

С.О. СИМОНЯН, М.Г. ЧИЛИНГАРЯН, О.С. АБГАРЯН
ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ
ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА-ПЕНРОУЗА (II)

Предложены аналитические и численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза. Аналитические методы основаны на первых двух условиях Мура-Пенроуза. Показано, что в обоих случаях получается одно и то же решение задачи, что и должно было быть. Численно-аналитические методы основаны на полученных аналитических соотношениях и дифференциальных преобразованиях Пухова. Рассмотрен модельный пример.

Ключевые слова: комплексные однопараметрические матрицы, обобщенные обратные матрицы Мура-Пенроуза, аналитические и численно-аналитические решения, дифференциальные преобразования, средства современных информационных технологий, модельный пример.

Введение. В работе [1] были предложены методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза $A^+(t)_{n \times m}$ при недоопределенных матрицах $A(t)_{m \times n}$, т.е. когда $m < n$. При этих методах были использованы условия Мура-Пенроуза (1, I) и (2, I) этой работы. В настоящей работе рассматриваются методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза $A^+(t)_{n \times m}$ при переопределенных матрицах $A(t)_{m \times n}$, т.е. когда $m > n$, причем и в этом случае используются условия Мура-Пенроуза (1, I) и (2, I).

I. Аналитические решения. Пусть имеется матрица $A(t)_{m \times n}$, для которой $m > n$. По аналогии с автономными матрицами $A_{m \times n}$, обобщенная обратная $A^+(t)_{n \times m}$ будет иметь вид [2, 3]

$$A^+(t)_{n \times m} = [A^*(t) \cdot A(t)]_{n \times n}^+ \cdot A^*(t)_{n \times m}. \quad (1)$$

При разложении (6, I) матрица имеет вид

$$[A^*(t) \cdot A(t)] = [A_1(t) - j \cdot A_2(t)]^T \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)] = [A_1^T(t) \cdot A_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t)] + j \cdot [A_1^T(t) \cdot A_2(t) - A_2^T(t) \cdot A_1(t)] = C_1(t) + j \cdot C_2(t), \quad (2)$$

где

$$C_1(t)_{n \times n} = A_1^T(t) \cdot A_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t), \quad (3)$$

$$C_2(t)_{n \times n} = A_1^T(t) \cdot A_2(t) - A_2^T(t) \cdot A_1(t), \quad (4)$$

а также

$$[A^*(t) \cdot A(t)]^+ = [C_1(t) + j \cdot C_2(t)]^+ = [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)]_{n \times n}. \quad (5)$$

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что матрица $C_1(t)$ симметрическая из-за симметричности слагаемых $A_1^T(t) \cdot A_1(t)$ и $A_2^T(t) \cdot A_2(t)$, а матрица $C_2(t)$ - кососимметрическая с нулевыми диагональными элементами.

Теперь перейдем к определению матрицы $A^+(t)$ с учетом представленных соотношений (1) – (5).

1. Использование условия Мура-Пенроуза (1, I) по отношению к матрице $[A^*(t) \cdot A(t)]$ приводит к следующему выражению:

$$[A^*(t) \cdot A(t)] \cdot [A^*(t) \cdot A(t)]^+ \cdot [A^*(t) \cdot A(t)] = [A^*(t) \cdot A(t)], \quad (6)$$

раскрытие которого с учетом (19, I) и (22, I) дает

$$[C_1(t) + j \cdot C_2(t)] \cdot [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] \cdot [C_1(t) + j \cdot C_2(t)] = [C_1(t) + j \cdot C_2(t)]$$

или

$$\begin{aligned} & [C_1(t) \cdot Y_1(t) \cdot C_1(t) - C_2(t) \cdot Y_2(t) \cdot C_1(t) - C_1(t) \cdot Y_2(t) \cdot C_2(t) - \\ & - C_2(t) \cdot Y_1(t) \cdot C_2(t)] + j \cdot [C_1(t) \cdot Y_1(t) \cdot C_2(t) - C_2(t) \cdot Y_2(t) \cdot C_2(t) + \\ & + C_1(t) \cdot Y_2(t) \cdot C_1(t) + C_2(t) \cdot Y_1(t) \cdot C_1(t)] = [C_1(t) + j \cdot C_2(t)], \end{aligned}$$

откуда имеем матричную систему

$$\begin{cases} C_1(t) \cdot Y_1(t) \cdot C_1(t) - C_2(t) \cdot Y_2(t) \cdot C_1(t) - C_1(t) \cdot Y_2(t) \cdot C_2(t) - C_2(t) \cdot Y_1(t) \cdot C_2(t) = C_1(t), \\ C_1(t) \cdot Y_1(t) \cdot C_2(t) - C_2(t) \cdot Y_2(t) \cdot C_2(t) + C_1(t) \cdot Y_2(t) \cdot C_1(t) + C_2(t) \cdot Y_1(t) \cdot C_1(t) = C_2(t), \end{cases} \quad (7)$$

или

$$\begin{bmatrix} [C_1(t) \cdot Y_1(t) - C_2(t) \cdot Y_2(t)] & -[C_1(t) \cdot Y_2(t) + C_2(t) \cdot Y_1(t)] \\ [C_1(t) \cdot Y_2(t) + C_2(t) \cdot Y_1(t)] & [C_1(t) \cdot Y_1(t) - C_2(t) \cdot Y_2(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} [C_1(t) & -C_2(t)] \\ [C_2(t) & C_1(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [Y_1(t) & -Y_2(t)] \\ [Y_2(t) & Y_1(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} [C_1(t) & -C_2(t)] \\ [C_2(t) & C_1(t)] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \cdot \begin{bmatrix} [Y_1(t) & -Y_2(t)] \\ [Y_2(t) & Y_1(t)] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} - E_{2n \times 2n} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}. \quad (8)$$

Из последнего соотношения имеем:

а) либо

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_1(t) - C_2(t) \\ C_2(t) - C_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(t) - Y_2(t) \\ Y_2(t) - Y_1(t) \end{bmatrix} - E = [0], \quad (9)$$

следовательно,

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) - Y_2(t) \\ Y_2(t) - Y_1(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2n} = \begin{bmatrix} C_1(t) - C_2(t) \\ C_2(t) - C_1(t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n}^+; \quad (10)$$

б) либо

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_1(t) - C_2(t) \\ C_2(t) - C_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(t) - Y_2(t) \\ Y_2(t) - Y_1(t) \end{bmatrix} - E \neq [0],$$

что не представляет никакого интереса.

Таким образом, имея матрицы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$, в соответствии с (1), (2) и (5) можно определить и матрицу

$$A^+(t)_{n \times m} = [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] \cdot [A_1(t) - j \cdot A_2(t)]^T = [Y_1(t) \cdot A_1^T(t) + Y_2(t) \cdot A_2^T(t)] + j \cdot [Y_2(t) \cdot A_1^T(t) - Y_1(t) \cdot A_2^T(t)]. \quad (11)$$

2. Использование условия Мура-Пенроуза (2, I) по отношению к матрице $[A^*(t) \cdot A(t)]$ приводит к следующему выражению:

$$[A^*(t) \cdot A(t)]^+ \cdot [A^*(t) \cdot A(t)] \cdot [A^*(t) \cdot A(t)]^+ = [A^*(t) \cdot A(t)]^+, \quad (12)$$

раскрытие которого с учетом (2) и (5) дает

$$[Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] \cdot [C_1(t) + j \cdot C_2(t)] \cdot [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] = [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)]$$

или

$$\begin{aligned} & [Y_1(t) \cdot C_1(t) \cdot Y_1(t) - Y_2(t) \cdot C_2(t) \cdot Y_1(t) - Y_1(t) \cdot C_2(t) \cdot Y_2(t) - \\ & - Y_2(t) \cdot C_1(t) \cdot Y_2(t)] + j \cdot [Y_1(t) \cdot C_1(t) \cdot Y_2(t) - Y_2(t) \cdot C_2(t) \cdot Y_2(t) + \\ & + Y_1(t) \cdot C_2(t) \cdot Y_1(t) + Y_2(t) \cdot C_1(t) \cdot Y_1(t)] = [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)], \end{aligned}$$

откуда имеем матричную систему

$$\begin{cases} Y_1(t) \cdot C_1(t) \cdot Y_1(t) - Y_2(t) \cdot C_2(t) \cdot Y_1(t) - Y_1(t) \cdot C_2(t) \cdot Y_2(t) - Y_2(t) \cdot C_1(t) \cdot Y_2(t) = Y_1(t), \\ Y_1(t) \cdot C_1(t) \cdot Y_2(t) - Y_2(t) \cdot C_2(t) \cdot Y_2(t) + Y_1(t) \cdot C_2(t) \cdot Y_1(t) + Y_2(t) \cdot C_1(t) \cdot Y_1(t) = Y_2(t), \end{cases} \quad (13)$$

или

$$\begin{bmatrix} [Y_1(t) \cdot C_1(t) - Y_2(t) \cdot C_2(t)] \\ [Y_1(t) \cdot C_2(t) + Y_2(t) \cdot C_1(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [Y_1(t) \cdot C_2(t) + Y_2(t) \cdot C_1(t)] \\ [Y_1(t) \cdot C_1(t) - Y_2(t) \cdot C_2(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ Y_2(t) & Y_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) & -C_2(t) \\ C_2(t) & C_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ Y_2(t) & Y_1(t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) & -C_2(t) \\ C_2(t) & C_1(t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n} - E_{2n \times 2n} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}. \quad (14)$$

Из последнего соотношения имеем:

а) либо

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ Y_2(t) & Y_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) & -C_2(t) \\ C_2(t) & C_1(t) \end{bmatrix} - E = [0], \quad (15)$$

следовательно,

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ Y_2(t) & Y_1(t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} C_1(t) & -C_2(t) \\ C_2(t) & C_1(t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n}^+; \quad (16)$$

б) либо

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ Y_2(t) & Y_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) & -C_2(t) \\ C_2(t) & C_1(t) \end{bmatrix} - E \neq [0],$$

что не представляет никакого интереса.

Таким образом, имея матрицы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$, в соответствии с (11) можно определить и матрицу $A^+(t)_{n \times m}$.

Замечание 2. Очевидно, что при использовании условий Мура-Пенроуза (1, I) и (2, I) и здесь пришли к одному и тому же аналитическому решению, т.е. (10) $\equiv$ (16).

II. Численно-аналитические решения. В качестве основного математического аппарата воспользуемся дифференциальными преобразованиями [4, 5].

Обозначим

$$C(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) & -C_2(t) \\ C_2(t) & C_1(t) \end{bmatrix}, Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ Y_2(t) & Y_1(t) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

при которых матричные дискреты (прямые преобразования)

$$C(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K C(t)}{dt^K} \right]_{t=t_\gamma}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (18)$$

$$Y(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K Y(t)}{dt^K} \right]_{t=t_\gamma}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (19)$$

а тейлоровские матричные оригиналы (обратные преобразования):

$$C(t) = \mathfrak{a}_3(t, t_\gamma, H, C(K)) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t-t_\gamma}{H} \right)^K \cdot C(K) \quad (20)$$

$$Y(t) = \mathfrak{a}_4(t, t_\gamma, H, Y(K)) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t-t_\gamma}{H} \right)^K \cdot Y(K), \quad (21)$$

где t_γ - центр аппроксимации тейлоровских разложений; H - масштабный коэффициент, выравнивающий размерности оригиналов и их изображений; K - целочисленный аргумент; $\mathfrak{a}_3(\cdot)$ и $\mathfrak{a}_4(\cdot)$ - тейлоровские матричные функции, восстанавливающие оригиналы $C(t)$ и $Y(t)$ соответственно. Естественно, при этом предполагается, что все элементы матриц $C(t)$ и $Y(t)$ обладают достаточной степенью гладкости в центре аппроксимации t_γ .

Замечание 3. Матрицы $C(t)$ и $Y(t)$ блочно-кососимметрические относительно первой главной диагонали и блочно-симметрические относительно второй главной диагонали.

Замечание 4. Матричные оригиналы (20) и (21) могут быть восстановлены и другими обратными дифференциальными преобразованиями (например, маклореновскими ($t_\gamma = 0$), дробно-рациональными (Паде), одноточечными, многоточечными и др. [4]).

Теперь перейдем к использованию дифференциальных преобразований для перевода оригиналов (9) и (15) в область дифференциальных изображений.

1. D - аналог условия (9)

Использование дифференциальных преобразований для перевода оригинала (9) в область дифференциальных изображений при соотношениях (17) - (21) приводит к следующему:

при $K = 0$:

$$C(0) \cdot Y(0) = E \cdot \delta(K), \quad \delta(K) = \begin{cases} 1, & \text{если } K = 0, \\ 0, & \text{если } K \geq 1, \end{cases}$$

2nx2n

откуда

$$Y(0) = C^+(0); \quad (22)$$

при $K = 1$:

$$C(0) \cdot Y(1) + C(1) \cdot Y(0) = 0,$$

откуда

$$Y(1) = -C^+(0) \cdot C(1) \cdot C^+(0); \quad (23)$$

при $K = 2$:

$$C(0) \cdot Y(2) + C(1) \cdot Y(1) + C(2) \cdot Y(0) = 0,$$

откуда

$$Y(2) = C^+(0) \cdot [-C(2) + C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1)] \cdot C^+(0); \quad (24)$$

при $K = 3$:

$$C(0) \cdot Y(3) + C(1) \cdot Y(2) + C(2) \cdot Y(1) + C(3) \cdot Y(0) = 0,$$

откуда

$$Y(3) = C^+(0) \cdot [-C(3) + C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(2) - \\ - C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1) + C(2) \cdot C(0) \cdot C(1)] \cdot C^+(0); \quad (25)$$

при $K = K$:

$$C(0) \cdot Y(K) + \sum_{l=1}^K C(l) \cdot Y(K-l) = 0,$$

откуда

$$Y(K) = -C^+(0) [\sum_{l=1}^K C(l) \cdot Y(K-l)], K = \overline{1, \infty} \quad (26)$$

Таким образом, имея матричные дискреты $Y(K)$, $K = \overline{0, \infty}$, будем иметь и блоки $Y_1(K)$ и $Y_2(K)$, а следовательно, оригиналы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ в соответствии с (21). Тогда можно определить и матрицу $A^+(t)_{n \times m}$ в соответствии с (11).

2. D - аналог условия (15)

Использование дифференциальных преобразований для перевода оригинала (15) в область дифференциальных изображений при соотношениях (17) - (21) приводит к следующему:

при $K = 0$:

$$Y(0) \cdot C(0) = E \cdot \delta(K), \quad \delta(K) = \begin{cases} 1, \text{ если } K = 0, \\ 0, \text{ если } K \geq 1, \end{cases}$$

2nx2n

откуда

$$Y(0) = C^+(0) ; \quad (27)$$

при $K = 1$:

$$Y(0) \cdot C(1) + Y(1) \cdot C(0) = 0,$$

откуда

$$Y(1) = -C^+(0) \cdot C(1) \cdot C^+(0); \quad (28)$$

при $K = 2$:

$$Y(0) \cdot C(2) + Y(1) \cdot C(1) + Y(2) \cdot C(0) = 0,$$

откуда

$$Y(2) = C^+(0) \cdot [-C(2) + C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1)] \cdot C^+(0) ; \quad (29)$$

при $K = 3$:

$$Y(0) \cdot C(3) + Y(1) \cdot C(2) + Y(2) \cdot C(1) + Y(3) \cdot C(0) = 0,$$

откуда

$$Y(3) = C^+(0) \cdot [-C(3) + C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(2) - \\ -C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1) + C(2) \cdot C^+(0) \cdot C(1)] \cdot C^+(0) ; \quad (30)$$

·
·
·

при $K = K$:

$$Y(K) \cdot C(0) + \sum_{l=1}^K Y(l) \cdot C(K-l) = 0,$$

откуда

$$Y(K) = -[\sum_{l=1}^K Y(l) \cdot C(K-l)] \cdot C^+(0), \quad K = \overline{1, \infty}. \quad (31)$$

Таким образом, имея матричные дискретные $Y(K)$, $K = \overline{0, \infty}$, будем иметь и блоки $Y_1(K)$ и $Y_2(K)$, а следовательно, оригиналы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ в соответствии с (21). Тогда можно определить и матрицу $A^+(t)_{n \times m}$ в соответствии с (11).

Замечание 5. Во всех предложенных в настоящей работе вычислительных схемах, очевидно, оперируем квадратными обобщенными обратными матрицами в отличие от вычислительных схем работы [5], в которой оперируем прямоугольными обобщенными обратными матрицами. Это обстоятельство, естественно, обуславливает получение точных, а не приближенных решений задачи.

III. Модельный пример. Пусть задана матрица из работы [1]:

$$A(t) = \begin{bmatrix} (1+jt) & jt \\ -jt & (1-jt) \end{bmatrix}, m = n = 2,$$

для которой, очевидно,

$$A^+(t) = \begin{bmatrix} (1-jt) & -jt \\ jt & (1+jt) \end{bmatrix} = A^{-1}(t), \text{ ибо } \det A(t) = 1.$$

С другой стороны, в соответствии с (6, I), (1) - (5), (10) и (16) имеем

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2(t) = \begin{bmatrix} t & t \\ -t & -t \end{bmatrix},$$

$$C_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & -t \\ t & -t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t & t \\ -t & -t \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} (1+2t^2) & 2t^2 \\ 2t^2 & (1+2t^2) \end{bmatrix},$$

$$C_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t & t \\ -t & -t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & -t \\ t & -t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ -2t & 0 \end{bmatrix},$$

а также

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ \hline Y_2(t) & Y_1(t) \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} C_1(t) & -C_2(t) \\ \hline C_2(t) & C_1(t) \end{array} \right]^+ = \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} (1+2t^2) & 2t^2 & 0 & -2t \\ 2t^2 & (1+2t^2) & 2t & 0 \\ \hline 0 & 2t & (1+2t^2) & 2t^2 \\ -2t & 0 & 2t^2 & (1+2t^2) \end{array} \right]^+ = \dots = \\ &= \dots = \left[\begin{array}{cc|cc} (1+2t^2) & -2t^2 & 0 & 2t \\ -2t^2 & (1+2t^2) & -2t & 0 \\ \hline 0 & -2t & (1+2t^2) & -2t^2 \\ 2t & 0 & -2t^2 & (1+2t^2) \end{array} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} C(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} (1+2t^2) & 2t^2 & 0 & -2t \\ 2t^2 & (1+2t^2) & 2t & 0 \\ \hline 0 & 2t & (1+2t^2) & 2t^2 \\ -2t & 0 & 2t^2 & (1+2t^2) \end{array} \right], \\ Y(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} (1+2t^2) & -2t^2 & 0 & 2t \\ -2t^2 & (1+2t^2) & -2t & 0 \\ \hline 0 & -2t & (1+2t^2) & -2t^2 \\ 2t & 0 & -2t^2 & (1+2t^2) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к использованию численно-аналитического метода (22) – (26).

Очевидно, при $t_\gamma = 0, H = 1$:

$$C(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C^+(0) = Y(0), C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, C(K \geq 3) = [0].$$

Следовательно:

при $K = 1$:

$$Y(1) = -C^+(0) \cdot C(1) \cdot C^+(0) = \dots = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

при $K = 2$:

$$Y(2) = C^+(0) \cdot [-C(2) + C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1)] \cdot C^+(0) = -C(2) + C^2(1) =$$

$$\dots = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix};$$

при $K = 3$:

$$Y(3) = C^+(0) \cdot [-C(3) + C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(2) -$$

$$-C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1) \cdot C^+(0) \cdot C(1) + C(2) \cdot C^+(0) \cdot C(1)] \cdot C^+(0) =$$

$$= C(1) \cdot C(2) - C^3(1) + C(2) \cdot C(1) = \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться также, что при

при $K \geq 3$:

$$Y(K) = [0].$$

Таким образом, матрица $Y(t)$ в соответствии с (21) выглядит так:

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= Y(0) + Y(1) \cdot t + Y(2) \cdot t^2 = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot t^2 = \\
 &= \begin{bmatrix} (1+2t^2) & -2t^2 & 0 & 2t \\ -2t^2 & (1+2t^2) & -2t & 0 \\ 0 & -2t & (1+2t^2) & -2t^2 \\ 2t & 0 & -2t^2 & (1+2t^2) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

что точно совпадает с представленным выше аналитическим решением. При этом решение задачи $A^+(t)$ в соответствии с (11) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 A^+(t) &= [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] \cdot [A_1(t) - j \cdot A_2(t)]^T = \\
 &= \left[\begin{bmatrix} (1+2t^2) & -2t^2 \\ -2t^2 & (1+2t^2) \end{bmatrix} + j \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2t \\ 2t & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - j \cdot \begin{bmatrix} t & t \\ -t & -t \end{bmatrix} \right]^T = \dots = \\
 &= \begin{bmatrix} (1-jt) & -jt \\ jt & (1+jt) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

что точно совпадает с решением, полученным в [1], что и должно было быть.

Заключение. В настоящей работе предложены точные аналитические и приближенные численно-аналитические вычислительные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза. Численно-аналитические вычислительные схемы легко реализуемы средствами современных информационных технологий [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Симонян С.О., Чилингарян М.Г., Абгарян О.С.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (I) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2023. - № 2. – С. 9 - 22.
2. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. - М.: Физматлит, 2010. - 560 с.
3. **Ланкастер П.** Теория матриц. - М.: Наука, 1978. - 280 с.
4. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984. - 419 с.
5. **Симонян С.О.** Методы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц: Монография. - LAP LAMBERT Academic Publishing RU, Saarbrücken, Deutschland, 2017. - 222 с.
6. **Kong Q., Siau T., Bayan A.** Python Programming and Numerical Methods. A Guide for Engineers and Scientists. - Academic Press, 2021. - 455p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 19.12.2023.

Մ.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Մ.Գ. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ, Հ.Ս. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

**ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒԶԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ
ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԴԵԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ (II)**

Առաջարկվել են Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման անալիտիկ և թվա-անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն մեթոդներ: Անալիտիկ մեթոդները հիմնված են Մուր-Պենրոուզի առաջին երկու պայմանների վրա: Ցույց է տրվել, որ երկու դեպքում էլ ստացվում է միևնույն լուծումը, ինչը և պետք է լինի: Թվա-անալիտիկ մեթոդները հիմնված են ստացված անալիտիկ հարաբերակցությունների և Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Դիտարկվել է մոդելային օրինակ:

Առանցքային բառեր. կոմպլեքս միապարամետրական մատրիցներ, Մուր-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձ մատրիցներ, անալիտիկ և թվա-անալիտիկ լուծումներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցներ, մոդելային օրինակ:

S.H. SIMONYAN, M.G. CHILINGARYAN, H.S. ABGARYAN

**DECOMPOSITION METHODS FOR DETERMINING COMPLEX ONE-
PARAMETER GENERALIZED INVERSE MOORE-PENROSE
MATRICES (II)**

Analytical and numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices are suggested. Analytical methods are based on the first two Moore-Penrose conditions. It is shown that in both cases, the same solution to the problem is obtained, as it should be. Numerical-analytical methods are based on the obtained analytical relations and differential Pukhov transformations. A model example is considered.

Keywords: complex one-parameter matrices, generalized inverse Moore-Penrose matrices, analytical and numerical-analytical solutions, differential transformations, means of modern information technologies, model example.