты анализа позволили установить количественные соотношения компонентов спорово-пыльцевых спектров и получить богатый флористический материал (определено 94 таксона разного систематического ранга, в том числе 72 рода и вида)

В торфяно-глинистых слоях, в которых были захоронены костные остатки слона и др. позвоночных, установлена богатая флора с большим участием термофильных элементов. Суммарное содержание пыльцы термофильных лесообразующих древесных пород здесь достигает 61% (присутствуют бук, дуб, ильм, граб, липа, ясень, орех и др.), что дает основание отнести эти отложения к межледниковым. Присутствие в составе дендрофлоры этой толщи только таких таксонов, представленных и в современной флоре Армении, позволяет датировать вмещающие отложения верхним плейстоценом. Причем следует отметить, что в среднеплейстоценовых отложениях Ширакской котловины (Ь) присутствуют представители американо-восточно-азиатских родов, чуждых современной флоре Кавказа, а в отложениях верхнего плейстоцена

---

* Спорово-пыльцевые анализы произведены М. П. Гричук, заключение дано В. П. Гричуком.

(карангатские слои) Колхиды представлены лишь элементы Кавказской флоры ([7]).

Состав спорово-пыльцевых спектров самых нижних горизонтов торфяно-глинистой толщи указывает на то, что они относятся к начальной фазе межледниковой эпохи. В слоях с палеонтологическими остатками присутствуют пыльца Rhus, Ligustrum и споры Dryopteris thelypteris, которые приурочены к формациям среднего горного пояса, т. е. к гипсометрическому уровню днища долины р. Тандзут (район с. Лермонтово). Эти находки позволяют реконструировать климатические условия для данной части разреза. Для такой реконструкции удобно использовать метод климатограмм, предложенный Иверсеном (методика построения их подробно описана В. П. Гричуком ([8]).

На Кавказе род Rhus представлен одним видом Rhus coriaria, Ligustrum—также одним видом Ligustrum vulgare. Совмещенные климатограммы этих видов и Dryopteris thelypteris позволяют прийти к выводу, что климатические условия долины р. Тандзут во время обитания слона и сопутствующей фауны определились значениями основных климатических показателей (см. приведенную ниже таблицу). Реконструированные значения климатических показателей для межледниковой эпохи в долине р. Тандзут.

Эпохи	Температура (°С)				Годовая сумма осадков, (*мм*)		Длительность безморозного периода (число дней)	
	наиболее холодного месяца		наиболее теплого месяца					
	пределы	наиболее вероятная	пределы	наиболее вероятная	пределы	наиболее вероятная	пределы	наиболее вероятная
Время накопления отложений на глубине 11.5—12.0 *м*	—3—(+3)	0	19—22	21	900—1300	1150	200—225	210
Современная (район с. Лермонтово)	—5		15		650		160	

Расчитанные значения всех показателей—температур, осадков, длительности безморозного периода—определяются в довольно широком диапазоне. Если, даже, брать минимальные их значения, то из сравнения с данными современного климата (с. Лермонтово) следует, что интересующая нас эпоха, безусловно, отличалась значительно более теплыми зимами, более высокими летними температурами, более длительным безморозным периодом и большим количеством осадков.

Фациальный анализ четвертичных озерно-аллювиальных отложений долины р. Памбак в сочетании с палеогеоморфологическим развитием

врезанных в них террас обнаруживает существенное возрастно-стратиграфическое и фациальное различие между отложениями, слагающими IV вюрмскую террасу р. Памбак у с. Налбанд, включающую остатки верхнепалеолитического комплекса фауны мамонта, шерстистого носорога и др., и описываемыми озерными отложениями Гамзачиманской котловины.

Разрез IV террасы с. Налбанд и других котловин долины р. Памбак слагают грубообломочные отложения, переслаивающиеся песками и суглинками. Они отлагались в период интенсивных неотектонических движений, вулканизма и размыва окружающих горных массивов, в условиях резкого похолодания климата, характерного для верхнепалеолитического комплекса ([9]). Отложения этих террас прослеживаются по всей долине р. Памбак, вплоть до с. Лермонтово, где они с определенным эрозионным несогласием перекрывают озерные отложения Гамзачиманской котловины. Последние отлагались в межледниковое время в условиях относительно теплого и влажного климата в результате интенсивного химического выветривания с длительным и весьма спокойным ритмом седиментации глин, суглинков, перемежающихся с торфяными слоями.

Анализируя весь комплекс палеонтологических, палинологических и палеогеоморфологических данных можно предполагать, что развитие Гамзачиманского водоема и формирование в нем слоя торфяника происходило где-то в период последнего ((R—W) межледниковья, примерно 65 тыс. лет назад. Данные по абсолютной датировке не противоречат этому предположению, поскольку возраст торфяника более 43 тыс. лет (ГИН 1190>43000).

Институт «Армгипрозем»

Ի. Ա. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Նոր տվյալներ Հայաստանի պլեյստոցենի ֆաունայի մասին

1973 թ. Լերմոնտովո գյուղի մոտ, Տանձուտ գետի ձախ ափի լճային նստվածքներում հայտնաբերվել է փղի կմախք, որը Լ. Ի. Ալեքսեևայի նախնական որոշմամբ պատկանում է Mammuthus *սեռին։*

Հայտնաբերվել է նաև եղջերուի թիակոսկր Cervus ex gr. elaphus L., *ոզնու ներքին ծնոտ* Erinaceus sp., *դաշտամկան առանձին ատամներ* Arvicola ex gr. terrestris L., *մոլլյուսկներ և օստրակոդներ։*

Ֆաունայի, սպորա-ծաղկափոշային և պալեոգեոմորֆոլոգիական տվյալները թույլ են տալիս ենթադրել, որ Համզաչիմանի ջրավազանի զարգացումը և նրա մեջ տորֆի առաջացումը տեղի է ունեցել վերջին միջսառցադաշտային (R—W) *ժամանակաշրջանում, մոտավորապես 65 հազ. տարի առաջ։*

Տորֆի բացարձակ հասակը չի հակասում այդ ենթադրությանը, քանի որ տորֆը 43000 տարուց հին է (ГИН *1190>43000)։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Каракаш*, Дневник X съезда русских естествоиспытателей и врачей в Киеве, 1898. [2] *Л. А. Авакян*, Четвертичные ископаемые млекопитающие Армении. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1959. [3] *Ю. В. Саядян*, Бюлл. Ком. по изучению четвертичного периода, № 37, 1970. [4] *Л. А. Авакян, Л. И. Алексеева*, Известия, АН Арм. ССР, Науки о Земле, 19, № 1, 2 (1966). [5] *H. Falconer*, Palaeontological memoirs, vol. II, London, 1868. [6] *Ю. В. Саядян*, Бюлл. Ком. по изучению четвертичного периода, № 39, 1972. [7] *Н. С. Мамацашвили*, Палинологическая характеристика четвертичных отложений Колхиды. Изд. «Мецниереба», Тбилиси, 1975. [8] *В. П. Гричюк*, Опыт реконструкции некоторых элементов климата северного полушария в атлантический период голоцена. В кн. «Голоцен», «Наука», М., 1969. [9] *Л. А. Величко*, Автореферат докторской диссертации. М., 1969

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXII 1975 5

УДК 576.809.5 : 632.937.15

МИКРОБИОЛОГИЯ

Член-корреспондент АН Армянской ССР Э. К. Африкян
З. Г. Аванян, С. Н. Багдасарян

О влиянии витаминов и аминокислот на рост Bac. popilliae

(Представлено 9/III 1976)

Возбудители болезней японского жука—Bac. popilliae, Bac. lentimorbus—изучаются в течение многих лет с целью использования их в борьбе с особо вредоносными насекомыми ([1–3]). Несмотря на большой объем всесторонних исследований до настоящего времени не достигнуты успехи по выяснению условий споруляции и эффективного выращивания культур этих видов бактерий на искусственных питательных средах. Основным объектом работ служит вид Bac. popilliae как наиболее выраженный энтомопатоген.

Значительные трудности по выращиванию Bac. popilliae на искусственных питательных средах не позволяют всесторонне изучить физиологию питания этих организмов, в частности особенностей их отношения к витаминам. Имеющиеся в литературе сведения не являются достаточно полными, а в ряде случаев являются весьма противоречивыми ([4–5]). Объектами наших исследований явились 5 культур Bac. popilliae, вызывающих типичную молочную болезнь при заражении личинок японского жука. Штаммы 2309, 2309S, 2309M получены из Северной Региональной станции министерства сельского хозяйства США в г. Пеория; штаммы Bac. popilliae I и II—из лаборатории биологической борьбы в Ла Миньере (Франция). Опыты проводились на твердых и жидких питательных средах с использованием в качестве основы панкреатического гидролизата казеина. В контрольных опытах выращивание культур осуществлялось на средах, предложенных Шарпом с соавт. ([6]).

В работах по изучению витаминного питания использовались 11 витаминов группы В в следующих концентрациях (*мкг/мл*): тиамин, рибофлавин, пиридоксин, никотиновая кислота, фолиевая кислота, пантотенат Са, парааминобензойная кислота—1,0; биотин—0,02; инозит, холин—10,0; B_{12}—0,02. Исследования проводились как с отдельными витаминами, так и со смесями их с исключением одного из витаминов.

Испытанные аминокислоты брались в концентрации 3×10^{-2}М. Качественная характеристика влияния витаминов и аминокислот определялась ауксанографическим методом на агаризованных средах. После определения ростовой дефицитности по отношению к указанным соединениям методом титрации на синтетической среде выявлялись пороговые и оптимальные концентрации аминокислот и витаминов для роста испытуемых культур. Результаты проведенных исследований показали, что все изученные нами штаммы Bac. popilliae нуждаются для своего вегетативного роста в присутствии биотина и тиамина, причем зависимость от тиамина является более выраженной. Пороговая концентрация тиамина, необходимая для вегетативного роста Bac. popilliae находится в пределах 10^{-8} — 10^{-9} *мкг/мл*. Оптимальные концентрации тиамина и биотина, необходимые для максимального роста испытанных культур, находятся в пределах: тиамин—100—500 *мкг/л*, биотин—0,1—0,5 *мкг/л*. При добавлении оптимальных концентраций указанных витаминов титр клеток при глубинном выращивании через 22 часа достигал с тиамином 15—17 млн.*мл*, с биотином 12—13 млн.*мл*. Нами проведены специальные опыты с применением авидина, избирательно блокирующего действия биотина, для выявления специфичности изученных штаммов к ростовому действию этого витамина. Данные опытов, приведенные в табл. 1, с достоверностью подчеркивают специфическое ростовое действие биотина на вегетативное развитие Bac. popilliae. В указанных опытах в среду добавлялся биотин в концентрации 2 *мкг/л*. Нами выявлено угнетающее действие рибофлавина на рост всех изученных культур Bac. popilliae. Сводные данные некоторых опытов приведены в табл. 2. Использованная смесь содержала 11 витаминов группы В,

Таблица 1

Рост культуры Bac. popilliae шт. 2309 при различных концентрациях авидина
(Выращивание на качалке при 28° на среде УЕС)

Концентрация авидина /ед./мл/	Оптическая плотность среды при 550 *нм*				
	3 час.	6 час.	20 час.	28 час.	10 суток
0,215	0,065	0,04	0,075	0,09	0,05
0,107	0,045	0,05	0,08	0,08	0,03
0,053	0,06	0,03	0,11	0,1	0,045
0,026	0,045	0,04	0,12	0,14	0,07
0,026	0,05	0,03	0,12	0,12	0,04
0,010	0,045	0,025	0,7	0,85	0,83
0,010	0,05	0,02	0,72	0,9	0,85
0,005	0,045	0,03	0,74	0,96	0,92
0,005	0,054	0,02	0,75	0,94	0,95
0,002	0,05	0,02	0,82	1,0	0,7
Контроль (среда без авидина)	0,04	0,025	0,78	0,95	0,7

причем в одном варианте была испытана смесь без рибофлавина. Титр вегетативных клеток использованных культур при добавлении в среду

смеси витаминов с исключением рибофлавина был выше, а у штамма 2309S и штамма 2309M был вдвое больше, чем в вариантах с рибофлавином.

Изучение влияния аминокислот выявило наличие определенной специфичности действия этих соединений на испытанные культуры Bac. popilliae, а также некоторых штаммовых различий среди изученных форм Bac. popilliae. В наших опытах нам не удалось обнаружить столь широкой зависимости от аминокислот, каковая была установлена опытами других авторов ([5–7]). Сводные данные о характере действия различных аминокислот на вегетативный рост испытанных штаммов приведены в табл. 3. Как показывают результаты опытов, имеются опреде-

Таблица 2

Влияние различных добавок смеси витаминов группы B на рост различных культур Bac. popilliae

(Титр клеток в млн./мл спустя 22 часа при глубинном выращивании при 28°C; учет через 22 часа)

Количество добавленной смеси	Титр клеток в млн./*мл*				
	шт. 2309	шт. 2309	шт. 2309 M	шт. I	шт. II
1 *мл*	9,0	6,5	6,5	10,0	9,0
2 *мл*	11,5	8,5	6,2	10,5	9,0
3 *мл*	8,0	6,5	6,2	7,5	7,5
4 *мл*	7,0	8,0	6,0	7,0	7,0
1 *мл* (без B_2)	10,5	12,5	12,0	11,0	14,0
Контроль (среда без витаминов)	2,26	1,0	0,5	1,75	0,5

Таблица 3

Действие аминокислот на рост культур Bac. popilliae

Штаммы	Ростовое действие	Угнетающее действие
Bac. popilliae NRRL 2309	ала, асп, тир, глу, гли, лиз, норв, норлей	сер, цис
Bac. popilliae 2309S	асп, арг, тир, глу, лиз, норлей, орн	илей, цис
Bac. popilliae 2309 M	ала, арг, асп, тир, норлей, глу, гли, фен, лиз, норв	лей
Bac. popilliae I	ала, арг, асп, глу, гли, лиз, орн, норлей	цис
Bac. popilliae II	ала, глу, гли, лиз, норв, норлей	трео, мет

ленные различия как в характере ростового, так и угнетающего действия аминокислот к различным штаммам Bac. popilliae. Было установлено, что для штамма 2309 стимулирующими аминокислотами являются аспарагин, глутаминовая кислота, тирозин, лизин, норлейцин, норвалин,

аланин, глицин. Угнетающими являются серин, цистеин. Для штамма 2309S стимулирующими являются аспарагин, аргинин, тирозин, глутаминовая кислота, лизин, норлейцин, орнитин. Угнетающими являются изолейцин, цистеин. Рост штамма 2309 M стимулировался аланином, аргинином, аспарагином, тирозином, норлейцином, глутаминовой кислотой, глицином, фенилаланином, лизином, норвалином, а угнетающим для этого штамма является лейцин. Стимулирующими рост штамма I являются аланин, аргинин, аспарагин, глутаминовая кислота, глицин, лизин, орнитин, норлейцин и угнетающим—цистеин. Рост штамма II стимулировался аланином, глутаминовой кислотой, глицином, лизином, норвалином, норлейцином. Угнетающими являются треонин и метионин.

Изложенный материал указывает на наличие определенных характерных особенностей витаминного и аминокислотного питания культур Bac. popilliae с некоторыми отличительными штаммовыми различиями, свидетельствующими об определенной неоднородности этого вида. Представленный материал может явиться определенным подспорьем в успешной разработке оптимального состава искусственных питательных сред для выращивания бактерий Bac. popilliae.

Институт микробиологии
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ բղթակից-անդամ է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, Ջ. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ,
Ս. Ն. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Վիտամիններեի և ամինաթթուների ազդեցությունը Bac. popilliae աճեցման վրա

Հետազոտվել են Bac. popilliae *հինգ կուլտուրաներ, որոնք հանդիսանում են ճապոնական բզեզի այսպես կոչված կաթնային հիվանդությունների հարուցիչներ. Փորձերի արդյունքները ցույց են տվել, որ ուսումնասիրված բակտերիաների բոլոր կուլտուրաներն իրենց վեգետատիվ զարգացման համար պահանջում են բիոտին և թիամին. Առանձին շտամների նկատմամբ հայտնաբերվել է ռիբոֆլավինի ճնշող ազդեցություն. Հաստատվել է, որ որոշ ամինաթթուներ՝ (ալանին, ասպարագին, գլուտամինաթթու, լիզին, նորլեյցին) ունեն աճը խթանող ազդեցություն* Bac. popilliae *զարգացման վրա. Փորձարկված ամինաթթուներից մի քանիսը (սերին, մեթիոնին, ցիստեին, իզոլեյցին, լեյցին) ցուցաբերել են աճը ճնշող ազդեցություն.*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ch. Wyss*, Zntrbl. Bakt. Abt. II, 126, 461 (1971). [2] *О. М. Шведова, Э. Р. Зурабова*, СОНТИ Микробиопром. М., 1972. [3] *Э. К. Африкян*, Успехи микробиологии, № 10, 142, 1975. [4] *K. H. Steinkraus, M. L. Provvidenti*, J. Bacteriol., 75, 38 (1958). [5] *C. J. Sylvester, R. N. Costilow*, J. Bacteriol., 87, 114 (1964). [6] *E. Sharpe* et. al., Appl. Microbiol., 19 (4), 681 (1970). [7] *R. N. Costilow*, et al., Appl. Microbiol., 14, 161 (1966).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1975 5

УДК 595.763.79

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян

Два новых вида жесткокрылых-кокцинеллид из азиатской части СССР (Coleoptera, Coccinellidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 10/III 1976)

1. Chilocorus kirgisicus Iablokoff-Khnzorian sp. nov.

Киргизская ССР: р. Караюкур около Арсланбоба к северу от Советского, собран Г. С. Медведевым 18/VI 1963. Голотип ♂ и аллотип ♀ в Зоологическом ин-те АН СССР в Ленинграде.

Лоб очень мелко и густо, малозаметно точечный на шагренированном фоне. Наличник с узкой передней каймой, его вырезка в 10 раз шире глубины. Поле перед глазами в 5 раз уже длины головы. Верхняя губа коротко волосистая. Последний членик челюстных щупиков вдвое длиннее ширины: рис. 1,*г*. Переднеспинка вдвое шире длины, мелко

Рис. 1. Chilocorus kirgisicus Khnz. sp. nov.
а—общий вид сверху; *б*—то же спереди; *в*—правая передняя лапка; *г*—правый челюстный щупик; *д*—8-й уротергит ♂; *е*—тегмен, латерально и вентрально, *ж*—сифон; *з*—его вершина, *и*—сперматека; *к*—генитальные пластинки.
а, *б*×11; *в*, *ж*×14; *г*, *д*, *е*, *к*×28; *з*, *и*×50

вдавленно и рассеянно точечная на шагренированном фоне, несколько сглаженном к середине диска. Точки отстоят на 1—2 диаметра, по бокам едва крупнее и не гуще. Передний край окаймлен лишь с боков. Передние лопасти спадают почти отвесно, густо волосистые, с закругленным внешним контуром, в 2,5 раза уже длины переднеспинки. Основной край закруглен плавно, с боков с бороздкой, довольно значительно отдаленной от края. Плевры без ямок, но с вдавлениями. Щиток в 20 раз уже тела, слегка длиннее ширины. Надкрылья приподняты бугрообразно (рис. 1, *б*), слегка короче их общей ширины, наибольшей ширины в передней трети, слегка сердцевидные: рис. 1, *а*. Их скат спадает круто, с боков отогнут слабо, но широкой полосой, плечевые бугорки четкие. Точечность слегка мельче, чем на переднеспинке и более рассеянная на гладком фоне, распределена неравномерно, вдоль бокового края втрое крупнее и гуще. Эпиплевры в 6 раз уже тела, со слабыми, продольными вдавлениями. Выступ переднегруди относительно широкий. Грудь голая, почти гладкая, брюшко мелко точечное на более или менее шагренированном фоне. Голени, в особенности передние, узкие и уже, чем у всех прочих палеарктических видов рода, с малозаметным боковым зубчиком: рис. 1, *д*. Коготки с крупным основным зубцом.

Верх черный, голова сверху и снизу желтая у обоих полов, грудь бурая, брюшко и конечности желтые. Передние углы переднеспинки слегка осветлены. На одном из надкрылий может иметься красноватая крапинка. Плевры и эпиплевры черные, узко осветлены вдоль их внутреннего края.

У ♂ анальный стернит без вырезки, 8-й уротергит с зазубренным задним краем. Сифон загнут более, чем на полкруга, его вершина, как обычно у этого рода, извилистая, капсула с крупной и длинной внешней лопастью: рис. 1, *ж, з*. Трубка тегмена узкая, постепенно сужена к остроконечной вершине, выступающей игловидно за вершину парамер. Трабес слабо изогнут (нами изображен отогнутым, т. е. наибольшей длины): рис. 1, *е*.

У ♀, как обычно у этого рода, сперматека округлая и с придатком: рис. 1, *и*. Генитальные пластинки узкотреугольные, в 6 раз длиннее ширины: рис. 1, *к*. Длина 4,3—4,5 *мм*.

От всех прочих палеарктических видов рода отличается уже по внешним признакам. Одноцветно черные переднеспинка и надкрылья при желтом лбе могут еще иметься лишь у Ch. mikado Lewis из Японии и nigrita F. из Восточной Азии /Индии, Китая/. От этих видов наш новый вид можно отличить с помощью следующей таблицы:

1(4) Тело меньше. Надкрылья округлые, менее выпуклые, при осмотре спереди выглядят закругленными меньше, чем на полкруга. Боковые лопасти переднеспинки почти всегда частично желтые.

2(3) Наличник с очень узкой передней каймой, поле перед глазами узкое. Лоб мелкоточечный. Точечность надкрылий мелкая и негустая, слегка сгущена вдоль бокового края. Трубка тегмена в

3 раза длиннее ширины, сильно расширена дистально, к вершине сужена симметрично, с маленькой вырезкой. Длина 3,3—3,7 *мм*.

. . . . . Ch. nigrita F.

3(2) Наличник с толстой передней каймой. Поле перед глазами широкое. Лоб густо грубо точечный. Точечность надкрылий мелкая и негустая, вдоль края сильно сгущенная и грубая. Трубка тегмена в 4 раза длиннее ширины, с асимметричной острой вершиной. Длина 3,9—4,1 *мм* . . . . . .

. . . . . Ch. mikado Lewis

4(1) Тело крупнее. Надкрылья сердцевидные, наибольшей ширины в передней трети, более выпуклые, при осмотре спереди выглядят закругленными параболически: рис. 1,*б*. Переднеспинка черная с едва осветленным передним краем. Наличник с узкой передней каймой. Поле перед глазами довольно широкое. Лоб мелкоточечный. Точечность надкрылий мелкая и негустая, вдоль края сгущенная и грубая. Передние голени уже, чем у двух предыдущих. Трубка тегмента в 6 раз длиннее ширины, симметричная и остроконечная. Длина 4,3—4,5 *мм*.

. . . . . Ch. kirgisicus Khnz. sp. nov.

Поскольку несколько видов этого рода уже успешно применяются в биологическом методе борьбы, и этот вид мог бы оказаться перспективным для той же цели в странах с более или менее холодным климатом.

2. Scymnus (Pullus) kaszablanus Iablokoff-Khnzorian sp. nov.

Сибирь, Томск. Голотип, ♂, и 3 паратипа /из них 2 ♀♀/ в Будапеште, в Естественно-историческом музее Венгрии, 1 паратип, ♂, в Ереване, в Зоологическом институте АН Армянской ССР, все типы с этикеткой: Sibiria, Tomsk, Scymnus sp. coll. Reitter.

Лоб вдвое уже головы, довольно крупно вдавленно точечный на гладком фоне, в среднем точки отстоят на диаметр. Усики 11-члениковые, типичного для рода строения: рис. 2, *б*. Последний членик челюстных щупиков слегка расширен дистально до скошенной вершины. Переднеспинка трапециевидная, слабо сужена кпереди, со слабо вырезанным передним и слабо закругленным боковым краем, несущим толстую выпуклую кайму, передние углы широко закругленные, слабо отогнуты вниз, задние тупые и коротко закругленные. Основание слегка двувыемчатое. Диск в такой же скульптуре, как лоб, с длинной густой слабо приподнятой волосистостью, зачесанной слегка косо вперед. Щиток в 15 раз уже тела. Надкрылья выпуклые, с блестящими выступающими плечевыми бугорками, их точечность слегка крупнее и менее густая, чем на лбу, волосистость длинная, двойная, частично торчащая под углом около 45° и частично прилегающая, эта последняя более густая, зачесана в разные направления (немного как у S. impexus Muls.), вдоль основания косо назад и кнаружи, между передней четвертью и серединой—назад и слегка внутрь, за серединой и вдоль всего бокового края—

косо назад и кнаружи, вдоль всего шва—почти параллельно к нему, вдоль бокового края с бахромой длинных торчащих ресничек. Проборов нигде нет. Эпиплевры волосистые, густо и грубо вдавленно точечные, в 10 раз уже тела. Весь низ довольно мелко и густо точечный на шагренированном фоне. Кили переднегруди цельные и параллельные рис. 2, *г*. Бедренные линии брюшка цельные, параболические, почти достигают заднего края их стернита: рис. 2, *в*. Лапки криптотетрамерные, с острым основным зубцом.

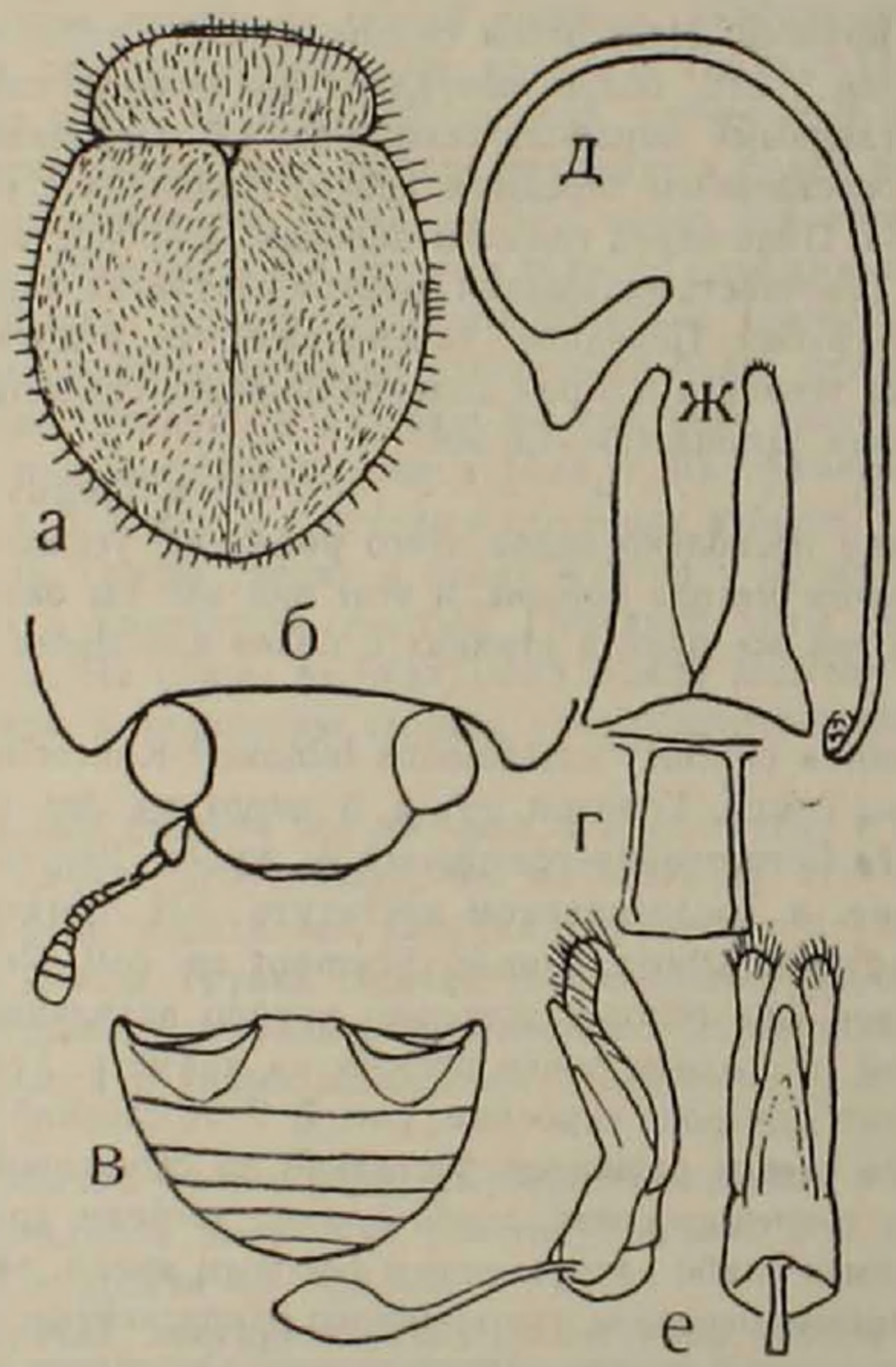


Рис. 2. Scymnus kaszabianus Khnz. sp. nov.
а—общий вид сверху; *б*—голова сверху; *в*—брюшко; *г*—кили переднегруди; *д*—сифон; *е*—тегмен, латерально и вентрально; *ж*—генитальные пластинки.
а, *в*×20; *б*×40; *г*—*ж*×70

У ♂ задний край анального стернита выпрямлен. Сифон с длинной узкой сильно изогнутой трубкой, у вершины расширенной в луковку. Капсула двухлопастная: рис. 2, *д*. Трубка тегмена узко ланцетовидная, далеко не достигает вершины выпрямленных парамер. Трабес короткий, сильно утолщен дистально: рис. 2, *е*. Генитальные пластинки ♀: рис. 2, *ж*.

Верх черно-бурый, у ♂ голова, переднеспинка и щиток желто-бурые у ♀ черные. Низ и конечности желтые, волосистость серебристая. Длина 2—2,5 *мм*. Рис. 2, *а*.

Этот своеобразный вид по всем признакам типичный представитель подрода Pullus Mls. рода Scymnus. Kug., но отличается от всех прочих представителей рода торчащей волосистостью надкрылий, а также формой переднеспинки, с необычно толстой боковой каймой и слабо отогнутыми вниз передними углами. Своеобразно также расположение волосков на надкрыльях, которые на заднем скате всюду зачесаны назад (а не косо кнаружи).

Вид назван в честь известного венгерского энтомолога З. Касаба, директора Естественно-исторического музея Венгрии, любезно приславшего нам этот вид на определение вместе с богатым материалом по семейству кокцинеллид.

Зоологический институт
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՅԱԲԼՈՒԿՈՎ-ԽՆԶՈՐՅԱՆ

Զատկաբզեզների երկու նոր տեսակ ՍՍՀՄ-ի Ասիական մասից
(Coleoptera, Coccinellidae)

Նկարագրված է զատկաբզեզների 2 նոր տեսակ, ալդ թվում՝

1. Chilocorus kirgisicus Khnz., sp. nov. *Կիրգիզիայից, որը հնարավոր է լինի հետաքրքրական բիոլոգիական պայքարում, քանի որ ալս սեռի մի քանի տեսակներ ալդպես մեծ հաջողությամբ օգտագործվում են ալդ նպատակով։*

2. Scymnus (Pullus) kaszabianus Khnz., sp. nov. *Տոմսկից։ Յուրօրինակ տեսակ է, խիստ տարբերվում է իր բոլոր սեռակիցներից, հայտնաբերվել է Հունգարիայի Ազգային թանգարանի չորոշված կոլեկցիաներում և անվանվել է նրա դիրեկտորի անունով։*

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ LXII ՀԱՏՈՐԻ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Տ. Ն. Հարությունյան — *Մասնակի անծանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի սեփական արժեքների թվի ասիմպտոտիկ բաշխումը* 3

Ֆ. Ա. Շամոյան — *Ներդրման թեորեմ II — հարմոնիկ ֆունկցիաների տարածություններում և մի քանի կիրառություններ* 10

Ա. Ս. Հարությունյան — *n+s պարամետրերի կախված II — պատիկ ինտեգրալների երկրաչափություն* 15

Ա. Պ. Գրիգորյան — *Տափակ ֆունկտորներ և ռեգուլյար կատեգորիաներ* 65

Ա. Ն. Հայրապետյան, Ա. Ն. Կանատնիկով — *Անծանցյալով հանրագումարելի ֆունկցիաների բազմության մասին* 72

Մ. Ա. Ակիվիս, Ա. Վ. Զաիմագյան — *Եվկլիդյան տարածության ենթաբազմաձևությունների մասին, որոնք ունեն հարթ նորմալ կապակցություն* 75

Յ. Է. Մելիք-Ադամյան — *Կանոնիկ դիֆերենցիալ օպերատորների մի հակադարձ խնդրի մասին* 82

Տ. Ն. Հարությունյան — *Ինքնահամալուծ առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի սպեկտրի ասիմպտոտիկան* 88

Ֆ. Հ. Գրիգորյան — *Արտադրանքի որակի որոշման խնդիրը* 129

Է. Ա. Դանիելյան, Ն. Ս. Զեմլյանոյ — *Փոքր ծանրաբեռնվածության դեպքում Gl/Gi/n—r տիպի սիստեմների ասիմպտոտիկ հետազոտում* 132

Վ. Մ. Նղիգարյան — *Մի ինտերպոլյացիոն խնդրի մասին* 141

Ա. Ի. Պետրոսյան — *Հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ բազմությունների էքստրեմալ կետերի մասին* 148

Յու. Ի. Հակոբյան — *Երկու չափանի գծային պարաբոլիկ հավասարումների համար վարիացիոն-տարրերական սխեմայի դուգամիտության արագությունը L_2 տարածություններում. Տարրերական հավասարումների իտերացիոն լուծումը* 193

Ն. Ս. Մկրտչյան — *Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերականգման մասին, որոշ միակության բազմություններ վրա նրա ունեցած արժեքներով* 199

Ղ. Ս. Ղազարյան — *L_p, $1 < p < \infty$-ում բազիսային հաջորդականությունների մուլտիպլիկատիվ լրացումը մինչև L_p-ի բազիսը* 203

Ֆ. Ա. Թալալյան — *Երկու հետևանք Պելի-Ջիգմունդի անհավասարությունից* 210

Յու. Մ. Մովսիսյան — *Ունիվերսալ հանրահաշիվների հոմոմորֆիզմների տեսության շուրջը* 214

Է. Ա. Դանիելյան, Ն. Ս. Զեմլյանոյ — *«Ավրագ» սպասարկման դեպքում Gl/Gi/n—r տիպի սիստեմների ասիմպտոտիկ հետազոտում* 251

Տ. Է. Փիլիպոսյան — *Դասավորության մի խնդրի մասին* 265

Վ. Մ. Մարտիրոսյան — *Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների և պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներից կազմած սիստեմների միակության մասին* 269

Ն. Գ. Վալենի, Ի. Ի. Կուբրանյան — *Պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնական սիստեմի բերման մասին* 275

Յու. Մ. Մովսիսյան — *Ասոցիատիվության գերնույնություններ կիսախմբային համակարգերում* 282

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Հ. Ալաջյան — *Տեղափոխությունների, զուգորդությունների և տեղադրությունների բազմությունների թվարկման ալգորիթմների մասին* 23

Ա. վ. Պետրոսյան, Շ. Ն. Բոզոյան—*Սխեմաների հուսալիության բարձրացման մի տրամաբանական մեթոդի մասին* 29
Ա. Հ. Ազատյան—*Ամեն մի ամբողջական n-ի չկարգավորված տրոհումների լրիվ բազմության թվարկման ալգորիթմի մասին* 94
վ. Դ. Շչիգլիկ, Ժ. Ս. Նալբանդյան—*Պրոբլեմային-կողմնորոշված պրոցեսոր դիտարկման արդյունքների էֆեկտիվ մշակման համար* 100
Ա. Հ. Ազատյան, Ա. Ա. Բալասանյան—*Ամեն մի ամբողջական n-ի բոլոր չկարգավորված տրոհումների թվարկման ալգորիթմի ծրագրային իրականացում* . . . 287

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Հ. Գալոյան, Ա. Ա. Խաչատրյան—*Տարամոդուլ նյութից պատրաստված հենձանների ժոռումը* 151

ԱՒՏԱՏԻԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Ս. Տոնոյան, Հ. Ղ. Միքայան—*Ուղղաձիգ վերջավոր երկարության ճեղքով քուլյացված կիսահարթության համաչափ ճնշումը երկու միատեսակ կոշտ դրոշմներով* . 36
Ա. Ա. Բաբլոյան, Ն. Օ. Դուլմանյան—*Առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը երկու հատած սեպերից բաղկացած տիրույթի համար* 158

ՖԻԶԻԿԱ

Ս. Ա. Խուռումյան—*S-տիպի դիոդների ստատիկ և իմպուլսային բնութագծերը ցածր էներգիաներով էլեկտրոնների ազդեցության տակ* 166
Գ. Մ. Հարությունյան, Խ. Վ. Ներկարարյան—*Բազմաֆոտոն Շտարկ-էֆեկտը լափային թվանտացված կիսահաղորդչում* 222
Ա. Ա. Իսաև, Մ. Ա. Ղազարյան, Մ. Ն. Մովսեսյան, Գ. Գ. Պետրուշ, Ա. Կ. Սահակյան, Ա. Մ. Խանբեկյան—*Երկրորդ հարմոնիկի գրգռումը ներկանյութի վրա կրկնման մեծ հաճախությամբ աշխատող և ըստ ալիքի երկարության վերալարվող լազերի ճառագայթման օգնությամբ* 294

ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ա. Թ. Բարայան, Կ. Մ. Թաճմազյան, Ռ. Ս. Մկրտչյան—*3(4)-մեթիլ-4(3) դիալկիլամինոմեթիլֆենոլների ստացման նոր ուղի* 105
Ա. Թ. Բարայան, Լ. Ա. Գամբարյան, Վ. Ա. Գաբրիելյան—*Ջորրոլդային ամոնիումային աղերի վերախմբավորում-ճնղքումը* 109
Գ. Թ. Մարտիրոսյան, Հ. Յ. Ղազարյան, Ս. Հ. Միսարյան—*N-բենզիլ-N-(2,2-դիմեթիլ-4-ֆենիլբուտիլիդեն) ամինի փոխարկումներն ալկալիական մետաղների ազդեցությամբ* 112
Մ. Լ. Պետրոսյան, Լ. Մ. Ջանփոլադյան, Ն. Մ. Բեյլերյան—*Կոնյակի հասունացման պրոցեսների ուսումնասիրությունը էլեկտրոնային պարամագնիսային ռեզոնանսի մեթոդով* 173
Ա. Թ. Բարայան, Ս. Տ. Քոչարյան, Ռ. Ս. Ոսկանյան—*Ջհագեցած 1-դիալկիլամինոկետոնների սինթեզը* 228

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՔԻՄԻԱ

Վ. Մ. Թառայան, Ա. Ն. Պողոսյան—*Հիմնային ներկանյութերով գալիումի էքստրակցիայի քիմիզմի վրա քլվության ազդեցության մասին* 115

ԲՐԿՐԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Բ. Ա. Հայրապետյան—*Նոր սողյալներ Հայաստանի պլեյստոցենի ֆաունայի մասին* 295

ՀԱՆՔԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Ա. Կոչոյան—*Ափալբիտներում և գալենիտներում տարր-խառնուրդների տեղայաշխման միատատիպական պոնալականության առանձնահատկությունների մասին* . 231

ՕԳՏԱԿԱՐ ՀԱՆԱԾՈՆԵՐ

Մ. Ա. Սարյան, Լ. Պ. Յաշվիլի—*Սևանի լեռնաշղթայի կայծքարա-հրաբխածին ֆորմացիայի ապարներում մանգանային հանքանյութերի երևակման մասին* . . 119

Կ. Մ. Մուրադյան—*Ֆլյուորիտ-բարիտ հազվագյուտհողային հանքանյութի երևակում Փոքր Կովկասի Ալավերդի-Ղափանի ստրուկտուրա-ֆորմացիոն մետաղածնային գոտում (Հայկական ՍՍՀ)* 237

ՄԻԿՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

Ա. Ջ. Նալբանդյան, Է. Ա. Հովսեփյան, Մ. Վ. Հովսեփյան, Մ. Դ. Ստեփանյան—*Պալարաբակտերիաների ածխածնային սննդառության յուրահատկության մասին* . . 43

Ն. Ն. Մակարովա, Ս. Փ. Փալիկյան—*Էթանոլամինի ազդեցությունը* Candida *ցեղի շաքարասնկերում ֆոսֆորի տարբեր ձևերի պարունակության վրա* 122

Է. Գ. Աֆրիկյան, Զ. Դ. Ավագյան Ս. Ն. Բաղդասարյան—*Վիտամինների և ամինաթթուների ազդեցությունը* Bas. popilliae *աճեցման վրա* 301

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Ա. Ա. Սիմոնյան, Գ. Ա. Գևորգյան, Ռ. Պ. Ստեփանյան, Լ. Հ. Ոսկանյան—*Մի քանի ֆերմենտների ակտիվության համեմատական բնութագրությունը հավի սրտի միտոքոնդրիաներում օնտոգենեզում* 46

Գ. Վ. Ափրիկյան, Ժ. Ա. Պառոնյան, Գ. Հ. Մկրտչյան, Է. Գ. Աղունց, Ս. Ս. Մուսանյան—*Սպիտակ առնետների ուղեղի կոպիտ միտոքոնդրիալ ֆունկցիայի ենթաֆրակցիաների սպիտակուցների ամիդ խմբերի քանակական փոխհարաբերությունը* . . 50

Ռ. Բ. Բաղալյան, Ա. Ա. Սիմոնյան, Ա. Պ. Հակոբյան—*Էներգետիկ փոխանակության մի քանի տեղաշարժերը հավերի լյարդում օնտոգենեզում* 54

Ա. Ս. Կիրակոսովա, Ս. Պ. Մանչիկյան, Ա. Ա. Գալոյան—*Արյան պլազմայի կինինային սիստեմի ակտիվության նեյրոէնդոկրինային կարգավորման մեխանիզմը* . . 126

Վ. Ա. Շահինյան, Գ. Հ. Բունյաթյան, Գ. Վ. Ափրիկյան—*ԱԴՖ-ի նշանակությունը α-կետոգլուտարաթթվի փոխանակության մեջ սպիտակ առնետների ուղեղի միտոքոնդրիաներում ծերացման ժամանակ* 178

Ա. Ա. Սիմոնյան, Ռ. Բ Բաղալյան, Ա. Պ. Հակոբյան—*Լյարդի միտոքոնդրիաների ԱՏՓազաների ակտիվության տեղաշարժերը դետերգենտների ազդեցության տակ թռչունների օնտոգենեզում* 243

Գ. Հ. Բունյաթյան— *α-կետոգլուտարաթթվի օքսիդացումը և նրա ամինացումը սպիտակ առնետների ուղեղի միտոքոնդրիաներում ծերացման ժամանակ ԱԴՖ-ի ներկայությամբ* 247

Ժ. Ս. Գևորգյան, Ա. Ս. Հովհաննիսյան, Կ. Դ. Բեջանյան—*Բջջային թաղանթների կառուցվածքը և ամինաթթուներից ամիակի առաջացումն երիկամների կեղևային շերտում* 251

ԱԳՐՈՔԻՄԻԱ

Ս. Ա. Մարուքյան—*Ֆոսֆորի դերը խաղողի վազի ցրտադիմացկունության հարցում* 59

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Ն. Կանդիբինա, Վ. Ա. Ռիխտեր— Rhagoletis Loew (Diptera, Tephritidae) *խայտաթև ճանճերի նոր տեսակ Հյուսիսային Կովկասից* 184

Ա. Դ. Կարապետյան—*Ընդակեր բզեզների նոր տեսակ Հայկական ՍՍՀ-ից* (Coleoptera, Bruchidae) 189

Ս. Մ. Յաբլոկով-Խնձորյան—*Զատկաբզեզների երկու նոր տեսակ ՍՍՀՄ-ի Ասիական մասից* (Coleoptera, Coccinellidae) 305

CONTENTS OF LXII VOLUME

p.

MATHEMATICS

T. N. Harutyounian—The asymptotic behavior of the number of proper values of the system of partial differential equations 3

F. A. Shamoyan—The embending theorem in space of *n*—harmonic functions and some applications 10

S. K. Harutyounian—The geometry of the *n*-multiple integrals depending on $n+s$ parameters 15

A. G. Grigorian—Flat functors and regular categories 65

A. N. Hatrapetian, A. N. Canatnicov—The set of functions with a summable derivative 72

M. A. Akivis, A. B. Chakmasian—On submanifolds of Euclidean space with a flat normal connection 75

F. E. Melik-Adamian—A reverse problem for canonical differential operators 82

T. N. Harutyunian—The asymptotic of the spectra of the self-adjoining system of differential equations of the first order 88

F. A. Grigorian—The quality estimation of products 129

E. A. Danielian, N. S. Zemlianoy—Asymptotic analysis of Gl/G/r/n—r systems in conditions of a small load 132

V. M. Edigarian—On a problem of interpolation 141

A. I. Petrosian—On the extreme points of some sets of holomorphic functions 148

Yu. R. Hakobian—The rate of convergence of variation-difference schemes for two-dimensional linear parabolic equations in L_2 space. The iteration solution of differential equations 193

E. S. Mkrtchian—On recovery of analytic function by its values on some sets of uniqueness. 199

Gh. S. Ghazarian—On the multiplicative completion of basic sequences in L_p, $1 < P < \infty$, until bases in L_p. 203

F. A. Talalian—Two corollaries of Paley-Zygmund inequality . . . 210

Y. M. Movsisian—A theory of homomorphizm of universal algebras . . 214

E. A. Danielian, N. S. Zemlianoy—Asymptotic analysis of /Gl/G/r/n—r systems with „Fast" serving 257

T. E. Piliposian—On one of the problems of placing 265

V. M. Martirosian—On the closeness of systems of Mittag-Leffler type functions and systems of simpliest rational fractions 269

K. G. Valeev, I. R. Karganian—The reduction of the canon system of linear differential equations with periodic coefficients 275

Yu. M. Movsisian—The associativitity of hyperidentities in half-group systems 282

APPLIED MATHEMATICS

A. A. Azatian—On algorythms for the enumeration of elements of whole sets such as *n*-permutations with repetitions, combinations from *n* elements with *m* arrangements from *n* elements with *m* 23

A. V. Petrossian, Sh. E. Bozoyan—On a logical method for increasing the reliability of schemata 29

A. A. Azatian—About an algorhythm of enumeration of all unorderly partitions of any integer *n* 94
V. D. Shiglik, J. S. Nalbandian—A problem—oriented processor for data analysis 100
A. A. Azatian, A. A. Balasanian—Program realization of algorithm for the enumerated partitioning of and whole n 287

MECHANICS

A. G. Galoyan, A. A. Khachatrian—Transversal bending of beams made of different modulus material 151

THEORY OF ELASTICITY

V. S. Tonoyan. H. F. Minassian—About symmetrical pressure of two rigid equal punches in the elastic semi-infinite plane with a vertical finite crack 36
A. A. Babloyan, N. O. Gulkanian—A plane problem of the theory of elasticity for a region, consisting of two topped wedges 158

PHYSICS

S. A. Tarumyan—Static and pulse characteristics of S-diodes under the action of low-energy electrons 166
G. M. Harutunian, H. V. Nercararian—Many-photons Stark effect in a dimensional-quantised semiconductor 222
A. A. Isaev, M. A. Kazarian, M. E. Movsesian, G. G. Petrash, A. K. Sahakian, A. M. Khanbekian—Second harmonic excitation by radiation of tunable dye laser acting with repetition rate 293

ORGANIC CHEMISTRY

A. T. Babayan, K. Ts. Tahmazian, R. S. Mkrtchian—A new method of synthesis of 3-(4)-methyl-4(3)-dialkyl-aminomethyl-phenols 105
A. T. Babayan, L. Kh. Gamburian, V. A. Paronian—Regrouping-splitting of quaternary ammonium salts 109
G. T. Martirossian, H. Ts. Kazarian, S. O. Misarian—The transformation of N-benzyl-N-(2,2-dimethyl-4-phenylbutylidene) amines by alkali metals . . 112
Ts. L. Petrosian, L. M. Djanpoladian, N. M. Beylerian—The Study of the process of Cognac ageing by the electron paramagnetic resonance method . 173
A. T. Babayan, S. T. Kocharian, V. S. Voskanian—Synthesis of unsaturated α-dialkylaminoketones. 228

ANALYTICAL CHEMISTRY

V. M. Tarayan, A. N. Poghossian—The influence of activity on the chemism of extraction with basic dyes of gallium 115

GEOLOGY

T. A. Hairapetian—Recent data of the Pleistocene Fauna of Armenia 296

MINERALOGY

A. A. Kodjoyan—About the signs of the one-stage zonality distribution of the element-additions in the Sphalerites and Galenites 231

ORE DEPOSITS

M. A. Satian, L. P. Yashvili—Manganese ores in rocks of the siliceous—volcanic formation on the Sevan ridge 119

K. M. Mouradian—The new fluorine-barite-rare-earth ore manifestation in the Alaverdi-Kafan structural-formation metallogenic zone of Minor Caucasus • 237

MICROBIOLOGY

A. D. Nalbandian, E. A. Houseplan, M. V. Houseplan and M. D. Stepanian—On the specificity of carbon nutrition of rhizobia • • • • • • 43

E. N. Makarova, S. P. Palikian—Effect of ethanolamine on the contents of different forms of phosphorus in the yeasts of the genus Candida • • • 122

E. G. Afrikian, Z. G. Avakian, S. H. Bagdasarian—On the influence of vitamins and aminoacids on the growth of Bac. popilliae • • • • • • 301

BIOCHEMISTRY

A. A. Simonian, G. A. Gevorkian, R. A. Stepanian, L. H. Voskanian—Comparative characteristics of the activity of some enzymes in heart mitochondria of hen in ontogonesis • • • • • • • • • • • • • • • 46

G. V. Apriklan, J. A. Paronian, G. H. Mkrtchian, E. G. Aduns, S. S. Musaelian—The comparative levels of protein amide nitrogen in the subfractions of the rat brain crude mitochondrial fraction • • • • • • • • • 50

R. B. Badalian, A. A. Simonyan, A. P. Akopian—Some change in the energetic metabolism of hen liver in ontogenesis • • • • • • • • 54

A. S. Kirakosova, S. P. Manjikian, A. A. Galoyan—On the mechanism of neuro endocrinological regulation of the kinin system activity in blood • • 126

V. A. Shahinian, G. H. Buniatian, G. V. Apriklan—The significance of ADP in α-keloglutaric acid metabolism in mitochondria of rat brain in senescence • • • • • • • • • • • • • • • • • • 178

A. A. Simonian, R. B. Badalian, A. P. Akopian—Changes in the activation of the various ATPases in mithochondria of liver under the influence of detergents in ontogenesis of birds. • • • • • • • • • • • • • 243

G. H. Buniatian—Oxidation and reductive amination of α-keloglutic acid in the presence of ADP in the brain mitochondria of senile rats. • • • • 24

J. S. Gevorkian, A. S. Oganesian, K. D. Bedjanian—Structure organization of cell membrans and formation of ammonia from amino acids in renal cortex. 251

AGROCHEMISTRY

S. A Marutyan—On the role of phosphorus in the frost-resistance of vines 597

ENTOMOLOGY

M. N. Kandibina, V. A. Richter—New species of the fruit flies of the genus Rhagoletis Loew (Diptera, Tephritidae) from the North Caucasus • • • 184

A. P. Karapetian—A new species of bruchidae from Armenia (Coleoptera, Bruchidae) • 189

S. M. Yablokoff-Khnzorian——Two new species of lady-beetles from the Asiatic part of the USSR • • • • • • • • • • • • • • • 305

СОДЕРЖАНИЕ LXII ТОМА

Стр.

МАТЕМАТИКА

Т. Н. Арутюнян—Асимптотическое распределение числа собственных значений системы дифференциальных уравнений в частных производных . . 3

Ф. А. Шамоян—Теория вложения в пространствах n-гармонических функций и некоторые приложения 10

С. Х. Арутюнян—Геометрия n-кратных интегралов, зависящих от $n+s$ параметров 15

А. Г. Григорян—Плоские функторы и регулярные категории 65

А. Н. Айрапетян, А. Н. Канатников—О множестве функций с суммируемой производной 72

М. А. Акивис, А. В. Чакмазян—О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью 75

Ф. Э. Мелик-Адамян—Об одной обратной задаче для канонических дифференциальных операторов 82

Т. Н. Арутюнян—Асимптотика спектра самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка 88

Ф. А. Григорян—Задача определения качества изделий 129

Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной—Асимптотический анализ системы $GI/G/r/n-r$ в условиях малой загрузки 132

В. М. Едигарян—Об одной интерполяционной задаче 141

А. И. Петросян—О крайних точках некоторых множеств голоморфных функций 148

Ю. Р. Акопян—Скорость сходимости в L_2 вариационно-разностных схем для двумерных линейных параболических уравнений Итерационное решение разностных уравнений 193

Е. С. Мкртчян—О восстановлении голоморфной функции по ее значениям на некоторых множествах единственности 199

К. С. Казарян—О мультипликативном дополнении базисных последовательностей L_p, $(1<P<\infty)$ до базисов в L_p 203

Ф. А. Талалян—Два следствия из неравенства Пели—Зигмунда . . . 210

Ю. М. Мовсесян—К теории гомоморфизмов универсальных алгебр . . 214

Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной—Асимптотический анализ системы $GI/G/r/n-r$ при «быстром» обслуживании 257

Т. Э. Пилипосян—Об одной задаче размещения 265

В. М. Миртиросян—О замкнутости систем функций типа Миттаг—Деффлера и систем простейших рациональных дробей 269

К. Г. Валеев, И. Р. Карганян—О приведении канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами . . 275

Ю. М. Мовсисян—Сверхтождества ассоциативности в системах полугрупп .282

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян—Об алгоритмах для перечисления элементов полных множеств: n-перестановок с повторениями, сочетаний из n элементов по m размещений из n элементов по m 23

А. В. Петросян, Ш. Е. Бозоян—Об одном логическом методе повышения надежности схем 29

А. А. Азатян—Об одном алгоритме для перечисления всех неупорядоченных разбиений всякого целого *n* 94
В. Д. Шиглик, Ж. С. Налбандян—Проблемно-ориентированный процессор для эффективной обработки результатов наблюдений 100
А. А. Азатян, А. А. Баласанян—Программная реализация алгоритма для перечисления разбиения всякого целого *n* 287

МЕХАНИКА

А. Г. Галоян, А. А. Хачатрян—Поперечный изгиб балок, изготовленных из разномодульного материала 151

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян, А. Ф. Минасян—О симметричном вдавливании двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость с вертикальным конечным разрезом. 36
А. А. Баблоян, Н. О. Гулканян—Плоская задача теории упругости для области, составленной из двух усеченных клиньев 158

ФИЗИКА

С. А. Тарумян—Статические и импульсные характеристики S-диодов при воздействии электронов низких энергий 166
Г. М. Арутюнян, Х. В. Неркарарян—Многофотонный эффект Штарка в размерно-квантовом полупроводнике 222
А. А. Исаев, М. А. Казарян, М. Е. Мовсесян, Г. Г. Петраш, А. К. Саакян, А. М. Ханбекян—Возбуждение второй гармоники излучением перестраиваемого лазера на красителе, работающего с большой частотой повторения 293

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Т. Бабаян, К. Ц. Тагмазян, Р. С. Мкртчян—Новый путь синтеза 3(4)-метил-4(3)-диалкиламинометил-фенолов 105
А. Т. Бабаян, Л. Х. Гамбурян, В. А. Паронян—Перегруппировка-расщепление четвертичных солей аммония 109
Г. Т. Мартиросян, А. Ц. Казарян, С. О. Мисарян—О превращениях N-бензил-N-(2,2-диметил-4-фенил-бутилиден) амина под действием щелочных металлов 112
Ц. Л. Петросян, Л. М. Джанполадян, Н. М. Бейлерян—Изучение процессов созревания коньяка методом электронного парамагнитного резонанса 173
А. Т. Бабаян, С. Т. Кочарян, В. С. Восканян—Синтез непредельных α-диалкиламинокетонов 228

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. М. Тараян, А. Н. Погосян—О влиянии кислотности на химизм экстракции галлия с основными красителями 115

ГЕОЛОГИЯ

Т. А. Айрапетян—Новые данные о фауне плейстоцена Армении 296

МИНЕРАЛОГИЯ

А. А. Коджоян—О признаках одностадийной зональности распределения элементов примесей в сфалеритах и галенитах 231

ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ

М. А. Сатиан, Л. П. Яшвили—О проявлении марганцевых руд в породах кремнисто-вулканогенной формации Севанского хребта 119
К. М. Мурадян—Новое проявление флюорит-барит-редкоземельных руд в Алаверди-Кафанской структурно-формационной металлогенической зоне Малого Кавказа (Армянской ССР) 237

МИКРОБИОЛОГИЯ

А. Дз. Налбандян, Э. А. Овсепян, М. В. Овсепян, М. Д. Степанян—О специфике углеродного питания клубеньковых бактерий 43

Е. Н. Макарова, С. П. Паникян—Влияние этаноламина на содержание различных форм фосфора у дрожжей рода Candida 122

Э. К. Африкян, З. Г. Авакян, С. Н. Багдасарян—О влиянии витаминов и аминокислот на рост Bac. popililae 302

БИОХИМИЯ

А. А. Симонян, Г. А. Геворкян, Р. А. Степанян, Л. О. Восканян—Сравнительная характеристика активности некоторых ферментов в митохондриях сердца кур в онтогенезе 46

Г. В. Априкян, Ж. А. Паронян, Г. А. Мкртчян, Э. Г. Адунц, С. С. Мусаелян—Количественное соотношение амидных групп белков субфракций грубой митохондриальной фракции головного мозга крыс. 50

Р. Б. Бадалян, А. А. Симонян, А. П. Акопян—Некоторые сдвиги в энергетическом метаболизме в печени кур в онтогенезе 54

А. С. Киракосова, С. П. Манджикян—К механизму нейроэндокринной регуляции активности кининовой системы плазмы крови 126

В. А. Шагинян, Г. Г. Бунятян, Г. В. Априкян—Значение АДФ в метаболизме α- кетоглутаровой кислоты в митохондриях мозга белых крыс при старении. 178

А. А. Симонян, Р. Б. Бадалян, А. П. Акопян—Сдвиги в активности различных АТРаз митохондрий печени под влиянием детергентов в онтогенезе птиц . 243

Г. Г. Бунятян—Окисление и восстановительное аминирование-кетаглутаровой кислоты в митохондриях мозга белых крыс при старении в присутствии АДФ. 247

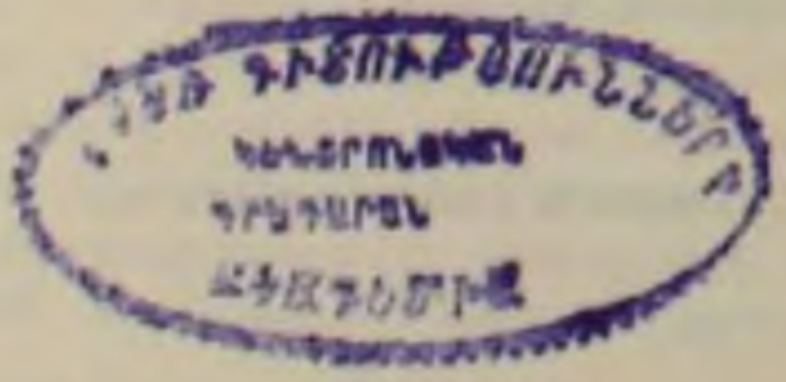
Ж. С. Геворкян, А. С. Оганесян, К. Д. Беджанян—Структурная организация клеточных мембран и образование аммиака из аминокислот в корковом слое почек 251

АГРОХИМИЯ

С. А. Марутян—К вопросу о роли фосфора в морозоустойчивости виноградной лозы 59

ЭНТОМОЛОГИЯ

М. Н. Кандыбина, В. А. Рихтер— Новый вид мух-пестрокрылых Rhagoletis Loew (Diptera Tephritidae) с Северного Кавказа 184

А. П. Карапетян—Новый вид жуков зерновок из Армянской ССР (Coleoptera, Bruchidae) 189

С. М. Яблоков-Хнзорян—Два новых вида жесткокрылых-кокцинеллид из азиатской части СССР (Coleoptera, Coccinellidae) 305