

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Յ Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LXII, № 4

1976

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՐԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկե-  
տու (պատ. Խառնուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳՆ րգրակից-անդամ, Ա. Թ. ՈՒՐԱ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳՆ ակադեմիկոս, Հ. Կ. ՐՈՒՆ-  
ՅԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳՆ ակադեմիկոս, Ա. Ա.  
ԲԱԼԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳՆ րգրակից-անդամ,  
Վ. Մ. ԹԱԻԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳՆ րգրակից-ան-  
դամ, Վ. Հ. ՀԱՐԱՐՁՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս,  
Վ. Հ. ԿԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳՆ ակադեմիկոս  
(պատ. Խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ԿՐԱՎՈՒՐ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳՆ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,  
ՀՍՍՀ ԳՆ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի)  
Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳՆ րգրակից-անդամ,  
Ո. Մ. ՍԱՊՈՆՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳՆ րգրակից-  
անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ  
ԳՆ րգրակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳՐ րգրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.  
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.  
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.  
АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик  
АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-  
мик АН АрмССР, Е. О. КАЗАРЯН, ака-  
демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),  
И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм  
ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН  
АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,  
чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-  
ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-  
ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.  
ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.  
ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,  
В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН  
АрмССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Կ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Յու. Ռ. Հակոբյան—Երկու շափանի գծային պարարոյիկ հավասարումների համար վարիացիոն-տարրերական սխեմայի զուգամիտության արագությունը  $L_2$  տարածությունում: Տարրերական հավասարումների իտերացիոն լուծումը . . . . . 193

Խ. Ս. Մկրտչյան—Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերականգման մասին, որոշ միակության բազմությունների վրա նրա ունեցած արժեքներով . . . . . 199

Ղ. Ս. Ղազարյան— $L_p, 1 < p < \infty$ -ում բազիսային հաջորդականությունների մուլտիպլիկատիվ լրացումը մինչև  $L_p$ -ի բազիսը . . . . . 203

Ֆ. Ա. Խալալյան—երկու հետևանք Պելի-Ջիզմունդի անհավասարությունից . . . . . 210

Յու. Մ. Մովսիսյան—Ունիվերսալ հանրահաշիվների հոմոմորֆիզմների տեսության շուրջը . . . . . 214

ՖԻԶԻԿԱ

Կ. Մ. Հարությունյան, Խ. Վ. Ներկարարյան—Քաղմաֆոտոն Նտարկ-էֆեկտը շափային թվանտացված կիսահաղորդչում . . . . . 222

ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ա. Թ. Բարայան, Ս. Տ. Գոչարյան, Ռ. Ս. Սեկանյան—Զհագեցած  $\alpha$ -դիալկիլամինոկետոնների սինթեզը . . . . . 228

ՀԱՆՔԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Ա. Կոթոյան—Սֆայերիտներում և գալենիտներում տարր-խառնուրդների տեղարաշխման միաստադիական գոնալականության առանձնահատկությունների մասին . . . . . 231

ՕԿՏԱԿԱՐ ՀԱՆԱԾՈՆԵՐ

Կ. Մ. Մուրադյան—Ֆլյուորիտ-բարիտ հազվագյուտ հողային հանքանյութի երևակում Փոքր Կովկասի Այավերդի-Ղափանի ստրուկատուր-ֆորմացիոն մետաղածնային գոտում (Հայկական ՍՍՀ) . . . . . 237

ՐԻՈՔԻՄԻԱ

Ա. Ա. Սիմոնյան, Ռ. Ռ. Բաղսլյան, Ա. Պ. Հակոբյան—Լյարդի միտոքոնդրիաների ԱՏՔազաների ակտիվության տեղաշարժերը դետերգենտների ազդեցության տակ թրոչունների օնտոգենեզում . . . . . 243

Կ. Հ. Բունյալյան— $\alpha$ -կետոգլուտարաթթվի օքսիդացումը և նրա ամինացումը սրպիտակ աունետների ուղեղի միտոքոնդրիաներում ձերացման ժամանակ ԱԴՅ-ի ներկայությամբ . . . . . 247

Փ. Ս. Կեվոբյան, Ա. Ս. Հովհաննիսյան, Կ. Գ. Բեջանյան—Բջջային թաղանթների կառուցվածքը և ամինաթթուներից ամիակի աուսջացումն երիկամների կեղևային շերտում . . . . . 251

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
<b>МАТЕМАТИКА</b>	
Ю. Р. Аколян—Скорость сходимости в $L_2$ вариационно-разностных схем для двумерных линейных параболических уравнений. Итерационное решение разностных уравнений . . . . .	193
Е. С. Мкртчян—О восстановлении голоморфной функции по ее значениям на некоторых множествах единственности . . . . .	199
К. С. Казарян—О мультипликативном дополнении базисных последовательностей $L_p$ ( $1 < p < \infty$ ) до базисов в $L_p$ . . . . .	203
Ф. А. Талалян—Два следствия из неравенства Пелли—Зигмунда . . . . .	210
Ю. М. Мовсисян—К теории гомоморфизмов универсальных алгебр . . . . .	214
<b>ФИЗИКА</b>	
Г. М. Арутюнян, Х. В. Неркарарян—Многофотонный эффект Штарка в размерно-квантованном полупроводнике . . . . .	222
<b>ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ</b>	
А. Т. Бабаян, С. Т. Кочирян, В. С. Восканян—Синтез непредельных $\alpha$ -диалкиламинокетонсв . . . . .	228
<b>МИНЕРАЛОГИЯ</b>	
А. А. Коджоян—О признаках одностадийной зональности распределения элементов примесей в сфалеритах и галенитах . . . . .	231
<b>ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ</b>	
К. М. Мурадян—Новое проявление флюорит-барит-редкоземельных руд в Алаверди-Кафанской структурно-формационной металлогенической зоне Малого Кавказа (Армянская ССР) . . . . .	237
<b>БИОХИМИЯ</b>	
А. А. Симонян, Р. Б. Бадалян, А. П. Аколян—Сдвиги в активности различных АТФаз в митохондриях печени под влиянием детергентов в онтогенезе птиц . . . . .	243
Г. Г. Бунятян—Окисление и восстановительное аминирование $\alpha$ -кетоглутаровой кислоты в митохондриях мозга белых крыс при старении в присутствии АДФ. . . . .	247
Ж. С. Геворкян, А. С. Оганесян, К. Д. Беджанян—Структурная организация клеточных мембран и образование аммиака из аминокислот в корковом слое почек. . . . .	251

## CONTENTS

## MATHEMATICS

- Yu. R. Hakobian*—The rate of convergence of variation-difference schemes for two-dimensional linear parabolic equations in  $L_2$  space. The iteration solution of difference equations. . . . . 193
- E. S. Mkrtchian*—On recovery of analytic function by its values on some sets of uniqueness. . . . . 199
- Gh. S. Ghazarian*—On the multiplicative completion of basic sequences in  $L_p, 1 < p < \infty$ , until bases in  $L_p$ . . . . . 203
- F. A. Talalyan*—Two corollaries of Paley-Zygmund inequality. . . . . 210
- Y. M. Movsisyan*—A Theory of Homomorphism of universal algebras . . . . . 214

## Physics

- G. M. Harutunian, H. V. Nercararian*—Many-photons Stark effect in dimensional-quantised semiconductor . . . . . 222

## ORGANIC CHEMISTRY

- A. T. Babayan, S. T. Kocharian, V. S. Voskanian*—Synthesis of unsaturated  $\alpha$ -dialkylaminoketons. . . . . 228

## Mineralogy

- A. A. Kodjoyan*—About the Signs of the One-stage Zonality Distribution of the Element-additions in the Sphalerites and Galenites . . . . . 231

## Useful Minerals

- K. M. Mouradian*—The new fluorine-barite-rare-earth ore manifestation in the Alaverdi-Kafan structural-formation metallogenic zone of Minor Caucasus . . . . . 237

## Biochemistry

- A. A. Simonian, R. B. Badalian, A. P. Akopian*—Changes in the activation of the various ATPases in mitochondria of liver under the influence of detergents in ontogenesis of birds. . . . . 243
- G. H. Bunclian*—Oxidation and reductive amination of  $\alpha$ -ketoglutaric acid in the presence of ADP in the brain mitochondria of senile rats. . . . . 247
- J. S. Gevorkian, A. S. Oganestian, K. D. Bedjanian*—Structure organization of cell membranes and formation of acrimonia from amino acids in renal cortex. . . . . 251

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 03918. Подписано к печати 5.VIII.1976 г. Тираж 540. Изд. 4472. Заказ 423  
 Формат бумаги 70x108<sup>1/16</sup>. Печ. л. 4.0. Бум. л. 2.  
 Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,4.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24  
 Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эмвадзин

УДК 518:517.944/947

МАТЕМАТИКА

Ю. Р. Акопян

**Скорость сходимости в  $L_2$  вариационно-разностных схем  
 для двумерных линейных параболических уравнений.  
 Итерационное решение разностных уравнений**

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 26/1 1976)

1. В области  $Q = \Omega \times (0, T)$  с боковой поверхностью  $\Gamma$ , где  $\Omega$  — ограниченная односвязная область пространства  $R_2$  точек  $(x, y) \equiv (x_1, x_2)$  с границей  $S$  из  $C^2$ , рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f \quad (1)$$

с условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

или

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left( \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) + cu \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где  $\nu$  — внешняя нормаль к  $S$ .

Предположим следующее:

$$a_{ij} \in C^{2,1}(Q), \quad b_i \in C^{1,0}(Q), \quad a \in C(Q), \quad c \in C^1(\Gamma), \quad f \in L_2(Q),$$

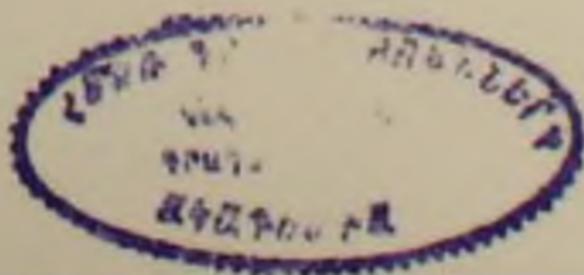
$$0 < \mu_0 \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \mu_1 \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \quad \mu_0, \mu_1 = \text{const.} \quad (4)$$

Тогда существует единственное решение  $u \in W_2^{2,1}(Q)$  начально-краевых задач и имеет место оценка (5)

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \|f\|_{L_2(Q)}. \quad (5)$$

Для задачи (1), (2) по области  $\Omega$  определим сеточную область  $\Omega^h$  ( $h$  — шаг сетки) с границей  $S^h$ , которая удовлетворяет следующим условиям (2,3): 1) область  $\Omega^h$ , ограниченная ломаной  $S^h$  содержится в

\* Буквой  $C$  с индексами внизу и без них здесь и везде ниже обозначаются различные положительные постоянные в неравенствах, не зависящие от  $h$  и рядом стоящих множителей.



области  $\Omega$ ; 2) между точками ломаной  $S^h$  и  $S$  при помощи нормалей к  $S$  устанавливается взаимно-однозначное соответствие; 3) длины звеньев ломаной  $S^h$  ограничены снизу величиной  $lh$ ; 4) расстояния точек  $S^h$  до  $S$  не превосходят величины  $\delta h^2$ . Далее разбиваем область  $\Omega^h$  на треугольники (<sup>2</sup>), причем длины сторон треугольников лежат в пределах  $[l_1 h; l_2 h]$ , а площади треугольников — в пределах  $[s_1 h^2; s_2 h^2]$ . Положительные постоянные  $l, \delta, l_1, l_2, s_1, s_2$ , выбор которых обуславливается свойствами кривой  $S$  и алгоритмом построения  $\Omega^h$ , не зависят от  $h$ .

Сеточная область  $\Omega^h$  для задачи (1), (3) строится следующим образом: на область  $\Omega$  накладывается квадратная сетка шага  $h$ , причем так, чтобы линии сетки были параллельны координатным осям; ячейки сетки разбиваются диагоналями под углом  $\pi/4$  к оси  $x_1$  на треугольники; в качестве  $\Omega^h$  берется наименьшее объединение треугольников, содержащее  $\bar{\Omega}$ .

Совокупность вершин и сторон треугольников триангуляции образует сетку, вершины треугольников назовем узлами сетки. Будем считать, что все узлы сетки перенумерованы в некотором порядке. Каждому узлу сетки  $(x_m, y_m)$  поставим в соответствие функцию  $\varphi_m(x, y)$ , равную единице в узле  $(x_m, y_m)$ , нулю в остальных узлах и восполненную кусочно-линейно в  $\bar{\Omega}^h$ . Вне  $\bar{\Omega}^h$  функция  $\varphi_m$  тождественно равна нулю. Разобьем промежуток  $[0, T]$  на равные части с шагом  $\tau$ ,  $t_n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Для  $n = 1, \dots, N$  определим функции

$$\varphi_{mn}(x, y, t) = \begin{cases} \varphi_m(x, y), & \text{если } t \in (t_{n-1}, t_n] \\ 0, & \text{если } t \in \bar{(t_{n-1}, t_n)}. \end{cases}$$

Линейную оболочку функций  $\varphi_{mn}$ , соответствующих внутренним узлам сетки (то есть не принадлежащих  $S^h$ ) обозначим через  $\mathring{H}_{h,\tau}$ , линейную оболочку всех  $\varphi_{mn}$  обозначим через  $H_{h,\tau}$ .

Иногда аргументы  $x, y, t$  в написании функций будем опускать. Введем обозначения:

$$L_1(u, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_Q a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dQ + \sum_{l=1}^2 \int_Q \sigma_l \frac{\partial u}{\partial x_l} v dQ + \int_Q a u v dQ;$$

$$L_2(u, v) = L_1(u, v) + \int_{\Gamma} \sigma u v d\gamma;$$

здесь и ниже  $dQ = dx dy dt$ , а  $d\Omega = dx dy$ .

В качестве приближенного решения первой (третьей) начально-краевой задачи возьмем функцию  $\bar{v} \in \mathring{H}_{h,\tau}$  (соответственно,  $H_{h,\tau}$ ), которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\tau \sum_{n=1}^N \int_Q (\bar{v}(t_n))_{\Gamma} \bar{\varphi}(t_n) d\Omega + L_l(\bar{v}, \bar{\varphi}) = \int_Q f \bar{\varphi} dQ \quad (6)$$

при произвольной  $\bar{\varphi} \in \mathring{H}_{h,\tau}$  (соответственно,  $H_{h,\tau}$ ), где  $l=1$  для зада-

чи (1), (2) и  $i=3$  для задачи (1), (3). Здесь  $(\bar{v}(t_n))_{\bar{\tau}}$  есть  $\tau^{-1}(\bar{v}(t_n) - \bar{v}(t_{n-1}))$ .

Через  $V_2^{1,0}(Q)$  обозначим пространство, состоящее из всех элементов  $W_2^{1,0}(Q)$ , имеющих конечную норму

$$|u|_Q = \sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_{L_1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_1(Q)},$$

где

$$|\nabla u| = \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Имеет место оценка скорости сходимости вариационно-разностных схем (ВРС) для задач (1), (2) и (1), (3)

$$|u - \bar{v}|_Q \leq Ch \|f\|_{L_1(Q)}. \quad (7)$$

В дальнейшем будем считать, что  $\tau \sim h^2$ .

2. Справедлива следующая

*Теорема. Пусть выполнены условия (4) и оценка (5); тогда при достаточно малых  $h$  имеем*

$$\|u - \bar{v}\|_{L_1(Q)} \leq Ch^2 \|f\|_{L_1(Q)}. \quad (8)$$

Опишем кратко процесс доказательства лишь для задачи (1), (2), так как для задачи (1), (3) оно проводится аналогично. Рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i \Phi) + a\Phi = u - \bar{v},$$

$$\Phi|_{t=T} = 0, \quad \Phi|_{\Gamma} = 0.$$

Обозначим  $u - \bar{v}$  через  $w$ . Для решения  $\Phi \in W_2^{2,1}(Q)$  имеет место оценка (5), а именно

$$\|\Phi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \|w\|_{L_1(Q)}. \quad (9)$$

Справедливо тождество

$$\|w\|_{L_1(Q)}^2 = - \int_{\bar{Q}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} w dQ + L_1(w, \Phi) \equiv J. \quad (10)$$

При помощи несложных преобразований можно получить равенство

$$J = - \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t} (u(t) - u(t_n)) d\Omega dt + \tau \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} (w(t_n))_{\bar{\tau}} \times$$

$$\times (\Phi(t_{n-1}) - \bar{\Phi}^h(t_n)) d\Omega + L_1(w, \Phi - \bar{\Phi}^h).$$

\* Эта оценка получена в совместной работе Ю. Р. Акопяна и Л. А. Оганесяна, причем показано, что она предельна по порядку и при этом оптимальное  $\tau$  надо брать порядка  $h^2$ .

где  $\bar{\Phi}^h$  есть функция из  $\dot{H}_{h,-}$ , совпадающая с  $\Phi^h$  во внутренних узлах сетки ( $\Phi^h$  — осреднение по В. А. Стеклову функции  $\Phi$  по переменным  $x, y$  с шагом осреднения  $h$ ). Пользуясь оценками (5), (7), (9), а также оценками

$$\|\Phi - \bar{\Phi}^h\|_Q \leq Ch \|\Phi\|_{W_2^{2,1}(Q)}, \quad \|\Phi - \bar{\Phi}^h\|_{L_1(Q)} \leq Ch^2 \|\Phi\|_{W_2^{2,1}(Q)},$$

выведенными в упомянутой выше работе, можно показать, что

$$J \leq Ch^2 \|f\|_{L_1(Q)} \|\omega\|_{L_1(Q)}.$$

Из последнего неравенства и тождества (10) следует оценка (8).

Тем же методом, как это делалось в (3), можно показать, что оценка (8) является точной по порядку в том смысле, что она совпадает с поперечником по А. Н. Колмогорову множества решений дифференциального уравнения в пространстве  $L_2(Q)$ . При этом упомянутое выше соотношение между параметрами  $\tau$  и  $h$  является оптимальным.

3. В этом пункте рассмотрим метод простых итераций для решения системы линейных уравнений (6).

Считая, что задана нумерация узлов сетки, сеточную функцию  $\underline{\omega} = \{\omega_m\}$ , где  $\omega_m = \omega(x_m, y_m)$  будем рассматривать как вектор в конечномерном пространстве  $R_M$ , где  $M$  есть число узлов сетки, имеющее порядок  $h^{-2}$ . Через  $(\underline{\omega}, \underline{\varphi})$  будем обозначать обычное скалярное произведение в  $R_M$ .

Существуют такие матрицы  $P, L_I^{(n)}$  и векторы  $\underline{g}^{(n)}$ , что интегральное тождество (6) эквивалентно тождеству

$$\sum_{n=1}^N ((P + L_I^{(n)})\underline{v}^{(n)}, \underline{\varphi}^{(n)}) = \sum_{n=1}^N (P\underline{v}^{(n-1)} + \underline{g}^{(n)}, \underline{\varphi}^{(n)}),$$

где, например, вектор  $\underline{v}^{(n)}$  определяется значениями функции  $\bar{v}(x, y, t_n) \equiv \bar{v}^{(n)}$  в узлах сетки. Ввиду произвольности  $\bar{\varphi}$  наша задача сводится к решению  $N$  систем уравнений

$$(P + L_I^{(n)})\underline{v}^{(n)} = P\underline{v}^{(n-1)} + \underline{g}^{(n)}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (11)$$

причем  $\underline{v}^{(0)}$  есть нулевой вектор из  $R_M$ .

Для решения системы (11) при фиксированном  $n$  рассмотрим итерационный процесс

$$\lambda^{-1}E(\underline{v}_{k+1}^{(n)} - \underline{v}_k^{(n)}) = -(P + L_I^{(n)})\underline{v}_k^{(n)} + P\underline{v}_q^{(n-1)} + \underline{g}^{(n)}, \quad (12)$$

$$\lambda > 0, \quad k = 0, 1, \dots, q,$$

причем в качестве начального приближения  $\underline{v}_0^{(n)}$  возьмем нулевой вектор из  $R_M$ . Здесь  $E$  — диагональная матрица, определяемая в (4), если мы решаем задачу (1), (3) и равная  $h^2 I$  ( $I$  — единичная матрица) для задачи (1), (2).

Введем в  $R_M$  норму

$$\| \underline{v} \|_{\varepsilon} = (E \underline{v}, \underline{v})^{1/2}.$$

Разность  $\underline{v}^{(n)} - \underline{v}_q^{(n)}$  обозначим через  $\underline{z}_q^{(n)}$ . Пусть  $\bar{v}_q$  есть функция из  $\dot{H}_{h,q}$ , если мы рассматриваем задачу (1), (2), либо из  $H_{h,q}$ , если рассматривается задача (1), (3), такая, что  $\bar{v}_q^{(n)}$  при любом  $n = 1, \dots, N$  совпадает в узлах сетки с  $\underline{v}_q^{(n)}$ .

Из (11) и (12) получаем

$$(P + L_1^{(n)}) \underline{z}_q^{(n)} = \lambda^{-1} E(\underline{v}_{q+1}^{(n)} - \underline{v}_q^{(n)}) + P \underline{z}_q^{(n-1)}.$$

Умножая обе части последнего равенства на  $\underline{z}_q^{(n)}$  и считая  $h$  достаточно малым, можно показать, что

$$(E \underline{z}_q^{(n)}, \underline{z}_q^{(n)}) \sim \left| \int_{\Omega} |\underline{z}_q^{(n)}|^2 d\Omega + C_1 h^2 \int_{\Omega} |\nabla \underline{z}_q^{(n)}|^2 d\Omega \right| \leq C_2 \lambda^{-2} h^{-2} \| \underline{v}_{q+1}^{(n)} - \underline{v}_q^{(n)} \|_{\varepsilon} + \\ + (1 + C_3 h^2) \left| \int_{\Omega} |\underline{z}_q^{(n-1)}|^2 d\Omega + C_1 h^2 \int_{\Omega} |\nabla \underline{z}_q^{(n-1)}|^2 d\Omega \right|,$$

откуда следует

$$\max_{1 \leq n \leq N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_{\varepsilon} \leq C \lambda^{-1} h^{-2} \max_{1 \leq n \leq N} ( \| I - \lambda E^{-1} (P + L_1^{(n)}) \|_{\varepsilon} \| \underline{v}_1^{(n)} \|_{\varepsilon} ). \quad (13)$$

Доказывается, что параметр  $\lambda$  можно выбрать так, чтобы

$$\| I - \lambda E^{-1} (P + L_1^{(n)}) \|_{\varepsilon} \leq \gamma < 1, \quad (14)$$

где  $\gamma$  не зависит от  $h$  и  $n$ ; при этом  $\lambda = O(1)$ .

Нетрудно вывести, принимая во внимание (5) и (7), оценку

$$\max_{1 \leq n \leq N} \| \underline{v}_1^{(n)} \|_{\varepsilon} \leq C ( \| f \|_{L_1(Q)} + \max_{1 \leq n \leq N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_{\varepsilon} ). \quad (15)$$

Пусть  $q > 4 \frac{|\ln h|}{|\ln \gamma|}$ . Тогда  $\gamma^q < h^4$ , и из (13)–(15) следует оценка

$$\max_{1 \leq n \leq N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_{\varepsilon} \leq C h^2 \| f \|_{L_1(Q)},$$

с помощью которой получаем

$$\| \bar{v} - \bar{v}_q \|_Q \leq C h^{-1} \max_{1 \leq n \leq N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_{\varepsilon} \leq C h \| f \|_{L_1(Q)}.$$

$$\| \bar{v} - \bar{v}_q \|_{L_1(Q)} \leq C \max_{1 \leq n \leq N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_{\varepsilon} \leq C h^2 \| f \|_{L_1(Q)}.$$

Итак, вспоминая оценки (7) и (8), можно утверждать, что при

$q > 4 \frac{|\ln h|}{|\ln \gamma|}$  имеют место оценки

$$|u - \bar{v}_q|_Q \leq Ch \|f\|_{L_1(Q)}; \quad \|u - \bar{v}_q\|_{L_1(Q)} \leq Ch^2 \|f\|_{L_1(Q)}.$$

При этом объем работы, затраченной для нахождения  $\bar{v}_q$  имеет порядок  $h^{-4} |\ln h|$ .

Ленинградский институт социально-экономических проблем Академии наук СССР

#### ՏՈՒ. Ռ. ՀԱՎՈՐՅԱՆ

Երկու շափանի գծային պարաբոլիկ հավասարումների համար վարիացիոն-տարբերական սխեմայի զուգամիտության առաջությունը  $L_2$  տարածությունում: Տարբերական հավասարումների իտերացիոն լուծումը

Հոդվածում գծային պարաբոլիկ հավասարումների համար կառուցվում են վարիացիոն-տարբերական սխեմաներ երկու շափանի տիրույթում: Ցույց է տրվում, որ  $L_2$  տարածությունում սխեմաների զուգամիտության առաջությունը  $h^2$  կարգի է, եթե  $\tau \sim h^2$  (որտեղ  $h$  ցանցի քայլն է ըստ տարածողական փոփոխականի, իսկ  $\tau$  ըստ ժամանակի):

Ապացուցվում է պարզ իտերացիոն մեթոդի զուգամիտությունը և ցույց է տրվում իտերացիաների թիվը, տրված ճշտությամբ լուծումը գտնելու համար:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> О. А. Ладмженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., «Наука», 1967. <sup>2</sup> Л. А. Оганесян, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 6, № 6, 1024—1042 (1966). <sup>3</sup> Л. А. Оганесян, В. Я. Ривкин, Л. А. Руховец, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, часть I. Сб. «Дифференциальные уравнения и их применение», вып. 5, Вильнюс, 1973. <sup>4</sup> Г. П. Астраханцев, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 11, № 1, 105—123 (1971).

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Е. С. Мкртчян

**О восстановлении голоморфной функции по ее значениям на некоторых множествах единственности**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/II 1976)

1°. Пусть  $D$  — звездная область относительно начала координат в пространстве  $\mathbb{C}^n$  комплексных переменных  $z_1, \dots, z_n$ . Для  $\xi^0 \in \overline{D}$ ,  $\xi_i^0 \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  обозначим через  $\Delta_{\xi^0}$  тор:

$$\Delta_{\xi^0} = \{ \xi \in \mathbb{C}^n; |\xi_i| = |\xi_i^0|, i = 1, \dots, n \}$$

Пусть, далее

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{\|k\| > 0} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \|k\| \rho^{-1})} \quad (\operatorname{Re} \mu > 0, \rho > 0) \quad (1)$$

многомерный аналог функции типа Миттаг—Леффлера.

При  $n = 1$ ,  $\mu = 1$  это есть функция Миттаг—Леффлера, а при  $n = 1$ ,  $\operatorname{Re} \mu > 0$  такая функция введена М. М. Джрбашяном. Здесь  $k = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , целые неотрицательные числа,  $\|k\| = k_1 + \dots + k_n$ ,  $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ , а  $\Gamma(s)$  — гамма-функция.

Мы дадим аналог теоремы 3.3 Миттаг—Леффлера ((<sup>1</sup>) стр. 156) для  $n > 1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Delta_{\xi^0} \subset D$ . Для функции  $f$ , голоморфной в  $D$  и непрерывной в  $D \cup \Delta_{\xi^0}$  (если  $\Delta_{\xi^0} \cap \partial D \neq \emptyset$ ) и любого компакта  $K \subset D$ :

1) существует число  $\rho_0(k) > 0$  такое, что при  $\rho \geq \rho_0(k)$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_0^\infty e^{-t} t^{\mu-1} \int_{\Delta_{\xi^0}} f(\xi) E_\rho \left( \frac{z}{\xi} t^{\frac{1}{\rho}, \mu} \right) \frac{d\xi}{\xi} dt \quad (2)$$

2)

$$f(z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi i)^n} \int_{\Delta_{\xi^0}} f(\xi) E_\rho \left( \frac{z}{\xi}, \mu \right) \frac{d\xi}{\xi}, \quad (3)$$

причем предел достигается равномерно на  $K$ .

Здесь

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\xi_n}{\xi_n}, \quad \frac{z}{\xi} t^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{z_1}{\xi_1} t^{\frac{1}{p}}, \dots, \frac{z_n}{\xi_n} t^{\frac{1}{p}} \right).$$

Функция  $E_p(z t^{\frac{1}{p}}, \mu)$ , где  $z t^{\frac{1}{p}} = (z_1 t^{\frac{1}{p}}, \dots, z_n t^{\frac{1}{p}})$ , целая функция порядка  $p$ , следовательно (3) показывает, что при условиях теоремы 1 функцию  $f$  во всем  $D$  как и в одном переменном ((1) стр. 159) можно равномерно приблизить целыми функциями, которые можно явно выписать.

2°. Пусть  $D$  — произвольная область в  $\mathbb{C}^n$ , содержащая начало координат. Многоугольник Бореля, для области  $D$ , с центром в нуле определяется следующим образом:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n; K_z \subset D\},$$

где

$$K_z = \{\xi \in \mathbb{C}^n; \xi = \zeta z, \left| \zeta - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}, \zeta \in \mathbb{C}^1, z \in \mathbb{C}^n\}.$$

Вообще говоря, область  $\Omega$  не обязана быть  $n$  — круговой областью (2). Она содержит все полные  $n$  — круговые области с центром в нуле, которые содержатся в области  $D$ .

Вновь рассмотрим ряд (1) и положим в нем  $\mu = n$  и  $p = 1$ , а вместо  $z$  подставим  $\frac{z}{\xi} t$ . После суммирования  $E_1\left(\frac{z}{\xi} t, n\right)$  получим

$$E_1\left(\frac{z}{\xi} t, n\right) = e^t t^{1-n} \xi_1 \dots \xi_n H(z, \xi, t),$$

где

$$H(z, \xi, t) = \sum_{l=1}^n \frac{e^{-t(1-\frac{z_l}{\xi_l})} \xi_l^{n-2}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n (\xi_l z_j - \xi_j z_l)},$$

причем  $H(z, \xi, t)$  голоморфна по  $z$  в  $\mathbb{C}_z^n$ , по  $\xi$  в  $(\mathbb{C}^1 - \{0\})_\xi^n$  и по  $t$  в  $\mathbb{C}_t^1$ .

Теорема 2. Пусть  $\Delta_{\xi_0} \subset \bar{\Omega}$ . Если функция  $f$  голоморфна в  $D$  и непрерывна на  $D \cup \Delta_{\xi_0}$  (если  $\Delta_{\xi_0} \cap \partial D \neq \emptyset$ ), то для  $z \in \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_0^\infty dt \int_{\Delta_{\xi_0}} f(\xi) H(z, \xi, t) d\xi, \quad (4)$$

где  $d\xi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$ .

Отметим, что другое интегральное представление в области  $\Omega$  приведено в (2), но там интегрирование производилось по  $2n$  — мерному множеству, а в формуле (4) — по  $(n+1)$  — мерному.

3°. Конструктивное восстановление голоморфных функций по ее значениям на множестве единственности  $E^*$  рассматривалось многими авторами. Одним из примеров является формула Галузина—Крылова (3 стр. 105).

Пусть  $D$  — единичный круг в  $\mathbb{C}^1$ ,  $E$  произвольное множество на окружности положительной меры Лебега. Для любой функции  $f$ , голоморфной в  $D$  и непрерывной в  $D$  и  $z \in D$

$$f(z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i e^{i\lambda g(z)}} \int_E \frac{e^{i\lambda g(\xi)} f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

где

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\xi + z}{\xi - z} d\xi.$$

В (4) решена такая же задача для функций  $f \in H^p$  на  $\partial D$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

В (5,6) рассматриваются случаи, когда  $D$  —  $n$  — круговая область, для которой справедливо интегральное представление А. А. Темлякова (7) при очень специальном выборе  $E$ .

В (8) использован метод, примененный в (4) и доказано аналогичное утверждение для бицилиндра  $D = \{z \in \mathbb{C}^2; |z_i| < 1, i=1, 2\}$ ,  $E \subset \Delta_{(1,1)}$ , функции  $f \in H^2(\Delta_{(1,1)})$  (определение класса  $H^2(\Delta_{(1,1)})$  см. в (9) стр. 47). Здесь  $E$  имеет положительную двумерную меру Лебега.

Пусть  $D$  — область в  $\mathbb{C}^n$ ,  $0 \in D$  и  $E$  произвольное множество положительной  $n$  — мерной меры Лебега, лежащее на  $\Delta_{\xi^0} \subset \Omega$ . Пусть далее функция  $f$  голоморфна в  $D$  и принадлежит  $H^2(\Delta_{\xi^0})$  (если  $\Delta_{\xi^0} \cap \partial D \neq \emptyset$ ). Тогда схема, примененная в (6), позволяет построить оператор  $L_E$ , который конструктивно восстанавливает функцию  $f$  в полицилиндре  $U(0, |\xi^0|) = \{z \in \mathbb{C}^n; |z_i| < |\xi_i^0|, i=1, \dots, n\}$  по функции  $h = f|_E$  (сужению  $f$  на  $E$ ), т. е. для  $f \in H^2(\Delta_{\xi^0})$  и  $z \in U(0, |\xi^0|)$   $f(z) = L_E(h)(z)$ .

С учетом этого и теоремы 1 получим

**Теорема 3.** Пусть  $D$  — звездная относительно начала координат область в  $\mathbb{C}^n$ ,  $E \subset \Delta_{\xi^0} \subset \bar{D}$  имеет положительную  $n$  — мерную меру Лебега. Тогда для  $f \in H^2(\Delta_{\xi^0})$  (если  $\Delta_{\xi^0} \cap \partial D \neq \emptyset$ ) и  $z \in D$

$$f(z) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi i)^n} \int_{\Delta_{\xi^1}} L_E(h)(\xi) E_\mu \left( \frac{z}{\xi}, \mu \right) \frac{d\xi}{\xi},$$

где  $|\xi_i^1| < |\xi_i^0|$ ,  $i=1, \dots, n$ .

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему руководителю Л. А. Айзенбергу за постоянное внимание к

\* Множество  $E \subset \bar{D}$  называется *множеством единственности*, если всякая функция, голоморфная в  $D$ , непрерывная на  $D \cup E$  равная 0 на всем  $E$ , равна 0 тождественно.

работе, а также В. М. Трутневу, Ш. А. Даутову и С. М. Знаменскому за полезные обсуждения.

Институт физики им. Л. В. Киренского  
г. Красноярск

Ե. ՈՒՆԿՆԵՐԻ

Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերականգման մասին, որոշ միակուսյան բազմությունների վրա նրա ունեցած արժեքներով

Ինքնուրույն է Մ. Մ. Ջրրաշյանի (<sup>1</sup>) էջ 156) հայտնի թեորեմի անալոգը, որտեղ ցանկացած  $\emptyset$  կետի նկատմամբ աստղածե  $D \subset \mathbb{C}^n$  տիրույթում, հոլոմորֆ ֆունկցիան վերականգնվում է ամբողջ  $D$ -ում, եթե՝

1. նա անընդհատ է մինչև  $D \cup \Delta_{\xi_0}$  (եթե  $\Delta_{\xi_0} \cap \partial D \neq \emptyset$ ), որտեղ  $\Delta_{\xi_0} = \{ \xi \in \mathbb{C}^n; |\xi_i| = |\xi_0^i|, \xi_j^0 \neq 0 \text{ } i = 1, \dots, n \} \subset \bar{D}$  և հայտնի է նրա արժեքները  $\Delta_{\xi_0}$ -ի վրա (թեորեմ 1),

2. հայտնի է նրա արժեքները կամայական  $n$ -չափանի Լեբեգի զրական չափի բազմություն վրա, որն ընկած է  $\Delta_{\xi_0}$ -ում և կրթ ֆունկցիան պատկանում է  $H^2(\Delta_{\xi_0})$  (եթե  $\Delta_{\xi_0} \cap \partial D \neq \emptyset$ );

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. <sup>2</sup> Л. А. Айзенберг, В. М. Трутнев, Сибирск. мат. журн., т. 12, № 6, 1398—1404 (1971). <sup>3</sup> И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950. <sup>4</sup> D. J. Patil, Bull. Amer. Math. Soc., 78, 617—620, (1972). <sup>5</sup> В. П. Шеинов, Ученые записки МОПИ им. Н. К. Крупской, т. 110, сер. мат. вып. 7, 133—139, 1962. <sup>6</sup> И. И. Баврик, ДАН СССР, т. 219, № 3, 521—524, (1974). <sup>7</sup> А. А. Темляков, «Известия АН СССР», сер. мат., т. 21, 89—92, (1957). <sup>8</sup> D. J. Patil, Trans. Amer. Math. Soc. v. 188, 97—103, (1974). <sup>9</sup> У. Рудин, Теория функций в полицилиндре, «Мир», М., стр. 160, 1974.

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

К. С. Казарян

О мультипликативном дополнении базисных последовательностей

$L_p, 1 \leq p < \infty$  до базисов в  $L_p$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 10/III 1976)

Идея о так называемом мультипликативном дополнении системы функций принадлежит Р. Боасу и Г. Полларду <sup>(1)</sup>. Ими установлен следующий результат:

**Теорема I.** Если  $\{g_n(x)\}$  — ортонормированная система, которая может быть сделана полной путем присоединения конечного числа функций, то существует измеримая ограниченная функция  $t(x)$  такая, что система  $\{t(x)g_n(x)\}$  является полной относительно  $L_2$ .

Опираясь на теорему 12 работы <sup>(2)</sup> А. А. Талаляна, Дж. Прайс и Р. Цинк <sup>(3)</sup> усилили этот результат.

**Теорема II.** Следующие свойства системы  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  определенных на  $(0, 1)$  функций эквивалентны.

(M) Система  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  полна в смысле сходимости по мере на  $(0, 1)$

(T) Для любого положительного числа  $\varepsilon$ , существует измеримое множество  $S_\varepsilon$ ,  $\mu(S_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ , такое, что система  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  полна в  $L_2(S_\varepsilon)$ .

(BP) Существует ограниченная измеримая неотрицательная функция  $t(x)$  такая, что система  $\{t(x)g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  полна в  $L_2[0, 1]$ .

Заметим, что эквивалентность (M) и (T) доказана в работе <sup>(2)</sup>. Далее, Бен-Ами Браун <sup>(4)</sup>, основываясь на лемме 3 работы <sup>(2)</sup> А. А. Талаляна, усилил результат Р. Боаса и Г. Полларада в другом направлении.

**Теорема III.** Пусть  $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — система определенных на измеримом множестве  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , функций образующих нормированный базис в  $L_p(E)$ ,  $1 < p < \infty$ .

Тогда для произвольного натурального числа  $N_0$  существует измеримая функция  $M$ ,  $0 \leq M(x) \leq 1$ , такая, что для любой функ-

ции  $f$  из  $L_p(E)$  существует ряд  $\sum_{k=N_1}^{\infty} a_k (M \Phi_k)$ ,  $a_k$  — действительные числа, который сходится к  $f$  в метрике  $L_p(E)$ .

В настоящей работе исследуется вопрос: возможно ли в условиях теоремы Бен-Ами Брауна найти такую ограниченную функцию  $M$ , чтобы  $\{M \Phi_n\}_{n=N_1}^{\infty}$  являлась базисом в  $L_p(E)$ . Оказывается, что ответ на этот вопрос не однозначен. В дальнейшем понадобится следующее понятие.

**Определение 1.** Будем говорить, что система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  определенных на измеримом множестве  $E$ ,  $\mu(E) > 0$ , функций имеет свойство (A), на измеримом множестве  $F$ ,  $F \subset E$ ,  $\mu(F) > 0$ , если существует положительное число  $\alpha$  такое, что для любого натурального числа  $N_1$  найдется натуральное число  $N_2$  такое, что

$$\mu\left(\bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k\right) = \mu(F),$$

где

$$E_k = \{x; |\varphi_k(x)| \geq \alpha\} \cap F.$$

Докажем теорему, которая будет основным инструментом для получения последующих результатов.

**Теорема 1.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — базис в  $L_p(E)$ ,  $1 < p < \infty$ , а  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — биортогональная ей система функций. Пусть, далее,  $N$  натуральное число и  $M(x)$  ограниченная функция. Для того, чтобы система  $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$  была замкнутой минимальной системой в  $L_p(E)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. функция  $[M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$ , где  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , — вещественные числа, принадлежит  $L_q(E)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , тогда и только тогда, когда все  $a_n$  равны нулю;
2. для каждого  $k$ ,  $k = N+1, N+2, \dots$ , существуют единственные вещественные числа  $a_n^{(k)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , такие, что функция

$$\psi_k(x) = [M(x)]^{-1} \left[ \sum_{n=1}^N a_n^{(k)} \varphi_n(x) + \varphi_k(x) \right] \quad (*)$$

принадлежит  $L_q(E)$ .

**Доказательство.** Необходимость. Если

$$[M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) = g(x) \in L_q(E),$$

то ввиду того, что

$$\int_E g(x) M(x) f_k(x) dx = \int_E \left[ \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \right] \cdot f_k(x) dx = 0,$$

при  $k = N+1, N+2, \dots$ , и система  $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$  замкнута в  $L_p(E)$ , получаем  $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$ .

Пусть  $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$  биортогональная к  $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$  система функций. Для  $k = N+1, N+2, \dots; l = N+1, N+2, \dots$ , имеем, что

$$\int_E \psi_k(x) M(x) f_l(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } l = k \\ 0, & \text{если } l \neq k \end{cases} \quad (**)$$

Так как  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является базисом в  $L_q(E)$ , то из (\*\*\*) получаем, что для каждого  $k = N+1, N+2, \dots$

$$\psi_k(x) = [M(x)]^{-1} \cdot \left[ \sum_{n=1}^N a_n^{(k)} \varphi_n(x) + \varphi_k(x) \right] \in L_q(E)$$

Единственность коэффициентов  $a_n^{(k)} (n = 1, 2, \dots, N; k = 1, \dots)$  очевидна. Достаточность. Если существует функция  $g(x) \in L_q(E)$  такая, что

$$\int_E g(x) M(x) f_n(x) dx = 0, \quad n = N+1, N+2, \dots,$$

то

$$g(x) M(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x).$$

Следовательно

$$[M(x)]^{-1} \cdot \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) = g(x) \in L_q(E),$$

но из условия 1 следует, что  $a_k = 0; k = 1, \dots, N$ , т. е.  $g(x) \equiv 0$ .

Минимальность системы  $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$  очевидна, если учесть, что определенная равенством (\*) система  $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$  биортогональна ей. Теорема 1 доказана.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая.

**Теорема 2.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — нормированный базис в  $L_p(E)$ ,  $1 < p < \infty$ , который содержит ограниченную подсистему  $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , а  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является биортогональной к  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  системой, состоит из ограниченных функций и  $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  обладает свойством (A) на множество  $F$ . Тогда, если для некоторого натурального числа  $N$  и для некоторой ограниченной функции  $M(x)$  система  $\{Mf_k\}_{k=N+1}^{\infty}$  является базисом в  $L_p(E)$ , то

$$[M(x)]^{-1} \in L_q(F), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Из теоремы 2 и теоремы 1 непосредственно следует

**Теорема 3.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — нормированный базис в  $L_p(E)$ ,  $1 < p < \infty$ , который содержит ограниченную подсистему  $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , а  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является биортогональной к  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  системой, состоит из ограниченных функций и  $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  облада-

ет свойством (A) на множестве  $E$ . Тогда для любого натурального числа  $N$  и для произвольной измеримой ограниченной функции  $M(x)$  система  $\{Mf_k\}_{k=N+1}^{\infty}$  не является базисом в  $L_p(E)$ .

Из теоремы 3 получаются:

Следствие 1. Невозможно, выбрасывая из тригонометрической системы  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  конечное число функций, оставшуюся систему функций мультипликативно дополнить до базиса в  $L_p[0, 2\pi]$ ,  $1 < p < \infty$ .

Следствие 2. Невозможно, выбрасывая из системы Уолша  $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  конечное число функций, оставшуюся систему функций мультипликативно дополнить до базиса в  $L_p[0, 1]$ .

С помощью теоремы 2 можно установить, что тем же свойством обладают системы  $\{1, \cos nx\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  на отрезке  $[0, \pi]$ .

В отличие от рассмотренных систем, если из системы Хаара выбросить произвольное конечное число функций, то оставшуюся систему функций можно мультипликативно дополнить до базиса в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ .

Напомним определение системы Хаара  $\{\chi_n(x)\}$ .

Имеем:

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1 \quad (0 \leq x \leq 1), \text{ а при } k=0, 1, 2, \dots$$

$$\chi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^k}, & \text{если } \frac{2j-2}{2^{k+1}} < x < \frac{2j-1}{2^{k+1}} \\ -\sqrt{2^k}, & \text{если } \frac{2j-1}{2^{k+1}} < x < \frac{2j}{2^{k+1}} \\ 0, & \text{если } x \in \left[ \frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right], \end{cases}$$

где для каждого  $k$  индекс  $j$  пробегает значение  $1, 2, \dots, 2^k$ . Через  $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  обозначим систему Хаара, упорядоченную обычным образом:

$$\chi_0^{(0)}(x) = \chi_1(x),$$

а при  $n = 2^k + j$  ( $k=0, 1, \dots, j=1, 2, \dots, 2^k$ )

$$\chi_k^{(j)}(x) = \chi_n(x).$$

Известно, что система Хаара  $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является базисом в  $L_p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ .

Из теоремы 1 легко следует

Лемма 1. Пусть  $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — система Хаара. Обозначим:

$$\Delta_k^{(1)} = \left( \frac{2m-2}{2^{k+1}}, \frac{2m-1}{2^{k+1}} \right), \quad \Delta_k^{(2)} = \left( \frac{2m-1}{2^{k+1}}, \frac{2m}{2^{k+1}} \right), \quad m=1, 2, \dots, 2^k.$$

Если  $M(x)$  — ограниченная измеримая функция, то для того, чтобы система  $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$  была замкнутой минимальной системой в  $L_p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ , необходимо и достаточно существование последовательности интервалов  $\Delta_0^{(1)} \supset \Delta_1^{(1)} \supset \dots \supset \Delta_n^{(1)} \supset \dots$

где  $l_n = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor$  таких, что

$$|M(x)|^{-1} \in L_q[\Delta_n^{(l_n)}] \text{ и } |M(x)|^{-1} \in L_q[C\Delta_n^{(l_n)}],$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ и } C\Delta_n^{(l_n)} = [0, 1] - \Delta_n^{(l_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Теорема 4.** Пусть  $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — система Хаара. Тогда система  $\{M_0(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ , где  $M_0(x) = 2^{-n}$  при  $x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , является базисом в  $L_p[0, 1]$   $1 \leq p < \infty$ .

Наметим доказательство этого утверждения.

Из леммы 1 следует, что система  $\{M_0(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$  является замкнутой минимальной системой в  $L_p[0, 1]$ ,  $(1) < p < \infty$ , но так как биортогональная ей система

$$\psi_k^{(j)}(x) = |M_0(x)|^{-1} \chi_k^{(j)}(x), \quad k = 1, 2, \dots; \quad 2 \leq j \leq 2^k,$$

$$\psi_k^{(1)}(x) = |M_0(x)|^{-1} |\chi_k^{(1)}(x) - \sqrt{2^k} \chi_{2^k}^{(0)}(x)|,$$

где  $n = 2^k + j$ ;  $1 \leq j \leq 2^k$ , состоит из ограниченных функций, то  $\{M_0(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$  — замкнутая минимальная система в  $L_1[0, 1]$ .

Возьмем произвольную функцию  $f(x)$  из  $L_p$ ,  $(1) \leq p < \infty$ . Легко проверить, что

$$\int_0^1 f(t) \psi_k^{(j)}(t) dt \cdot M_0(x) \chi_n^{(j)}(x) \equiv \int_0^1 f(t) \chi_k^{(j)}(t) dt \times \chi_k^{(j)}(x)$$

когда  $k = 1, 2, \dots; 2 \leq j \leq 2^k$ .

Непосредственным вычислением получаем, что сумма

$$\sum_{k=0}^m \int_0^1 f(t) \psi_k^{(1)}(t) dt \times M_0(x) \chi_k^{(1)}(x)$$

на интервалах  $\left(\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j}\right)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ;  $m = 1, 2, \dots$ , равна

$$2^{j+1} \int_{1/2^{j+1}}^{1/2^j} f(t) dt$$

а на интервале  $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$  равна

$$-2^{m+1} \int_{1/2^{m+1}}^1 f(t) |M_0(t)|^{-1} dt \times M_0(x).$$

Откуда получается утверждение теоремы 4.

**Замечание.** Для произвольной  $f(x) \in L_1(0, 1)$ ,  $\sum_{n=2}^{\infty} C_n M_0(x) \chi_n(x)$  сходится к  $f(x)$  почти всюду.

Теорема 5. Существует ограниченная измеримая функция  $L(x)$ , такая, что  $\{L(x)\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является замкнутой минимальной системой в  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , не являясь базисом в  $L_p[0, 1]$ .

Таковой является, например, функция

$$L(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \left(\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 2^{-n}, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right], \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Заметим также, что  $\{L(x)\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является примером гильбертовой системы, которая не является базисом в  $L_2[0, 1]$ .

Теорема 6. Пусть  $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — система Хаара, и  $N$  произвольное натуральное число.  $(a_i, b_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , — интервалы наибольшей длины, на которых все функции  $\chi_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq N$  постоянны

$$0 = a_1 < b_1 = a_2 < \dots < a_N = 1.$$

Тогда система  $\{N_0(x)\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , где

$$N_0(x) = M_0\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}\right) \quad \text{при } x \in (a_i, b_i),$$

$M_0(x)$  — функция из теоремы 4, является базисом в  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Эта теорема вытекает из теоремы 4. Несколько более сложное доказывается аналогичный результат для случая, когда из системы Хаара удален произвольный конечный набор функций.

Автор выражает благодарность чл. -корр. АН Армянской ССР А. А. Талаяну за постановку вопросов, постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

Ереванский государственный университет

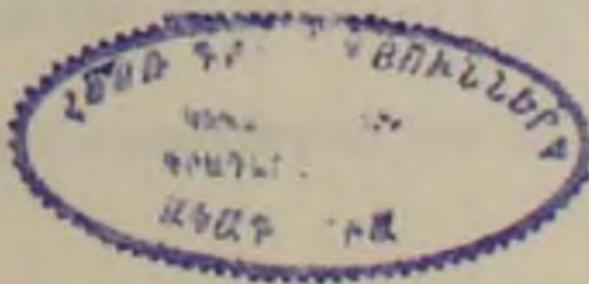
## Ղ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

$L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ -ում բազիսային հաջորդականությունների մուլտիպլիկատիվ լրացումը մինչև  $L_p$ -ի բազիսը

Ուսումնասիրված է  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , տարածության բազիսներից վերջավոր թվով ֆունկցիաներ դուրս գցելուց հետո, մնացած ֆունկցիաների բազմությունը սահմանափակ ֆունկցիայով բազմապատկելով, բազիս ստանալու հնարավորությունը: Նշված է, որ որոշակի պայմանների բավարարող բազիսների համար հնարավոր չէ այդ ճանապարհով բազիս ստանալու Ապացուցվում է, որ Հաարի սիստեմից վերջավոր թվով ֆունկցիաներ դուրս գցելուց հետո մնացած բազմությունը կարելի է մուլտիպլիկատիվորեն դարձնել բազիս  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ -ում: Մուլտիպլիկատիվ եղանակով կարելի է կարճատև բազիսի օրինակ, որը Ռիսի բազիս չէ: Բերվում է նաև  $L_2[0, 1]$ -ում հիլբերտյան սիստեմի օրինակ, որը բազիս չէ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> R. P. Boas, H. Pollard., Bull. Amer. Math. Soc., 54, 518—522 (1948). <sup>2</sup> A. A. Талалян, Успехи матем. наук, 15, № 5, 77—141 (1960). <sup>3</sup> J. J. Price, R. E. Zink, Ann. Math. Ser. 2, 82 139—145, (1965). <sup>4</sup> Braun Ben—Aml, Trans. Amer. Math. Soc. 176, Febr., 499—508 (1973).



УДК 51388

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

Два следствия из неравенства Пэли—Зигмунда

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 17/III 1976)

Пусть  $H$ —действительное или комплексное гильбертово пространство,  $u_1, u_2, \dots, u_n$ —произвольные векторы из  $H$  и  $0 < \lambda < 1$ . Тогда имеет место следующее неравенство Пэли—Зигмунда, ((<sup>1</sup>)стр. 48)

$$m \left\{ t \in [0, 1] : \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) u_i \right\| > \lambda \left( \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right)^{1/2} \right\} > \frac{1}{3} (1 - \lambda^2)^2, \quad (1)$$

где  $m$ —мера Лебега на  $[0, 1]$  и  $r_i(t)$ —функции Радемахера.

В настоящей заметке показано, что неравенство (1) позволяет перенести некоторые теоремы о действительных функциональных рядах на ряды функций со значениями в гильбертовом пространстве. Отметим при этом, что известные нам доказательства приведенных ниже теорем 1 и 2 для случая действительных функциональных рядов не используют соответствующего варианта неравенства (1) и основаны на других фактах.

Всюду в дальнейшем приняты следующие обозначения:  $H$ —действительное или комплексное гильбертово пространство,  $(\Omega, \mu)$ —вероятностное пространство и  $x_i, i=1, 2, \dots$ —измеримые отображения  $\Omega$  в  $H$ .

**Теорема 1.** Если ряд  $\sum x_i(\omega)$  безусловно сходится по мере на  $\Omega$ , то ряд  $\sum \|x_i(\omega)\|^2$  сходится почти всюду на  $\Omega$ .

**Доказательство.** Предположим обратное. Пусть ряд  $\sum \|x_i(\omega)\|^2$  расходится на множестве положительной меры. Тогда найдется множество  $\Omega_0 \subset \Omega$  с  $\mu(\Omega_0) > 0$ , число  $M > 0$  и возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}$  такие, что выполняется неравенство

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \|x_i(\omega)\|^2 > M, \quad \omega \in \Omega_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для любого натурального числа  $k$  и для любого  $\omega \in \Omega_0$  положим:

$$E_{k,\omega} = \left\{ t \in [0, 1] : \left\| \sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+1}} r_i(t) x_i(\omega) \right\| > \lambda \left( \sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+1}} \|x_i(\omega)\|^2 \right)^{1/2} \right\}. \quad (3)$$

Применяя неравенство Пэли—Зигмунда к системе векторов  $0, \dots, 0, x_{n_{k+1}}(\omega), \dots, x_{n_{k+1}}(\omega)$  получим:

$$m(E_{k,\omega}) > \frac{1}{3} (1-\lambda^2)^2. \quad (4)$$

Пусть  $\alpha$  — некоторое число из интервала  $(0, \frac{1}{3} (1-\lambda^2)^2)$ .

Для любого натурального числа  $k$  и для любого  $t \in [0, 1]$  положим:

$$\Omega_{k,t} = \{\omega \in \Omega_0 : t \in E_{k,\omega}\}$$

и

$$E_k = \{t \in [0, 1] : \mu(\Omega_{k,t}) > \alpha \mu(\Omega_0)\}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$m(E_k) \geq \frac{\frac{1}{3}(1-\lambda^2)^2 - \alpha}{1-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Для доказательства (5) положим

$$G_k = \{(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega : \omega \in \Omega_0, t \in E_{k,\omega}\}$$

и пусть  $\chi_k$  есть характеристическая функция множества  $G_k$ .

Тогда из (4) в силу теоремы Фубини получим:

$$\int_0^1 m(dt) \int_{\Omega} \chi_k(t, \omega) \mu(d\omega) > \frac{1}{3} (1-\lambda^2)^2 \mu(\Omega_0). \quad (6)$$

С другой стороны, в силу определения множеств  $E_k$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 m(dt) \int_{\Omega} \chi_k(t, \omega) \mu(d\omega) &= \int_{E_k} m(dt) \int_{\Omega} \chi_k(t, \omega) \mu(d\omega) + \\ &+ \int_{[0,1] \setminus E_k} m(dt) \int_{\Omega} \chi_k(t, \omega) \mu(d\omega) \leq m(E_k) \mu(\Omega_0) + (1-m(E_k)) \alpha \mu(\Omega_0) = \\ &= (\alpha + (1-\alpha)m(E_k)) \mu(\Omega_0); \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь легко видеть, что (5) следует из (6) и (7).

Таким образом, для любого натурального  $k$  существует множество  $E_k$ , для которого справедливо (5) и такое, что для любого  $t \in E_k$  выполняется неравенство

$$\mu(\Omega_{k,t}) > \alpha \mu(\Omega_0). \quad (8)$$

Положим  $E = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k$ . Тогда  $m(E) > 0$  и, следовательно  $E$  не пусто. Возьмем некоторое  $t_0 \in E$ . Тогда из (2), (3) и (8) следует, что при бесконечно многих значениях  $k$  выполняется неравенство

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} r_i(t_0) x_i(\omega) \right\| > \lambda \sqrt{M} \right\} \geq \alpha \mu(\Omega_0), \quad (9)$$

откуда получаем, что ряд  $\sum r_i(t_0) x_i(\omega)$  не является сходящимся по мере на  $\Omega$ . С другой стороны безусловная сходимость по мере ряда  $\sum x_i(\omega)$  эквивалентна сходимости ряда  $\sum \varepsilon_i x_i(\omega)$  при любом выборе знаков  $\varepsilon_i = \pm 1$ , что противоречит неравенству (9). Теорема 1 доказана.

Заметим, что теорема 1 содержит в себе в качестве частных случаев две теоремы доказанные В. Орlichem. Это случай, когда  $H$  совпадает с действительной прямой <sup>(2)</sup> и случай, когда функции  $x_i(\omega)$  постоянные <sup>(3)</sup> (см. также <sup>(4)</sup>).

Следующая теорема относится к  $C$  — последовательностям по мере (см. <sup>(5)</sup>, III, § 8 и <sup>(6)</sup>, стр. 300).

**О п р е д е л е н и е.** Последовательность  $\{x_i(\omega)\}$  называется  $C$  — последовательностью по мере на  $\Omega$ , если для любой сходящейся к нулю последовательности чисел  $\{a_n\}$  ряд  $\sum a_i x_i(\omega)$  сходится по мере на  $\Omega$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\{x_i(\omega)\}$  есть  $C$  — последовательность по мере на  $\Omega$ . Тогда ряд  $\sum \|x_i(\omega)\|^2$  сходится почти всюду на  $\Omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{\lambda_i\}$  — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда при любом  $t \in [0, 1]$ ,  $\lim r_i(t) \lambda_i = 0$ . Поэтому в силу условия ряд  $\sum r_i(t) \lambda_i x_i(\omega)$  сходится по мере на  $\Omega$  при любом  $t \in [0, 1]$ . Тогда из теоремы 1 следует, что ряд  $\sum \|\lambda_i x_i(\omega)\|^2$  сходится почти всюду на  $\Omega$ . В силу произвольности последовательности  $\{\lambda_i\}$  отсюда следует, что ряд  $\sum \|x_i(\omega)\|^2$  сходится почти всюду на  $\Omega$ , что и требовалось.

Ереванский государственный университет

### Յ. Ա. ԲԱԼԱՅԱՆ

#### Երկու հետևանք Պելի — Չիգմունդի անհավասարությունից

Թող  $H$ -ն իրական կամ կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է.  $(\mu, \Omega)$ -ն չափելի տարածություն,  $\mu(\Omega) < \infty$  և  $x_i, i = 1, 2, \dots$  չափելի արտադրականություններ են  $\Omega$ -ից  $H$ .

Ապացուցված են հետևյալ թեորեմները.

**Թեորեմ 1.** Եթե  $\sum x_i(\omega)$  շարքն ըստ չափի ոչ պայմանական զուգամետ է  $\Omega$ -ի վրա, ապա  $\sum \|x_i(\omega)\|^2$  շարքը զուգամետ է համարյա ամենուրեք  $\Omega$ -ի վրա:

**Թեորեմ 2.** Եթե  $\{x_i(\omega)\}$ -ն ըստ չափի  $C$  — հաջորդականություն է  $\Omega$ -ի վրա, ապա  $\sum \|x_i(\omega)\|^2$  շարքը զուգամետ է համարյա ամենուրեք  $\Omega$ -ի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ЧИТАТЕЛЬСТВО

1 Ж.—П. Кахан, Случайные функциональные ряды, „Мир“, М., 1973. 2 W. Orlicz, *Studia Math.* 4, 27—32, (1933). 3 W. Orlicz, *Studia Math.* 4, 33—37, (1933). 4 Ф. А. Талалян, Матем. заметки, 12:3, 275—280, (1972). 5 S. Rolewicz, *Metric. linear spaces*, Warszawa, 1972. 6 W. Orlicz, *Studia Math.* 12, 286—307, (1951).

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

### К теории гомоморфизмов универсальных алгебр

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/III 1976)

1. В работах (1-2) вводится новое определение гомоморфизма и развивается соответствующая теория универсальных алгебр. О многих сходствах и отличиях возникающей при этом теории по сравнению с обычной теорией универсальных алгебр упомянуто нами (2). Настоящая работа является продолжением этих работ. Параллелизм между обычной теорией универсальных алгебр и той теорией, которая возникает при новом подходе определения гомоморфизма далеко не полный. И здесь мы замечаем ряд специфичных ситуаций, связанных с новым определением гомоморфизма. Отметим лишь один из них. Как и в обычной теории универсальных алгебр (3), ядра новых гомоморфизмов являются конгруэнциями. Обратное утверждение в обычной теории универсальных алгебр, как известно, также верно: каждая конгруэнция является ядром некоторого гомоморфизма. Однако, при новом определении гомоморфизма, на некоторых алгебрах, оказывается существуют такие конгруэнции, которые не являются ядрами подходящих гомоморфизмов. В связи с этим возникает понятие ядерной конгруэнции.

Под словом «алгебра» в дальнейшем подразумевается универсальная алгебра.

2. Если  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$  — алгебра, то аридность операции  $A \in \Sigma$  обозначается обычным путем  $|A|$ . Тип алгебры  $D$  определим как множество:

$$T = \{ |A| \mid A \in \Sigma \}.$$

Например, тип кольца, по нашему определению, есть множество  $\{2\}$ . Алгебры  $D$  и  $D'$  называются однотипными, если они имеют равные типы. Если тип алгебры равен  $T$ , то ее будем еще называть  $T$  — алгеброй. Алгебру  $D' = \langle Q'; \Sigma' \rangle$  будем называть подалгеброй  $T$  — алгебры  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$  и писать  $D' \leq D$ , если  $Q' \subseteq Q$ ,  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  и  $D'$  является  $T$  — алгеброй. Например, каждая коммутативная группа есть подалгебра некоторого кольца. Равенство двух алгебр определяется так:

$$D = D' \Leftrightarrow Q = Q', \Sigma = \Sigma'.$$

Класс всех подалгебр одной и той же алгебры (включая быть может пустое множество) образует полную решетку относительно частичного порядка „ $\leq$ “.

**Теорема 1.** *Полная решетка всех подалгебр каждой алгебры является компактно-порожденной (определение см. в (1)).*

Подалгебры вида  $\langle Q'; \Sigma \rangle$  алгебры  $\langle Q; \Sigma \rangle$  будем называть главными подалгебрами. Класс всех главных подалгебр одной и той же алгебры также образует полную решетку.

**Теорема 2.** *Полная решетка главных подалгебр каждой алгебры является компактно-порожденной.*

Справедливо и обращение этого утверждения.

**Теорема 3.** *Каждая полная компактно-порожденная решетка изоморфна решетке главных подалгебр некоторой алгебры.*

**Следствие.** *Каждая полная компактно-порожденная решетка вкладывается в решетку всех подалгебр некоторой алгебры.*

Если

$$M_D = \{ \langle Q_i; \Sigma_j \rangle \mid i \in I, j \in J \}$$

есть класс всех подалгебр алгебры  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ , то совокупности

$$M_Q = \{ Q_i \mid i \in I \}$$

$$M_\Sigma = \{ \Sigma_j \mid j \in J \}$$

являются полными решетками относительно теоретико-множественного включения. Эти решетки соответственно называются первой и второй решеткой подалгебр алгебры  $D$ . Понятно, что решетка главных подалгебр вкладывается в первую решетку подалгебр, а вторая решетка подалгебр всегда вкладывается в решетку всех подалгебр заданной алгебры.

**Теорема 4.** *Первая и вторая решетка подалгебр каждой алгебры является компактно-порожденной. Вторая решетка подалгебр  $M_\Sigma$  каждой алгебры является подрешеткой в решетке всех частей множества  $\Sigma$ .*

3. Перейдем, теперь, к понятию гомоморфизма.

Пусть  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$  и  $D' = \langle Q'; \Sigma' \rangle$  две одноподобные алгебры.

Упорядоченная пара  $(\varphi, \bar{\psi})$  отображений  $\varphi: Q \rightarrow Q'$ ,  $\bar{\psi}: \Sigma \rightarrow \Sigma'$  называется гомоморфизмом из алгебры  $D$  в алгебру  $D'$  и обозначается

$(\varphi, \bar{\psi}): D \Rightarrow D'$ , если отображение  $\bar{\psi}$  сохраняет ариность операций и для любых  $A \in \Sigma$ ,  $|A| = n$  и  $x_1, \dots, x_n \in Q$  справедливо равенство:

$$\varphi[A(x_1, \dots, x_n)] = [\bar{\psi}A](\varphi x_1, \dots, \varphi x_n).$$

Пара  $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$  тождественных отображений  $\varepsilon: Q \rightarrow Q$ ,  $\bar{\varepsilon}: \Sigma \rightarrow \Sigma$  есть гомоморфизм алгебры  $D$  в себя.

Пара  $\langle \varphi Q; \bar{\psi} \Sigma \rangle$  является подалгеброй алгебры  $D'$  и называется гомоморфным образом алгебры  $D$ .

Если пары  $(\varphi, \bar{\psi}) : D \Rightarrow D_1$  и  $(\lambda, \bar{\mu}) : D_1 \Rightarrow D'$  являются гомоморфизмами, то пара отображений  $(\varphi\lambda, \bar{\psi}\bar{\mu})$  есть гомоморфизм  $D \Rightarrow D'$  и она называется произведением гомоморфизмов  $(\varphi, \bar{\psi})$  и  $(\lambda, \bar{\mu})$ . Таким образом, алгебры и их гомоморфизмы (в качестве морфизмов) образуют категорию.

Гомоморфизм алгебры в себя называется ее эндоморфизмом. Множество всех эндоморфизмов одной и той же алгебры образует полугруппу с единицей.

Эндоморфизм вида  $(\varphi, \bar{\varepsilon})$  называется главным эндоморфизмом. Совокупность всех главных эндоморфизмов образует полугруппу с единицей.

*Теорема 5. Каждая полугруппа с единицей изоморфна полугруппе главных эндоморфизмов подходящей алгебры.*

*Следствие. Каждая полугруппа с единицей вкладывается в полугруппу всех эндоморфизмов некоторой алгебры.*

Если

$$\text{End } D = \{ (\varphi_i, \bar{\psi}_j) \mid i \in I, j \in J \}$$

есть полугруппа всех эндоморфизмов алгебры  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ , то совокупность

$$\text{End } Q = \{ \varphi_i \mid i \in I \}$$

образует полугруппу с единицей и называется первой полугруппой эндоморфизмов алгебры  $D$ . Аналогично, совокупность

$$\text{End } \Sigma = \{ \bar{\psi}_j \mid j \in J \}$$

называется второй полугруппой эндоморфизмов.

*Теорема 6. Полугруппа главных эндоморфизмов вкладывается в первую полугруппу эндоморфизмов и*

$$\text{End } D = \text{End } Q \times \text{End } \Sigma$$

*тогда и только тогда, когда  $\text{End } \Sigma$  — одноэлементна.*

*Следствие. Каждая полугруппа с единицей вкладывается в первую полугруппу эндоморфизмов некоторой алгебры.*

Гомоморфизм  $(\varphi, \bar{\psi})$  называется эпиморфизмом, если отображения  $\varphi, \bar{\psi}$  сюръективны и мономорфизмом, если отображения  $\varphi, \bar{\psi}$  инъективны. Изоморфизм — это одновременно эпи- и мономорфизм. Изоморфизм алгебры в себя называется ее автоморфизмом. Множество всех автоморфизмов одной и той же алгебры  $D$  образует группу

$Aut D$ . Автоморфизм вида  $(\varphi, \bar{\varphi})$  называется главным автоморфизмом, их совокупность также образует группу.

**Теорема 7.** Каждая группа изоморфна группе главных автоморфизмов некоторой алгебры.

**Следствие.** Каждая группа вкладывается в группу всех автоморфизмов некоторой алгебры.

Множество всех обратимых элементов первой полугруппы эндоморфизмов называется первой группой автоморфизмов алгебры и обозначается через  $Aut Q$ . Аналогично определяется и обозначается вторая группа автоморфизмов. Понятно, что группа главных автоморфизмов вкладывается в первую группу автоморфизмов.

**Теорема 8.** Группа главных автоморфизмов является нормальным делителем во всей группе автоморфизмов и

$$Aut D = Aut Q \times Aut \Sigma$$

тогда и только тогда, когда  $Aut \Sigma$  — одноэлементна.

**Следствие.** Каждая группа вкладывается в первую группу автоморфизмов некоторой алгебры.

Для последнего результата справедлива и двойственная формулировка, т. е. каждую группу можно вложить и во вторую группу автоморфизмов некоторой алгебры. Мы хотим сформулировать этот результат в более сильном варианте.

**Теорема 9.** Каждая группа одновременно вкладывается как в первую, так и во вторую группу автоморфизмов подходящей алгебры.

С каждым гомоморфизмом  $(\varphi, \bar{\varphi}) : D \Rightarrow D'$  связана пара отношений эквивалентностей  $r$  и  $\bar{t}$ , определенная соответственно на множествах  $Q$  и  $\Sigma$  алгебры  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ . При этом:

$$x r y \iff \varphi x = \varphi y, \quad x, y \in Q,$$

$$A \bar{t} B \iff \bar{\varphi} A = \bar{\varphi} B, \quad A, B \in \Sigma.$$

Упорядоченная пара  $(r, \bar{t})$  называется ядром гомоморфизма  $(\varphi, \bar{\varphi})$  и обозначается через  $Ker(\varphi, \bar{\varphi})$ .

4. Пусть  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$  — произвольная алгебра, а  $r$  и  $\bar{t}$  — некоторые отношения эквивалентности, определенные соответственно на множествах  $Q$  и  $\Sigma$ . Упорядоченную пару  $(r, \bar{t})$  назовем конгруэнцией алгебры  $D$ , если:

а) из отношений  $x_1 r x'_1, \dots, x_m r x'_m$  следует

$$A(x_1, \dots, x_m) r A(x'_1, \dots, x'_m) \quad \text{где } x_i, x'_i \in Q, A \in \Sigma, |A| = m,$$

б) из отношения  $A \bar{t} B$  следует  $|A| = |B|$  и

$$A(x_1, \dots, x_n) \sim B(x_1, \dots, x_n) \text{ для любых } x_1, \dots, x_n \in Q,$$

$$\text{где } A, B \in \Sigma, |A| = n.$$

Нулевая конгруэнция определяется как пара  $(0, 0)$ , где:

$$x \sim y \iff x = y, \quad x, y \in Q,$$

$$A \sim B \iff A = B, \quad A, B \in \Sigma.$$

Единиичная конгруэнция определяется как пара  $(1, 1)$ , где:

$$x \sim y \iff x, y \in Q,$$

$$A \sim B \iff |A| = |B|, \quad A, B \in \Sigma.$$

Нетрудно проверить, что ядро любого гомоморфизма является конгруэнцией.

Пусть  $q_1 = (r_1, t_1)$  и  $q_2 = (r_2, t_2)$  две конгруэнции некоторой алгебры, определим:

$$q_1 \leq q_2 \iff r_1 \leq r_2, \quad t_1 \leq t_2.$$

Класс всех конгруэнций, определенных на одной и той же алгебре образует полную решетку относительно частичного порядка " $\leq$ ".

**Теорема 10.** *Полная решетка всех конгруэнций каждой алгебры является компактно-порожденной.*

Если

$$L_D = \{ (r_i, t_j) \mid i \in I, j \in J \}$$

есть класс всех конгруэнций алгебры  $D$ , то совокупности

$$L_Q = \{ r_i \mid i \in I \}$$

$$\text{и } L_\Sigma = \{ t_j \mid j \in J \}$$

также образуют полные решетки. Решетки  $L_Q$  и  $L_\Sigma$  называются соответственно первой и второй решеткой конгруэнций алгебры  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ .

**Теорема 11.** *Первая и вторая решетки конгруэнций каждой алгебры являются компактно-порожденными.*

Справедливо и обратное утверждение.

**Теорема 12.** *Каждая полная компактно-порожденная решетка изоморфна первой решетке конгруэнций некоторой алгебры.*

Существует и другая характеристика первой и второй решетки конгруэнций. А именно справедлива следующая.

**Теорема 13.** *Первая решетка конгруэнций  $L_Q$  является подрешеткой в решетке всех эквивалентностей множества  $Q$ . Вторая решетка  $L_\Sigma$  является подрешеткой в решетке всех эквивалентностей множества  $\Sigma$ .*

Пусть  $q = (r, \bar{t})$  есть конгруэнция алгебры  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ . Элементы фактор-множества  $\Sigma/\bar{t} = \bar{\Sigma}$  можно трактовать как операции, определенные на фактор-множестве  $Q/r = \bar{Q}$  следующим путем:

$$\bar{A}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \overline{A(x_1, \dots, x_n)},$$

где  $\bar{A} \in \bar{\Sigma}$ ,  $|A| = n$ ,  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \bar{Q}$ .

Корректность определения операций  $\bar{A}$  следует из определения конгруэнции. Таким образом, определена алгебра  $\langle Q/r; \Sigma/\bar{t} \rangle$ , называемая фактор-алгеброй алгебры  $D$  по конгруэнции  $q$  и обозначается как  $D/q$ .

Фактор-алгебра  $T$ -алгебры есть  $T$ -алгебра.

Пара  $(\varphi, \bar{\psi})$  отображений  $\varphi: x \rightarrow \bar{x}$ ,  $\bar{\psi}: A \rightarrow \bar{A}$  является эпиморфизмом  $D \rightarrow D/q$ . Он называется естественным гомоморфизмом.

**Теорема о гомоморфизмах.** Если  $(\varphi, \bar{\psi}): D \rightarrow D'$  есть эпиморфизм и  $\text{Ker}(\varphi, \bar{\psi}) = q$ , то существует изоморфизм  $(\lambda, \bar{\mu}): D' \rightarrow D/q$  такой, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(\varphi, \bar{\psi})} & \\ \text{---} D & \xrightarrow{\quad} & D' \text{---} \\ (\varphi, \bar{\psi}) \searrow & & \parallel (\lambda, \bar{\mu}) \\ & & D/q \end{array}$$

т. е.  $\varphi = \varphi\lambda$  и  $\bar{\psi} = \bar{\psi}\bar{\mu}$ .

5. Как уже было отмечено, ядро  $(r, \bar{t})$  любого гомоморфизма является конгруэнцией. Обратное утверждение однако не верно, т. е. существуют конгруэнции не являющиеся ядрами подходящих гомоморфизмов. Рассмотрим пример алгебры  $\langle Q; \Sigma \rangle$ , для которой отображение  $A \rightarrow |A|$  не является инъекцией. Пара  $q = (1, \bar{t})$ , где  $\bar{t} < \bar{1}$ , является конгруэнцией алгебры  $\langle Q; \Sigma \rangle$ , хотя понятно, что она не может быть ядром для некоторого гомоморфизма.

В связи с этим конгруэнцию  $q = (r, \bar{t})$  будем называть ядерной, если она является ядром некоторого гомоморфизма. Для каждой алгебры нулевая и единичная конгруэнции являются ядерными. Существует такая алгебра, которая не обладает другими ядерными конгруэнциями, кроме нулевого и единичного. Например, алгебра  $\langle Q; \Sigma \rangle$ , где  $\Sigma$  — класс всех унарных операций определенных на множестве  $Q$ . Напротив, существуют и алгебры, каждая конгруэнция которых ядерна. Этим свойством обладает, например, каждый групп.

Теорема 14. Конгруэнция  $q = (r, \bar{t})$  алгебры  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$  является ядерной тогда и только тогда, когда она является ядром естественного гомоморфизма  $(\varphi, \bar{\psi}) : D \Rightarrow D/q$ .

Пусть  $S$  — некоторое множество и  $\Theta$  — некоторое отношение эквивалентности этого множества. Если  $H \subseteq S$ , то его  $\Theta$  — замыкание обозначим через  $[H]\Theta$ :

$$[H]\Theta = \{ a \in S \mid a \Theta h \text{ для некоторого } h \in H \}.$$

Ограничение отношения  $\Theta$  на подмножестве  $H$  будем обозначать через  $\Theta_H$ .

Если  $D' = \langle Q'; \Sigma' \rangle$  есть подалгебра алгебры  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$  и  $q = (r, \bar{t})$  — конгруэнция алгебры  $D$ , то нетрудно проверить, что пара  $\langle [Q']r; [\Sigma']\bar{t} \rangle$  является подалгеброй алгебры  $D$  и пара  $\langle r_{Q'}; \bar{t}_{\Sigma'} \rangle$  — конгруэнцией подалгебры  $D'$ . Подалгебру  $\langle [Q']r; [\Sigma']\bar{t} \rangle$  обозначим через  $[D']q$ , а конгруэнцию  $\langle r_{Q'}; \bar{t}_{\Sigma'} \rangle$  — через  $q_{D'}$ .

Первая теорема об изоморфизмах. Если  $D'$  — подалгебра алгебры  $D$  и  $q$  — конгруэнция алгебры  $D$  такая, что  $[D']q = D$  то алгебры  $D/q$  и  $D'/q_{D'}$  изоморфны.

Пусть  $D = \langle Q; \Sigma \rangle$  — произвольная алгебра и  $q = (r, \bar{t})$  — ядерная конгруэнция алгебры  $D$ . Рассмотрим произвольную конгруэнцию  $\phi = (e, \bar{s})$  алгебры  $D$  такую, что  $q \leq \phi$ . Определим бинарные отношения  $e/r$  и  $\bar{s}/\bar{t}$  соответственно на множествах  $Q/r$  и  $\Sigma/\bar{t}$  следующим путем:

$$\bar{x} e/r \bar{y} \iff xly, \quad x, y \in Q, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \bar{Q}.$$

$$\bar{A} \bar{s}/\bar{t} \bar{B} \iff AsB, \quad A, B \in \Sigma, \quad \bar{A}, \bar{B} \in \bar{\Sigma}.$$

Из ядерности конгруэнции  $q$  следует, что отношения  $e/r$  и  $\bar{s}/\bar{t}$  определены корректно и нетрудно проверить, что пара  $\langle e/r, \bar{s}/\bar{t} \rangle$  является конгруэнцией на фактор-алгебре  $D/q$ . Конгруэнция  $\langle e/r, \bar{s}/\bar{t} \rangle$  обозначается через  $\phi/q$ .

Вторая теорема об изоморфизмах. Если  $q$  и  $\phi$  такие ядерные конгруэнции алгебры  $D$ , что  $q < \phi$ , то алгебры  $D/\phi$  и  $D/q/\phi/q$  изоморфны.

Ереванский государственный университет.

Ունիվերսալ հանրահաշիվների հոմոմորֆիզմների տեսության շուրջը

Հեղինակի (1, 2) աշխատանքներում ներմուծվել է հոմոմորֆիզմի նոր սահմանում և դարգացվել ունիվերսալ հանրահաշիվների համապատասխան տեսություն: Ներկա հոդվածը հանդիսանում է (1, 2) աշխատանքների շարունակությունը: Հոդվածում ուսումնասիրվում են՝

1. Ունիվերսալ հանրահաշիվի ավտոմորֆիզմների առաջին, երկրորդ և գլխավոր խմբերը:

2. Ունիվերսալ հանրահաշիվի էնդոմորֆիզմների առաջին, երկրորդ և գլխավոր կիսախմբերը:

3. Ունիվերսալ հանրահաշիվի կոնգրուենցիաների առաջին և երկրորդ ստրուկտուրաները:

4. Ունիվերսալ հանրահաշիվի միջուկային կոնգրուենցիաները:

Հետազոտությունների բոլոր այս ուղղությունները կապված են հոմոմորֆիզմի նոր սահմանման հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Ю. М. Мовсисян, «Научный работник ЕГУ», № 18, 3—11, 1973. <sup>2</sup> Ю. М. Мовсисян «Известия АН Арм. ССР», сер. «Математика», № 5, 1976. <sup>3</sup> П. Кон, Универсальная алгебра, «Мир», 1968. <sup>4</sup> А. Г. Курош, Общая алгебра, «Наука», 1974.

УДК 621.315.592—416 : 537

ФИЗИКА

Г. М. Арутюнян, Х. В. Неркаряян

### Многофотонный эффект Штарка в размерно-квантованном полупроводнике

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 3/1 1976)

Известно, что воздействие интенсивной электромагнитной волны на полупроводники в условиях насыщения в поглощении приводит к появлению дополнительной щели в спектре квазичастиц <sup>(1)</sup>. Этот эффект имеет ряд специфических черт, когда электронный газ обладает квазидискретным спектром <sup>(2,3)</sup>.

В последнее время к такого рода физической ситуации <sup>(1)</sup> привлечено внимание в связи с возможностью реализации в ней механизма высокотемпературной сверхпроводимости <sup>(4)</sup>. Недавно появились работы <sup>(5,6)</sup>, в которых рассматривалось влияние ускорения свободных носителей лазерным световым полем на электронный спектр полупроводника.

В настоящей работе, в рамках двухзонной модели, рассмотрено влияние внутризонного движения электронов и дырок полем волны на перестройку волновых функций и энергетического спектра полупроводника при наличии квантового размерного эффекта (КРЭ). Рассмотрение, как и в <sup>(2)</sup>, ведется в модели пленки, описываемой потенциалом с бесконечно высокими стенками. Волновые функции и энергетический спектр электронов с учетом зонной структуры и КРЭ запишутся в виде («v» — валентная зона, «с» — зона проводимости)

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\rho, n}^v &= u_{\rho}^v(\rho) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{\rho} \vec{r}} \chi_n(z), & \chi_n &= \left(\frac{2}{d}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi n}{d} z \\ \psi_{\rho, m}^c &= u_{\rho}^c(\rho) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{\rho} \vec{r}} \chi_m(z), & \chi_m &= \left(\frac{2}{d}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi m}{d} z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(m, n = 1, 2, 3 . . .)

$$\left. \begin{aligned} E_{p,n}^v &= -\frac{\Delta(d)}{2} - \frac{\vec{p}_p^2}{2m^*}, \\ E_{p,m}^c &= \frac{\Delta(d)}{2} + \frac{\vec{p}_p^2}{2m^*} \end{aligned} \right\} \Delta(d) = \Delta + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} (m^2 + n^2) \quad (2)$$

Далее будем опускать индекс  $p$  у  $p_p$ . Здесь  $u_p^{c,v}$  — модулирующие блоховские функции,  $d$  — толщина пленки,  $\Delta$  — ширина запрещенной зоны без учета КРЭ и для простоты выкладок массы носителей заряда выбраны одинаковыми —  $m_c = m_v = m^*$ .

Пусть полупроводящая пленка облучается мощной электромагнитной волной, распространяющейся по оси  $z$ , описываемой вектор-потенциалом

$$\vec{A}_p = \vec{A}_p^0 \cos(\Omega t - sz). \quad (3)$$

Здесь  $s$  — волновой вектор фотона, которым в случае КРЭ нельзя пренебречь, т. к. одноэлектронные волновые функции  $\chi_n$  и  $\chi_m$  не соответствуют состоянию с определенным импульсом, а соответствующие волновые числа  $\frac{\pi n}{d}$  и  $\frac{\pi m}{d}$ , приближенно характеризующие электронные состояния, могут быть порядка самого  $s$ .

С учетом (3) гамильтониан системы в поле излучения запишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{H} = \frac{1}{2m^*} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}_p \right)^2 &= \hat{H}_0 + \frac{ie\hbar(\vec{E}_p^0 \cdot \vec{\nabla}_p)}{m^* \Omega} \cos(\Omega t - sz) + \\ &+ \frac{e^2 |\vec{E}_p^0|^2}{2m^* \Omega^2} \cos^2(\Omega t - sz), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\hat{H}_0 = \vec{p}^2 / 2m^*$  — гамильтониан невозмущенной пленочной системы,  $\vec{E}_p^0$  — амплитуда напряженности электрического вектора в волне.

По определению

$$H_0 \varphi_{p,n}^v = E_{p,n}^v \varphi_{p,n}^v, \quad H_0 \varphi_{p,m}^c = E_{p,m}^c \varphi_{p,m}^c \quad (5)$$

Решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (6)$$

будем искать в следующем виде:

$$\Psi = a(t) \varphi_{p,n}^v \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{p,n}^v t\right) + b(t) \varphi_{p,m}^c \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{p,m}^c t\right). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и воспользовавшись (5) имеем

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da(t)}{dt} &= (V_{nn} - Y_{nn} - \Delta_0)a(t) - V_{nm}b(t) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \left( E_{p,m}^c - E_{p,n}^v \right) t \right] \\ i\hbar \frac{db(t)}{dt} &= (-V_{mm} + Y_{mm} + \Delta_0)b(t) - V_{nm}a(t) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( E_{p,m}^c - E_{p,n}^v \right) t \right] \end{aligned} \quad (8)$$

где матричные элементы межзонных и внутрizonных оптических переходов есть:

$$\begin{aligned} V_{nm} &= W_{nm} \cos \Omega t + U_{nm} \sin \Omega t = \\ &= \frac{e(\vec{E}_p^0 \cdot \vec{v}_{cv}) \cdot 4\pi^2 mnsd \{ (-1)^{m+n} \sin sd \cos \Omega t + |1 - (-1)^{m+n} \cos sd| \sin \Omega t \}}{\Omega [\pi^2(n+m)^2 - s^2d^2] [\pi^2(n-m)^2 - s^2d^2]}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_{nn} &= W_{nn} \cos \Omega t + U_{nn} \sin \Omega t = \\ &= \frac{e(\vec{E}_p^0 \cdot \vec{v}_{cv}) 4\pi^2 n^2 \{ \sin sd \cos \Omega t - (1 - \cos sd) \sin \Omega t \}}{\Omega sd (s^2d^2 - 4\pi^2 n^2)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Y_{nn} &= A_{nn} \cos 2\Omega t + B_{nn} \sin 2\Omega t = \\ &= \frac{\Delta_0 \pi^2 n^2 \{ \sin 2sd \cos 2\Omega t - (1 - \cos 2sd) \sin 2\Omega t \}}{2sd (\pi^2 n^2 - s^2d^2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta_0 = \frac{e^2 |\vec{E}_p^0|^2}{4m^* \Omega^2}. \quad (12)$$

Выражение  $V_{mm}$  получается из (10) заменой индексов ( $n \rightarrow m$ ) и ( $v \rightarrow c$ ), а  $Y_{mm}$  из (11) заменой ( $n \rightarrow m$ ). Заметим, что  $V_{nm} = \dot{V}_{mn}$ . Через  $\vec{v}_{vv}$  и  $\vec{v}_{cc}$  мы обозначаем скорости "v" и "c" — электронов;  $\vec{v}_{cv} = \vec{v}_{vc}$  — недиагональный по индексам зон матричный элемент оператора скорости (2).

Перейдем от амплитуд  $a(t)$  и  $b(t)$  к  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  с помощью преобразований

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha(t) \exp \frac{i}{\hbar} \left( -\frac{W_{nn}}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{U_{nn}}{\Omega} \cos \Omega t + \frac{A_{nn}}{2\Omega} \sin 2\Omega t - \frac{B_{nn}}{2\Omega} \cos 2\Omega t + \Delta_0 t \right) \\ b(t) &= \beta(t) \exp \frac{i}{\hbar} \left( +\frac{W_{mm}}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{U_{mm}}{\Omega} \cos \Omega t - \frac{A_{mm}}{2\Omega} \sin 2\Omega t + \frac{B_{mm}}{2\Omega} \cos 2\Omega t - \Delta_0 t \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда система (8) переписывается в виде

$$i \frac{da(t)}{dt} = -F_{nm} \exp(-i2\varepsilon t) \beta(t),$$

$$i \frac{d\beta(t)}{dt} = -\bar{F}_{nm} \exp(i2\varepsilon t) a(t), \quad (14)$$

где введено следующее обозначение:

$$2\hbar F_{nm} = (W_{nm} - iU_{nm}) \sum_{l, k, k'} i^{3l+k} J_{-l+N-1+2(k-k)}(Z_1) J_l(Z_2) J_k(\mu_1) J_{k'}(\mu_2) +$$

$$+ (W_{nm} + iU_{nm}) \sum_{l, k, k'} i^{3l+k} J_{-l+N+1+2(k-k)}(Z_1) J_l(Z_2) J_k(\mu_1) J_{k'}(\mu_2). \quad (15)$$

В выражении (15) под знаком суммы стоят произведения функций Бесселя целого индекса, аргументы которых есть

$$Z_1 = \frac{W_{mm} + W_{nn}}{\hbar\Omega}, \quad Z_2 = \frac{U_{mm} + U_{nn}}{\hbar\Omega}, \quad \mu_1 = \frac{A_{mm} + A_{nn}}{2\hbar\Omega},$$

$$\mu_2 = \frac{B_{mm} + B_{nn}}{2\hbar\Omega}. \quad (15')$$

При получении системы (14) воспользовались условием резонанса

$$2\Delta_0 + E_{p,m}^c - E_{p,n}^v - N\hbar\Omega = \hbar\varepsilon, \quad |\varepsilon|/\Omega \ll 1 \quad (16')$$

Система (14) допускает экспоненциальное решение со следующими значениями  $\lambda$

$$\lambda_{1,2} = \varepsilon(-1 \mp \sqrt{1 + \xi}), \quad \xi = \frac{|F_{nm}|^2}{\varepsilon^2}. \quad (17)$$

При выключении поля  $E_p^0 \rightarrow 0$  или, что то же ( $\xi \rightarrow 0$ ),  $\lambda_1 \rightarrow -\hbar\varepsilon$ , а  $\lambda_2 \rightarrow 0$ , поэтому  $\lambda_1$  соответствует „сдвигу“ пленочного уровня в „v“-зоне, а  $\lambda_2$  в „c“-зоне.

При  $\lambda = \lambda_{1,2}$  из (14) следует

$$\Psi_{p,n}^v = \left[ \alpha_0 \sum_{l'=-\infty}^{\infty} c_{l'} e^{il'\Omega t} \varphi_{p,n}^v e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{p,n}^v + 2\hbar\varepsilon - \Delta_0)t} + \right.$$

$$\left. + \beta_0 \sum_{l'=-\infty}^{\infty} c_{l'}^* e^{il'\Omega t} \varphi_{p,m}^c e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{p,m}^c + \Delta_0)t} \right] e^{-i\lambda_1 t}$$

$$\Psi_{p,m}^c = \left[ \beta_0 \sum_{l'=-\infty}^{\infty} c_{l'} e^{il'\Omega t} \varphi_{p,n}^v e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{p,n}^v + 2\hbar\varepsilon - \Delta_0)t} + \right.$$

$$\left. + \alpha_0 \sum_{l'=-\infty}^{\infty} c_{l'}^* e^{il'\Omega t} \varphi_{p,m}^c e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{p,m}^c + \Delta_0)t} \right] e^{-i\lambda_2 t}, \quad (18)$$

где значения

$$\alpha_0 = \left( \frac{\sqrt{1+\xi} + 1}{2\sqrt{1+\xi}} \right)^{1/2}, \quad \beta_0 = \left( \frac{\sqrt{1+\xi} - 1}{2\sqrt{1+\xi}} \right)^{1/2} \quad (19)$$

определены из условия нормировки волновых функций. Коэффициенты  $c_l^+$  и  $c_l^-$  из (18) определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_l^+ &= \sum_{l,k,k'} i^{3k'+l} J_{l-l'+2(k+k')}(\alpha_1) J_l(\alpha_2) J_k(\beta_1) J_{k'}(\beta_2) \\ \alpha_1 &= \frac{W_{nn}}{\hbar\Omega}, \quad \alpha_2 = \frac{U_{nn}}{\hbar\Omega}, \quad \beta_1 = \frac{A_{nn}}{2\hbar\Omega}, \quad \beta_2 = \frac{B_{nn}}{2\hbar\Omega} \end{aligned} \right\} \quad (20')$$

$$\left. \begin{aligned} c_l^- &= \sum_{l,k,k'} i^{3l+k} J_{l-l-2(k-k')}(\alpha_3) J_l(\alpha_4) J_k(\beta_3) J_{k'}(\beta_4) \\ \alpha_3 &= \frac{W_{mm}}{\hbar\Omega}, \quad \alpha_4 = \frac{U_{mm}}{\hbar\Omega}, \quad \beta_3 = \frac{A_{mm}}{2\hbar\Omega}, \quad \beta_4 = \frac{B_{mm}}{2\hbar\Omega} \end{aligned} \right\} \quad (20'')$$

Нетрудно убедиться, что волновые функции (18) ортонормированы; переходят в соответствующие выражения (15) работы (2) при  $\alpha_j = \beta_j = 0$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ), а при выключении поля ( $\xi \rightarrow 0$ ) принимают свои невозмущенные значения (1).

С учетом внешнего поля спектр возбуждений запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{p,n}^v &= -\Delta_0 - \frac{\Delta(d)}{2} - \frac{p_0^2}{2m^*} \pm \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{p^2 - p_0^2}{2m^*}\right)^2 + \hbar^2 |F_{nm}|^2}, & p > p_0 \\ \sqrt{\left(\frac{p_0^2 - p^2}{2m^*}\right)^2 + \hbar^2 |F_{nm}|^2}, & p < p_0 \end{cases} \\ \varepsilon_{p,m}^c &= \Delta_0 + \frac{\Delta(d)}{2} + \frac{p_0^2}{2m^*} \pm \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{p^2 - p_0^2}{2m^*}\right)^2 + \hbar^2 |F_{nm}|^2}, & p > p_0 \\ \sqrt{\left(\frac{p_0^2 - p^2}{2m^*}\right)^2 + \hbar^2 |F_{nm}|^2}, & p < p_0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где резонансный импульс  $p_0$  определяется условием

$$p_0 = \sqrt{m^* |N\hbar\Omega - \Delta(d) - 2\Delta_0|} \quad (22)$$

Из (21) следует, что поле световой волны достаточной мощности, в условиях насыщения в поглощении приводит в размерно-квантованном спектре к новым стационарным состояниям с характерной щелью  $2\hbar|F_{nm}|$  (15), вблизи резонансного импульса  $p_0$ , которая сложным образом зависит от амплитуды поля волны, размера квантования, номеров плочных подуровней и от углов.

Условием существования щели является  $\tau^{-1} \ll |F_{nm}| \ll \Omega$  (где  $\tau$  — минимальное время релаксации частиц). При  $Z_{1,2}, \mu_{1,2} \rightarrow 0$  резонанс возникает только при  $N=1$  и (15) переходит в известный результат щели —  $\hbar|z_p|$  работы (2) ( $\hbar|z_p| \sim 10^{-2} - 10^{-3}$  эв.).

Когда  $\mu_{1,2} \ll 1$  (это соответствует пренебрежению в гамильтониане (4) третьим членом) выражение (15) упрощается

$$2\hbar F_{nm} = \left( W_{nm} - iU_{nm} \right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^{2l} J_{N-l-1}(z_1) J_l(z_2) + \left( W_{nm} + iU_{nm} \right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^{2l} J_{N-l+1}(z_1) J_l(z_2). \quad (23)$$

При  $z_1 \ll z_2 < 1$  в (23) ограничиваясь первыми членами разложения бесселевых функций по степеням аргумента при  $N=1$ , в  $z_1^2$  — приближении получим

$$|F_{nm}| = |a_p| \left( 1 - \frac{3}{4} z_1^2 + \frac{3}{16} z_1^4 \right)^{1/2}, \quad z_1 < 1 \quad (24)$$

То есть учет внутризонного движения приводит к ограничению величины щели, рассмотренной в [2]. Одновременно с этим появляется возможность многофотонного резонанса ( $N > 1$ ). Соответственно, волна индуцирует уже не одну, а целую серию запрещенных щелей в размерно-квантованных зонах. При  $N$  — фотонном резонансе ширина щели будет пропорциональна  $\hbar |z_p| z_1^{N-1} \sim |E_p^n|^{1/N}$ .

Представляется интересным случай  $\mu_{1,2} \gg z_{1,2}$  (это соответствует пренебрежению в гамильтониане вторым членом в сравнении с третьим). В этом случае при дополнительном условии  $\mu_2 \ll \mu_1$ , возможна ситуация немоногонного изменения ширины щели с изменением числа фотонов —  $N$ .

Ереванский государственный университет

#### Գ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Խ. Վ. ՆԵՐՎԱՐԱՐՅԱՆ

Բազմաֆոտոն Շտաբկ-էֆեկտը չափային փանտացված կիսահաղորդչում

Չափային փանտացված կիսահաղորդչում դիտարկված են լուսային ալիքով պայմանավորված էլեկտրոնների (խոռոչների) մեջգոնային շարժման ներդրումը միջգոնային անցումներում, Երկղոնային մոդելի սահմաններում որոշված են էլեկտրոնի էներգետիկ սպեկտրը և ճշգրիտ ալիքային ֆունկցիաները բազմաֆոտոնային ուղղանսանների տիրույթներում: Ցույց է տրված, որ բազմաֆոտոն պրոցեսները սահմանափակում են թաղանթային ենթամակարդակների միաֆոտոն պրոցեսով պայմանավորված ճեղքի մեծությունը: Պարզվում է, որ հզոր լուսային ալիքը բազմաֆոտոնային ուղղանսանների տիրույթներում առաջացնում է ճեղքերի շարք:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> В. М. Галицкий, С. П. Гореславский, В. Ф. Елесин, ЖЭТФ, 57, 207 (1969). <sup>2</sup> Г. М. Арутюнян, ФТП, 7, 600, (1973). <sup>3</sup> Г. М. Арутюнян, «Радиотехника и электроника», № 5, 1061 (1974). <sup>4</sup> В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, Р. Х. Тимеров, ЖЭТФ, 65, 2343 (1973). <sup>5</sup> Ю. И. Билкарей, Э. М. Эпштейн, ФТТ, 17 2312 (1975). <sup>6</sup> В. Д. Блажин, ФТТ, 17, 2325 (1975).

УДК 542.921.547.333.4.547.435

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабалян,  
 С. Т. Кочарян, В. С. Восканян

Синтез непредельных  $\alpha$ -диалкиламинокетонов

(Представлено 14/XII 1975)

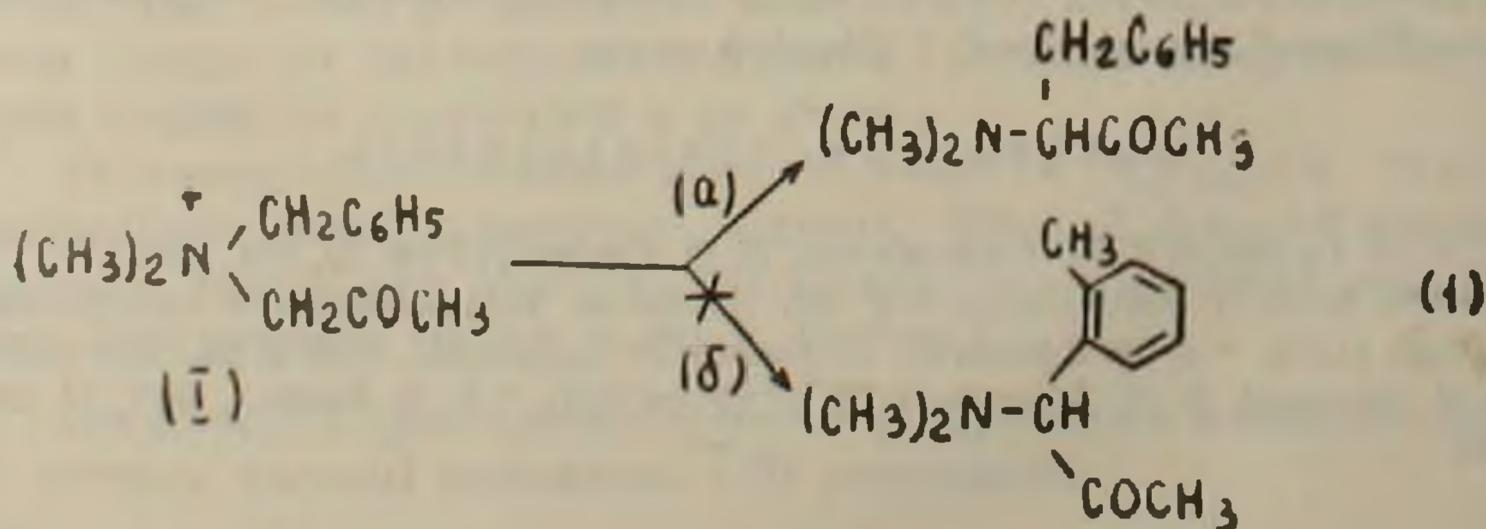
В литературе имеются лишь единичные примеры стивенсовской перегруппировки с участием ацетонильной группы в качестве принимающей (<sup>1,2</sup>).

Объяснение, по-видимому, следует искать в том, что в условиях указанных работ (одно- или дунормальные водные растворы едкого натра) имели место побочные реакции, приводящие к образованию смолообразных продуктов.

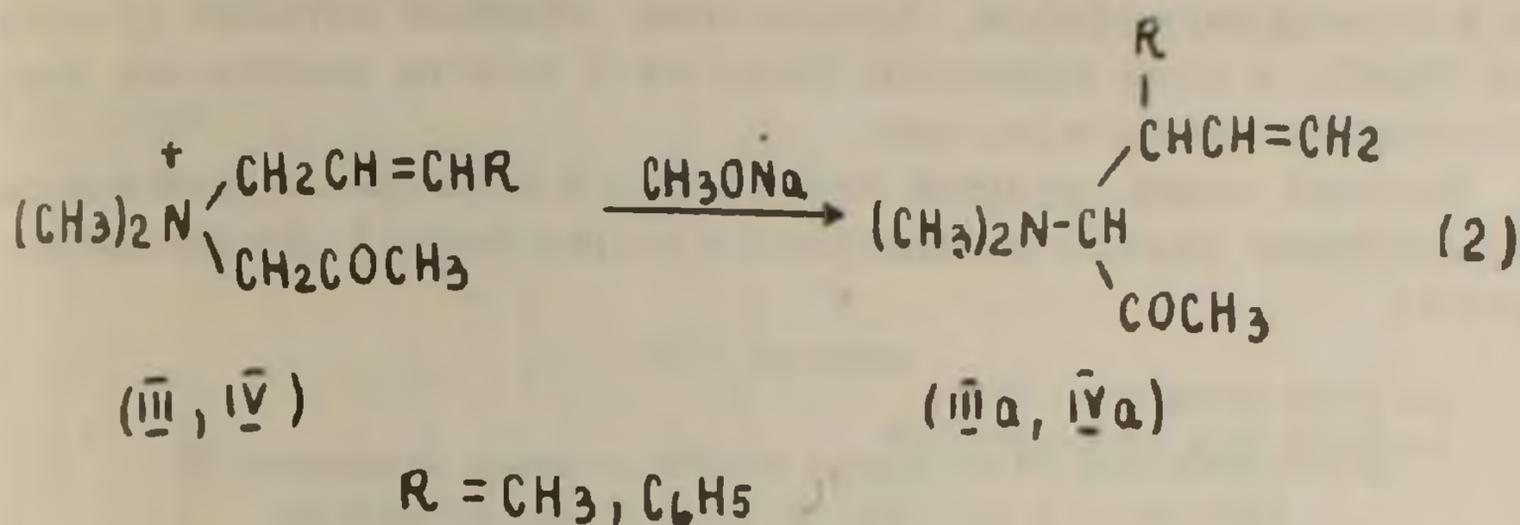
Можно было надеяться, что с изменением условий, а именно, под действием эфирной суспензии алкоголята натрия (<sup>3</sup>) или порошка едкого кали (<sup>4</sup>), можно достигнуть лучших результатов.

С целью проверки сказанного осуществляли перегруппировку бромистого диметил-бензилацетониламмония (I) под действием двукратного мольного количества одно- и дунормального водного раствора едкого натра, а также эфирных суспензий алкоголята натрия и порошка едкого кали. Продукт перегруппировки—Стивенса—диметиламинобензилацетон был получен при этом с 24, 34, 75 и 70% выходами, соответственно.

Соли диалкилбензилкарбалкоксиметиламмония под действием эфирной суспензии алкоголята натрия (<sup>5</sup>) образуют смесь продуктов перегруппировок Стивенса и Соммеле. В отличие от этого в случае соли I, содержащей в качестве принимающей ацетонильную группу, образуется лишь продукт перегруппировки Стивенса (a).



Подвергнуты перегруппировке также бромистые соли диметил-ацетонилаллил—(II), кротил—(III) и 3-фенилаллиламмония (IV). Результаты приведены в таблице. В случае солей III и IV перегруппировка сопровождается аллильной изомеризацией мигрирующей группы с образованием IIIa и IVa.



Строение полученных соединений подтверждено данными ИК и ПМР спектроскопии, чистота проверялась тонкослойной и газожидкостной хроматографией.

Благодаря наличию двух ассиметричных атомов углерода в IIIa и IVa, последние не являются индивидуальными соединениями, а представляют смесь диастереоизомерных форм. В продуктах реакции соли I найден дибензил (3—4%) (5).

Результаты перегруппировки солей I—IV под действием эфирной суспензии метилата натрия

№	Исходная соль $(\text{CH}_3)_2\text{N}^+ \begin{array}{l} \text{R} \\ \text{CH}_2\text{CH}=\text{CHR} \\ \text{Br}^- \\ \text{CH}_2\text{COCH}_3 \end{array}$	Продукт реакции $(\text{CH}_3)_2\text{NCHR} \begin{array}{l}   \\ \text{H}_3\text{CC}=\text{O} \end{array}$	Выход, %	Т. кип. °C/давл. мм/	$n_D^{20}$	ИК спектр, см <sup>-1</sup>	Т. пл. пикрата
	R =	R' =					
I	—CH <sub>2</sub> C <sub>6</sub> H <sub>5</sub>	—CH <sub>2</sub> C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> /Ia/	75	105—106 /3	1.5110	700—750. 1600. 1720. 1802. 1880. 1950	152—153
II	—CH <sub>2</sub> CH=CH <sub>2</sub>	—CH <sub>2</sub> CH=CH <sub>2</sub> /2a/	70	68—69.15	1.4420	1640. 1725. 3080	81—82
III	—CH <sub>2</sub> CH=CHCH <sub>3</sub>	CH <sub>3</sub> CHCH=CH <sub>2</sub> /IIIa/	76	58—58.5 /5	1.4460	920. 1645. 1720. 3090.	138—140
IV	—CH <sub>2</sub> CH=CHC <sub>6</sub> H <sub>5</sub>	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> CHCH=CH <sub>2</sub> /IVa/	75	116—117 /4	1.5210	1590. 1640. 1710. 1800. 1880. 3030. 3060	140—141

Описание опыта. К 0,05 М исследуемой соли добавляется эфирная суспензия 0,1 г-м алкоголята натрия. Реакционная колба время от времени встряхивается и охлаждается водой. После окончания экзотермической реакции смесь нагревается (10—20 мин) при 35—40°, затем добавляется вода, отделяется эфирный слой. Водный слой дважды экстрагируется эфиром. Соединенные эфирные вытяжки сушатся над  $MgSO_4$ , и эфир отгоняется. Перегонкой остатка выделяются соответствующие продукты реакции.

Высокий выход продукта перегруппировки говорит о возможности использования данного метода в синтезе непредельных  $\alpha$ -диалкиламино-кетонов.

Институт органической химии  
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Ք. ՐԱԲԱՅԱՆ, Ս.Տ. ՔՈՉԱՐՅԱՆ, Ո. Ս. ՈՍԿԱՆՅԱՆ

### Չհազեցած $\alpha$ -դիալկիլամինոկետոնների սինթեզը

Ներկա հաղորդումը նվիրված է դիմեթիլացետոնի խմբի հետ մեկտեղ բենզիլ (I), ալիլ (II), կրոտիլ (III) կամ 3-ֆենիլալիլ (IV) խմբեր պարունակող ամինումային աղերի ստիվենսյան վերախմբավորմանը:

Ինտերմիդիատների մեթիլատի էթերային սուսայն-դիայի ազդեցությամբ: Արդյունքները բերված են աղյուսակում: Ըստ ստացված տվյալների վերախմբավորումն ուղեկցվում է միգրվող խմբի ալիլային իզոմերիզացիայով:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> T. S. Stevens, N. W. Snedden, E. T. Stiller, T. Tomson, J. chem. Soc. 2119, 1930. <sup>2</sup> B. J. Millard, T. S. Stevens, J. chem Soc, 3397, 1963. <sup>3</sup> А. Т. Бабаян, С. Т. Кочарян, С. М. Оганджанян, ДАН Арм. ССР, т. 57, №2 (1974). <sup>4</sup> А. Т. Бабаян, М. Г. Инджикян, Р. А. Айвазова, ЖОХ, XXXIII, 1773 (1963). <sup>5</sup> U. Scholtkopf, U. Ludwig, G. Osterman, M. Patsch, Tetrahedron letters, 3419, (1969).

УДК 550.42

МИНЕРАЛОГИЯ

А. А. Коджоян

О признаках одностадийной зональности распределения  
элементов-примесей в сфалеритах и галенитах

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 30/III 1976)

Вопрос зонального распределения элементов-примесей по отдельным минералам в полиметаллических рудах в известной нам литературе освещен весьма слабо, а по свинцово-цинковым и полиметаллическим месторождениям Армении не затронут вообще.

Мы попытались на основании большого фактического материала по Марцигетскому свинцово-цинковому месторождению выявить некоторые закономерности распределения и поведения элементов-примесей в главнейших сульфидах.

На рассматриваемом месторождении сфалерит и галенит являются главными рудообразующими минералами и главными минералами-носителями элементов-примесей. Они содержат в качестве примесей широкий диапазон элементов. Установлено, что для сфалеритов и галенитов характерен примерно один и тот же набор элементов-примесей. Вместе с тем количественное распределение их в минералах различное. Различие в количественном распределении элементов-примесей в сфалерите и галените особенно отчетливо проявляется при сопоставлении их в соответствии с последовательностью выделения этих минералов на месторождении. Элементы-примеси тяготеют в сторону того или другого минерала; так, в сфалерите наблюдается повышенная концентрация Fe, Mn, Cd, Cu, Ge, в галените—Ag, Sb, Bi, Sn.

Различное количественное соотношение элементов-примесей в зональном ряду сфалерит-галенит по всей вероятности является следствием распределения примесей между раствором и минералом, зависящим как от физико-химических условий среды, так и от кристаллохимических свойств минерала-носителя и элемента-примеси.

Нам это представляется следующим образом: после того, как концентрация основных компонентов (Zn, Pb, S) в растворе достигает насыщения, начинается последовательная кристаллизация сфалерита и галенита. Ранее было установлено (<sup>1</sup>), что зональность отложения сфалерита и галенита является результатом локального изменения в составе растворов в пределах одной стадии минерализации, выраженном

некоторым усилением кислотности и ослаблением щелочности системы. Изменение этого фактора, естественно, определенным образом должно отразиться на растворимости сульфидов элементов-примесей. Так, если с изменением кислотности уменьшается растворимость сульфида элемента-примеси, то это должно вести к увеличению соосаждения этого элемента всеми минералами, определяемое кристаллохимическим фактором.

Известно (<sup>2</sup>), что сульфиды Cd, Co, Bi менее растворимы в щелочных растворах, а сульфиды As, Sb, Sn—в кислых растворах. Следовательно, к моменту отложения сфалеритов и галенитов в более щелочной обстановке будут поглощаться из раствора сфалеритом Cd, Bi, Co, а в более кислой обстановке галенитом—As, Sb, Sn.

Помимо этого, в процессе кристаллизации сфалерита и галенита захват примесей будет идти соответственно кристаллохимическим свойствам главного структурообразующего иона и элемента-примеси. Элементы-примеси, характеризующиеся сходством кристаллохимических свойств с главным структурообразующим ионом, проявят тенденцию концентрироваться в этом минерале.

Разбор большого литературного материала по составу сфалеритов и галенитов показал, что из изоморфных примесей сопоставимый сравнительный материал имеется только по Fe, Mn, Cd в сфалеритах и по Ag, Sb, Bi—в галенитах.

На исследуемом месторождении зональность отложения в рудных телах наблюдается не только по главным рудообразующим минералам, отличающимся по качественному составу элементов-примесей, но и по количественным соотношениям этих примесей в самих минералах. Так, например, в вертикальном разрезе порядка 270 м сфалериты верхних горизонтов содержат повышенное количество олова и германия, в то время как нижние горизонты более богаты марганцем, медью, серебром, свинцом (рис. 1). Содержание железа, кобальта и кадмия в сфалеритах не меняется в пределах рассматриваемого разреза.

Из литературных данных известно, что коэффициент распределения железа и кадмия в сфалеритах чувствителен к колебаниям температуры. Их интенсивность вхождения в решетку сфалерита изменяется параллельно с изменением температурного уровня. Концентрация железа в сфалерите уменьшается с уменьшением температуры, а кадмия, наоборот, растет в том же направлении. В нашем случае дисперсии содержания кадмия и железа в сфалеритах не обнаружено, следовательно говорить о дисперсии температуры при формировании рудных жил в данном случае не приходится.

Вертикальная зональность распределения серебра, свинца, меди в сфалеритах, выраженная уменьшением их содержания к верхним горизонтам, может быть объяснена последующей очисткой сфалерита от них, как кристаллохимически чуждых элементов, наиболее интенсивно проявившейся на верхних горизонтах. Возможно наличие этих примесей в сфалеритах нижних горизонтов связано с примесью тонкодисперсной минеральной фазы серебра, меди и свинца.

В рудах месторождения главным минералом-носителем серебра, сурьмы, висмута является галенит. В чем причина такого поведения этих элементов в настоящее время, при отсутствии экспериментальных данных, определить трудно. Можно лишь предположить, что подобное

Содержание в %	Элементы	Абсолют в м.	
		1420- 1318	1315- 1150
1,0 0,1	Fe	■	■
0,1 0,01	Mn	■	■
0,1 0,01	Co	■	■
0,1 0,01	Cu	■	■
0,1 0,01	Pb	■	■
0,01 0,001	Ag	■	■
1,0 0,1	Cd	■	■
0,001 0,0001	Sn	■	■
0,001 0,0001	Ge	■	■
0,001 0,0001	Ga	■	■
0,001 0,0001	Hg	■	■

Рис. 1. Распределение элементов-примесей в сфалеритах

Содержание в %	Элементы	Абсолют в м.	
		1420- 1318	1315- 1150
0,01 0,001	Sb	■	■
0,01 0,001	Bi	■	■
0,1 0,01	Fe	■	■
0,01 0,0001	Mn	■	■
0,1 0,01	Cu	■	■
0,1 0,01	Ag	■	■
0,1 0,01	Zn	■	■
0,01 0,001	Cd	■	■
0,001 0,0001	Sn	■	■

Рис. 2. Распределение элементов-примесей в галенитах

тяготение серебра и сурьмы к галениту связано с их геохимическим сродством. На месторождении установлено, что галениты верхних горизонтов содержат повышенное количество сурьмы, висмута, а нижних горизонтов—серебра, олова (рис. 2).

Рассматривая микропарагенезис этих элементов в галенитах из различных горизонтов рудных жил, нетрудно заметить, что прямой корреляционной зависимости между содержанием сурьмы, висмута, с одной стороны, и содержанием серебра и олова—с другой, практически не существует.

Вместе с тем интересно, что распределение сурьмы противоположно распределению серебра в галените. В рудных телах значение отношения  $Ag/Sb$  в галенитах возрастает от верхних горизонтов к нижним. Подобное явление может рассматриваться как результат локального изменения физико-химической обстановки, в которой образуется галенит, и последующего соосаждения сурьмы и висмута в галенитах верхних горизонтов.

Известно, что физико-химические условия среды определяют не только химический состав рудных минералов, но и зависящие от него физические свойства, в том числе окраску.

Проблема окраски минералов, в частности сфалеритов, до настоящего времени остается остродискуссионной. Часто окраска сфалерита меняется не только между двумя тесно срастающимися зернами, но и в одном зерне. При этом нами установлено, что при одновременных выделениях непосредственно из растворов каждой отдельно взятой разновидности сфалерита границы между разноокрашенными зернами сульфидов цинка, как правило, бывают резкие, тогда как при развитии одной разновидности сфалерита за счет другой переходы в окраске даже в пределах одного и того же зерна бывают постепенными; окраска распределяется неравномерно, образуются в одних случаях пятна, в других—зоны.

Изучение разноокрашенных зерен сфалерита под бинокулярным микроскопом и в прозрачно-полированных шлифах при косом освещении позволило нам прийти к выводу, что формирование окраски сфалерита происходит в результате длительного периода времени становления месторождения. Установлено, что окраска сфалеритов образуется как одноактно, так и многоактно, путем многочисленных превращений. В месторождениях с широким развитием метасоматических процессов в рудах второй способ обычно превалирует над первым. Многоактность процесса заключается в том, что окраска сфалерита, отложенного при кристаллизации минерала из ранних порций растворов, претерпевает всевозможные изменения при наложении более поздних парагенетических ассоциаций минералов.

Этим и объясняется не только тесное срастание разнообразной окраски зерен сфалерита, слагающих сплошные минеральные агрегаты, но и неравномерное пятнистое распределение окраски в пределах одного и того же зерна.

На Марцигетском месторождении макроскопически по окраске устнавливаются следующие разновидности сфалеритов, приводимые в возрастающей последовательности их распространения: бесцветный, лимон-

но-желтый, светло-зеленый, зелено-вато-желтый, медово-желтый и черный.

Разноокрашенные сфалериты образуют тесные сростания. Причины их совместного нахождения подробно рассматривались нами (3).

В рудных жилах в общих чертах выявляется закономерность в распределении разноокрашенных сульфидов цинка: с глубиной светлые разности уступают место темным.

Результаты количественного спектрального анализа сорока четырех разноокрашенных сфалеритов приводятся на рис. 3\*.

Как видно из рисунка, при переходе от светлых сфалеритов к темным происходит незначительное повышение содержания железа, марганца и ртути; резко повышается содержание меди, свинца и серебра. Несколько понижается количество олова, галлия и индия. В содержании кобальта, кадмия и германия изменений в зависимости от окраски сфалеритов не наблюдается.

Из вышесказанного становится очевидным, что сфалериты и галениты одной парагенетической ассоциации при прочих равных условиях имеют неодинаковый химический состав и что первоначальный химический состав каждого из минералов в отдельности может меняться в течение всего периода их формирования. Отсюда понятно, что при выделении генераций минералов необходимо учесть весь комплекс критериев, позволяющих разобщать во времени одни и те же минеральные виды.

Институт геологических наук  
Академии наук Армянской ССР

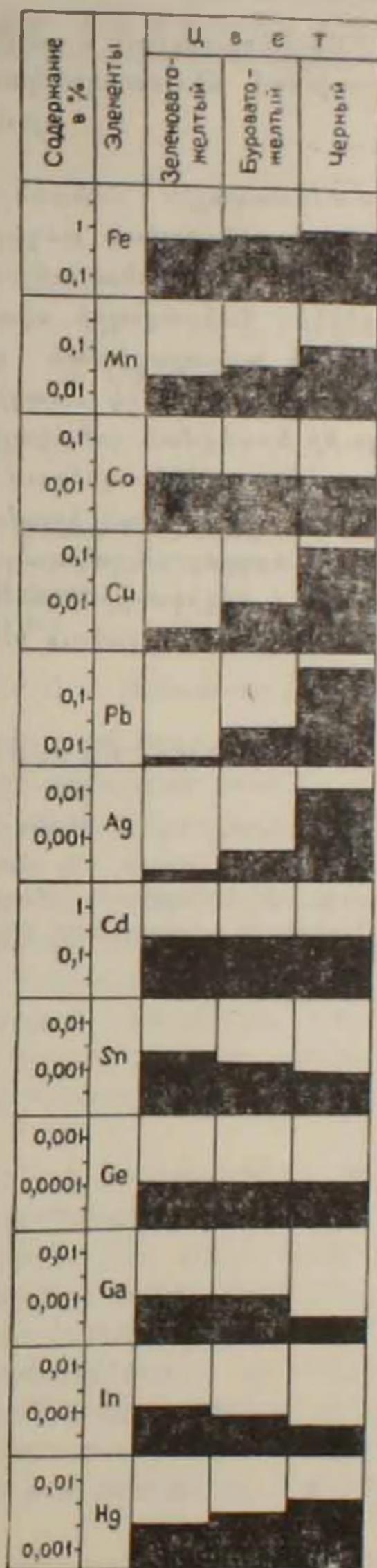


Рис. 3. Средние содержания элементов-примесей в сфалеритах

\* Анализы выполнены в спектральной лаборатории ИГи АИ Армянской ССР М. Я. Мартirosьяном.

Սֆալերիտներում և գալենիտներում տարր-խառնուրդների տեղաբաշխման միաստադիական զոնալականության առանձնահատկությունների մասին

Բազմամետաղային հանքանյութերի առանձին միներալներում տարր-խառնուրդների զոնալական տեղաբաշխման պրոբլեմն ունի կարևոր տեսական և գործնական նշանակություն: Հողվածում դիտվում են Մարցիգետի կապար-ցինկի հանքավայրի սֆալերիտներում և գալենիտներում տարր-խառնուրդների տեղաբաշխման օրինաչափությունները, այդ միներալները համարվում են իրրև մեկ ստադիայի առաջացումներ: Հայտնաբերված է հանքանյութի նստեցման զոնակալություն, այն նկատվում է միայն գլխավոր հանքառաջացնող միներալներում, որոնք տարբերվում են ինչպես տարր-խառնուրդների որակական կազմով, այնպես էլ այդ տարր-խառնուրդների քանակական տարբերությամբ: Հաստատված է, որ այդ զոնալականությունը անդիսանում է ֆիզիկա-քիմիական միջավայրի լոկալ փոփոխման արդյունք, որի պայմաններում առաջանում են «սֆալերիտը և գալենիտը»:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТАЦИИ

<sup>1</sup> А. А. Коджоян, Св. С. Мкртчян, «Известия АН Арм. ССР», Науки о Земле, № 4, 1975. <sup>2</sup> Ю. П. Трошин, Сб. «Вопросы геохимии изверженных пород и рудных месторождений В. Сибири», М., «Наука», 1965. <sup>3</sup> А. А. Коджоян, Минералогический сборник Львовского геологического общества, № 18, вып. 3, 1964.

УДК 553+549

ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ

К. М. Мурадян

Новое проявление флюорит-барит-редкоземельных руд в  
Алаверди-Кафанской структурно-формационной  
металлогенической зоне Малого Кавказа  
(Армянская ССР)

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 15/III 1976)

Материалом для настоящего сообщения послужили новые данные, полученные автором в 1974—1975 гг. при металлогенических и палео-вулканологических исследованиях в СВ части республики—в Шамшадинском (и Иджеванском) рудном районе.

Автором в процессе проведения полевых работ, при составлении карты «Магматизм и метаморфизм Армянской ССР», в основном в пограничной полосе Армении и Азербайджана, обнаружено новое проявление руд флюорит-кварц-карбонат-баритовой формации. Это новая формация руд для Алаверди-Кафанской структурно-формационной, металлогенической зоны Армянской ССР и Малого Кавказа (<sup>1,2</sup>) в целом.

Шамшадинский рудный район является классической областью бурного развития полифациального вулканизма и плутонизма эвгеосинклинального раннесальпийского (киммерийского) этапа. С развитием различных этапов вулканогенно-осадочных и вулканогенно-интрузивных формаций рудного района парагенетически связаны определенные рудные формации: серноколчеданная, медноколчеданная, колчеданно-барито-полиметаллическая, баритовая, железорудная, свинцово-цинковая, золоторудная и др. Выявленное новое проявление флюорита тяготеет к позднеюрско-меловым (?) вулканогенным и вулканогенно-интрузивным формациям.

В структурно-геологическом отношении обнаруженное проявление контролируется Верхний Агдан—Берд—Айгедзорской активизированной (?) зоной разлома глубокого заложения, являющейся бортовой частью Эридзор-Айгедзорской вулcano-тектонической структуры, где имела место интенсивная разгрузка рудоносных газогидротерм, образовавших формации пропилитов, вторичных кварцитов и гидротермальных аргиллизитов с синхронной минерализацией.

Флюорит-баритовое проявление находится на вулканическом куполе-холме Карн-анк или Айгестани-дзор, непосредственно у с. Челаби, на правом берегу реки Хндзорут. Рудовмещающими породами являются липариты (субвулканическая, жерловая фацции), которые прорывают спекшнеся туфы, аглютинаты, глыбо-брекчиевые лавы дацит-липаритов верхнего байоса. Выявляется брахикупольный характер залегания вышеотмеченных пород в бассейне речки Макари-джур и развитие регионально-линейных, вытянутых на СЗ 310—320° и СВ 20—50° зон разломов, контролирующих внедрение субвулканических липаритовых тел на левом и правом бортах р. Хндзорут.

Вдоль региональных и локальных вулканоконтролирующих зон разломов (сочетание СЗ с субширотными, СВ с субмеридиональными) развиваются метасоматиты с флюорит-баритовой минерализацией. Основными типами околорудных—синрудных изменений является гидротермальная-аргиллитизация (гидрослюдисто-карбонатное, реже моно-кварцевое и кварц-каолинитовое) изменение. Рудные тела в основном представлены сложными ветвящимися и простыми жилами, прожилками (рис. 1). Падение их почти вертикальное. Выделяются два основных

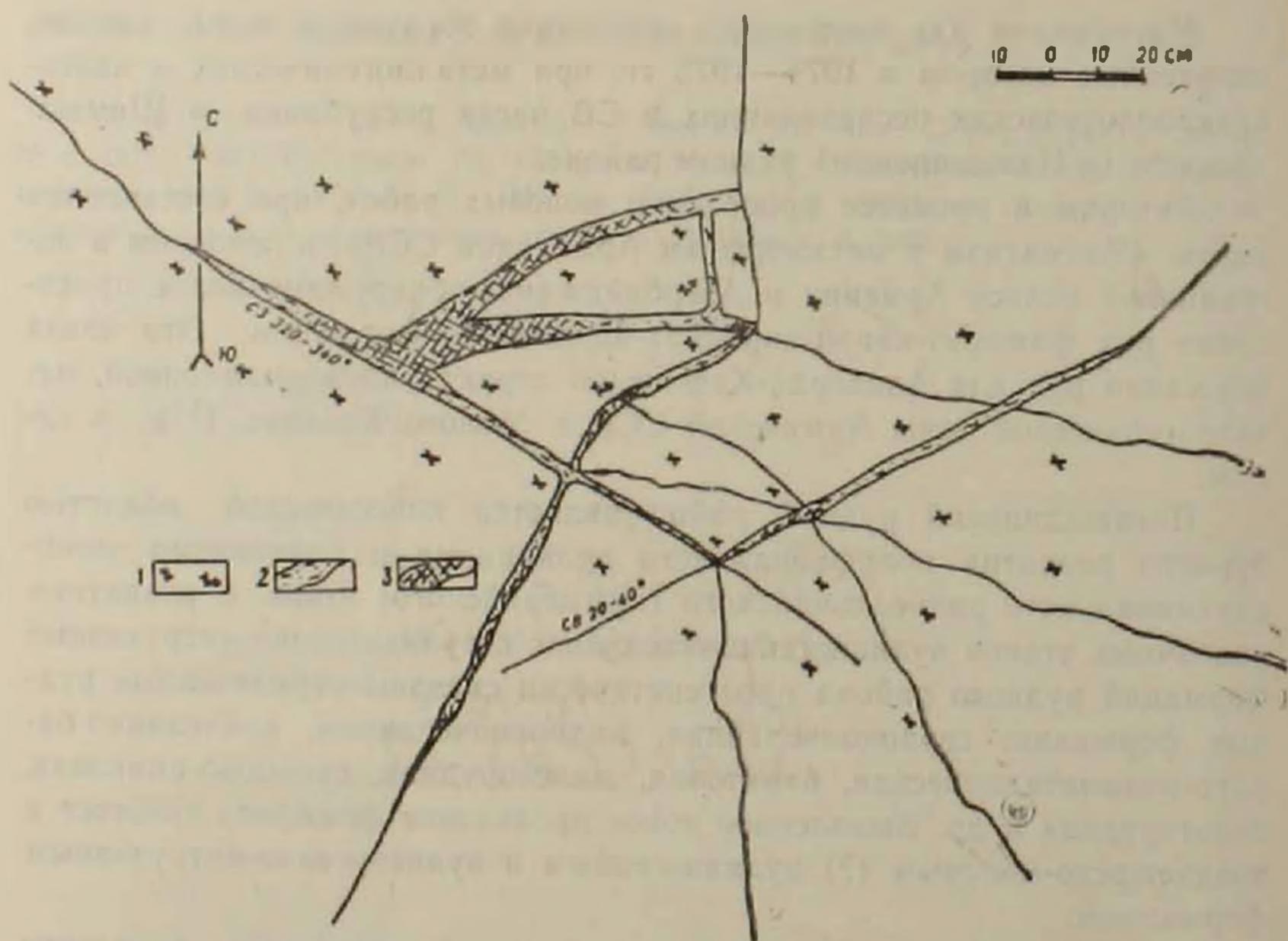


Рис. 1. Флюорит-карбонат-баритовая минерализация в гидрослюдисто-карбонатных жилах и прожилках Карн-анкского участка Айгестанского проявления. 1—липарит; 2—гидрослюдисто-карбонатное изменение; 3—флюорит-кварц-карбонат-баритовая минерализация

морфологических типа рудных тел—жильные (с ответвлениями, апофизами) и параллельные жилы—зоны, реже переходящие в сложные

раздувы-гнездообразные тела. Выявлено около 20 жильных-прожилковых или оруденелых зон-жил. Местами эти жилы тесно переплетаются и образуют линейные, реже цепочкообразные взаимосвязанные с раздувами жилы—локальные микроштокверки. Мощность жил-прожилков колеблется от 0,5—10 до 60 см и более (в раздувах). На обнаженных участках зоны-жилы-прожилки протягиваются от 10—20 до 35—50 м и более.

По своим минералогическим особенностям руды Айгестанского проявления мало отличаются от руд флюорит-кварцевой формации (кварц-флюоритовый и барит-кальцит-кварц-флюоритовый тип), выделенной А. А. Ивановой (3) среди жильных флюоритовых месторождений Забайкалья. В целом для описываемого проявления главными рудообразующими минералами являются: флюорит и барит. Второстепенные: карбонат (кальцит, манганокальцит), кварц, сульфиды. Из околорудных минералов наибольшим распространением пользуются: гидрослюда, карбонат (кальцит), кварц, барит и др. В жильных телах флюорит образует массивные, брекчиевидные, сферолитовые агрегаты зерен (рис. 2). Изучение текстурных особенностей руд и детальное



Рис. 2. Массивная текстура руды флюорит-кварц-карбонат-баритовой ассоциации. Флюорит и кварц образуют сферолитовые почки. Проявление Айгестан. Натуральная величина.

микроскопическое исследование рудообразующих минералов и их спутников, анализ соотношений различных минеральных групп и смена одних минеральных агрегатов другими во времени и в пространстве, позволяют выделить на рассматриваемом проявлении следующие пара-

генетические ассоциации и прогрессирующую последовательность выделения минералов: флюорит → кварц → кальцит → сульфиды → барит (одновременно в миндалинах и жеодах: кварц → кальцит → манганокальцит → кальцит и др. (рис. 3).

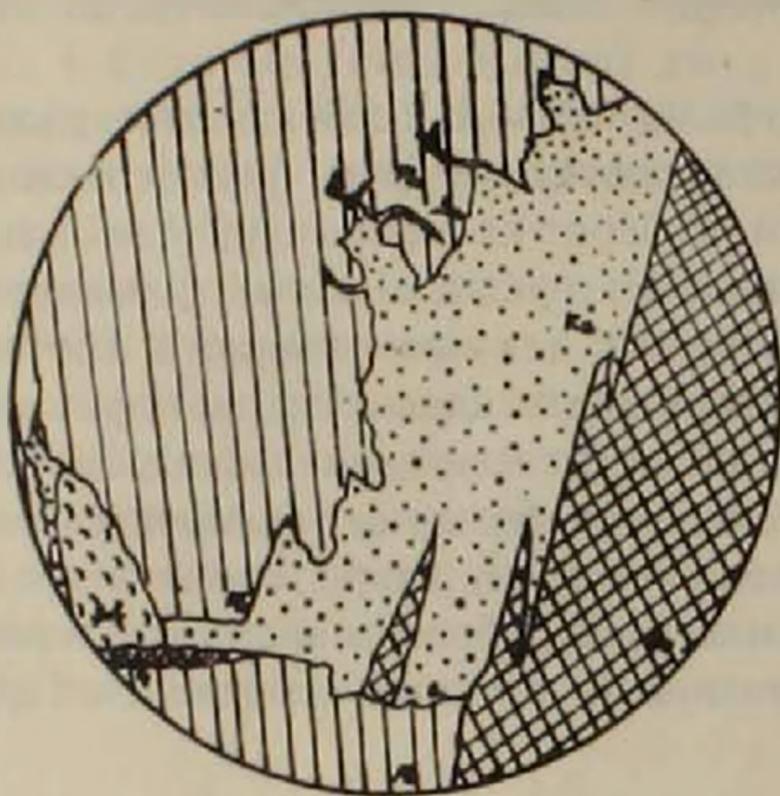


Рис. 3. Взаимоотношения флюорита (Flu) с кварцем (q), карбонатом (Ca), сульфидной минерализацией (Sul) и баритом (Ba). Айгестанское проявление, шл-К.М.-23/75, увеличение 40

Флюорит (плавиковый шпат— $\text{CaF}_2$ ). Внешне флюорит характеризуется зеленой, бледнозеленой окраской с голубоватым оттенком. Зеленоватая окраска флюорита вероятно обусловлена повышенным содержанием редких земель, радиоактивным излучением и наличием  $\text{Eu}^{2+}$  (<sup>5</sup>), а также присутствием двухвалентного самария ( $\text{Sm}^{++}$  (<sup>7</sup> и др.)). Сингония кубическая [100], облик кристаллов-октаэдрический, додекаэдрический. Блеск—стеклянный. Хрупок. Уд. вес—3,178. Под микроскопом флюорит отчетливо выступает на инъецирующем фоне барита и карбоната (рис. 2, 3). Характерны: совершенная спайность, изотропность. Показатель преломления=1,434. Температура гомогенизации газожидких включений (0,001 мм—неправильной формы) в спутнике флюорита-барите рассматриваемого проявления составляет 150—180°C. Дебаеграмма описанного минерала свидетельствует о ее соответствии дебаеграмме эталонного флюорита (табл. 1).

Количественными спектральными анализами в флюорит-карбонат-баритовой руде установлены: Cu, Zn, Pb, Ag, Ba, Fe и ряд других элементов—в качестве механической примеси в виде минералов, соответственно: пирита, халькопирита, барита, сфалерита, галенита и др., что устанавливается при детальном микроскопическом исследовании. Следует особенно констатировать присутствие и повышенное содержание в

составе зеленоватого флюорита и его спутников редких земель (в %): La (0,024—0,025), Ce (0,056—0,078), Nd | (1,5)—(0,25) | Sm | (0,09)—(0,37) | Eu (0,042—0,021), Gd (0,11—0,04), Tb (0,1), Dy (0,06), Ho (0,075), Yb (0,0004—0,0005), Y (0,08—0,1), а также редких (ниобий,

Таблица 1

Результаты анализа рентгенограммы порошка флюорита  
(по К. М. 24/75)  
Снят на дифрактометре УРС—50 им на Cu—Ni излучении

$J$	По К. М. Мурадян	10	10	6	4	5	6	5	5	6			
$\frac{d_a}{n}$		3.14	1.922	1.640	1.364	1.252	1.114	1.050	0.965	0.922			
$J$	(Из опреде- лителя В. И. Михе- ева	7	10	7	4	5	7	5	5	6	5	4	2
$\frac{d_a}{n}$		3.148	1.928	1.644	1.363	1.251	1.113	1.049	0.961	0.922	0.866	0.835	0.789

бериллий, цирконий, литий, скандий, бор и др.), рассеянных и ряда других элементов в виде изоморфных примесей. Интересно также отметить, что почти аналогическая картина—редкометальность устгनावливается во вмещающих липаритах и рудосопровождающих жильных метасоматитах—гидротермальных аргиллитах. Химический состав флюорита из Айгестанского проявления (в %): Ca—51,34; F—48,35; BaO—0,10; SO<sub>3</sub>—0,05; SiO<sub>2</sub>—0,047, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>—0,096; MgO—0,033; Fe—0,02; сумма 100,04. По минеральному составу и особенностям переработки, оруденение рассматриваемого проявления можно отнести к флюорит-кальцит-баритовому типу (флюорит присутствует в различных количествах: от 30 до 50% и более).

Исходя из геолого-структурной обстановки, характера флюоритовой минерализации и тесной ассоциации его с кварцем, карбонатом, баритом с сульфидными (редкая вкрапленность) минералами, можно предположить перспективность рассматриваемого проявления в отношении возможного обнаружения на флангах-крыльях и на нижних горизонтах флюорит-баритового и сульфидного оруденения.

Институт геологических наук  
Академии наук Армянской ССР

#### Կ. Մ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Ֆլյուորիտ-բարիտ հազվագյուտ հողային հանքանյութի  
Երևանում Փոֆո Կովկասի Ալավերդի-Ղափանի ստրուկտուր-  
ֆորմացիոն մետաղածնային գոտում  
(Հայկական ՍՍՀ)

ՀՍՍՀ Շամշադինի հանքային շրջանում մետաղածնային և պալեոհրա-  
բրիտային ուսումնասիրություններ կատարելու ժամանակ հեղինակի կողմից

առաջին անգամ հայտնաբերվել է ֆլյուորիտ-բվարց-կալցիտ-բարիտային ֆորմացիայի հանքանյութի երևակում: Վերջինս հարում է ուշյուրայի-կավճի (?) հրաբխածին ֆորմացիային:

Հետազոտությունների տվյալների հիման վրա հեղինակը հանգում է հետևյալ եզրակացությունների.

1. ՀՍՍՀ Շամշադինի հանքային շրջանի Այգեծորի հանքային դաշտում հայտնաբերվել է նոր հիդրոթերմալ-երակային ֆլյուորիտ-բվարց-կալցիտ-բարիտային հանքանյութի երևակում:

2. Երևակման երկրաբանա-ստրուկտուրային դիրքը (թագնված-հրաբխային գմբեթանման), հանքուղեկից հիդրոթերմալ փոփոխվածության բնույթը (չրափայլար-կարրոնատային), տեքստուրա-ստրուկտուրային, տեխնոլոգիական, միներալոգա-գեոքիմիական առանձնահատկությունները խոսում են ֆլյուորիտային հանքերևակման մերձակերեսային հրաբխածին բնույթի մասին:

3. Հանքանյութում և հատկապես գլխավոր միներալ՝ կանաչ ֆլյուորիտում հայտնաբերվել են հազվագյուտ հողերի (La, Ce, Nd, Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Yb, Y և այլն), հազվագյուտ (Nb, Be, Zr, Li, Sc, B և այլն), ցրված և մետաղային (Cu, Pb, Zn, Ag և այլն) տարրերի բարձր պարունակություններ:

4. Հայտնաբերված երևակումը կարևոր որոնողական նշանակություն ունի վերին Աղզան-Բերդ-Այգեծոր բեկվածքի շրջանում ֆլյուորիտ-բարիտ հազվագյուտ հողային, ինչպես և նրա հետ սերտորեն ասոցացվող սուլֆիդային հանքայնացում հայտնաբերելու համար:

Հանքերևակումը հետաքրքիր տեղամաս է մանրամասն ուսումնասիրման համար՝ հանքաբերության հեռանկարների պարզարանման նպատակով:

Այսպիսով, ֆլյուորիտ-բարիտ-հազվագյուտ մետաղային հանքերևակումը նոր ֆորմացիոն տիպ է ուսումնասիրվող շրջանի, ՀՍՍՀ Ալավեղի-Ղափանի զոնայի, Փոքր Կովկասի համար և լրացնում է այդ տարածքի մետաղածնային առանձնահատկությունների մասին եղած գաղափարները:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԻՐ Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

- <sup>1</sup> И. Г. Магакьян, ДАН Арм. ССР, т. L, № 5 (1970). <sup>2</sup> V. N. Kotliar, K. M. Mouradian, Int. Symposium on volcanism and associated metallogenesis. Edited by the Geol. Inst. 3—8 sep. Bucharest, Romania, 1973. <sup>3</sup> А. А. Иванова, Автореф. дисс., Л., 1965. <sup>4</sup> О. Г. Козлова, „Геохимия“, 1, 46, 1957. <sup>5</sup> G. Ysetti, Period. min, Roma 28, 19 и 249, 1959. <sup>6</sup> П. П. Феофилов, Зап. Всес. мин. об-ва, 4 LXXXV, 4, 1956. <sup>7</sup> Н. Н. Василькова, С. Г. Соломкина, Типоморфные особенности флюорита и кварца. Изд. „Недра“, 1965.

УДК 577.3 : 577.1

БИОХИМИЯ

А. А. Симонян, Р. Б. Бадалян, А. П. Акопин

Сдвиги в активности различных АТРаз в митохондриях  
 печени под влиянием детергентов в онтогенезе птиц

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 25/1 1976)

В предшествующих наших работах (1, 2) было показано, что общая АТРазная активность в ткани печени последовательно повышается с 13-го дня эмбрионального развития кур вплоть до вылупления цыпленка. Это послужило основанием изучить изменение активности различных АТРаз, активируемых двухвалентными катионами, а также 2,4-динитрофенолом (ДНФ) в изолированных митохондриях (МХ) печени кур в различные периоды их онтогенетического развития под воздействием детергентов. В качестве детергентов использовали трехкратное замораживание и тритон X—100.

Опыты проводили на 15, 20-дневных эмбрионах, 5-дневных цыплятах и половозрелых (годовалых) курах белой русской породы. Возраст эмбрионов определяли по срокам инкубации яиц. Для опытов объединяли печень 15—20 эмбрионов или цыплят.

Методы выделения МХ печени, определения их чистоты и целостности, АТРазной активности приведены в наших предыдущих работах (3—7). Полученные результаты опытов пересчитаны на 1 мг митохондриального белка, который определяли по методу Лоури и сотр. (8). Для выделения активности различных АТРаз катионы использовали в ммольях (в конечной концентрации, общий объем смеси 2 мл):  $Mg^{2+}$  — 10,  $Ca^{2+}$  — 40, ДНФ добавляли в конечной концентрации  $5 \cdot 10^{-5}$  М. Время инкубации 30 мин, температура 26°. Тритон X-100 использовали в количестве 0,9 мг на 2—3 мг митохондриального белка. Замораживание МХ проводили при  $-35^{\circ}C$ .

Данные, приведенные в табл. 1, показывают, что как в контрольных опытах, так и при воздействии детергентов АТРазная активность в изолированных МХ печени возрастает с 15-го дня эмбрионального развития до вылупления цыпленка. Приведенные нами результаты опытов согласуются с литературными данными, полученными на других тканях. По данным Сперелакиса (9) удельная активность АТРазы мембран ин-

тактного сердца также постепенно повышается по ходу развития куриного эмбриона.

При обработке тритоном X-100 активность АТРаза по сравнению с свежесыведенными МХ возрастает на 39, 41, 18 и 30% у 15, 20-дневных

Таблица 1

Влияние детергентов на АТРазирующую активность МХ печени кур в онтогенезе.  
Р в мкатамах/мг белка/30 мин.  $M \pm m$

Дни развития эмбриона	Состояние МХ		
	свежесыведенные	после добавления тритона X-100	трижды замороженные
15	1.91±0.25	2.67±0.24 p=0.05	2.90±0.10 p<0.01
20	2.60±0.23	3.68±0.38 p<0.05	3.68±0.12 p=0.005
5-дневные цыплята	4.32±0.40	5.12±0.25 p<0.20	4.77±0.80 p>0.50
Годовалые куры	2.96±0.07	4.09±0.55 p<0.10	4.07±0.39 p<0.025

эмбрионов, 5-дневных цыплят и половозрелых кур соответственно. При замораживании МХ по сравнению с контролем активность фермента заметно повышается у 15-дневных эмбрионов (на 52%). Прирост активности фермента у 5-дневных цыплят составляет всего 10%.

В присутствии ионов Mg (табл. 2) по сравнению с контролем активность АТРаза заметно повышается (в 4,9; 4,3; 3,0 и 2,2 раза у 15, 20-дневных эмбрионов, 5-дневных цыплят и у кур соответственно). Во

Таблица 2

Влияние детергентов на  $Mg^{2+}$  — АТРазирующую активность МХ печени кур в онтогенезе. Р в мкатамах/мг белка/30 мин.  $M \pm m$

Дни развития эмбриона	Состояние МХ		
	свежесыведенные	после добавления тритона X-100	трижды замороженные
15	9.39±0.42	9.54±0.36	9.47±0.36
20	10.83±0.34	11.83±0.34	10.40±0.37
5-дневные цыплята	13.25±0.35	13.29±0.64	13.30±0.70
Годовалые куры	6.61±0.11	6.74±0.40	6.85±0.22

все изученные периоды развития под воздействием тритона X-100 или замораживания МХ наблюдается лишь незаметное стимулирование  $Mg^{2+}$  АТРаза. В МХ печени аналогичным изменениям подвергается также активность  $Ca^{2+}$  — АТРаза (табл. 3).

Таблица 3

Влияние детергентов на  $Ca^{2+}$  — АТРазирующую активность МХ печени кур в онтогенезе.  
Р в мкатамах/мг белка/30 мин.  $M \pm m$

Дни развития эмбриона	Состояние МХ		
	свежесыведенные	после добавления тритона X-100	трижды замороженные
15	4.75±0.46	4.99±0.28	4.80±0.10
20	5.22±0.02	5.97±0.05	5.07±0.28
5-дневные цыплята	9.06±0.03	10.01±0.24	10.12±0.02
Годовалые куры	5.08±0.04	6.23±0.05	5.50±0.05

Интересные результаты получены относительно активирования АТРаза ДНФом в МХ в онтогенезе (табл. 4). По сравнению с ионами Mg и Ca, в присутствии ДНФ повышение активности фермента по сравнению с результатами, полученными без добавления активаторов

Таблица 4

Влияние детергентов на ДНФ-АТРазную активность в МХ печени кур в онтогенезе. Р в икатамах/мг белка/30 мин. М±m

Дни развития эмбриона	Состояние МХ		
	свежеразделенные	после добавления тритона X-100	трижды замороженные
15	2.12±0.31 p>0.5*	3.68±0.19 p<0.005**	2.92±0.10 p<0.05
20	3.36±0.12 p<0.025	4.17±0.17 p<0.01	4.19±0.01 p<0.001
5-дневные цыплята	5.76±0.02 p<0.01	6.56±0.02 p<0.001	7.05±0.03 p<0.001
Годовалые куры	3.45±0.04 p<0.001	4.59±0.10 p<0.001	4.19±0.03 p<0.001

\* Достоверность прироста активности фермента по сравнению с контролем (табл. 1), без добавления активаторов.

\*\* Достоверность прироста активности фермента по сравнению с контролем с добавлением ДНФ.

(табл. 1), у 20-дневных эмбрионов, 5-дневных цыплят и взрослых кур небольшое, но достоверное. Однако в этих условиях возрастание активности фермента МХ 15-дневных эмбрионов по сравнению с контролем недостоверное (p>0,50).

Во все исследованные периоды онтогенеза кур после обработки МХ детергентами активность ДНФ—АТРаза по сравнению с контролем достоверно возрастает.

Таким образом, как показывают полученные нами данные, общая и стимулируемая Mg<sup>2+</sup>, Ca<sup>2+</sup> и ДНФом АТРазная активность по ходу развития куриного эмбриона возрастает, достигая своего максимума у 5-дневных цыплят после вылупления. У кур активность фермента заметно понижена по сравнению с ранним постэмбриональным периодом. Полученные результаты экспериментов подтверждают литературные и наши предшествующие данные об активировании АТРаза в МХ мозга и сердца кур в эмбриональном и постэмбриональном периодах развития и свидетельствуют о возможном усилении расщепления богатых энергией макроэргических связей в конце эмбриогенеза (6-7). По сравнению с другими катионами, а также ДНФ, высокая активность в МХ печени по ходу онтогенетического развития кур отмечается в присутствии Mg<sup>2+</sup>, затем Ca<sup>2+</sup> и ДНФ. Эти результаты согласуются с имеющимися в литературе данными (10, 11).

Интересно отметить, что под воздействием детергентов активность Mg<sup>2+</sup> и Ca<sup>2+</sup>—стимулируемых АТРаз как при эмбриогенезе, так и в постэмбриональном периоде развития кур по сравнению с контролем почти никаким изменениям не подвергается. Эти результаты позволяют нам предположить, что по ходу развития кур Mg<sup>2+</sup> и Ca<sup>2+</sup>—стимулируемые

АТРазаы локализованы в наружных мембранных образованиях МХ печени.

В присутствии детергентов активность АТРазаы МХ печени, стимулируемой ДНФом, достоверно повышается во всех изученных нами периодах онтогенетического развития кур. Исходя из этих данных можно предположить, что часть ДНФ-стимулируемой АТРазаы локализованы в внутренних мембранных образованиях МХ.

Институт биохимии  
Академии наук Армянской ССР.

Ա. Ա. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ռ. Բ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ, Ա. Պ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

### Լյարդի միտոքոնդրիաների ԱՏՔազաների ակտիվության տեղաշարժերը դետերգենտների ազդեցության տակ բոչունների օնտոգենեզում

Ուսումնասիրվել է  $Mg^{2+}$ ,  $Ca^{2+}$  և ԴՆՖ-խթանվող ԱՏՔազաների ակտիվության փոփոխությունները հավերի լյարդի միտոքոնդրիաներում օնտոգենետիկ զարգացման տարբեր շրջաններում (15, 20 օրական սաղմ, 5 օրական ճուտ և հասուն հավ)։ Հետազոտվել է նաև տրիտոն x—100-ի և միտոքոնդրիաների եռակի սառեցման ազդեցությունը նշված ԱՏՔազաների ակտիվության վրա։ Ցույց է տրվել, որ ինչպես հիմնական, այնպես էլ  $Mg^{2+}$ ,  $Ca^{2+}$  և ԴՆՖ—ԱՏՔազաների ակտիվությունը սաղմի զարգացմանը զուգրեթե անփոփոխ է, հասնելով իր առավելագույն չափերին 5 օրական ճտերի մոտ։ Հասուն հավերի հյուսվածքում, 5 օրական ճտերի համեմատությամբ, ֆերմենտի ակտիվությունը նշանակալիորեն իջնում է։ Տրիտոն x—100-ի ազդեցությամբ և միտոքոնդրիաների սառեցման ու հալեցման դեպքում ինչպես հիմնական, այնպես էլ ԴՆՖ—ԱՏՔազայի ակտիվությունը հավի օնտոգենետիկ զարգացման ուսումնասիրված շրջաններում աճում է։ Նույն պայմաններում  $Mg^{2+}$  և  $Ca^{2+}$  —ԱՏՔազաների ակտիվությունը միայն չնչին չափով է բարձրանում, կրվում է ենթադրություն սաղմի և հասուն հավերի լյարդում տարբեր ԱՏՔազաների ներմիտոքոնդրիալ հնարավոր տեղաբաշխման վերաբերյալ։

### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> А. А. Симонян, «Известия АН АрмССР» (биол. науки), т. 18, № 9 (1965).
- <sup>2</sup> А. А. Симонян, Автореф. канд. дис., Ереван, 1966.
- <sup>3</sup> А. А. Симонян, Некоторые стороны энергетического обмена в онтогенезе кур, Ереван, 1970.
- <sup>4</sup> А. А. Симонян, «Известия с/х наук МСХ АрмССР», № 3, 1970.
- <sup>5</sup> А. А. Симонян, Дис. докт. наук, Ереван, 1973.
- <sup>6</sup> А. А. Симонян, Г. А. Геворкян, Р. А. Степанян, Л. О. Восканян, ДАН АрмССР, т. LXII, № 1 (1976).
- <sup>7</sup> А. А. Симонян, Г. А. Геворкян, Р. А. Степанян, Л. О. Восканян, «Биол. журн. Армения», т. 29, № 2 (1976).
- <sup>8</sup> O. H. Lowry, N. J. Rosenbrough, A. L. Farr, R. J. Randall, J. Biol. Chem., v. 193 (1951).
- <sup>9</sup> W. Sperelakis, Biochem. et biophys. acta, v. 266, № 1 (1972).
- <sup>10</sup> D. K. Parkison, I. C. Radde, Biochim. acta, v. 242, № 1 (1971).
- <sup>11</sup> J. C. Skou, Biochim. et biophys. acta, № 7 (1957).

УДК 547.485.6 : 591.481.1. «712.92»

БИОХИМИЯ

Г. Г. Бунятян

**Окисление и восстановительное аминирование  
 $\alpha$ -кетоглутаровой кислоты в митохондриях мозга белых  
 крыс при старении в присутствии АДФ**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Галояном 9/II 1976)

В наших предыдущих исследованиях (<sup>1</sup>) было показано, что даже при создании оптимальных условий для процесса восстановительного аминирования  $\alpha$ -кетоглутаровой кислоты (в опытах с добавлением аммиака и АДФ) она, тем не менее, в основном подвергается окислению. Кроме этого, отмечалось, что добавление аммиака значительно повышает дыхание митохондриальной фракции (МФ) в присутствии  $\alpha$ -кетоглутаровой кислоты ( $\alpha$ -КГ) и АДФ (<sup>1</sup>). В связи с этим, представляло определенный интерес изучение процессов окисления и восстановительного аминирования  $\alpha$ -КГ за счет эндогенного аммиака в присутствии АДФ.

Исследования проводили на МФ мозга 6-месячных, годовалых и 2-летних (старых) белых крыс. Интенсивность окисления  $\alpha$ -КГ определяли манометрическим методом Варбурга, суммарный аммиак (свободный аммиак+амидоазот глутамин) — видоизмененным микрометодом Зелигсона (<sup>2,3</sup>), а содержание глутаминовой кислоты (ГК) — методом электрофореза на бумаге (<sup>4,5</sup>).  $\alpha$ -КГ и АДФ использовали в конечной концентрации 10 мМ и 2 мМ.

Как видно из табл. 1, АДФ не оказывает существенного влияния на дыхательную активность МФ. При использовании в качестве субстрата окисления  $\alpha$ -КГ поглощение кислорода МФ заметно усиливается, однако в старческом возрасте оно менее выражено. АДФ значительно стимулирует окисления  $\alpha$ -КГ у животных всех возрастных групп. Но и в этом случае эффект АДФ менее выражен у старых животных. Так, уровень потребления кислорода у 6-месячных, годовалых и 2-летних крыс составляет 11,7; 9,35 и 8,33 мкмоль  $O_2$  соответственно.

В следующей серии экспериментов, результаты которых приведены в табл. 2, изучена интенсивность реакции восстановительного аминирования  $\alpha$ -КГ в отсутствие добавленного аммиака в МФ мозга крыс указанных возрастных групп. Приведенные результаты подтверждают

полученные нами ранее данные <sup>(6)</sup> относительно снижения способности МФ к образованию аммиака из эндогенных источников в мозгу старых животных. АДФ сам по себе несколько увеличивает продукцию аммиака у животных всех возрастных групп, в пределах 0,8 мкмоль/г

Таблица 1

Действие АДФ на интенсивность окисления  $\alpha$ -КГ (мкмоль  $O_2$ /г свежей ткани 30 минут) в МФ мозга белых крыс при старении.

Возраст	Контроль	АДФ		$\alpha$ -КГ		$\alpha$ -КГ+АДФ	
		поглощение $O_2$	разница с контролем	поглощение $O_2$	разница с контролем	поглощение $O_2$	разница с АДФ
6 месяцев	6,92±0,32 (12)	7,09±0,36 (12)	+0,17	11,52±0,4 (12)	+4,6	18,79±0,57 (12)	+11,7
1 год	7,65±0,18 $p > 0,05$ (12)	7,57±0,27 $p > 0,1$ (12)	-0,08	12,05±0,34 $p > 0,1$ (12)	+4,4	16,92±0,24 $p < 0,01$ (16)	+9,35
2 года	6,54±0,92 $p > 0,05$ (12)	6,47±0,23 $p < 0,01$ (12)	-0,07	10,46±0,31 $p < 0,01$ (9)	+3,92	14,8±0,58 $p < 0,005$ (12)	+8,33

свежей ткани. Добавление одной  $\alpha$ -КГ приводит к некоторому, а ее сочетание с АДФ—к более выраженному снижению уровня аммиака в течение всего исследуемого периода постнатального развития. Так, если у 6-месячных, годовалых и 2-летних животных количество аммиака, использованное на восстановительное амнирование  $\alpha$ -КГ, в отсутствие АДФ составляет соответственно: 0,54; 0,55 и 0,5 мкмоль, то в его присутствии—0,8; 0,72 и 0,86 мкмоль.

Убыль аммиака в опытах с  $\alpha$ -КГ и особенно с  $\alpha$ -КГ+АДФ можно объяснить вовлечением эндогенного аммиака в синтез ГК однако, как видно из приведенных данных, это уменьшение происходит в незначительных количествах и без заметных возрастных изменений. Об этом свидетельствуют результаты наших исследований по образованию ГК (табл. 3). В опытах с  $\alpha$ -КГ+АДФ уровень ГК по сравнению с пробами, где присутствует один АДФ, несколько повышается, особенно в 6-месячном и годовалом возрасте, однако примерно тот же уровень ГК сохраняется и в опытах с одной  $\alpha$ -КГ. Эти данные свидетельствуют о том, что, по-видимому, образование ГК из  $\alpha$ -КГ в отсутствие добавленного аммиака происходит с незначительной интенсивностью, при этом АДФ не оказывает существенного влияния на этот процесс.

Приведенные данные показывают, что эндогенная ГК, как и в прежних наших исследованиях <sup>(7)</sup>, при инкубации МФ утилизируется в заметных количествах. В старческом возрасте уровень ГК в митохондриях несколько снижается и ее утилизация менее выражена. АДФ сам по себе не оказывает особого действия на уровень ГК, отмечается лишь незначительное уменьшение ее содержания. При добавлении  $\alpha$ -КГ

Таблица 2

Действие АДФ на интенсивность восстановительного аминирования  $\alpha$ -КГ за счет эндогенного аммиака (мкмоль азота суммарного аммиака/г свежей ткани/40 минут) в МФ мозга белых крыс при старении.

Возраст	До инкубации	После инкубации							
		Контроль		АДФ		$\alpha$ -КГ		$\alpha$ -КГ+АДФ	
			разница		разница с контролем		разница с контролем		разница с АДФ
6 месяцев	0,88	2,57	+1,69	3,45	+0,88	2,03	-0,54	2,65	-0,8
	$\pm$ 0,06 (9)	$\pm$ 0,12 (9)		$\pm$ 0,06 (9)		$\pm$ 0,11 (9)		$\pm$ 0,1 (9)	
1 год	0,96	2,44	+1,48	3,32	+0,88	1,89	-0,55	2,6	-0,72
	$\pm$ 0,12 $p > 0,1$ (9)	$\pm$ 0,88 $p > 0,1$ (9)		$\pm$ 0,04 $p > 0,1$ (9)		$\pm$ 0,13 $p > 0,1$ (9)		$\pm$ 0,12 $p > 0,1$ (9)	
2 года	0,93	2,0	+1,07	2,81	+0,81	1,5	-0,5	1,95	-0,86
	$\pm$ 0,1 $p > 0,1$ (9)	$\pm$ 0,09 $p < 0,01$ (12)		$\pm$ 0,09 $p < 0,001$ (12)		$\pm$ 0,06 $p < 0,025$ (12)		$\pm$ 0,08 $p < 0,005$ (12)	

Таблица 3

Действие АДФ на синтез ГК (мкмоль/г свежей ткани/40 минут) путем восстановительного аминирования  $\alpha$ -КГ за счет эндогенного аммиака в МФ мозга белых крыс при старении.

Возраст	До инкубации	После инкубации							
		Контроль		АДФ		$\alpha$ -КГ		$\alpha$ -КГ+АДФ	
			разница		разница с контролем		разница с контролем		разница с АДФ
6 месяцев	1,6	0,56	-1,04	0,46	-0,1	1,06	+0,5	1,12	+0,66
	$\pm$ 0,07 (16)	$\pm$ 0,03 (16)		$\pm$ 0,02 (16)		$\pm$ 0,06 (12)		$\pm$ 0,04 (12)	
1 год	1,73	0,66	-1,07	0,51	-0,26	1,24	+0,58	1,2	+0,69
	$\pm$ 0,08 $p > 0,1$ (16)	$\pm$ 0,03 $p < 0,05$ (16)		$\pm$ 0,03 $p > 0,1$ (16)		$\pm$ 0,05 $p < 0,05$ (16)		$\pm$ 0,05 $p > 0,1$ (16)	
2 года	1,38	0,64	-0,74	0,5	-0,1	1,07	+0,43	1,08	+0,58
	$\pm$ 0,06 $p < 0,005$ (16)	$\pm$ 0,03 $p > 0,1$ (16)		$\pm$ 0,01 $p > 0,05$ (16)		$\pm$ 0,04 $p < 0,025$ (16)		$\pm$ 0,05 $p > 0,05$ (16)	

уровень ГК заметно повышается, это явление менее выражено в старческом возрасте (табл. 3).

Таким образом, регулирующее действие АДФ на окисление и восстановительное аминирование  $\alpha$ -КГ особенно проявляется при нагрузках—добавлении  $\alpha$ -КГ и аммиака (<sup>1</sup>). В старческом возрасте отмечается заметное снижение эффекта АДФ на эти процессы. Приведенные данные и результаты, полученные нами ранее (<sup>1</sup>), позволяют заключить, что АДФ имеет важное значение не только в регуляции окислительного деаминирования ГК (<sup>6</sup>), но и в окислительных превращениях  $\alpha$ -КГ и ее восстановительном аминировании, что особенно важно в старческом возрасте, когда интенсивность метаболических процессов заметно снижается.

Институт биохимии  
Академии наук Армянской ССР

#### Գ. Հ. ԲՈՒՆՅԱԹՅԱՆ

$\alpha$ -կետոգլուտարաթթվի օքսիդացումը և նրա ամինացումը սպիտակ առնետների ուղեղի միտոքոնդրիաներում ծերացման ժամանակ ԱԴՖ-ի ներկայությամբ

ԱԴՖ-ն զգալի շափով խթանում է  $\alpha$ -կետոգլուտարաթթվի ( $\alpha$ -ԿԳ) օքսիդացումը և նրա ամինացումը լեց ամսական, մեկ տարեկան և երկու տարեկան (ծեր) սպիտակ առնետների ուղեղի միտոքոնդրիալ ֆրակցիայում ամոնիակի էնդոգեն քանակների դեպքում:

Բերված տվյալները թույլ են տալիս եզրակացնելու, որ ԱԴՖ-ն ունի էական նշանակություն  $\alpha$ -ԿԳ-ի փոխանակության մեջ ուղեղի միտոքոնդրիաներում՝ հատկապես ծեր հասակում, երբ նյութափոխանակության պրոցեսների ակտիվությունը նկատելիորեն նվազում է:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> В. А. Шагинян, Г. Г. Бунятыан и Г. В. Априкян, ДАН Арм. ССР, т. LXII, №3 (1976)  
<sup>2</sup> D. Sellgson, H. Sellgson, J. Lab. Clin. Med., 38, 324 (1951). <sup>3</sup> А. Н. Силакова, Г. П. Труш и А. Явилякова, Вопросы медицинской химии, 5, 538 (1962). <sup>4</sup> W. Grassmann, E. Hanning and M. Plochl, Zeit. Physiol Chem., 299, 258, 1955. <sup>5</sup> Г. Х. Бунятыан и Г. В. Априкян, Вопросы биохимии, изд. АН Арм. ССР, 2, 5 (1961). <sup>6</sup> Г. В. Априкян и В. А. Шагинян, Вопросы биохимии мозга, изд. АН Арм. ССР, 8, 91 (1973). <sup>7</sup> Г. В. Априкян, Г. Х. Бунятыан и В. А. Шагинян, Вопросы биохимии мозга, изд. АН Арм. ССР, 6, 67 (1970).

УДК 591.05.01

БИОХИМИЯ

Ж. С. Геворкян, А. С. Оганесян, К. Д. Беджаниян

### Структурная организация клеточных мембран и образование аммиака из аминокислот в корковом слое почек

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 26/II 1976)

Установлено, что наружные, а также внутриклеточные системы мембран (мембраны клеточных органелл, эндоплазматический ретикулум и др.) принимают активное участие в регуляции метаболизма клеток. Показано, что с мембранной системой клеток связано преобладающее большинство ферментов.

Клеточная мембрана имеет ассиметрическую структуру и состоит главным образом из белковых и фосфолипидных компонентов (1-3). По своему липидно-белковому составу наружный слой мембран отличается от внутреннего (ассиметрия), что и обуславливает их специфическую функцию.

Наши прежние исследования (4, 5) показали, что целостность клеточных мембран играет важную роль в регуляции дыхания и внутриклеточных метаболических процессов. По данным ряда авторов (1, 6, 7) в том числе и по нашим данным, в корковом слое почек L-аминокислоты подвергаются интенсивному деаминированию, с образованием большого количества свободного аммиака.

В последующих наших исследованиях было установлено, что при нарушении целостности клеточных мембран (гомогенизация) коркового слоя почек деаминирующая способность L-аминокислот этой ткани почти полностью исчезает. С другой стороны, было показано, что процессы деаминирования L-аминокислот в почках тесно связаны с транспортом ионов калия и натрия через неповрежденные клеточные мембраны, что указывает на существование тесной связи между наружной клеточной мембраной и биохимическими процессами, протекающими во внутриклеточных органеллах, в частности с процессами деаминирования L-аминокислот в митохондриях (3).

Результаты этих опытов побудили нас провести ряд исследований по изучению значения целостности структуры цитоплазматических мембран клеток коркового слоя почек и их отдельных компонентов (белковых и липидных) в процессах аммиакообразования из различных L-аминокислот. Для изучения этого вопроса применяли некоторые

протеолитические и липолитические ферменты, детергенты, а также замораживание и гомогенизирование, которые нарушают структурную организацию клеточных мембран и тем самым изменяют их функциональную деятельность.

Срезы и гомогенаты коркового слоя почек (по 200 мг) предварительно инкубировали в Krebs-Рингер-бикарбонатном буфере (2 мл, рН—7,4), в присутствии трипсина (12,5 мкг/мл), фосфолипазы «С» (33 мкг/мл), дезоксихолевой кислоты (200 мкг/мл) и тритона X—100 (75 мкг/мл) в течение 60 минут при  $t=37^{\circ}\text{C}$ , а затем добавляли аминокислоты (глутаминовая, аспарагиновая, орнитин и глутамин) по 16 мкмоль на пробу и проводили инкубацию в течение 60 минут в аэробных условиях (кислород—95%, углекислый газ—5%). Гомогенизацию почечной ткани производили в стеклянном гомогенизаторе с тефлоновым пестиком, а замораживание срезов в Krebs-Рингер-бикарбонатном буфере, при  $t=17^{\circ}\text{C}$ , в течение 15 минут, с последующим оттаиванием в условиях комнатной температуры. Содержание образовавшегося аммиака определяли микродиффузионным методом по Коппе, с применением реактива Несслера.

Приведенные данные (табл. 1) показывают, что при преинкубации срезов почек в условиях высокого напряжения кислорода, из аминокислот образуется значительно большее количество аммиака, по сравнению с тем, когда преинкубация проводится в атмосфере низкого содержания кислорода (воздух). В присутствии трипсина и фосфолипазы «С», а также дезоксихолевой кислоты и тритона X—100 отмечается резкое подавление образования аммиака из аминокислот. Интересно отметить, что ингибирующий эффект этих мембранноактивных агентов в более выраженной форме (в абсолютных количествах) проявляется когда преинкубация проводится в атмосфере с высоким напряжением кислорода, тем не менее в этих условиях из аминокислот образуется сравнительно больше аммиака, чем когда преинкубация проводится в условиях воздуха. Как видно из этой же таблицы, гомогенизирование, а также и замораживание срезов, приводят почти к полному исчезновению аминокислот-деаминирующей способности почечной ткани. Опыты показали (табл. 1), что образование аммиака из глутаминна существенно подавляется в срезах и гомогенатах почек только под действием трипсина, остальные агенты, а также замораживание и гомогенизирование ткани, не оказывают особого влияния на этот процесс. Некоторое повышение образования аммиака из глутаминна в присутствии добавленных агентов, преинкубированных в атмосфере высокого напряжения кислорода, по сравнению с опытами, преинкубированными в атмосфере воздуха, связано с более интенсивным деаминированием глутаминовой кислоты образовавшейся из глутаминна. Значительное подавление аммиакообразования из глутаминна в присутствии трипсина можно было объяснить его действием как на структуру клеточных мембран, так и на фермент глутаминназу (после поступления трипсина во внутрь клетки). Для выяснения этого вопроса ряд опытов проводили с гомогенатами почечной ткани (где отсутствуют мембранные барьеры). Было установлено,

что и в этих опытах трипсин в значительной мере подавляет продукцию аммиака из глутамина, что указывает на частичное инактивирование глутаминазы под действием этого протеолитического фермента.

Таблица 1

Влияние некоторых ферментов, детергентов, гомогенизации и замораживания на образование аммиака из L-аминокислот в корковом слое почек  
Средние данные из 6 опытов

Условия опыта	Количество образовавшегося аммиака (в $\mu\text{ммолях/г}$ ткани/ час) при добавлении			
	глутаминовая кислота	аспарагиновая кислота	орнитин	глутамин
1	2	3	4	5
1. Контроль (без преинкубации, инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	6,1 $\pm$ 0,2	9,4 $\pm$ 0,3	10,8 $\pm$ 0,2	26,8 $\pm$ 0,7
2. Контроль (преинкубация 60 мин в атмосфере воздуха, инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	1,6 $\pm$ 0,3	3,4 $\pm$ 0,5	5,2 $\pm$ 0,5	21,0 $\pm$ 0,5
3. Контроль (преинкубация 60 мин в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ , инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	9,0 $\pm$ 0,7	16,2 $\pm$ 0,4	17,0 $\pm$ 0,1	28,8 $\pm$ 0,8
4. Трипсин (преинкубация 60 мин в атмосфере воздуха, инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	0,9 $\pm$ 0,1	1,8 $\pm$ 0,2	3,8 $\pm$ 0,5	15,4 $\pm$ 0,7
5. Трипсин (преинкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ , инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	4,5 $\pm$ 0,7	6,2 $\pm$ 0,7	11,0 $\pm$ 0,7	16,8 $\pm$ 1,6
6. Фосфолипаза „С“ (преинкубация 60 мин, в атмосфере воздуха, инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	1,0 $\pm$ 0,2	1,8 $\pm$ 0,15	2,8 $\pm$ 0,2	21,7 $\pm$ 1,04
7. Фосфолипаза „С“ (преинкубация 60 мин в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ , инкубация 60 мин в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	4,3 $\pm$ 0,5	6,2 $\pm$ 0,7	8,1 $\pm$ 0,9	26,4 $\pm$ 2,2
8. Деоксихолевая кислота (преинкубация 60 мин, в атмосфере воздуха, инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	0	1,9 $\pm$ 0,2	3,4 $\pm$ 0,4	22,5 $\pm$ 2,9
9. Деоксихолевая кислота (преинкубация в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ , 60 мин, инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	1,2 $\pm$ 0,1	4,1 $\pm$ 0,2	8,6 $\pm$ 0,5	26,8 $\pm$ 1,7
10. Тритон X-100 (преинкубация 60 мин, в атмосфере воздуха, инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	1,0 $\pm$ 0,2	2,7 $\pm$ 0,5	4,5 $\pm$ 0,3	19,7 $\pm$ 1,1
11. Тритон X-100 (преинкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ , инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )	3,2 $\pm$ 0,6	4,8 $\pm$ 0,6	12,6 $\pm$ 0,3	25,2 $\pm$ 1,6
12. Замораживание срезов и инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$	0,6 $\pm$ 0,01	2,3 $\pm$ 0,2	3,3 $\pm$ 0,3	22,3 $\pm$ 0,9
13. Гомогенат, инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$	0	-0,6 $\pm$ 0,01	0,7 $\pm$ 0,01	25,9 $\pm$ 1,5
14. Гомогенат+трипсин (преинкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ , инкубация 60 мин, в атмосфере $\text{O}_2 + \text{CO}_2$ )				17,4 $\pm$ 2,1

Примечание: Опыты 1—12 проведены со срезами коркового слоя почек.

Известно, что вышеупомянутые ферменты и детергенты вызывают ряд изменений в структуре клеточных мембран. Протеолитические ферменты отщепляют отдельные пептиды из белков, а фосфолипазы — отдельные компоненты фосфолипидов, входящих в состав клеточной оболочки, вызывая соответствующие нарушения в ультраструктурной организации мембран клеток. Показано также, что детергенты связываются с мембранными белками и вызывают значительные изменения в их структуре. Эти изменения приводят к нарушению функциональной деятельности клеток, что в наших исследованиях выразилось подавлением процессов деаминарования аминокислот. Наши исследования показали, что в этих условиях активность мембранной АТФ-азы, играющая важную роль в процессах транспорта аминокислот, не претерпевает особых изменений. По всей вероятности, под действием упомянутых детергентов и ферментов, а также и замораживания изменяется проницаемость клеточной мембраны и в определенной мере страдает активный транспорт аминокислот. Однако, в почечных срезах, обработанных вышеупомянутыми агентами после инкубации определяется почти столько аминокислот, сколько в срезах контрольных опытов. Это очевидно связано с одной стороны дополнительным пассивным транспортом аминокислот из инкубационной среды во внутрь клеток, а с другой — снижением активности ферментов, осуществляющих деаминарование вышеупомянутых аминокислот.

Ряд авторов показал, что при замораживании тканей имеет место значительные нарушения структуры клеточных мембран (8, 9). В этих условиях, как показывают наши исследования, деамидирование глутамина почти не страдает. Таким образом, опыты показывают, что при повреждении клеточной мембраны страдает именно окислительное деаминарование аминокислот. Очевидно нарушаются также другие метаболические звенья, связанные с окислительными процессами. Установлено, что при нарушении целостности клеточной мембраны (гомогенат) значительно подавляются окислительные процессы (4, 5).

Результаты исследований показывают, что процессы деаминарования L-аминокислот, которые протекают в митохондриях клеток, тесно связаны с функциональным состоянием наружной клеточной мембраны. По-видимому, наружные мембраны клеток по определенным каналам связаны с митохондриями и другими органеллами клеток.

Известно, что во внутриклеточном пространстве имеется широкая сеть эндоплазматического ретикулума, которая структурно и функционально связана с наружной клеточной мембраной. Имеются указания, что этим путем клеточная мембрана осуществляет свое регулирующее влияние на внутриклеточные процессы.

Ряд авторов показал, что определенные вещества, как например, инсулин, не проникая во внутрь клетки, связывается с ее наружной мембраной и оказывает значительное влияние на течение метаболических процессов, протекающих внутри клетки. Очевидно, под действием инсулина, а также под действием вышеупомянутых мембраноактивных агентов, применявшихся нами в опытах, происходят определенные

изменения в ультраструктуре клеточных мембран, что соответствующим образом отражается на определенных внутриклеточных обменных процессах.

Имея в виду стимулирующее действие кислорода на процессы деаминирования аминокислот в срезах почек (на гомогенат не оказывает влияния), можно полагать, что при этом повышается энергетический уровень клетки, что играет важную роль в поддержании нормальной структуры клеточных мембран и осуществлении их функциональной деятельности. Показано, что структурная организация клеточных мембран не находится в стабильном состоянии, а подвергается динамическим изменениям (конформационные изменения компонентов мембран) в зависимости от состава внеклеточной жидкости и интенсивности внутриклеточных метаболических процессов, в частности, от окислительных процессов, протекающих в митохондриях. Образование сравнительно большого количества аммиака при пренкубации почечных срезов с вышеупомянутыми мембранно-активными соединениями в аэробных условиях ( $O_2 + CO_2$ ) связано с частичным восстановлением поврежденных клеточных мембран. Показано, что в условиях высокого напряжения кислорода усиливаются окислительные процессы и повышается энергетическое состояние клеток.

Институт биохимии Академии наук  
Армянской ССР

ժ. Ս. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ, Ա. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Կ. Դ. ՔԵՂԱՆՅԱՆ

Բջջային թաղանթների կառուցվածքը և ամինաթթուներից  
ամիակի առաջացումն էրիկամների կեղևային շերտում

Փորձերը դրվել են սպիտակ առնետների երիկամների կեղևային շերտի կտրվածքների և հոմոգենատների վրա:

Ստացված տվյալները ցույց են տվել, որ բջիջների թաղանթների ամրոզականությունը կարևոր նշանակություն ունի բնական ամինաթթուներից (գլյուտամինաթթու, ասպարազինաթթու, օրնիտին) ամիակի առաջացման պրոցեսների վրա: Այդ թաղանթների նուրբ կառուցվածքի խախտման դեպքում պրոտեոլիտիկ (տրիպսին), լիպոլիտիկ (ֆոսֆոլիպազա «С») ֆերմենտների կամ դետերգենտների (դեզօքսիխոլաթթու, տրիտոն X-100) ազդեցության տակ, ինչպես նաև երիկամային հյուսվածքի հոմոգենիզացման և սառեցման ժամանակ, նկատվում է ամինաթթուների դեամինացման պրոցեսների զգալի արգելակում:

Ենթադրվում է, որ բջջային թաղանթներն ակտիվ կերպով մասնակցում են ներբջջային գոյացություններում տեղի ունեցող նյութափոխանակության պրոցեսներին և կարգավորում նրանց ընթացքը:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> H. Davson, J. F. Danielli, The permeability of natural membranes, 1952. <sup>2</sup> J. D. Robertson In: Cellular membranes in development, 1964. <sup>3</sup> Л. Д. Бергелсон Журн.

Всесоюзн. хим. общ-ва им. Д. И. Менделеева, 20, (3), 322, (1975). <sup>4</sup> Г. Х. Бунятыан, А. С. Оганесян, Ж. С. Геворкян, ДАН СССР, 177, (4), 951, (1967). <sup>5</sup> Г. Х. Бунятыан, А. С. Оганесян, Ж. С. Геворкян, Биол. журн. Армении, 20, (4), 107, 1967. <sup>6</sup> Н. А. Krebs, Biochem. J., 29, (7), 1620, (1935). <sup>7</sup> А. Е. Браунштейн, Р. М. Азарх, Биохимия, 9, (6), 337, (1944). <sup>8</sup> Н. N. Althal, V. K. Karla а А. F. Brodle, Arch. Biochem. Biophys., 168, 122, (1975). <sup>9</sup> K. Y. Walton, M. Kervina, S. Fleischer а D. S. Don, Bioenergist. 1, 3, (1970). <sup>10</sup> V. Sica, P Cuatrecasas, Biochemistry, 12, 2282, (1973). <sup>11</sup> Л. К. Стреловцева, Пробл. эндокринолог., № 5, 108, 1974.

