

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Յ Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

LXII, № 1

1976

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ Ա ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. Բարձրագույն), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ՈւՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ՐՈՒՆՅԱՔՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԼԻՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱՔՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Ր. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд техн наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԻԼԹԵՄԻՍՏԻԿԱ

Տ. Ն. Հաբուրյունյան—Մասնակի առանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների սխառեմի սեփական արժեքների թվի ասիմպտոտիկ բաշխումը 3

Ֆ. Ա. Շամոյան—Ներդրման թևորեմ n —հարմոնիկ ֆունկցիաների տարածություններում և մի քանի կիրառություններ 10

Ս. Ք. Հաբուրյունյան— $n+S$ պարամետրերից կախված n —պատիկ ինտեգրալների երկրաչափություն 15

ԿԻՐԱԹԻԼԿԱՆ, ՄԻԼԹԵՄԻՍՏԻԿԱ

Ա. Հ. Ազատյան—Տեղափոխությունների, զուգորդությունների և սեղաբաշխությունների լրիվ լազմությունների թվարկման ալգորիթմների մասին 23

Ա. Վ. Պետրոսյան, Շ. Ծ. Խոզոյան—Սխեմաների հուսալիության բարձրացման մի տրամաբանական մեթոդի մասին 29

ԱԹԻԼՉԳԻԼԿԱՆՈՒԹՅԱՆ, ՏԵՄՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Ս. Տոնոյան, Հ. Ֆ. Մինասյան—Ուղղաձիգ շերտավոր երկարության նեղքով թույացված կիսահարթության համաչափ ճնշումը երկու միատեսակ կոշտ դրոշմներով 35

ՄԻԿՐՈՐԻՈԼՈԳԻԱ

Ա. Ղ. Նալբանդյան, Է. Ա. Հովսեփյան, Մ. Վ. Հովսեփյան, Մ. Դ. Ստեփանյան—Պայարաբակտերիաների ածխածնային սննդառության յուրահասակության մասին 43

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Ա. Ա. Սիմոնյան, Կ. Ա. Կևորգյան, Ի. Ա. Ստեփանյան, Է. Հ. Սսկանյան—Մի քանի ֆերմենտների ակտիվության համեմատական լսութագրությունը հավի սրտի միտոքոնդրիաներում օնտոգենեզում 46

Կ. Վ. Ապրիկյան, Ժ. Ա. Պարոնյան, Գ. Հ. Մկրտչյան, Է. Կ. Աղունց, Ս. Ս. Մուսաելյան—Սպիտակ առնետների ուղեղի կոպիտ միտոքոնդրիալ ֆունկցիայի ենթաֆրակցիաների սպիտակուցների տմիդ խմբերի քանակական փոխհարաբերությունը 50

Ի. Բ. Բաղալյան, Ա. Ա. Սիմոնյան, Ա. Պ. Հակոբյան—Էներգետիկ փոխանակության մի քանի տեղաշարժերը հավերի լյարդում օնտոգենեզում 54

ԱԿՐՈՔԻՄԻԱ

Ս. Ա. Մաբուրյան—Ֆոսֆորի դերը խաղողի վազի ջրսաղիմացկունության հարցում 59

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

- Т. И. Арутюнян*—Асимптотическое распределение числа собственных значений системы дифференциальных уравнений в частных производных 3
- Ф. А. Шамоян*—Теорема вложения в пространствах n -гармонических функций и некоторые приложения. 10
- С. Х. Арутюнян*—Геометрия n -кратных интегралов, зависящих от $n+1$ параметров 15

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- А. А. Азатян*—Об алгоритмах для перечисления элементов полных множеств: n -перестановок с повторениями, сочетаний из n элементов по m , размещений из n элементов по m 23
- А. В. Петросян, Ш. Е. Бозоян*—Об одном логическом методе повышения надежности схем 29

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- В. С. Тоноян, А. Ф. Минасян*—О симметричном сдавливании двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость с вертикальным конечным разрезом. 36

МИКРОБИОЛОГИЯ

- А. Дз. Налбандян, Э. А. Овсепян, М. В. Овсепян, М. Д. Степанян*—О специфике углеродного питания клубеньковых бактерий 43

БИОХИМИЯ

- А. А. Симонян, Г. А. Геворкян, Р. А. Степанян, Л. О. Воскинян*—Сравнительная характеристика активности некоторых ферментов в митохондриях сердца кур в онтогенезе 46
- Г. В. Априкян, Ж. А. Паронян, Г. А. Мкртчян, Э. Г. Адуни, С. С. Мусеелян*—Количественное соотношение амидных групп белков субфракций грубой митохондриальной фракции головного мозга крыс 50
- Р. Б. Бадалян, А. А. Симонян, А. П. Акопян*—Некоторые сдвиги в энергетическом метаболизме в печени кур в онтогенезе 54

АГРОХИМИЯ

- С. А. Марутян*—К вопросу о роли фосфора в морозостойчивости виноградной лозы 59

C O N T E N T S

	p
MATHEMATICS	
<i>T. N. Harutyounian</i> —The asymptotic behavior of the number of proper values of the system of partial differential equations	3
<i>F. A. Shamoyan</i> —The embedding theorem in space of n -harmonic functions and some applications	10
<i>S. K. Harutyounian</i> —The geometry of the n -multiple Integrals, depending on $n+s$ parameters	15
APPLIED MATHEMATICS	
<i>A. A. Azatyan</i> —On algorithms for the enumeration of elements of whole sets such as n -permutations with repetitions, combinations from n elements with m arrangements from n elements with m	23
<i>A. V. Petrossian, Sh. E. Bozoyan</i> —On a logical method for increasing the reliability of schemata	29
THEORY OF ELASTICITY	
<i>V. S. Tonoyan, H. F. Minassian</i> —About symmetrical pressure of two rigid equal punches in the elastic semi-infinite plane with a vertical finite crack	36
MICROBIOLOGY	
<i>A. D. Nalbantyan, E. A. Hovsepian, M. V. Hovsepian and M. D. Stepanian</i> —On the specificity of carbon nutrition of rhizobia	43
BIOCHEMISTRY	
<i>A. A. Simonian, G. A. Gevorkian, R. A. Stepanian, L. H. Voskanian</i> —Comparative characteristics of the activity of some enzymes in heart mitochondria of hen in ontogenests	46
<i>G. V. Aprikian, J. A. Peronlan, G. H. Mkrtichian, E. G. Adunts, S. S. Musattlan</i> —The comparative levels of protein amide nitrogen in the subfractions of the rat brain crude mitochondrial fraction	50
<i>R. B. Badalian, A. A. Simonyan, A. P. Akopian</i> —Some change in the energetic metabolism of hen liver in ontogenesis	54
AGROCHEMISTRY	
<i>S. A. Marutyun</i> —On the role of phosphorus in the frost-resistance of vines	59

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 00109, Подписано к печати 31.III. 1976 г. Тираж 535. Изд. 4388. Заказ 27
 Формат бумаги 70×108^{1/16}. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2
 Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,41.

Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24.
 Эчмиадзинская типография Издательства АН Армянской ССР

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

Т. И. Арутюнян

Асимптотическое распределение числа собственных значений системы дифференциальных уравнений в частных производных

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 3/XI 1975)

Пусть L — самосопряженное расширение в пространстве $H = L^2(R_3; C_4)$ симметрического дифференциального выражения, заданного равенством

$$Lu = \left\{ \sum_{j=1}^3 a_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + Q(x) \right\} u = L_1 u + Q(x)u \quad (1)$$

в пространстве $H_0 = C_0^\infty(R_3, C_4)$. Здесь мы обозначили

$$L_1 = \sum_{j=1}^3 a_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad Q(x) = p(x)a_4 + q(x)a_5, \quad u = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \\ u_4(x) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$$

$p(x)$ и $q(x)$ — вещественнозначные функции, a_1, \dots, a_5 — матрицы Дирака ⁽¹⁾, которые, как известно, удовлетворяют условиям (a_j — матрицы 4-го порядка)

- а) $a_i a_j = -a_j a_i, \quad i \neq j$ (антикоммутируемость)
- б) $a_j^2 = E, \quad j = 1, \dots, 5; E$ — единичная матрица
- с) $a_j^* = a_j$ (эрмитовость).

Уравнение $Lu = \lambda u$ в релятивистской квантовой механике называется системой Дирака и описывает движение частицы в поле с потенциалом $Q(x)$. Вид потенциала $Q(x) = p(x)a_4 + q(x)a_5$ диктуется требованием самосопряженности и антикоммутируемости матрицы $Q(x)$ с матрицами a_1, a_2, a_3 , а это требование исходит из связи между импульсом и энергией в релятивистской квантовой механике (см. ⁽¹⁾). Заметим, что выбранный нами вид $Q(x)$ есть наиболее общий вид самосопряженной матрицы, которая антикоммутирует с a_1, a_2 и a_3 (проверяется непосредственно).

Цель работы — указать достаточные условия дискретности спектра оператора L и найти асимптотику числа собственных значений $N(\lambda)$ (см. ниже) при $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Главным нашим орудием в исследовании обеих задач будет матрица-функция Грина оператора L .

Матрицу-функцию Грина $G(x, \xi, \lambda)$ оператора L будем искать методом „параметрикс“, т. е. сначала найдем явный вид функции Грина $g_0(x, \xi, \lambda)$ оператора L_0 с „замороженными“ коэффициентами (см. ниже (3)), а затем докажем, что решение интегрального уравнения

$$G(x, \xi, \lambda) = g_0(x, \xi, \lambda) + \int_{R_3} G(x, \eta, \lambda) |Q(\xi) - Q(\eta)| g_0(\eta, \xi, \lambda) d\eta \quad (2)$$

есть функция Грина оператора L .

Итак, пусть $g_0(x, \xi, \lambda)$ есть функция Грина оператора

$$L_0 = L_1 + Q(\xi) = \sum_{j=1}^3 a_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + Q(\xi), \quad \xi \in R_3. \quad (3)$$

По определению $g_0(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет условиям

$$a) (L_0 - iE)g_0(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi); \quad (4)$$

б) элементы $g_{ij}(x, \xi, \lambda)$, ($i, j = 1, 2, 3, 4$) матрицы $g_0(x, \xi, \lambda)$ принадлежат $L^2(R_3)$ по x .

Используя преобразование Фурье, из уравнения (4) получим явный вид матрицы-функции $g_0(x, \xi, \lambda)$

$$g_0(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{i(x(\xi)|x - \xi| + 1)}{|x - \xi|^2} \sum_{j=1}^3 a_j(x_j - \xi_j) + Q(\xi) + \lambda E \right\} \frac{e^{-x(\xi)|x - \xi|}}{|x - \xi|}, \quad (5)$$

где $x(\xi) = x(\xi, \lambda) = \{p^2(\xi) + q^2(\xi) - \lambda^2\}^{1/2}$.

В дальнейшем нам понадобятся оценки норм Гильберта—Шмидта матрицы $g_0(x, \xi, \lambda)$ и ее производных по λ при $\lambda = i\mu$. Используя вид (5), получаем оценки

$$\left. \begin{aligned} \|g_0(x, \xi, \lambda)\|_{\lambda=i\mu} &\leq \frac{C e^{-(1-\delta)x(\xi)|x-\xi|}}{|x-\xi|^2}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda=i\mu} \leq \frac{C e^{-B_1 x(\xi)|x-\xi|}}{|x-\xi|} \\ \left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda=i\mu} &\leq \frac{C e^{-B_n x(\xi)|x-\xi|}}{|x-\xi| x^{n-1}(\xi)}, \quad \text{при } n \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где δ — произвольно малое положительное число, $0 < B_n < 1$, $C > 0$ (заметим, что в течение всей работы мы одним и тем же C будем обозначать разные постоянные). Кроме этого нам понадобятся также оценки (при $\lambda = i\mu$) ядер

$$K_n(x, \xi, \lambda) = |Q(\xi) - Q(x)| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda).$$

Наложим на $Q(x) = p(x)\alpha_1 + q(x)\alpha_2$ следующие условия

$$1) \| |Q(\xi) - Q(x)| Q^{-a}(\xi) \| \leq A |x - \xi|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, \quad \text{где } A > 0, \quad 0 < a < 2 \quad (7)$$

$$2) \quad \| Q(\xi) \| \leq B \| Q(x) \|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, \quad B > 0 \quad (8)$$

$$3) \quad \| Q(x) \| \leq K \exp \{ c_0 |x - \xi| \sqrt{p^2(\xi) + q^2(\xi)} \}, \quad \text{при } |x - \xi| \geq 1, \quad K > 0, \quad (9) \\ 0 < c_0 < 1.$$

Оценивая при этих условиях ядра $K_n(x, \xi, \lambda)$, получаем оценки

$$\left. \begin{aligned} \| K_0(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} &\leq \frac{C e^{-b_0 \alpha(\xi) |x - \xi|}}{x^{1-a(\xi)} |x - \xi|^2}, \quad 0 < b_0 < 1, \quad |x - \xi| \leq 1 \\ \| K_1(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} &\leq \frac{C e^{-b_1 \alpha(\xi) |x - \xi|}}{x^{1-a(\xi)} |x - \xi|}, \quad 0 < b_1 < 1, \quad |x - \xi| \leq 1 \\ \| K_n(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} &\leq \frac{C e^{-b_n \alpha(\xi) |x - \xi|}}{x^{n-1-a(\xi)}}, \quad 0 < b_n < 1, \quad |x - \xi| \leq 1, \quad n \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\| K_n(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} \leq \frac{C e^{-b_n \alpha(\xi) |x - \xi|}}{x^{r+n}(\xi)}, \quad |x - \xi| > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

где r — произвольное натуральное число. Кроме этих оценок можно получить и следующие:

$$\| K_n(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} \leq \begin{cases} \frac{C}{x^{n+\sigma}(\xi)} \cdot \frac{e^{-\gamma |x - \xi|}}{|x - \xi|^\sigma}, & |x - \xi| \leq 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \sigma = a + 1 + \varepsilon \\ \frac{C}{x^{r+n+\varepsilon}} \cdot e^{-\gamma |x - \xi|}, & |x - \xi| > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

За счет выбора достаточно малого ε можно считать, что $\sigma < 3$. Используя оценки (12) легко можно доказать теорему

Теорема 1. Обозначим через X банахово пространство матричных функций $A(x, \xi)$, $x, \xi \in R_3$, с нормой

$$\| A(x, \xi) \|_X = \sup_{\xi \in R_3} \int_{R_3} \| A(x, \xi) \| dx,$$

где $\| \cdot \|$ — норма Гильберта — Шмидта. Рассмотрим в пространстве X операторы N_j , определяемые равенствами

$$N_j A(x, \xi) = \int_{R_3} A(x, \eta) K_j(\eta, \xi, i\mu) d\eta, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Если ядра K_j удовлетворяют оценкам (12), то при достаточно больших μ операторы N_j являются сжимающими в пространстве X .

Используя оценки (6), (10) — (12) можно показать, что при больших $|\lambda|$, $\lambda = i\mu$, интегральное уравнение (2) может быть решено методом итераций и что решение $G(x, \xi, \lambda)$ можно оценить следующим образом (см., например, работу Н. С. Саргсяна (2))

$$\| G(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} \leq \| g_0(x, \xi, \lambda) \|_{\lambda = i\mu} + \frac{C e^{-B_1 \alpha(\xi) |x - \xi|}}{x^{1-a_1/2}(\xi) |x - \xi|^2} + \frac{C e^{-B_0 |x - \xi|}}{x^r(\xi)},$$

где $0 < B, B_0 < 1$.

Поскольку уравнение (2) можно записать в виде

$$G(x, \xi, \lambda) = g_0(x, \xi, \lambda) + N_0 G(x, \xi, \lambda),$$

а $g_0(x, \xi, \lambda) \in X$ при $\lambda = i\mu$, то из сжимаемости оператора N_0 следует единственность решения уравнения (2).

Лемма 1. Решение интегрального уравнения (2) есть функция Грина оператора L , т. е. $(L - \lambda E)G(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi)$.

Доказательство леммы легко следует из того, что $(L_0 - \lambda E)g_0 = \delta(x - \xi)$ и единственности решения уравнения (2).

Чтобы спектр оператора L был дискретен, достаточно чтобы некоторая степень резольвенты $R_n = (L - \lambda E)^{-n}$ оператора L была вполне непрерывным оператором, а так как

$$R_n f(x) = (L - \lambda E)^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{R_1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

то достаточно чтобы производная некоторой степени по λ ядра $G(x, \xi, \lambda)$ была бы ядром Гильберта—Шмидта. Дифференцируя уравнение (2) по λ и решая после каждого дифференцирования полученные уравнения методом итераций (что возможно вследствие оценок (10)—(12), получаем оценки (при $n \geq 2$)

$$\left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} \leq \left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} + \frac{C e^{-E_n \lambda(\xi)|x-\xi|}}{x^{n-1-a/2}(\xi)|x-\xi|} + \frac{C e^{-B_n |\lambda|^{r-1}}}{x^{r+n}(\xi)} \quad (13)$$

Теорема 2. Если матрица $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1—3, а также условию

4) $p^2(x) + q^2(x) > c|x|^\varepsilon$, $c > 0$, ε — произвольное положительное число, то спектр оператора L дискретен.

Доказательство. Используя (13) и (6) получаем

$$\int_{R_1} \int_{R_1} \left| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda) \right|_{\lambda = i\mu} dx d\xi \leq C \int_{R_1} \frac{d\xi}{x^{n+1}(\xi)} \leq C \int \frac{d\xi}{(p^2(\xi) + q^2(\xi))^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (14)$$

Выберем n настолько большим, чтобы $\frac{n+1}{2} \varepsilon > 3$. Тогда последний интеграл в (14) сходится, а это значит, что $\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda)$ есть ядро Гильберта—Шмидта, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Если $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1—3, а также условию

$$4^1. \quad c|x|^\varepsilon < p^2(x) + q^2(x) < C|x|^\varepsilon, \quad 0 < c < C, \quad \varepsilon > 0 \quad (15)$$

то при достаточно больших нечетных n и $\lambda = i\mu$, $\mu \rightarrow \infty$

$$\int_{R_1} \text{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, x, \lambda) dx \sim \int_{R_1} \text{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, x, \lambda) dx. \quad (16)$$

Асимптотика $N(\lambda)$.

Обозначим через $\lambda_{\pm 1}, \lambda_{\pm 2}, \dots, \lambda_{\pm n}, \dots$ собственные значения оператора L , а через $N_+(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_n < \lambda} 1$ и $N_-(\lambda) = \sum_{\lambda < \lambda_{-n} < 0} 1$ соответственно число собственных значений, меньших $\lambda > 0$ и больших $\lambda < 0$. Из общей теории самосопряженных операторов следует, что если оператор имеет чисто дискретный спектр, то

$$\int_{R_1} \operatorname{sp} \frac{\partial^n}{\partial z^n} G(x, x, z) dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

где, в нашем случае, $z = i\mu$, а

$$N(\lambda) = \begin{cases} N_+(\lambda), & \lambda > 0 \\ -N_-(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Далее мы будем предполагать, что

$$c|x|^\alpha < p^2(x) + q^2(x) < C|x|^\alpha, \quad (18)$$

где $\alpha > 6$, $0 < c < C$. Заметим также, что используя вид матрицы $g_0(x, \xi, \lambda)$ получим выражение для следа

$$\operatorname{sp} \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} g_0(x, x, \lambda) = \frac{3}{\pi} \frac{[p^2(x) + q^2(x)]^2}{[p^2(x) + q^2(x) - \lambda^2]^{5/2}}. \quad (19)$$

Лемма 3. Положим при $\lambda > 0$

$$\psi(\lambda) = \frac{2}{3\pi} \int \int \int_{p^2(x)+q^2(x) < \lambda^2} [\lambda^2 - p^2(x) - q^2(x)]^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (20)$$

и $\psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$. Тогда при $z = i\mu$ имеет место равенство

$$\int_{R_2} \operatorname{sp} \frac{\partial^3}{\partial z^3} g_0(x, x, z) dx = \frac{3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(\lambda)}{(\lambda - z)^4}. \quad (21)$$

Из леммы 3, леммы 2 и равенства (17) при $n=3$ теперь следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda - z)^4} \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(\lambda)}{(\lambda - z)^4} \quad (22)$$

при $z = i\mu$, $\mu \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Если матрица $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1-3 и условию (18) и, если существуют постоянные $M > 0$, $R > 0$, $3 < \gamma < 4$, такие, что при $|\lambda_1| > |\lambda_2| > R$

$$\frac{\psi(\lambda_1)}{\psi(\lambda_2)} < M \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\gamma, \quad (23)$$

то $N(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi} \psi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$, т. е.

$$N_+(\lambda), N_-(\lambda) \sim \frac{1}{3\pi^2} \int \int \int_{\substack{p^2(x)+q^2(x) < \lambda^2}} |\lambda^2 - p^2(x) - q^2(x)|^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из двусторонней тауберовой теоремы, доказанной Я. Т. Султанаевым (3). Условия, при которых $\psi(\lambda)$ удовлетворяет отношению (23), аналогичны тем, которые рассмотрены в замечании к работе (2).

Если N есть произвольное четное число, которое, очевидно, можно записать в виде $N = 2^q r$, где r — нечетно, то среди всех матриц порядка N , максимальное число таких, которые удовлетворяют условиям а), б), с) (см. введение) равно $2q+1$ (см. (4)). Рассмотрим самосопряженный оператор

$$L = \sum_{j=1}^3 a_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^{2q+1} a_j p_j(x) = L_1 + P(x) \quad (24)$$

в пространстве вектор-функций $L^2(R_3; C_N)$. Повторяя все рассуждения, проведенные выше для системы 4-х уравнений (системы Дирака), для системы (24) из N уравнений ($N = 2^q r$) совершенно аналогично получаем теорему о асимптотике дискретного спектра оператора L .

Теорема 4. Если потенциал $P(x)$ удовлетворяет условиям

$$1) \quad \| |P(\xi) - P(x)| P^{-a}(\xi) \| \leq A |x - \xi|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, A > 0, 0 < a < 2$$

$$2) \quad \| P(\xi) \| \leq B \| P(x) \|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, B > 0$$

$$3) \quad \| P(x) \| \leq K \exp \left\{ c_0 |x - \xi| \sqrt{\sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(\xi)} \right\}, \quad \text{при } |x - \xi| > 1, K > 0, \\ 0 < c_0 < 1$$

$$4) \quad c |x|^\alpha < \| P(x) \|^2 < C |x|^\alpha, \quad \alpha > 6, 0 < c < C,$$

и функция

$$\psi(\lambda) = \frac{N}{12\pi^2} \int \int \int_{\substack{\sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(x) < \lambda^2}} \left\{ \lambda^2 - \sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(x) \right\}^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3, \quad \lambda > 0, \psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$$

удовлетворяет условиям (23) теоремы (3.1), то имеет место асимптотическая формула

$$N(\lambda) \sim \psi(\lambda)$$

при $\lambda \rightarrow \pm \infty$.

В заключение автор выражает глубокую признательность А. Г. Костюченко за обсуждения и помощь в работе. Автор признателен также И. С. Саргсяну.

Ереванский государственный университет

Մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմի սեփական արժեքների բլի ասիմպտոտիկ բաշխումը

Դիտարկվում է ընդհանուր դեպքում դիֆերենցիալ ինքնահամարում օպերատոր

$$L = \sum_{j=1}^{2q+1} z_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + P(x), \quad P(x) = \sum_{j=1}^{2q+1} p_j(x) z_j$$

$L_2(R_N, C_N)$ տարածությունում, որտեղ $z_j \in N \times N$ մասրիցաներ են ($j = 1, 2, \dots, 2q+1$, երբ $N = 2^q r$, r — կենտ թիվ է), որոնք բավարարում են a), b), c) պայմաններին Ապացուցվում է՝

թեև $P(x)$ բավարարում է 1—4 պայմաններին, ապա L օպերատորի սպեկտրը դիսկրետ է և $N(\lambda)$ բավարարում է ասիմպտոտիկ հավասարման, երբ $\lambda \rightarrow \pm \infty$

$$N(\lambda) \sim \frac{N}{12\pi^2} \int \int \int_{\sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(x) < \lambda^2} \left\{ \lambda^2 - \sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(x) \right\}^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. Ферми, Квантовая механика, М., 1968. ² И. С. Сирегин, Известия АН СССР, сер. мат., 36(6), 1972. ³ Я. Т. Султанаев, Изв. ВУЗов, № 1 (140), 1974. ⁴ Stöckert Bernd., „Publ. math“, №1—4, 41—55 (1970).

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

Теорема вложения в пространствах n - гармонических функций и некоторые приложения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 8/XII 1975)

1°. Пусть U^n — открытый поликруг в C^n , T^n — его остов, $h^p(U^n)$ пространство всех n -гармонических функций u в U^n , для которых

$$\|u\|_{h^p(U^n)} = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_{T^n} |U(r\omega)|^p dm_n(\omega) \right)^{1/p} < +\infty.$$

$H^p(U^n)$ — подпространство $h^p(U^n)$ состоящее из голоморфных функций в U^n . В этой заметке будут получены:

а) характеристика тех неотрицательных борелевских мер μ на единичном круге $U=U^1$, для которых оператор $Du(z) = u(z, z, \dots, z)$, $z \in U$ отображает $h^p(U^n)$ в пространство $L^p(U, d\mu)$, при $1 < p < +\infty$ и $H^p(U^n)$ в пространство $L^p(U, d\mu)$, при $0 < p < +\infty$.

б) Используя указанный результат и интегральное представление М. М. Джрбашяна классов B^p (см. (1)), будет получена полная характеристика тех аналитических функций f в U , для которых существует $F \in H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$ так, что $f(z) = DF(z)$.

Отметим по этой тематике известную работу Хёрмандера (2), где описан класс тех неотрицательных мер μ на строго псевдовыпуклой области $\Omega \subset C^n$, для которых

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu \leq C \int_{(\partial\Omega)} |f|^p dm_n, \quad f \in H^p(\Omega)$$

При доказательстве этой оценки Хёрмандером существенно используется строгая псевдовыпуклость области Ω . Однако, как известно, поликруг не только не является такой областью, но и биголоморфно не отображается на область такого типа (см. (3)).

Рудин в своей монографии (4) доказал, что если $f \in H^2(U^2)$, то $Df \in B^2$, и обратно для любой $\varphi \in B^2$ существует $f \in H^2(U^2)$, такая, что $Df = \varphi$. Рудиним была поставлена проблема: „найти аналоги этому для других $n > 2$ и $0 < p < +\infty$ “ (см. (4) стр. 49). Им было доказа-

* Здесь как и всюду ниже $dm_n(\omega)$ — будет обозначать нормированную n -мерную меру Лебега на T^n .

но (исходя из обобщения теоремы Харди-Литтлвуда), что из $f \in H^1(U^2) \rightarrow DF \in B^1$. Здесь же была поставлена задача, отображает ли оператор D $H^1(U^2)$ на B^1 (см. (4) стр. 65)? В заметке будут получены ответы на эти вопросы Рудина.

2°. Пусть $\Delta_\varphi^l = \left\{ z : 1-l < |z| < 1, \varphi - \frac{l}{2} < \arg z < \varphi + \frac{l}{2} \right\}$.

Теорема 1. Пусть μ — неотрицательная мера на U такая, что

$$\mu(\Delta_\varphi^l) \leq C l^{n\alpha}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad 0 < l < 1. \quad (1)$$

Тогда существует такое положительное число $C(p)$, что

$$\iint |Du|^p d\mu \leq C(p) \|u\|_{L^p(U^n)}^p, \quad 1 < p < +\infty. \quad (2)$$

и обратно, если для некоторого p_0 выполняется (2), то μ удовлетворяет условию (1).

Замечание: Простые примеры показывают, (например $d\mu(r, \varphi) = (1-r)^{n-2} r dr d\varphi$ и $u(z) = P(z, 1)$, $z \in U^n$, P — ядро Пуассона для U^n), что при $p=1$ утверждение теоремы не справедливо.

Наметим ход доказательства теоремы 1.

Исходя из интерполяционной теоремы Марцинкевича достаточно доказать, что оператор D имеет слабый тип (1.1) как оператор действующий из $L^1(T^n)$ в пространство $L^1(U, d\mu)$. С этой целью вводим

$$g_\alpha(r, \varphi) = \sup_{y_1, y_2, \dots, y_n > (1-r)} \frac{1}{y_1 y_2 \dots y_n} \int_{\varphi-y_1}^{\varphi+y_1} \int_{\varphi-y_2}^{\varphi+y_2} \dots \int_{\varphi-y_n}^{\varphi+y_n} f(t_1, \dots, t_n) \times \\ \times dm_n(t_1, \dots, t_n),$$

где

$$\frac{y_j}{y_k} = 2^{z_j - \alpha_k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n; \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in Z_+^n, \quad f \geq 0$$

α — фиксировано. Сначала доказывается, что

$$\mu(E_\alpha(a)) \leq \frac{C}{a} \int_{T^n} f(t) dt, \quad (3)$$

где

$$E_\alpha(a) = \{re^{i\varphi} : g_\alpha(r, \varphi) > a\}, \quad a > 0$$

А в дальнейшем при помощи элементарных оценок ядра Пуассона получается следующая оценка.

$$DU(re^{i\varphi}) \leq C \sum_{\alpha \in Z_+^n} 2^{-|\alpha|} g_\alpha(r, \varphi),$$

где

$$U(z) = \int_{T^n} P(z, \omega) f(\omega) dm_n(\omega).$$

^{*} $C(\alpha, \beta, \dots)$ в дальнейшем будет обозначать положительное число, зависящее только от α, β, \dots .

Применяя оценку (3), отсюда получаем, что D —имеет слабый тип (1.1).

Используя тот факт, что при $f \in H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$, $|f|^{p/2}$ — n -субгармоническая функция в U^n , для которой n -гармоническая мажоранта

$$U(z) = \int_{T^n} P(z, w) |f(w)|^{p/2} dm_n(w)$$

принадлежит $h^2(U^2)$. Из теоремы 1 немедленно вытекает Следствие 1. Если μ —удовлетворяет условию (1), то существует положительное число C , что имеет место

$$\int_U |Df|^p d\mu \leq C \|f\|_{H^p(U^n)}, \quad f \in H^p, \quad 0 < p < +\infty$$

В частности, полагая $d\mu(r, \varphi) = (1-r)^{n-2} r dr d\varphi$ получаем, что $Df \in B^p(n-2)$ при $f \in H^p$, где $B^p(m)$ —пространство тех аналитических функций в U , для которых

$$\|f\|_{B^p(m)} = \left(\int_U |f(re^{i\varphi})|^p (1-r)^m r dr d\varphi \right)^{1/p} < +\infty.$$

Теорема 2. Пусть $f \in B^p(n-2)$, $0 < p < +\infty$, тогда можно построить такую функцию $g \in H^p(U^n)$, что $Dg = f$.

Доказательство. Пусть сначала $1 \leq p < +\infty$, тогда по теореме М. М. Джрбашяна (1)

$$f(z) = \frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{2n-2} f(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{2n}}.$$

Пусть далее

$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{2n-2} f(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta}{(1-z_1 \rho e^{-i\theta})^2 (1-z_2 \rho e^{-i\theta})^2 \dots (1-z_n \rho e^{-i\theta})^2}.$$

Очевидно, что $Dg = f$. Предположим, что функция $\psi \in L^q(T^n)$, причем

$$\|\psi\|_{L^q} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{такая, что}$$

$$\left(\int_{T^n} |g_r(w)|^p dm_n(w) \right)^{1/p} = \int_{T^n} g_r(w) \psi(w) dm_n(w),$$

где

$$g_r(w) = g(rw_1, rw_2, \dots, rw_n).$$

Тогда получаем

$$\|g_r\|_{L^p(T^n)} \leq \frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\rho^2)^{n-2} |f(\rho e^{i\theta})| \int_{T^n} P(r\rho e^{-i\theta}, w) |\psi(w)| dm_n(w) d\rho d\theta. \quad (4)$$

Пусть теперь

$$U(z) = \int_{T^n} P(z, w) |\psi(w)| dm_n(w).$$

Очевидно, что $U \in h^q(U^n)$ (см. (4)).

Но последний интеграл в (4) можно написать, как $DU(r\rho e^{-i\theta})$, следовательно по теореме 1 $DU \in L^q((1-r)^{n-2} r dr d\theta)$. Применяя неравенство Гёльдера в (4) получаем

$$\left(\int_{T^n} |g_r(w)|^p dm_n(w) \right)^{1/p} \leq \frac{2^{n-1}}{\pi} \|f\|_{B^p(n-2)} \|DU\|_{L^q} \leq C(q) \|f\|_{B^p(n-2)}$$

Доказательство теоремы при $0 < p < 1$ основано на следующей лемме.

Лемма. Пусть $f \in B^p(m)$, $0 < p < +\infty$, $m \geq 0$, и пусть

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^l} < |z| < 1 - \frac{1}{2^{l+1}}, \frac{k\pi}{2^l} < \arg z < \frac{(k+1)\pi}{2^l} \right\}$$

тогда

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=-2^l}^{2^l-1} \max_{z \in \Delta_{k,l}} (|f(z)|^p (1-|z|)^{m+2}) \leq C_0 \|f\|_{B^p(m)}.$$

Доказательство этой леммы получается из известных рассуждений, приведенных в (5).

Предположим теперь, что $f \in B^p(n-2)$, $0 < p < 1$, тогда из леммы непосредственно следует, что $f \in B^1(\alpha)$ при $\alpha > \frac{n}{p} - 1$ и потому

$$f(z) = \frac{\alpha n - 1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha n - 2} f(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha n}}, \quad \alpha > \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$$

Пусть теперь снова

$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{\alpha n - 1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha n - 2} f(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta}{(1 - z_1 \rho e^{-i\theta})^\alpha \dots (1 - z_n \rho e^{-i\theta})^\alpha}.$$

Очевидно, что $Dg = f$. Докажем, что $g \in H^p(U^n)$

$$\begin{aligned} & \int_{T^n} |g_r(w)|^p dm_n(w) \leq \\ & \leq \frac{(\alpha n - 1)^p}{\pi^p} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=-2^l}^{2^l-1} \int_{T^n} \left| \int_{\Delta_{k,l}} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha n - 2} f(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta}{(1 - w_1 \rho e^{-i\theta})^\alpha \dots (1 - w_n \rho e^{-i\theta})^\alpha} \right|^p dm_n(w). \end{aligned}$$

При помощи элементарных оценок можно доказать

$$\int_{T^n} \left(\int_{\Delta_{k,l}} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha n - 2} |f(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta}{|1 - w_1 \rho e^{-i\theta}|^\alpha \dots |1 - w_n \rho e^{-i\theta}|^\alpha} \right)^p dm_n(w) \leq C_1 \max_{z \in \Delta_{k,l}} (|f(z)|^p (1-|z|)^n)$$

Применяя лемму получаем доказательство теоремы и в этом случае.

Следствие 2. (Гальярдо ⁽⁶⁾). Пусть $f \in H^1(U)$, тогда существуют такие положительные числа $C_1(p)$, $C_2(p)$, что

$$C_1(p) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|^p}{\left| \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \right|^p} d\theta d\varphi \leq \|f^{(1)}\|_{Bp} \leq \\ \leq C_2(p) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|^p}{\left| \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \right|^p} d\theta d\varphi \quad 1 < p < +\infty.$$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Ներդրման բնույթն n -հարմոնիկ ֆունկցիաների տարածություններում
և մի քանի կիրառություններ

Հոդվածում դրոշմվում է պայման U միավոր շրջանում տրված n դրական շախի վրա, որի դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$\int \int |Du|^p d\mu \leq C \|u\|_{H^p(U^n)}, \quad 1 < p < +\infty$$

որտեղ՝

$$Du(z) = u(z, z, \dots, z), \quad z \in U$$

u -ն n -հարմոնիկ ֆունկցիա է U^n -միավոր պոլիշրջանում, որպես այդ թեորեմի հետևանք ստացված է H^1 . H^1 -ուղիների մի պրոբլեմի լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян, К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Института математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948. ² L. Hörmander, L^p estimates for (pluri) subharmonic functions, Math. Scand., 20, 65–70 (1967) ³ Г. М. Хенкин, ДАН СССР, № 5, 210 (1973). ⁴ У. Рудин, Теория функций в поликруге, Изд. «Мир», 1974. ⁵ Ф. А. Шамоян, «Известия АН Арм. ССР», сер. математика, т. X, № 6 (1975). ⁶ E. Gagliardo, Rend. Sem. Matem. di Padova 27, 284–305, 1957.

УДК 513

МАТЕМАТИКА

С. Х. Арутюнян

Геометрия n -кратных интегралов, зависящих от $n+s$ параметров

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 15/X 1975)

В предыдущей работе (¹) рассматривались вопросы, связанные с геометрией n -кратного интеграла, зависящего от n параметров. Было установлено, что такой интеграл индуцирует в $2n$ -мерном дважды расслоенном многообразии переменных и параметров M невырожденную метрику; эйнштейновость этой метрики означала, что формы объема слоев первого и второго расслоений порождают эквивалентные геометрии, и, наконец, интегралы, порождающие псевдоевклидову метрику, могли быть приведены к «каноническому» виду — обобщенному интегралу Лапласа—Фурье.

В настоящей работе рассматриваются аналогичные вопросы в случае, когда число параметров превосходит (и существенно превосходит) число переменных интегрирования в интеграле

$$I = \int K(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_{n+s}) dx^1 \dots dx^n.$$

Строится билинейная форма специального вида и выделяется тензорный инвариант, обращение в нуль которого соответствует плоскому случаю. Для этого случая получен «канонический» вид, к которому может быть приведен интеграл I . Этим выясняется геометрический смысл другого обобщения интеграла Лапласа—Фурье.

Рассмотрим дифференцируемое многообразие M размерности $2n+s$, где s пока произвольно, которое одновременно является дважды расслоенным пространством: задано два дифференцируемых отображения многообразия M на n - и $(n+s)$ -мерные дифференцируемые многообразия M_1 и M_2 , обозначим их через π_1 и π_2 ; слои расслоения, то есть прообразы точек из M_1 и M_2 при отображениях π_1 и π_2 , являются соответственно $(n+s)$ - и n -мерными многообразиями, и, наконец, касательные пространства к слоям расслоений π_1 и π_2 имеют лишь нулевое пересечение. Зафиксируем в пределах произвольной карты на M с локальными координатами $x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_{n+s}$ некоторый репер $(e_i)^0, (e^a)^0$, где

$i, k, \dots = 1, \dots, n; \alpha, \beta, \dots = 1, \dots, n + s$ и положим по определению

$$e_i = \bar{x}_i^k (e_k)_0, \quad e^\alpha = \bar{y}_\alpha^\beta (e^\beta)_0,$$

где новые переменные \bar{x}_i^k и \bar{y}_α^β не зависят от ранее введенных координат и друг от друга, причем образуют матрицы с ненулевыми определителями. Образуют линейные дифференциальные формы

$$\omega^i = \bar{x}_k^i dx^k, \quad \omega_\alpha = -\bar{y}_\alpha^\beta dy_\beta,$$

где через \bar{x}_k^i и \bar{y}_α^β обозначены элементы матриц, обратных соответственно к матрицам (\bar{x}_i^k) и (\bar{y}_β^α) (2).

Таким образом, в каждой точке касательного пространства к слою имеется базис, который преобразуется элементами полной линейной группы. Известно (3), что совокупность всех таких базисов (реперов) образует некоторое дифференцируемое многообразие, которое обычно обозначается через $M^{(1)}$. В данном случае на всем пространстве двойного расслоения имеется подвижный репер, n векторов которого в каждой точке составляют базис касательного пространства к слою расслоения π_2 в этой точке, а остальные $n + s$ векторов играют аналогичную роль в касательном пространстве слоя расслоения π_1 (в этой же точке), и система заданных на многообразии $M^{(1)}$ реперов инвариантных линейных дифференциальных форм $\omega^1, \dots, \omega^n, \omega_1, \dots, \omega_{n+s}$ (допуская некоторую вольность, мы обозначили через $M^{(1)}$ многообразие вышеуказанным образом специализированных реперов на M).

Задание этих главных форм определяет пространство расслоения M следующим образом: слои первого расслоения являются интегральными многообразиями максимальной размерности для системы дифференциальных уравнений $\omega^i = 0, i = 1, \dots, n$, а слои второго расслоения находятся в аналогичном отношении с вполне интегрируемой системой уравнений $\omega_\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, n + s$.

Для того, чтобы получить структурные уравнения этих форм, нужно продифференцировать внешним образом их выражения. Таким образом, они имеют вид

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega_k^i \wedge \omega^k \\ d\omega_\alpha = -\bar{\omega}_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta, \end{cases} \quad (1)$$

где $\omega_k^i = \bar{x}_k^p dx_p^i + x_{kp}^i \omega^p$, $\bar{\omega}_\alpha^\beta = -\bar{y}_\alpha^\gamma dy_\gamma^\beta + y_\alpha^{\beta\gamma} \omega_\gamma$, причем переменные x_{kp}^i и $y_\alpha^{\beta\gamma}$ симметричны относительно индексов k, p и β, γ . Далее, продифференцируем внешним образом первую группу структурных уравнений (1) и применим обобщенную лемму Хартана (4), получим

$$d\omega_k^i = \omega_p^i \wedge \omega_k^p + \omega_{kp}^i \wedge \omega^p, \quad (2)$$

где линейные дифференциальные формы ω_{kr}^l должны удовлетворять тождеству вида

$$\omega_{kr}^l \wedge \omega^p \wedge \omega^k = 0.$$

Их мы будем предполагать симметричными относительно индексов k и p . Относительно существования форм ω_{kr}^l заметим лишь, что такие симметричные формы существуют с достаточно большим произволом.

Рассмотрим теперь на многообразии M полубазовую n -форму первого расслоения

$$\Omega = \lambda(\dots) \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n,$$

которая определяет гладкую меру (объем) на каждом слое второго расслоения π_2 . Коэффициент λ , входящий в выражение Ω , является отличной от нуля гладкой функцией на многообразии $M^{(1)}$ специальных реперов на M . Требование, чтобы Ω была формой на M , накладывает на функцию λ некоторые ограничения.

Будем изучать геометрию, которая определяется на M заданием формы Ω . Найдем условия, которым должна удовлетворять функция λ . Внешний дифференциал

$$d\Omega = (d\ln\lambda + \sum_{l=1}^n \omega_l^l) \wedge \Omega,$$

точно так же, как и Ω , является дифференциальной формой на многообразии M . Это означает, что имеет место разложение

$$d\ln\lambda + \sum_{l=1}^n \omega_l^l = \lambda^a \omega_a + \lambda_l^l \omega^l, \quad (3)$$

Далее, линейная дифференциальная форма $\varphi = \lambda^a \omega_a$ также является формой на M . Это следует из того факта, что φ однозначно определяется условием $d\Omega = \varphi \wedge \Omega$ и, кроме того, обращением в нуль на слоях второго расслоения π_2 . Её дифференциал имеет вид:

$$d\varphi = (di^a - \lambda^b \bar{\omega}_b^a) \wedge \omega_a,$$

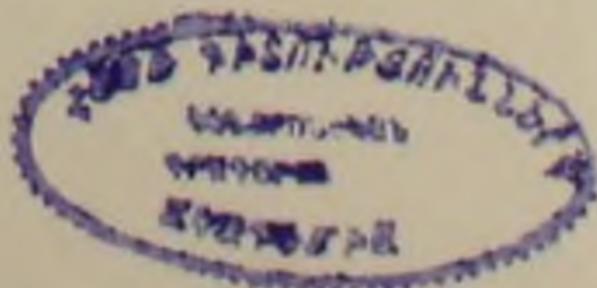
который может быть упрощен. Если продифференцировать внешним образом соотношение (3) и использовать при этом структурные уравнения (1) и (2), то в результате применения леммы Картана получим:

$$di^a - \lambda^b \bar{\omega}_b^a = \lambda^{ab} \omega_b + \lambda_l^a \omega^l, \quad (4)$$

причем коэффициенты λ^{ab} симметричны относительно индексов; подстановка этого соотношения в выражение дифференциала формы φ дает

$$d\varphi = \lambda_l^a \omega^l \wedge \omega_a$$

Будем рассматривать невырожденный случай (форма $d\varphi$ имеет максимальный ранг), тогда $\text{Rang}(\lambda_l^a) = n$. Это означает, что матрица



(λ_i^a) после некоторой канонизации может быть приведена к виду $(\lambda_i^a) = (\delta_i^a)$. Таким образом, на некотором подмногообразии $M_1^{(1)} \subset M^{(1)}$ реперов

$$d\varphi = \omega^i \wedge \omega_i. \quad (4)$$

Отметим, что эта форма оказывает существенное влияние на все дальнейшие рассуждения.

Заметим, что соотношения (4) принимают вид.

$$\begin{cases} d\lambda^i - \lambda^{\beta} \bar{\omega}_{\beta}^i = \omega^i + \lambda^{i\beta} \omega_{\beta} \\ d\lambda^{\xi} - \lambda^{\beta} \bar{\omega}_{\beta}^{\xi} = \lambda^{\xi\beta} \omega_{\beta}, \end{cases} \quad (5)$$

где индексы ξ, η пробегают значения $n+1, \dots, n+s$.

Канонизация $\lambda_i^a = \delta_i^a$ дает возможность упростить часть структурных уравнений за счет того, что $\bar{\omega}_i^{\xi}$ оказываются главными формами на многообразии M . Действительно, если продифференцировать внешним образом (5), используя при этом уравнения (1), а затем применить к получившемуся тождеству обобщенную лемму Картана, то получатся следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_i^{\xi} &= a_{ip}^{\xi} \omega^p + a_{ip}^{\xi p} \omega_p + a_{i\eta}^{\xi \eta} \omega_{\eta} \\ \bar{\omega}_i^k - \omega_i^k &= a_{i\xi}^{k\xi} \omega_{\xi} + \bar{a}_{ip}^{kp} \omega^p + \bar{a}_{ip}^{kp} \omega_p \end{aligned} \quad (6)$$

с соответствующими условиями симметрии между индексами в коэффициентах, которые получаются в результате обратной подстановки (6) в исходное тождество. Подстановка же (6) в (1) дает окончательный вид структурных уравнений форм ω_i :

$$d\omega_i = -\omega_i^k \wedge \omega_k + \omega_{ik} \wedge \omega^k, \quad (7)$$

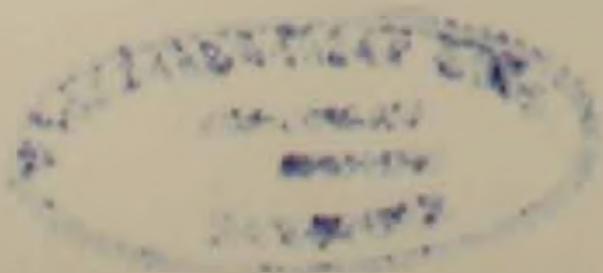
где $\omega_{ik} = \bar{a}_{ik}^p \omega_p + a_{ik}^{\xi} \omega_{\xi}$, и показывает, что ω_{ik} являются главными формами на многообразии M , симметричными относительно индексов. Возьмем размерность s настолько большой, чтобы формы ω_i, ω_{ik} были линейно независимы. Нетрудно подсчитать, что $s \geq \frac{1}{2} n(n+1)$.

Ограничимся рассмотрением случая $s = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Займемся в первую очередь получением структурных уравнений форм ω_{ik} . С этой целью продифференцируем внешним образом уравнения (7) и применим (2); наиболее общая форма, удовлетворяющая получившемуся тождеству, согласно обобщенной лемме Картана имеет вид:

$$\Delta \omega_{ik} = -\omega_{ik}^p \wedge \omega_p + \omega_{ikp} \wedge \omega^p,$$

где через $\Delta \omega_{ik}$ обозначены ковариантные дифференциалы форм ω_{ik}



$$\Delta\omega_{ik} = d\omega_{ik} - \omega_{ip} \wedge \omega_k^p - \omega_{pk} \wedge \omega_i^p,$$

а формы ω_{ikp} можно считать симметричными по всем индексам. Поскольку формы ω_{ik} заменяют формы ω_i , то система форм ω_i, ω_{ik} должна быть вполне интегрируемой, т. е. внешнее дифференцирование структурных уравнений этих форм должно приводить к тождеству в результате алгебраического следствия из этих уравнений. Отсюда следует, что формы ω_{ikp} являются главными, будем искать их в виде

$$\omega_{ikp} = A_{ikp}^r \omega_r + A_{ikp}^{rs} \omega_{rs} + A_{ikpr} \omega^r.$$

Если подставить эти выражения в структурные уравнения форм ω_{ik} , то будет видна симметричность A_{ikpr} по всем индексам; далее, благодаря канонизации $\omega_{ik}^p \rightarrow \omega_{ik}^p + A_{ikr}^p \omega^r$, можно с самого начала считать, что $A_{ikr}^p = 0$. Следовательно,

$$d\omega_{ik} = \omega_{ip} \wedge \omega_k^p + \omega_{pk} \wedge \omega_i^p - \omega_{ik}^p \wedge \omega_p + A_{ikp}^{rs} \omega_{rs} \wedge \omega^p. \quad (8)$$

Итог предварительным рассуждениям подводит

Предложение 1. Задание интеграла I (или, что то же самое, структурных уравнений (1) и полубазовой n -формы Ω первого расслоения) индуцирует на многообразии $M^{(1)}$ билинейную форму $d\varphi$; из условия невырожденности этой формы следует, что структурные уравнения форм ω_i имеют вид (7).

С помощью простых по идее вычислений доказывается

Предложение 2. Существует канонизация репера, относительно которой $\sum_{s=1}^n A_{iks}^{rs} = 0$. В результате этой канонизации формы ω_{kp}^i становятся главными формами, а величины A_{ikp}^{rs} — компонентами тензора.

На основании этого предложения без ограничения общности можно считать, что

$$\omega_{kp}^i = C_{kpr}^i \omega^r + C_{kp}^{ir} \omega_r + C_{kpr}^{irs} \omega_{rs}. \quad (9)$$

Отсюда следует $\left(\text{при } s = \frac{1}{2} n(n+1) \right)$

Предложение 3. Если на многообразии M двойного расслоения задан интеграл I и невырожденная форма $d\varphi$, то на некотором подмногообразии реперов $M_2^{(1)} \subset M_1^{(1)} \subset M^{(1)}$ структурные уравнения (1) могут быть приведены к виду:

$$d\omega^i = \omega_k^i \wedge \omega^k$$

$$d\omega_i = -\omega_i^k \wedge \omega_k + \omega_{ik} \wedge \omega^k. \quad (10)$$

$$d\omega_{ik} = \omega_{ip} \wedge \omega_k^p + \omega_{pk} \wedge \omega_i^p - C_{ikr}^p \omega^r \wedge \omega_p - C_{ik}^{pr} \omega_r \wedge \omega_p - C_{ik}^{prq} \omega_{rq} \wedge \omega_p + A_{ikp}^{rs} \omega_{rs} \wedge \omega^p.$$

Следующее утверждение дает возможность пролить свет на геометрический смысл коэффициентов A_{ikp}^{rs} .

Предложение 4. Если $A_{ikp}^{\prime s} = 0$, то все коэффициенты разложения (9) обращаются в нуль.

Пусть теперь $A_{ikp}^{\prime s} = 0$. Структурные уравнения (10) принимают вид:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega_k^i \wedge \omega^k, \\ d\omega_i &= -\omega_i^k \wedge \omega_k + \omega_{ik} \wedge \omega^k, \\ d\omega_{ik} &= \omega_{ip} \wedge \omega_p^k + \omega_{pk} \wedge \omega_i^p, \\ d\omega_k^i &= \omega_p^i \wedge \omega_p^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, геометрически условие $A_{ikp}^{\prime s} = 0$ выделяет плоский случай (ω^i, ω_k^i являются формами инфинитезимального перемещения репера в n -мерном аффинном пространстве R^n). Но геометрический смысл величин $A_{ikp}^{\prime s}$ не сводится к обобщенной кривизне пространства двойного расслоения: обращение в нуль коэффициентов разложения (9) не влечет за собой уничтожение величин $A_{ikp}^{\prime s}$.

В целях упрощения вычислений ограничимся рассмотрением полного образа параллельных реперов. Тогда вторичные формы ω_k^i обращаются в нуль, а базисные формы $\omega^i, \omega_{ik}, \omega_i$, как это видно из структурных уравнений (11), могут быть выбраны в виде:

$$\omega^i = dx^i, \quad \omega_{ik} = du_{ik}, \quad \omega_i = dy_i - x^k du_{ik},$$

где (x^i, u_{ik}, y_i) — некоторая локальная система координат. Введем следующие обозначения для коэффициентов разложений дифференциалов величин $\lambda_i, \lambda^i, \lambda^{ik}$, взятых из тождества

$$\begin{aligned} d \ln \lambda &= \lambda_i \omega^i + \lambda^i \omega_i + \lambda^{ik} \omega_{ik}, \\ d\lambda_i &= a_{ik} \omega^k + \bar{a}_i^k \omega_k + \bar{a}_i^{kp} \omega_{kp}, \\ d\lambda^i &= a^i_k \omega^k + a^{ik} \omega_k + a^{ikp} \omega_{kp}, \\ d\lambda^{ik} &= a_p^{ik} \omega^p + \bar{a}^{ikp} \omega_p + a^{ikpq} \omega_{pq} \end{aligned} \quad (3')$$

и подставим их в результат внешнего дифференцирования соотношения (3'). Подставим их также в результат дифференцирования формы φ , и сравним полученное выражение с (5). Благодаря этим подстановкам выявляются равенства вида

$$\begin{aligned} \bar{a}_k^i &= a_k^i = \delta_k^i, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad a^{ik} = a^{ki}, \quad \bar{a}^{ikp} = a^{pik}, \\ \bar{a}_p^{ik} &= 0, \quad a_p^{ik} = \frac{1}{2} (\partial_p^i)^k + \partial_p^k \lambda^i. \end{aligned}$$

В результате возникает система соотношений:

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial x^k} = \delta_k^i, \quad \frac{\partial \lambda^i}{\partial y_k} = a^{ik}, \quad \frac{\partial \lambda^i}{\partial u_{kp}} = a^{ikp} - \frac{1}{2} (a^{ik} x^p + a^{ip} x^k),$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^k} = a_{ik}, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_k} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_{kp}} = -\frac{1}{2}(\delta_i^k x^p + \delta_i^p x^k),$$

$$\frac{\partial \lambda^{ik}}{\partial x^p} = \frac{1}{2}(\delta_p^i x^k + \delta_p^k x^i), \quad \frac{\partial \lambda^{ik}}{\partial y_p} = a^{pik}, \quad \frac{\partial \lambda^{ik}}{\partial u_{pq}} = a^{ikpq} - \frac{1}{2}(a^{ikp} x^q + a^{ikq} x^p).$$

Разрешая их, получим решения в явном виде:

$$\lambda^i = x^i + \varphi^i(y, u),$$

$$\lambda_i = y_i - x^k u_{ik} + \psi_i(x),$$

$$\lambda^{ik} = \frac{1}{2} x^i x^k + \frac{1}{2} (x^i \varphi^k + x^k \varphi^i) + \varphi^{ik}(y, u).$$

Подставляя их в уравнение (3') и интегрируя его, получим:

$$\ln \lambda = x^i y_i - \frac{1}{2} x^i x^k u_{ik} + \psi(x) + \varphi(y, u),$$

где через $\psi(x)$ и $\varphi(y, u)$ обозначены интегралы форм вида $\psi_i(x) dx^i$ и $(\varphi^i(y, u) dy_i + \varphi^{ik}(y, u) du_{ik})$. Таким образом, форма Ω приводится к виду

$$\Omega = P(x) Q(y, u) e^{x^i y_i - \frac{1}{2} x^i x^k u_{ik}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (12)$$

Тем самым доказана

Теорема. Если n -кратный интеграл

$$I = \int K(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_{n+s}) dx^1 \dots dx^n, \quad s = \frac{1}{2} n(n+1)$$

индуцирует на многообразии M двойного расслоения переменных и параметров невырожденную билинейную форму $d\varphi = \omega^i \wedge \omega_i$ и $A_{ikp}^{i'k} = 0$, то он приводится к интегралу от формы вида (12).

Интегралы от форм вида (12) естественно считать обобщением интегралов Лапласа—Фурье. Теорема проливает свет на их геометрический смысл.

Приношу глубокую благодарность А. М. Васильеву за постановку задачи и внимание к работе.

Ереванский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна.

Ս. Բ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

$n+s$ պարամետրերից կախված n -պատիկ ինտեգրալների երկրաչափություն

Սույն աշխատանքը նվիրված է $n+s$ պարամետրերից կախված n -պատիկ ինտեգրալների լոկալ հատկությունների ուսումնասիրությանը ($s = \frac{1}{2} n(n+1)$): Հիմնական արդյունքն այն է, որ $y_1, \dots, y_n, u_{11}, \dots, u_{nn}$ պարամետրերի և ինտեգրման x^1, \dots, x^n փոփոխականների բազմաձևու-

թյան մեջ առանձնացվում է ինտեգրալի հետ ինվարիանտ կերպով կապված հատուկ ձևի աֆինական կասակցություն:

Նրա ոչորման տենզորի բաղադրիչների մի մասը նորից տենզոր է կապմում, որի զրոյին հավասարվելու սլայմանը հանգեցնում է զրոյական կորու-

թյան դեպքին և բնորոշում $\exp \left(\sum_{i=1}^n y_i x^i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n u_{ik} x^i x^k \right)$

միջուկով ինտեգրալները: Դա Ֆուրյե-Լապլասի միջուկի բնական ընդհանրացումն է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Х. Арутюнян, ДАН Арм. ССР, т. LXI, № 1 (1975). ² А. М. Васильев, «Математический сборник», т. 70 (112) : 4, 457—480, (1966). ³ С. Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии», Изд. «Мир», М., 1970. ⁴ Г. Ф. Лаптев, Труды Московского математического общества, т. II, 275—382, (1953).

УДК 518.5 : 519.1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян

Об алгоритмах для перечисления элементов полных множеств:
 n - перестановок с повторениями, сочетаний из n элементов
 по m , размещений из n элементов по m

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 18/VII 1975)

В⁽¹⁾ рассматривается метод перечисления элементов множества всех возможных перестановок из n различных символов $[P_n]$, названный „методом треугольника адресов“ и отличающийся от известных (2-4) тем, что использование управляющей матрицы (треугольника адресов) дает возможность почти полного исключения арифметических операций, резкого сокращения количества команд и существенного уменьшения объема памяти. В (1) метод треугольника адресов распространяется на более общий случай — перечисление элементов множества $[P'_n]$ — всех перестановок из n символов, среди которых имеются одинаковые. В настоящей работе показывается, что с использованием специально определенных логических функций алгоритм для перечисления элементов $[P_n]$ может стать основным звеном также для конструирования алгоритмов для перечисления элементов множеств: всех сочетаний по m из n $[C_n^m]$, всех размещений по m из n $[A_n^m]$, и, таким образом, для перечисления элементов списков всех элементарных комбинаторных объектов, имеется единый метод, основывающийся на методе треугольника адресов. Для описания алгоритмов рассмотрим ряд соотношений и определений.

В (1) последовательность адресов $A_{q_n}^n$, соответствующая процессу перечисления элементов $[P_n]$, составляет циклическую структуру, которую можно разбить на следующие подпоследовательности: $(n-1)!$ подпоследовательностей по $(n-1) q_n$ — адресов односмежных транспозиций n -ого элемента первоначальной n — перестановки со всеми остальными $(n-1)$ элементами; $(n-2)!$ подпоследовательностей по $(n-2) q_n$ — адресов односмежных транспозиций $(n-1)$ -ого элемента первоначальной n -перестановки со всеми $(n-2)$ элементами, исключая n -ый элемент; ... $2!$ подпоследовательностей по два q_n — адреса односмежных транспозиций 3-го элемента первоначальной n -пере-

становки со вторым и первым элементами первоначальной n -перестановки; наконец, один q_n — адрес односмежной транспозиции второго элемента с первым элементом первоначальной n -перестановки. Каждую из вышерассмотренных $(n-1)!$ подпоследовательностей последовательности q_n — адресов назовем „циклом n -го порядка C_n “; каждую из $(n-2)!$ подпоследовательностей — „циклом $(n-1)$ -ого порядка C_{n-1} “; ... каждую из $(n-s-1)!$ подпоследовательностей — „циклом $(n-s)$ -ого порядка C_{n-s} “; ...; наконец, подпоследовательность, состоящую из одного адреса — „циклом второго порядка C_2 “. Назовем n -ый (по индексу i) элемент некоторой первоначальной n -перестановки „ведущим элементом цикла C_n “; $(n-1)$ -ый элемент — „ведущим элементом цикла C_{n-1} “; ...; второй элемент — „ведущим элементом цикла C_2 “. Будем обозначать также эти элементы в соответствии с принадлежностью i' -ым индексам i, q, j, k — каркаса ⁽¹⁾ при $j=1$ и $i'=1, 2, \dots, n$ через ${}_1\alpha(i, i), {}_2\alpha(i, j), \dots, {}_n\alpha(i, j)$, где i, j — аргументы, указывающие место элемента на сетке (i, j) , а i' — зафиксированный при $j=1$ i -ый аргумент.

Всякую первоначальную n -перестановку с распределением ^(1.5) $(n; n_1=2, n_2=n_3=\dots=n_v=1)$, равночисленные элементы в которой являются ведущими элементами циклов C_i и C_{i-u} , будем обозначать через $n-(C_i, C_{i-u})$ — перестановку. Возьмем некоторую $n-(C_i, C_{i-u})$ — перестановку (i' и $i'-u'$ — аргументы ведущих элементов при $j=1$) и, последовательно изменяя значения аргумента k ($k=1, 2, \dots, n!$), будем сопоставлять каждой паре аргументов i_1, j ведущего элемента цикла C_i его величину ${}_i\alpha(i_1, j)$ и каждой паре аргументов i_2, j ведущего элемента цикла C_{i-u} его величину ${}_{i-u}\alpha(i_2, j)$. Множество всех пятерок чисел, состоящих из аргумента k (при $k=j$), соответствующих j аргументов i_1 и i_2 и соответствующих i_1, i_2 и j величин ${}_i\alpha(i_1, j)$ и ${}_{i-u}\alpha(i_2, j)$, назовем „ (i', u') — массивом аргументов“. Над (i', u') — массивом аргументов определим функцию $\Phi_{i', u'}(k)$, удовлетворяющую условиям:

$$\Phi_{i', u'}(k) = \begin{cases} 0, & \text{если при } \beta(q, k) = 1 (i_1 = (n-q) \& i_2 = (n-q+1)) \vee \\ & \vee (i_2 = (n-q) \& i_1 = (n-q+1)); \\ 1, & \text{если при } \beta(q, k) = 1 ((i_1 \& i_2) \neq ((n-q) \& (n-q+1)) \vee \\ & \vee (i_1 = (n-q) \& i_2 \neq (n-q+1)) \vee i_1 \neq \\ & \neq (n-q) \& i_2 = (n-q+1)). \end{cases} \quad (1)$$

Пусть t — последовательность значений некоторой функции $\Phi_{i'_v, u'_v}(k)$ (i'_v, u'_v — одно из всевозможных сочетаний пар аргументов i'_v и $i'_v-u'_v$ элементов из группы равночисленности $\{n_v\}$), расположенных по мере возрастания k ($k=1, 2, \dots, t; t \leq n!$) по направлению процесса перечисления, разбита (без изменения порядка расположения элементов) на подпоследовательности, в первую из которых входят первое из нулевых значений и все предшествующие нулевому единичные значения функции, во вторую — второе из нулевых значений и все единичные значения функции, начиная с первого единич-

ного после первого нулевого значения функции, ..., наконец, в последнюю—либо последнее нулевое и все единичные значения функции, либо все единичные значения после последнего нулевого значения функции. Пронумеруем все подпоследовательности в направлении процесса перечисления с помощью чисел из натурального ряда, начиная с единицы (при этом, если $\Phi_{i'v'u'v}^{l'}(t) \neq 0$ при $t=nl$, примем, что последняя подпоследовательность имеет номер „единица“), и каждому нечетному (четному) номеру сопоставим индекс $\gamma^{l'.u'.v} = 1$ ($\gamma^{l'.u'.v} = 0$). Последовательность, составленную из пар аргументов, каждая из которых образована из сопоставления индекса $\gamma^{l'.u'.v}$ с одним из сопоставимых k — аргументов функции $\Phi_{i'v'u'v}^{l'}(k)$, назовем „массивом аргументов $(\gamma^{l'.u'.v}, k)$ “. Над массивом $(\gamma^{l'.u'.v}, k)$ определим функцию $G_1(\gamma^{l'.u'.v}, k)$ следующим образом:

$$G_1(\gamma^{l'.u'.v}, k) = \begin{cases} 1, & \text{если при } k, \text{ соответствующем } \gamma^{l'.u'.v}, \gamma^{l'.u'.v} = \\ & = 1; \quad (2) \\ 0, & \text{если при } k, \text{ соответствующем } \gamma^{l'.u'.v}, \gamma^{l'.u'.v} = 0. \end{cases}$$

Введем также функцию $G_i^*(k)$, определив ее из равенства:

$$G_i^*(k) = \prod_{v=1}^{v=i} \prod_{\{i'_v, u'_v\}} G_1(\gamma^{l'.u'.v}, k), \quad (3)$$

где $\{i'_v, u'_v\}$ означает, что произведение берется по всем элементам множества $\{i'_v, u'_v\}$ — множества всех возможных сочетаний пар аргументов i'_v и $i'_v - u'_v$ — элементов из группы $\{n_v\}$.

Алгоритм для перечисления элементов $|C_n^2|$ (Алгоритм AC_n^2).

1. Из множества n различных символов (A, B, C, \dots, K) составить внешнюю относительно процесса перечисления $(^1)p$ — последовательность $(n = p)$.
2. Последовательности, построенной в п. 1, сопоставить последовательность из p символов: $1, 2, \dots, p$.
3. Выбрать из последовательности, построенной в п. 2, пару элементов $(1, p)$ и построить n — последовательность: $10 \dots p$.
4. Пошагово (с каждым k -ым шагом увеличению k соответствует увеличение q на i, q, j, k —каркасе $(^1)$ переставлять элемент p с остальными элементами последовательности $10 \dots p$ вплоть до $(n-2)$ -ого шага включительно.
5. Каждому k -ому шагу п. 4 сопоставить соответствующую ему пару элементов из внешней p — последовательности, построенной в п. 1:

$$(1, p) \leftrightarrow (A, K), \dots, (1, 3) \leftrightarrow (A, C), (1, 2) \leftrightarrow (A, B).$$

6. Аналогично п. 3 для пары $(2, p)$.

7. Аналогично п. 4 для пар: $(2, p), (2, p-1), \dots, (2, 3)$.

8. Аналогично п. 5 для пар: $(2, p), (2, p-1), \dots, (2, 3)$.
 Процесс алгоритма продолжить аналогично пунктам: 3—5 и 6—8, вплоть до пары $(p-1, p)$.
 Алгоритм перечисления элементов $\{P_n\}$ при распределении $(n; n_1, n_2, \dots, n_v)$ (Алгоритм AP_n) (На рис. 1 описывается пример при распределении $(4; 3, 1)$).

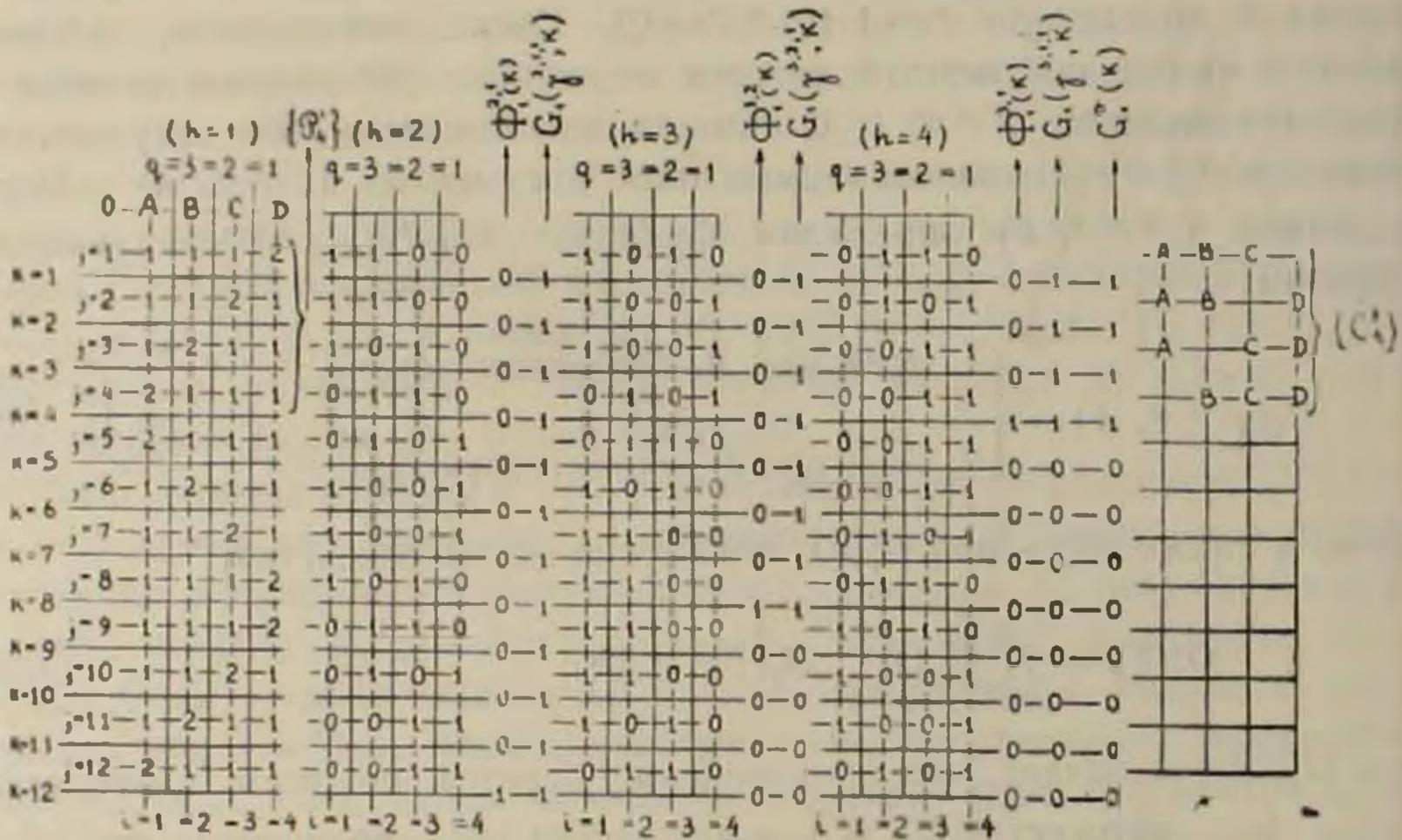


Рис. 1. Перечисление элементов $\{P_n\}$ при распределении $(4; 3, 1)$ и перечисление элементов $\{C_n^3\}$ на i, q, j, k —каркасах ($h = 1, 2, 3, 4$)

1. Распределить элементы n —последовательности по группам равночисленности $(1.5) \{n_v\}$.
2. Используя алгоритм AC_n^3 и результат п. 1, составить все n — $(C_{i_v}^{\cdot}, C_{i_v-u_v}^{\cdot})$ —последовательности.
3. Расположить рядом h ($h = m+1, m$ —число всех различных n — $(C_{i_v}^{\cdot}, C_{i_v-u_v}^{\cdot})$ —последовательностей) i, q, j, k —каркасов $i = 1, 2, \dots, n$ в порядке возрастания индекса h
4. На первой строке ($j=1$) первого ($h=1$) i, q, j, k —каркаса расположить n —последовательность, распределенную в соответствии с п. 1; на первой строке второго i, q, j, k —каркаса ($j=1, h=2$) —первую из n — $(C_{i_v}^{\cdot}, C_{i_v-u_v}^{\cdot})$ —последовательностей на первой строке третьего i, q, j, k —каркаса —вторую из n — $(C_{i_v}^{\cdot}, C_{i_v-u_v}^{\cdot})$ —последовательностей, ...
5. Используя алгоритм перечисления элементов $\{P_n\}$ (1), перечислит

- пошагово $\frac{n!}{2}$ элементов, принимая в качестве первоначальных n — перестановок ⁽¹⁾ каждую из n — последовательностей, расположенных на каждой первой строке i, q, j, k — каркасов, построенных в п. 4.
6. В соответствии с каждым k -ым шагом п. 5 вычислять значения функции $\Phi_1^{i, q, j, k}(k)$ (1) для всех первоначальных n — перестановок.
 7. В соответствии с каждым k -ым шагом вычислять значения функции $G_1(\gamma^{i, q, j, k}, k)$ (2).
 8. В соответствии с каждым k -ым шагом вычислять значения функции $G_1^-(k)$ (3).
 9. В соответствии с каждым k -ым значением функции $G_1^-(k)$ выбирать или отбрасывать перечисляемые из расположенной на первом i, q, j, k — каркасе первоначальной n — перестановки перестановки с повторениями.

Алгоритм перечисления элементов $|C_n^m|$ (Алгоритм AC_n^m)

1. Из множества m различных символов составить внешнюю относительно процесса перечисления p — последовательность ($p = m$): $A B C \dots K$ и расположить p — последовательность на нулевой строке ($j = 0$) первого по индексу $h i, q, j, k$ — каркаса.
2. Из множества m единиц и $n - m$ нулей построить n — последовательность, расположив в ней элементы по группам равночисленности ^(1.5), и расположить n — последовательность на первой строке ($j = 1$) первого по аргументу $h i, q, j, k$ — каркаса.
3. Выбирая в качестве первоначальной n — перестановки последовательность, расположенную в соответствии с п. 2, перечислить все n — перестановки с повторениями, используя для этого алгоритм AP_n^i .
4. Каждой n — перестановке, осуществляемой на каждом k -ом шаге в процессе перечисления п. 3, взаимно-однозначно сопоставить соответствующую ей m -ку символов из p — последовательности, выбирая для составления m -ки все те и только те символы, которым соответствуют единицы в k -ой n — перестановке.

Алгоритм перечисления элементов $|A_n^m|$ (Алгоритм AA_n^m)

1. Из множества n различных символов (A, B, C, \dots, K) составить внешнюю относительно процесса перечисления p — последовательность ($p = n$), и расположить p — последовательность на нулевой строке ($j = 0$) первого по индексу $h i, q, j, k$ — каркаса.
2. Из множества m единиц и $n - m$ нулей построить n — последовательность, расположив в ней элементы по группам равночисленности, и расположить n — последовательность на первой строке ($j = 1$) первого по аргументу $h i, q, j, k$ — каркаса.
3. Используя алгоритм AC_n^m и результаты п. п. 1 и 2, перечислить все элементы $|C_n^m|$.

4. Расположить каждый из элементов $[C_n^m]$ на $||C_n^m||$ i, q, j, k —каркасах.
5. Рассматривая каждый из элементов $[C_n^m]$ в качестве первоначальной m —перестановки, перечислить на каждом i, q, j, k —каркасе п. 4 все элементы из соответствующих $[P_m]$, используя для этого алгоритм AP_n при $n = m$.

Ереванский НИИ математических машин

Ա. Ն. ԱԶԱՏՅԱՆ

Տեղափոխությունների, զուգորդությունների և տեղաբաշխությունների լրիվ բազմությունների բվարկման ալգորիթմների մասին

Ամեն մի ամբողջական n -ի համար տրվում են n -տեղափոխությունների, n -ից m -ական էլեմենտներով զուգորդությունների և n -ից m -ական էլեմենտներով տեղաբաշխությունների լրիվ բազմությունների թվարկման ալգորիթմներ: Ցույց է տրվում, որ հասուկ տրամաբանական ֆունկցիաների օգտագործման շնորհիվ, կարելի է սույլ այդ ալգորիթմների կառուցման մի միասնական մեթոդ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Ա. Ա. Ազատյան, К вопросу о перечислении элементов полного множества ассоциаций $\{U\}$. Депонированная рукопись, 1974, РИП, № 3, 3—697, 1975. ² D. H. Lehmer, Applied Combinatorial Mathematics, E. F. Beckenback, Ed., Wiley New—York, p. p. 5—31, 1964. ³ S. M. Johnson, Math. Computing, 17(1963), p. p. 282—285. ⁴ K. Harada, „Communs ACM“, June, 14, №6, 1971. ⁵ Ա. Ա. Ազատյան, ДАН Арм. ССР, т. LVI, №4 (1973).

УДК 519.95

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. В. Петросян, Ш. Е. Бозоян

Об одном логическом методе повышения
надежности схем

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 20/X 1975)

В (1) рассмотрена задача повышения надежности схем, реализующих булевы функции и построенных на произвольных базисных ненадежных элементах. «Ненадежность» в элементах выражалась в превращении их (с некоторой вероятностью) в устройство, реализующее одну из константных функций 0 или 1. Идея способа повышения надежности таких схем заключалась в первоочередном дублировании тех более «активных» элементов, от которых в основном зависит надежность схемы в целом. Считалось, что элемент «голосователь» работает абсолютно надежно.

В настоящей заметке решается аналогичная задача для схем, реализующих произвольный конечный автомат из достаточно широкого класса автоматов. Понятие «ненадежности» элементов здесь употребляется в более широком смысле.

Пусть A конечный автомат, для которого множества X , Y и S — множества соответственно входных, выходных сигналов и состояний, а $\delta(c, x)$ и $\gamma(c, x)$ — функции переходов и выходов.

Пусть элементы $x \in X$, $y \in Y$ и $c \in S$ закодированы двоичными наборами $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_s)$ и $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_e)$ соответственно. В дальнейшем записи \tilde{x} и \tilde{x} , \tilde{y} и \tilde{y} , \tilde{c} и \tilde{c} будем отождествлять. Автомату A сопоставим некоторую схему S_A , имеющую n входов и s выходов. Пусть она построена из M логических и e запоминающих элементов, которые обозначим через X_1, \dots, X_M и X_{M+1}, \dots, X_{M+e} соответственно. Относительно логических элементов предположим, что реализуют булевы функции, а запоминающие элементы выполняют функции линии задержки одного бита информации на один такт (т. е. в течение одной единицы времени). Если в запоминающих элементах записана информация $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_e)$, то будем говорить, что схема S_A находится в состоянии $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_e)$.

Будем говорить, что схема S_A относительно входного сигнала x и состояния s реализует автомат A , если при подаче на ее входы набора $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ в данный момент времени, на выходах в тот же момент времени получается набор $\bar{y} = (y_1, \dots, y_s)$, который совпадает с $\bar{\lambda}(x, s)$, а состояние схемы в этот же момент времени совпадает с $\bar{z}(x, s)^*$, при условии, что в предыдущий момент времени схема находилась в состоянии s . Схема S_A реализует автомат A , если она реализует автомат A относительно любого входного сигнала $x \in X$ и любого состояния $s \in C$.

Событие, при котором схема S_A относительно некоторого входного сигнала и некоторого состояния не реализует автомат A , называется „ошибкой“. При этом говорят также, что схема S_A относительно данного входного сигнала и состояния „ошибается“.

Пусть каждому логическому элементу X_i ($i = \overline{1, N}$) сопоставлен набор функций $\langle f_{i,0}, f_{i,1}, \dots, f_{i,m} \rangle$, $m \geq 2$, так, что с вероятностью $p_{i,\sigma}$ X_i превращается в схему, реализующую булеву функцию $f_{i,\sigma}$ ($\sigma = \overline{0, m}$; $\sum_{\sigma=0}^m p_{i,\sigma} = 1$; $p_{i,\sigma} > \frac{1}{2}$), а каждому запоминающему элементу X_{N+j} ($j = \overline{1, e}$) — набор объектов $\langle f_{N+j,0}, f_{N+j,1}, \dots, f_{N+j,m} \rangle$, где $f_{N+j,0}$ автомат, выполняющий функции линии задержки⁽²⁾, $f_{N+j,1}$ и $f_{N+j,2}$ соответственно константные функции 0 и 1, а $f_{N+j,\sigma}$, $\sigma \geq 3$ — произвольные булевы функции. Пусть элемент X_{N+j} ($j = \overline{1, e}$) с вероятностью $p_{N+j,0} > \frac{1}{2}$ превращается в схему, реализующую автомат $f_{N+j,0}$, с вероятностью $p_{N+j,\sigma}$ — в схему, реализующую функцию $f_{N+j,\sigma}$ ($\sigma = \overline{1, m}$; $\sum_{\sigma=0}^m p_{N+j,\sigma} = 1$; $p_{N+j,3} = \dots = p_{N+j,m} = 0$).

Будем говорить, что логический элемент X_i работает „правильно“, если он реализует функцию $f_{i,0}$ ($i = \overline{1, N}$), и запоминающий элемент X_{N+j} работает „правильно“, если реализует автомат $f_{N+j,0}$ ($j = \overline{1, e}$).

Допустим, если все элементы (как логические, так и запоминающие) схемы S_A работают правильно, то она реализует автомат A .

Если все элементы X_i реализуют соответственно f_{i,σ_i} ($i = \overline{1, N+e}$), то будем говорить, что надежность схемы S_A находится в состоянии $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N, \sigma_{N+1}, \dots, \sigma_{N+e})$. Схему S_A , находящуюся в состоянии σ обозначим через $S_{A,\sigma}$. Объединение наборов выходов и состояния схемы $S_{A,\sigma}$ в данный момент времени, если на входы в данный момент времени поступил набор $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, а в предыдущий момент вре-

*) Через $\bar{\lambda}(s, x)$ и $\bar{z}(s, x)$ обозначены двоичные коды $\lambda(s, x)$ и $z(s, x)$ соответственно.

мени она находилась в состоянии $\bar{c} = (c_1, \dots, c_e)$, обозначим через

$$S_{A,\sigma}(x, c) = \langle \bar{i}_\sigma(x, c), \bar{i}_\sigma(x, c) \rangle^*.$$

Предположим, что ошибки в различных элементах схемы статистически независимы. Тогда вероятность того, что надежность схемы S_A находится в состоянии σ , равна $p(\sigma) = \prod_{l=1}^{N+\epsilon} p_{l,\sigma_l}$, а вероятность того, что схема S_A ошибается, при условии, что в предыдущий момент времени она находилась в состоянии c , и в данный момент времени на входы поступил набор $x = (x_1, \dots, x_n)$ равна

$$P(\bar{A}/S_A, c, x) = \sum_{\{\sigma\}} |S_{A,\sigma}(x, c) \oplus S_{A,0}(x, c)| \cdot p(\sigma),$$

где сумма берется по всем состояниям σ надежности схемы S_A , 0 — нулевое состояние надежности, при котором все элементы схемы работают правильно, \oplus — знак бинарной операции, которая определена на множестве всевозможных наборов $\bar{z} = (z_1, \dots, z_{N+\epsilon})$ из нулей и единиц следующим образом:

$$\bar{z} \oplus \bar{z}' = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{z} = \bar{z}' \\ 1, & \text{если } \bar{z} \neq \bar{z}'. \end{cases}$$

Складывая условные вероятности по всем входным сигналам $x \in X$, считая, что задана функция $q(x)$ распределения вероятностей появления этих сигналов, получим вероятность того, что схема S_A в данный момент времени ошибается, при условии, что в предыдущий момент времени она находилась в состоянии c :

$$P(\bar{A}/S_A, c) = \sum_{x \in X} P(\bar{A}/S_A, c, x) q(x). \quad (1)$$

Пусть относительно функции $q(x)$ автомат A является сильно-связанным, т. е. для любых двух элементов c и c' из C существует натуральное число t такое, что $p_{c',c}^{(t)} > 0$, где $p_{c',c}^{(t)}$ есть вероятность того, что автомат A из состояния c' через точно t шагов переходит в состояние c . Из теории дискретных цепей Маркова известно ⁽²⁾, что при этом существует предел Чезаро:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{c',c}^{(t)} = p_c, \quad \sum_{c \in C} p_c = 1,$$

который не зависит от первого индекса c' , где $p_{c',c}^{(t)} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t p_{c',c}^{(k)}$. Из

²⁾ Здесь принято обозначение $\langle\langle y_1, \dots, y_s \rangle\rangle, \langle\langle c_1, \dots, c_e \rangle\rangle = \langle y_1, \dots, y_s, c_1, \dots, c_e \rangle$.

очевидного равенства $p_{c',c}^{(t)} = \sum_{c'' \in C} p_{c',c''}^{(t-1)} \cdot p_{c'',c}^{(1)}$

следует $p_{c',c}^{(t)} = \frac{p_{c',c}^{(1)}}{t+1} + \frac{t}{t+1} \sum_{c'' \in C} p_{c',c''}^{(t-1)} \cdot p_{c'',c}^{(1)}$

откуда и при $t \rightarrow \infty$ получим

$$p_c = \sum_{c' \in C} p_{c'} \cdot p_{c',c}^{(1)}; \quad c \in C; \quad \sum_{c \in C} p_c = 1. \quad (2)$$

Естественно полагать, что после длительной работы автомат A будет находиться в состоянии c с вероятностью $p_c (c \in C)$. Естественно полагать также, что схема S_A после длительной работы также будет находиться в состоянии c с вероятностью $p_c (c \in C)$. Реалистичность последнего допущения следует из того, что предел (2) не зависит от первого индекса, и в промежутке времени, заключенном между двумя соседними ошибками, эти ошибки „забываются“.

Итак, за вероятность ошибки схемы S_A принимается число

$$P(\bar{A}/S_A) = \sum_{c \in C} P(\bar{A}/S_A, c) p_c. \quad (3)$$

Наша конечная цель заключается в достижении требуемой надежности схемы при минимальной затрате (по стоимости) избыточной аппаратуры путем дублирования и надежного голосования выходов некоторых элементов.

Введем обозначения:

$$\sigma((i_1, \sigma_{i_1}), \dots, (i_k, \sigma_{i_k})) = (0, \dots, 0, \sigma_{i_1}, 0, \dots, 0, \sigma_{i_k}, 0, \dots, 0),$$

$$1 \leq k \leq N+e,$$

$$\Omega_c((i_1, \sigma_{i_1}), \dots, (i_k, \sigma_{i_k})) = \sum_{x \in X} |S_{A, \sigma((i_1, \sigma_{i_1}), \dots, (i_k, \sigma_{i_k}))}(x, c) \oplus S_{A, 0}(x, c)| \cdot q(x),$$

$$0 = (0, \dots, 0).$$

Тогда очевидно

$$P(A/S_A, c) = \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \sum_{(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k})} |\Omega_c((i_1, \sigma_{i_1}), \dots, (i_k, \sigma_{i_k})) \cdot \prod_{l \in \{i_1, \dots, i_k\}} p_{l, \sigma_l} \cdot \prod_{l \in \bar{\{i_1, \dots, i_k\}}} p_{l, 0}|,$$

где внутренняя сумма берется по всем m^k наборам $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k})$ длины $k (1 \leq \sigma_{i_j} \leq m; j = \overline{1, k})$, внешняя сумма — по всем $2^N - 1$ наборам индексов $(i_1, \dots, i_k) (i_1 < i_2 < \dots < i_k; 1 \leq k \leq N+e)$, а запись $i \in \bar{\{i_1, \dots, i_k\}}$ обозначает $i \in \{1, 2, \dots, N+e\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

Введем дополнительные обозначения: $p = \max_{l, \sigma} p_{l, \sigma} (1 \leq l \leq N+e; 1 \leq \sigma \leq m)$,

$$\Omega_c(i) = \sum_{\sigma=1}^m \Omega_c((i, \sigma)) \cdot p_{i, \sigma},$$

$$\Omega_c(i_1, \dots, i_k) = \sum_{(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k})} |\Omega_c((i_1, \sigma_{i_1}), \dots, (i_k, \sigma_{i_k})) \cdot \prod_{l \in \{i_1, \dots, i_k\}} p_{l, \sigma_l} \prod_{l \in \bar{\{i_1, \dots, i_k\}}} p_{l, 0}| \quad (k \geq 2),$$

$$\Omega(i_1, \dots, i_k) = \sum_{c \in C} \Omega_c(i_1, \dots, i_k) p_c \quad (1 \leq k \leq N+e).$$

Очевидно, $\Omega(i)$ является вероятностью того, что элемент X_i ошибается, в результате чего схема S_A ошибается, при условии, что все остальные элементы схемы работают правильно. $\Omega(i)$ называется активностью элемента X_i ($1 \leq i \leq N+e$).

Выделив линейную часть относительно $p_{i,\sigma}$ ($1 \leq i \leq N+e$; $1 \leq \sigma \leq m$), формулу (1) перепишем в следующем виде:

$$P(\bar{A}/S_A, c) = \sum_{i=1}^{N+e} \Omega_c(i) + \varphi(\bar{A}/S_A, c).$$

Теорема. Если $mp(N+e) < 1$, то $|\varphi(\bar{A}/S_A, c)| \leq m^2 p^2 (N+e)^2$.
Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{A}/S_A, c) &= \sum_{i=1}^{N+e} \sum_{\sigma=1}^m \left| \Omega_c((i, \sigma)) p_{i,\sigma} \left(\prod_{j=1}^m p_{j,0} - 1 \right) \right| + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq N \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N}} \Omega_c(i, j) + \dots + \\ &+ \dots + \Omega_c(1, \dots, N+e) \leq C_{N+e}^2 m^2 p^2 + \dots + C_{N+e}^k m^k p^k + \\ &+ \dots + C_{N+e}^{N+e} m^{N+e} p^{N+e} = (1+mp)^{N+e} - 1 - mp(N+e) \leq e^{mp(N+e)} - 1 - \\ &- mp(N+e) = m^2 p^2 (N+e)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{mp(N+e)}{6} e^{\theta mp(N+e)} \right), \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

Из условия теоремы следует: $\frac{mp(N+e)}{6} e^{\theta mp(N+e)} \leq \frac{e}{6} < \frac{1}{2}$,

следовательно, $\varphi(\bar{A}/S_A, c) \leq m^2 p^2 (N+e)^2$.

Для установления факта $\varphi(\bar{A}/S_A, c) \geq -m^2 p^2 (N+e)^2$ достаточно за-

метить, что $\sum_{i=1}^{N+e} \sum_{\sigma=1}^m \left| \Omega_c((i, \sigma)) \cdot p_{i,\sigma} (\prod_{j=1}^m p_{j,0} - 1) \right| \geq \left| \sum_{i=1}^{N+e} \sum_{\sigma=1}^m \left[\Omega_c((i, \sigma)) \cdot \right. \right.$
 $\left. \cdot (1-mp)^{N+e-1} - 1 \right] p \right| \geq mp(N+e) \left| (1-mp)^{N+e-1} - 1 \right| \geq -m^2 p^2 (N+e)^2$.

Из доказанной теоремы и (3) следует

$$\left| P(\bar{A}/S_A) - \sum_{i=1}^{N+e} \Omega(i) \right| \leq m^2 p^2 (N+e)^2.$$

Таким образом, для вероятности $P(\bar{A}/S_A)$ установили следующие верхние и нижние оценки:

$$P(\bar{A}/S_A) \leq \varepsilon_+ = \sum_{i=1}^{N+e} \Omega(i) + m^2 p^2 (N+e)^2.$$

$$P(\bar{A}/S_A) \geq \varepsilon_- = \sum_{i=1}^{N+e} \Omega(i) - m^2 p^2 (N+e)^2.$$

Перейдем теперь к повышению надежности схемы путем дублирования отдельных ее элементов и надежного голосования выходов экземпляров. Задача формулируется следующим образом.

Пусть каждому элементу X_i схемы S_A сопоставлено положительное число c_i ($i = \overline{1, N+e}$) — его „цена“. Дублируем элемент X_i кратностью z_i ($z_i \in \{1, 3, 5, \dots\}$; $i = \overline{1, N+e}$). Для полученной схемы S'_A получим вероятность ее ошибки: $P(\bar{A}/S'_A)$.

Требуется найти такие значения z_1, z_2, \dots, z_{N+e} , чтобы $P(\bar{A}/S'_A) \leq \varepsilon_0$, а сумма $\sum_{i=1}^{N+e} c_i z_i$ была минимальной, где ε_0 наперед заданное число.

Эта задача нелинейного программирования, для решения которой не существует общих методов. Однако, мы решим эту задачу приближенным алгоритмом с оценкой погрешности с некоторыми, с точки зрения практики, естественными ограничениями. Точнее, поставленную задачу решим не относительно функции $P(\bar{A}/S_A)$, а относительно ее верхней оценки ε_1 , которая относительно $p_{i,2}$ является линейной функцией, дополнительно предполагая, что выполняется неравенство $9m^2 p^2 (N+e)^2 < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Предварительно заметим, что после трехкратного дублирования любого элемента X_i его активность станет нулем. Следовательно, более чем трехкратное дублирование вообще не требуется. Далее, поскольку при дублировании элементов число элементов в схеме увеличивается, то максимальным числом элементов в схеме будем считать $3(N+e)^{**}$. Введем обозначение: $\Omega^*(i) = \frac{1}{2} \Omega(i)(3-z_i)$.

Итак, требуется найти такие значения z_1, z_2, \dots, z_{N+e} , чтобы выполнялось неравенство $\sum_{i=1}^{N+e} \Omega^*(i) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при минимизации линейного функционала $\sum_{i=1}^{N+e} c_i z_i$ ($z_i \in \{1; 3\}$; $i = \overline{1, N+e}$).

Вводя обозначение $u_i = \frac{1}{2}(z_i - 1)$, $i = \overline{1, N+e}$, получим задачу линейного программирования с булевыми переменными [*]: надо найти такие значения для u_1, u_2, \dots, u_{N+e} ($u_i \in \{0; 1\}$; $i = \overline{1, N+e}$), чтобы выполнялось неравенство $\sum_{i=1}^{N+e} \Omega(i) u_i \geq \sum_{i=1}^{N+e} \Omega(i) - \frac{\varepsilon_0}{2}$, при минимизации функционала $\sum_{i=1}^{N+e} c_i u_i$.

Для оценки (сверху) лишней затраты относительно первоначально поставленной задачи (т. е. относительно требования $P(\bar{A}/S'_A) \leq$

*) При $z_i = 1$ элемент X_i фактически не дублируется.

** Устройство голосования не считается элементом, поскольку оно, по предположению, работает абсолютно надежно и в наших расчетах не фигурирует.

« ϵ_0) достаточно решить эту задачу относительно нижней оценки ϵ_- и вычислить разность значений функционала $\sum_{i=1}^{N+c} c_i z_i$ для ϵ_+ и ϵ_- .

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Ա. Վ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Շ. Ն. ԲՈՂՈՅԱՆ

Ախտմաների հուսալիության բարձրացման մի տրամաբանական մերոդի մասին

Դիտված է S մուտք և n ելք ունեցող սխեմա, որը հավաքված է ֆիքսված բաղիսային (տրամաբանական և հիշող) էլեմենտների վրա և իրականացնում է վերջավոր ավտոմատ:

Ախտմանում օգտագործված յուրաքանչյուր տրամաբանական (հիշող) էլեմենտի համար նշված է նրա՝ այս կամ այն ֆունկցիան (ավտոմատը) իրականացնող սխեմայի վերածվելու հավանականությունների բաշխումը, ինչպես նաև որոշակի դրական թիվ՝ նրա «գինը»:

Սահմանվում է սխեմայի «սխալվելու» գաղափարը և կախված նշված հավանականություններից ու նրա մուտքին տրված ազդանշանների համախմբությունների հանդես գալու հավանականությունների բաշխումից որոշվում է սխեմայի սխալվելու հավանականությունը: Որոշ քնական ենթադրությունների դեպքում լուծվում է մինիմալ ծախսով լրացուցիչ էլեմենտներ ավելացնելով սկզբնական սխեմայից նույն ավտոմատն իրականացնող, բայց պահանջված հուսալիությամբ աշխատող սխեմա ստանալու խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ՎՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ III. E. Бозоян, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 2 (1975). ² В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов, Физматгиз, 1962. ³ Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, Изд. «Мир», М., 1964. ⁴ А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, «Наука», 1969.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян, А. Ф. Минасян

О симметричном вдавливании двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость с вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 28/X 1975)

Рассматривается плоская симметричная контактная задача для упругой изотропной полуплоскости с разрезом конечной длины a вдоль оси (oy) , начиная от горизонтальной границы.

На участках $c-b$ горизонтальной границы полуплоскости приложены жесткие штампы с основанием произвольной формы, симметрично расположенные относительно оси разреза. Предполагается, что трение между штампами и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампов свободна от внешних усилий. В конечном разрезе, длина которого может быть определена, действует только нормальное давление (рис. 1).

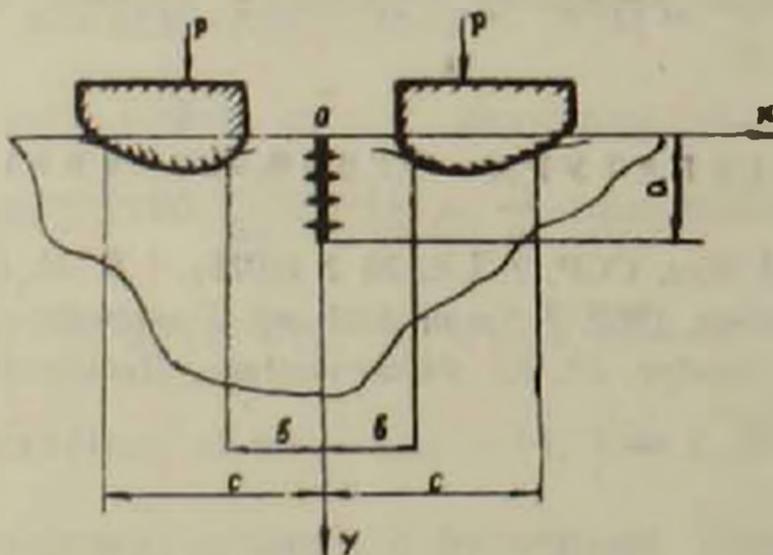


Рис. 1

Задача решена методом Фурье. Решение задачи сводится к системам «парных» и «тройных» интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Показано, что решение последнего уравнения может быть найдено методом последовательных приближений. В частных случаях, когда $a \rightarrow 0$ или $a \rightarrow \infty$ соответственно получается симметричная контактная задача с двумя жесткими одинаковыми штампами для полуплоскости без разреза ⁽¹⁻²⁾ и контактная задача для квадранта ⁽³⁾.

В силу симметрии, ограничиваемся рассмотрением только области квадранта ($0 < x < \infty$; $0 < y < \infty$) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= 0 \quad (0 < x < \infty), \quad \tau_y(x, 0) = 0 \quad (0 < x < b, \quad c < x < \infty), \\ v(x, 0) &= f_1(x) \quad (b < x < c), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (0 < y < \infty) \\ \sigma_x(0, y) &= f_2(y) \quad (0 < y < a), \quad u(0, y) = 0 \quad (a < y < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Бигармоническую функцию Эри для решения рассматриваемой задачи ищем в виде:

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha + \int_0^{\infty} [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta. \quad (2)$$

Напряжения и перемещения выражаются через бигармоническую функцию Эри известными соотношениями (4):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha + \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \\ &+ \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha - \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) + \\ &+ \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha - \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - D(\beta) + \\ &+ \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{E} \left\{ \int_0^{\infty} \alpha [A(\alpha)(1+\nu) + B(\alpha)(1-\nu) + B(\alpha)\alpha x(1+\nu)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\infty} \beta [C(\beta)(1+\nu) - 2D(\beta) + D(\beta)\beta y(1+\nu)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{1}{E} \left\{ - \int_0^{\infty} \alpha [A(\alpha)(1+\nu) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)(1+\nu)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\infty} \beta [C(\beta)(1+\nu) + D(\beta)(1-\nu) + \beta y D(\beta)(1+\nu)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1), получаем:

$$A(x) = B(x) \quad (4)$$

$$D(\beta) = C(\beta) - \frac{4}{\pi\beta} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^4 B(\alpha) d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 B(\alpha) \sin(\alpha y) d\alpha = -f_2(y) + \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} d\beta \quad 0 < y < a$$

$$\int_0^{\infty} \alpha B(\alpha) \sin(\alpha y) d\alpha = 0 \quad a < y < \infty \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} \beta^2 C(\beta) \cos(\beta x) d\beta = 0 \quad 0 < x < b$$

$$\int_0^{\infty} \beta C(\beta) \cos(\beta x) d\beta = \frac{E}{2} f_1(x) + x \int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha x} B(\alpha) d\alpha \quad b < x < c, \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \beta^2 C(\beta) \cos(\beta x) d\beta = 0 \quad c < x < \infty$$

Из (6) выразим функцию $B(x)$ через функцию $C(\beta)$.

Для этого умножим первое уравнение из (6) на $y(r^2 - y^2)^{-1/2}$, проинтегрируем по y от нуля до r .

Умножим второе уравнение на $(y^2 - r^2)^{-1/2}$ и интегрируя полученное равенство по y от r до бесконечности, потом дифференцируя по r , имеем:

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \alpha B(\alpha) \alpha r J_1(\alpha r) d\alpha = - \int_0^r \frac{y f_2(y) dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} + \frac{\pi}{2} r \int_0^{\infty} \beta^2 C(\beta) \left[L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r) \right] d\beta$$

$$- 2 \frac{\pi}{2} r \int_0^{\infty} \beta^2 D(\beta) \left[L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r) \right] d\beta + \frac{\pi}{2} r \int_0^{\infty} \beta^2 D(\beta) [L_1(\beta r) - I_1(\beta r) + \beta r I_0(\beta r) - \beta r L_0(\beta r)] d\beta \quad 0 < r < a$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \alpha B(\alpha) \alpha r J_1(\alpha r) d\alpha = 0 \quad a < r < \infty \quad (8)$$

$$\varphi_2(r) = - \int_0^r \frac{y f_2(y) dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad (9)$$

Используя формулу обращения для преобразования Ханкеля, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \alpha B(\alpha) = & \int_0^a \varphi_2(r) J_1(\alpha r) dr + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \beta^2 C(\beta) d\beta \int_0^a r \left[L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r) \right] J_1(\alpha r) dr - \\ & - \pi \int_0^\infty \beta^2 D(\beta) d\beta \int_0^a r \left[L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r) \right] J_1(\gamma r) dr + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \beta^2 D(\beta) d\beta \int_0^a r \left[L_1(\beta r) - \right. \\ & \left. - I_1(\beta r) + \beta r I_0(\beta r) - \beta r L_0(\beta r) \right] J_1(\alpha r) dr, \end{aligned} \quad (10)$$

где $I_n(z)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента
 $J_n(z)$ — функция Бесселя первого рода от действительного аргумента

$L_n(z)$ — функция Струве от мнимого аргумента.

При получении (10) были использованы значения следующих интегралов (3)

$$\int_0^r \frac{y \sin(\alpha y)}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = \frac{\pi}{2} r J_1(\alpha r); \quad \int_r^\infty \frac{\sin(\alpha y)}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy = \frac{\pi}{2} J_0(\alpha r).$$

$$\int_0^\infty \frac{y e^{-\beta y}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = \frac{\pi}{2} r \left[L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r) \right],$$

$$\int_0^\infty \frac{y^2 e^{-\beta y}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = \frac{\pi}{2} \frac{r}{\beta} [L_1(\beta r) - I_1(\beta r) + \beta r I_0(\beta r) - \beta r L_0(\beta r)].$$

Подставляя значение $D(\beta)$ из (5) в (10) получаем:

$$\begin{aligned} G(\gamma) = & \frac{2}{\pi} \gamma \int_0^a \varphi_2(r) J_1(\gamma r) dr + \gamma \int_0^\infty \beta^2 C(\beta) d\beta \int_0^a r \left[\beta r I_0(\beta r) - \beta r L_0(\beta r) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \right] J_1(\gamma r) dr + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \alpha^2 G(\alpha) \left\{ \int_0^\infty \frac{\beta d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \int_0^a r \left[L_1(\beta r) + \frac{\pi}{4} - I_1(\beta r) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta r L_0(\beta r) - \beta r I_0(\beta r) \right] J_1(\gamma r) dr \right\} d\alpha, \end{aligned}$$

где

$$\alpha^2 B(\alpha) = G(\alpha); \quad (11)$$

„Тройные“ интегральные уравнения, подобные (7), рассматривались в работах (8–12).

Следуя (12), из (7) получаем:

$$C_n = 2\xi(0) \sin \frac{\delta}{2} + 4n(1-n) \sin^3 \frac{\delta}{2} \int_0^1 s \xi(s) F\left(1+n, -n, 2, s^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) ds \quad (12)$$

$$C_n = (-1)^{n+1} C_n^* \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* J_{2n-1}(\beta c) = \beta C(\beta), \quad (14)$$

$$\xi(s) = \frac{4}{\pi} \int_0^s \frac{z \varphi' \left[2 \arcsin \left(z \sin \frac{\delta}{2} \right) \right]}{\sqrt{s^2 - z^2}} dz + Q, \quad (15)$$

$$c \cos \frac{\delta}{2} = b, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varphi' \left[2 \arcsin \left(z \sin \frac{\delta}{2} \right) \right] = & -\frac{Ec}{4} z \sin \frac{\delta}{2} f_1 \left(c \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} \right) - \\ & - \frac{c^2}{2} z \sin \frac{\delta}{2} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_0^{\infty} G(x) e^{-xz \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}} dx, \end{aligned} \quad (17)$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрический ряд,

Q — постоянная, которая должна быть найдена путем подстановки (14), (12) и (15) во второе уравнение (7) при $x=b$.

Подставляя значение $C(\beta)$ из (14) в (11) с учетом (13); (12) и (17), для определения функции $G(\alpha)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$G(\gamma) = \Omega(\gamma) + \int_0^{\infty} G(x) K(\gamma, x) dx, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(\gamma) = & \frac{2}{\pi} \gamma \int_0^a \tilde{\tau}_2(r) J_1(\gamma r) dr + 4\gamma Q \sin^2 \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(1-n) \times \\ & \times \int_0^1 s F \left(1+n, -n, 2, s^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) ds \int_0^{\infty} \beta J_{2n-1}(\beta c) d\beta \int_0^a r \left[\beta r I_0(\beta r) - \beta r L_0(\beta r) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \right] J_1(\gamma r) dr - \frac{4}{\pi} Ec \gamma \sin^2 \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(1-n) \int_0^1 s \left[\int_0^s \frac{z f_1(c \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}})}{\sqrt{s^2 - z^2}} dz \right] \\ & \times F \left(1+n, -n, 2, s^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) ds \int_0^{\infty} \beta J_{2n-1}(\beta c) d\beta \int_0^a r \left[\beta r I_0(\beta r) - \right. \\ & \left. - \beta r L_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} \right] J_1(\gamma r) dr. \end{aligned}$$

$$K(\alpha, \gamma) = \frac{4}{\pi} \gamma \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 \beta d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \int_0^a r \left[L_1(\beta r) + \frac{4}{\pi} - I_1(\beta r) + \beta r L_0(\beta r) - \beta r I_0(\beta r) \right]$$

$$\int_0^1 J_1(\gamma r) dr = \frac{8}{\pi} \gamma c^2 \sin^4 \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(1-n) \int_0^1 s \left[\int_0^s \frac{z^2 \sqrt{1-z^2 \sin^2 \delta/2}}{\sqrt{s^2-z^2}} dz \right] F(1+n, -n, 2, s^2 \sin^2 \delta/2) ds - \int_0^{\infty} \beta J_{2n-1}(\beta c) d\beta \int_0^{\infty} r \left[\beta r L_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} \right] J_1(\gamma r) dr,$$

$$\int_0^1 s F\left(1+n, -n, 2, s^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) ds = \frac{1}{2} F(1+n, -n, 2, \sin^2 \delta/2). \quad (19)$$

Имея в виду асимптотическое разложение функций Бесселя и Струве для больших γ (13), получим, что $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \Omega(\gamma) = 0$ и $\int_0^{\infty} |K(z, \gamma)| dz < 1$. Значит, интегральное уравнение (18) можно решить методом последовательных приближений. Далее по формулам (17), (15), (12), (14) и (4) последовательно можно определить все искомые функции. Напряжения и перемещения по известным формулам (2) будут определены в любой точке полуплоскости, а длина разреза — из условия, отсутствия особенности напряжения.

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Հ. Յ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ուղղանից, վերջավոր երկարության նեղ լույ թուլացված կիսահարթության համաչափ ճնշումը երկու միատեսակ կոշտ դրոշմներով

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից սկսած ուղղագիծ վերջավոր երկարության ճեղքով թուլացված իզոտրոպ, առաձգական կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը:

Կիսահարթության եզրին ճնշում են կամայական հիմքերով, ճեղքի նկատմամբ համաչափ դասավորված միատեսակ դրոշմները: Ինթագրվում է, որ շփումը՝ դրոշմների և կիսահարթության միջև բացակայում է: Պարզության համար ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմներից դուրս ազատ է արտաքին ուժերից, ինչպես նաև ճեղքի եզրերում ազդում են միայն նորմալ լարումները:

Խնդիրը բերվում է «զույգ» և «երիցս» ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի, որի լուծումը հանդում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Ցույց է տրված, որ հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ո Ւ Շ Ի Ն Ե Ր Յ Ո Ւ Ն

- ¹ В. С. Тоноян, «Известия АН Арм. ССР, сер. физ.мат. наук», т. 17, № 2 (1964).
² Л. А. Галин, Контактная задача теории упругости, ГИТТЛ, М., 1953. ³ В. С. Тоноян, ДАН Арм. ССР, т. 37, № 3 (1963). ⁴ С. П. Тимошенко, Теория упругости, ОНТИ, М., 1937. ⁵ И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962. ⁶ А. А. Баблоян, ПММ, т. 28, вып. 6 (1964). ⁷ I. N. Sneddon, Proc. Glasgow Math. Ass. Vol. 4, 108--110, (1960). ⁸ В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян, ДАН Арм. ССР, т. 57, № 5 (1973). ⁹ G. I. Tranter, Proc. Glasgow Math. Ass. Vol 4, Pt. 4 (1960). ¹⁰ Г. М. Валов, «Известия АН СССР», МТТ, № 5 (1972). ¹¹ А. А. Баблоян, С. М. Мхитарян, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXII, № 6 (1969). ¹² В. С. Тоноян, ДАН Арм. ССР, т. 37, № 5 (1963). ¹³ В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXV, № 3 (1972).

УДК 576.851.15

МИКРОБИОЛОГИЯ

А. Дз. Налбандян, Э. А. Овсепян,
 М. В. Овсепян, М. Д. Степанян

О специфике углеродного питания клубеньковых бактерий

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. Г. Африкьяном 10/XI 1975)

По современным представлениям клубеньковые бактерии объединяются в отдельный род *Rhizobium* семейства *Pseudomonaceae*. Видовая принадлежность этих бактерий определяется по тому, на корнях каких видов бобовых они образуют клубеньки^(1,2). До настоящего времени не установлен комплекс морфо-физиологических особенностей клубеньковых бактерий, могущий быть использован для их видового определения. В этом отношении особый интерес представляет изучение различных источников углерода культурами разных видов клубеньковых бактерий. Имеющиеся в литературе данные по этому вопросу получены на материале малого числа штаммов отдельных видов^(3,4,5).

Целью наших исследований являлось выявление усвоения клубеньковыми бактериями разных источников углерода на массовом материале штаммов. В работе использованы различные штаммы наиболее распространенных у нас видов клубеньковых бактерий. Большинство испытанных штаммов выделено в нашем институте из разных эколого-географических условий.

В работе использовались различные сахара, многоатомные спирты, полисахариды и органические кислоты.

Исследования велись ауксонографическим методом на агаризованной среде следующего состава (в %): $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ —0,05; K_2HPO_4 —0,05; NaCl —0,02; MgSO_4 —0,02; pH—7,0—7,2. Бумажные диски, пропитанные растворами различных источников углерода, раскладывались на поверхности агаризованной среды, диффузно засеянной двух-трех суточными культурами клубеньковых бактерий эспарцета, фасоли, гороха и люцерны. Результаты опытов учитывались спустя 24 и 48 часов при инкубации 26—28° по наличию роста вокруг наложенных бумажных дисков.

Как показывают данные табл. 1, за исключением сорбозы, культуры клубеньковых бактерий, в основном (76,8—100%), усваивают моно- и олигосахариды. В отношении сорбозы отдельные виды проявляют избирательность. Большинство штаммов клубеньковых бактерий эспарцета (87,9%) и люцерны (61,8%) усваивают сорбозу, а число культур клу-

беньковых бактерий гороха и фасоли, использующих этот источник углерода, составляет соответственно 16,4 и 32,0 процентов.

Из полисахаридов декстрин усваивается всеми штаммами клубеньковых бактерий эспарцета, а почти половина штаммов клубеньковых бактерий фасоли, гороха, люцерны не использует его в качестве источника углерода. Инулин усваивается большинством штаммов клубеньковых бактерий люцерны (70,6%). Клубеньковые бактерии эспарцета и гороха вообще не усваивают инулина, а клубеньковые бактерии фасоли используют его очень слабо. Большинство испытанных штаммов клубеньковых бактерий (84,5—100%), за исключением клубеньковых бактерий гороха, не усваивающих маннит, используют маннит, сорбит, глицерин.

Дульцит хорошо усваивается клубеньковыми бактериями фасоли и люцерны (соответственно 100—80%). Однако, лишь отдельные штаммы клубеньковых бактерий эспарцета и гороха используют этот источник углерода.

Таблица 1

Усвоение углеводов клубеньковыми бактериями

Клубеньковые бактерии	Количество исследованных штаммов	Количество культур, усваивающих (в %)																
		моносахариды						олигосахариды				полисахариды		спирты				
		глюкозу	маннозу	галактозу	раминозу	сорбозу	фруктозу	арабинозу	сахарозу	раффинозу	целлобиозу	лактозу	декстрин	инулин	маннит	глицерин	дульцит	сорбит
Эспарцета	47	100	100	100	100	88	94	100	100	100	91	85	100	0	84	100	12	100
Фасоли	55	100	100	92	87	16	81	100	100	92	100	89	58	10	94	92	100	100
Гороха	25	100	80	92	92	32	92	80	100	92	92	92	52	0	0	88	32	88
Люцерны	34	100	85	91	91	62	94	77	100	88	79	91	60	71	85	—	79	91

Таблица 2

Усвоение органических кислот клубеньковыми бактериями

Клубеньковые бактерии	Количество исследованных штаммов	Количество культур, усваивающих (в %)										
		пировиноградную кислоту	фталевую кислоту	сульфаниловую кислоту	бензойную кислоту	салициловую кислоту	фумаровую кислоту	малеиновую кислоту	щавелевую кислоту	щавелевокислый аммоний	янтарную кислоту	стеариновую кислоту
Эспарцета	47	100	37	47	4	4	100	77	100	100	100	0
Фасоли	55	89	58	62	70	48	94	85	87	89	100	3
Гороха	25	80	60	72	60	56	100	88	84	100	100	0
Люцерны	34	—	0	6	12	15	44	27	97	97	100	35

Из органических кислот (табл. 2) все испытанные виды клубеньковых бактерий используют пировиноградную, янтарную и щавелевую кислоты. Стеариновая кислота, за некоторым исключением, ими не усваивается.

Клубеньковые бактерии эспарцета и люцерны, в основном, не усваивают также бензойную и салициловую кислоты, а число штаммов двух других видов, использующих эти кислоты, составляет 47—70 процентов.

Отношение к другим органическим кислотам варьирует у культур, принадлежащих как к одному, так и разным видам клубеньковых бактерий.

Следует отметить, что подавляющее большинство культур клубеньковых бактерий люцерны, по сравнению с другими видами, не усваивают органические кислоты, за исключением янтарной и щавелевой кислот, которые, как выше отмечено, хорошо усваиваются другими видами клубеньковых бактерий.

Таким образом, в отношении источников углерода кроме штаммовых отличий выявляются и видовые, присущие клубеньковым бактериям только данного вида. Это относится к таким источникам углерода, как сорбоза, декстрин, инулин, маннит, дульцит, бензойная и салициловая кислоты. Клубеньковые бактерии люцерны по сравнению с другими видами отличаются большой избирательностью к органическим кислотам.

Полученные данные позволяют сделать заключение о возможности использования специфики углеродного питания клубеньковых бактерий, как дополнительного признака при определении видовой принадлежности этих бактерий.

Институт микробиологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Զ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ, Է. Ա. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ, Մ. Վ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ, Մ. Դ. ՍՏԵՓԻԱՆՅԱՆ

Պալարարակտերիաների ածխածնային սննդառության յուրահատկության մասին

Ուսումնասիրված է ածխածնի տարբեր աղբյուրների (շաքարներ, բազմատոմ սպիրտներ, բազմաշաքարներ, օրգանական թթուներ) յուրացումը պալարարակտերիաների տարբեր տեսակների կողմից:

Բացահայտված է, որ տարբեր տեսակին պատկանող պալարարակտերիաները ցուցաբերում են յուրահատուկ վերաբերմունք տարբեր շաքարների, օրգանական թթուների և բազմաշաքարների յուրացման նկատմամբ:

Ստացված տվյալները թույլ են տալիս եզրակացնելու, որ պալարարակտերիաների ածխածնային սննդառության յուրահատկությունը կարող է օգտագործվել որպես լրացուցիչ հատկանիշ այդ բակտերիաների տեսակի որոշման համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. А. Красильников, Определитель бактерий и актиномицетов, Изд. АН СССР, М., 1949. ² R. S. Breed, E. G. D. Murray, N. R. Smith, Bergey's Manual of Determinative Bacteriology. — The Williams A., Wilkins Co., Baltimore, 8th. ed., 1974. ³ A. I. Virtanen, H. Linkova, Microbiol. and Serol. 12, 65—77, 1974. ⁴ P. N. Wilson, Madison, Univ. Wisconsin Press., 1940. ⁵ S. M. Taha, S. A. Z. Mahmoud, S. H. Saleh, Cult. Collect. Proc. Inst. Inf. Conf. Tokyo, 523—539, 1970.

УДК 577.3:612.2

БИОХИМИЯ

А. А. Симомян, Г. А. Геворкян,
 Р. А. Степанян, Л. О. Восканян

**Сравнительная характеристика активности некоторых ферментов
 в митохондриях сердца кур в онтогенезе**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыаном 27/Х 1975)

В предыдущей нашей работе (¹) мы изучали интенсивность дыхания и окислительного фосфорилирования в изолированных митохондриях сердца кур в различные периоды их онтогенетического развития. Полученные результаты свидетельствуют об усилении окислительно-восстановительных процессов, образовании и распаде промежуточных макроэргических соединений в ткани сердца развивающегося организма в конце эмбрионального и в раннем постэмбриональном периоде развития. В развитие этих исследований в настоящей работе мы изучили АТФазную (МКФ 3.6.1.3) активность в митохондриях сердца кур в онтогенезе. В связи с полученными нами результатами по окислительному фосфорилированию определенный интерес представляло также изучение становления активности отдельных ферментов дыхательной цепи в изолированных митохондриях сердца кур по мере их онтогенетического развития.

Опыты проводили на 15 и 20-дневных эмбрионах, 5-дневных цыплятах и взрослых курах. Возраст эмбрионов определяли по дням инкубации. Сердца эмбрионов соответствующего возраста промывали ледяным раствором 0,15 М КСI в течение 30 секунд. Ткань измельчали специальной давилкой, затем гомогенизировали 30—40 секунд в гомогенизаторе Поттера.

Митохондрии выделяли в растворе 0,44 М сахарозы—1 ммоль ЭДТА. Ядра выделяли при 2500 g, митохондрии—12000 g. Осадок митондрий суспензировали в 0,25 М растворе сахарозы—0,02 М трис-НСI буфере. Чистоту фракции и целостность митондрий контролировали электронной микроскопией.

Активность АТФазы в митохондриях определяли по нарастанию неорганического фосфата (НФ) в следующей инкубационной смеси (2 мл): 1,6 мл 0,25 М сахарозы—0,02 М трис-НСI буфера, 0,2 мл суспензии митондрий (соответствующей примерно 2—3 мг белка) и 4 мл АТФ, растворенного в 0,2 мл 0,25 М сахарозы, рН 7,4, время инкубации

30 минут, температура—26°C. Для выявления активности различных АТФаз катионы добавляли в ммольях в конечной концентрации:

Na⁺—100, K⁺—120, Mg⁺⁺—10, Ca⁺⁺—20, ДНФ (2,4-динитрофенол) применяли в количестве 0,0005 M.

Активность цитохромоксидазы (МКФ 1.9.3.1) и сукцинатдегидрогеназы (МКФ 1.3.99.1) определяли манометрическим методом при 26° (2,3). В качестве субстрата окисления при определении цитохромоксидазы применяли аскорбиновую кислоту, при определении сукцинатдегидрогеназы—сукцинат.

Для определения активности цитохромоксидазы в сосудики вводили реактивы в следующих количествах (в мл): 0,25 M сахарозы—0,02 M трис-HCl буфера—0,95, цитохром с—0,25, аскорбиновая кислота 0,119 M—0,3 и суспензия митохондрий—0,5, соответствующая 2—4 мг белка.

Активность сукцинатдегидрогеназы определяли в следующей инкубационной смеси (в мл): 0,25 M сахарозы—0,02 M трис-HCl буфера—0,55 (рН 7,4), сукцината 0,5 M—0,3, цитохрома с (4.10⁻¹ M)—0,25, AlCl₃ 0,007 M—0,2, CaCl₂ 0,007 M—0,2 и суспензия митохондриальной фракции—0,5.

Активность цитохромоксидазы и сукцинатдегидрогеназы выражалась величиной прироста потребления кислорода митохондриями после добавления субстрата. Результаты опытов выражали в QO₂—мкл/мг белка/час. Белок определяли по Лоури и сотр. (4).

Результаты исследований, приведенные в табл. 1, показывают, что по ходу развития куриного эмбриона, начиная с 15-го дня инкубации, общая активность АТФазы повышается. Нарастание активности фермента у 20-дневных эмбрионов, по сравнению с 15-дневными, составляет 46, а после вылупления у 5-дневных цыплят—175%. Дальнейшего увеличения активности фермента у половозрелых кур, по сравнению с 5-дневными, не обнаруживается.

Таблица 1

АТФазная активность в митохондриях сердца кур в онтогенезе
Р в мкатамах/мг белка/30 мин M±m

Условия опыта	Эмбрионы		5-дневные цыплята	Взрослые куры
	15-дневные	20-дневные		
Контроль	1.43±0.09 (6)	2.10±0.48 (5)	3.95±0.20 (6)	3.89±0.16 (8)
Na ⁺⁺ +K ⁺	1.23±0.13 (6)	1.57±0.17 (6)	2.48±0.25 (8)	1.39±0.09 (8)
Mg ⁺⁺	3.21±0.20 (6)	3.57±0.56 (8)	7.22±0.57 (8)	5.33±0.41 (8)
ДНФ	4.04±0.39 (6)	5.30±0.56 (6)	5.01±1.29 (8)	5.97±0.39 (8)
Ca ⁺⁺	3.66±0.32 (6)	3.72±0.64 (6)	6.41±0.44 (8)	4.94±0.32 (8)

В скобках количество опытов.

Активность $\text{Na}^+ + \text{K}^+$, Mg^{++} и Ca^{++} зависимых АТФаз также повышается по ходу развития куриного эмбриона, достигая своего максимума у 5-дневных цыплят. Однако у взрослых особей по сравнению с 5-дневными цыплятами активность фермента в присутствии этих катионов достоверно снижается.

Сопоставляя полученные данные можно заметить, что в митохондриях сердца кур в различные дни эмбрионального и постэмбрионального развития по сравнению с общей и $\text{Na}^+ + \text{K}^+$ -зависимой АТФазой, активность фермента намного выше в присутствии катионов Mg , Ca , а также ДНФ.

Полученные данные, касающиеся становления и развития АТФазы митохондрий сердца по ходу развития куриного эмбриона полностью согласуются с нашими предыдущими данными (1), свидетельствующими об усилении образования и распада промежуточных макроэргических соединений в ткани сердца цыпленка в конце эмбрионального и раннем постэмбриональном периодах.

Цитохромоксидазная активность высокая на 15-ый день эмбрионального развития (табл. 2), в митохондриях 20-дневных эмбрионов активность фермента понижается, достигая своего минимума у 5-дневных цыплят. По сравнению с эмбриональным и постэмбриональными периодами, у кур цитохромоксидазная активность высокая.

Таблица 2

Активность цитохромоксидазы и сукцинатдегидрогеназы в митохондриях сердца кур в онтогенезе. O в мкл/мг белка/час, $\text{M} \pm \text{m}$

Условия опыта	Эмбрионы		5-дневные цыплята	Взрослые куры
	15-дневные	20-дневные		
Эндогенное дыхание	5,58 (4)	4,61 (4)	3,98 (4)	3,65 (4)
Цитохромоксидаза	55,76 ± 0,40 (8)	43,55 ± 0,28 (12)	36,49 ± 0,14 (8)	64,13 ± 0,56 (9)
Сукцинатдегидрогеназа	81,62 ± 0,26 (8)	88,57 ± 1,28 (8)	116,69 ± 0,24 (8)	180,98 ± 0,65 (9)

Активность сукцинатдегидрогеназы в митохондриях сердца повышается по мере развития эмбриона. Дальнейшее активирование фермента наблюдается у 5-дневных цыплят и половозрелых кур.

Таким образом, полученные данные демонстрируют неодинаковую динамику активности цитохромоксидазы и сукцинатдегидрогеназы по мере развития куриного эмбриона. Выявленная нами динамика активности сукцинатдегидрогеназы в митохондриях сердца полностью соответствует становлению этого фермента в митохондриях тканей мозга и печени куриного эмбриона по ходу его развития (5). Однако изменение активности цитохромоксидазы в сердечной мышце несколько отличается от фермента митохондрий мозга и печени.

Институт биохимии Академии наук Армянской ССР

Մի էանի ֆերմենտների ակտիվության համեմատական բնութագրությունը հավի սրտի միտոքոնդրիաներում օնտոգենեզում

Ուսումնասիրվել է ԱՏՖազայի, ցիտոքրոմօքսիդազայի, սուկցինատ-դեհիդրոգենազայի ակտիվությունը հավի օնտոգենեզի տարբեր փուլերում: Ցույց է տվել, որ ընդհանուր ԱՏՖազայի ակտիվությունը հավի սաղմի զարգացման 15-րդ օրից սկսած աճում է, հասնելով իր առավելագույն չափերին 5 օրական ճտերի մոտ (3,95 մկատոմ/մգ սպիտակուցին): Ֆերմենտի ակտիվությունը հասուն հավերի սրտամկանում 5 օրական ճտերի համեմատությամբ չի աճում (3,89 մկատոմ/մգ սպիտակուցին): Na^+ + K^+ , Mg^{++} Ca^{++} — խթանվող ԱՏՖազաների ակտիվությունը ճտի սաղմնային և հետսաղմնային զարգացման շրջանում նույնպես աճում է, սակայն հավերի մոտ 5 օրական ճտերի համեմատությամբ զգալիորեն իջնում է: Այդ պայմաններում ԴՆՖ-ով խթանվող ԱՏՖազայի ակտիվությունը մեծանում է:

Ցիտոքրոմօքսիդազայի ակտիվությունը բարձր է 15 օրական սաղմերի սրտի միտոքոնդրիաներում, հետագա օրերի ընթացքում ֆերմենտի ակտիվությունը որոշ չափով թուլանում է: Սուկցինատդեհիդրոգենազայի ակտիվությունը միտոքոնդրիաներում սաղմի զարգացմանը զուգընթաց աճում է: Բարձր ակտիվություն դիտվում է նաև 5 օրական ճտերի և հասուն հավերի սրտամկանում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ա. Ա. Սիմոնյան, Գ. Ա. Գեվորկյան, Ր. Ա. Տեփանյան, Լ. Օ. Վոսկանյան, «Բիոլ. շրն. Արմենի» տ. 29, № 1 (1976).
 2. Յ. Դ. Սիգարևա, Լ. Ա. Չետերիկով, Բիոքիմիա, տ. 15, № 6, 517 (1950).
 3. Մ. Վ. Տավինա, Ջրն. էվոլյուց. Բիոքիմիա և ֆիզիոլոգիա, տ. 1, № 2, 126 (1965).
 4. Օ. Ն. Lowry, Ն. Յ. Rosebrough, Ա. Լ. Farr, Ր. Randall, J. Biol. Chem., 193, 265 (1951).
 5. Ա. Ա. Սիմոնյան, Տ. Գ. Մովսեսյան, ԺԱՆ ԱրմՍՍՐ, տ. 56, № 3, 178 (1973).

УДК 543.865.611.8

БИОХИМИЯ

Г. В. Априкян, Ж. А. Паронян, Г. А. Мкртчян,
Э. Г. Адуни, С. С. Мусаелян

Количественное соотношение амидных групп белков
субфракций грубой митохондриальной фракции
головного мозга крыс

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 31/X 1975)

Рядом исследователей (^{1,2} и др.) была установлена гетерогенность так называемой грубой митохондриальной фракции головного мозга. В лаборатории Виттекера (¹) в градиенте плотности сахарозы удалось разделить грубую митохондриальную фракцию на субфракции миеллина, нервных окончаний (синапсом) и очищенных митохондрий. Выделение синапсом облегчило изучение процесса передачи нервного импульса через синапсы. Из перечисленных субфракций подробно изучена синапсомальная. В отношении содержания амидных групп белков эти три фракции изучены недостаточно.

Настоящая работа посвящена выявлению количественного соотношения амидных групп белков в субфракциях грубой митохондриальной фракции коры головного мозга белых крыс.

Опыты были поставлены на половозрелых крысах. Животных быстро обезглавливали, извлекали большие полушария и помещали в холодильный шкаф, в котором при температуре 2—4° отделяли кору больших полушарий. Из коры мозга готовили 10%-ный гомогенат на 0,32 М сахарозе, содержащей 1 мМ ЭДТА, при рН 7,4. Дифференциальное и градиентное центрифугирование проводили методом Виттекера (³) в модификациях Брадфорда (^{4,5}) лишь с той разницей, что после осаждения ядерной фракции из исходного гомогената, надосадочную жидкость после двукратного разбавления центрифугировали при 800 г 15 мин для полного осаждения остатков клеточных фрагментов и ядер (см. схему и рис. 1).

Электронномикроскопическое исследование полученных субфракций показало, что чистота синапсомальной фракции составляет 60%, а митохондриальной—80%, что соответствует литературным данным (^{6,7}).

Амидные группы белков определяли по выходу амидоазота белков после двухчасового гидролиза 2н. раствором H₂SO₄ трихлоруксусной

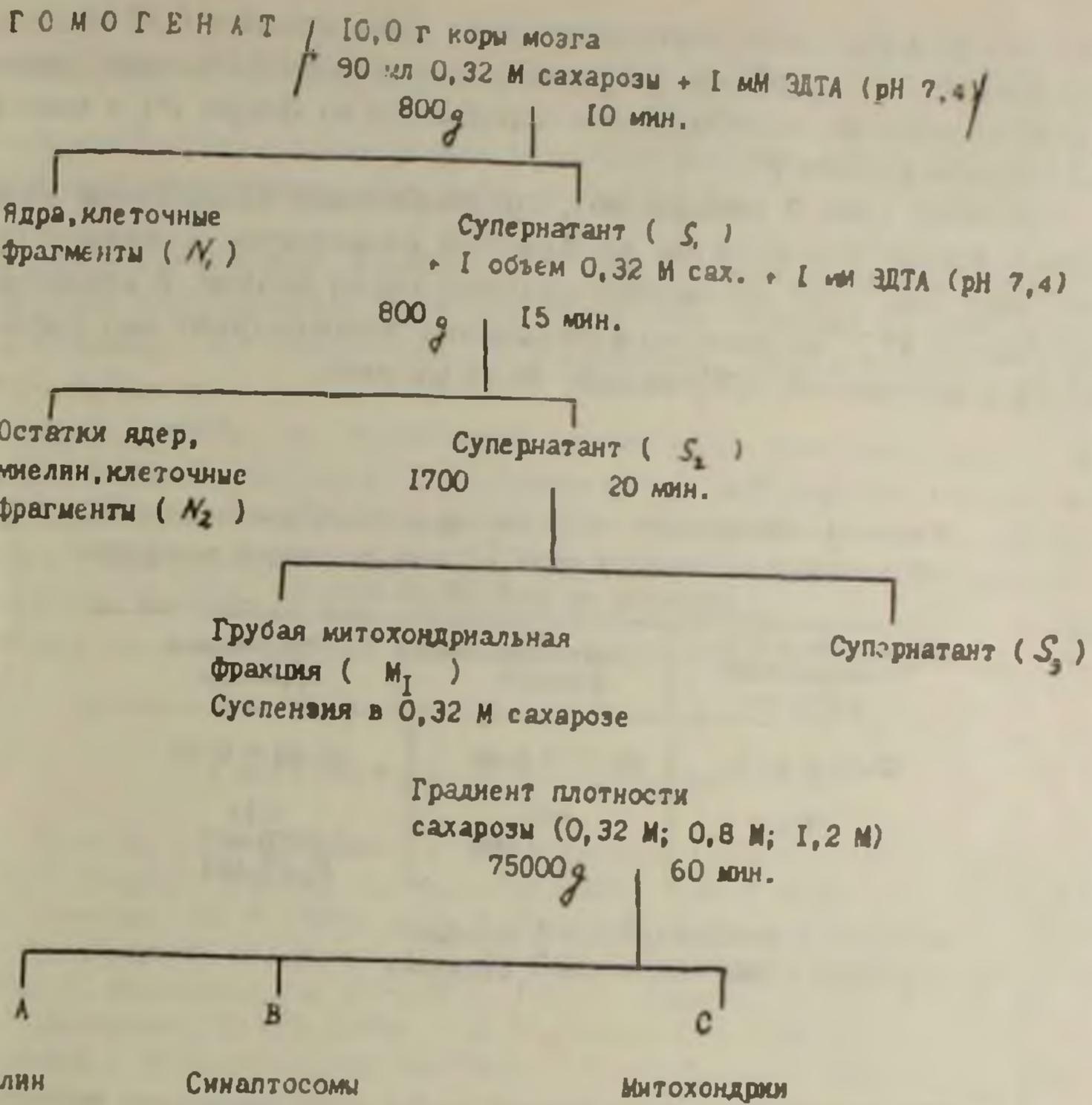


Схема выделения первичных фракций гомогената, субфракций митохондрий дифференциальным центрифугированием и центрифугированием в градиенте плотности сахарозы.

Плотность сахарозы **Колич в мл.**

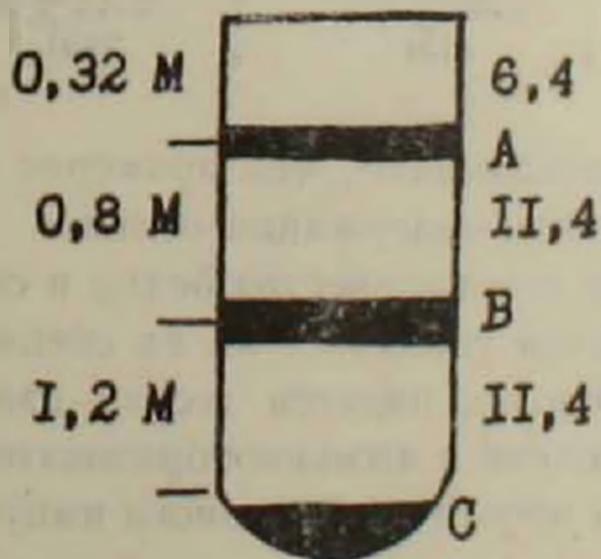


Рис. 1. Выделение субфракций грубой митохондриальной фракции при 75.000 г в течение 60 мин. А—миелин; В—синаптосомы; С—очищенные митохондрии

лых осадков суспензий соответствующих субфракций в 0,32 М сахарозе. Осадок перед гидролизом двукратно промывали 1,5%-ным раствором трихлоруксусной кислоты. Белок определяли по Лоури (8) в модификации Хесс и Левина (9).

Данные табл. 1 показывают, что наибольшее содержание амидных групп белков определяется во фракции синапсом, а наименьшее — в миелине. Так, если количество амидных групп белков, в синапсоме составляет 82,77 мк атом, то в очищенных митохондриях оно составляет 65,43, в миелиновой субфракции — 46,13 мк атом.

Таблица 1

Распределение амидных групп белков среди субфракций грубой митохондриальной фракции коры больших полушарий мозга крыс (мк атом амидо-N/100 мг белка)

Очищенная митохондриальная фракция	Синапсомальная фракция	Миелиновая фракция
65,43 ± 0,74 (41)	82,77 ± 0,86 (40) P < 0,001	46,13 ± 0,55 (31) P < 0,001 P ₁ < 0,001

P — по сравнению с митохондриальной фракцией;

P₁ — по сравнению с синапсомальной фракцией

Таблица 2

Распределение белка среди субфракций грубой митохондриальной фракции коры больших полушарий мозга крыс (мг/г коры)

Грубая митохондриальная фракция	Субфракции		
	очищенная митохондриальная	синапсомальная	миелиновая
28,45 ± 0,8 (15)	3,69 ± 0,1 (15)	8,14 ± 0,3 (15)	1,81 ± 0,09 (15)

Данные табл. 2 показывают, что примерно такое же соотношение существует и в отношении содержания белка.

Сравнительно большое количество белка в синапсоме и высокая степень их амидирования указывает на их специфическую роль в нервных окончаниях. Вероятно, имеется тесная взаимосвязь между уровнем амидных групп белков и аммиакообразовательной функцией синапсом, участвующих в проведении нервного импульса.

Институт биохимии

Академии наук Армянской ССР

Սպիտակ առնետների ուղեղի կուպիտ միտոքոնդրիալ ֆրակցիայի ենթաֆրակցիաների սպիտակուցների ամիդ խմբերի բանալական փոխհարաբերությունը

Ներկա աշխատանքի նպատակն է եղել պարզարանել, թե ինչպիսի բանական փոխհարաբերություն գոյություն ունի մաքրված միտոքոնդրիալ, սինապտոսոմալ և միելինային ֆրակցիաների սպիտակուցների ամիդ խմբերի միջև:

Ցույց է տրված, որ սպիտակուցներն ամենից շատ ամիդացված են սինապտոսոմալ ֆրակցիայում: Սպիտակուցների ամիդացման աստիճանով միտոքոնդրիալ և, հատկապես, միելինային ֆրակցիան զիջում են սինապտոսոմալ ֆրակցիային: Հնարավոր է, սինապտոսոմներում ընդհանուր սպիտակուցի համեմատաբար մեծ քանակը և նրանց ամիդացման բարձր աստիճանը սերտ առնչություն ունեն ամոնիակառաջացման պրոցեսների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ C. O. Hebb, V. P. Whittaker, J. Physiol., 142, 187 (1958). ² E. Petrusik, A. Giuditta, J. Biophys. Biochem. Cytol., 6, 129 (1959). ³ E. G. Gray, V. P. Whittaker, J. Anat. (London), 96, 79 (1962). ⁴ H. F. Bradford, J. Neurochem., 16, 675 (1969). ⁵ H. F. Bradford, G. W. Bennet, A. J. Thomas, J. Neurochem., 21, 495 (1973). ⁶ S. H. Barondess, J. Neurochem., 13, 721 (1966). ⁷ P. D. Swanson, F. H. Harvey, W. L. Stahl, J. Neurochem., 20, 465 (1973). ⁸ O. H. Lowry, N. J. Rosebrough, A. L. Farr, R. J. Randall, J. Biol. Chem., 193, 265 (1951). ⁹ H. H. Hess, E. Lewin, J. Neurochem., 12, 205 (1965).

УДК 577.1 : 577.3

БИОХИМИЯ

Р. Б. Бадалян, А. А. Симонян, А. П. Акопян

**Некоторые сдвиги в энергетическом метаболизме в печени кур
 в онтогенезе**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 8/XI 1975)

В предыдущих работах ⁽¹⁾ мы показали, что при использовании глутамата в качестве субстрата, дыхание в интактных митохондриях печени кур усиливается с начала плодного периода эмбрионального развития до 17-го дня. Из этих же опытов видно, что динамика соотношения окисления и фосфорилирования (Р/О) в печени до вылупления также постепенно снижается. Аналогичные результаты в отношении поглощения кислорода в ткани печени уток получены В. И. Махинько с сотр. ⁽²⁾. Исходя из полученных результатов, мы нашли целесообразным изучить количественные сдвиги образования макроэргов, а также креатинфосфата в печени кур в различные периоды их онтогенетического развития. Помимо этого определяли содержание свободного фосфата, сухого остатка и митохондриального белка.

Для определения аденозинтрифосфата (АТФ) замороженную жидким азотом печень (1 г) растирали в фарфоровой ступке и заливали 4 объемами 5%-ного ТХУ ⁽³⁾. Экстракцию проводили 15 минут на холоду при частом помешивании. Осадок удаляли центрифугированием. К трихлоруксусному центрифугату добавляли ртутный реактив из расчета 2 мл 20%-ного $(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{Hg}$ в 2%-ном CH_3COOH на 2 мл центрифугата. Ртутный осадок компонентов адениновой системы отделяли центрифугированием. Осадок размешивали в 0,3 мл воды и в течение 10 минут разлагали сероводородом на холоду. Затем суспензию аэрировали в течение 3 минут и взвесь удаляли центрифугированием. Для хроматографического анализа использовали бумагу FN-1. Применяли нисходящую хроматографию. В качестве растворителя использовали изоамиловый спирт и 2,5%-ный цитрат (1:1). Выявление АТФ производили ультрахемископом.

Определение креатинфосфата проводили по методу А. М. Алексеевой ⁽⁴⁾. Белок определяли по Лоури и сотр. ⁽⁵⁾, неорганический фосфат—по Лоури и Лопес ⁽⁶⁾. Для определения сухого остатка брали навеску митохондрий, соответствующую 50 мг свежей ткани и высушивали до постоянного веса.

Данные, приведенные в табл. 1, показывают, что высокое содержание АТФ отмечается в печени 15-дневных эмбрионов (0,70 мкмоль/г влажной ткани). С возрастом (у 20-дневных эмбрионов) количество АТФ сокращается почти в два, а у 5-дневных цыплят в три раза, оставаясь в дальнейшем на том же уровне у половозрелых кур.

Как показывают эти данные в конце эмбрионального развития усиливается процесс распада макроэргов, что обеспечивает необходимый баланс энергии для синтетических реакций в клетках, подготавливая цыпленка к вылуплению. Не лишено основания предположение о том, что энергия высвобождается уже на уровне первичных макроэнергетических соединений, не доходя до образования АТФ. Это предположение подтверждается нашими прежними и литературными данными. По нашим данным (7) в конце эмбрионального развития кур в митохондриях печени усиливаются окислительно-восстановительные процессы. В этом периоде вдвое сокращается и запас гликогена в печени (8,9). О. Ю. Никитина (9) считает, что такое снижение уровня гликогена в печени и других тканях связано с большими энергетическими затратами к моменту вылупления.

Таблица 1

Количественные изменения содержания АТФ
(мкмоль/г влажной ткани) в печени кур в онтогенезе, $M \pm m$

Дни развития	АТФ
15	$0,70 \pm 0,05$ (6)
20	$0,38 \pm 0,03$ (6)
5-дневные цыплята	$0,24 \pm 0,02$ (6)
Взрослые куры	$0,20 \pm 0,01$ (6)

С генерацией макроэргов в ткани тесно связаны количественные сдвиги содержания креатинфосфата и интенсивность креатинкиназной реакции в ткани по ходу развития эмбриона. В наших опытах самым высоким содержанием креатинфосфата отличается печень 15-дневных эмбрионов, заметно сокращаясь в период вылупления—в 20-ый день (табл. 2). По сравнению с 5-дневными цыплятами у кур количество креатинфосфата заметных изменений не претерпевает.

Сопоставляя эти результаты с нашими другими данными в отношении содержания креатинфосфата в других тканях эмбриона, можно заметить, что аналогичная картина содержания креатинфосфата обнаруживается в мозгу и сердце по ходу развития (10). Как видно из этих данных в конце эмбрионального развития весьма важное значение приобретает и креатинфосфат, как богатый источник дополнительной энергии для выполнения необходимых жизненных функций развивающегося организма.

На основании полученных данных мы нашли целесообразным определить также количественные сдвиги свободного фосфата, белка и сухого остатка в изолированных митохондриях печени кур в различные периоды их онтогенетического развития.

Таблица 2

Количественные изменения содержания креатинфосфата (мкмоль/г влажной ткани) в печени кур в онтогенезе, $M \pm m$

Дни развития	Креатинфосфат
15	$3,21 \pm 0,15$ (6)
20	$1,95 \pm 0,08$ (4)
5-дневные цыплята	$2,40 \pm 0,30$ (4)
Взрослые куры	$2,21 \pm 0,39$ (5)

Данные, приведенные в табл. 3, показывают, что количество свободного фосфата в митохондриях печени возрастает с 15-го дня эмбрионального развития, достигая своего максимума у 5-дневных цыплят.

Таблица 3

Количественные сдвиги содержания свободного фосфата (мкатомах/г влажной ткани) в митохондриях печени кур в онтогенезе, $M \pm m$

Дни развития	$P_{\text{несорг.}}$
15	$3,30 \pm 0,02$ (4)
20	$5,10 \pm 0,10$ (4)
5-дневные цыплята	$5,25 \pm 0,08$ (4)
Взрослые куры	$3,13 \pm 0,11$ (4)

По сравнению с цыплятами, у кур количество свободного фосфата заметно понижается.

В следующей серии опытов мы исследовали количественные изменения содержания митохондриального белка печени кур в онтогенезе. Результаты опытов показывают, что на ранних стадиях эмбрионального развития содержание митохондриального белка небольшое и у 15-дневных эмбрионов составляет 9,39 мг/г влажной ткани (табл. 4). Прирост белка в митохондриях уже в период вылупления, у 20-дневных эмбрионов составляет почти 40%, а у 5-дневных цыплят—60% по сравнению с 15-дневными эмбрионами. Дальнейшего усиления интенсивности процесса синтеза митохондриального белка у половозрелых кур не отмечается, наоборот, наступает спад по сравнению с ранним постэмбриональным периодом.

Сухой остаток митохондрий в эмбриональный период, начиная с 15-го дня, не меняется (табл. 5). Некоторое увеличение сухого остатка наблюдается у 5-дневных цыплят и половозрелых кур. Как явствует из приведенных данных, количество сухого остатка в митохондриях печени после вылупления резко увеличивается и в ткани 5-дневных цыплят доходит примерно до уровня, присущего взрослым особям.

Таблица 4

Изменение содержания митохондриального белка печени кур в онтогенезе, $M \pm m$

Дни развития	Белок в мг/г влажной ткани
15	9.39 ± 0.21 (4)
20	12.93 ± 0.35 (4)
5-дневные цыплята	15.00 ± 1.08 (4)
Взрослые куры	12.63 ± 1.09 (4)

Таблица 5

Количественные сдвиги сухого остатка митохондрий печени кур в онтогенезе, $M \pm m$

Дни развития	Сухой остаток мг/г влажной ткани
15	150 ± 0.98 (4)
20	150 ± 1.18 (4)
5-дневные цыплята	180 ± 3.14 (4)
Взрослые куры	190 ± 2.18 (4)

При сопоставлении данных содержания митохондриального белка и сухого остатка при пересчете на 1 г влажной ткани, нетрудно заметить, что это соотношение довольно стабильно в конце эмбрионального развития и в раннем постэмбриональном периоде. Однако у взрослых кур соотношение белка и сухого остатка печени заметно снижается. Результаты, проведенных нами опытов подтверждаются и литературными данными, полученными у эмбрионов других птиц (11). Наши данные свидетельствуют о высоком уровне процессов синтеза белка в ткани печени кур в отмеченные периоды развития.

В совокупности вышесказанного можно заключить следующее: содержание АТФ в ткани печени куриного эмбриона по ходу развития сокращается, начиная с 15-го дня развития до вылупления цыпленка. Высоким содержанием креатинфосфата отличается печень 15-дневных эмбрионов. С возрастом эмбриона содержание креатинфосфата в ткани сокращается и достигает своего постоянного уровня у 5-дневных цыплят

и взрослых кур. Содержание митохондриального белка и сухого остатка печени по ходу развития вплоть до вылупления цыпленка увеличивается. Такой закономерности подвергается также свободный фосфат.

Институт биохимии
Академии наук Армянской ССР.

Ի. Բ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ա. Պ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Էներգետիկ փոխանակության մի էանի տեղաշարժերը հավերի լյարդում օնտոգենեզում

Ուսումնասիրվել են ադենուլինեոֆոսֆատի (ԱՏՖ), կրեատինֆոսֆատի, ազատ ֆոսֆատի, ինչպես նաև միտոքոնդրիալ սպիտակուցի և շոր նյութի պարունակության քանակական տեղաշարժերը հավերի լյարդում օնտոգենետիկ զարգացման տարբեր փուլերում: Ցույց է տրվել, որ հավի սաղմի զարգացման 15-րդ օրից սկսած ԱՏՖ-ի քանակն աստիճանաբար կրճատվում է մինչև ճտի ձվից դուրս գալը:

Կրեատինֆոսֆատի բարձր պարունակությամբ աչքի է ընկնում 15 օրական սաղմի լյարդը: Հասակին զուգընթաց կրեատինֆոսֆատի քանակությունը աստիճանաբար պակասում է՝ հասնելով իր կայուն մակարդակին 5 օրական ճտերի և հասուն հավերի լյարդում:

Միտոքոնդրիալ սպիտակուցի և շոր նյութի պարունակությունը լյարդում սաղմի զարգացման ընթացքում աճում է մինչև ձվից ճտի դուրս գալը: Նման փոփոխության ենթարկվում է նաև ազատ ֆոսֆատը:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Симонян, «Известия АН АрмССР» (сер. биол.) т. 18, № 9 (1965). ² В. И. Махинько, Р. Г. Перепелица, Л. М. Потапенко, С. А. Шейн, Материалы симпозиума по основным проблемам возрастной физиологии и биохимии, Изд. ХГУ, 1965. ³ Т. В. Венкстери, А. А. Боев, «Биохимия», т. 22, № 6, (1957). ⁴ А. М. Алексеева, «Биохимия», т. 16, № 97 (1951). ⁵ O. H. Lowry, N. J. Rosebrough, A. L. Farr, R. Rintzll, J. Biol. Chem., 193, 265(1951). ⁶ O. H. Lowry, J. A. Lopez, J. Biol. Chem., 162, 421 (1946). ⁷ А. А. Симонян, Некоторые особенности энергетического обмена в онтогенезе кур. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1970. ⁸ Л. Г. Лейбюк, Сахар крови, Изд. АН СССР, М., 1962. ⁹ О. Ю. Никитина, «Укр. биохим. журн», т. 35, № 2, (1963). ¹⁰ А. А. Симонян, Особенности энергетического метаболизма в мозгу и печени кур в онтогенезе, Диссерт. докт. наук, Ереван, 1973. ¹¹ В. И. Махинько, А. А. Пешикова, Труды ИИИ биологии и биол. факультета ХГУ, 29, 325 (1961).

УДК. 631.8 : 634.8 : 632.111

АГРОХИМИЯ

С. А. Марутян

К вопросу о роли фосфора в морозоустойчивости виноградной лозы

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 20/VI 1975)

Фосфор принимает самое непосредственное участие в биохимических превращениях, в результате которых происходит освобождение, передача и использование химической энергии.

В настоящее время развивается представление о том, что под влиянием неблагоприятных условий среды, в том числе и воздействия низких температур, прежде всего нарушается сопряженность процессов окисления и фосфорилирования, что ведет к прекращению энергоснабжения клетки (1-4).

Считается, что в крайние северные широты продвигаются те древесные породы, которые наряду с другими показателями, характеризуются накоплением веществ, содержащих макроэргический фосфор (5).

Обмен фосфорсодержащих соединений в побегах винограда в период осенне-зимнего покоя и в связи с морозоустойчивостью недостаточно изучен (6,7), а сведения по макроэргическому фосфору (АТФ) почти отсутствуют.

В настоящей статье приводятся результаты исследования по динамике общего и макроэргического фосфора (АТФ) в осенне-зимний период в побегах винограда в связи с различной морозоустойчивостью. Сопоставляется характер их изменчивости с динамикой белков и нуклеиновых кислот в побегах и почках, а также с количественными изменениями кальция и магния.

Кривые на рис. 1 показывают, что содержание общего фосфора в побегах винограда за осенне-зимний период проявляет резкие скачки и ярко выраженную сортовую специфичность. У морозоустойчивых растений количество фосфора в начале осени резко снижается.

Это оценивается нами, как косвенный факт, свидетельствующий о миграции фосфора в почки при первом же снижении температуры с порога биологического нуля (+10°) до действительного нуля (0°). В дальнейшем количество фосфора в побегах этих растений вновь воспол-

няется за счет поступления из других частей куста, что видно по неуклонно восходящему характеру кривой фосфора, достигающей максимума в наиболее холодный период.

У неморозоустойчивых сортов воздействие температуры -10° вызывает совершенно обратный эффект. Такая диаметрально противоположность приводит к тому, что у морозоустойчивых сортов в наиболее морозный период зимовки содержание фосфора в несколько раз превосходит его содержание у неустойчивых, что положительно отражается на состоянии растений.

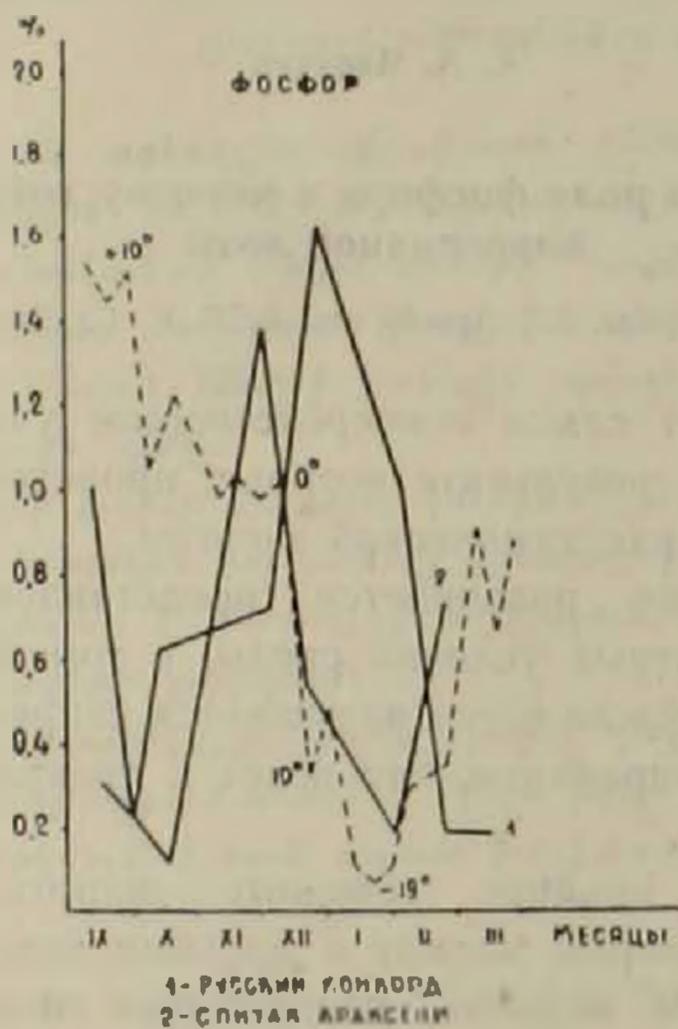


Рис. 1. Динамика содержания общего фосфора в побегах винограда у сортов с разной морозоустойчивостью в осенне-зимний период. 1—морозоустойчивый сорт; 2—неморозоустойчивый сорт

По данным Э. С. Вашадзе (⁸), в корнях винограда в период покоя происходит поглощение, превращение и передвижение фосфорных соединений в надземные органы. На основании чего автор аргументирует целесообразность внесения фосфорных удобрений в почву осенью, а не весной.

Согласно нашим данным, прежде всего привлекает внимание сравнительно низкая оводненность почек морозоустойчивых сортов и соответственно высокий уровень сухих веществ.

Последнее достигается благодаря более высокому содержанию всех изученных компонентов, значительная часть которых приходится на долю сахаров, крахмала, нуклеиновых кислот, белков.

Полученные данные косвенно подтверждают гипотезу А. Л. Курсанова (⁹) о том, что фосфор является переносчиком сахаров. Действи-

тельно, при оптимальном физиологическом состоянии растений у морозоустойчивых сортов миграция фосфора из побегов в почки происходит заблаговременно, способствуя тем самым биосинтезу ряда высокополимерных соединений.

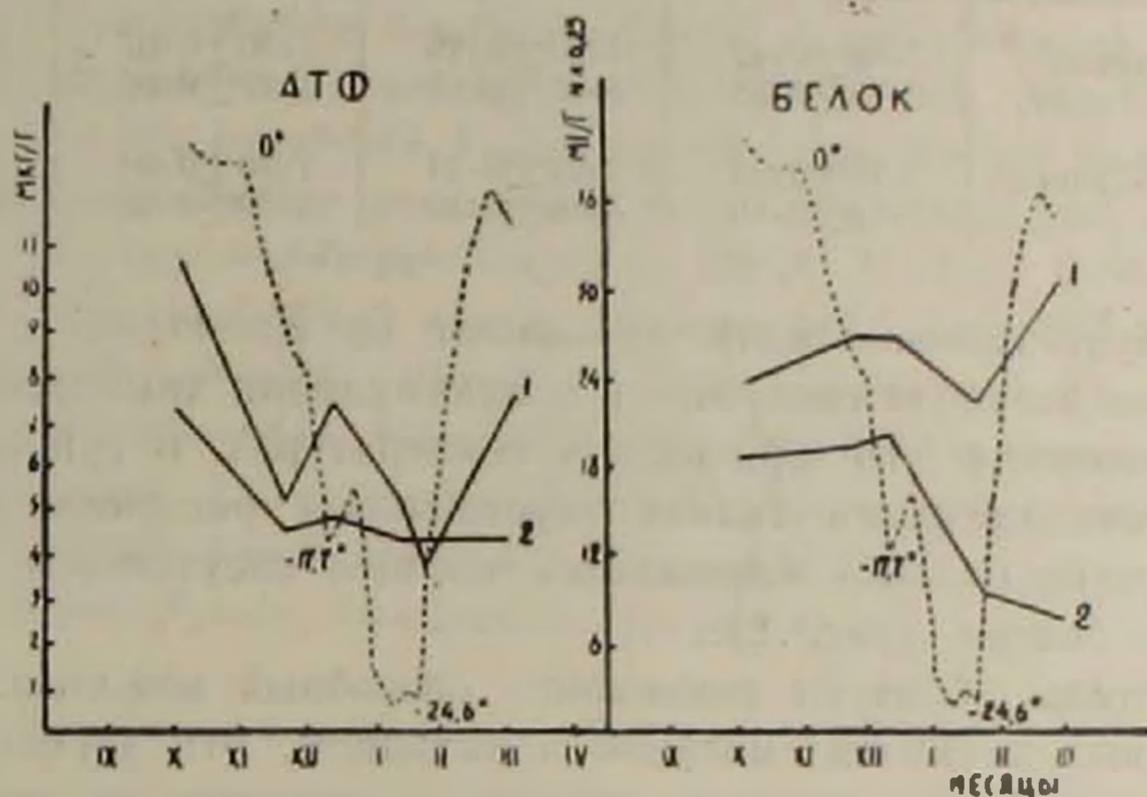


Рис. 2. Характер использования и образования АТФ и белков в побегах винограда в период покоя. 1—морозоустойчивый сорт; 2—неморозоустойчивый сорт

Обнаруженный нами факт меньшей оводненности и большего содержания сухих веществ в почках морозоустойчивых сортов согласуется с тем положением, что сухие почки винограда выдерживают более низкие температуры, чем влажные.

Согласно исследованиям А. И. Чебана (¹⁰), в почках зимующих глазков винограда с августа по декабрь абсолютное количество нуклеиновых кислот и белка при пересчете на один глазок удваивается. А. Ф. Кириллов и Т. Х. Левит (⁶) приводят сведения относительно увеличения кислоторастворимых фосфорорганических соединений и нуклеопротендов в побегах винограда во время второй фазы закалывания.

Результаты наших исследований по динамике АТФ в побегах винограда за осенне-зимний период отражают основные закономерности, выявленные на других культурах, что, по-видимому, объясняется четкой физиологической функцией АТФ.

На рис. 2 видно, что максимум в образовании АТФ в побегах винограда приходится на осень, когда температурные условия благоприятствуют накоплению пластических и макроэргических соединений. За время закалывания (до конца декабря) происходит использование АТФ.

У неморозоустойчивых сортов разобщение дыхания с окислительным фосфорилированием видимо наступает уже при температуре -10° , тогда как у морозоустойчивых сортов в этих условиях отмечается как использование, так и неоднократное образование АТФ в период осенне-зимнего покоя на фоне высокого уровня содержания нуклеотидов— АТФ, АДФ, АМФ (табл. 1).

Содержание нуклеотидов в побегах винограда при воздействии
—18° (мкг/г, на сухой вес)

Сорта	АТФ	АДФ	АМФ	Сумма
Морозоустойчивые	7.60±0.42	4.03±0.19	1.80±0.07	13.43±0.61
	7.41±0.38	3.96±0.15	1.87±0.06	13.24±0.75
Неморозоустойчивые	5.16±0.23	3.22±0.14	1.40±0.04	9.78±0.44
	5.10±0.19	3.56±0.10	1.50±0.08	10.16±0.51

Морозоустойчивые сорта проявляют по сравнению с неморозоустойчивыми большую способность к аккумуляции химической энергии путем образования АТФ при низких температурах. В суровые зимы в поврежденных морозами тканях неустойчивых растений нарушение энергетического баланса выражается полным отсутствием весеннего биосинтеза белков (рис. 2).

Нуклеотиды образуют реакционно способный комплекс с ионами двухвалентных металлов—магнием и кальцием. Эти элементы нужны как кофакторы. С этих позиций интересно сопоставить по динамике указанных элементов сорта с разной морозоустойчивостью.

Исследования показали, что у морозоустойчивых сортов в процессе осенней закалки происходит явное снижение в содержании этих элементов в побегах с последующим восстановлением их количества. Несмотря на это величина соотношения кальция и магния изменяется не так сильно, что на наш взгляд имеет важное значение для регуляции и поддержания уровня ферментативных реакций и водоудерживающей способности клетки при воздействии экстремальных температур.

У неморозоустойчивых сортов динамика этих элементов в процессе закаливания иная и не столь закономерна. Например: отток магния из побегов в почки начинается только после воздействия температуры —10°, как это наблюдается и с фосфором.

Следовательно, по этим решающим в фосфорном обмене элементам у морозоустойчивых сортов (в отличие от неморозоустойчивых) происходит заблаговременная их миграция из побегов в почки.

Таким образом, на основании изучения фосфорного, а также азотного, липидного и углеводного (¹¹) обмена, нами показано, что сравнительно легкая повреждаемость тканей морозоустойчивых и незакаленных растений связана с угнетением обменных и энергетических процессов, с потерей биосинтетической способности растений в условиях низких температур.

Предполагается наличие у морозоустойчивых сортов более усовершенствованных и эффективных путей трансформации и использования химической энергии в зимний период и особенно во время экстремальных температур.

Ֆոսֆորի դերը խաղողի վազի ցրտադիմացկունության հարցում

Ուսումնասիրվել է բնդանուր և մակրուերգիկ (ԱՏՖ) ֆոսֆորի պարունակության փոփոխությունը խաղողի շվերում՝ ձմռան հանգստի շրջանում:

Այն բաղադրատվել է բողբոջների թիմիական կազմի, ինչպես նաև շվերում պիտակուցների, կալցիումի և մագնեզիումի դինամիկայի հետ: Հետազոտությունների արդյունքները ցույց են տվել, որ ցրտադիմացկուն բույսերը ասարելավում են ոչ ցրտադիմացկուններից ոչ միայն ֆոսֆորի և ԱՏՖ-ի վազ աշնանային պարունակության բարձր մակարդակով, այլև ԱՏՖ-ի գոյացման և օգտագործման դինամիկ վիճակով, ձմռան ընթացքում բողբոջների հիմնական կոմպոնենտների կենսասինթեզի ավելի բարձր ունակությամբ:

Ննթադրվում է, որ ցրտադիմացկունությունը բնորոշվում է թիմիական (ներգիայի տրանսֆորմացիայի և օգտագործման ավելի կատարյալ սխեմաների գործունեությամբ, հատկապես էքստրեմալ ջերմաստիճանների պայմաններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К. А. Сергеева, Физиологические и биохимические основы зимостойкости древесных растений, М., «Наука», 1971. ² Э. Ф. Сычева, В. А. Васюкова, Физiol. раст., 19, № 4, 824—830 (1972). ³ Sh. Yoshida, Contributions Inst. of Low Temper. Sci., S. B. № 18, 1—43, Japan, 1974. ⁴ D. Siminovitch, H. Therrien, G. Gfeller, H. Rhaume Can. J. Bot., 42, 637—649, 1964. ⁵ Д. Ф. Проценко, А. И. Коваль, В кн. Физиология зимостойкости растений, Киев, «Наукова думка», 1968. ⁶ А. Ф. Кириллов, Т. Х. Левит, В кн. Физиология зимостойкости винограда и плодовых, Киев, 18—38, 1971. ⁷ В. С. Семин, В. И. Килиянчук, А. Я. Земшан, К. И. Степанов, Физiol. и биохимия культ. растений, т. 7, в. 2, 176—179 (1975). ⁸ Э. Ш. Вашидзе, «Агробиология», № 6, 46—50, 1972. ⁹ А. Л. Курсанов, Изв. АН СССР, сер. биол., № 4, 461—480 (1973). ¹⁰ А. И. Чебан, Физiol. раст., т. 15, в. 2, 329—335 (1968). ¹¹ С. А. Маругян, Особенности метаболизма морозоустойчивых сортов винограда, Автореферат докт. дисс., Ереван, 1971.

