

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LXII, № 2

1976

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. րեկտոր (պատ. Տարտուղար), է. Գ. ԱՆՐԻԿՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱՔԱՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱԹՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱՎԱԴՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱԹԱՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ո. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Ս. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд техн наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

Ր Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

	էջ
Ա. Գ. Գրիգորյան—Տափակ ֆունկտորներ և ուղղույթ կատեգորիաներ	65
Ա. Ն. Հայրապետյան, Ա. Ն. Կանատենիկով—Ածանցյալով հանրագումարելի ֆունկցիաների բազմության մասին	72
Մ. Ա. Ակիվիս, Ա. Վ. Ջաֆարյան—Ավելիդյան տարածության ենթաբազմաձևությունների մասին, որոնք ունեն հարթ նորմալ կապակցություն	75
Ֆ. Է. Մելիք-Աղամյան—Կանոնիկ դիֆերենցիալ օպերատորների մի հակադարձ խնդրի մասին	82
Տ. Ն. Հաբուսյունյան—Ինքնահամալուծ առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմի սպեկտրի ասիմպտոտիկան	88

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Հ. Ազատյան—Ամեն մի ամբողջական $n$ -ի շկարգավորված տրոհումների լրիվ բազմության թվարկման ալգորիթմի մասին	94
Վ. Գ. Եշիգիկ, Փ. Ա. Նալբանդյան—Պորոլեմային-կոդմեորոշված պրոցեսոր դիտարկման արդյունքների էֆեկտիվ մշակման համար	100

ՈՐԿԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ա. Թ. Բարայան, Կ. Մ. Թանձազյան, Ռ. Ս. Մկրտչյան—3(1)-մեթիլ-4(3) գիալկիլամինամեթիլֆենոլների ստացման նոր ուղի	105
Ա. Թ. Բարայան, Լ. Խ. Գամբուրյան, Վ. Ա. Պարոնյան—Զորրորդային ամոնիումային ազերի վերախմբավորում-ճեղծումը	109
Կ. Թ. Մառտիրոսյան, Հ. Յ. Ղազարյան, Ս. Օ. Միսաբյան—N-բենզիլ-N-(2,2-գիմեթիլ-4-ֆենիլլորոթիլեն) ամինի փոխարկումներն ալկալիական մետաղների ազդեցությամբ	112

ԱՆԱՂԻՏԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Վ. Մ. Թառայան Ա. Ն. Պողոսյան—Հիմնային ներկանյութերով պախումի էքստրակցիայի քիմիզմի վրա թթվության ազդեցության մասին	115
---	-----

ՈՒՏԱԿԱՆ ԶԱՆԱԾՈՆՆԵՐ

Մ. Ա. Սարյան, Է. Պ. Տաշիրի—Սեանի լեռնաշղթայի կայծքաբա-հրաբխածին ֆորմացիայի աղարկներում մանգանային հանքանյութերի երևակման մասին	119
--	-----

ՄԻԿՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

Ե. Ն. Մակարովա, Ս. Փ. Փալիկյան—էթանո ամինի ազդեցությունը Candida ցեղի շաքարասեկերում ֆոսֆորի տարրեր ձևերի սյարունակության վրա	122
---	-----

ՐԻՈՓԻՄԻԱ

Ա. Ս. Կիրակոսովա, Ս. Պ. Մանգրիկյան, Ա. Ա. Կառյան—Արյան պլազմայի նյութալույին սխտեմի ակտիվության ներդրող գործոնային կարգավորման մեխանիզմը	126
--	-----

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

	Стр.
<i>А. Г. Григорян</i> —Плоские функторы и регулярные категории . . . . .	65
<i>А. Н. Айрапетян, А. Н. Канатников</i> —О множестве функций с суммируемой производной . . . . .	72
<i>М. А. Акивис, А. В. Чакмазян</i> —О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью . . . . .	75
<i>Ф. Э. Мелик-Адамян</i> —Об одной обратной задаче для канонических дифференциальных операторов . . . . .	82
<i>Т. Н. Арутюнян</i> —Асимптотика спектра самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	88

### ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>А. А. Азатян</i> —Об одном алгоритме для перечисления всех неупорядоченных разбиений всякого целого $n$ . . . . .	94
<i>В. Д. Щиглик, Ж. С. Налбандян</i> —Проблемно-ориентированный процессор для эффективной обработки результатов наблюдений . . . . .	100

### ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

<i>А. Т. Бабаян, К. Ц. Тагмазян, Р. С. Мкртчян</i> —Новый путь синтеза 3(4)-метил-4(3)-дигалки ламинометил-фенилов . . . . .	105
<i>А. Т. Бабаян, Л. Х. Гамбургян, В. А. Пироян</i> —Перегруппировка-расщепление четвертичных солей аммония . . . . .	109
<i>Г. Т. Мартиросян, А. Ц. Казарян, С. О. Мисарян</i> —О превращениях N-бензил-N-(2,2-диметил-4-фенил-бутилен) аммина под действием щелочных металлов . . . . .	112

### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

<i>В. М. Тариян, А. Н. Погосян</i> —О влиянии кислотности на химизм экстракции галлия с основными красителями . . . . .	115
---	-----

### ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ

<i>М. А. Ситиан, Л. П. Яшавян</i> —О проявлении марганцевых руд в породах кемисто-вулканогенной фазы в Севанского хребта . . . . .	119
--	-----

### МИКРОБИОЛОГИЯ

<i>Е. Н. Макарян, С. П. Палмьян</i> —Влияние этаноламина на содержание различных форм фосфора у дрожжей рода <i>Candida</i> . . . . .	122
---	-----

### БИОХИМИЯ

<i>А. С. Кичикосова, С. П. Манжикян</i> —К механизму нейроэндокринной регуляции активности кининовой системы плазмы крови . . . . .	126
---	-----

## CONTENTS

## MATHEMATICS

- A. G. Grigorian*—Flat functors and regular categories . . . . . 65  
*A. N. Halrapetian, A. N. Canatnicov*—The set of functions with a sum-  
 mable derivative . . . . . M . . . . . 72  
*M. A. Akivis, A. B. Chakmasian*—On submanifolds of Euclidean space  
 with a flat normal connection . . . . . 75  
*F. E. Melik-Adamian*—A reverse problem for canonical differential operators . . . . . 82  
*T. N. Harutyunian*—The asymptotic of the spectra of the self-adjointing  
 system of differential equations of the first order . . . . . 88

## APPLIED MATHEMATICS

- A. A. Azatian*—About an algorithm of enumeration of all unorderedly par-  
 titions of any integer  $n$  . . . . . 94  
*V. D. Shiglik, J. S. Nalbandian*—A problem-oriented processor for data  
 analysis . . . . . 100

## ORGANIC CHEMISTRY

- A. T. Babayan, K. Ts. Tahmazian, R. S. Mkrtchian*—A new method of  
 synthesis of 3-(4)-methyl-4(3)-dialkyl-aminomethyl-phenols . . . . . 105  
*A. T. Babayan, L. Kh. Gamburgan, V. A. Paronian*—Regrouping splitting  
 of quaternary ammonium salts . . . . . 109  
*G. T. Martirosian, H. Ts. Kazirian, S. O. Misartan*—The transformation  
 of *N*-benzyl-*N*-(2,2-dimethyl-4-phenylbutylidene) amines by alkali metals . . . . . 112

## ANALYTICAL CHEMISTRY

- V. M. Tarayev, A. N. Poghosian*—The influence of activity on the che-  
 mism of extraction with basic dyes of gallium . . . . . 115

## ORE DEPOSITS

- M. A. Sattin, L. P. Yashvilid*—Manganese ores in rocks of the siliceous—  
 volcanic formation on the Sevan ridge . . . . . 119

## MICROBIOLOGY

- E. N. Manarova, S. P. Plikin*—Effect of ethanolamine on the contents  
 of different forms of phosphorus in the yeasts of the genus *Candida* . . . . . 122

## BIOCHEMISTRY

- A. S. Kirakosova, S. P. Manjikin, A. A. Galoyan*—On the mechanism  
 of neuro endocrinological regulation of the kinin system activity in blood . . . . . 126

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 00138. Подписано к печати 22/IV 1976 г. Тираж 540. Изд. 4109. Заказ 121

Формат бумаги 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0

Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,11.

Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24.  
 Эчмиадзинская типография Издательства АН Армянской ССР

УДК 519.49

МАТЕМАТИКА

А. Г. Григорян

Плоские функторы и регулярные категории

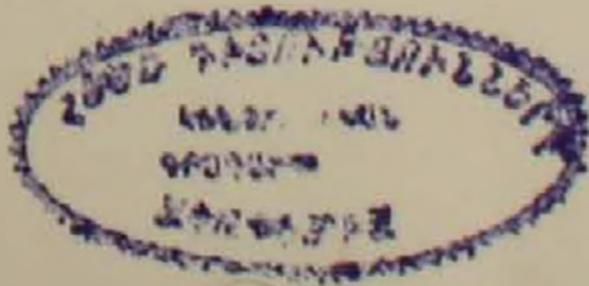
(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 11/XI 1975)

Если дана категория  $\pi$ , условимся обозначать через  $|\pi|$  класс объектов этой категории, а через  $\pi(p, q)$ , где  $p, q \in |\pi|$  — множество морфизмов из  $p$  в  $q$ . Категория  $\pi$  называется *преаддитивной*, если  $\pi(p, q)$  — абелева группа для любых  $p, q \in |\pi|$ , а композиция морфизмов билинейна. В дальнейшем под  $\pi$  всюду будет пониматься малая преаддитивная категория. Всякое кольцо (ассоциативное, с единицей) можно рассматривать как преаддитивную категорию с одним объектом. Категорию ковариантных (контравариантных) аддитивных функторов из  $\pi$  в категорию  $Ab$  абелевых групп будем обозначать через  $Ab^\pi$  ( $Ab^{\pi^*}$ , где  $\pi^*$  — категория, двойственная к  $\pi$ ). Объекты категории  $Ab^\pi$  будем называть  $\pi$ -модулями, морфизмы —  $\pi$ -гомоморфизмами. Нетрудно показать, что категория правых (левых) модулей над кольцом  $\Lambda$  изоморфна категории  $Ab^\Lambda$  ( $Ab^{\Lambda^*}$ ). Будем говорить, что  $I_p$  — *правый идеал* категории  $\pi$ , если  $I_p$  —  $\pi$ -подмодуль  $\pi$ -модуля  $\pi(p, -)$ . *Левыми идеалами* категории  $\pi$  будем называть правые идеалы категории  $\pi^*$ . Если  $\alpha \in \pi(r, q)$ , то положим для всякого  $r \in |\pi|$   $\pi(r, p)\alpha = \{\beta\alpha \mid \beta \in \pi(r, p)\}$ . Легко проверяется, что  $\pi(-, p)\alpha$  — левый идеал категории  $\pi$ . Можно показать, что левый идеал  $I_p$  категории  $\pi$ , конечно порожден в категорном смысле тогда и только тогда, когда  $I_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi(-, p_i)\alpha_{ij}$  для некоторых  $p_i \in |\pi|$ ,  $\alpha_{ij} \in \pi(p_i, p)$  и натуральных чисел  $n$  и  $m$ .

Лемма 1. (Бэр) ((<sup>1</sup>), лемма 1).  $\pi$ -модуль  $F$  инъективен в том и только в том случае, когда для всякого  $p \in |\pi|$  и для всякого правого идеала  $I_p$  категории  $\pi$  всякий  $\pi$ -гомоморфизм из  $I_p$  в  $F$  можно продолжить до  $\pi$ -гомоморфизма из  $\pi(p, -)$  в  $F$ .

$\pi^*$ -модулем *характеров*  $\pi$ -модуля  $F$  называется  $\pi^*$ -модуль  $F^*$ , определяемый условиями:

$$F^*(p) = Ab(F(p), Q/Z), \alpha\chi F^*(a) = aF(\alpha)\chi$$



для любых  $\alpha \in \pi(p, q)$ ,  $a \in F(p)$ ,  $\gamma \in F^*(q)$ .

Лемма 2. Последовательность  $\pi$ -модулей  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  точна тогда и только тогда, когда точна последовательность  $C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^*$ . Доказательство следует из аналогичного предложения для абелевых групп ((<sup>3</sup>), предложение 5.3.1).

Тензорным произведением  $\pi$ -модуля  $F$  и  $\pi^*$ -модуля  $G$  называется абелева группа

$$F \otimes G = \left( \bigoplus_{p \in |\pi|} [F(p) \otimes_Z G(p)] \right) / M,$$

где  $M$  — подгруппа группы  $\bigoplus_{p \in |\pi|} [F(p) \otimes_Z G(p)]$ , порожденная всеми элементами вида  $x F(\gamma) \otimes y - x \otimes G(\gamma)y$ , где  $\gamma \in \pi(p, q)$ ,  $x \in F(p)$ ,  $y \in G(q)$  ((<sup>3</sup>), стр. 26).

Лемма 3. ((<sup>3</sup>), стр. 28). Для любого  $\pi$ -модуля  $F$  и любого  $\pi^*$ -модуля  $G$  имеет место канонический изоморфизм.

$$(F \otimes G)^* \cong \text{Ab}^*(G, F^*).$$

$\pi$ -модуль  $F$  называется плоским, если функтор  $F \otimes - : \text{Ab}^* \rightarrow \text{Ab}$  точен слева.

Лемма 4.  $\pi$ -модуль  $F$  плоский в том и только в том случае, если  $\pi^*$ -модуль  $F^*$  инъективен.

Доказательство. Пусть  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$  — произвольная точная последовательность  $\pi^*$ -модулей. Тогда ввиду леммы 2 последовательность  $0 \rightarrow F \otimes A \xrightarrow{1_F \otimes f} F \otimes B$  точна тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$(F \otimes B)^* \rightarrow (F \otimes A)^* \rightarrow 0.$$

Но в силу леммы 3 последняя последовательность есть не что иное, как последовательность

$$\text{Ab}^*(B, F^*) \rightarrow \text{Ab}^*(A, F^*) \rightarrow 0,$$

а ее точность при всех мономорфизмах  $f$  равносильна инъективности  $\pi^*$ -модуля  $F^*$ .

Для  $\pi$ -модуля  $F$  рассмотрим изоморфизм  $k : F \otimes \pi(-, p) \rightarrow F(p)$  ((<sup>3</sup>), стр. 26), при котором смежному классу, содержащему элемент  $\sum_{i=1}^n x_i \otimes \alpha_i$ , где  $x_i \in F(p_i)$ ,  $\alpha_i \in \pi(p_i, p)$ ,  $p_i \in |\pi|$ , ставится в соответствие элемент  $\sum_{i=1}^n x_i F(\alpha_i) \in F(p)$ . Пусть  $\mu : I_p \rightarrow \pi(-, p)$  — вложение левого идеала  $I_p$  категории  $\pi$  в  $\pi(-, p)$ . Обозначим образ сквозного отображения  $F \otimes I_p \xrightarrow{1_F \otimes \mu} F \otimes \pi(-, p) \rightarrow F(p)$  через  $F \cdot I_p$ . Нетрудно видеть, что  $F \cdot I_p$  состоит из всех элементов вида  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(\alpha_{ij})$ ,

Где

$$x_{ij} \in F(p_i), \quad a_{ij} \in I_p(p_i), \quad p_i \in |\pi|.$$

Лемма 5. Для любого  $\pi$ -модуля  $F$  и любого морфизма  $\alpha \in \pi(p, q)$

$$F \cdot [\pi(-, p)\alpha] = F(p)F(\alpha).$$

Доказательство. Пусть  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}\alpha) \in F \cdot [\pi(-, p)\alpha]$ , где  $x_{ij} \in F(p_i)$ ,  $a_{ij} \in \pi(p_i, p)$ ,  $p_i \in |\pi|$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}\alpha) = \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}) \right] F(\alpha) \in F(p)F(\alpha).$$

Обратное же включение  $F(p)F(\alpha) \subseteq F \cdot [\pi(-, p)\alpha]$  очевидно.

Предложение 1.  $\pi$ -модуль  $F$  плоский тогда и только тогда, когда для всякого  $p \in |\pi|$  и всякого левого идеала  $I_p$  категории  $\pi$  отображение  $(1_F \otimes \mu)k: F \otimes I_p \rightarrow F \cdot I_p$  — изоморфизм.

Утверждение остается в силе, если  $I_p$  — произвольный конечно порожденный левый идеал.

Доказательство. Если  $F$  — плоский  $\pi$ -модуль, то для всякого левого идеала  $I_p$  отображение  $1_F \otimes \mu$  — мономорфизм. Следовательно,  $F \otimes I_p \cong \text{Im}[(1_F \otimes \mu)k] = F \cdot I_p$ .

Обратно, если  $(1_F \otimes \mu)k$  — изоморфизм, то  $F \otimes I_p \rightarrow F(p)$  — мономорфизм. Тогда в силу леммы 2  $F(p)^* \rightarrow (F \otimes I_p)^*$  — эпиморфизм. Но этот эпиморфизм в силу того, что  $F(p) \cong F \otimes \pi(-, p)$  и в силу леммы 3 есть не что иное, как эпиморфизм

$$Ab^*(\pi(-, p), F^*) \rightarrow Ab^*(I_p, F^*).$$

Ввиду леммы 1 отсюда следует, что  $\pi^*$ -модуль  $F^*$  инъективен. Следовательно, в силу леммы 4  $F$  — плоский  $\pi$ -модуль.

Предположим теперь, что наше допущение об изоморфизме  $F \otimes I_p \rightarrow F \cdot I_p$  относится лишь к конечно порожденным идеалам  $I_p$ .

Покажем, что если  $J_p$  — произвольный левый идеал, то  $F \otimes J_p \rightarrow F \cdot J_p$  —

все же изоморфизм. Итак, допустим, что  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}) = 0$  в  $F \cdot J_p$ ,

где  $x_{ij} \in F(p_i)$ ,  $a_{ij} \in J_p(p_i)$ ,  $p_i \in |\pi|$ . Тогда  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \otimes a_{ij} = 0$  в  $F \otimes I_p$ , где

$I_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi(-, p_i)a_{ij}$  — конечно порожденный левый идеал. Ввиду на-

личия канонического гомоморфизма  $F \otimes I_p \rightarrow F \otimes J_p$  получаем, что

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \otimes a_{ij} = 0$  и в  $F \otimes J_p$ , что завершает доказательство.

Свободными  $\pi$ -модулями являются прямые суммы  $\pi$ -модулей вида  $\pi(p, -)$  ((<sup>3</sup>), стр. 18). Заметим, что всякий свободный  $\pi$ -модуль — плоский ((<sup>4</sup>), стр. 11). Поскольку всякий  $\pi$ -модуль изоморфен  $\pi$ -фактормодулю свободного  $\pi$ -модуля ((<sup>4</sup>), стр. 5), то следующий критерий плоскостности представляет интерес.

Предложение 2. Пусть  $\pi$ -модуль  $M \cong F/K$ , где  $F$ -плоский (в частности, свободный)  $\pi$ -модуль. Тогда  $\pi$ -модуль  $M$ -плоский тогда и только тогда, когда  $F \cdot I_p \cap K(p) = K \cdot I_p$  для любого левого идеала  $I_p$  категории  $\pi$ .

Замечание. Так как включение  $K \cdot I_p \subseteq F \cdot I_p \cap K(p)$  имеет место всегда, то необходимым и достаточным условием плоскостности является включение  $F \cdot I_p \cap K(p) \subseteq K \cdot I_p$ .

Доказательство. В силу точности функтора  $\otimes$  справл ((4), стр. 9) последовательность

$$K \otimes I_p \rightarrow F \otimes I_p \rightarrow M \otimes I_p \rightarrow 0$$

точна. Так как  $F$ -плоский  $\pi$ -модуль, то имеет место канонический изоморфизм  $F \otimes I_p \cong F \cdot I_p$ , а образ  $K \otimes I_p$  в  $F \otimes I_p$  при этом изоморфизме совпадает с  $K \cdot I_p$ . Следовательно,

$$M \otimes I_p \cong F \cdot I_p / K \cdot I_p.$$

Отсюда в силу предложения 1  $M$ -плоский  $\pi$ -модуль тогда и только тогда, когда

$$M \cdot I_p \cong F \cdot I_p / K \cdot I_p$$

для любого (конечно порожденного) левого идеала  $I_p$ . Произвольный элемент из  $M \cdot I_p$  в силу естественности  $\pi$ -эпиморфизма  $\sigma: F \rightarrow M$  можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij} \sigma_{p_i}) M(a_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_{ij} F(a_{ij})] \sigma_p = \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}) \right] \sigma_p,$$

где  $x_{ij} \in F(p_i)$ ,  $a_{ij} \in I_p(p_i)$ ,  $p_i \in |\pi|$ . Значит,

$$M \cdot I_p = (F \cdot I_p) \sigma_p \cong F \cdot I_p / [F \cdot I_p \cap K(p)].$$

Следовательно,  $M$ -плоский  $\pi$ -модуль тогда и только тогда, когда  $F \cdot I_p / [F \cdot I_p \cap K(p)] \cong F \cdot I_p / K \cdot I_p$  для любого  $p \in |\pi|$  и любого (конечно порожденного) левого идеала  $I_p$ . Так как  $K \cdot I_p \subseteq F \cdot I_p \cap K(p)$ , то это равносильно тому, что  $F \cdot I_p \cap K(p) = K \cdot I_p$ .

Следствие 1. Пусть всякий конечно порожденный левый идеал категории  $\pi$ -главный (т. е. имеет вид  $\pi(-, p)\alpha$ , где  $\alpha \in \pi(p, q)$ ) и пусть  $M \cong F/K$ , где  $F$ -свободный  $\pi$ -модуль. Тогда  $M$ -плоский  $\pi$ -модуль в том и только в том случае, если

$$F(p)F(\alpha) \cap K(q) \subseteq K(p)K(\alpha)$$

для всех  $p, q \in |\pi|$ ,  $\alpha \in \pi(p, q)$ .

Доказательство. Положим в предложении 2  $I_q = \pi(-, p)\alpha$ . Тогда в силу предложения 2,  $M$ -плоский  $\pi$ -модуль тогда и только тогда, когда

$$F \cdot [\pi(-, p)\alpha] \cap K(q) \subseteq K \cdot [\pi(-, p)\alpha].$$

В силу леммы 5 это включение можно переписать в виде

$$F(p)F(a) \cap K(q) \subseteq K(p)K(a).$$

Категория  $\pi$  называется *регулярной*, если для любых  $p, q \in |\pi|$ ,  $\alpha \in \pi(p, q)$  найдется такое  $\beta \in \pi(q, p)$ , что  $\alpha = \alpha\beta\alpha$  ((<sup>3</sup>), стр. 90).

Предложение 3. Следующие свойства (не обязательно малой или предаддитивной) категории  $\pi$  равносильны:

- 1)  $\pi$  — регулярная категория;
- 2) всякий главный правый идеал категории  $\pi$  является главным правым идеалом, порождаемым идемпотентом;
- 3) левосторонний аналог свойства 2).

Доказательство. 1)  $\Rightarrow$  2). Для любого  $\alpha \in \pi(p, q)$  существует такое  $\beta \in \pi(q, p)$ , что  $\alpha = \alpha\beta\alpha$ . Положив  $\varepsilon = \alpha\beta$ , будем иметь:

$$\varepsilon^2 = \alpha\beta\alpha\beta = \alpha\beta = \varepsilon, \quad \alpha = \alpha\beta\alpha = \varepsilon\alpha.$$

Поэтому  $\alpha\pi(q, -) = \varepsilon\pi(p, -)$ .

2)  $\Rightarrow$  1). Если  $\alpha \in \pi(p, q)$ , то  $\alpha = \alpha 1_q \in \alpha\pi(q, q) = \varepsilon\pi(p, q)$  для некоторого  $\varepsilon = \varepsilon^2 \in \pi(p, p)$ . Следовательно, существует такое  $\gamma \in \pi(p, q)$ , что  $\alpha = \varepsilon\gamma$ . Поскольку  $\varepsilon \in \varepsilon\pi(p, p) = \alpha\pi(q, p)$ , то найдется такое  $\beta \in \pi(q, p)$ , что  $\varepsilon = \alpha\beta$ . Тогда  $\alpha\beta\alpha = \varepsilon\alpha = \varepsilon^2\gamma = \varepsilon\gamma = \alpha$ .

Импликация 1)  $\Rightarrow$  3) и 3)  $\Rightarrow$  1) доказываются аналогично.

Предложение 4. Следующие свойства (не обязательно малой) предаддитивной категории  $\pi$  равносильны:

- 1)  $\pi$  — регулярная категория;
- 2) всякий конечно порожденный правый идеал категории  $\pi$  является главным правым идеалом, порождаемым идемпотентом;
- 3) левосторонний аналог свойства 2).

Доказательство. 1)  $\Rightarrow$  2). Ввиду предложения 3 достаточно доказать, что правый идеал  $\alpha\pi(q, -) + \beta\pi(r, -)$  — главный. Здесь  $\alpha \in \pi(p, q)$ ,  $\beta \in \pi(p, r)$ . В силу предложения 3 существует такое  $\varepsilon = \varepsilon^2 \in \pi(p, p)$ , что  $\alpha\pi(q, -) = \varepsilon\pi(p, -)$ . Тогда для любого  $s \in |\pi|$  имеем

$$\beta\pi(r, s) = 1_p\beta\pi(r, s) \subseteq \varepsilon\beta\pi(r, s) + (1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, s),$$

откуда

$$\alpha\pi(q, s) + \beta\pi(r, s) \subseteq \varepsilon\pi(p, s) + (1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, s).$$

Более того, так как  $\alpha\pi(q, s) = \varepsilon\pi(p, s)$ , то

$$\alpha\pi(q, s) + \beta\pi(r, s) = \varepsilon\pi(p, s) + (1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, s).$$

В силу предложения 3 найдется такое  $\varphi = \varphi^2 \in \pi(p, p)$ , что  $(1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, s) = \varphi\pi(p, s)$  для всякого  $s \in |\pi|$ , причем  $\varepsilon\varphi = 0$ , так как  $\varphi \in (1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, p)$ . Итак, для всякого  $s \in |\pi|$  имеем

$$\alpha\pi(q, s) + \beta\pi(r, s) = \varepsilon\pi(p, s) + \varphi\pi(p, s).$$

Положив  $\psi = \varphi(1_p - \varepsilon)$ , будем иметь

$$\psi\varepsilon = 0, \quad \varepsilon\psi = \varepsilon\varphi(1_p - \varepsilon) = 0, \quad \psi\varphi = \varphi(1_p - \varepsilon)\varphi = \varphi(\varphi - \varepsilon\varphi) = \varphi^2 = \varphi \quad \text{и}$$

$$\psi^2 = \psi\varphi(1_p - \varepsilon) = \varphi(1_p - \varepsilon) = \psi.$$

Поскольку  $\psi\varphi = \varphi(\psi = \varphi(1_p - \varepsilon))$ , то  $\varphi\pi(p, s) \subseteq \psi\pi(p, s)$  ( $\psi\pi(p, s) \subseteq \varphi\pi(p, s)$ ) для всякого  $s \in |\pi|$ . Значит,  $\varphi\pi(p, s) = \psi\pi(p, s)$ . Итак  $\alpha\pi(q, s) + \beta\pi(r, s) = \varepsilon\pi(p, s) + \psi\pi(p, s)$ . Покажем, что  $\varepsilon\pi(p, s) + \psi\pi(p, s) = (\varepsilon + \psi)\pi(p, s)$ . Включение  $\supseteq$  очевидно. Если же  $\zeta = \varepsilon\mu + \psi\nu$ , где  $\mu, \nu \in \pi(p, s)$ , то  $(\varepsilon + \psi)(\varepsilon\mu + \psi\nu) = \varepsilon\mu + \psi\nu = \zeta$ .

Следовательно, справедливо и обратное включение  $\subseteq$ .

Импlications  $2) \Rightarrow 1)$  и  $3) \Rightarrow 1)$  следуют из предложения 3, а импликация  $1) \Rightarrow 3)$  доказывается аналогично импликации  $1) \Rightarrow 2)$ .

**Теорема.** *Малая предаддитивная категория  $\pi$  регулярна тогда и только тогда, когда все  $\pi$ -модули плоские.*

**Доказательство.** Предположим, что все  $\pi$ -модули — плоские. Тогда, в частности, для всякого  $\alpha \in \pi(p, q)$   $\pi$ -модуль  $\pi(p, -)/\alpha\pi(q, -)$  плоский. В силу предложения 2 это равносильно тому, что для всякого левого идеала  $I_q$  категории  $\pi$

$$\pi(p, -) \cdot I_q \cap \alpha\pi(q, q) = [\alpha\pi(q, -)] \cdot I_q.$$

В частности, если  $I_q = \pi(-, p)\alpha$ , то

$$\pi(p, -) \cdot [\pi(-, p)\alpha] \cap \alpha\pi(q, q) = [\alpha\pi(q, -)] \cdot [\pi(-, p)\alpha].$$

В силу леммы 5 это равенство можно переписать в виде

$$\pi(p, p)\alpha \cap \alpha\pi(q, q) = \alpha\pi(q, p)\alpha.$$

Поскольку  $\alpha = 1_p\alpha = \alpha 1_q \in \pi(p, p)\alpha \cap \alpha\pi(q, q)$ , то существует такое  $\beta \in \pi(q, p)$ , что  $\alpha = \alpha\beta\alpha$  т. е.  $\pi$ -регулярная категория.

Предположим теперь, что  $\pi$ -регулярная категория. Пусть  $M \cong F/K$ , где  $F$  — свободный  $\pi$ -модуль. В силу предложения 4 и следствия 1 для плоскостности  $\pi$ -модуля  $M$  достаточно доказать, что  $F(p)F(\alpha) \cap K(q) \subseteq K(p)K(\alpha)$  для всех  $p, q \in |\pi|$  и  $\alpha \in \pi(p, q)$ . Если  $x \in F(p)F(\alpha) \cap K(q)$ , то  $x = yF(\alpha)$  для некоторого  $y \in F(p)$ . В силу регулярности  $\pi$  найдется такое  $\beta \in \pi(q, p)$ , что  $\alpha = \alpha\beta\alpha$ . Тогда

$$x = yF(\alpha) = yF(\alpha)F(\beta)F(\alpha) = xF(\beta)F(\alpha).$$

Поскольку  $x \in K(q)$  и  $K$  —  $\pi$ -подмодуль в  $F$ , то  $xF(\beta) \in K(p)$ . А тогда  $xF(\beta)F(\alpha) \in K(p)K(\alpha)$ . Теорема доказана.

В заключение искренне благодарю Л. А. Скорнякова за руководство работой.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ա. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Տափաղկ ֆունկտորներ և ռեզուլյար կատեգորիաներ

Փորր պրեդատիվ  $\pi$  կատեգորիայից արելյան խմբերի կատեգորիան տանող կովարիանտ ադիտիվ ֆունկտորները կոչվում են  $\pi$ -մոդուլներ։ Այսպեսովում են  $\pi$ -մոդուլների տափաղկության որոշ շափանիշներ։

որոնք ընդհանրացնում են օղակի վրայի մոդուլների համար համապատասխան հայտնի չափանիշները:

Տրվում է ռեզուլյար պրեդադիտիվ կատեգորիաների բնութագրումը գլխավոր և վերջավոր ծնված իդեալների միջոցով:

<sup>4</sup>Իխավոր արդյունքն է՝ փոքր պրեդադիտիվ  $\pi$ -կատեգորիան ռեզուլյար է այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր  $\pi$ -մոդուլները տափակ են:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> M. Harada, Osaka J. Math., 10, 3, 585—596. (1973). <sup>2</sup> И. Ламбек, Кольца и модули, М., „Мир“, 1971. <sup>3</sup> B. Mitchell, Adv. Math., 8, 1—161 (1972). <sup>4</sup> S. Harari, Cah. top. et geom. diff., 12, 1, 3—27 (1971). <sup>5</sup> G. Weidenfeld, M. Weidenfeld, C. r. Acad. sci., A 275, 2, 89—91 (1972).

УДК 517.5.53

МАТЕМАТИКА

А. Н. Айрапетян, А. Н. Канатников

О множестве функций с суммируемой производной

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 1/XII 1975)

1. В 1951 году С. Н. Мергелян (<sup>1</sup>) построил пример голоморфной и ограниченной в круге  $D: |z| < 1$  функции  $f(z)$  у которой

$$\iint_D |f'(z)| dx dy = +\infty, \quad z = x + iy \quad (1)$$

Обозначим множество таких функций через  $\mathfrak{M}^-$ . Дж. Пиранян (<sup>2</sup>) продолжил изучение множества  $\mathfrak{M}^-$  и доказал, что  $\mathfrak{M}^-$  содержит произведения Бляшке и ограниченные голоморфные в  $D$  функции  $f(z) \neq 0$ .

Несмотря на то, что построение примеров функций из  $\mathfrak{M}^-$  сопряжено с определенными техническими трудностями, В. Н. Гаврилов высказал нам предположение, что множество  $\mathfrak{M}^-$  достаточно массивное, является множеством второй категории (по Бэру) в  $H^-$ . В настоящей заметке мы доказываем справедливость этого предположения также и в случае пространств Харди  $H^p$ ,  $0 < p < \infty$ .

2. Для произвольного фиксированного  $p$ ,  $0 < p \leq \infty$  рассмотрим в топологическом пространстве Харди  $H^p$  множество  $\mathfrak{M}^p$  функций  $f(z)$ , удовлетворяющих условию (1).

**Теорема.** Для любого  $p$ ,  $0 < p \leq \infty$ , дополнение множества  $\mathfrak{M}^p$  относительно  $H^p$  является множеством типа  $F_\sigma$  и первой категории в  $H^p$ .

**Доказательство.** Положим  $A^p = H^p \setminus \mathfrak{M}^p$ ,  $0 < p \leq \infty$  и рассмотрим множества  $A_n^p$  функций  $f(z)$  из класса  $H^p$ ,  $p(0 < p \leq \infty)$ ; — фиксированно, которые удовлетворяют условию

$$\iint_D |f'(z)| dx dy \leq n.$$

Тогда  $A^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^p$ . Покажем, что каждое множество  $A_n^p$  замкнуто в топологии  $H^p$ . Фиксируем  $n$ ;  $n=1, 2, \dots$ , и рассмотрим последовательность функций  $\{f_k(z)\} \subset A_n^p$  сходящуюся к функции  $f_0(z)$  в топо-

логии пространства  $H^p$ . Из сходимости  $f_k(z) \xrightarrow{H^p} f_0(z)$  следует, что  $f_k(z) - f_0(z)$  равномерно на компактах круга  $D$ , поскольку хорошо известно <sup>(3)</sup>, что если функция  $f(z) \in H^p$ ,  $p > 0$ , то

$$|f(z)| \leq 2^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} (1-r)^{-\frac{1}{p}}, \quad r = |z| \quad (2)$$

где  $f(e^{it}) \in L_p$  — означает угловые предельные значения функции  $f(z)$ .

Из неравенства (2) вытекает, что из того, что  $f_k(z) \xrightarrow{H^p} f_0(z)$ , следует равномерная сходимость последовательности  $f_k(z)$  к функции  $f_0(z)$  на компактах круга  $D$ . Применяя теорему Фату <sup>(4)</sup>, получим

$$\iint_D |f_0(z)| dx dy \leq n.$$

Итак,  $f_0(z) \in A_n^p$  и следовательно, для любого натурального  $n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ , множество  $A_n^p$  замкнуто в топологии пространства  $H^p$ .

Покажем теперь, что множество  $\mathfrak{M}^p$  являющееся дополнением множества  $A^p$  относительно  $H^p$ , всюду плотно в  $H^p$ , поскольку  $\mathfrak{M}^p$  содержится в дополнении множества  $A_n^p$  относительно  $H^p$  для каждого  $n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ , и множества  $A_n^p$  замкнуты, отсюда будет следовать, что все  $A_n^p$  нигде не плотны в  $H^p$ .

Прежде всего заметим, что сумма двух функций  $f(z) + g(z)$  из которых одна,  $g(z)$ , принадлежит  $\mathfrak{M}^p$ , а другая,  $f(z)$  не принадлежит  $\mathfrak{M}^p$ , также не принадлежит  $\mathfrak{M}^p$ . Действительно, так как

$$\iint_D |f'(z) + g'(z)| dx dy \geq \iint_D |g'(z)| dx dy - \iint_D |f'(z)| dx dy,$$

то замечание доказано.

Если  $g(z) \in \mathfrak{M}^p$ , то положим  $f_k(z) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) g(z)$   $k = 1, 2, \dots$ ; если  $g(z) \in H^p \setminus \mathfrak{M}^p$ , то рассмотрим произвольную функцию  $g_0(z) \in \mathfrak{M}^p$  и положим  $f_k(z) = g(z) + \frac{1}{k} g_0(z)$ . В силу такого выбора последовательностей  $\{f_k(z)\}$ , все  $f_k(z) \in \mathfrak{M}^p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . В каждом из названных случаев,  $f_k(z) \xrightarrow{H^p} g(z)$ , и значит,  $\mathfrak{M}^p$  плотно в  $H^p$ . Теорема доказана.

В заключение, пользуясь случаем, выражаем искреннюю благодарность В. И. Гаврилову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ածանցյալով հանրագումարելի ֆունկցիաների բազմության մասին

Հոդվածում դիտարկվում են միավոր շրջանում հոլոմորֆ այն  $f(z)$  ֆունկցիաների  $\mathfrak{M}$  բազմությունը, որի համար  $\int_{|z|<1} |f'(z)| dx dy = +\infty$ .

Ապացուցվում է, որ  $\mathfrak{M}$  բազմության լրացումը Հարդիի  $H^p (0 < p \leq \infty)$  դասերի նկատմամբ հանդիսանում է  $F\sigma$  տիպի և առաջին կատեգորիայի բազմություն  $H^p (0 < p \leq \infty)$  տարածություններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> С. И. Мергелян, Известия АН СССР, сер. матем. 15, стр. 395—400 (1951).  
<sup>2</sup> J. Pflanz, Proc. Amer. Math. Soc. v. 19 №6, p. 1255—1257 (1968). <sup>3</sup> P. Duren, Theory of  $H^p$  spaces Academic press, New York and London, 1970. <sup>4</sup> И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.

УДК 513

МАТЕМАТИКА

М. А. Акивис, А. В. Чакмазян

О подмногообразиях евклидова пространства с плоской  
 нормальной связностью

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагшняном 15/XII 1975)

1. В нормальном расслоении  $N(V_m)$  подмногообразия  $V_m$  риманова пространства  $V_n$  и, в частности, евклидова пространства  $R_n$  естественным образом определяется линейная связность, называемая нормальной связностью многообразия  $V_m$ . Нормальные связности подмногообразий интенсивно изучаются в последнее время (см., например, (1-4)).

Целью настоящей работы является изучение локального строения подмногообразий  $V_m$  евклидова пространства  $R_n$ , нормальная связность которых является плоской. Такие  $V_m$  рассматривались в книге (1). В работе получен ряд геометрических характеристик изучаемых многообразий, содержащихся в теоремах 1-5. При доказательстве этих теорем используется аппарат, развитый одним из авторов (5-7).

Результаты, полученные в работе, могут быть распространены на подмногообразия пространств постоянной кривизны.

2. Рассмотрим евклидово пространство  $R_n$  и в нем множество всех аффинных реперов, образованных его точкой  $x$  и векторами  $e_u$ , выходящими из этой точки. Скалярные произведения

$$(e_u e_v) = g_{uv} \tag{1}$$

образуют метрический тензор пространства  $R_n$ . Уравнения инфинитезимального перемещения этих реперов имеют вид

$$dx = \omega^u e_u, de_u = \omega_v^u e_v \quad (u, v = 1, \dots, n) \tag{2}$$

При этом формы Пфаффа, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры (8):

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \omega_v^u, d\omega_v^u = \omega_v^w \wedge \omega_w^u. \tag{3}$$

Кроме того, они удовлетворяют уравнениям Пфаффа

$$dg_{uv} = g_{uw}\omega_v^w + g_{uv}\omega_u^w, \quad (4)$$

которые получаются при дифференцировании соотношений (1).

Пусть  $V_m$  — подмногообразие пространства  $R_n$ ,  $x$  — его точка и  $T_x$  и  $N_x$  — касательная и нормальная плоскости  $V_m$  в точке  $x$ . Обозначим через  $T(V_m)$  и  $N(V_m)$  касательное и нормальное расслоения над  $V_m$ . Присоединим к многообразию  $V_m$  подвижный репер так, чтобы его векторы  $e_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) составляли базис в  $T_x$ , а векторы  $e_a$  ( $a=m+1, \dots, n$ ) — базис в  $N_x$ . Тогда

$$(e_i, e_a) = 0, (e_i, e_j) = g_{ij}, (e_a, e_b) = g_{ab}, \quad (5)$$

где  $g_{ij}$  — метрический тензор многообразия  $V_m$ , а тензор  $g_{ab}$  определяет метрику в нормальном расслоении  $N(V_m)$ . Обозначим через  $g^{ij}$  и  $g^{ab}$  обратные тензоры для тензоров  $g_{ij}$  и  $g_{ab}$ .

В силу (5) из уравнений (4) имеем;

$$g_{ij}\omega_a^j + g_{ia}\omega_i^a = 0, \quad (6)$$

$$dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{ki}\omega_i^k, \quad dg_{ab} = g_{a1}\omega_b^1 + g_{1b}\omega_a^1.$$

Так как  $dx \in T_x$ , то

$$\omega^a = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения и применяя известную лемму Картана (см. например (8)), получаем

$$\omega_i^a = b_{ij}^a \omega^j, \quad (8)$$

где  $b_{ij}^a = b_{ji}^a$ . Величины  $b_{ij}^a$  образуют систему асимптотических тензоров подмногообразия  $V_m$ . Кроме этого, в силу уравнений (6) найдем

$$\omega_a^i = -g^{ik} g_{ab} b_{kj}^a \omega^j. \quad (9)$$

Формы  $\omega_a^i$  определяют связность в нормальном расслоении  $N(V_m)$ , которую называют нормальной связностью (1). Форма кривизны этой связности имеет в силу уравнений (3), (8) и (9) вид

$$\Omega_{\beta}^{\alpha} = d\omega_{\beta}^{\alpha} - \omega_{\beta}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\alpha} = g^{ke} g_{\beta\gamma} b_{ki}^a b_{ej}^1 \omega^i \wedge \omega^j,$$

а ее тензор кривизны — вид

$$R_{\beta i j}^{\alpha} = g^{ke} g_{\beta\gamma} b_{ki}^a b_{ej}^1. \quad (10)$$

Для векторного поля  $\xi$ , принадлежащего нормальному расслоению  $N(V_m)$ , имеем  $\xi = \xi^a e_a$  и в силу (2)

$$d\xi = (d\xi^a + \xi^b \omega_b^a) e^a + \xi^a \omega_a^i e_i.$$

Выражение  $D\xi = (d\xi^a + \xi^b \omega_b^a) e_a$  представляет собой ковариантный дифференциал векторного поля по отношению к нормальной связности. Поле  $\xi$  называется параллельным векторным полем, если  $D\xi = 0$ .

Говорят, что нормальная связность является плоской, если результат параллельного переноса любого нормального вектора  $\xi$  не зависит от пути на многообразии  $V_m$ .

Нормальная связность будет плоской тогда и только тогда, когда ее форма кривизны  $\Omega^a$  тождественно обращается в нуль, что равносильно условию  $R^a_{\beta ij} = 0$ .

3. Теорема 1. Для того, чтобы нормальная связность многообразия  $V_m$  была плоской необходимо и достаточно, чтобы многообразие  $V_m$  допускало  $(n-m)$ -параметрическое семейство параллельных многообразий.

Пусть  $y = x + \xi^a e_a$  — произвольная точка нормали  $N_x$  многообразия  $V_m$ , и  $V_m'$  — многообразие, описываемое этой точкой. Для этого многообразия имеем

$$dy = (\omega^i + \xi^a \omega^i_a) e_i + (d\xi^a + \xi^b \omega^a_b) e_a. \quad (11)$$

Многообразие  $V_m'$  будет параллельно  $V_m$ , если его касательное пространство  $T_y$  параллельно  $T_x$ . Это условие равносильно уравнениям

$$D\xi^a = d\xi^a + \xi^b \omega^a_b = 0, \quad (12)$$

означающим, что вектор  $\xi = \xi^a e_a$  переносится параллельно в нормальном расслоении.

Для того, чтобы многообразие  $V_m$  допускало  $(n-m)$ -параметрическое семейство параллельных многообразий необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (12) была вполне интегрируема, откуда следует, что  $\Omega^a_b = 0$ , т. е. нормальная связность многообразия  $V_m$  будет плоской.

4. Рассмотрим пучок симметричных аффиноров

$$b^i_j(\lambda) = \gamma_{ab} g^{ik} b^a_k$$

и назовём его пучком основных аффиноров многообразия  $V_m$ . Этот пучок назовем простым, если в нем есть хотя бы один аффинор, имеющий различные собственные значения.

Напомним далее, что сетью линий кривизны многообразия  $V_m$  называется его ортогональная сопряженная сеть. Вопрос о существовании сети линий кривизны на многообразии  $V_m$  рассматривался в работе (1).

Теорема 2. Для того, чтобы нормальная связность многообразия  $V_m$  с простым пучком основных аффиноров была плоской необходимо и достаточно, чтобы это многообразие несло сеть линий кривизны.

Предположим, что нормальная связность многообразия является плоской, т. е.  $R^a_{\beta ij} = 0$ . Тогда из (10) следует, что

$$g^{ke} b^a_{k(i} b^s_{|e|j)} = 0. \quad (13)$$

Так как пучок основных аффиноров многообразия  $V_m$  является простым, то в нем найдется хотя бы один аффинор  $b'_j$ , имеющий различные собственные значения. Поэтому существует ортогональный репер, в котором этот аффинор приводится к диагональному виду:

$$b'_j = \delta^i_j b_j. \quad (14)$$

где  $b_i \neq b_j$  при  $i \neq j$ . Свертывая соотношения (13) с  $\delta^i_j$ , получим

$$b^a_{k|i} b^k_{j|} = 0.$$

В том репере, в котором имеют место соотношения (14), предыдущие уравнения примут вид

$$b^a_{ij} (b_j - b_i) = 0 \quad (i \neq j).$$

Но так как  $b_i \neq b_j$ , то  $b^a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Таким образом, в выбранном ортогональном репере все асимптотические тензоры  $b^a_{ij}$  приводятся к диагональному виду, т. е. многообразие  $V_m$  несет сеть линий кривизны.

Обратно, предположим, что  $V_m$  несет сеть линий кривизны. Выбирая векторы  $e_i$  репера касательными к этой сети, имеем:

$$b^a_{ij} = 0, \quad g_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Подставляя эти значения в (10), получаем  $R^a_{\beta ij} = 0$ .

Заметим, что для пространств постоянной кривизны теорема, аналогичная теореме 2, приводится в книге (1). Доказана она впервые Картаном (9).

5. Пусть  $\mu = \mu^a e_a$  — нормальное векторное поле на многообразии  $V_m$ . Это поле определяет на  $V_m$  поле аффинора  $b'_j(\mu) = \mu^a g^{ik} b^a_{kj}$ , принадлежащее пучку основных аффиноров.

**Теорема 3.** Если нормальное расслоение  $N(V_m)$  допускает одно параллельное векторное поле, такое, что определяемое им поле основных аффиноров  $b'_j(\mu)$  будет простым, то нормальная связность на  $V_m$  будет плоской.

Уравнение параллельного переноса вектора  $\mu$  записывается в виде

$$d\mu^a + \mu^\beta \omega^a_\beta = 0,$$

дифференцируя которое, получаем

$$\mu^\beta R^a_{\beta ij} = 0.$$

Это уравнение в силу (10) примет вид

$$b^a_{k|i} b^k_{j|} = 0,$$

где  $b'_j = b'_j(\mu)$ . Так как симметричный тензор  $b'_j$  является простым, то существует ортогональный базис, в котором он приводится к диагональному виду

$$b_j^i = \delta_j^i b_j, \quad b_i \neq b_j \text{ при } i \neq j.$$

Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что

$$g_{ij} = 0, \quad b_{ij}^a = 0 \text{ при } i \neq j,$$

т. е. многообразие  $V_m$  несёт сеть линий кривизны. Но в силу теоремы 2 отсюда следует, что нормальная связность на  $V_m$  будет плоской.

Заметим, что существование параллельного векторного поля  $\mu = \mu^a e_a$  равносильно возможности двойственной нормализации многообразия  $V_m$  с помощью семейства касательных гиперплоскостей  $\mu_a x^a = 0$  (4.10). Поэтому теорема 3 допускает следующую модификацию.

**Теорема 4.** *Если многообразию  $V_m$  допускает двойственную нормализацию с помощью семейства касательных гиперплоскостей, определяющую простое поле основных тензоров, то нормальная связность этого многообразия будет плоской.*

6. Рассмотрим фокальные образы (5) нормального расслоения  $N(V_m)$ . Точка  $y = x + \xi^a e_a$  называется фокусом нормальной плоскости  $N_x$ , если  $dy \in N_x$ . Из соотношения (11) получим для определения фокусов следующую систему уравнений

$$\omega^i + \xi^a \omega_a^i = 0.$$

Используя (9), перепишем эту систему в виде

$$(g_{ij} - \xi_a b_{ij}^a) \omega^j = 0,$$

где  $\xi_a = g_{ab} \xi^b$ . Геометрическое место фокусов плоскости  $N_x$  называется фокусной поверхностью. Она определяется уравнением

$$\det(g_{ij} - \xi_a b_{ij}^a) = 0 \quad (15)$$

и является алгебраической гиперповерхностью порядка  $m$ .

**Теорема 5.** *Если многообразию  $V_m$  имеет простой пучок основных тензоров и плоскую нормальную связность, то фокусные поверхности его нормальных плоскостей  $N_x$  распадаются на  $m$  различных  $(n-m-1)$ -мерных плоскостей, принадлежащих  $N_x$ .*

Так как по теореме 2 рассматриваемое многообразие  $V_m$  несёт сеть линий кривизны, то его основные тензоры  $g_{ij}$  и  $b_{ij}^a$  приводятся одновременно к диагональному виду

$$g_{ij} = 0, \quad b_{ij}^a = b_i^a \delta_{ij}.$$

Ввиду этого уравнение (15) переписывается так

$$\prod_{i=1}^m (1 - \xi_a b_i^a) = 0.$$

Поэтому фокусная поверхность нормали  $N_x$  распадается на  $m$  плоскостей

$$b_i^a \xi_a = 1. \quad (16)$$

Докажем теперь, что среди плоскостей (16) нет совпадающих. Так как пучок основных тензоров многообразия  $V_m$  является простым, то в этом пучке существует аффинор  $\lambda_a b_{ij}^a$ , имеющий различные собственные значения, которые равны  $b_i = \lambda_a b_i^a$ . Пусть  $\lambda^a = g^{ab} \lambda_b$  и  $\xi^a = t \lambda^a$  — прямая, лежащая в плоскости  $N_x$ , проходящая через точку  $x$  и имеющая направляющий вектор  $\lambda = \lambda^a e_a$ . Эта прямая пересечётся с плоскостью (15) в точках, определяемых значением параметра  $t_i = \frac{1}{b_i}$ . Но так как  $b_i \neq b_j$ , то и  $t_i \neq t_j$ , и точки пересечения прямой  $\xi^a = t \lambda^a$  с плоскостью (15) не совпадают, а значит и все эти плоскости будут различными.

7. Пусть  $V_{n-1}$  — гиперповерхность в  $R_n$ . Ее нормальное расслоение будет одномерным. Оно определяется нормальным векторным полем  $e_n(x)$ ,  $e_n^2 = 1$ . Гиперповерхность  $V_{n-1}$  имеет единственный асимптотический тензор  $b_{ij}$ . Тензор кривизны нормальной связности гиперповерхности  $V_{n-1}$  имеет вид

$$R_{nij}^n = g^{ke} b_{k|i} b_{|e|j} = 0.$$

Следовательно, нормальная связность гиперповерхности всегда будет плоской. С этим связаны хорошо известные утверждения о том, что гиперповерхность допускает однопараметрическое семейство параллельных гиперповерхностей и несет сеть линий кривизны, вытекающие из доказанных выше теорем 1 и 2.

Заметим еще, что при доказательстве теорем 2—5 существенно использовалась простота пучка основных тензоров, которая равносильна отсутствию кратных компонент у фокусных поверхностей нормального расслоения  $N(V_m)$ . В том случае, когда это предположение не выполнено, исследование сильно усложняется.

Московский институт стали и сплавов  
Ереванский педагогический институт  
им. Х. Абовяна

Մ. Ա. ԱԿՈՎԻՍ, Ա. Վ. ՉԱՔՄԱԶՅԱՆ

Եվկլիդեսյան տարածության ենթաբազմաձևությունների մասին,  
որոնք ունեն հարթ նորմալ կապակցություն

Այս աշխատանքի նպատակն է հետազոտել  $R_n$  եվկլիդեսյան տարածության  $V_m$  ենթաբազմաձևության լոկալ կառուցվածքը, որի նորմալ կապակցությունը հարթ է: Ստացված են հետևյալ արդյունքները.

1. Որպեսզի  $V_m$  բազմաձևության նորմալ կապակցությունը լինի հարթ անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $V_m$  բազմաձևությունը թույլատրի զուգահեռ բազմաձևությունների  $(n-m)$  — պարամետրերից կախված ընտանիք:

2. Որպեսզի հիմնական աֆինորների պարզ փնջով  $V_m$  բազմաձևության

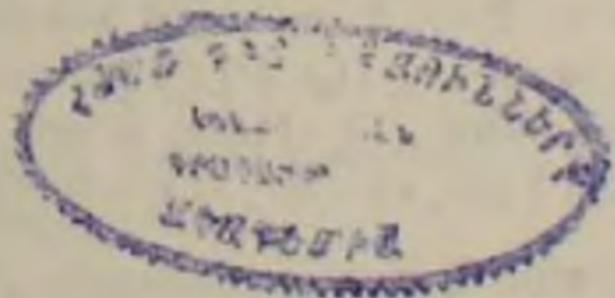
նորմալ կապակցությունը լինի հարթ անհրաժեշտ և բավարար, որ այդ բազմաձևությունը կրի կորության կորերի ցանց:

3. Եթե  $N(V_m)$  նորմալ շերտավորումը թույլ է տալիս մեկ զուգահեռ վեկտորական դաշտ, որի որոշած հիմնական աֆինորների դաշտը պարզ է, ապա  $V_m$  բազմաձևության նորմալ կապակցությունը հարթ է:

4. Եթե  $V_m$  բազմաձևությունը ունի հիմնական տենզորների պարզ փունջ և հարթ նորմալ կապակցություն, ապա նրա  $N_x$  նորմալ հարթությունների կիզոզ մակերևույթները տրոհվում են  $N_x$ -ին պատկանող տարրեր  $(n-m-1)$  — շափանի հարթությունների:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> Chen Bang—Jen, Geometry of submanifolds (Pure and Appl. Math. N22) New York, Marcel Dekker, 1973. <sup>2</sup> L. Vanhecke, Bull. cl. sci Acad. roy Belg. V 59 №2, 76—84, 1973. <sup>3</sup> L. Vanhecke, „Math. I. Okayama Univ.“, vol 16, 147—166. (1974) <sup>4</sup> Ю. Г. Лумисте, А. В. Чакмазян, «Известия вузов», Математика, № 5, 144, 148—157, 1974. <sup>5</sup> М. А. Акивис, «Известия вузов», Математика, № 1, 9—19, 1957. <sup>6</sup> М. А. Акивис, ДАН СССР, т. 139, № 6, 1279—1282 (1961). <sup>7</sup> М. А. Акивис, ДАН СССР, т. 149, № 6, 1247—1249 (1963). <sup>8</sup> С. Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии, М., 1970. <sup>9</sup> E. Cartan, Lecons sur la geometrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars Paris, 1946, <sup>10</sup> А. В. Чакмазян, ДАН СССР, т. 196, №3, 538—540 (1971).



УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Ф. Э. Мелик-Адамян

Об одной обратной задаче для канонических  
 дифференциальных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 28/XII 1975)

Пусть  $H$  — гильбертово пространство, и  $[H_1, H_2]$  ( $[H]$ ) кольцо линейных ограниченных операторов, действующих из  $H_1$  в  $H_2$  ( $H \rightarrow H$ ). Выберем в  $H$  какой-нибудь оператор  $J$  со свойствами:  $J^* = -J$ ,  $J^2 = -I$  ( $I$  — единичный оператор). Имеем  $J = iP_+ - iP_-$ , где  $P_{\pm}$  — ортогональные проекторы:  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(J \mp iI)$ , которые разбивают  $H$  на два подпространства  $H_+ = P_+H$  и  $H_- = P_-H$ . Рассмотрим в пространстве  $H$  канонические дифференциальные уравнения

$$J \frac{dx(r, \lambda)}{dr} = i x(r, \lambda), \tag{1_0}$$

$$(0 \leq r < \infty; -\infty < \lambda < \infty)$$

$$J \frac{dy(r, \lambda)}{dr} - V(r)y(r, \lambda) = \lambda y(r, \lambda). \tag{1_1}$$

Здесь  $V(r)$  — суммируемая оператор-функция с самосопряженными и  $J$  — эрмитовыми значениями:

$$V \in L'(0, \infty; [H]); V^*(r) = V(r); JV(r) = -V(r)J. \tag{2}$$

Заметим, что последнее условие на  $V(r)$  фактически не нарушает общности наших рассмотрений (см. (1)).

В силу суммируемости оператор-функции  $V(r)$  уравнения (1<sub>0</sub>) и (1<sub>1</sub>) асимптотически эквивалентны ((<sup>2</sup>) стр. 167). Обозначим через  $A(\lambda)$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ) оператор асимптотической эквивалентности ((<sup>2</sup>) стр. 206), т. е. такой оператор  $A(\lambda)$ , что решения  $x(r, \lambda)$  и  $y(r, \lambda)$  уравнений (1<sub>0</sub>) и (1<sub>1</sub>) соответственно, определенные начальными значениями  $x(0, \lambda) = x_0$  и  $y(0, \lambda) = A(\lambda)x_0$  асимптотически эквивалентны:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \|x(r, \lambda) - y(r, \lambda)\| = 0$ . Известно ((<sup>2</sup>) стр. 206), что  $A(\lambda)$  является

$J$ -унитарным оператором:  $A^*(\lambda)JA(\lambda) = A(\lambda)JA^*(\lambda) = J$ .

В работе исследуются свойства оператора асимптотической эквивалентности  $A(\lambda)$  и в случае  $\dim H < \infty$  доказывается возможность однозначного восстановления потенциала  $V(r)$ , удовлетворяющего условию (2), по заданному оператору  $A(\lambda)$ , так чтобы  $A(\lambda)$  являлась оператором асимптотической эквивалентности уравнений (1<sub>0</sub>) и (1<sub>1</sub>).

п. 1. Пусть  $T_0$  и  $T_1$  минимальные симметрические операторы в пространстве  $L^2(0, \infty, H)$ , определенные дифференциальными выражениями, участвующими в уравнениях (1<sub>0</sub>) и (1<sub>1</sub>). Рассмотрим действующие в пространстве  $L^2(0, \infty, H)$  операторы преобразования  $I+K$  и  $I+L$ , удовлетворяющие условиям

$$(I+K)T_0^*f = T_1^*(I+K)f \quad \forall f \in D(T_0^*) \quad (3_0)$$

$$(I+L)T_1^*f = T_0^*(I+L)f \quad \forall f \in D(T_1^*) \quad (3_1)$$

Ищем их в виде

$$(I+K)f(r) = f(r) + \int_r^\infty K(r, t) f(t) dt \quad (4_0)$$

$$(I+L)f(r) = f(r) + \int_r^\infty L(r, t) f(t) dt \quad (4_1)$$

Ядра  $K(r, t)$  и  $L(r, t)$  этих операторов определяются с помощью решений систем

$$\begin{cases} K_1(r, t) = J \int_r^\infty V(\tau) K_2(\tau, \tau + t - r) d\tau \\ K_2(r, t) = \frac{1}{2} J V\left(\frac{r+t}{2}\right) + J \int_r^{\frac{r+t}{2}} V(\tau) K_1(\tau, r+t-\tau) d\tau \end{cases} \quad (5_0)$$

$$\begin{cases} L_1(r, t) = J \int_r^\infty L_2(\tau + r - t, \tau) V(\tau) d\tau \\ L_2(r, t) = \frac{1}{2} J V\left(\frac{r+t}{2}\right) - J \int_{\frac{r+t}{2}}^r L_1(r+t-\tau, \tau) V(\tau) d\tau \end{cases} \quad (5_1)$$

по формулам:  $K(r, t) = K_1(r, t) + K_2(r, t)$ ,  $L(r, t) = L_1(r, t) + L_2(r, t)$ . Заметим, что  $JK_1(r, t) = K_1(r, t)J$ ;  $JK_2(r, t) = -K_2(r, t)J$ . Аналогично для  $L_j(r, t)$  ( $j=1, 2$ ). Методом последовательных приближений доказывается существование и единственность решений этих систем в классе измеримых оператор-функций, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 < r < \infty} \int_r^\infty \|F_j(r, t)\| dt < \infty; \sup_{0 < t < \infty} \int_0^t \|F_j(r, t)\| dr < \infty \quad (j=1, 2). \quad (6)$$

В силу последнего условия операторы  $I+K$  и  $I+L$  ограничены. Исходя из систем (5<sub>0</sub>) и (5<sub>1</sub>) можно доказать, что  $(I+K)^{-1} = I+L$ .

Введем теперь оператор  $I-\Gamma$  по формуле

$$I-\Gamma = (I+K)^{-1}(I+K^*)^{-1}. \quad (7)$$

Ясно, что оператор  $\Gamma$  определяется ядром  $\Gamma(r, t)$ :

$$\Gamma(r, t) = \begin{cases} L(r, t) + \int_0^t L(r, s)L^*(t, s)ds & \text{при } r \leq t \\ L^*(r, t) + \int_r^\infty L(t, s)L^*(r, s)ds & \text{при } r \geq t \end{cases}$$

Оператор  $I - \Gamma$  оказывается перестановочным с оператором  $T_0$ . Это условие в терминах ядра  $\Gamma(r, t)$  выражается в виде равенства  $\Gamma(r, t) = \Gamma(r+t)$ , где  $\Gamma(t)$  суммируемая оператор-функция с самосопряженными и  $J$ -эрмитовыми значениями.

Таким образом для оператора  $\Gamma$  имеем

$$(\Gamma f)(r) = \int_0^\infty \Gamma(r+t)f(t)dt \quad f \in L^2(0, \infty; H), \quad (8)$$

где

$$\Gamma \in L^1(0, \infty; |H|); \quad \Gamma^*(t) = \Gamma(t); \quad J\Gamma(t) = -\Gamma(t)J. \quad (9)$$

Теперь равенство (7) в терминах ядер приведет к соотношению

$$K(r, t) - \int_0^\infty K(r, s)\Gamma(s+t)ds = \Gamma(r+t) \quad (10)$$

Обратно. Пусть оператор  $I - \Gamma$ , где  $\Gamma$  определяется равенством (8) при условии (9); допускает в кольце интегральных операторов, действующих в  $L^2(0, \infty; H)$ , факторизации вида (7) ((<sup>3</sup>), стр. 191, 221). При этих условиях оператор  $I + K$  является оператором преобразования вида (3<sub>0</sub>), где потенциал  $V(r)$ , определяющий дифференциальный оператор  $T_1$  имеет вид

$$V(r) = K(r, r)J - JK(r, r).$$

Самосопряженность  $V(r)$  получается из тождества

$$\begin{aligned} K(r, r+t) + \int_0^\infty K(r, r+t+s)K^*(r, r+s)ds = \\ = K^*(r, r+t) + \int_0^\infty K^*(r, r+s)K^*(r, r+t+s)ds, \end{aligned}$$

которая является следствием соотношения (10).

Таким образом между потенциалами  $V(r)$ , удовлетворяющими условиям (2) и функциями  $\Gamma(t)$  с вышеприведенными свойствами устанавливается взаимнооднозначное соответствие. Отметим, что в случае  $\dim H < \infty$ , норма оператора  $\Gamma$ , определенного в пространстве  $L^2(0, \infty; H)$  равенством (8), оказывается строго меньше единицы.

п. 2. Рассмотрим оператор-функцию  $U_0(r, \lambda) = e^{-i\lambda r}P_+ + e^{i\lambda r}P_-$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ;  $P_\pm = \frac{1}{2}(J \mp iI)$ ), являющуюся оператором Коши уравнения (1<sub>0</sub>), т. е.

$$J \frac{dU_0(r, \lambda)}{dr} = \lambda U_0(r, \lambda); \quad U_0(0, \lambda) = I.$$

Образуем оператор-функцию

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) + \int_0^r K(r, t) U_0(t, \lambda) dt.$$

Учитывая систему (5<sub>0</sub>) легко проверить, что  $U(r, \lambda)$  удовлетворяет уравнению

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) - J \int_0^r U_0(r-s, \lambda) J V(s) U(s, \lambda) ds$$

т. е. является решением уравнения

$$J \frac{dU(r, \lambda)}{dr} - V(r) U(r, \lambda) = \lambda U(r, \lambda)$$

асимптотически приближающейся на бесконечности к  $U_0(r, \lambda)$ . Более того для  $\lambda \in \Pi_{\mp}$  ( $\Pi_{\mp}$  — нижняя и верхняя полуплоскости комплексной плоскости) имеют смысл выражения  $J(r, \lambda) = U(r, \lambda) y_{\pm}$ , если  $y_{\pm} \in H_{\pm} = P_{\pm} H$ , и являются решениями уравнения (1<sub>1</sub>), принадлежащими  $L^2(0, \infty, H)$ . Используя этот факт легко получить

$$((-iJ) U(r, \lambda) y_+, U(r, \lambda) y_+) = -Jm\lambda \int_0^{\infty} (U(t, \lambda) y_+, U(t, \lambda) y_+) dt \text{ при } Jm\lambda < 0$$

$$((iJ) U(r, \lambda) y_-, U(r, \lambda) y_-) = Jm\lambda \int_0^{\infty} (U(t, \lambda) y_-, U(t, \lambda) y_-) dt \text{ при } Jm\lambda > 0.$$

т. е. при каждом  $r \in [0, \infty)$  и  $\lambda \in \Pi_{\mp}$   $U(r, \lambda) H_{\pm}$  образуют  $(\mp iJ)$ -положительные подпространства в  $H$ .

Введем оператор-функцию  $A(r, \lambda) = U(r, \lambda) U_0^{-1}(r, \lambda)$ .

Имеем

$$A(r, \lambda) = I + \int_0^{\infty} K(r, r+t) U_0(t, \lambda) dt.$$

Поэтому операторы  $A(r, \lambda) P_{\pm}$  аналитически продолжаются в нижнюю и верхнюю полуплоскости соответственно. В областях своих определений  $A(r, \lambda) P_{\pm}$  отображают  $H_{\pm}$  на  $(\mp iJ)$ -положительные подпространства. В силу этого операторы  $P_{\pm} A(r, \lambda) P_{\pm}$  обратимы в  $H_{\pm}$  при каждом  $r \in [0, \infty)$  и  $\lambda \in \Pi_{\mp}$ .

п. 3. Рассмотрим случай  $\dim H < \infty$  и пусть  $\dim H_+ \leq \dim H_-$ . Теперь необходимые условия на матрицу асимптотической эквивалентности  $A(\lambda) = U(0, \lambda)$  можно сформулировать следующим образом

$$1) A(\lambda) \text{—} J\text{-унитарна: } A^*(\lambda) J A(\lambda) = A(\lambda) J A^*(\lambda) = J$$

$$2) A(\lambda) \text{—} \text{допускает представление в виде}$$

$$A(\lambda) = I + \int_0^{\infty} K(t) U_0(t, \lambda) dt,$$

где  $K \in L^1(0, \infty; |H|)$ .

3)  $P_{\pm} A(\lambda) P_{\pm}$  вместе со своими обратными принадлежат винеровским кольцам  $R_{\pm}$  функций вида

$$cP_{\pm} + \int_0^{\infty} K_{\pm} e^{\mp i\lambda t} dt,$$

где  $K_{\pm} \in L'(0, \infty; [H_{\pm}])$ .

Справедлива следующая

**Теорема.** По заданной функции  $A(\lambda)$ , удовлетворяющей условиям 1)–3) можно построить и притом единственным образом функцию  $V(r)$ , удовлетворяющую условиям (2), так чтобы  $A(\lambda)$  являлась матрицей асимптотической эквивалентности уравнения (1<sub>0</sub>) и уравнение (1<sub>1</sub>), определенного искомой функцией  $V(r)$ .

В случае  $\dim H_+ = \dim H_-$  следствием условий наложенных на  $A(\lambda)$  является тот факт, что дробно-линейное преобразование  $S(\lambda)$  унитарного отображения  $E(E: H_+ \text{ на } H_-)$  с помощью матрицы  $A(\lambda)$  оказывается  $S$ -матрицей некоторого уравнения (1<sub>0</sub>) (4); и по ней можно восстановить потенциал  $V(r)$  (5). В общем случае, рассмотрим уравнение

$$\Gamma(t) + \int_0^{\infty} K(s-t)\Gamma(s)ds = K(t). \quad (11)$$

Условия 1)–3) наложенные на  $A(\lambda)$ , дают возможность доказать существование и единственность решения (11) в классе  $L'(0, \infty; [H])$ . При этом, оказывается, что  $\Gamma(t)$  удовлетворяет условиям (9). Для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в существовании единственного решения уравнения (10). Для этого достаточно доказать, что норма оператора  $\Gamma$ , определенного соотношением (8) строго меньше единицы. С этой целью рассматривается дробно-линейное преобразование

$$S_E(\lambda) = (A_{12}^*(\lambda) + A_{22}^*(\lambda)E)(A_{11}^*(\lambda) + A_{21}^*(\lambda)E)^{-1},$$

где  $E$ —произвольное изометрическое отображение  $H_+ \rightarrow H_-$ . Поскольку  $A_{11}^*(\lambda) + A_{21}^*(\lambda)E$  вместе со своим обратным принадлежит винеровскому кольцу  $R$ ,  $S_E(\lambda)$  (изометрически отображающее  $H_+ \rightarrow H_-$ ) допускает представление

$$S_E(\lambda) = E + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_E(t)e^{-i\lambda t} dt,$$

где  $\Gamma_E \in L'(-\infty, \infty; [H_+, H_-])$ . Существенным здесь является тот факт, что  $\Gamma_E(t)$  при  $t \geq 0$  не зависит от  $E$  и совпадает с  $P_- \Gamma(t) P_+$ , где  $\Gamma(t)$  является решением уравнения (11). Это дает возможность доказать, что  $\|\Gamma\|_{L^2} < 1$ .

**Замечание.** Анализ вышеприведенных рассмотрений приводит к следующему утверждению.

Пусть задана  $U(r_0, i)$  ( $-\infty < i < \infty$ ), являющаяся значением в точке  $r = r_0$  операторного решения  $U(r, i)$  уравнения (1<sub>1</sub>) с асимптотикой  $U_0(r, i)$  на бесконечности. По ней однозначно можно восстановить потенциал  $V(r)$  для  $r \geq r_0$ . Необходимыми условиями на

матрицу функцию  $U(r_0, \lambda)$  для того, чтобы она являлась значением  $U(r, \lambda)$  в точке  $r=r_0$  являются условия 1)–3) наложенные на функцию  $A(r_0, \lambda) = U(r_0, \lambda)U_0^{-1}(r_0, \lambda)$ .

Ереванский государственный университет

Ն. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ

Կանոնիկ դիֆերենցիալ օպերատորների մի հակադարձ խնդրի մասին

Դիտարկվում է  $(I_0)$  և  $(I_1)$  հավասարումները  $H$  հիլբերտյան տարածությունում: Ուսումնասիրվում է այդ հավասարումների  $A(\lambda) (-\infty < \lambda < \infty)$  սահմանադրված համարժեքության օպերատորը:  $\dim H < \infty$  դեպքում ապացուցվում է, որ 1)–3) պայմանները  $A(\lambda)$  մատրից-ֆունկցիայի համար սահմանադրված են և բավարար, որպեսզի նա լինի  $(I_0)$  և  $(I_1)$  հավասարումների սահմանադրված համարժեքության օպերատոր:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> В. М. Адамян, ДАН СССР, т. 178, № 1 (1968). <sup>2</sup> Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных операторов в банаховом пространстве, Наука, 1970. <sup>3</sup> И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и их приложения, Наука, 1967. <sup>4</sup> М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян, Функциональный анализ и ее приложения, т. 4, вып. 4, 1970. <sup>5</sup> М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян, ДАН Арм. ССР, т. XLXI, № 4 (1968).

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Т. Н. Арутюнян

**Асимптотика спектра самосопряженной системы  
 дифференциальных уравнений первого порядка**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 29/XII 1975)

Обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_{S(N)}$  квадратные числовые матрицы четного порядка  $N$ , удовлетворяющие условиям

- 1)  $a_i a_j = -a_j a_i$
- 2)  $a_j^2 = E$ , ( $E$  — единичная матрица)
- 3)  $a_j = a_j^*$

Представим четное число  $N$  в виде  $N = 2^q r$ , где  $r$  — нечетно. Известно [1], что среди всех матриц порядка  $N$ , максимальное число  $S(N)$  таких, которые удовлетворяют условиям 1)–3), равно  $S(N) = 2^q + 1$ .

Рассмотрим теперь оператор  $L$ , порожденный дифференциальным выражением

$$Lu = \left( -a_1 i \frac{d}{dx} + \sum_{k=2}^{S(N)} p_k(x) a_k \right) u \quad (1)$$

в пространстве  $L^2_N(-\infty, \infty)$  вектор-функций  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  со скалярным произведением

$$[a, b] = \int_{-\infty}^{\infty} (a, b) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N a_k(x) \overline{b_k(x)} dx,$$

где  $p_k(x)$  — действительные непрерывные функции.

Известно, [2], что при этих условиях оператор

$$L = -a_1 i \frac{d}{dx} + Q(x), \quad (1')$$

где  $Q(x) = \sum_{k=2}^{S(N)} p_k(x) a_k = Q^*(x)$ , самосопряжен и неполуограничен.

Целью данной заметки является нахождение условий роста и гладкости потенциала  $Q(x)$ , при которых спектр оператора  $L$  чисто дискретен и указание асимптотической формулы распределения чис-

да собственных значений оператора  $L$ .

Характерной особенностью потенциальной матрицы  $Q(x)$  является ее антикоммутируемость с матрицей  $\alpha_1$ , стоящей при главной части оператора. Но известно, <sup>(3)</sup>, что оператор вида (1') с произвольным эрмитовым потенциалом  $Q(x)$  унитарно эквивалентен оператору вида (1') с эрмитовым потенциалом, антикоммутирующим с матрицей  $\alpha_1$ .

Уравнение  $Lu = \lambda u$  в случае  $N = 2$  (система Дирака) было изучено в работе И. С. Саргсяна <sup>(4)</sup>. Оператор  $L$  можно рассматривать как обобщение оператора Дирака, <sup>(4)</sup>, на случай систем произвольного четного порядка.

Главным нашим орудием в исследовании спектра оператора будет его матрица-функция Грина  $G(x, \xi, \lambda)$ .

1. Функцию Грина будем искать методом параметрикс, т. е. сначала мы найдем функцию Грина оператора  $L_0$  с „замороженными“ коэффициентами, а затем покажем, что решение интегрального уравнения

$$G(x, \xi, \lambda) = g_0(x, \xi, \lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \eta, \lambda) |Q(\xi) - Q(\eta)| g_0(\eta, \xi, \lambda) d\eta \quad (2)$$

есть функция Грина оператора  $L$ .

Итак, обозначим через  $g_0(x, \xi, \lambda)$  функцию Грина оператора

$$L_0 = -\alpha_1 i \frac{d}{dx} + Q(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

По определению  $g_0(x, \xi, \lambda)$  удовлетворяет условиям:

$$1) (L_0 - \lambda E)g_0(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi); \quad (3)$$

2) элементы  $g_{ij}(x, \xi, \lambda)$  матрицы  $g_0$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) принадлежат  $L^2(-\infty, \infty)$  по  $x$ .

Используя преобразование Фурье, из уравнения (3) находим

$$g_0(x, \xi, \lambda) = (ix \operatorname{sgn}(x - \xi)\alpha_1 + Q(\xi) + \lambda E) \frac{e^{-i|x - \xi|}}{2x}, \quad (4)$$

где

$$x^2 = x^2(\xi, \lambda) = \sum_{k=2}^{S(N)} p_k^2(\xi) - \lambda^2 = a^2(\xi) - \lambda^2.$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки норм Гильберта-Шмидта матрицы  $g_0(x, \xi, \lambda)$  и ее производных по  $\lambda$  при  $\lambda = i\mu$ . Используя вид (4), получаем

$$\left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} \leq \frac{C}{x^n(\xi)} e^{-b(\xi)|x - \xi|}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

где  $0 < b < 1$ . Кроме этого, нам нужны оценки ядер

$$K_n(x, \xi, \lambda) = |Q(\xi) - Q(x)| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Наложим на  $Q(x) = \sum_{k=2}^{S(N)} p_k(x) x_k$  следующие условия:

$$1) \| |Q(\xi) - Q(x)| Q^{-a}(\xi) \| \leq A |x - \xi|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, \quad A > 0, \quad 0 < a < 2 \quad (6)$$

$$2) \| Q(\xi) \| \leq B \| Q(x) \| \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, \quad B > 0 \quad (7)$$

$$3) \| Q(x) \| \leq K e^{c_0 |x - \xi| a(\xi)} \quad \text{при } |x - \xi| > 1, \quad K > 0, \quad 0 < c_0 < 1. \quad (8)$$

Оценивая при этих условиях  $K_n(x, \xi, \lambda)$ , получаем

$$\| K_n(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} \leq \begin{cases} \frac{C}{x^{n+1-a(\xi)}} e^{-B_0(\xi) |x-\xi|} & \text{при } |x-\xi| \leq 1 \\ \frac{C}{x^{r+n}(\xi)} e^{-B_0(\xi) |x-\xi|} & \text{при } |x-\xi| > 1 \end{cases} \quad (9)$$

где  $0 < B_0 < 1$ , а  $r$  — произвольное положительное число. Кроме этих, можно получить и следующие оценки

$$\| K_n(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} \leq \begin{cases} \frac{C}{\mu^{n+\alpha}} \frac{e^{-B_0 |x-\xi|}}{|x-\xi|^\alpha}, & |x-\xi| \leq 1 \\ \frac{C}{\mu^{n+\alpha}} \cdot \frac{e^{-B_0 |x-\xi|}}{x^r(\xi)}, & |x-\xi| > 1 \end{cases} \quad (10)$$

где  $\alpha = a - 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. За счет выбора достаточно малого  $\varepsilon$  можно считать, что  $\alpha < 1$ . Используя оценки (10), можно доказать теорему

**Теорема 1.** *Обозначим через  $X$  банахово пространство матричных функций  $A(x, \xi)$ ,  $x, \xi \in (-\infty, \infty)$ , с нормой*

$$\| A(x, \xi) \|_X = \sup_{\xi \in (-\infty, \infty)} \int_{-\infty}^{\infty} \| A(x, \xi) \| dx$$

где  $\| \cdot \|$  — норма Гильберта — Шмидта. Рассмотрим в пространстве  $X$  операторы  $N_j$ , определяемые равенствами

$$N_j A(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x, \eta) K_j(\eta, \xi, i\mu) d\eta, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Если матрица  $Q(x)$  удовлетворяет условиям (6) — (8), то при достаточно больших  $\mu$  операторы  $N_j$  являются сжимающими в пространстве  $X$ .

Поскольку уравнение (2) можно записать в виде

$$G(x, \xi, \lambda) = g_0(x, \xi, \lambda) + N_0 G(x, \xi, \lambda)$$

и поскольку  $g_0(x, \xi, i\mu) \in X$ , то из сжимаемости оператора  $N_0$  следует единственность решения уравнения (2) в классе  $X$ .

**Лемма 1.** *Решение интегрального уравнения (2) есть функ-*

ция Грина оператора  $L$ , т. е.  $(L - \lambda E)G(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi)$ .

Доказательство леммы легко следует из того, что  $(L_0 - \lambda E)g_0(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi)$  и единственности решения уравнения (2).

Чтобы спектр оператора  $L$  был чисто дискретным, достаточно, чтобы некоторая степень резольвенты  $R_n = (L - \lambda E)^{-1}$  была вполне непрерывным оператором, а так как

$$R_n f(x) = (L - \lambda E)^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi$$

то достаточно, чтобы ядро  $\frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} G(x, \xi, \lambda)$  было бы ядром Гильберта—Шмидта. Дифференцируя уравнение (2) по  $\lambda$  и решая после каждого дифференцирования полученные интегральные уравнения методом итераций (что возможно вследствие оценок (5), (9), (10)), получим нужные нам оценки

$$\left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = \lambda_0} \leq \left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = \lambda_0} + \frac{C e^{-B|x-\xi|}}{x^{n+2-a(\xi)}} + \frac{C e^{-B|\xi|}}{x^{n+r(\xi)}},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

где  $0 < B < 1$ ,  $r$  — произвольное положительное число.

**Теорема 2.** Если матрица  $Q(x)$  удовлетворяет условиям (6)–(8), а также условию (при больших  $|x|$ )

$$\sum_{k=2}^{S(x)} p^2(x) = a^2(x) > c|x|^s, \quad \epsilon > 0, \quad c > 0, \quad (12)$$

то спектр оператора  $L$  чисто дискретный.

Используя оценки (5) и (11) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = \lambda_0} dx d\xi \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{x^{n+1}(\xi)} \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{a^{n+1}(\xi)}. \quad (13)$$

Возьмем  $n$  настолько большим, чтобы  $\frac{n+1}{2} \cdot \epsilon > 1$ . Тогда последний интеграл в (13) сходится согласно условию (12), а это значит, что  $\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda)$  есть ядро Гильберта—Шмидта, что и доказывает теорему.

Исходя из оценки (11) можно доказать также следующее утверждение.

**Лемма 2.** Если  $Q(x)$  удовлетворяет условиям (6)–(8), а также условию (при больших  $|x|$ ).

$$c|x|^s < a^2(x) < C|x|^s, \quad \epsilon > 0, \quad 0 < c < C \quad (14)$$

то при  $\lambda = i\mu$ ,  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $n > \frac{2}{\varepsilon}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, x, \lambda) dx \sim \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, x, \lambda) dx. \quad (15)$$

Введем теперь функцию

$$\psi(\lambda) = \frac{N}{2\pi} \int_{a^2(x) < \lambda^2} |\lambda^2 - a^2(x)|^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{при } \lambda \geq 0$$

и положим  $\psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$ .

**Лемма 3.** Если  $Q(x)$  удовлетворяет условию (12), то при  $n > \frac{2}{\varepsilon}$  и  $\lambda = i\mu$  имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, x, \lambda) dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{(t-\lambda)^{n+1}}. \quad (16)$$

Обозначим через  $\lambda_{\mp 1}, \lambda_{\mp 2}, \dots$  собственные значения оператора  $L$ , а через  $N_+(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_n < \lambda} 1$  и  $N_-(\lambda) = \sum_{\lambda < \lambda_{-n} < 0} 1$ .

Положим

$$N(\lambda) = \begin{cases} N_+(\lambda), & \lambda \geq 0 \\ -N_-(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

**Лемма 4.** Если  $G(x)$  удовлетворяет условиям (6)–(8) и (12), то при  $\lambda = i\mu$  и  $n > \frac{2}{\varepsilon}$  справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, x, \lambda) dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(t)}{(t-\lambda)^{n+1}}. \quad (17)$$

Из (15), (16) и (17) теперь следует важное отношение при  $\lambda = i\mu$ ,  $\mu \rightarrow \infty$  и достаточно больших  $n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(t)}{(t-i\mu)^{n+1}} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{(t-i\mu)^{n+1}}$$

Применяя теперь двустороннюю тауберову теорему (5), получим теорему о асимптотике числа собственных значений оператора  $L$ .

**Теорема 3.** Если  $Q(x)$  удовлетворяет условиям (6)–(8) и (14) и если существуют постоянные  $M > 0$ ,  $R > 0$ ,  $n < \gamma < n+1$  такие, что при  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > R$

$$\frac{\psi(\lambda_1)}{\psi(\lambda_2)} < M \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\gamma,$$

mo

$$N(\lambda) \sim \psi(\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \pm \infty,$$

m. e.

$$N_+(\lambda), N_-(\lambda) \sim \frac{N}{2\pi} \int_{a^2(x) < \lambda^2} |\lambda^2 - a^2(x)|^{\frac{1}{2}} dx$$

соответственно при  $\lambda \rightarrow +\infty$  и  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

В заключение автор выражает благодарность А. Г. Костюченко за обсуждение результатов работы.

Ереванский государственный университет

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒՔՅԱՆ

Ինֆնահամարում առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմի սպեկտրի ասիմպտոտիկան

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է (1) օպերատորի սեփական արժեքների թվի ասիմպտոտիկան: Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Ք ե ո թ ե մ. երե  $Q(x)$  մատրիցը բավարարում է (6)–(8) և (14) պայմաններին, ապա տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկան՝

$$N_+(\lambda), N_-(\lambda) \sim \frac{N}{2\pi} \int_{a^2(x) < \lambda^2} |\lambda^2 - a^2(x)|^{\frac{1}{2}} dx$$

համապատասխանապես, երբ  $\lambda \rightarrow +\infty$  և  $\lambda \rightarrow -\infty$ :

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Stöckert Bernd., *Publs math.* 17, № 1–4, 41–55 (1970). <sup>2</sup> В. В. Мартынов, *ДАН СССР* т. 165, № 5 (1965). <sup>3</sup> В. М. Адамьян, *ДАН СССР* т. 178, № 1 (1968). <sup>4</sup> И. С. Саргсян, *Известия АН СССР*, сер. мат. 36, № 2 (1972) <sup>5</sup> Я. Т. Султанаев, *Известия ВУЗов*, № 1 (140) (1974).

УДК 518.5 : 519.5

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян

Об одном алгоритме для перечисления всех  
 неупорядоченных разбиений всякого целого  $n$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 18/VII 1975)

Введем некоторые определения. Множества всех неупорядоченных и упорядоченных разбиений <sup>(1)</sup> всякого целого  $n$  назовем „полными“ и обозначим соответственно через  $|S_n|$  и  $|_r S_n|$ . Множества всех  $n$ -перестановок без повторений и с повторениями (при любых неупорядоченных разбиениях всякого целого  $n$ ) назовем „полными“ и обозначим соответственно через  $|P_n|$  и  $|P'_n|$  <sup>(2)</sup>. Множества всех ассоциаций таблицы при любых распределениях столбцов <sup>(3)</sup> назовем „полными“ и обозначим через  $|U|$ . Для всякого целого  $n (n=l=p)$  рассмотрим множества всех различных  $k$ -ых и  $q$ -ых распределений  $(l; l_{1k}, l_{2k}, \dots, l_{vk})$  и  $(p; p_{1q}, p_{2q}, \dots, p_{wq})$ , где  $v=\varphi(k)$ ,  $w=\psi(q)$ , сопоставляя им соответствующие произведения:  $a_k = (l_{1k}!) \cdot (l_{2k}!) \cdot \dots \cdot (l_{vk}!)$  и  $b_q = (p_{1q}!) \cdot (p_{2q}!) \cdot \dots \cdot (p_{wq}!)$ , и обозначим через  $|U|_{n,k,q}$  полные множества ассоциаций таблиц с числом строк  $n$  при всех различных  $k$ -ых и  $q$ -ых распределениях столбцов.

Широкий класс комбинаторных задач сводится к проблемам пересчета (dénombrément) и перечисления (énumération) <sup>(4)</sup> элементов множеств  $|S_n|$  и  $|_r S_n|$ . При этом, если вопросы пересчета и перечисления элементов  $|_r S_n|$  достаточно просты, то для решения проблем пересчета и перечисления элементов  $|S_n|$  в настоящее время не существует достаточно элементарных соотношений. Использование известного тождества Эйлера приводит к следующему рекуррентному соотношению <sup>(5)</sup>:

$$\begin{aligned}
 & |S_n| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}| - |S_{n-3}| - \\
 & - |S_{n-7}| + \dots + (-1)^{k-1} |S_{n-\frac{3k^2-k}{2}}| + (-1)^{k-1} |S_{n-\frac{3k^2+k}{2}}| + \dots \quad (1)
 \end{aligned}$$

Известно асимптотическое приближение Рамануджана <sup>(5)</sup>

$$|S_n| \sim \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2}{3} n^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (2)$$

и разложение Радемахера (2)

$$||S_n|| = \sum_{k=1}^{k \rightarrow \infty} L_k(n) \Psi_k(n), \quad (3)$$

где:

$$\Psi_k(n) = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\pi \sqrt{2}} \cdot \frac{d}{dn} \left[ \frac{\operatorname{sh} \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{n - \frac{1}{24}}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right],$$

$$L_k(n) = \sum \omega_{p,k} \exp\left(-\frac{2\pi n p i}{k}\right),$$

$\omega_{p,k}$  — корень 24-ой степени из единицы,  $p$  пробегает все целые числа, взаимно простые с  $k$  и не превосходящие  $k$ .

Известны аналитические соотношения и алгоритмы для пересчета разбиений с ограничениями на число частей (1, 6, 7), используемые для пересчета элементов  $|S_n|$ . Рекуррентная формула, приведенная в (6), позволяет вычислять  $||S_{2n+1}||$  за меньшее число шагов, чем рекуррента Эйлера. На основании (1) разработана программа для пересчета  $||S_n||$  (8). Однако специфика конструирования, программных реализаций и эксплуатации алгоритмов для перечисления элементов  $\{S_n\}$  делает мало эффективным использование пересчетных формул и алгоритмов, приведенных в (1, 6-9); асимптотические же приближения и разложения, подобные (2,3), применимы лишь для теоретических оценок  $||S_n||$ . В (1), стр. 50) приведена списочная структура, использование которой удобно для указанных целей. Другой алгоритм для перечисления элементов  $\{S_n\}$  строится путем комбинирования алгоритмов, рассмотренных в (2). Однако алгоритм, конструируемый на основании примера из (1), дает список элементов  $\{S_n\}$ , малоинформативный для теоретических приложений, а алгоритм, построенный на основе алгоритмов из (2) не эффективен при реализациях в многопроцессорных системах, что существенно, если учесть резкое возрастание  $|S_n|$  с увеличением  $n$ .

Рассмотрим один из алгоритмов для перечисления элементов  $\{S_n\}$  (алгоритм  $AS_n$ ), использующий принцип „размножения треугольников“. Осуществление алгоритма удобно рассмотреть поэтапно. На этапе I, а из последовательности  $n$  единиц строится треугольная матрица  $A_1^n$  с числом строк  $n$ ; на этапе I, б из каждой из  $F(A_1^n)$  строк треугольнички  $A_i^n$  (исключая 1 строку) составляются по определенному правилу первые строки треугольников  $A_{12}^n, A_{13}^n, \dots, A_{1F(A_1^n)}^n$ ; на этапе II, а из каждой первой строки треугольников  $A_{12}^n, A_{13}^n, \dots, \dots, A_{1F(A_1^n)}^n$  составляются соответственно строки треугольников:  $A_{12}^n, A_{13}^n, \dots$

....  $A_1^n$ . Процесс генерирования последующих треугольников из строк предыдущих треугольников продолжается вплоть до исчерпания всех возможностей. Каждая строка построенных треугольников представляет один из способов неупорядоченных разбиений числа  $n$ , а все строки — множество  $[S_n]$ .

Алгоритм  $AS_n$

Этап I, a.

1. Сопоставить числу  $n$  последовательность из  $n$  единиц, принимая построенную  $n$  — последовательность в качестве первой строки треугольника  $A_1^n$ .

2. Сложить  $n$ -й и  $(n-1)$ -й элементы первой строки треугольника  $A_1^n$ .

3. Составить  $(n-1)$  — последовательность из  $(n-2)$ -х единиц и двойки, полученной в п. 2, записав двойку на  $(n-1)$ -ом месте.

4. Записать  $(n-1)$  — последовательность, построенную в п. 3, во второй строке треугольника  $A_1^n$ .

Процесс, аналогичный описанному в п.п. 2—4, продолжить вплоть до записи 1 — последовательности, состоящей из числа  $n$

Этап I, b.

1. Сложить  $(n-2)$ -й и  $(n-3)$ -й элементы  $(n-1)$  — последовательности, записанной во второй строке треугольника  $A_1^n$ .

2. Из  $(n-4)$  — х единиц, из двойки полученной в п. 1, и из двойки  $(n-1)$  — последовательности, записанной во второй строке треугольника  $A_1^n$ , составить  $(n-2)$  — последовательность, записав двойки на  $(n-3)$  — м и  $(n-2)$  — м местах, и принять построенную  $(n-2)$  — последовательность в качестве первой строки треугольника  $A_{12}^n$ .

3. Сложить  $(n-3)$  — й,  $(n-4)$  — й и  $(n-5)$  — й элементы  $(n-2)$  — последовательности, записанной в третьей строке треугольника  $A_1^n$ .

4. Из  $(n-5)$  единиц, из тройки, полученной в п. 3, и из тройки  $(n-2)$  — последовательности, записанной в третьей строке треугольника  $A_1^n$ , составить  $(n-3)$  — последовательность, записав тройки на  $(n-4)$  — м и  $(n-3)$  — м местах  $(n-3)$  — последовательности, и принять построенную  $(n-3)$  — последовательность в качестве первой строки треугольника  $A_{13}^n$ . Процессы, аналогичные описанным в п.п. 1, 2 и 3, 4, продолжить вплоть до записи 2 — последовательности в первой (и единственной) строке треугольника  $A_{17(A_1^n)}^n$ , состоящей из слагаемых,

представляющих элементы неупорядоченного разбиения числа  $n$  на два слагаемых. Далее следует этап II, a, на котором по принципу, аналогичному описанному на этапе I, a, составляются строки треугольников

*Пример*

На рис. 1 описывается структура алгоритма  $AS_{10}$ . Как видно из

рис. 1,  $||S_{10}|| = 42$ ; при этом разбиения 1111111111, 111111112, 111111113, 111111114, 111111115, 111111116, 111111117, 111111118, 111111119 и 10 составляют треугольник  $A_1^{10}$ ; разбиения 11111122, 11111132, 11111142, 11111152, 11111162, 11111172, 11111182—треугольник  $A_{12}^{10}$ ; разбиения 1111133, 1111143, 1111153, 1111163, 1111173—треугольник  $A_{13}^{10}$ ; разбиения 11144, 11154, 11164—треугольник  $A_{14}^{10}$ ; разбиение 11155—

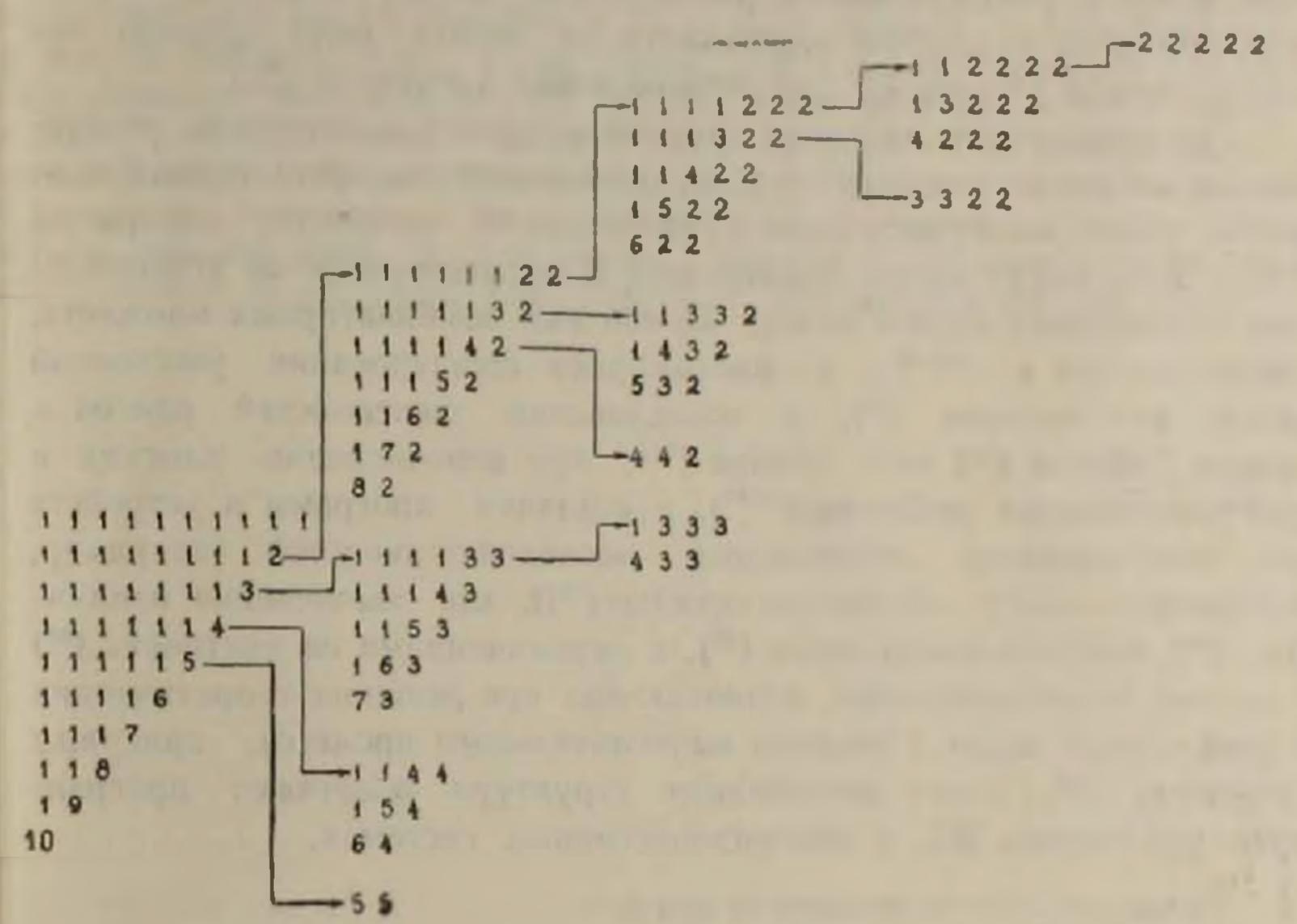


Рис. 1. Структура алгоритма  $AS_{10}$ ,  $|S_{10}|$

треугольник  $A_{15}^{10}$ ; разбиения 1111222, 1111322, 1111422, 1111522, 1111622—треугольник  $A_{121}^{10}$ ; разбиения 11332, 1432, 532—треугольник  $A_{122}^{10}$ ; разбиение 442—треугольник  $A_{123}^{10}$ ; разбиения 1333, 433—треугольник  $A_{131}^{10}$ ; разбиения 112222, 132222, 4222— $A_{1211}^{10}$ ; разбиения 3322— $A_{1212}^{10}$ ; наконец, разбиение 22222— $A_{12111}^{10}$ . Используя алгоритмы для перечисления элементов  $|P_n|$  и  $|P'_n|$  (<sup>2</sup>), и алгоритм  $AS_n$ , можно сконструировать алгоритм для перечисления элементов  $|_r S_n|$  (алгоритм  $A_r S_n$ ).

Алгоритм  $A_r S_n$ .

1. С помощью алгоритма  $AS_n$  перечислить все элементы  $|S_n|$ .
2. С помощью алгоритмов для перечисления элементов  $|P_n|$  и  $|P'_n|$  (в зависимости от того, является ли разбиение последовательностью из различных или из повторяющихся чисел), принимая каждое из разбиений множества  $|S_n|$  в качестве первоначальной перестановки(<sup>2</sup>), перечислить все возможные перестановки.

В (<sup>2</sup>) выдвигалась проблема табулирования зависимостей списочных структур множеств  $|U^m|$ ,  $|K'|$  и  $|R'|$  и их мощностей от распре-

делений соответствующих  $m$ —таблиц. Было показано, что эта проблема сводится в первую очередь к разработке эффективных методов перечисления элементов множеств  $|U|$  и к табулированию зависимостей мощностей  $||U|_{n,k,q}|$  от различных значений  $a_k$  и  $b_q$ . В (2) дается один из методов перечисления элементов  $|U|_{n,k,q}$ . Однако с ростом  $n$  все усложняется задача создания списочной структуры всех возможных неупорядоченных разбиений  $n$ . Таким образом, задача табулирования указанной зависимости не может быть решена без использования алгоритма для перечисления элементов  $\{S_n\}$ .

Программные реализации перечислительных алгоритмов, рассчитанных на выявление структурных особенностей комбинаторных множеств, имеют многочисленные приложения. В частности, алгоритмы  $AS_n$  и  $A_rS_n$  могут найти применение: в исследованиях по установлению структурных связей между элементами комбинаторных множеств, рассмотренных в (10–12), в многомерном шкалировании расстояний между разбиениями (13), в исследовании зависимостей рангов в смысле Дайсона (14) или Аткина (15), при перечислении плоских и пространственных разбиений (16,17), в создании программ и устройств для генерирования специальных последовательностей (например, последовательность абсолютно простых (18)), для вычисления наилучших (19), взаимно-взвешенных (20), с ограничениями на кратность (21) и других типов разбиений, возникающих при решении теоретических и прикладных задач. Простота вычислительного процесса, присущая алгоритму  $AS_n$ , и его древовидная структура облегчают программные реализации  $AS_n$  в многопроцессорных системах.

Ереванский ИИИ математических машин

## Ա. Հ. ԱԶԱՏՅԱՆ

Ամեն մի ամբողջական  $n$ -ի շկարգավորված տրոհումների լրիվ բազմության բվարկման ալգորիթմի մասին

Տրվում է ամեն մի ամբողջական  $n$ -ի շկարգավորված տրոհումների լրիվ բազմության բվարկման ալգորիթմ: Բերվում է  $n = 10$ -ի դեպքում տրոհումների բվարկման պրոցեսի կադմակերպման օրինակ: Ընդգծվում է նշված տիպի ալգորիթմների օգտադործման նշանակությունը տեսական և կիրառական մաթեմատիկայի տարրեր խնդիրներում: Բազմապրոցեսային սիստեմներում ալգորիթմի օգտադործման էֆեկտիվությունը բխում է նրա ծառակերպ կադմությունից:

## ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱՆԱՆՈՒՅՈՒՆ

<sup>1</sup> М. Холл, Комбинаторика, стр. 45—58, пер. с англ., «Мир», М., 1972. <sup>2</sup> А. А. Азатян, К вопросу о перечислении элементов полного множества ассоциаций  $|U|$ . Депонированная рукопись, 1974, РИР, № 3, 1975, 3—697. <sup>3</sup> А. А. Азатян, ДАН Арм. ССР,

г. LVI, № 4, (1973). <sup>4</sup> Л. Кофман, Введение в прикладную комбинаторику, стр. 16, пер. с франц., «Наука», М., 1975. <sup>5</sup> М. Холл, Комбинаторный анализ, стр. 26—37, пер. с англ., «Мир», М., 1963. <sup>6</sup> V. R. R. Uppulurli, J. A. Carpenter, „Nav. Res. Log. Quart“, 21, № 1, p.p. 201—205 (1974). <sup>7</sup> R. Karpe, „Arch. mat.“, 6, № 4, 193—202 (1970). <sup>8</sup> J. A. Ewell, „J. Combin. Theory“, A14 № 1, p.p. 125—127 (1973), <sup>9</sup> N. V. Migllozzi, „Pentagon“, 32, № 2, p.p. 85—86 (1973). <sup>10</sup> Gupta Hansraj, „J. Combin. Theory“, A13, №1, p.p. 140—144(1972). <sup>11</sup> Б. Б. Миркин, Л. Б. Чёрный, „Мат. анализ экон. моделей. Ч. 3“, Новосибирск, стр. 126—147, 1972. <sup>12</sup> D. Knuth, „J. Combin. Theory“, A10, № 2, p.p. 178—180(1971). <sup>13</sup> P. Arable, S. Boorman, „J. Math. Psychol“, 10, № 2, 148—203(1973). <sup>14</sup> F. J. Dyson, „Eureka“, vol. 8, p.p. 10—15(1944) <sup>15</sup> A. O. L. Atkin, „Quarterly Journ. of Math“, (2), vol. 17, p.p. 335—338 (1966). <sup>16</sup> E. A. Bender, D. Knuth, „J. Combin. Theory“, A13, № 1, p.p. 40—54 (1972). <sup>17</sup> R. Stanley—„Appl. Math“, 50, №2, p.p. 167—188 (1971); 50, №3, p.p. 259—279 (1971). <sup>18</sup> T. N. Bhargana, P. H. Doyle, „Math. Mag“, 47, № 4, p.233 (1974). <sup>19</sup> M. Magidin, „BIT“ (Sver), 14, № 2, p.p. 203—208, (1974). <sup>20</sup> D. H. Lehmer, „Acta arithm“, 21, mem, p.p. 379—388 (1972). <sup>21</sup> P. Jr. Hagsis, „Trans, Amer. Math. Soc“, 155, № 2, p.p. 375—384 (1971).

УДК 681.325.5

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

В. Д. Шиглик, Ж. С. Налбандян

**Проблемно-ориентированный процессор для эффективной  
 обработки результатов наблюдений**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 29/XII 1975)

В современных системах обработки данных входной поток информации весьма велик, причем над каждой его единицей зачастую приходится выполнять до нескольких миллионов машинных операций. Быстродействие универсальных ЭВМ оказывается недостаточным для обработки больших массивов данных в экономически приемлемое время. В настоящее время для эффективного решения задач, связанных с обработкой результатов наблюдений, создаются специализированные, проблемно-ориентированные процессоры, работающие в составе вычислительной системы и существенно повышающие ее производительность (<sup>1</sup>).

В настоящей статье излагаются принципы, положенные в основу разработки аппаратных компонентов и математического обеспечения проблемно-ориентированного процессора, работающего в комплексе с универсальной ЭВМ. Этот спецпроцессор предназначен для использования при решении широкого круга задач, реализация алгоритмов которых основана на цифровых методах анализа результатов наблюдений. К их числу относятся задачи экономики и планирования производства, астрофизики, сейсмической разведки полезных ископаемых, метеорологии, биомедицины и многие другие, а также класс проблем, сводящихся к задаче распознавания образов.

Развитие современных систем обработки данных связано с увеличением объемов исследований и совершенствованием методов и техники обработки. Для успешного решения этих задач необходимо наличие современных вычислительных средств, имеющих широкую гамму периферийных устройств, гибкие и развитые операционные системы. Такие системы должны быть «открытыми», т. е. иметь возможность наращивания ресурсов как программных, так и аппаратных, что отвечает динамике развития систем обработки данных.

Таковыми системами в настоящее время являются серийно выпускаемые советской промышленностью ЭВМ Единой Системы (ЕС ЭВМ), поэтому рассматриваемый спецпроцессор ориентируется на подключение к моделям системы ЕС ЭВМ.

Как, известно, последовательность обработки результатов наблюдений состоит из ряда преобразований, в которых наиболее часто встречаются операции свертки, корреляции, преобразования Фурье, а также некоторые действия над векторами (матрицами) <sup>(2)</sup>. Эти операции обладают общим свойством—они приводятся к выполнению последовательности умножений и сложений.

Рассматриваемая вычислительная система состоит из двух процессоров разных классов и функционального назначения—центрального, выполняющего универсальный набор инструкций и специализированного, предназначенного для реализации специальных алгоритмов, сводящихся к арифметическим операциям умножения и сложения (вычитания).

*Структура спецпроцессора и логика функционирования.* Структурная схема спецпроцессора представлена на рисунке (рис. 1). Блок интерфейса предназначен для организации функциональной связи спец-

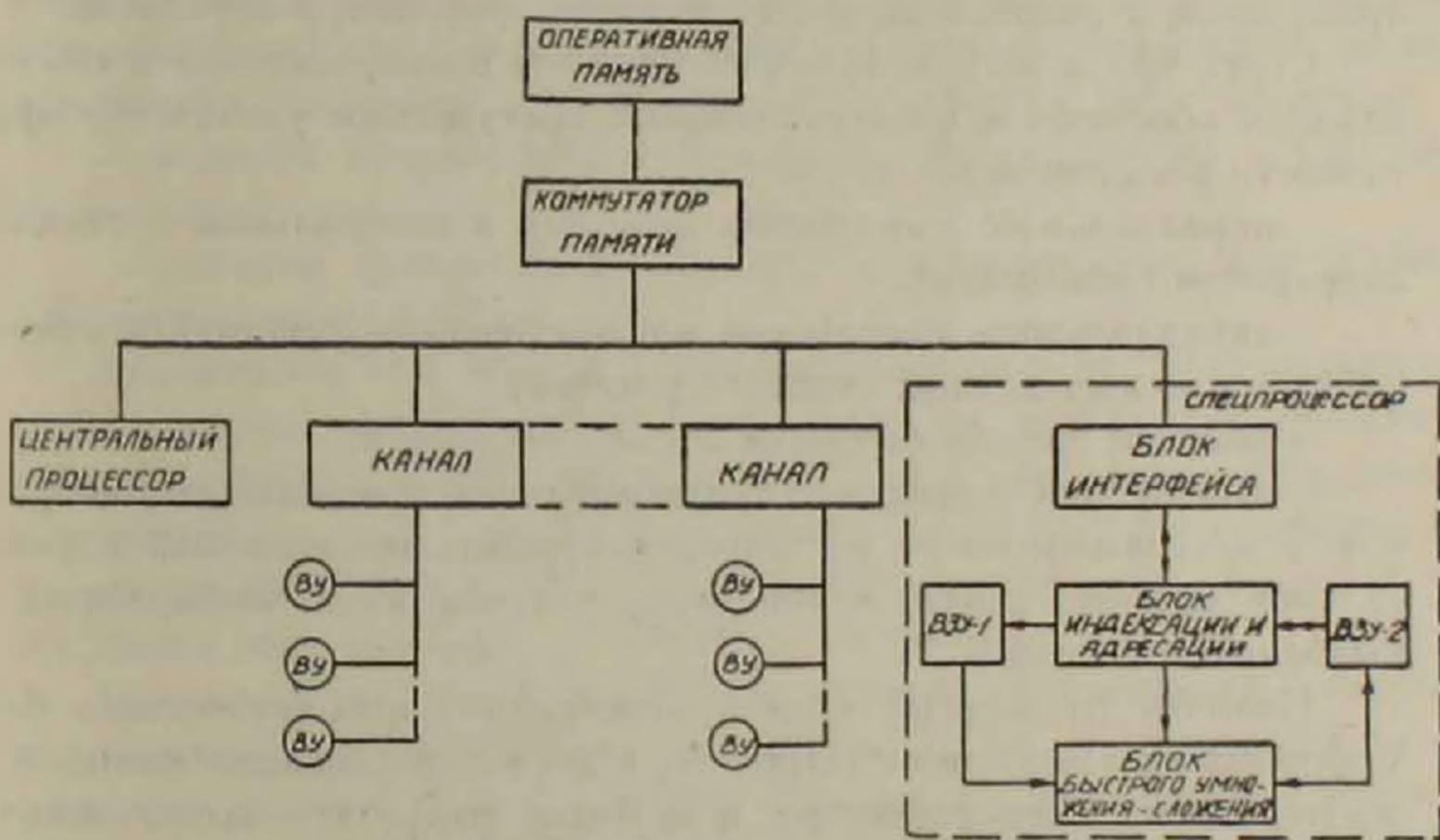


Рис. 1. Структура вычислительного комплекса со спецпроцессором

процессора с системой ЭВМ ЕС. Основными функциями его являются: прием управляющей информации, выдача запросов в систему, прием исходных данных из оперативной памяти (ОП) системы, выдача в ОП результатов вычислений, а также выполнение некоторых вспомогательных действий над входными и выходными данными. Блок индексации и адресации предназначен для обновления адресов при обмене данными с ОП, корректировки счета принятых и переданных данных. Блок быстрого умножения предназначен для выполнения умножения/сложения 32-разрядных слов в формате с плавающей запятой на основе применения аппаратно реализованных алгоритмов быстрого умножения. В этом блоке выполняется также нормализация результатов. Блок быстродействующих запоминающих устройств предназначен для приема и хранения

входных данных (ВЗУ-1) и хранения результатов промежуточных вычислений и окончательных результатов (ВЗУ-2).

Аппаратные средства спецпроцессора реализуют на микропрограммном принципе целый ряд операций для эффективного решения класса задач, связанных с обработкой результатов наблюдений. Основные из них:

- операции редукции векторов типа  $\sum a_k$  или  $\sum a_k^2$ ;
- покомпонентные операции типа  $\sum a_k + b_k c_k$  над векторами;
- специальные операции типа быстрого преобразования Фурье, решения разностных уравнений четвертого порядка, свертки-корреляции;
- операции, связанные с организацией массивов и форматными преобразованиями.

Микропрограммный принцип управления спецпроцессором позволяет изменять и наращивать набор операций по мере расширения сферы применения и разработки новых методов и процедур обработки.

Структура и логика функционирования спецпроцессора и его программное обеспечение предусматривают значительное увеличение эффективности решения задач за счет:

- параллельного выполнения действий в центральном и специализированном процессорах;
- параллельного выполнения арифметических действий в спецпроцессоре и вызова данных входного массива;
- высокой производительности спецпроцессора;
- выполнения операции посредством одной команды, что по сравнению с программируемой последовательностью, применяемой в универсальной машине, сводит к минимуму число команд, выбираемых при выполнении операций.

Наличие отдельных блоков индексации, арифметического блока, буферных запоминающих устройств, а также организация логики функционирования спецпроцессора позволяют выполнять вызов исходных данных и их обработку в непрерывном процессе.

Современные ЭВМ конструируются на базе быстродействующих элементов со временем переключения порядка нескольких наносекунд. Построение схем спецпроцессора на таких элементах с применением быстрых алгоритмов умножения обеспечивает выполнение умножения сложения за 150—200 нсек.

Проведем сравнительную оценку эффективности работы спецпроцессора. Для этой цели возьмем трудоемкую и весьма часто встречающуюся в задачах обработки операцию свертки

$$y_i = \sum_{j=0}^n k_j x_{i-j} \quad (i=0, 1, \dots, m),$$
 где  $k$ —весовая функция свертки, а  $X$ —свертываемая функция. Время выполнения этой операции при  $n=64$ ,  $m=1600$  составляет 10 сек. Расчетное время выполнения свертки при тех же параметрах на рассматриваемом спецпроцессоре в составе ЕС—1030 составляет 28.7 миллисекунд, т. е. применение спецпроцессора позволяет ускорить выполнение операции более, чем в 300 раз.

Быстродействие спецпроцессора накладывает особые требования на решение вопроса о подключении к ЕС ЭВМ. Для достижения высокой эффективности загрузки спецпроцессора целесообразно подключить его к системе в качестве интегрированного канала, т. е. устройства, совмещающего функции селекторного канала и спецпроцессора и являющегося абонентом оперативной памяти наряду с другими каналами системы. Очевидно, что интегрированный канал имеет возможности обмена данными со скоростью, близкой циклу памяти. Помимо этого, подключение спецпроцессора к ЕС ЭВМ в качестве канала обеспечивает обращение к нему посредством стандартных инструкций ввода/вывода, форматы и поля которых соответствуют требованиям, изложенным в «Принципах работы ЕС ЭВМ».

*Программное обеспечение.* Специфика спецпроцессора и особенности его применения требуют наличия соответствующей операционной системы, являющейся расширением существующей Операционной Системы Единой Системы (ОС ЕС). Средства генерации и модульный принцип построения операционной системы ЕС позволяет расширять систему в процессе генерации <sup>(3)</sup>. Расширение касается двух аспектов:

— создания программной компоненты метода доступа (МД) спецпроцессора;

— создания программных средств, предназначенных для решения конкретных классов задач.

Компонента МД содержит программные модули, обеспечивающие обслуживание спецпроцессора и связывающие проблемные программы с ОС ЕС. Модули служат для планирования и управления обращением к спецпроцессору, выполнения стандартных процедур обслуживания при возникновении сбойных или исключительных ситуаций, а также для обработки этих ситуаций со стороны пользователя.

Поскольку программные модули должны удовлетворять стандартным конвенциям, касающимся управления ОС ЕС и связи с ней, то это оставляет систему открытой и дает возможность наращивания совокупности программных средств целевого назначения.

Модули МД функционируют в режиме интерпретации с возможностями динамического синтаксического анализа параметров, задаваемых для обращения к спецпроцессору с программ, написанным как на машинно-ориентированном языке, так и на языках более высокого уровня (например, Фортран).

Расширение сфер применения и упрощение внедрения спецпроцессора обеспечиваются наличием комплекса программных средств и алгоритмов, ориентированных на различных пользователей. Алгоритмы, реализуемые в спецпроцессоре, являются широко используемыми математическими средствами в цифровых методах обработки результатов наблюдений. Следовательно, дальнейшее развитие программных средств должно вестись по пути создания проблемно-ориентированных пакетов на базе метода доступа спецпроцессора.

Специализированный процессор, включенный в конфигурацию моделей ЭВМ ЕС, совместно с широкими возможностями ОС и пакетами прикладных пользовательских программ, не только значительно повышает экономическую эффективность решения задач по обработке результатов наблюдений, но и будет служить инструментом, на котором могут вестись лабораторные поиски новых методов и процедур обработки.

Ереванский научно-исследовательский институт  
математических машин

Վ. Կ. ՇԶԻԿԼԻԿ Ժ. Ս. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

Պրոբլեմային-կոդմոնոբոշված պրոցեսոր դիտարկման  
արդյունքների էֆեկտիվ մշակման համար

Հոդվածում դիտարկվում են սկզբունքային լուծումներ, որոնք զրված են էՀՄ Միասնական Համակարգի (ՄՀ) կոմպլեքսում աշխատող մասնագիտացված պրոցեսորի մշակման հիմքում: Նշված պրոցեսորը նախատեսված է դիտարկման արդյունքների մշակման հետ կապված խնդիրների լուծման համար:

Բերվում է մասնագիտացված պրոցեսորի կառուցվածքը և գործելու տրամաբանությունը, ինչպես նաև էՀՄ ՄՀ տարրեր մեքենաներին միացնելու եղանակը: Մասնագիտացված պրոցեսորը կառարում է անդամ առ անդամ գործողություններ վեկտորների հետ, վեկտորների սեղուկցիա, կոմպլեքս վեկտորների բազմապատկում և մի քանի հատուկ գործողություններ, օրինակ՝ Ծուրյեի արագ ձևափոխություն (ինչպես ուղիղ, այնպես էլ հակադարձ), փաթաթում-կոսիլյացիա, 4-րդ կարգի տարրերական հավասարումների լուծում և այլն:

Դիտարկվում է նաև մասնագիտացված պրոցեսորի մաթեմատիկական սպասարկման կազմակերպման սկզբունքը, որը հանդիսանում է էՀՄ ՄՀ օպերացիոն համակարգի ֆունկցիոնալ բնդլայնումը և բաղկացած է դիմելու մեթոդի ծրագրային կոմպոնենտներից և կիրառական ծրագրերի փաթեթից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> Е. А. Козлов, Г. Н. Гогоненков, Цифровая обработка сейсмических сигналов. Изд. Недра, 1973. <sup>2</sup> Дж. Бендат, А. Пирсол, Измерение и анализ случайных процессов. Изд. «Мир», 1974. <sup>3</sup> В. Г. Лесюк, А. С. Марков и др., Система математического обеспечения ЕС ЭВМ. Изд. Статистика, 1974.

УДК 547.12.72.554

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

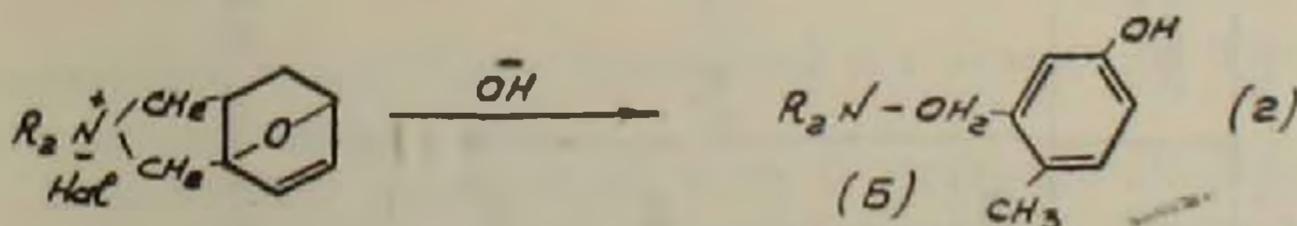
Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабаян,  
 К. Ц. Тагмазян, Р. С. Мкртчян

Новый путь синтеза 3(4)-метил-4(3)-диалкиламинометил-фенолов

(Представлено 24/IX 1975)

Установлено образование 3/4-метил-4(3)-диалкиламинометил-фенолов в результате водно-щелочного расщепления солей 2,2-диалкил-5,7  $\alpha$ -эпокси-3  $\alpha$ , 4,5,7  $\alpha$ -тетрагидроизоиндолина—продуктов внутримолекулярной циклизации солей диалкилаллилфурфуриламмония.

В результате термической циклизации солей диалкилаллилфурфуриламмония образуются соли 2,2-диалкил-5,7  $\alpha$ -эпокси-3  $\alpha$ , 4,5,7  $\alpha$ -тетрагидроизоиндолина (А) (1,2).



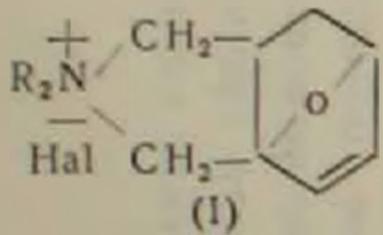
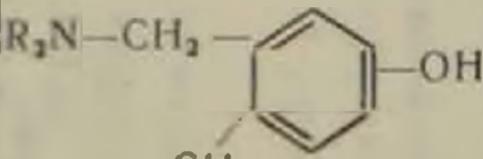
Можно было ожидать, что водно-щелочное расщепление последних приведет к раскрытию эпоксидного кольца с образованием соответствующих диалкиламинометилфенолов (Б или В, схемы 2 и 5).

В результате взаимодействия солей А с двойным мольным количеством 20% водного раствора едкого кали при 90/95° действительно образуются соответствующие диалкиламинометилфенолы. При этом соединения А претерпевают две основные превращения—раскрытие эпоксидного кольца, расщепление аммониевого комплекса.

Вероятнее всего, что сначала происходит раскрытие эпоксидного кольца и только потом расщепление аммониевого комплекса.

Таблица

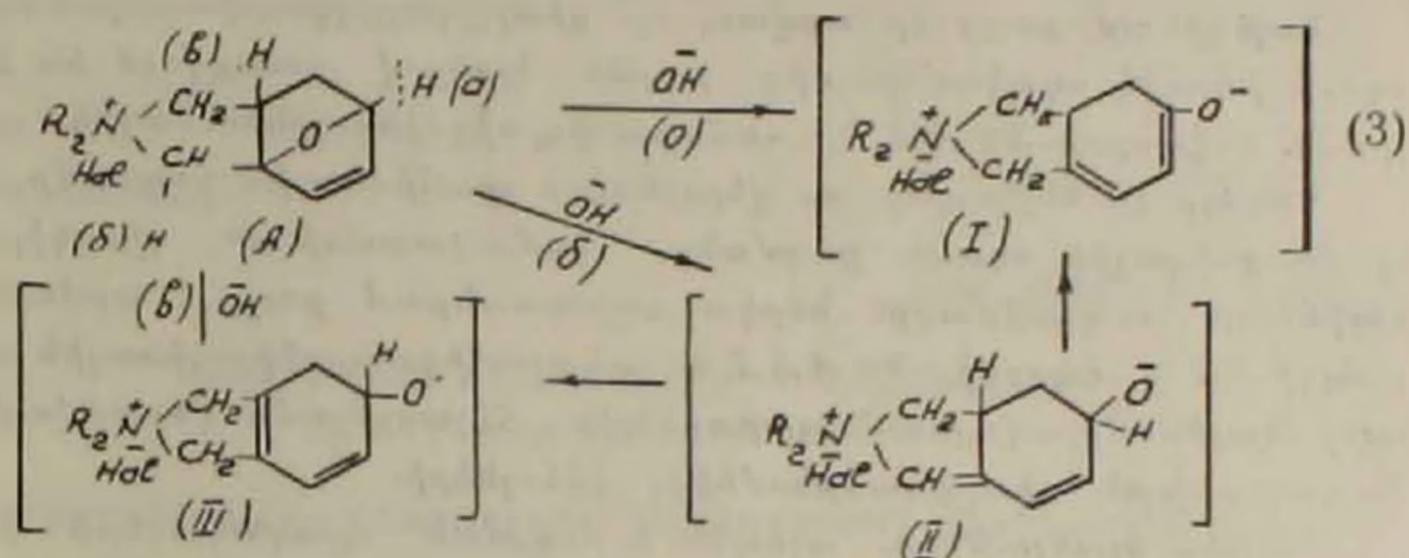
Данные о бромгидратах продуктов расщепления солей I

Исходная соль	R <sub>2</sub> =	Т. пл.	Бромгидрат продукта расщепления I	Выход %	Т. пл. °C	R <sub>f</sub> **	Найдено, %		Вычислено		ИК спектр	УФ спектр
							N	Br	N	Br		
 (I)	(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>	158—160		85	216—218	0,59	5,15	32,97	5,69	32,92	800, 834, 1470, 1559, 1732, 1840, 1200, 3320, 3400	230 260
	(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub>	155—156		83	•	0,76	5,32	28,86	5,10	29,20	•	270 250 275
	(CH <sub>3</sub> ) <sub>5</sub>	•		85	197—198	0,77	4,67	28,32	4,89	28,00	•	245, 265
			163—165		82	•	0,75	4,45	27,69	4,86	27,77	•

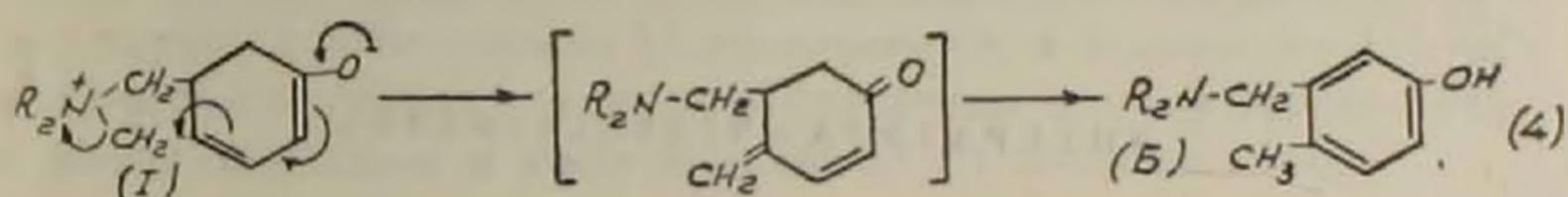
• Гигроскопична

\*\* На „Силуфол UV—254“ бутанол: этанол: уксусная кислота: вода (10:7:4:3)

Теоретически возможные пути раскрытия эпоксидного кольца представлены схемой 3.

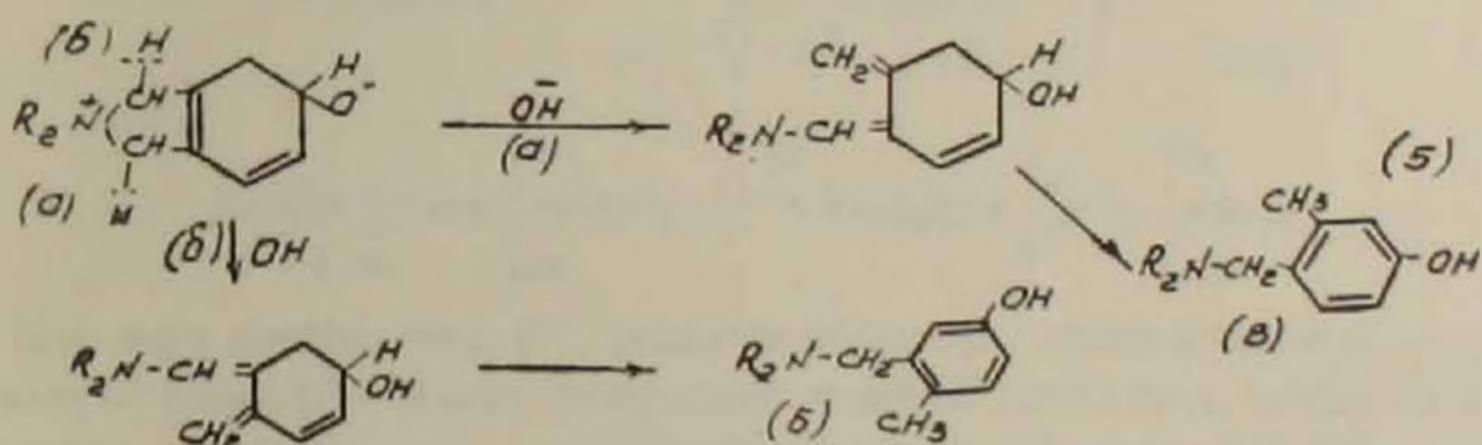


Дальнейшая судьба I может быть представлена схемой 4,



приводящей к образованию 3-диалкиламиноэтил-4-метилфенолов (Б).

Дальнейшие превращения III могут быть представлены схемой 5



включающей возможность образования Б и изомерного 3-метил-4-диалкиламиноэтилфенола (Б').

В результате расщепления солей I образуется лишь один из возможных изомеров диалкиламиноэтилфенолов. Последние выделялись из реакционной смеси с почти количественным выходом в виде бромгидратов. Результаты приведены в таблице. Индивидуальность установлена ТСХ на пластинках «Силуфол IV-254», состав и строение подтверждены данными элементного анализа, ИК и УФ-спектроскопии. Положение заместителей не уточнено, предполагается, что образуется 3-диалкиламиноэтил-4-метилфенол (Б).

Благодаря высоким выходам как в стадии образования солей эпокси-тетрагидроизоиндолиния (1,2), так и при водно-щелочном расщеплении последних, метод этот может найти применение в препаративной химии.

Институт органической химии  
Академии наук Армянской ССР

3(4)- մերիլ-4(3) դիալկիլամինոմերիլֆենոլների ստացման նոր ուղի

Նախկինում ցույց էր տրված, որ դիալկիլալիլֆուրֆուրիլամինոմային աղերի թերմիկ օդակալորումից բարձր հիքերով ստացվում են 2,2-դիալկիլ-5,7-ա-էպօքսի-3 ա, 4,5,7 ա -տետրահիդրոօրինոլինոմային աղեր:

Կարելի էր ենթադրել, որ վերջինների ջրահիմնային ճեղքումը կհանգեցնի էպօքսիդային օդակի բացմանը, համապատասխան դիալկիլամինոմեթիլֆենոլի առաջացմամբ: Ներկա աշխատանքում ցույց է տրված, որ 2,2-դիալկիլ-5,7-ա-էպօքսի-3 ա, 4,5,7 ա -տետրահիդրոօրինոլինային աղերը ջրահիմնային միջավայրում տաքացնելիս հեշտությամբ վերածվում են համապատասխան դիալկիլամինոմեթիլ ֆենոլների:

Ինչպես հլանյութերի, այնպես և ճեղքման պրոդուկտների բարձր հիքերը թույլ են տալիս, առաջարկել վերը բերվածը, իբրև վերջիններիս րստացման պրիսլարատիվ հղանակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> Ա. Գ. Բաբյան, Կ. Ս. Կառազյան, Ր. Ս. Մկրտչյան, ԺԱՈՒ Արմ. ՍՍՀ, LV, № 4 (1972)

<sup>2</sup> Կ. Ս. Կառազյան, Ր. Ս. Մկրտչյան, Ա. Գ. Բաբյան, ԺՕՐԽ, X, 8, 1962 (1974).

УДК 542.924 + 547.333.4

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

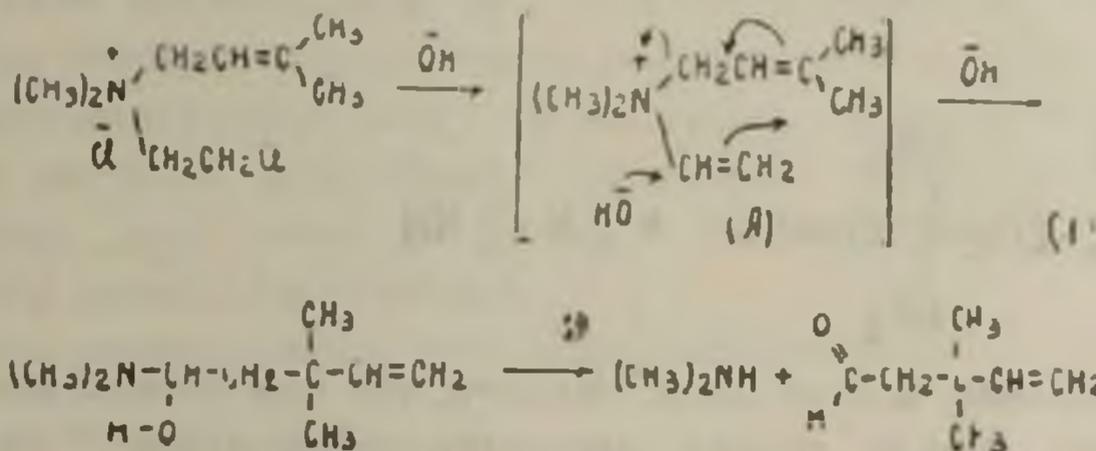
Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабаян.

Л. Х. Гамбурян, В. А. Паронян

Перегруппировка-расщепление четвертичных солей аммония

(Представлено 22/X 1975)

Соли четырехзамещенного аммония, содержащие 2,3-непредельную группу наряду с потенциально 1,2-непредельной, в водно-щелочной среде подвергаются перегруппировке-расщеплению с образованием карбонильного соединения и вторичного амина (1) согласно схеме



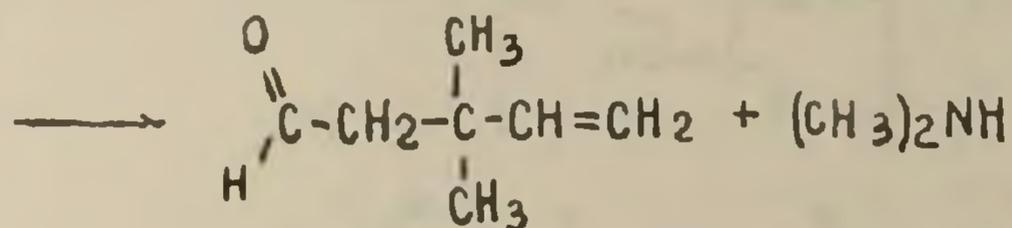
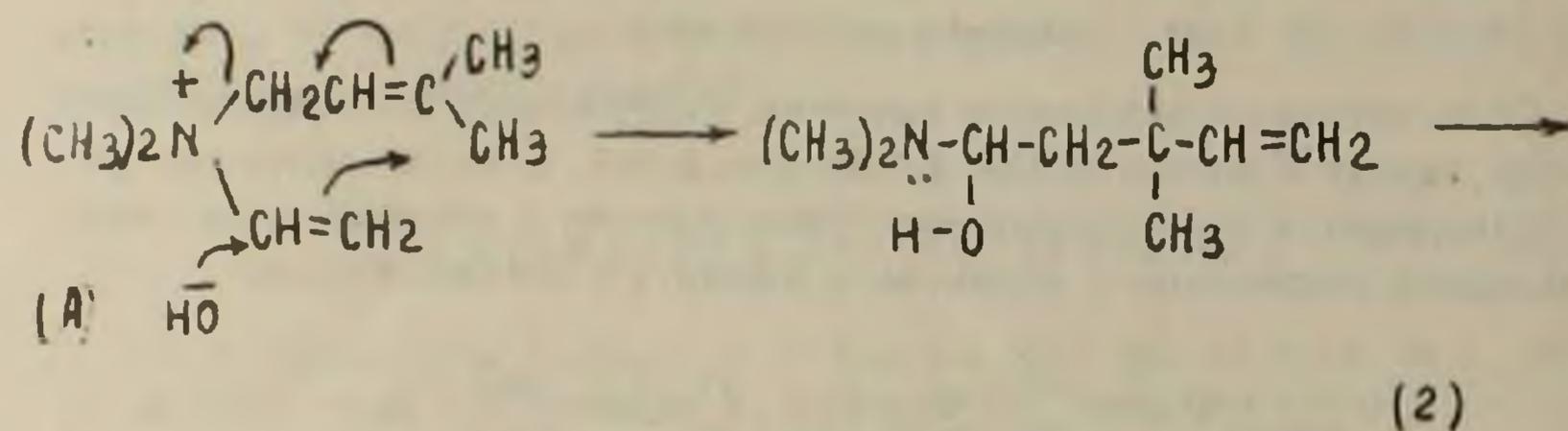
Как уже сообщалось (2), попытка выделить промежуточную енаммониевую соль (А) взаимодействием водных растворов эквимольных количеств едкого кали и хлористого диметил(3-метил-2-бутенил)-(2-хлорэтил) аммония при 20—25° не увенчалась успехом. Щелочь полностью расходуется и половина исходной соли возвращается без изменения. Это указывает, что в названных условиях скорость первой стадии, т. е. дегидрохлорирования с образованием енаммониевой соли, значительно уступает скорости второй стадии реакции—перегруппировки-расщепления образовавшейся енаммониевой соли, при которой тратится вторая молекула щелочи.

Дальнейшими исследованиями, проведенными на примере бромистой (I) и хлористой (II) солей диметил(3-метил-2-бутенил)(2-галондэтил)аммония, установлена возможность изменения соотношения скоростей обеих стадий как природой растворителя, так и температурой. Полученные результаты приведены в таблице. Они показывают, что в 80% метанолюдно-водном растворе при 20—25° после 24 часового взаимодействия эквимольных количеств I и II и едкого натра дегидрогалондирование происходит на 78 и 72% соответственно. Выходы альдегида достигают 79 и 67% соответственно. Основная часть диметиламина, естественно, остается в реакционной смеси в виде галондводородной

соли. Свободного амниа выделено 12 и 23% соответственно. Примерно аналогичные результаты получены и под действием метилата натрия в метаноле. При этом вторая стадия настолько замедляется по сравнению с первой, что при 0° при 20-часовом взаимодействии эквимольных количеств соли I и метилата натрия в абсолютном метаноле дегидробромирование достигает до 82%, выход альдегида всего 27%.

Таким путем удалось выделить промежуточную снммониевую соль и установить, что скорость перегруппировки в этаноле ниже чем в воде и еще меньше в ацетонитриле.

Вторая стадия изучаемой реакции представляет собой на наш взгляд нуклеофильное замещение с переносом реакционного центра, сопровождающееся внутримолекулярным С-алкилированием (схема 2)



Следовательно, можно было ожидать, что при повышении температуры реакции первая стадия—дегидрогалондирование, являющаяся реакцией отщепления ускорится сильнее и можно будет достигнуть более высокого процента дегидрогалондирования под действием эквимольного количества щелочи. Это оказалось вполне справедливым и в водном растворе. Так, например, при взаимодействии заранее подогретых до 90—95° водных растворов эквимольных количеств соли I и едкого натра с последующим 30 минутным нагреванием на кипящей водяной бане дегидрохлорирование доходит до 87% и выход альдегида 50%.

В 200 мл метанола растворяется 0,1 г/моль испытуемой соли (I или II) и добавляется 100 мл 1N водно-метанольного раствора едкого натра. На следующий день титрованием пробы определяется количество образовавшегося ионного галонда. Осаждением 2,4-динитрофенилгидразона, весовым путем определяется количество карбонильного соединения. Результаты приведены в таблице.

Смешиваются заранее подогретые до 90—95° водные растворы эквимольных количеств аммониевой соли и едкого натра. После 30 минутного нагревания на кипящей водяной бане, выделившийся верхний слой отделяется, добавляется к нему эфирный экстракт реакционной смеси, сушится и перегоняется. В отогнавшемся эфире, титрованием, определяется количество свободного диметиламина. Перегонкой остатка выделяется 3,3-диметил-4-пентеналь с т. к. 127—128°, температура

пл. 2,4-динитрофенилгидразона 110°. В водном слое реакционного остатка, титрованием, определяется количество образовавшегося ионного галонда.

Таблица 1

Результаты взаимодействия эквимольных количеств солей диметил (3-метил-2-бутенил) (2-галондэтил) аммония и щелочи

$\begin{array}{c} \text{(CH}_3\text{)}_2\text{N}^+ \\   \\ \text{X}^- \\   \\ \text{CH}_2-\text{CH}=\text{C}(\text{CH}_3)_2 \\   \\ \text{CH}_2\text{CH}_2\text{X} \end{array}$	Растворитель	Щелочь	Температура	Продолж. час	Продукты реакции выходы в %		
					альдегид	(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> NH	дегидрогалондирован.
I Br	CH <sub>3</sub> OH 80% Вода 20%	NaOH	20—25	24	79	12	78
II Cl			.	.	67	23	72
I Br	CH <sub>3</sub> OH абс.	CH <sub>3</sub> ONa	.	.	80	25	80
I Br	.	.	0	20	27	10	82
I Br	.	.	20—25	0,5	35	12	65
I Br	.	.	40	0,5	67	12	87
I Br	Вода	NaOH	90—95	0,5	50	—	87

Водный слой выпаривается досуха и экстрагируется абсолютным спиртом. После отгонки спирта остаток перекристаллизовывается, выделяется бромистоводородная соль диметиламина. Остаток, выделенный из маточного раствора, представляет по данным тонкослойной хроматографии смесь двух солей.

Результаты приведены в таблице

Аналогично проводились и остальные эксперименты.

Институт органической химии

Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ակադեմիկոս՝ Ա. Խ. ԲԱՐԱՅԱՆ, Լ. Խ. ԳԱՄՐՈՒՐՅԱՆ, Վ. Ա. ԳԱՐՈՆՅԱՆ

### Չորսորդային ամոնիումային աղերի վերախմբավորում-ճեղգումը

Նախկինում ցույց էր տրվել (<sup>1</sup>), որ 2,3-չհագեցած և 2-հալոգենէթիլ խմբեր պարունակող ամոնիումային աղերը ջրային հիմքի ազդեցության տակ ենթարկվում են վերախմբավորման-ճեղգման, առաջացնելով կարբոնիլային միացություն և հրկրորդային ամին: Պարզվել էր նաև (<sup>2</sup>), որ միջանկյալ ենամոնիումային աղի առաջացման արագությունը անհամեմատ փոքր է նրա հետագա վերախմբավորման արագությունից:

Ներկա աշխատանքում ցույց է տրվել, որ այդ երկու ռեակցիաների արագությունների հարաբերությունը խիստ կախված է լուծիչի բնույթից և ջերմային պայմաններից: Արդյունքները բերված են աղյուսակում:

Այսպիսով հնարավոր է դարձել անչափով միջանկյալ ենամոնիումային աղը և ցույց տալ, որ նրա վերախմբավորումը առավել արագ է ընթանում ջրում, ավելի դանդաղ է թանուլում և էլ ավելի դանդաղ ացետոնիտրիլում:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> А. Т. Бабаян, М. Г. Инджикян, Г. Б. Багдасарян, ДАН Арм. ССР, т. 34, № 2 (1962). <sup>2</sup> А. Т. Бабаян, М. Г. Инджикян, Г. Б. Багдасарян, Н. М. Давтян, ЖОХ, 34, 416 (1964).

УДК 547.253.3+547.281+547.288.2

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

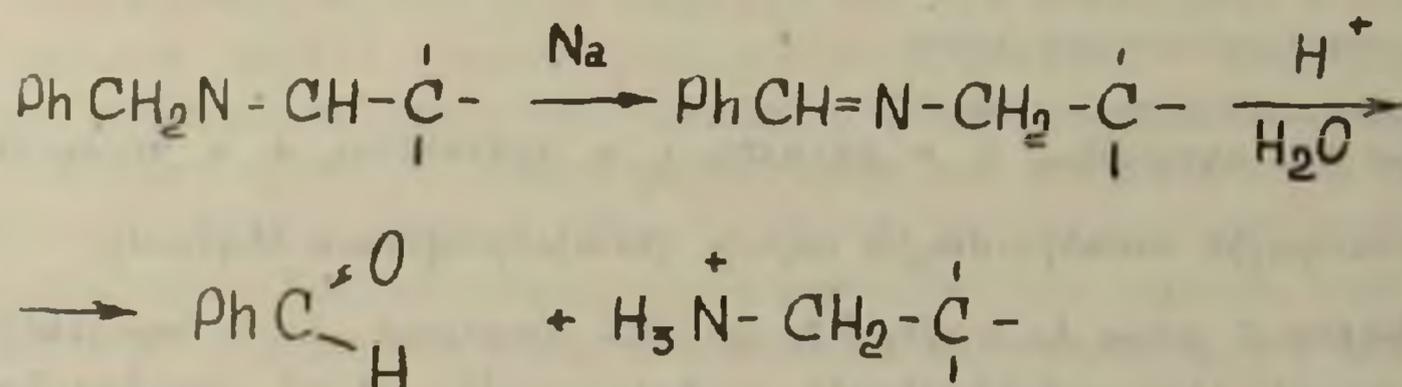
Г. Т. Мартиросян, А. Ц. Казарян, С. О. Мисарян

О превращениях N-бензил-N-(2,2-диметил-4-фенил-бутилен) амина под действием щелочных металлов

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Т. Бябалин 8/XII 1975)

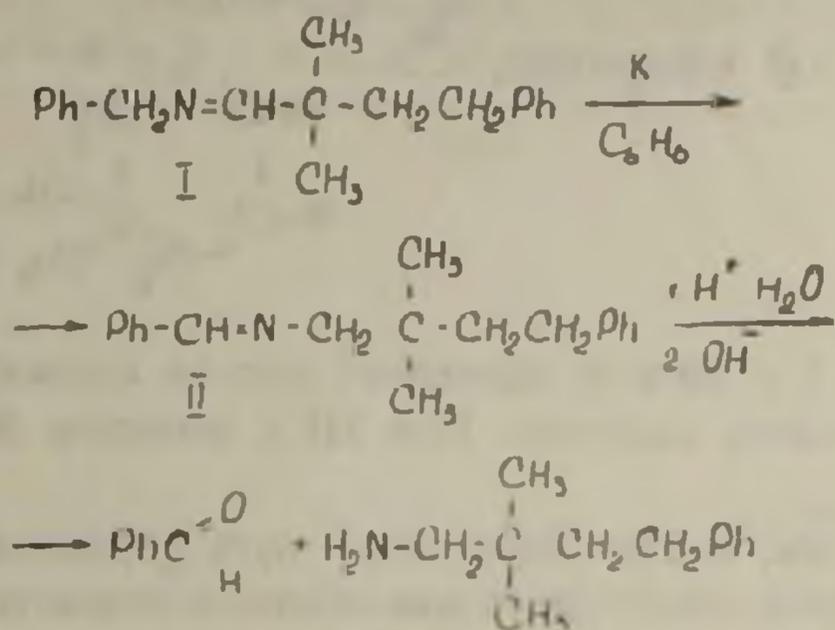
В ряде работ по C-алкилированию N-алкил альд- и кетиминов олефинами типа стирола (1,2) и диеновыми углеводородами (3) нами было установлено, что в процессе не имеет места имин-иминная и имин-енаминная изомеризации.

При алкилировании N-бензил-альд и кетиминов стиролом и изопреном в присутствии натрия, калия и лития в продуктах гидролиза алкилированных иминов был обнаружен бензальдегид, образование которого свидетельствует о параллельном протекании имин-иминной изомеризации в процессе алкилирования:

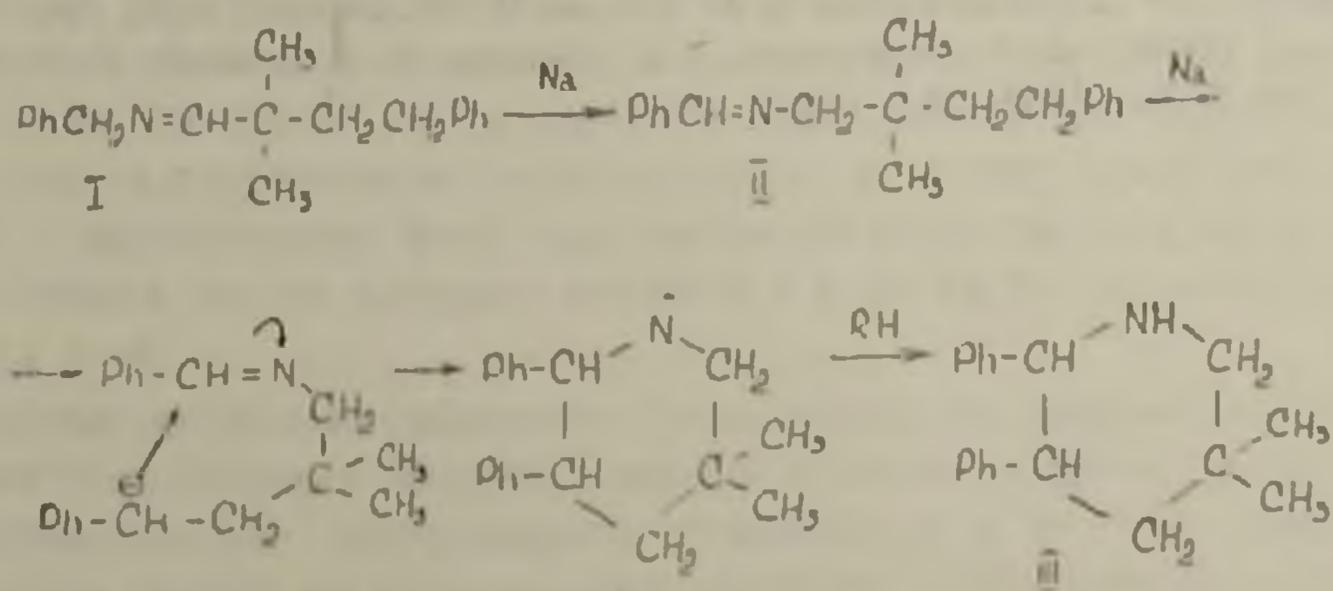


С целью изучения этой реакции нами, из бензиламина и 2,2-диметил-4-фенил-масляного альдегида, был получен соответствующий имин (I) с выходом 86% (т. кип. 171°/3 мм;  $n_D^{20}$  1,5470;  $d_4^{20}$  1,0827. Найдено %: С 85,73; Н 8,00; N 4,85;  $\text{C}_{19}\text{H}_{23}\text{N}$ . Вычислено %: С 86,04; Н 8,68; N 5,29) и изучено его превращение под действием щелочных металлов.

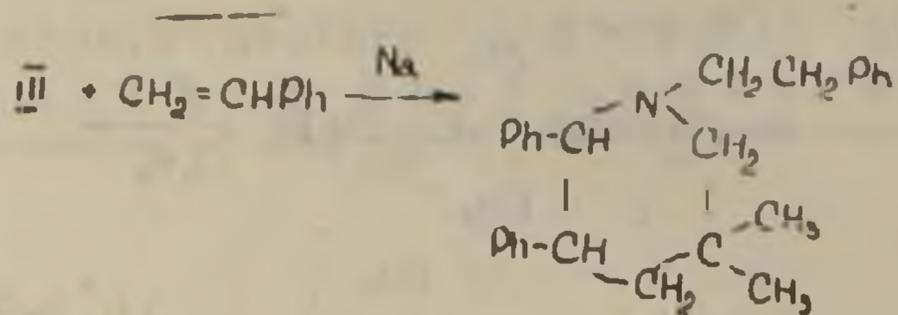
Показано, что при нагревании бензольного раствора I в атмосфере азота в присутствии калия изомеризованный имин (II) получается с выходом 94% (т. кип. 185—186°/4 мм;  $n_D^{20}$  1,5570;  $d_4^{20}$  0,9927. Найдено %: С 85,87; Н 8,28; N 5,00. Вычислено %: С 86,04; Н 8,68; N 5,29), из которого кислотным гидролизом выделены бензальдегид (70%) и 2,2-диметил-4-фенил бутиламин с 85% выходом (т. кип. 128°/12 мм;  $n_D^{20}$  1,5110. Найдено %: С 80,96; Н 10,52; N 8,13;  $\text{C}_{12}\text{H}_{19}\text{N}$ . Вычислено %: С 81,35; Н 10,73; N 7,91).



Весьма интересно протекает реакция в присутствии натрия. В этом случае обнаружено лишь небольшое количество II (~ 5%). В качестве основного продукта реакции с 60% выходом получается вещество (т. кип. 163—166°C/3 мм. Найдено %: С 86,12; Н 8,47; N 5,13. Вычислено %: С 86,04; Н 8,68; N 5,29), которое при перегонке кристаллизуется (т. пл. 69—71°). По данным ИК спектрального анализа полосы поглощения в области 1680 см<sup>-1</sup> характерные для —N=C—группы, как это имеется в I и II отсутствуют и появляются поглощения в области 3300 см<sup>-1</sup>, характерные для NH-связи. Полученный продукт не изменяется при обработке кислотой и дальнейшим подщелачиванием. Эти данные дали нам основание предположить, что в процессе имеет место образование замещенного пиперидина. То же самое соединение образуется и при взаимодействии II с натрием, это дает нам право заключить, что при взаимодействии I с натрием имеет место изомеризация I в II и дальнейшая внутримолекулярная циклизация по схеме:



Что действительно образуется III нами доказано, его дальнейшим алкилированием стиролом в присутствии натрия (4). В результате с 56% выходом получен IV (т. кип. 207—209°/2 мм;  $n_D^{20}$  1,5670. Найдено %: С 87,75; Н 8,12; N 3,55; C<sub>27</sub>H<sub>31</sub>N. Вычислено %: С 87,80; Н 8,40; N 3,79).



Взаимодействие I с литием протекает весьма сложно. Из продуктов реакции нам удалось выделить II и III с выходом 5 и 7% соответственно.

Таким образом, найден интересный путь образования производных пиперидина внутримолекулярной циклизацией соответствующих иминов.

Всесоюзный научно-исследовательский и проектный институт полимерных продуктов

Գ. Խ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Զ. Յ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ս. Օ. ՄԻՍԱՐՅԱՆ

**N-բենզիլ-N-(2,2-դիմեթիլ-4-ֆենիլբութիլիդեն) ամինի փոխարկումներն ալկալիական մետաղների ազդեցությամբ**

Ցույց է տրվել, որ կատալիտիկ քանակությամբ ալկալիական մետաղների ներկայությամբ N-բենզիլ-N-(2,2-դիմեթիլ-4-ֆենիլբութիլիդեն) ամինը իզոմերվում է N-բենզիլիդեն-2,2-դիմեթիլ-4-ֆենիլբութիլամինի, որը ներմուծելույնը ցիկլման հետևանքով փոխարկվում է 2,2-դիմեթիլ-5,6-դիֆենիլպիպերիդինի:

**ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

<sup>1</sup> Ա. Շ. Կազարյան, Գ. Գ. Մարտիրոսյան, «Արմ. хим. журнал», т. 25, 861 (1972). <sup>2</sup> Э. А. Григорян, А. Ш. Казарян, К. С. Лусирирян, Գ. Գ. Մարտիրոսյան, «Արմ. хим. журнал», 27, 304 (1974). <sup>3</sup> Գ. Գ. Մարտիրոսյան, Ա. Շ. Կազարյան, Ս. Օ. Միսարյան, «Արմ. хим. журнал», т. 26, 569 (1973). <sup>4</sup> Գ. Գ. Մարտիրոսյան, Ա. Շ. Կազարյան, Լ. Վ. Ասրատյան, Ս. Օ. Միսարյան, ДАН Арм. ССР, т. LVIII, № 3, (1974)

УДК 543062 + 546 681

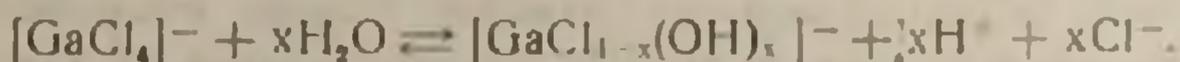
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Член-корреспондент АН Армянской ССР В. М. Тараян,  
 А. Н. Погосян

О влиянии кислотности на химизм экстракции галлия с  
 основными красителями

(Представлено 11/XII 1975)

Взаимодействие хлоридного анионного комплекса галлия с катионами различных основных красителей широко используется для экстракционно-фотометрического определения галлия. Принято считать, что при этом реакционноспособной формой галлия является хлоргаллат-анион  $[GaCl_4]^-$ . Вместе с тем, известна склонность солей галлия к гидролизу. В этой связи, возникает, не лишенный как теоретического, так и практического интереса, вопрос: как влияет кислотность водной фазы на извлечение галлия в органическую фазу? Не происходит ли при снижении кислотности, ступенчатый гидролиз этого комплекса с образованием соединений общей формулы:



Насколько реакционноспособны эти гидроксокомплексы по отношению к катионам основных красителей и соответственно извлекаются ли они в органическую фазу? Ранее подобное исследование было проведено по отношению к хлорантимонат-аниону и было показано, что сурьма извлекается в органическую фазу при различной кислотности в виде гидроксокомплекса, состав которого меняется в зависимости от концентрации кислоты (1-5).

Исходя из вышесказанного, была поставлена задача исследовать влияние концентрации кислоты в водной фазе на состав экстрагируемого в органическую фазу хлоргаллат-аниона, т. е. изучить механизм экстракции галлия из солянокислых растворов в присутствии основных красителей.

Из основных красителей были избраны трифенилметановые красители: метиловый зеленый (МЗ) марки «С.І.№ 42590» и бриллиантовый зеленый (БЗ). В качестве экстрагентов для хлоргаллата МЗ использовали бензол или смесь бензола с дихлорэтаном (6:4), а для хлоргаллата БЗ-бензол, достаточно хорошо извлекающие образующиеся трех-

компонентные соединения не извлекая при этом, простую соль реагента. Кривые светопоглощения соответствующих экстрактов приведены на рисунке.

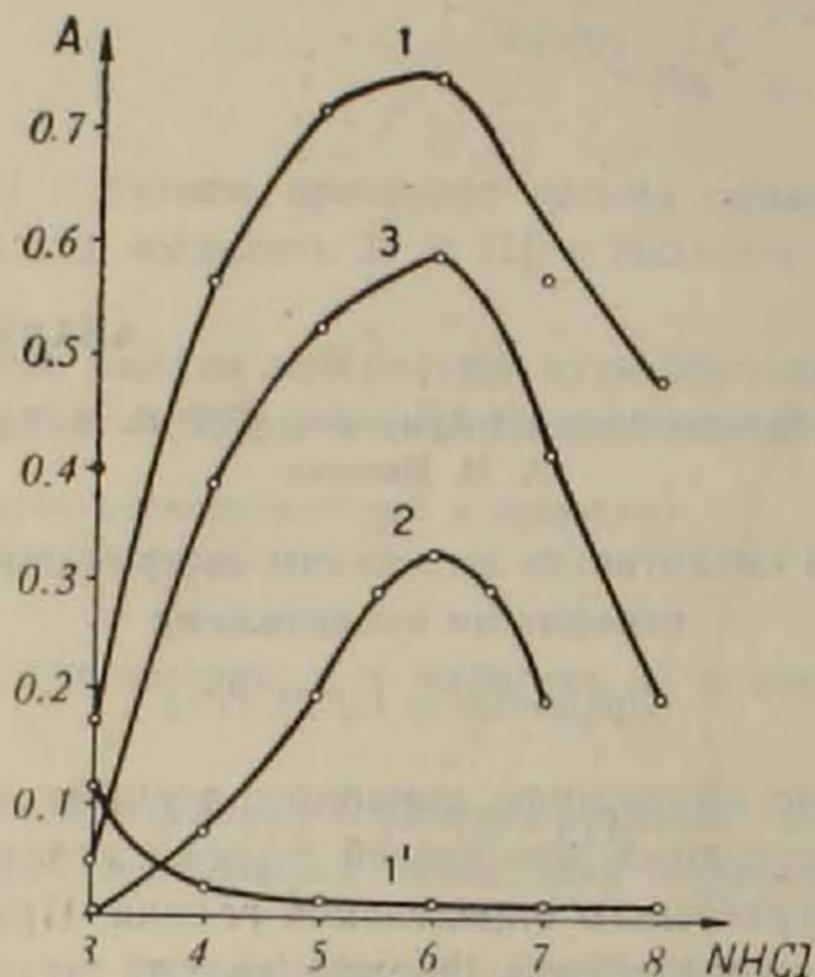


Рис. 1. Кривые светопоглощения: 1—бензол-дихлорэтанового экстракта хлоргаллата МЗ; 1'—экстракта соответствующего «холостого»; 2—бензольного экстракта хлоргаллата МЗ; 3—бензольного экстракта хлоргаллата БЗ.  $[Ga]=7,15 \cdot 10^{-6}$  М;  $V_{\text{водн.}}=V_{\text{орг.}}=10$  мл

Оптическая плотность этих экстрактов свидетельствует о том, что бинарная смесь бензол-дихлорэтан, заметно больше извлекает образующееся трехкомпонентное соединение галлия (кривая 1). Однако ход всех кривых (1, 2, 3) аналогичен, т. е. извлечение ионного ассоциата галлия в органическую фазу в основном имеет место в интервале кислотности 4,0—8,0 н НСl. Поэтому исследование состава хлоргаллатов МЗ и БЗ проводили регулируя кислотность водной фазы в указанном интервале концентрации НСl.

С целью установления состава комплексного аниона галлия в экстрагируемых с основными красителями его соединениях, была поставлена серия опытов согласно ранее примененной методике (1-5). Количество извлекаемого в органическую фазу галлия определяли по предварительно заготовленному калибровочному графику, а также методом реэкстракции (6).

Для определения количества хлор-иона в извлекаемом в органическую фазу трехкомпонентном соединении, несколько экстрактов (содержащих в сумме от 200 до 400 мкг галлия) объединяли и тщательным центрифугированием и отстаиванием отделяли от следов водной фазы. Затем объединенный экстракт выпаривали на водяной бане до влажно-

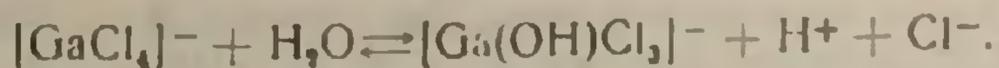
го состояния и добавляли 20—25 мл дистиллированной воды. В полученном растворе концентрацию хлор-иона определяли амперометрическим титрованием раствором нитрата серебра\*. Одновременно известными спектрофотометрическими методами определяли соотношение компонентов в экстрагируемом ионном ассоциате. Оно равно 1 : 1 и не изменяется с изменением кислотности водной фазы. Таким образом, суммарный заряд образующегося хлоридного комплексного аниона галлия равен единице.

Полученные результаты приведены в таблице и представляют собою среднее из трех параллельно проведенных опытов.

Влияние кислотности водной фазы на состав извлекаемого в органическую фазу хлоргаллат-аниона ( $n=3-4$ )

Краситель	Растворитель	Кислотность водной фазы	Содержание галлия в экстракте $г-ион/л$	Содержание хлор-иона в экстракте $г-ион/л$	Отношение Ga : Cl-	Состав извлекаемого в органическую фазу хлоргаллат-аниона
Бриллиантовый зеленый	Дихлорэтан бензол (4 : 6)	4 н. HCl	$2,46 \cdot 10^{-6}$	$6,82 \cdot 10^{-6}$	1 : 2,8	$[Ga(OH)Cl_3]^-$
		5 н. HCl	$2,51 \cdot 10^{-6}$	$6,60 \cdot 10^{-6}$	1 : 2,6	$[Ga(OH)Cl_3]^-$
		6 н. HCl	$2,90 \cdot 10^{-6}$	$9,30 \cdot 10^{-6}$	1 : 3,2	$[Ga(OH)Cl_3]^-$
		7 н. HCl	$2,59 \cdot 10^{-6}$	$9,70 \cdot 10^{-6}$	1 : 3,9	$[GaCl_4]^-$
		8 н. HCl	$1,90 \cdot 10^{-6}$	$7,92 \cdot 10^{-6}$	1 : 4,2	$[GaCl_4]^-$
Метиловый зеленый	Бензол	5 н. HCl	$6,04 \cdot 10^{-6}$	$15,40 \cdot 10^{-6}$	1 : 2,5	$[Ga(OH)Cl_3]^-$
		6 н. HCl	$3,43 \cdot 10^{-6}$	$10,83 \cdot 10^{-6}$	1 : 3,2	$[Ga(OH)Cl_3]^-$
		7 н. HCl	$2,57 \cdot 10^{-6}$	$9,23 \cdot 10^{-6}$	1 : 3,6	$[GaCl_4]^-$
Бриллиантовый зеленый	Бензол	4 н. HCl	$3,59 \cdot 10^{-6}$	$9,24 \cdot 10^{-6}$	1 : 2,6	$[Ga(OH)Cl_3]^-$
		5 н. HCl	$2,41 \cdot 10^{-6}$	$7,85 \cdot 10^{-6}$	1 : 3,1	$[Ga(OH)Cl_3]^-$
		6 н. HCl	$2,80 \cdot 10^{-6}$	$8,20 \cdot 10^{-6}$	1 : 2,9	$[Ga(OH)Cl_3]^-$
		7 н. HCl	$2,54 \cdot 10^{-6}$	$10,04 \cdot 10^{-6}$	1 : 4,1	$[GaCl_4]^-$
		8 н. HCl	$2,76 \cdot 10^{-6}$	$10,03 \cdot 10^{-6}$	1 : 3,7	$[GaCl_4]^-$

Приведенные в таблице данные говорят о том, что образование  $[GaCl_4]^-$  — аниона имеет место при кислотности водной фазы свыше 6 н соляной кислоте. При извлечении из менее кислой водной фазы (4,0—6,0 н HCl) галлий переходит в органическую фазу в виде гидроксокомплекса  $[Ga(OH)Cl_3]^-$  т. е. имеет место первая степень гидролиза.



Обращает на себя внимание и то обстоятельство, что степень извлечения указанного гидроксокомплекса находится в четкой зависимости от природы экстрагента, о чем говорят приведенные на рисунке кривые светопоглощения исследуемых экстрактов. Определение фактора извлече-

\* Предварительно было установлено, что в исследуемом интервале кислотности использованные органические растворители не экстрагируют соляную кислоту или ее простую соль с катионом реагента.

ния галлия (<sup>5</sup>) при использовании бинарной смеси бензол-дихлорэтан показало, что ионный ассоциат гидрохлорид-галлия с катионом основного красителя МЗ практически полностью извлекается из 6 н. по HCl водной фазы (кривая 1).

Подтвердить образование более гидролизированных анионов галлия не удалось, поскольку для этого пришлось бы провести экстракцию галлия при кислотности ниже 4 н. HCl, что ввиду низкой степени извлечения галлия не позволило бы сделать определенные выводы.

Сопоставление описанных результатов с ранее полученными для сурьмы (<sup>1-5</sup>) указывает на относительно меньшую склонность хлоргаллат-аниона к гидролизу. Образующийся гидрохлорид-анион галлия достаточно хорошо извлекается в органическую фазу в виде ионного ассоциата с катионом основного красителя.

Ереванский государственный университет  
и Институт неорганической химии  
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ քղաղից-անդամ Վ. Մ. ԹԱԻԱՆԱՆ, Ա. Ն. ՊՈՂՈՍՅԱՆ,

Հիմնային ներկանյութերով գալիումի էստրակցիայի էմպիրիական վրա քվանտիտատիվ և ակտիվացման մասին

Ուսումնասիրված է հիմնային ներկանյութի կատիոնի հետ (մեթիլ կանաչ, բրիլյանտ կանաչ) իոնական ասոցիատի ձևով օրգանական ֆազ լուծաճանվող գալիումի բլորիդային անիոնային կոմպլեքսի բաղադրությունը Ցույց է տրված, որ  $[GaCl_4]^-$  բաղադրություն ունեցող գալիումի անիոնային կոմպլեքսը լուծաճանվում է օրգանական լուծիչներով (բենզոլ, բենզոլ-դիքլորէթան) 7,0—8,0 ն. ըստ աղաթթվի ջրային ֆազից:

Թթվությունն իջեցնելիս իոնական ասոցիատ գոյացնելուն մասնակցում է  $[Ga(OH)Cl_3]^-$  հիդրօքսոկոմպլեքս անիոնը:

Նկ. 1, աղյուսակ 1, գրական անուն 6:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян, ДАН Арм. ССР, т. 53, № 4 (1971). <sup>2</sup> В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян, Арм. хим. ж., т. 26, № 2 (1973). <sup>3</sup> В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян и Л. А. Манучарян, Успехи аналитической химии, Изд. «Наука», М., с. 188—191, 1974. <sup>4</sup> В. М. Тараян и Ж. М. Арстамян, Арм. хим. ж., т. 27, № 7 (1974). <sup>5</sup> В. М. Тараян, Ж. М. Арстамян, Ученые записки ЕГУ, № 3, с. 88—93 (1974). <sup>6</sup> И. А. Блюм, Экстракционно-фотометрические методы анализа, стр. 34, М., 1970.

УДК 553.324

ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ

М. А. Сатнан, Л. П. Яшвили

О проявлении марганцевых руд в породах  
кремнисто-вулканогенной формации Севанского хребта

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 3/XII 1975)

Проявление марганцевых руд обнаружено в разрезе кремнисто-вулканогенной формации офиолитовой серии Севанского хребта, в верховье бассейна р. Саринар.

Характерной особенностью строения толщи является чередование горизонтов кремнистых пород (главным образом радиоляритов) и пород вулканогенных—спилитов, диабазов и в кровле иногда дацитов. Соотношение кремнистых и вулканогенных пород изменчиво вверх по разрезу. В целом мощности вулканитов наращиваются к верхней секции разреза, с которой и связаны концентрации марганца. Литологически они тяготеют к радиоляритовым горизонтам и размещены вблизи зоны тектонического контакта толщи с сенонскими терригенными и карбонатными отложениями. Суммарная мощность разреза формации достигает 800 м.

Вопросы возраста рудовмещающих пород остаются не окончательно решенными. Палеонтологически охарактеризованные верхнеконьякские отложения несогласно с разрывом налегают на породы кремнисто-вулканогенной формации (<sup>1</sup>), тем самым доказывається ее досенонский возраст. В верхней секции разреза формации вместе с тем обнаружены известняки с глоботрунканами, переслаивающиеся с радиоляритами, содержащими сеноман-туронский комплекс радиолярий. Основание формации не вскрыто. В приводораздельной части хребта контакт наиболее нижних ее горизонтов с гипербазитами Джил-Сатанахачского массива имеет тектонический характер.

Перед тем, как охарактеризовать проявление марганца, необходимо отметить заметную зараженность пород марганцем почти по всему разрезу формации. Зачаточные рудные концентрации выражены в виде довольно выдержанных горизонтов марганцевистых радиоляритов. В обнажениях они резко обозначаются среди красных радиоляритов черным цветом и металлическим блеском на выветрелой поверхности. Радиоляриты обычно обнаруживают ритмичное строение: основание нередко слагают пачки мелкозернистых известняков и известковых радиоляритов (радиолярии в карбонатном цементе), выше их сменяют тонко-

слоистые глинистые радиоляриты, ритмично чередующиеся с кремнистыми радиоляритами, далее следуют кремнисто-железистые и, наконец,—кремнисто-железо-марганцевистые радиоляриты. Их суммарная мощность достигает 20—40 м. Мощность марганцевистых радиоляритов (содержание  $MnO$ —3—10%) колеблется от 3-х до 10—15 м. Марганец пигментирует микрокристаллическую кварцевую массу породы. Там же на поверхности трещин отмечаются пленки и корки, сложенные окисными и гидроокисными соединениями марганца.

Проявление марганцевых руд расположено в 300 м севернее зоны надвига, по которому досенонские вулканиты и радиоляриты приведены в тектонический контакт с сенонской граувакковой и известняковой толщами.

Марганцевое оруденение морфологически представлено: а) линзообразным рудным телом мощностью от 30—40 см, в раздувах до 2,5—3 м, прослеженным на 60 м и б) зоной брекчированных радиоляритов сцементированных марганцевой рудой, прослеживаемой на 10—15 м, при мощности 1,2—1,5 м. Азимут падения рудных тел согласен с азимутом падения вмещающих их пород и составляет СВ  $25^\circ < 70^\circ$ — $85^\circ$ .

Рудовмещающие породы представляют собой сургучно-красные, высоко-кремнистые тонкослоистые радиоляриты и кремнистые туффиты.

Мелкие прерывистые скопления марганцевых руд прослеживаются далее на СЗ по левому борту правого притока р. Саринар на протяжении до 1 км и обнаружены в 150 и 500 метрах выше по главному ущелью р. Саринар.

Марганцевые руды макроскопически представляют собой темно-серый до черного цвета тонкозернистый агрегат с полуметаллическим блеском. Они сложены первично-окисными соединениями марганца, которые представлены преимущественно браунитом, гаусманитом и пиролюзитом. В незначительном количестве присутствует гематит. Нерудные минералы представлены кварцем и марганцевыми силикатами.

Браунит образует гнезда, прожилки, линзочки. Последние переслаиваются с радиоляритами. Под микроскопом браунит обнаруживает короткопризматические и клиновидные формы кристаллов. Последние часто слагают радиально-лучистые агрегаты. Нередко наблюдается замещение браунитом скелетов радиолярий.

Гаусманит развивается в тесной ассоциации с браунитом, но встречается в гораздо меньших количествах. Под микроскопом обнаруживает аллотриоморфное строение зерен.

Пиролюзит на Саринарском рудопроявлении развивается в зоне окисления и образуется за счет первично-окисных соединений марганца. Образует тонкозернистые агрегаты.

Гематит развивается в прожилках среди кремней, пропитанных гидроокислами железа, а также среди массивных браунитовых и гаусманитовых скоплений. Образует чешуйки, размером до 1—2 мм. Встречается в незначительном количестве.

По данным химических анализов в основных рудных телах содер-

жание металлического марганца для массивных богатых руд составляет 40,98%, а для брекчиевидных руд (из богатых участков)—28,90%.

По данным полуколичественных спектральных анализов руды Саринарского проявления содержат следующие элементы в %: Mn, Si—10; Al—3,2; Na—1,8; K, Ca—0,75; Ba, Mg—0,56; Ti—0,32; Sr—0,13; Fe—0,1; As, Ni—0,013; V—0,01; Cu, Co—0,0056; Li—0,0013; Cr, Zr, Mo, Yt—0,001.

Таким образом, исходя из вышесказанного, можно заключить, что: 1) руды Саринарского проявления парагенетически тесно связаны с кремнисто-вулканогенными образованиями офиолитового комплекса;

2) поступление соединений марганца происходило на фоне накопления кремнистых осадков и судя по условиям залегания и вещественному составу носило эксгальционно-осадочный характер, с последующим диагенетическим перераспределением рудного вещества;

3) как зачаточные рудные, так и наиболее значительные концентрации марганца размещены главным образом согласно с вмещающими породами: радиоляритами и прочими силицитами. Проявление марганцевых руд тяготеет к конседиментационно брекчированным силицитам, в секции разреза кремнисто-вулканогенной формации, наиболее насыщенной вулканитами;

4) мелкие примазки и гнезда марганца, обнаруженные в кремнистых породах на западном продолжении Севанских офиолитов, на Базумском хребте и в бассейне р. Ахурян, позволяют говорить о региональной зараженности марганцем пород кремнисто-вулканогенной формации Амасийско-Севанского офиолитового пояса;

5) обнаруженное проявление марганцевых руд в формационном отношении отличается от ранее известных проявлений марганцевых руд в верхнемеловых мелководных вулканокластических накоплениях Сомхето-Карабахской зоны и Кафано-Горисской подзоны Малого Кавказа (2) и заслуживает дальнейшего изучения с целью выявления перспектив.

Институт геологических наук  
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ՍԱԹՅԱՆ, Լ. Պ. ՅԱՇՎԻԼԻ

Սևանի լեռնաշղթայի կալծեառ-հրաբխածին ֆորմացիայի ապարների և մանգանային հանքանյութերի երևակման մասին

Ի հայտ է բերված Ամասիա-Սևանյան օֆիլիտային գոտու կալծրար-հրաբխած ֆորմացիայի ապարների մանգանաբերությունը: Մանգանի կուտակումները հարուստ են ռադիոլարիտներին, ունեն շերտավորված բնույթ և ներկայացված են կրահալացիոն-նստվածքային ծաղման մանգանի թթվածնային միացություններով, հանքանյութերի հետագա դիագենետիկ վերափոփոխմամբ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ՎՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 В. П. Рендиртен, Стратиграфия меловых отложений Малого Кавказа, в кн.: «Региональная стратиграфия СССР», т. 6, М., изд. АН СССР, 1959. 2 Л. П. Яшвил, ДАН Арм. ССР, т. XL, № 4 (1965).

УДК 663.14 : 031.3

МИКРОБИОЛОГИЯ

Е. Н. Макарова, С. П. Паликян

**Влияние этаноламина на содержание различных форм  
фосфора у дрожжей рода *Candida***

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. Г. Африкян 20/X 1975)

Микроорганизмы в процессе жизнедеятельности синтезируют значительное количество фосфорсодержащих веществ. Они представлены, в основном, двумя группами полимерных соединений: конденсированные неорганические фосфаты и фосфорсодержащие вещества органической природы. Полимеры являются макроэнергическими соединениями и при деполимеризации выделяют энергию, необходимую для биохимических реакций, происходящих в процессе роста и развития микроорганизмов (1). Большая биологическая роль принадлежит фосфолипидам, являющимся одним из важных компонентов дрожжевой оболочки, и участвующим в процессе ферментного синтеза (2). В результате немногих исследований установлена зависимость содержания фосфорсодержащих соединений, в том числе фосфолипидных фракций, от скорости роста и энергии брожения у дрожжей (3-6), а также от наличия в среде некоторых стимуляторов, в частности, линолевой кислоты (7). Большой интерес представляют данные о фосфатидилэтаноламине, как активном компоненте неочищенного липидного экстракта из клеточных оболочек бактерий (8). Однако влияние этаноламина, производными которого чаще всего являются амины в фосфолипидах, на содержание последних в дрожжах совершенно не изучалось и данных по этому вопросу в доступной нам литературе нет. Тем не менее известно о влиянии этаноламина на содержание фосфолипидных фракций в растительных и животных организмах (9).

В связи с исключительно высокой обменяемостью и подвижностью этаноламина, а также участием его в синтезе этаноламинсодержащих фосфатидов в растительных и животных организмах, нас заинтересовал вопрос о возможности сдвигов в содержании фосфорных фракций и, особенно, фосфолипидов, в дрожжах рода *Candida*, вызываемых этаноламином, тем более, что ранее нами установлено стимулирующее действие последнего на рост некоторых представителей этого рода (10).

Объектом исследования служили музейные дрожжевые культуры: *Candida chevalieri* ВКМ У-37 и *Candida utilis* ВКМ У-74.

Выращивание культур и получение биомассы проводили способом, описанным ранее (10-11). В абсолютно сухой биомассе дрожжей, полученной, как с добавкой этаноламина (ЭА), так и без нее, определяли следующие фракции фосфорных соединений: общий фосфор—после сжигания с концентрированной серной кислотой и последующей нейтрализацией аммиачной водой; кислоторастворимую фракцию получали экстрагированием дрожжей 5%-ной трихлоруксусной кислотой, в этой фракции определяли и минеральный фосфор (без сжигания); кислотонерастворимую фракцию высчитывали по разнице общего и кислоторастворимого фосфора. Фосфолипиды определяли путем ступенчатого экстрагирования: 95%-ным этанолом, смесью хлороформ-метанол (2:1) и хлороформ-метанол—HCl (124:65:1), по методу Гетца (13).

Для сравнительной оценки содержания отдельных фракций, количество фосфора каждой из них было отнесено к общему содержанию фосфора в биомассе дрожжей.

Результаты исследований приведены в таблице. Они свидетельствуют о том, что в дрожжах *C. chevalieri* и *C. utilis*, выросших в присутствии ЭА заметно увеличивается количество общего фосфора, при этом уменьшается количество кислоторастворимой фракции фосфора, в которую, как известно, входят, в основном, ортофосфат, лабильный фосфор, стабильный фосфор, полифосфаты (14). Фосфор кислотонерастворимой фракции под действием ЭА увеличивается по сравнению с контрольным вариантом у *C. chevalieri* и *C. utilis* на 7,5 и 4,11% соответственно, тогда как неорганический фосфор в этих условиях уменьшается и составляет 15,7% у *C. chevalieri* и 16,6% у *C. utilis* от общего фосфора, в то

Таблица

Влияние этаноламина на содержание фосфора в некоторых фракциях биомассы культур *C. chevalieri* и *C. utilis*

Показатели	Основная среда		Основная среда + ЭА	
	мг%	% от общего фосфора	мг%	% от общего фосфора
<i>Candida chevalieri</i>				
Общий фосфор	2.74		2.86	
Кислоторастворимый фосфор	1.27	46.3	1.09	37.9
Кислотонерастворимый фосфор	1.47	53.7	1.78	62.1
Неорганический фосфор	0.58	21.1	0.45	15.7
Фосфор липондной фракции	0.21	9.1	0.35	12.3
<i>Candida utilis</i>				
Общий фосфор	2.81		3.04	
Кислоторастворимый фосфор	1.32	46.8	1.09	36.02
Кислотонерастворимый фосфор	1.49	53.2	1.94	63.98
Неорганический фосфор	0.62	22.1	0.51	16.6
Фосфор липондной фракции	0.27	9.6	0.36	11.9

время как его содержание в контрольных вариантах достигает 21,1 и 22,1% соответственно. Эти данные дают возможность предположить, что под влиянием этаноламина усиливается синтез органического фосфора из неорганического.

Наибольший интерес представляют данные о содержании фосфора в липондной фракции в связи с тем, что этаноламин входит в состав этаноламинфосфатидов. Как и ожидалось ЭА стимулирует накопление фосфатов липондной фракции. Его количество увеличивается по сравнению с контролем на 57% у *C. chevalieri* и на 34% у *C. utilis*.

При сравнении данных по содержанию фосфора в различных фракциях у двух культур оказывается, что в этом отношении они не равноценны. *C. utilis* отличается несколько повышенным содержанием всех форм фосфора. Что же касается сдвига в количестве фосфорных соединений, вызванных ЭА, то они более ярко выражены у *C. chevalieri*, но протекают идентично у обеих культур.

Таким образом, ЭА оказывает существенное влияние на содержание фосфорных соединений у дрожжевых культур *C. chevalieri* и *C. utilis*. Особенно ярко оно проявляется в увеличении содержания фосфолипидов. Незначительное увеличение происходит и в содержании общего фосфора. Количество кислоторастворимого и неорганического фосфора под влиянием ЭА уменьшается соответственно на 14,3 и 16,9%.

Очевидно, что действие ЭА, повышающего содержания фосфорных фракций и особенно фракции фосфолипидов осуществляется не только непосредственным включением его в фосфолипиды, но и опосредованно—путем индуцированных изменений, о чем свидетельствует изменение в других изучаемых нами фосфорных соединениях.

Երևանский государственный педагогический институт  
им. Х. Абовяна

Ե. Ն. ՄԱԿԱՐՈՎԱ, Ս. Փ. ՓԱՆԻՎՅԱՆ

### Էթանոլամինի ազդեցությունը *Candida* ցեղի շաքարասնկերում ֆոսֆորի տարբեր ձևերի պարունակության վրա

Աշխատանքը նվիրված է *Candida* ցեղի շաքարասնկերի ֆոսֆորային ֆրակցիայի պարունակության հնարավոր փոփոխությունների ուսումնասիրմանը, որոնք առաջանում են էթանոլամինի ազդեցությամբ:

Մեր կողմից հայտնաբերված է վերջինիս խթանիչ ազդեցությունն այդ ցեղի շաքարասնկերի որոշ ներկայացուցիչների աճի վրա:

*C. chevalieri*-ի և *C. utilis*-ի վրա կատարված հետազոտությունների արդյունքները վկայում են, որ էթանոլամինն զգալի չափով ազդում է նշված կուլտուրաների ֆոսֆորային միացությունների պարունակության վրա: Հատկապես ցայտուն է ֆոսֆոլիպիդների քանակի ավելացումը:

Աննշան շափով է ավելանում նաև ընդհանուր ֆոսֆորի բանակրի Թիվայուծելի անօրգանական ֆոսֆորի բանակությունն էթանոլամինի ազդեցության հետևանքով պակասում է համապատասխանաբար 14,3 և 16,9%-ով:

Հալանաբար, էթանոլամինի ազդեցությամբ ֆոսֆորային և, հատկապես, ֆոսֆորիպիդների ֆրակցիայի պարունակության ավելացումը պայմանավորված է ոչ միայն էթանոլամինի ներգրավմամբ ֆոսֆորիպիդների ֆրակցիայի մեջ, այլև ինդուկցված փոփոխություններով: Այդ մասին են վկայում ֆոսֆորական այլ միացությունների փոփոխությունները:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> И. С. Кулаев, А. Н. Белозерский, Изв. АН СССР, сер. биол. 4, 502, (1962).  
<sup>2</sup> L. Rothfeld, M. Takeshita, M. Pearlman, R. Horne, Federation proceedings, 25, 5, 1495 (1966). <sup>3</sup> С. А. Коковалов, Р. И. Гребешова, „Микробиология“, 28, 6, 838 (1959).  
<sup>4</sup> P. Dawson, B. Graig, Canadian Journal of microbiology, 12, 4, 775 (1966).  
<sup>5</sup> М. Н. Громова, Н. П. Калунянц, Микробиол. синтез, 1, 14 (1968). <sup>6</sup> А. Ф. Хохленко, Прикл. биохим. и микробиол., II, 1, 39 (1975). <sup>7</sup> W. Nordhelm, Naturwissenschaften 53, 19, 503 (1966). <sup>8</sup> L. Rothfeld, M. Pearlman, J. Biol. chem. 241, 1386, (1966)  
<sup>9</sup> Л. В. Давтян, Тезисы зонального симпозиума «Биология этаноламина и его применение в народном хозяйстве», Ереван, с. 40, 1974. <sup>10</sup> Г. В. Барсегян, С. П. Паликян, Е. Н. Макарова, «Биологическ. журнал Армении», 9, 112 (1975). <sup>11</sup> С. П. Паликян, Г. В. Барсегян, Сборник научных трудов аспирантов Арм. педагогического института им. Х. Абовяна, 6, 3, 33 (1974). <sup>12</sup> И. С. Кулаев, А. Н. Белозерский, И. С. Крицкий, М. А. Кокурина, ДАН СССР, 3, 667 (1966). <sup>13</sup> G. S. Getz, Biochim. Biophys. acta. 218, 441 (1970). <sup>14</sup> Г. Н. Зайцева, А. Н. Белозерский, Л. П. Новожилова, «Биохимия», 24, 6, 1054—1064 (1959).

УДК 577.17

БИОХИМИЯ

А. С. Киракосова, С. П. Манджикян,  
член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Галоян

### К механизму нейроэндокринной регуляции активности кининовой системы плазмы крови

(Представлено 7/VII 1975)

В последние годы показана важная роль кининов, как медиаторов различных физиологических и патологических процессов (<sup>1-3</sup>). Однако тонкие механизмы взаимодействия многочисленных компонентов кининовой системы, связь их с другими биологически активными соединениями и гормонами изучены еще недостаточно.

Ранее установлено, что коронарорасширяющие нейrogормоны, выделенные одним из нас (<sup>4</sup>) из гипоталамо-нейрогипофизарной системы крупного рогатого скота, приводят к изменению активности компонентов кининовой системы (<sup>5</sup>).

Была показана важная роль холинореактивных субстанций мозга в образовании и выделении нейросекреторных гормонов гипоталамо-нейрогипофизарной системы (<sup>6</sup>).

По нашим данным синтетический аналог преднизолона—дексаметазон реализует свой эффект через холинореактивные системы мозга (<sup>7</sup>).

По некоторым данным кортизон и в некоторой степени дезоксикортикостерон снижают образование кининов в плазме (<sup>8,9</sup>).

Исходя из всего вышесказанного, мы попытались выяснить могут ли холиномиметики, которые провоцируют выброс гипоталамических факторов в кровь, а также дексаметазон оказывать влияние на активность кининогена плазмы крови. Важно было изучить влияние одного из гипоталамических рилизинг гормонов—тиреотропни-рилизинг гормона (TRH) на этот компонент кининовой системы.

Кининоген определяли методом Дница (<sup>10</sup>), модифицированным Пасхиной и Егоровой (<sup>11</sup>).

Брадикинии определяли по сокращению изолированного рога матки крысы (<sup>12</sup>). Результаты выражали в микрограммах брадикинина образованного из 1 мл плазмы крови. Способность брадикинина сокращать изолированный рог матки крысы позволяет определять его в концентрациях  $3 \cdot 10^{-11}$  —  $1 \cdot 10^{-10}$  г/мл.

Девственим крысам весом 90—120 г за 24 часа до опыта внутримышечно вводили 0,1%-ный раствор диэтилстильбестрола из расчета 0,1 мл на 100 г веса.

Крыс забивали, извлекали матку и отрезали оба рога, помещая в раствор Желона. Рог матки подвешивали в термостатированную баню с раствором Желона. Сокращение матки регистрировали с помощью киногографа. Убедившись, что рог матки не сокращается спонтанно, приступали к определению пороговой дозы (ПД) брадикинина, т. е. того минимального количества синтетического брадикинина, на введение которого матка отвечает сокращением. Величину ПД опытной пробы определяли путем последовательного титрования серии разбавленных растворов. Зная пороговые дозы исследуемого раствора и стандартного раствора синтетического брадикинина, можно рассчитать содержание брадикинина в исследуемой пробе.

Таблица

Содержание кининогена в (мкг брадикинина в мл) сыворотке контрольных крыс и после введения холиномиметиков, дексаметазона и тиреотропин-рилизинг гормона

Контроль	К и н и н о г е н (и мкг брадикинина в мл)			
	введенные вещества			
	прозерин	ареколин	дексаметазон	тиреотропин-рилизинг гормон
1,9 ± 0,23 (15)	1,7 ± 0,10 (8) P > 0,2	2,05 ± 0,32 (8) P > 0,5	1,6 ± 0,13 (9) P > 0,2	1,1 ± 0,13 (8) P < 0,01

В скобках указано число случаев.

Холиномиметики—ареколин и прозерин вводили внутримышечно из расчета 10—20 мкг на 1 кг веса крысы, TRH—1 мкг на целое животное. Животных забивали через 1/2 часа после введения препаратов. Дексаметазон вводили внутривенно из расчета 25 мкг на 100 г веса животного (13). Крыс забивали через 4 часа после введения дексаметазона.

Контролем служили животные, которым вместо препарата вводили физиологический раствор.

Анализ полученных данных показал, что средняя величина кининогена, найденная нами, равна 1,9 мкг брадикинина на 1 мл сыворотки, что согласуется с величинами, приведенными в литературе (14—16).

Ареколин, прозерин и дексаметазон не изменяют уровня кининогена в сыворотке (табл. 1). TRH уменьшает количество кининогена в сыворотке с 1,9 ± 0,23 мкг брадикинина на 1 мл сыворотки до 1,1 ± 0,13 (табл.). По величине убывания кининогена можно судить о степени активации кининовой системы. Поскольку кининоген является субстратом для образования брадикинина, то, следовательно, его уменьшение свидетельствует о превращении его в свободный кинин.

Результаты наших исследований свидетельствуют о том, что холино-миметики и дексаметазон не меняют активность кининогена плазмы крови. Поскольку, как мы указывали, имеются литературные данные о влиянии кортизона и дезоксикортикостерона на кининовую систему, мы ожидали, что дексаметазон также окажется активным в наших опытах. Отсутствие эффекта дексаметазона на кининоген объясняется предположительно неодинаковым действием веществ этого ряда на активность компонентов кининовой системы. Тот факт, что TRH заметно активизирует кининоген, указывает на то, что TRH, вероятно и другие рилизинг и ингибирующие гормоны гипоталамуса имеют отношение к регуляции кининовой системы крови.

Можно предположить, что продукты, которые образуются под действием TRH оказывают воздействие на образование кининов в плазме, хотя по-видимому, возможно и прямое воздействие пептидов гипоталамуса на образование кининов в плазме.

Институт биохимии

Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԿԻՐԱԿՈՍՈՎԱՆ, Ս. Պ. ՄԱՆՋՐԻՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ  
Ա. Ա. ԳԱԼՈՅԱՆ

Արյան պլազմայի կինինային սիստեմի ակտիվության նեյրոէնդոկրինային կարգավորման մեխանիզմը

Առնետների վրա կատարված փորձերը ցույց են տվել, որ նրանց խորինոմիմետիկներ (արեկոլին և պրոզերին), ինչպես նաև պրեդնիզոլոնի սինթետիկ անալոգ-դեքսամետազոնի ներարկումը չի առաջացնում արյան պլազմայի կինինային սիստեմի ակտիվության փոփոխություն: Տիրիոտրոպինոլիդինգ հորմոնը նկատելիորեն պակասեցնում է կինինոգենի քանակը պլազմայում: Նրա նվազման շափից կարելի է դատել կինինային սիստեմի ակտիվացման շափի մասին:

Տվյալները հաստատում են արյան պլազմայի կինինային սիստեմի կարգավորման հավանականությունը, որիցինգ հորմոնների միջոցով:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ի Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> M. Schachter, *Physiolog. reviews*, 45, 509 (1969) <sup>2</sup> Т. С. Пасхина, В кн. Химические факторы регуляции активности и биосинтеза ферментов. М., 1969. <sup>3</sup> О. А. Гомазков, «Кардиология», 7, 130 (1973). <sup>4</sup> А. А. Галоян, Вопросы биохимии мозга, Изд. АН Арм. ССР, VIII, 107 (1973). <sup>5</sup> А. С. Киракосова, С. П. Манджикян, А. А. Галоян, ДАН Арм. ССР, т. LIX, №5 (1974). <sup>6</sup> А. А. Галоян, Некоторые проблемы биохимии гипоталамической регуляции, Изд. Айастан, Ереван, 1965. <sup>7</sup> Р. О. Карпетян, Т. Х. Марукян и др., «Биолог. ж. Армении», т. 25, 32 (1972). <sup>8</sup> M. J. Cline, K. L. Melmon, *Science*, 153, 3740, 1135 (1966). <sup>9</sup> И. А. Федосеева, М. В. Беляков, «Педиатрия», 9, 19 (1971). <sup>10</sup> C. R. Dintz, J. F. Carvalho, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 104, 77 (1963). <sup>11</sup> Т. С. Пасхина, Г. А. Яровая и др., Вопросы мед. химии, 16, 152 (1970). <sup>12</sup> Т. С. Пасхина, О. М. Гуликова и др., В кн.: Современные методы биохимии, М., с. 208 (1968). <sup>13</sup> F. Fraschini, G. Mongelli et al., *Endocrinology*, 75, 765 (1964). <sup>14</sup> О. А. Гомазков, А. В. Большикова и др., «Кардиология», 4, 22 (1972). <sup>15</sup> Т. С. Пасхина, В. М. Гуртовенко, *Вопр. мед. химии*, 17, 7 (1972). <sup>16</sup> М. С. Суровикина, *Успехи соврем. биол.*, 68, в. I (4), 35 (1969).

