ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXI, № 4

1975

Խմբագրական կոլեգիա

Ն. Ս. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, ակադ. (գլխ. խմբագիր), Ա. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՅԱՏՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԳԱԼՈՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Գ. ԳԵՎՈՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Գ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Դ. ՄԱՂԱԲՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (գլխ. խմբագիր), Դ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ս. Ռ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ս. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՆԱՍՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Ռ. ՏԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, П. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ — ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 5

Հ. Ի. Մարտիրոսյան — Փոխադարձաբար օպտիմալ տրանսլյացիա չթույլատրող այգորիթմական չեզուների մասին 193

Ա. Ա. Իսսիֆյան — Բնութագրերի վրա սկզբնական և սահմանային պայմաններով մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար խառը խնդիրների լուծելիության մասին 198

Ա. Ե. Պիմենյան — Գաուսյան ստացիոնար պրոցեսների և նրան մոտարկող բնկյալի տարբերության չեզման միջին քվի մասին 205

Ի. Ա. Նռհապետյան — Կենտրոնական սահմանային թեորեմն ուժեղ խառնուրդի պայմանին բավարարող պատահական դաշտերի համար 210

Ի. Գ. Ենգչինա — Բազմապատիկ կետերով նեռելինա — Գինկի չսչափող պրոցեսը . 214

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ի. Ս. Ալեքսանյան — Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության սեռության հարթ խնդրի հավասարումների լուծումների մի դասի մասին 219

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱ

Ա. Վ. Իսսիֆյան — Դաշտ էլեկտրադինամիկայի ֆիզիկական հիմունքների մասին . 225

ՋԵՋԻՄԱ

Դ. Ա. Վարդանյան — Դեֆեկտների ներդրումը բյուրեղի ջերմունակության մեջ 228

ԻՆԺԵՆԵՐԱԿԱՆ

Ս. Ա. Մարտիրոսով, Գ. Ա. Գրիգորյան — Անհավասարաչափ շարժվող սահման ունեցող այրքատարում էլեկտրամագնիսական այրքերի տարածման մասին . . . 231

ՁԵՎԱՓՈԽԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ա. Թ. Բարսամյան, Ա. Ա. Ղազարյան — Պոլիթորուսրենի կառուցվածքային վերափոխումներ տաքացումից 236

ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱՅԻՆ

Ա. Ա. Գյուրջյան, Գ. Մ. Բարսեղյան — Ածխաջրածնի սոդիկի հանքավայրում ներդաշնան հանքային մարմինների հայտնաբերման մասին 240

ԱԳՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

Ի. Ռ. Հարությունյան, Մ. Գ. Ստեփանյան, Ն. Ա. Կարապետյան, Մ. Ք. Զայրեխյան — Ամման կարգավորիչների ազդեցությունը պարարտաքարերի նկատմամբ ոլորի բույսի վարակունակության և ստրեսինանման ու ֆենոլային նյութերի պարունակության վրա 210

Журнал издается с 1944 года

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

Г. Б. Маркарян—Об алгоритмических языках, не допускающих взаимной оптимальной трансляции . . . 193

А. А. Иосифьян—О разрешимости смешанных задач для уравнений с частными производными с начальными и граничными условиями на характеристиках . . . 198

А. А. Симонян—О среднем числе уклонений разности гауссовского стационарного процесса и аппроксимирующей его ломаной . . . 205

Б. С. Нахапетян—Центральная предельная теорема для случайных полей, удовлетворяющих условию сильного перемешения . . . 210

И. П. Федчина—Касательная проблема Неванлинны—Пика с кратными точками . . . 214

МЕХАНИКА

Р. К. Алексанян—Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела . . . 219

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

А. Г. Иосифьян—О физических основах дуальной электродинамики . . . 225

ФИЗИКА

Г. А. Вардиян—Влияние дефектов на теплоемкость кристалла . . . 228

РАДИОФИЗИКА

К. А. Барсуков, Г. А. Григорян—О распространении электромагнитных волн в волноводе с нерегулярно движущейся границей . . . 231

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

С. Т. Бреймин, С. А. Казарян—Структурные превращения в полихлоропрене при нагреве . . . 238

ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ

А. А. Гюрджян, П. М. Биргикян—О выявлении согласных рудных тел на Советашенском месторождении ртути . . . 246

МИКРОБИОЛОГИЯ

Р. Ш. Арутюнян, М. Д. Степанян, Н. А. Карапетян, М. А. Чайлахян—Влияние регуляторов роста на восприимчивость растений гороха к клубеньковым бактериям и содержание ауксиноподобных и фенольных веществ . . . 250

© Издательство АН Армянской ССР, 1975 г.

Индекс 77730

CONTENTS

MATHEMATICS p.

H. B. Marandjian —On algorithmical languages with no obtimality preserving translations between them. 193

A. A. Iosifian —About the solution of the mixed problems for partial differential equations with initial and boundary value on the characteristics. . . 198

A. H. Simonian —About mean derivations of differences between the Gaussian stationary process and its approximate curve 205

B. S. Nakapetian —The central limit theorem for the random fields with strong mixing property 210

J. P. Fedchina —The shearing problem of Nevanlinna—Peake with multiple points 214

MECHANICS

R. K. Alexanian —On the solution of a class of equations of plane problems of the theory of elasticity for an anisotropic body 219

ELECTRODYNAMICS

A. G. Yosifian —On various fundamentals of dual electrodynamics . . 225

PHYSICS

G. A. Vardanian—Contribution on the specific heat of the crystal . . 228

RADIOPHYSICS

K. A. Barsukov, G. A. Grigorian—On the propagation of electromagnetic waves in the waveguide with a nonuniform moving boundary 23

PHYSICOCHEMISTRY

S. T. Barsamian, S. A. Kasarian —Structural transformations in polychloroprene during heating 238

ORE DEPOSITS

A. A. Gurdjian, P. M. Bartikian —On detection of correspondent ore bodies in the Sovetashen mercury ore deposit 246

MICROBIOLOGY

R. S. Arutunian, M. D. Stepanian, N. A. Karapetian, M. Kh. Chailakhian, —The influence of regulators of growth on the invasion of the pea plants to the nodule bacterium and contents of auxin-like and phenol substances. . 250

Технический редактор Л. А. АЗНИЗБЕКЯН

Вр 19127. Подписано к печати 31/XII 1975 г. Тираж 546. Изд 4451. Заказ 801
Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0.
Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,41

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24.
Эчмиадзинская типография Издательства АН Армянской ССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 51.01 : 518.5

МАТЕМАТИКА

Г. Б. Маранджян

Об алгорифмических языках, не допускающих взаимной оптимальной трансляции

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 15/IV 1975)

В теории алгорифмов значительную роль играет теорема Х. Роджерса ([1]), известная как теорема об изоморфизме универсальных нумераций. К сожалению, техника доказательства этой теоремы не позволяет судить о том, какова величина «избыточности» образа функции по сравнению с прообразом. Основным содержанием данной работы является доказательство того, что для любой пары критериев сложности, удовлетворяющих аксиомам Блюма ([2]) и любому алгорифмическому языку из весьма широкого класса алгорифмических языков* (включающего универсальные) можно построить второй алгорифмический язык, равнообъемный исходному, таким образом, что никакая трансляция из одного языка в другой с помощью алгорифма, принадлежащего этим языкам, не может сохранять свойство алгорифма быть минимальным (среди эквивалентных) по соответствующей мере.

Уточним основные понятия работы. Не ограничивая общности, изложение будем вести на примере частично-рекурсивных функций (ЧРФ). Дадим то определение понятия «алгорифмический язык», которым мы будем пользоваться (иногда будем писать ради кратности просто «язык»).

Определение 1. Пусть φ—двухместная ЧРФ. Класс функций $\{\lambda x|\varphi(n, x)|\}$ будем называть **алгорифмическим языком**, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) содержит все константные функции,

2) замкнут относительно операции суперпозиции.

Будем говорить, что функция φ **определяет** этот язык. Язык, определяемый данной функцией, будем обозначать соответствующей прописной буквой.

Если φ определяет алгорифмический язык Φ, то символом φ_n

* Все понятия, используемые пока на интуитивном уровне, будут уточнены ниже.

[illegible]

будем обозначать функцию $\lambda x[\varphi(n, x)]$ и n будем называть **номером** этой функции в языке Ф. Ясно, что одна и та же функция может иметь более одного номера (в богатых языках обычно бесконечное число номеров).

Определение 2. Общерекурсивную функцию α назовем **транслятором** из языка Ф в язык Ψ, если выполнено следующее условие:

$$\forall n \forall x(\varphi(n, x) \simeq \psi(\alpha(n), x)).$$

Определение 3. Транслятор α из Ф в Ψ назовем **собственным**, если $\alpha \in \Phi \cap \Psi$.

Определение 4. (см ([1])) общерекурсивную функцию s назовем **мерой сложности**, если существует такая ОРФ β, что

$$\forall y(|x|s(x) \leqslant y| = D_{\beta(y)}),$$

где D—каноническая нумерация всех конечных множеств натуральных чисел.

Определение 5. Будем говорить, что номер n s-минимален в языке Ф, если выполнено условие:

$$\forall y(s(y) < s(n) \supset \varphi_y \neq \varphi_n).$$

Теорема. *Каковы бы ни были алгорифмический язык Ψ и меры сложности s_1 и s_2, существует такой алгорифмический язык Ξ, равнообъемный языку Ψ, что не может существовать собственного транслятора α из Ψ в Ξ и (собственного транслятора β из Ξ в Ψ), удовлетворяющего условию*
$\forall n((n\ s_1$*-минимален*$) \supset (\alpha(n)\ \ s_2$*—минимален*$))$ *(соответственно* $(n\ s_2$*—минимален*$) \supset \beta(n)\ s_1$*—минимален*$)$.

Доказательство. Пусть a—номер некоторой константной функции, если язык Ψ содержит только ОРФ и номер пустой функции в противном случае. Будем обозначать через B^i_x множество $|z/s_i(z)=x|$, где $i=1, 2$. Очевидно, что множества B^i_x описываются эффективно. Через $|A|$, где A списковое множество, будем обозначать мощность A.

На первом этапе строим последовательность чисел $e(0), e(1), \ldots$ следующим образом:

$$\begin{cases} e(0) = \mu y(|B^1_y| \neq 0); \\ e(n+1) = \mu y(y > e(n)\ \&\ |B^1_y| \neq 0). \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$E_n = B^1_{e(n)};$$

Через $E_n(k)$, где $1 \leqslant k \leqslant |E_n|$, обозначим k-й по величине (в порядке возрастания) элемент множества E_n.

На втором этапе построения строим конечные последовательности конечных множеств $F(n, k)$ и чисел $f(n, k)$ следующим образом:

$$f(0,\ 1)=\mu t(|B_t^2|\neq 0);$$

$$F(0,\ 1)=B^2_{f(0,1)}.$$

В дальнейшем интервал изменений k зависит от n:

$$1\leqslant k\leqslant |E_n|+1;\quad k_n=|E_n|+1.$$

$$f(n+1,1)=\mu t(|\bigcup_{p=f(n,k_n)+1}^{t} B_p^2|>|E_{n+1}|+2);$$

$$f(n+1,\ q+1)=\mu t(|\bigcup_{p=f(n+1,\ q)+1}^{t} B_p^2|\geqslant |E_{n+1}|+2);$$

$$F(n+1,\ 1)=\bigcup_{p=f(n,\ k_n)+1}^{f(n+1,1)} B_p^2;$$

$$F(n+1,\ q+1)=\bigcup_{p=f(n+1,\ q)+1}^{f(n+1,\ q+1)} B_p^2.$$

Очевидно, что эти последовательности порождаются эффективно.

Введем обозначение

$$g(n,\ p)=\max x(s_2(x)\geqslant s_2(y)\ \&\ y\in F(n,\ p)\ \&\ x\in F(n,\ p)).$$

Заметим, что

$$s_2(g(n,\ p))<s_2(g(n,\ p+1))\quad \text{и}$$

$$s_2(g(n,\ p))<s_2(g(n+1,\ r))\quad \text{для всех } p,\ r,\ n.$$

Определим теперь для каждого h и x значение $\xi(h,\ x)$ следующим образом.

Этап I. Проверяем, выполнено ли условие $h\in F(0,\ 1)$. Если оно выполнено, то полагаем

$$\xi(h,\ x)\simeq\psi_a(x).$$

Если же это условие не выполнено, (а это проверяется алгорифмически), то переходим к этапу II.

Этап II. Проверяем, существует ли такая пара $\langle n,\ p\rangle$, что $h=g(n,\ p)$. Если такие n и p существуют, то полагаем

$$\xi(h,\ x)\simeq\psi_{E_n(p)}(x).$$

В противном случае переходим к выполнению следующего этапа.

Этап III. Ищем такие n и p, что $h\in F(n,\ p)$. (очевидно, что $h\neq g(n,\ p)$. Начинаем одновременно вычислять $\psi_{E_n(p)}(E_n(p))$ и значения $\psi_{E_n(p)}$ на множестве $F(n,\ p)$.

Если все вычисления завершаются, то рассматриваем множество

$$F(n,\ p)\setminus\{\psi_{E_n(p)}(E_n(p))\}.$$

Обозначим это множество символом $A(n,\ p)$. Из построения $F(n,\ p)$ видно, что $|F(n,\ p)|\geqslant|E_n|+2$, следовательно $|A(n,\ p)|\geqslant|E_n|+1$. Вычисляем теперь $\psi_{E_n(p)}(z)$ для всех $z\in F(n,\ p)\setminus\{g(n,\ p)\}$. Если и эти

вычисления завершаются, то рассматриваем полученные значения $\psi_{E_n(p)}(z)$ для указанных z.

Возможны 2 случая:

а) $\psi_{E_n(p)}(z) \in E_n$ для всех указанных z;

б) противоположный случай.

Рассмотрим случай а). Поскольку $|A(n, p)| > |E_n| + 1$, то по крайней мере два элемента z_1 и z_2 имеют один и тот же образ относительно $\psi_{E_n(p)}$; выберем такую пару, чтобы первый элемент был наименьшим, а второй—наименьшим из остальных возможных (такой выбор единственен). Пусть это будет пара $\langle z_1, z_2 \rangle$. Если $h = z_1$, то положим $\xi(h, x) \simeq \psi_{E_n(p)}(x)$, если же $h = z_2$, то положим

$$\xi(h, x) \simeq \psi_{E_n(p)}(x).$$

В случае б) выберем наименьшее из z таких, что $\psi_{E_n(p)}(z) \notin E_n$; обозначим его через z_3. Если $h = z_3$, то положим

$$\xi(h, x) \simeq \psi_{E_n(p)}(x).$$

Для всех остальных h, принадлежащих $F(n, p)$, для которых ξ еще не задана, положим $\xi(h, x) \simeq \psi_a(x)$.

Заметим, что если необходимые проверки на этапе III не осуществились, то $\xi(h, x)$ окажется неопределенной. Это возможно только в том случае, когда Ψ содержит не общерекурсивные функции и автоматически получим $\xi(h, x) = \psi_a(x)$, в соответствии с выбором a. Если же все вычисления завершаются, то вписывается на месте h в Ξ соответствующая функция $\psi_a(x)$.

На этом построение функции ξ завершается.

Докажем, что ξ—искомая. Из построения ξ легко видеть, что $\Xi \supseteq \Psi$, так как $\psi_{E_n(p)}$ имеет номер $g(n, p)$ в Ξ. Обратное также очевидно: каждому номеру в Ξ поставлена в соответствие некоторая функция из Ψ.

Допустим, что существует собственный транслятор β из Ξ в Ψ, сохраняющий минимальность. Пусть $E_n(p)$ есть некоторый (таких может быть несколько) s_1--минимальный номер функции β. Очевидно, что β—ОРФ.

В силу этого определены все значения

$$\psi_{E_n(p)}(E_n(p)) \quad \text{и} \quad \psi_{E_n(p)}(z) \quad \text{для} \quad z \in F(n, p).$$

Если при этом имеет место случай а) этапа III, то окажется, что $\xi_{z_1} \neq \xi_{z_2}$, но $\beta(z_1) = \beta(z_2)$, в то время как по предположению β—транслятор. Следовательно, случай а) невозможен. Пусть имеет место б). Тогда существует такое $z_3 \in F(n, p)$, что $\beta(z_3) \notin E_n$. Возможны 2 случая. Либо s_1—сложность $\beta(z_3)$ больше s_1—сложности элементов E_n, либо меньше (так как E_n — множество уровня). Если бы имел место первый случай, то оказалось бы, что β имела бы в языке Ψ номер, сложность которого меньше, чем сложность $E_n(p)$, что невозможно

в силу выбора $E_n(p)$, либо $\mathfrak{Z}$—не транслятор. Во втором случае оказалось бы, что номер z_3 не s_2—минимален в Ξ, что также невозможно в силу того, что ни один номер, меньший z_3, не приписан функции $\psi_{E_n(p)}$ при построении. Итак, в каждом из рассмотренных случаев мы приходим к противоречию. Следовательно, такого транслятора $\mathfrak{Z}$ не существует.

Докажем теперь, что невозможен транслятор α упомянутого типа из Ψ в Ξ.

В самом деле, s_2—минимальными номерами могут оказаться лишь те, которые не совпадают с некоторым $g(n, p)$. Но в этом случае, согласно построению на этапе III, значение такого транслятора на своем s_1—минимальном номере, скажем $E_n(p)$, не может совпадать ни с z_1, ни с z_2, следовательно будет равно некоторому номеру функции ψ_a, откуда непосредственно вытекает, что α не является транслятором. Теорема доказана.

Следствие. *Каковы бы ни были функции сложности s_1, s_2 и универсальная нумерация Ψ, существует такая универсальная нумерация Ξ, что невозможны рекурсивные трансляторы из Ψ в Ξ и из Ξ в Ψ, сохраняющие свойство минимальности.*

Для доказательства достаточно убедиться в универсальности Ξ. Для этого достаточно доказать сводимость Ψ к Ξ. Нетрудно видеть, что для нахождения образа номера n достаточно найти соответствующее число $E_k(p)$ и затем вычислить $g(k, p)$, которое и будет соответствующим номером из Ξ. Технические детали такого построения хотя и громоздки, но очевидны.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного университета

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ

Փոխադարձաբար օպտիմալ տրանսլյացիա չթույլատրող ալգորիթմական լեզուների մասին

Հոդվածում ապացուցված է, որ ինչպիսին էլ լինեն Մ. Բլյումի աքսիոմին բավարարող s_1 և s_2 ծավալային բարդության ֆունկցիաները և տեղադրման գործողության նկատմամբ փակ, հաստատուններ պարունակող Φ ալգորիթմական լեզուն, գոյություն ունի Φ-ին նույնածավալ այնպիսի Ψ ալգորիթմական լեզու, որ հնարավոր չէ օպտիմալ (ըստ համապատասխանաբար s_1 և s_2 ծավալային հայտանիշների) տրանսլյացիա Φ-ից Ψ, ինչպես նաև Ψ-ից Φ։ Այդ արդյունքը տարածվում է նաև ունիվերսալ ալգորիթմական լեզուների դեպքի վրա, չնայած այն հանգամանքին, որ այդ լեզուների համար տեղի ունի Հ. Ռոջերսի ունիվերսալ ալգորիթմական լեզուների իզոմորֆիզմի մասին հանրահայտ թեորեմը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Rogersj*, The Journal of Symbolic Logic, 23, № 3, 331—341 (1958).
[2] *M. Blum*, On the size of machines, Information and Control, 11, №3, 257—265(1967).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

А. А. Иосифьян

О разрешимости смешанных задач для уравнений с частными производными с начальными и граничными условиями на характеристиках

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 20/VI 1975)

Цель работы—изучение разрешимости смешанных задач для уравнений в частных производных, главная часть которых содержит

$$\Lambda_1 U = \frac{\partial^{m+n} U}{\partial x^m \partial t^n}, \tag{1}$$

где Λ_1 —оператор, действующий из некоторого гильбертова пространства $\hat{H}$ в $\hat{H}$ (определение $\hat{H}$ будет дано ниже), а граничные и начальные условия задаются на характеристиках $x=0$, $x=a$, $t=0$, $t=a$, в области $x, t \in \Theta = [0, a] \times [0, a]$.

В работах ([1,2]) изучалась разрешимость смешанных задач для уравнений, главная часть которых имела вид:

$$\Lambda_1 U = \frac{\partial^n U}{\partial t^n} + b \frac{\partial^{m_0} U}{\partial x^{m_0}} = f(x, t). \tag{2}$$

Уравнению (2) соответствовало характеристическое уравнение

$$\lambda^n + b(i\alpha)^{m_0} = 0. \tag{3}$$

В работе ([3]) изучалась разрешимость смешанных задач для уравнений вида

$$\Lambda_1 U = \frac{\partial U^n}{\partial x^n} + \sum_{\substack{k<n \\ l<m}} a_{kl} \frac{\partial^{k+l} U}{\partial t^k \partial x^l} = f(x, t), \tag{4}$$

удовлетворяющих условию корректности задачи Коши, которое состоит в следующем: для чисто мнимых $\alpha = i\eta$ корни $\lambda(\alpha)$ характеристического уравнения

$$\lambda^n + \sum_{\substack{k<n \\ l<m}} a_{kl} \lambda^k \alpha^l = 0 \tag{5}$$

удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda = \sigma < \sigma_0$ равномерно по α, фиксировав не

которое λ_0, Re $_0 > \sigma_0$, будем иметь среди корней $a_l(\lambda_0)$ $l = 1 \ldots m$ r_- —корней, лежащих слева от мнимой оси, и r_+ справа. Для (4) смешанные задачи рассматривались в областях $t > 0$; $t > 0$ $0 \leqslant x \leqslant 1$; $t > 0$, $x > 0$ для (2) в области x, $t \in \Theta = [0, a] \times [0, a]$ в работах ([2,3]) было доказано, что при фиксированных условиях по переменной t (условиях Коши в ([3]) и сильно регулярных граничных условиях в (2)) для существования ограниченного обратного оператора Λ_1^{-1} —число однородных граничных условий по переменной x при $x = 0$ и при $x = a$ должно выбираться в соответствии с расположением корней характеристического уравнения, а именно, при $x = 0$ должно быть задано r_-—граничных условий, а при $x = a$—r_+, и только так. В отличие от этого, если граница области является характеристикой для уравнения $\Lambda_1 U = f$ то, как показывает следующий пример, в выборе числа граничных условий по переменной x допустим некоторый произвол (при фиксированных условиях по t)

Пример:

$$\Lambda_1 U = \frac{\partial^2 U}{\partial t \, \partial x^2} = f(x, t)$$

$$U\Big|_{x=0} = 0 \qquad U\Big|_{x=1} = 0 \qquad U\Big|_{t=0} = 0 \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ t > 0 \end{matrix} \tag{6}$$

Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (6). Решением будет функция

$$U(x, t = \frac{1}{2} \int_0^t \left[(1-x) \int_0^x x_1 f(x_1 t_1) dx_1 + x \int_0^x (1-x_1) f(x_1, t_1) dx_1 dt_1 \right].$$

Это решение единственно и непрерывно зависит от $f(x, t)$. В то же время вторая задача: найти решение этого же уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$U\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad U\Big|_{t=0} = 0 \tag{7}$$

также является однозначно разрешимой, решение дается формулой

$$U(x, t) = \int_0^t \left[\int_0^x (x - x_1) f(x_1 t_1) \, dx_1 \right] dt_1.$$

В строгой операторной формулировке (которая будет дана ниже) это означало бы, что в данном примере как при граничных условиях (6), так и при (7) Λ_1^{-1} существует, определен на всем $\hat{H}$ и ограничен. Другая особенность задач с начальными и граничными условиями на характеристиках состоит в том, что в них выбор граничных условий на x существенно влияет на вид членов, входящих в младшую часть уравнения. Это явление не наблюдается в задачах

с нехарактеристической главной частью.

1. *Основные определения и обозначения.* Всюду далее будет рассматриваться уравнение

$$\Lambda U = \Lambda_1 U + \Lambda' U = \Gamma_n\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^m U}{\partial x^m} + \sum_{p_1=0,\, p_2=0}^{m-1\; n-1} a_{p_1 p_2}(x)\frac{\partial^{p_1+p_2} U}{\partial x^{p_1}\partial t^{p_2}} = f(x,t), \tag{8}$$

через Λ_1 обозначена главная часть оператора $\Lambda_1 = \Gamma_n\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^m}{\partial x^m}$,

через Λ' —младшая часть $\Lambda' = \sum_{p_1=0,\, p_2=0}^{m-1\; n-1} a_{p_1 p_2}(x)\frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial x^{p_1}\partial t^{p_2}}$.

Рассмотрения ведутся в области $(x, t) \in [0, a] \times [0, a]$. Пусть по t заданы сильно регулярные граничные условия вида:

$$\sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{sq} U_t^{(q)}(x, 0) + \sum_{q=0}^{n-1} \beta_{sq} U_t^{(q)}(x, a) = 0 \tag{9}$$

$s = 1 \ldots n$; α_{sq}, β_{sq} —комплексные числа.

Через $\Gamma_n\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ обозначен дифференциальный полином порядка n относительно $\frac{\partial}{\partial t}$ с непрерывными по t коэффициентами и коэффициентом при $\frac{\partial^n}{\partial t^n}$, равным 1. Известно (см. ([4])), что при граничных условиях (9) $\Gamma_n\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ обладает полной системой собственных функций $\{\varphi_p(t)\}$, образующей базис Рисса в $L_2[0, a]$ обозначим через $\{\lambda_p\}$ соответствующую ему систему собственных значений. Известно (см. ([4])), что при больших значениях p $\{\varphi_p(t)\}$ и $\{\lambda_p\}$ в первом приближении ведут себя так же, как собственные значения и собственные функции оператора $\frac{\partial^n}{\partial t^n}$ при граничных условиях (9).

Везде далее будем обозначать через $\mu_p = \frac{1}{\lambda_p}$. Пусть граничные условия по переменной x однородные, распадающиеся и заданы следующим образом:

$$U_x^{(i_1)}(0, t) = U_x^{(i_2)}(0, t) = \ldots \quad U_x^{(i_r)}(0, t) = 0$$
$$U_x^{(\bar{i}_1)}(a, t) = U_x^{(\bar{i}_2)}(a, t) = \ldots \quad = U_x^{(\bar{i}_k)}(a, t) = 0 \tag{10}$$

$$0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant m-1; \quad 0 \leqslant \bar{i}_1 < \ldots < \bar{i}_k \leqslant m-1 \tag{11}$$
$$k + r = m$$

Тогда (см. ([4]) стр. 20) сопряженные относительно $\frac{d^m}{dx^m}$ граничные условия будут иметь вид:

$$U_x^{(j_1)}(0,t)=\ldots\quad=U_x^{(j_{m-r})}(0,t)=0, \tag{12}$$

$$U_x^{(\bar{j}_1)}(a,t)=\ldots\quad=U_x^{(\bar{j}_{m-k})}(a,t)=0, \tag{13}$$

$$j_1<\ldots<j_{m-r};\quad \bar{j}_1<\ldots<\bar{j}_{m-k}.$$

Обозначим через $n_1,\ldots,n_{m-r}$ порядки производных, не входящие в (10), через $m_1,\ldots,m_{m-k}$ — не входящие в (11), через $\bar{n}_1,\ldots,\bar{n}_r$ — не входящие в (12) и через $\bar{m}_1,\ldots,\bar{m}_k$ не входящие в (13). Через H обозначим гильбертово пространство со скалярным произведением $(f,g)_H=\int\limits_0^a\int\limits_0^a f(x,t)\bar{g}(x,t)\,dx\,dt$ соответственно через H_t: $(f,g)_{H_t}=$ $=\int\limits_0^a h(t)\bar{g}(t)\,dt$.

Обозначим через $[\bar{\varphi}_p(t)]$ — биортогональную к $[\varphi_p(t)]$ систему функций, которая (см. ([4])) тоже образует базис Рисса в $L_2[0,a]$. Через P_k будем обозначать оператор проектирования $U(x,t)$ на одномерное пространство, натянутое на базисную функцию $\varphi_k(t)$

$$P_k U(x,t)=(U(x,t),\varphi_k(t))_{H_t}\cdot\varphi_k(t)$$

Всюду далее будем считать, что $U(x,t)\in C^{m+n}[0,a]\times[0,a]$. Через $\hat{H}$ обозначим замыкание по норме H множества всех конечных линейных комбинаций вида: $\Lambda\sum\limits_{k\in\Lambda}P_k U$. Будем считать, что Λ действует из $\hat{H}$ в $\hat{H}$.

2. *Некоторые вспомогательные леммы. Основная теорема.* Лемма 1. *Пусть $[\varphi_p(t)]$ — полная в H система собственных функций оператора $V_n\left(t,\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ при сильно регулярных граничных условиях* (9), *а $[\lambda_p]$ — соответствующая ей система собственных значений. Тогда для производных $\dfrac{\partial^{(j)}\varphi_p(t)}{\partial t^j}$ $0\leqslant j\leqslant n-1$ и собственных значений $[\lambda_p]$ справедливы оценки*

$$|\varphi_p^j(t)|\leqslant C|\lambda_p|^{\frac{j}{n}}, \tag{14}$$

где $\bar{c}$ C $\bar{C}$ — комплексные числа, зависящие от граничных условий (9)

$$\text{и}\quad \bar{c}\cdot p^n\leqslant|\lambda_p|\leqslant\bar{C}\cdot p^n \tag{15}$$

Доказательство основано на асимптотических формулах, полученных в ([4]).

Лемма 2. *Если граничные условия* (10)—(11) *заданы таким образом, что ядро оператора $\dfrac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial t^n}$ состоит из* 0, *то*

$$\Lambda_1^{-1}f=\sum_p \mu_p \int_0^a G(x,\xi)(f,\bar{\varphi}_p)_{H_t}d\xi\cdot\varphi_p(t), \tag{16}$$

где
$$G(x,\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{m-1}\bar{P}_l(\xi)x^l & 0\leqslant x<\xi\\ \sum\limits_{l=0}^{m-1}\bar{Q}_l(\xi)x^l & \xi<x\leqslant a\end{cases}$$

а $\bar{P}_l(\xi)$ и $\bar{Q}_l(\xi)$ —многочлены от ξ порядка, меньшего или равного $m-1$, и Λ_1^{-1} —вполне непрерывный оператор.

Доказательство основано на построении функции Грина для оператора $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ и том факте, что предел по норме $L_1[0,a]\times[0,a]$ последовательности вполне непрерывных операторов есть оператор вполне непрерывный (при этом существенно используется лемма 1 и порядок убывания функций $\varphi_p(t)$).

Основная теорема.

Пусть дано уравнение

$$\Lambda U=\Lambda_1 U+\Lambda' U=\Gamma_n\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^m U}{\partial x^m}+\sum_{p_1=0,\,p_2=0}^{m-1\;n-1} a_{p_1p_2}(x)\frac{\partial^{p_1+p_2}U}{\partial x^{p_1}\partial t^{p_2}}=f(x,t) \tag{17}$$

$$\text{где}\quad p_1\neq\begin{cases}n_i+\bar{n}_i+1\\ m_j+\bar{m}_j+1\end{cases} \tag{17'}$$

Пусть в области $\Theta_{x,t}=[0,a]\times[0,a]$ заданы сильно регулярные граничные условия по переменной вида x (9) и распадающиеся однородные условия по переменной x, вида (10)—(11).

Пусть, кроме того, условия (10)—(11) выбраны так, что ядро оператора Λ_1 состоит из 0. Тогда уравнение (17) эквивалентно уравнению

$$U+\Lambda_1^{-1}\Lambda' U=\Lambda_1^{-1}f, \tag{18}$$

которое является фредгольмовым и, следовательно, разрешимо при правых частях $f\in H$ удовлетворяющих условию $(f,\bar{U})=0$ где $\bar{U}$—решение уравнения

$$\bar{U}+(\Lambda_1^{-1}\Lambda')^*\bar{U}=0.$$

Для доказательства фредгольмовости уравнения (18) необходимо доказать, что оператор $\Lambda_1^{-1}\Lambda'$ —вполне непрерывен. Здесь ограничимся, тем случаем, когда оператор

$$\Lambda'=\frac{\partial^k}{\partial x^k} \tag{19}$$

(для других видов Λ' доказательство аналогично, но приводит к более громоздким выкладкам).

Проинтегрирован по частям выражение (20), получим:

$$\Lambda_1^{-1}\Lambda^1 f = \sum_p \mu_p \int_0^a G(x,\xi)\,\frac{\partial^k \psi_p(\xi)}{\partial \xi^k}\,d\xi \cdot \varphi_p(t) = \sum_p \mu_p \Big\{ G(x,a)\,\frac{\partial^{k-1}\psi_p(a)}{\partial \xi^{k-1}} -$$

$$- G(x,0)\,\frac{\partial^{k-1}\psi_p(a)}{\partial \xi^{k-1}} - G'(x,a)\,\frac{\partial^{k-2}\psi_p(a)}{\partial \xi^{k-2}} + \ldots \tag{20}$$

$$+ (-1)^k \int_0^a \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial \xi^k}\,\psi_p(\xi)\,d\xi \Big\} \varphi_p(t).$$

Обозначим

$$I = \Big\{ G(x,a)\,\frac{\partial^{k-1}\psi_p(a)}{\partial \xi^{k-1}} - G(x,0)\,\frac{\partial^{k-1}\psi_p(a)}{\partial \xi^{k-1}} - G_\xi(x,a)\,\frac{\partial^{k-2}\psi_p(a)}{\partial \xi^{k-2}} + \ldots \Big\}$$

—члены, стоящие вне интеграла $\int_0^a \frac{\partial^k G}{\partial \xi^k}\,\psi_p(\xi)\,d\xi$.

Если не выполнено условие (17′), то среди членов, входящих в (I), найдутся отличные от 0, и можно будет построить такую последовательность функций $\psi_p(\xi)$, что ряд (20) сходиться не будет и $\Lambda_1^{-1}\Lambda^1$ не будет вполне непрерывным.

Пример:

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{n+3} U}{\partial x^3\,dt^n} = f(x,t). \tag{21}$$

Пусть по t заданы сильно регулярные граничные условия (9), а условия по x имеют вид: $U(0,t) = U(a,t) = U''_x(a,t) = 0$

Тогда

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \left(-\frac{\xi^2}{2a} + \xi\right)x - \frac{1}{2}x^2 & 0 \leqslant x < \xi \\ \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^2}{2a}x & \xi < x \leqslant a \end{cases}$$

$$G\Big|_{\xi=a} = \frac{a}{2}x - \frac{1}{2}x^2$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_p(x) = \sin\left[\frac{\pi x}{a} \cdot \exp\left(-\frac{a-x}{(\mu_p)^p}\right)\right] + \left[\frac{2\pi}{(\mu_p)^p a} + \frac{\pi}{(\mu_p)^{2p}}\right]\frac{x(x-a)}{2}$$

ясно, что $\psi_p(0) = \psi_p(a) = \psi''_p(a) = 0$,

$$\psi'_p(a) = -\frac{\pi}{a} + \frac{\pi a}{2(\mu_p)^{2p}} \to \infty$$

при $\mu_p \to 0$.

Пусть

$$\Lambda' = \frac{\partial^4}{\partial x^2}, \text{ тогда}$$

$$\Lambda_1^{-1}\Lambda' U = \sum_p \mu_p \int_0^a G(x, \xi) \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial \xi^2} d\xi \cdot \varphi_p(t) = \sum_p \mu_p \Big\{ G(x, a)\psi_p'(a) - \tag{22}$$

$$- G(x, 0)\psi_p'(0) + \ldots - \int_0^a \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} \psi_p \, d\xi \Big\} \cdot \varphi_p(t).$$

Ряд (22) расходится. Таким образом, младшая часть может включать в себя по переменной x только члены, содержащие $U, \frac{\partial U}{\partial x}$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԹՈՍՈՒՆՅԱՆ

Բնութագրերի վրա սկզբնական և սահմանային պայմաններով մասնական ածանցյալներով հավասարումների համար խառը խնդիրների լուծելիության մասին

Աշխատանքը նվիրված է (x, t) ուղղանկյուն հարթության վրա $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} = \Lambda_1$ տեսքի կլիտորոր մասով դիֆերենցիալ օպերատորների սահմանափակությանը։

x-ից և t-ից կախված պայմանների վրա դրվում են պահանջներ, որոնք ապահովում են Λ_1 օպերատորի գոյությունը և լրիվ անընդհատությունը։ Այնուհետև ստացվում է Λ_1-ի թույլատրելի կրտսեր մասերի հաջորդները դրված են պայմաններն ըստ x-ի և t-ի։

Թույլատրելիությունը հասնում է այն իմաստով, որ պահանջվում է $\Lambda_1^{-1}\Lambda'$ օպերատորի լրիվ անընդհատությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. К. Романко*, Граничные задачи для операторов вида $\frac{du^m}{dt^n} - A$. Дифференциальные уравнения, 3, 11, 1957—1970 (1967). [2] *В. К. Романко*, ДАН СССР, 1959, 2, 269—272 (1964). [3] *S. Sobolev*, sur le problemes mixtes pour les equations aux dervees partielles a deux variables independantes. Calcutta Math, soc Commemoration vol., 447—484, 1958—1959. [4] *М. А. Наймарк*, Линейные дифференциальные операторы, „Наука", М., 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

А. Х. Симонян

О среднем числе уклонений разности гауссовского стационарного процесса и аппроксимирующей его ломаной

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 2/VII 1975)

В работе найден главный член асимптотики среднего числа уклонений (выбросов за фиксированный уровень a) разности $\xi_t^{\Delta}=\xi_t-\hat{\xi}_t$ дифференцируемого в среднем квадратичном гауссовского стационарного процесса ξ_t и аппроксимирующей его ломаной $\hat{\xi}_t$.

Пусть процесс ξ_t, $E\xi_t=0$, имеет ковариационную функцию ρ_t с непрерывной компонентой в спектре и

$$\rho_t=\rho_0-|\rho_0''|\frac{t^2}{2}+bc_t \quad \text{при } |t|\leq\varepsilon, \tag{1}$$

где $b>0$, $\varepsilon>0$, а неотрицательная четная функция c_t дважды непрерывно дифференцируема при $0\leq t\leq\varepsilon$, правильно меняется в нуле с показателем β, $2<\beta<4$ [3] и

$$\lim_{t\downarrow 0} c_t\cdot t^{-2}=0. \tag{2}$$

Не уменьшая общности, полагаем далее $\rho_0=|\rho_0''|=1$, т. е. $E\xi_t^2=E\dot{\xi}_t^2=1$, где $\dot{\xi}_t$ есть производная процесса ξ_t в среднем квадратичном. В качестве функции c_t можно взять, например, функцию $|t|^{2+\theta}$, $0<\theta\leq 1$ [2].

Будем рассматривать процесс ξ_t при $t\in[0, h]$, $h\leq\varepsilon$. Обозначим $u=\frac{t}{h}$. Тогда $\xi_t=\xi_{hu}$ и $u\in[0, 1]$. Для условного среднего $E[\xi_{hu}|\xi_0=x_0, \xi_h=x_1]$ процесса ξ_{hu} справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для любых x_0, x_1 и любого фиксированного $u\in[0,1]$ имеет место*

$$\lim_{h\downarrow 0} E[\xi_{hu}|\xi_0=x_0, \xi_h=x_1]=x_0(1-u)+x_1u. \tag{3}$$

Доказательство этой леммы основывается на формуле

$$E[\xi_{hu}|\xi_0=x_0,\xi_h=x_1]=-\frac{f_1(h,\ u,\ x_0,\ x_1)}{f_2(h)}, \tag{4}$$

где

$$f_1(h,\ u,\ x_0,\ x_1)=\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_h & \rho_{hu} \\ \rho_h & \rho_0 & \rho_{h(1-u)} \\ x_0 & x_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{а} \quad f_2(h)=\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_h \\ \rho_h & \rho_0 \end{vmatrix} \tag{3}$$

с использованием выражений (1), (2) и предельным переходом при $h \downarrow 0$.

Известно, что $E[\xi_{hu}|\xi_0=x_0,\ \xi_h=x_1]$ есть наилучшая оценка для гауссовского процесса ξ_{hu} ($u\in[0,\ 1]$) при $\xi_0=x_0$, $\xi_h=x_1$ в том смысле, что условная дисперсия

$$E[[\xi_{hu}-E(\xi_{hu}|\xi_0=x_0,\ \xi_h=x_1)]^2|\xi_0=x_0,\ \xi_h=x_1] \tag{5}$$

минимальная ([4]), а по лемме 1 для $E[\xi_{hu}|\xi_0=x_0,\ \xi_h=x_1]$ главным членом асимптотики при $h\downarrow 0$ является отрезок $x_0(1-u)+x_1u$, $u\in[0,1]$, так что главный член асимптотики для (5) при $h\downarrow 0$ заключается в выражении

$$E[[\xi_{hu}-x_0(1-u)-x_1u]^2|\xi_0=x_0,\ \ \xi_h=x_1].$$

На основании приведенных рассуждений при достаточно малых h будем аппроксимировать процесс ξ_{hu} на $[0,1]$ процессом $\hat{\xi}_{hu}=(1-u)\xi_0+u\xi_h$.

Рассмотрим процесс $\xi^L_{hu}=\xi_{hu}-\hat{\xi}_{hu}$ и обозначим через $r_L(u,\ v)$ ($u,\ v\in[0,\ 1]$) его ковариационную функцию. Этот процесс гауссовский, дифференцируемый в среднем квадратичном, со средним нуль, но уже нестационарный, как показывает следующая лемма.

Лемма 2.

$$r_L(u,\ v)=bh^3H_h[|u-v|^3-v(1-u)^3-(1-v)u^3-$$
$$-u(1-v)^3+u(1-v)-(1-u)v^3+(1-u)v](1+o(1)) \tag{6}$$

при $h\downarrow 0$ *для любых* $u,\ v\in[0,\ 1]$.

Следствие.

$$D\xi^L_{hu}=2bh^3H_hu(1-u)[1-(1-u)^{3-1}-u^{3-1}](1+o(1)) \quad (h\downarrow 0) \tag{7}$$

Лемма 3.

$$E\xi^L_{hu}\xi^L_{hu}=bh^{3-1}H_h[-(1-u)^3+(1-u)+u^3-u+$$
$$+3u(1-u)^{3-1}-3(1-u)u^{3-1}](1+o(1)) \tag{8}$$

при $h\downarrow 0$.

В леммах используем тот факт, что

$$c_h=h^3H_h, \tag{9}$$

где H_h медленно меняющаяся в нуле функция, т. е.

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{H_{xh}}{H_h}=1(x>0) \qquad ([1]), \tag{10}$$

а также то, что

$$c_h^{\cdot} = \beta h^{\beta-1} H_h (1+o(1)) \text{ при } h \downarrow 0. \tag{11}$$

Лемма 4.

$$D\xi_{hu}^{L} = 2bh^{\beta-2} H_h [\beta(1-u)^{\beta-1} + \beta u^{\beta-1} - 1](1+o(1)) \quad \textit{при } h \downarrow 0. \tag{12}$$

Лемма 4 также доказывается с применением формул (9) и (11).

Обозначим через $\eta_a^+(h)$ число пересечений снизу вверх фиксированного уровня a процессом ξ_t^L, $t \in [0, h]$ ([3]). Известно, что ([5])

$$E\eta_a^+(h) = \int_0^h dt \int_0^\infty z p_t(a, z)\, dz \tag{13}$$

где $p_t(a, z)$ есть плотность вероятности события $\{\xi_t^L = a, \dot{\xi}_t^L = z\}$ и

$$p_t(a, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Lambda}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(a, z)'\Lambda^{-1}(a, z)\right\},$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} D\xi_t^L & E\xi_t^L \dot{\xi}_t^L \\ E\xi_t^L \dot{\xi}_t^L & D\dot{\xi}_t^L \end{pmatrix}.$$

Наша цель найти главный член асимптотики выражения (13). Введем следующие обозначения

$$\gamma_1(u) = \beta(1-u)^{\beta-1} + \beta u^{\beta-1} - 1,$$

$$\gamma_2(u) = \frac{1}{2}\left\{-(1-u)^\beta + (1-u) + u^\beta - u + \beta u(1-u)^{\beta-1} - \beta(1-u)u^{\beta-1}\right\},$$

$$\gamma_3(u) = u(1-u)[1-(1-u)^{\beta-1} - u^{\beta-1}],$$

$$\gamma_4(u) = 4\gamma_1(u)\gamma_3(u) - \gamma_2^2(u).$$

Лемма 5.

$$-\frac{1}{2}(a, z)'\Lambda^{-1}(a, z) = -\frac{\gamma_3(u)}{bh^{\beta-2}H_h}\left\{\left[z - \frac{a\gamma_2(u)}{h\gamma_3(u)}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{\gamma_3(u)h^2}\left[\gamma_1(u) - \frac{\gamma_2^2(u)}{\gamma_3(u)}\right]\right\}(1+o(1))$$

при $h \downarrow 0$.

Лемма 5 следует из лемм (2)—(4).

Лемма 6.

$$E\eta_a^+(h) \sim \frac{1}{2\pi}\int_0^{1/2} \frac{\gamma_4^{1/2}(u)}{\gamma_3(u)} \exp\left\{-\frac{a^2\gamma_3(u)}{bh^\beta H_h \gamma_4(u)}\right\} du, \quad h \downarrow 0.$$

Теорема.

$$E\eta_a^+(h) \sim \frac{\nu(\beta)}{a} h^{\beta/2} H_h^{1/2} \exp\left\{-\frac{a^2}{b(1-2^{2-\beta})h^\beta H_h}\right\}, \qquad h \downarrow 0,$$

где

$$\nu(\beta) = \frac{\beta 2^{2-\beta}-1}{4}\left\{\frac{b(1-2^{2-\beta})2^{\beta-1}}{\pi\beta[\beta 2^{1-\beta}(\beta^2-5)+\beta+3]}\right\}^{1/2}.$$

Доказательство теоремы основано на применении метода Лапласа из теории асимптотических разложений.

Обозначим через $\eta_a(T)$ число выбросов процесса ξ_t за полосу $[-a, a]$ на промежутке времени $[0, T]$. Для этого промежутка $[0,T]$ главным членом асимптотики среднего числа $E\eta_a(T)$ будет

$$2T\frac{\nu(\beta)}{a} h^{\frac{\beta}{2}-1} H_h^{1/2} \exp\left\{-\frac{a^2}{b(1-2^{2-\beta})h^\beta H_h}\right\}, \qquad h \downarrow 0 \tag{14}$$

Следуя ([8]), будем говорить, что h и T изменяются согласованным образом, если

$$E\eta_a(T) = \mu = O(1) \qquad \text{при} \qquad h \downarrow 0 \quad \text{и} \quad T \uparrow \infty. \tag{15}$$

Пользуясь соотношениями (14) и (15) можно показать, что

$$h^\beta H_h \sim \left[\ln\left(\frac{2T\nu(\beta)}{\mu a}\right)^{\frac{b(1-2^{2-\beta})}{a^2}}\right]^{-1} \quad \text{при } T \uparrow \infty \quad \mu = O(1).$$

Отсюда можно получить при конкретных выражениях функции H_h главные члены асимптотики шага интерполяции h, когда $\mu = O(1)$, и $T \uparrow \infty$. В частности, при $H_h \equiv \lambda = \text{const}$ получаем, соответственно,

$$h \sim \left[\ln\left(\frac{2T\nu(\beta)}{\mu a}\right)^{\frac{\lambda b(1-2^{2-\beta})}{a^2}}\right]^{-\frac{1}{\beta}} \quad \text{при } T \uparrow \infty, \quad \mu = O(1).$$

Если же поставить обратную задачу, т. е. как велико должно быть T при $h \downarrow 0$ и $\mu = O(1)$, то из (14) и (15) видно, что

$$T \sim \frac{\mu a}{2\nu(\beta)} h^{1-\beta/2} H_h^{-1/2} \exp\left\{\frac{a^2}{b(1-2^{2-\beta})h^\beta H_h}\right\}, \quad h \downarrow 0, \quad \mu = O(1).$$

Заметим также, что, так как $P\{\eta_a(T) > 0\} \leq E\eta_a(T)$, то (14) является оценкой сверху для вероятности уклонения разности гауссовского процесса ξ_t и аппроксимирующей ее ломаной на величину, по модулю большую a, на промежутке $[0, T]$.

В заключение выражаю искреннюю признательность Ю. К. Беляеву за постановку задачи и ценные указания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ա. Ա. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Գաուսյան ստացիոնար պրոցեսի և նրան մոտարկող բինկյալի տարբերության շեղման միջին թվի մասին

Դիցուք ξ_t-ն գաուսյան, ստացիոնար, միջին քառակուսային իմաստով մեկ անգամ դիֆերենցելի պատահական պրոցես է։ Ինչպիսի՞ հավանակա-նությամբ է այդ պրոցեսի մաքսիմալ շեղումը՝ ξ_{kh}, $kh \in [0, T]$, բարձրություններով կառուցված բինկյալից, գերազանցում տվյալ a արժեքը։ Հոդվածում ստացված է այդ հավանականության վերին գնահատականն այն պայմանում, երբ մոտարկման քայլը՝ h-ը, ձգտում է զրոյի։ Հնարավոր է դառնում պատկերացում ստանալ այն մասին, թե ինչպես ընտրել մոտարկման քայլը, կամ տվյալ ինտերվալի երկարությունը, որպեսզի պատահական պրոցեսը բինկյալով մոտարկվի անհրաժեշտ ճշտությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C. Qualls* and *H. Watanabe*, The Annals of Mathematical Statistics, vol. 43, № 2, 580—596 (1972). [2] *Р. Н. Мирошин*, Теория вероятн. и ее примен., XVIII, 3, 481—490 1973. [3] *Ю. К. Беляев*, Теория вероятн. и ее примен., XI, 1, 120—128, 1966. [4] *G. Kimeldorf* and *G. Wahba*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 41, № 2, 495—502 (1970). [5] *Г. Крамер*, *М. Р. Лидбеттер*, Гауссовские стационарные процессы и их приложения, М., „Мир", 1969. [6] *Ю. К. Беляев*, Теория вероятн. и ее примен., XII, 3, 444—457 (1967).

[illegible]

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Б. С. Нахапетян

Центральная предельная теорема для случайных полей, удовлетворяющих условию сильного перемешивания

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 18/VII 1975)

Пусть ξ_t, $t \in Z^\nu$ случайное поле со значениями в некотором измеримом пространстве (X_t, σ_t) со стандартной σ — алгеброй σ_t его подмножеств. Стандартность σ — алгебры σ_t означает, что существует сепарабельное полное метрическое пространство $\bar{X}_t \supset X_t$ такое, что X_t является борелевским подмножеством в $\bar{X}_t$ и σ— алгебра σ_t совпадает с совокупностью борелевских подмножеств $\bar{X}_t$, содержащихся в X_t. Предполагается, что все пространства (X_t, σ_t), $t \in Z^\nu$ являются экземплярами одного и того же пространства (X, σ). При любом $J \subset Z^\nu$, (X_J, σ_J) будет обозначать произведение пространств (X_t, σ_t), $t \in J$. Пусть I, V — конечные множества такие, что $I \cap V = \varnothing$ и

$$\gamma(I, V) = \sup_{A \in \sigma_I,\ B \in \sigma_V,\ P_V(B) > 0} |P_{I/V}(A/B) - P_I(A)| \tag{1}$$

Здесь P_I, $I \subset Z^\nu$, $|I| < \infty$ * — конечномерные распределения случайного поля ξ_t, $t \in Z^\nu$ и $P_{I/V}(A/B)$ — условная вероятность события $A \in \sigma_I$ при условии $B \in \sigma_V$. Пусть функция $\varphi_I(d)$, $d \in R^1$ такова, что $\varphi_I(d) \to 0$ при $d \to \infty$ и фиксированном I. Мы скажем, что случайное после ξ_t, $t \in Z^\nu$ удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания (р. с. п.), если при любых конечных I, V, $I \cap V = \varnothing$ имеет место неравенство

$$\gamma(I, V) \leqslant \varphi_I(d(I, V)), \tag{2}$$

де $d(I, V)$ — расстояние между множествами I, V. Пусть $\psi_t(x)$, $x \in X$ — некоторая измеримая функция $t \in Z^\nu$. Обозначим при любом конечном $I \subset Z^\nu$

$$U_I^\psi(x) = \sum_{t \in I} \psi_t(x_t),\ x \in X_I,\ x = (x_t, t \in I) \tag{3}$$

* Всюду в дальнейшем $|\cdot|$ — число точек в конечном множестве.

Справедлива

Теорема 1 Пусть

а) стационарное случайное поле ξ_t, $t \in Z^\nu$ со значениями в (X_t, σ_t) удовлетворяет условию р. с. п., причем

$$\varphi_I(d) \leq |I|\varphi(d), \quad \sum_{s \in Z^\nu \setminus \{0\}} \varphi^{1/2}(|s|) < \infty$$

б) $M|\mu_I(\xi_I)|^2 = C^{(1)} < \infty$

в) для любого куба $I \subset Z^\nu$, $|I| < \infty$

$$\sigma^2_{I,\mu} \geq C^{(2)}|I|, \; C^{(2)} > 0,$$

где $\sigma^2_{I,\mu}$ — *дисперсия величины* $U^\mu_I(\xi_I)$, $\xi_I = (\xi_t, t \in I)$. *Тогда для любой последовательности кубов* I_n *с центром в начале координат и длиной стороны* $2n$

$$\lim_{n \to \infty} P_r\left(\frac{U^\mu_{I_n}(\xi_{I_n}) - MU^\mu_{I_n}(\xi_{I_n})}{\sigma_{I_n,\mu}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Доказательство этой теоремы основано на методе Бернштейна сведения к независимым случайным величинам и использует аналогичную теорему Ибрагимова ([1], стр. 437), доказанную для одномерного случая. Нетривиальность обобщения на многомерный случай заключается в том, что в этом случае граница множества растет с его ростом. Некоторые результаты в этом направлении имеются в работе [2].

Пусть теперь ξ_t, $t \in Z^\nu$ гиббсовское случайное поле с потенциалом Φ и значениями в пространстве (X_t, σ_t, m_t) $m_t(X_t) > 0$ σ — алгебра σ_t—стандартна (см. [4]). Рассмотрим следующие классы потенциалов (см. [3], [4])

$$N_\mu = \left\{\Phi: \frac{(m(X)e^{\|\Phi\|})^2}{1 + m(X)e^{-2\|\Phi\|}} \sum_{J: 0 \in J \subset Z^\nu, |J| < \infty} |J| \sup_{x \in X_J} |\Phi(x)| < 1\right\}$$

$$\|\Phi\| = \sum_{J: 0 \in J \subset Z^\nu} |J| \sup_{x \in X_J} |\Phi(x)| < \infty$$

Пусть $\theta \in X$ некоторый выделенный элемент из X („вакуум") такой, что $\Phi(x) = 0$ при любом $x = (x_t, t \in I)$ $I \subset Z^\nu$, $|I| < \infty$ таким, что $x_t = \theta$ хотя бы при одном $t \in I$. Введем пространства $X^*_t = X_t \setminus \{\theta\}$, σ — алгебру $\sigma^*_t = \{A \cap X^*_t : A \in \sigma_t\}$ и меру m^*_t, являются сужением меры m_t на σ — алгебру σ^*_t. Обозначим

$$N^*_\mu = \{\Phi: C^{(1)}_{\Phi,m}(1 + C^{(2)}_{\Phi,m}) < 1\},$$

$$C^{(1)}_{\Phi,m} = \frac{e^{\|\Phi\|} m^*(X^*)}{1 + e^{\|\Phi\|} m^*(X^*)},$$

$$C^{(2)}_{\Phi,\mu} = 2(1+2e^{\|\Phi\|}m^{*}(X^{*}))(\exp\{e^{\|\Phi\|}-1\}-1)$$

$$\|\Phi\| = \sum_{J:0\in J\subset Z^{\nu}} \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)| < \infty.$$

Справедливы следующие теоремы (ср. ([3]), ([4]))

Теорема 2. *Для всякого потенциала $\Phi\in N_{\mu}$, соответствующее ему гиббсовское случайное поле существует, единственно и удовлетворяет условию р. с. п., причем функция*

$$\varphi_J(d) \leq |J|\varphi(d).$$

Если потенциал Φ финитен ($\Phi(x_J)=0$, $D(J)>C$, $D(J)$ — диаметр множества J), то функцию $\varphi(d)$ можно положить равной

$$\varphi(d) = e^{-\alpha d},\ \alpha>0.$$

Если потенциал Φ убывает так, что

$$\sum_{J:0\in J\subset Z^{\nu},|J|<\infty} |J|(D(J))^{\gamma} \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)| < \infty, \quad \gamma>0$$

то функцию $\varphi(d)$ можно положить равной

$$\varphi(d) = \frac{\beta(d)}{d^{\gamma}},\ \beta(d)\to 0,\ d\to\infty.$$

Теорема 3. *Для всякого потенциала $\Phi\in N^{\mu}_{\mu}$, соответствующее ему гиббсовское случайное поле существует, единственно и удовлетворяет условию р. с. п., причем функция*

$$\varphi_J(d) \leq |J|\varphi(d).$$

При финитном потенциале $\varphi(d)$ можно положить равной

$$\varphi(d) = e^{-\alpha d},\ \alpha>0.$$

Если потенциал Φ убывает так, что

$$\sum_{J:0\in J\subset Z^{\nu},|J|<\infty} (d(J))^{\gamma} \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)| < \infty, \quad \gamma>0$$

то функцию $\varphi(d)$ можно положить равной

$$\varphi(d) = \frac{\bar{\beta}(d)}{d^{\gamma}},\ \bar{\beta}(d)\to 0,\ d\to\infty.$$

Как легко видеть из результатов работ ([3]), ([4]) для гиббсовских случайных полей, с потенциалами из класса N^{μ}_{μ}, а также для гиббсовских случайных полей с невырожденными потенциалами из класса N_{μ} выполняется условие в) теоремы 1. Из вышеприведенных теорем

и последнего утверждения вытекают следующие теоремы.

Теорема 4. *Для всякого гиббсовского случайного поля с невырожденным потенциалом* $\Phi \in N_\lambda$ *таким, что*

$$\sum_{J:0\in J\subset Z^\nu,\,|J|<\infty} (D(J))^{2\nu}\,|J|\,\sup_{x\in X_J}|\Phi(x)|<\infty$$

справедлива ц. п. т.

Теорема 5. *Для всякого гиббсовского случайного поля и потенциалом* $\Phi\in N_\lambda^{\nu}$ *таким, что*

$$\sum_{J:0\in J\subset Z^\nu,\,|J|<\infty} (D(J))^{2\nu}\,\sup_{x\in X_J}|\Phi(x)|<\infty$$

справедлива ц. п. т.

Отметим, что для гиббсовских случайных полей с парным финитным потенциалом ц. п. т. для энергии и числа частиц доказана в работе Минлоса и Халфиной [5], однако результаты в [5] формулируются в терминах потенциала и не используют условий слабой зависимости.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность Р. Л. Добрушину за постановку задачи и внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

Կենտրոնական սահմանային թեորեմ ուժեղ խառնուրդի պայմանին բավարարող պատահական դաշտերի համար

Հոդվածում ապացուցված է կենտրոնական սահմանային թեորեմ ուժեղ խառնուրդի պայմանին բավարարող պատահական դաշտերի համար։

*Արդյունքն օգտագործվում է անվերջությունում բավականաչափ արագ նվազող պոտենցիալով Գիբսյան պատահական դաշտերի համար կենտրոնական սահմանային թեորեմ ապացուցելիս։ Ցիպիկորեն դա նշանակում է, որ իր միջին արժեքի նկատմամբ զումարային ալիքի ֆլուկտուացիայի հավանականությունների բաշխումն ասիմպտոտորեն Գաուսյան է, որը կարևոր է անսամբլների սահմանային համարժեքության ապացուցման համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник*, Независимые и стационарно связанные величины, Изд. «Наука», 1965. [2] *M. Duneau, D. Iagolnizer, B. Souilard*, Comm. Math. Phys. 61 (1973). [3] *Р. Л. Добрушин, Б. С. Нахапетян*, Теорет. и матем. физика, 20, 2, 223 (1974). [4] *Б. С. Нахапетян*, „Известия АН Арм. ССР", Сер. „Математика", 3, 41 (1975). [5] *Р. А. Минлос, А. М. Халафина* „Известия АН СССР", сер. матем. 34, 5, 1173 (1970)

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975

УДК 519.220

МАТЕМАТИКА

И. П. Федчина

Касательная проблема Неванлинны—Пика с кратными точками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 25/VII 1975)

1. Пусть N_1 и N_2 гильбертовы пространства, причем $n_1 = \dim N_1 \leqslant n_2 = \dim N_2 < \infty$.

Обозначим через $[N_j, N_k]$ пространство всех линейных операторов, действующих из N_j в N_k $(j, k = 1, 2)$

Через $W_{jk}(D)$ обозначим класс оператор—функций $w(z)$ со значениями в $B(N_j N_k)$* голоморфных в единичном диске: $D = \{z/|z|<1\}$

Рассмотрим пространство $N = N_1 \oplus N_2$ и в нем матрицу

$$J = \begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 \\ 0 & -I_{N_2} \end{pmatrix}.$$

(Здесь и ниже мы говорим „матрица A", вместо „оператор, заданный матрицей A в базисе $[N_1, N_2]$").

В. П. Потаповым и Н. В. Ковалишиной было показано (см. [1]), что общее решение проблемы Неванлинны—Пика в классе $W_{12}(D)$ с m различными точками записывается в виде дробно—линейного преобразования

$$w(z) = [E(z)\Pi_{12}(z) + \Pi_{22}(z)]^{-1} \cdot [E(z)\Pi_{11}(z) + \Pi_{21}(z)], \tag{1}$$

где $E(z)$ —произвольная оператор—функция класса $W_{12}(D)$, а матрица дробно—линейного преобразования

$$\Pi(z) = \begin{pmatrix} \Pi_{11}(z) & \Pi_{12}(z) \\ \Pi_{21}(z) & \Pi_{22}(z) \end{pmatrix} = \overset{\frown}{\prod_{k=1}^{m}} \left(Q_k + \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} P_k\right) \tag{2}$$

$$z_k \neq z_j \text{ при } k \neq j \tag{3}$$

есть произведение Бляшке—Потапова (см. [2]), в котором P_k — J—проекторы ранга n_1.

Автором настоящей заметки было показано (см. [3]), что общее

* $B(N_j, N_k)$ — множество всех сжимающих, (то-есть с нормой $\leqslant 1$) операторов из $[N_j, N_k]$.

решение в классе $W_{12}(D)$ так называемой касательной проблемы Неванлинны—Пика (в которой задаются значения операторов $w(z_j)$ на некоторых подпространствах пространства N_1) также записывается в виде дробно—линейного преобразования (1) над произвольной оператор—функцией $E(z)\in W_{12}(D)$. При этом матрица (2) дробно-линейного преобразования (1) является произведением Бляшке—Потапова с J—проекторами P_k не обязательно ранга n_1, но все еще удовлетворяющим условию (3).

Обратно, в ([1], [2]) показано, что каждому произведению Бляшке—Потапова

$$\Pi(z)=\overset{\frown}{\prod_{k=1}^{m}}\left(Q_k+\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}P_k\right)\qquad (z_j\neq z_k,\ \text{при}\quad j\neq k)$$

соответствует проблема Неванлинны—Пика, для которой $\Pi(z)$—матрица коэффициентов дробно-линейного преобразования, дающего общее решение.

Возникает вопрос: решение какой интерполяционной задачи запишется в виде дробно-линейного преобразования (1), матрица (2) которого есть произвольное произведение Бляшке—Потапова (уже без требования (3)).

2. Рассмотрим следующую задачу:

(A) *(Касательная проблема Неванлинны—Пика с кратными точками).*

Дана последовательность точек

$z_k\in D$, *кратности* ν_k, $k=1, 2, \ldots, l$, $1\leqslant\nu_k\leqslant m$,

$$\sum_{k=1}^{l}\nu_k=m$$

и две последовательности операторов

$$A_j^k\in|N_{r_k},\ N_1|$$

и

$$C_j^{(k)}\in|N_{r_k},\ N_2|,\ \dim N_{r_k}=r_k\leqslant n_1,\quad k=1, 2, \ldots, l,\quad j=0, \ldots, \nu_k-1.$$

Требуется найти оператор—функцию $w(z)\in W_{12}(D)$ *такую, что*

$$w(z_k)\,A_0^{(k)}=C_0^{(k)}$$

$$w'(z_k)A_0^{(k)}+w(z_k)A_1^{(k)}=C_1^{(k)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(\nu_k-1)!}\quad w^{(\nu_k-1)}(z_k)A_0^{(k)}+\ldots+w'(z_k)A_{\nu_k-1}^{(k)}=C_{\nu_k-1}^{(k)}.$$

Легко видеть, что задача (A) содержит рассмотренные раннее задачи, а именно:

1) при $\nu_k=1$, $k=1, 2, \ldots, l$ мы получаем касательную проблему Неванлинны—Пика с различными точками,

2) при $1\leqslant\nu_k\leqslant m$, $\sum_{k=1}^{l}\nu_k=m$, $r_k=n_1$, $\operatorname{rang} A_0^{(k)}=n_1$ $(k=1, \ldots l)$

мы приходим к проблеме Неванлинны—Пика с кратными точками*.

3) при $\nu_k=1$, $r_k=n_1$, $\operatorname{rang} A_0^{(k)}=n_1$ $(k=1,\ldots,l)$ мы имеем проблему Неванлинны—Пика с различными точками.

Займемся описанием решений задачи (A).

Как было показано в работе ([3]), множество решений $w(z)$ из класса $W_{12}(D)$, удовлетворяющих условию $w(z_1)A_0^{(1)}=C_0^{(1)}$ при $A_0^{(1)*}A_0^{(1)}-C_0^{(1)*}C_0^{(1)}>0$ **, записывается в виде дробно-линейного преобразования

$$w(z)=[E_1(z)B_{12}(z)+B_{22}(z)]^{-1}\cdot[E_1(z)B_{11}(z)+B_{21}(z)],$$

где $E_1(z)$ —произвольная оператор—функция из класса $W_{12}(D)$, а матрица дробно-линейного преобразования имеет вид:

$$B_1(z)=\begin{pmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z)\\ B_{21}(z) & B_{22}(z)\end{pmatrix}=Q_1^{(1)}+\frac{z-z_1}{1-\bar z_1 z}P_1^{(1)},$$

где $P_1^{(1)}$ — J —ортогональный проектор на область значений $D_0^{(1)}=\begin{pmatrix} A_0^{(1)}\\ -C_0^{(1)}\end{pmatrix}$, при этом $D_0^{(1)*}JD_0^{(1)}>0$, $Q_1^{(1)}=I-P_1^{(1)}$.

Применяя аналог рекуррентного метода Шура—Неванлинны, получим на m-ом шаге общее решение задачи (A).

Для того, чтобы сформулировать этот результат, введем удобные для нас обозначения.

Пусть $D_j^{(p)}=\begin{pmatrix} A_j^{(p)}\\ -C_j^{(p)}\end{pmatrix}$, $(p=1,2,\ldots,l,\ j=0,1,\ldots,\nu_p-1)$,

$P_i^{(p)}(p=1,\ldots,l,\ i=1,\ldots,\nu_p)$ — J —ортогональные проекторы на области значений операторов $D_{0,p}^{p,i}$ (в предположении $D_{0,p}^{p,i*}JD_{0,p}^{p,i}>0$ ***) определяемых следующими рекуррентными формулами:

$$D_{j,p}^{p,1}=\sum_{k=1}^{j+1}\left\{\frac{d}{dz}\prod_{q=0}^{p-1}\prod_{\mu=1}^{\nu_q}\left(Q_\mu^{(q)}+\frac{z-z_q}{1-\bar z_q z}P_\mu^{(q)}\right)\right\}_{z=z_p}^{(k-1)}\cdot D_{j-k+1}^{(p)},$$

$$D_{j,p}^{p,i}=\sum_{k=1}^{j+1}\left\{\frac{1}{i!}\left[\frac{z-z_p}{1-\bar z_p z}\right]_{z=z_p}^{(i)}\cdot P_{i-1}^{(p)}D_{j+k+1,p}^{p,i-1}+Q_{i-1}^{(p)}D_{j+1,p}^{p,i-1}\right\},$$

$$i=2,\ldots,\nu_p,\quad p=1,2,\ldots,l,\quad j=0,1,\ldots,\nu_p-i.$$

$$\prod_{\mu=1}^{\nu_p}\left(Q_\mu^{(q)}+\frac{z-z_q}{1-\bar z_p z}P_\mu^{(q)}\right)=I.$$

---

* Эта задача была рассмотрена В. П. Потаповым и И. В. Ковалишиной (устное сообщение).

** Неравенства $H>0$ означает, что для любого вектора $f\neq 0$ справедливо неравенство $(Hf,f)>0$.

*** В предположении $D_{0,p}^{p,i*}JD_{0,p}^{p,i}>0$ область значений $D_{0,p}^{p,i}$ является положительным подпространством и J —проектор определяется по следующей формуле: $P_1^{(p)}=D_{0,p}^{p,i*}(D_{0,p}^{p,i*}JD_{0,p}^{p,i})^{-1}D_{0,p}^{p,i*}J$

Теорема. *Если* $D^{p,i*}_{0,p} J D^{p,i}_{0,p} > 0$ $(p=1, 2, \ldots, l,\ i=1, 2, \ldots, \nu_p)$, *то формулой*

$$w(z) = [E(z)\Pi_{12}(z)+\Pi_{22}(z)]^{-1}\cdot[E(z)\Pi_{11}(z)+\Pi_{21}(z)],$$

в которой $E(z)$ — *произвольная оператор—функция класса* $W_{12}(D)$, *а*

$$\Pi(z)=\begin{pmatrix}\Pi_{11}(z) & \Pi_{12}(z)\\ \Pi_{21}(z) & \Pi_{22}(z)\end{pmatrix}=\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{l}}\ \overset{\frown}{\prod_{k=1}^{\nu_j}}\left(Q_j^{(k)}+\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}P_j^{(k)}\right)$$

задается общее решение задачи (A).

Выразим условия $D^{p,i*}_{0,p} J D^{p,i}_{0,p} > 0$ через исходные параметры задачи (A), для простоты записи ограничиваясь случаем $k=1$, $z_1=0$ и обозначения $A_j^{(1)}=A_j$, $C_j^{(1)}=C_j$, $j=0, 1, \ldots, \nu_1-1$.

Получим, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы общее решение задачи* (A) $(k=1,\ z_1=0)$ *записывалось в виде дробно-линейного преобразования* (1)—(2), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\begin{vmatrix} A_0^*A_0-C_0^*C_0 & A_0^*A_1-C_0^*C_1 & \cdots & A_0^*A_{\nu_1-1}-C_0^*C_{\nu_1-1}\\ A_1^*A_0-C_1^*C_0 & \sum\limits_{j=0}^{1}A_j^*A_j-C_j^*C_j & \cdots & \sum\limits_{j=0}^{1}A_j^*A_{j+\nu_1-2}-C_j^*C_{j+\nu_1-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{\nu_1-1}^*A_0-C_{\nu_1-1}^*C_0 & \sum\limits_{j=0}^{1}A_{j+\nu_1-2}^*A_j-C_{j+\nu_1-2}^*C_j & \cdots & \sum\limits_{j=0}^{\nu_1-1}A_j^*A_j-C_j^*C_j \end{vmatrix}>0,$$

которое можно записать в виде:

$$A^*A>C^*C,$$

где

$$A=\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{\nu_1-1}\\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{\nu_1-2}\\ 0 & 0 & A_0 & \cdots & A_{\nu_1-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_0 \end{vmatrix},\qquad C=\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & C_{\nu_1-1}\\ 0 & C_0 & C_1 & \ldots & C_{\nu_1-2}\\ 0 & 0 & C_0 & \ldots & C_{\nu_1-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь произвольное произведение Бляшке—Потанова (2). Легко видеть, что если провести ([4]) отщепление множителей методом В. П. Потанова, то J—проекторы P_k будут удовлетворять условиям

$$P_{\nu_{i-1}+j}N=P_{\nu_{i-1}+j}\cdot P_{\nu_{i-1}+j+1}\cdot\ \ldots\ \cdot P_{\nu_{i-1}+\nu_i}N,$$

$$i=1, 2, \ldots, l,\ j=1, 2, \ldots, \nu_i,\ 1\leqslant\nu_i\leqslant m,\ \sum_{i=1}^{l}\nu_i=m,\ \nu_0=0.$$

Можно показать, что существует интерполяционная задача вида (A), с параметрами $A_j^{(k)}$, $C_j^{(k)}$, выражающимися через проекторы P_k

($k=1, 2, \ldots, l$, $j=0, 1, \ldots, \nu_k-1$), удовлетворяющими матричному неравенству (4), общее решение которой записывается в виде (1) с матрицей коэффициентов (2).

Таким образом мы показали, что касательная проблема Неванлинны—Пика с кратными точками (задача (A)) является наиболее общей интерполяционной задачей, общее решение которой описывается при помощи произведения Бляшке—Потапова.

За постановку вопроса и постоянное внимание автор выражает Ю. П. Гинзбургу искреннюю благодарность.

Одесский инженерно-строительный институт

Ի. Պ. ՅՈԴՅԻՆԱ

Բազմապատիկ կետերով Նևանլինա—Պիկի շոշափող պրոբլեմը

Հոդվածում դիտարկվում է ինտերպոլյացիոն պրոբլեմ (բազմապատիկ կետերով Նևանլինա—Պիկի շոշափող պրոբլեմը), որի $W(z)$ ընդհանուր լուծումը սեղմող մատրից-ֆունկցիաների դասում կրվում է այդ դասի $E(z)$ կամայական մատրից-ֆունկցիայից

$$w(z) = |E(z)\Pi_{12}(z)+\Pi_{22}(z)|^{-1}|E(z)\Pi_{11}(r)+\Pi_{21}(z)|$$

կոտորակա-գծային ձևափոխության տեսքով։ Այդ ձևափոխության գործակիցների մատրիցը

$$\Pi(z)=\begin{pmatrix} \Pi_{11}(z) & \Pi_{12}(z) \\ \Pi_{21}(z) & \Pi_{22}(z) \end{pmatrix}.$$

Բլյաշկե—Պոտապովի կամայական արտադրյալն է։ Ցույց է տրված նաև հակառակը, որ Բլյաշկե—Պոտապովի կամայական արտադրյալին համապատասխանում է Նևանլինա—Պիկի որևէ շոշափող պրոբլեմ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов*, ДАН Арм. ССР, т. LIX, № 1 (1974). [2] *В. П. Потапов*. Мультипликативная структура J нерастягивающих матриц-функций. Труды Московского математического общества, т. 4, 125—236, 1955. [3] *И. П. Фефелова*. Матем. исследования, т. VII, вып. 4(26), 1972. [4] *А. Е. Ефимов, В. П. Потапов*. J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей. Успехи матем. наук, т. XXVIII, вып. 1 (169), 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 539.301

МЕХАНИКА

Р. К. Алексанян

Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 16/VII 1975)

Предлагается путь построения для угловой области системы собственных функций однородного дифференциального уравнения в частных производных одного порядка с постоянными коэффициентами. Эта возможность осуществляется в случае плоской задачи теории упругости для однородного анизотропного тела. С помощью построенной системы собственных функций исследуется поведение напряжений в угловой точке поперечного сечения призматического тела, находящегося в условиях плоской деформации и имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальной к образующим его боковой поверхности.

Начало прямолинейной декартовой системы координат поместим в угловой точке сечения призматического тела, направляя ось z нормально к плоскости упругой симметрии, а ось x по касательной одного из ветвей контура поперечного сечения. Угол между касательной второй ветви контура и осью x обозначим через α_0.

При отсутствии массовых сил функция напряжений удовлетворяет дифференциальному уравнению ([1])

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0, \tag{1.1}$$

где a_{mn} упругие постоянные материала.

Предполагается, что примыкающие к угловой точке части контура поперечного сечения свободны от внешних нагрузок. Граничные условия можно представить в виде

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\sin\alpha_0+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cos\alpha_0\right|_{\substack{x=r\cos\alpha_0\\ y=r\sin\alpha_0}}=0.$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y}\sin\alpha_0 + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\cos\alpha_0 \Big|_{\substack{x=r\cos\alpha_0\\ y=r\sin\alpha_0}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big|_{y=0} = 0. \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1) представляется в следующем виде

$$F(x, y) = A(x + \delta y)^{\lambda+1}. \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получаем относительно δ алгебраическое уравнение четвертого порядка ([1]).

$$a_{22} - 2a_{26}\delta + (2a_{12} + a_{66})\delta^2 - 2a_{16}\delta^3 + a_{11}\delta^4 = 0. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) не имеет действительных корней, что на основании положительности потенциальной энергии деформации доказано в ([1]).

Рассмотрим два возможных случая.

1. Когда корни уравнения (1.4) δ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — простые.

$$\delta_2 = \overline{\delta}_1, \quad \delta_4 = \overline{\delta}_3. \tag{1.5}$$

Решение (1.1), соответствующее каждому λ, представим в виде суммы линейно независимых решений

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{4} A_k (x + \delta_k y)^{\lambda+1}, \tag{1.6}$$

где A_k — комплексные постоянные.

Удовлетворяя граничным условиям (1.2) на основании (1.6) для коэффициентов A_k получаем систему однородных уравнений,

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0;\\
&\delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3 + \delta_4 A_4 = 0;\\
&a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = 0;\\
&\delta_1 a_1 A_1 + \delta_2 a_2 A_2 + \delta_3 a_3 A_3 + \delta_4 a_4 A_4 = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$a_k = (\cos\alpha_0 + \delta_k \sin\alpha_0)^{\lambda}.$$

Введя обозначения

$$\varphi_k = \arg(\cos\alpha_0 + \delta_k \sin\alpha_0), \quad (k = 1, 3) \tag{1.8}$$

$$\delta_{1,2} = \sigma \pm i\nu; \quad \delta_{3,4} = \alpha \pm i\beta$$

из условия существования нетривиального решения системы (1.8) получаем следующее уравнение относительно λ

$$4\nu\beta \operatorname{ch}(\lambda \ln P) + [(\sigma - \alpha)^2 + (\nu - \beta)^2]\cos\lambda(\varphi_1 + \varphi_3) -$$
$$- [(\sigma - \alpha)^2 + (\nu + \beta)^2]\cos\lambda(\varphi_1 - \varphi_3) = 0, \tag{1.9}$$

где

$$P = \frac{R_1}{G_1}, \qquad \begin{aligned} R_1 &= [(\cos\alpha_0 + \sigma\sin\alpha_0)^2 + \nu^2\sin^2\alpha_0]^{1/2},\\ G_1 &= [(\cos\alpha_0 + \alpha\sin\alpha_0)^2 + \beta^2\sin^2\alpha_0]^{1/2}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и двум конкретным условиям на замыкающей части контура угловой области, представляется в виде суммы собственных функций

$$F(x, y)=\sum_{(\lambda_n)}\sum_{k=1}^{4} A_k(x+\delta_k y)^{\lambda_n+1}, \tag{1.10}$$

где первую сумму необходимо распространять на все корни трансцендентного уравнения (1.9), имеющие положительные действительные части, что вытекает из требования конечности накопленной удельной потенциальной энергии деформации в окрестности угловой точки.

Переходя к полярной системе координат (r, φ) решение (1.10) можно представить с разделенными переменными

$$F(r, \varphi)=\sum_{(\lambda_n)} r^{\lambda_n}[R^{\lambda_n+1}(A_1\cos\lambda_+\gamma+A_2\sin\lambda_+\gamma)+$$

$$+G^{\lambda_n+1}(A_3\cos\lambda_+\theta+A_4\sin\lambda_+\theta)], \tag{1.11}$$

где A_k—действительные постоянные,

$$R=[(\cos\varphi+\sigma\sin\varphi)^2+\nu^2\sin^2\varphi]^{1/2},$$

$$G=[(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi)^2+\beta\sin^2\varphi]^{1/2},$$

$$\gamma=\arg(\cos\varphi+\sigma\sin\varphi+i\nu\sin\varphi),\quad \theta=\arg(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi+i\beta\sin\varphi).$$

Внутри рассматриваемой области γ и θ изменяются в интервалах

$$0\leqslant\gamma\leqslant\varphi_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\varphi_2.$$

2. Рассмотрим случай двукратного корня уравнения (1.4)

$$\delta=\delta_1=\delta_2,\quad \bar{\delta}=\delta_3=\delta_4,\quad \delta=\sigma+i\nu. \tag{2.1}$$

Решение уравнения (1.1), соответствующее каждому значению λ представляется в виде

$$F(x, y)=A(x+\delta y)^{\lambda+1}+B(x+\bar{\delta}y)^{\lambda+1}+C(x+\bar{\delta}y)(x+\delta y)^{\lambda}+$$

$$+D(x+\delta y)(x+\bar{\delta}y)^{\lambda}, \tag{2.2}$$

где A, B, C, D—комплексные постоянные.

Переходя в (2.2) от декартовых координат к полярным, имеем

$$F(r, \varphi)=(r\rho)^{\lambda_+}(A\cos\lambda_+\theta+B\sin\lambda_+\theta+C\cos\lambda_-\theta+D\sin\lambda_-\theta), \tag{2.3}$$

где A, B, C, D—действительные постоянные, $\lambda_+=\lambda+1$, $\lambda_-=\lambda-1$

$$\rho=[(\cos\varphi+\sigma\sin\varphi)^2+\nu^2\sin^2\varphi]^{1/2},\quad \theta=\arg(\cos\varphi+\sigma\sin\varphi+i\nu\sin\varphi)$$

В случае изотропного материала: $\sigma=0$, $\nu=1$, $\rho=1$ получаем хорошо известное представление решения бигармонического уравнения (2.3).

$$F(r, \varphi)=r^{\lambda_+}(A\cos\lambda_+\varphi+B\sin\lambda_+\varphi+C\cos\lambda_-\varphi+D\sin\lambda_-\varphi).$$

Граничные условия в полярных координатах имеют вид:

$$F|_{\varphi=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=0;$$

$$F|_{\varphi=\alpha_0}=0, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_0}=0. \tag{2.5}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.5), имеем:

$$A+C=0,$$

$$\lambda^+B+\lambda^-D=0,$$

$$A\cos\lambda^+\theta_1+B\sin\lambda^+\theta_1+C\cos\lambda^-\theta_1+D\sin\lambda^-\theta_1=0,$$

$$-A\lambda^+\cos\lambda^+\theta_1+B\lambda^+\cos\lambda^+\theta_1-C\lambda^-\sin\lambda^-\theta_1+D\lambda^-\cos\lambda^-\theta_1=0, \tag{2.6}$$

где

$$\theta_1=\arg(\cos\alpha_0+\nu\sin\alpha_0+i\nu\sin\alpha_0).$$

Для λ получается уравнение

$$\lambda^2\sin^2\theta_1-\sin^2\lambda\theta_1=0. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) идентично уравнению, соответствующему изотропному клину ([3,5]) с углом раствора θ_1.

Общее решение представляется в виде ряда

$$F(r,\varphi)=\sum_{(\lambda_n)}(r\theta)^{\lambda_n+1}(A_n\cos\lambda_n^+\theta+B_n\sin\lambda_n^+\theta+C_n\cos\lambda_n^-\theta+D_n\sin\lambda_n^-\theta) \tag{2.8}$$

здесь

$$0\leqslant\theta\leqslant\theta_1.$$

Представление функции напряжения в виде (1.11) или (2.8) дает возможность исследовать поведение напряжений в окрестности угловой точки поперечного сечения призматического анизотропного тела, находящегося в условиях плоской задачи теории упругости. Если уравнения (1.9) и (2.7) имеют корни в полосе $0<\operatorname{Re}\lambda<1$ комплексной плоскости λ напряжения, вычисляемые по формулам

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}, \qquad \sigma_\varphi=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad \sigma_{r\varphi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) \tag{2.9}$$

при $r\to 0$ неограниченно возрастают. Порядок особенности равен $1-\operatorname{Re}\lambda_1$, где λ_1 — корень уравнения (1.9) или (2.7) с наименьшей действительной частью в полосе $0<\operatorname{Re}\lambda<1$.

Напряженное состояние во втором случае зависит от двух упругих констант материала. Этот случай включает в себя частный вид общей анизотропии. Отметим, что в случае общей ортотропии напряженное состояние также зависит от двух констант материала. Корни уравнения (1.5) имеют вид $\delta=\pm(\sigma\pm i\nu)$, поэтому в случае общей ортотропии характеристическое уравнение для собственного значения λ получается из уравнения (1.9) соответствующим подбором аргументов φ_k комплексных чисел a_k. В случае изотропного материала уравнения для λ получается из (2.8), если в нем заменить θ_1 через α_0.

Порядок особенности напряжений на вершине угла с раствором α_0 равен порядку особенности напряжений для изотропного материала при угле, равном θ_1.

Известно, что в решениях первой краевой задачи теории упругости изотропного тела особенность напряжений в угловых точках области имеется при углах $\alpha_0 > \pi$ ([5]). Во втором случае рассмотренной выше анизотропии в зависимости от $\zeta = x + iy$

$$\theta_1 = \arg(\cos\alpha_0 + \nu \sin\alpha_0 + i\nu \sin\alpha_0)$$

может быть больше или меньше, чем α_0, и так как при углах $\alpha_0 > \pi$ большему углу соответствует особенность более высокого порядка, то в зависимости от анизотропии при одном и том же угле α_0 порядок особенности напряжений может быть выше или ниже, чем особенность напряжений, полученная в случае изотропного тела, что не согласуется с утверждением работы ([4]) о том, что „...наиболее слабая особенность поля напряжений имеет место в случае изотропного тела...".

Случаи $\alpha_0 = \pi$, $\alpha_0 = 2\pi$ являются предельными в том смысле, что в общем случае анизотропии приведенные углы φ_k в характеристических уравнениях для собственных значений стремятся к π и 2π, если α_0 стремится к π и 2π.

Уравнения (1.9) и (2.7) в этих предельных случаях примут вид

$$\sin^2 \lambda\pi = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_0 = \pi$$

$$\sin^2 2\lambda\pi = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_0 = 2\pi.$$

Следовательно, при $\alpha_0 = \pi$ особенность напряжений отсутствует, а в случае $\alpha_0 = 2\pi$, когда поперечное сечение тела превращается в область с разрезом, особенность напряжений в основании разреза имеет порядок 0,5.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի հավասարումների լուծումների մի դասի մասին

Աշխատանքում առաջարկվում է անկյունային տիրույթների համար անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի հավասարումների լուծումների կառուցման եղանակ։ Այդ հնարավորությունն իրականացվում է արտաքին ուժից ազատ կողմերով անկյունային տիրույթի դեպքում։ Կառուցված սեփական ֆունկցիաների օգնությամբ հետազոտվում է լարումների վարքը պրիզմատիկ մարմնի ընդլայնական հատվածքի եզրագծի անկյունային կետում, երբ մարմնի նյութն ունի մարմնի կողմնային մակերևույթի ծնիչին ուղղահայաց առաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն։

Երբ լարվածային վիճակը կախված է նյութի առաձգական չորս կամ երկու հաստատուններից, ստացված են սեփական արժեքների համար հավասարումներ, որոնց լուծումները տալիս են լարումների եզակիության կարգը անկյունային կետում։ Իզոտրոպ նյութի դեպքում անկյունային կետում լարումների եզակիությունների ուսումնասիրությունների հայտնի արդյունքները հնարավոր է օգտագործել անիզոտրոպության մասնավոր դեպքերի համար։ Պրիզմատիկ մարմինների անկյունային կետերում հնարավոր է, որ անիզոտրոպության դեպքում լարումներն ունենան ավելի ցածր կարգի եզակիություն, քան իզոտրոպության դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Г. Лехницкий*. Теория упругости анизотропного тела, Гос. изд. тех.-теор. лит. М.—Л., 1950. [2] *M. Klein*. Abh. Aerodyn. Inst. Tech. Hochchule Aachen. 7, 1927. [3] *M. L. Williams*, J. Appl. Mech, 19, 526 (1952). [4] *Д. Боджи*. Труды ASME, т. 39, сер. E, № 4 (1972). [5] *Я. С. Уфлянд*. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXI 1975 4

УДК 53.01.45+537+538

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Академик АН Армянской ССР А. Г. Иосифьян

О физических основах дуальной электродинамики

(Представлено 21/VII 1975)

В теории электромагнитных волн и в особенности вопросах генерирования и распространения электромагнитной энергии в большом классе задач, связанных с расчетом рамочных антенн и магнитных типах волн- волноводах, а также исследованиях взаимодействия элементарных частиц с электромагнитным полем в свете концепций монополя магнитного поля Дирака вводится группа уравнений Максвелла в форме, так называемой, обобщенной дуальной (двойственной) системы

В эту дуальную систему уравнений Максвелла включаются зарядовые источники в форме.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\bar{D}&=\rho_e\left(\frac{a\ сек}{м^3}\right)\\ \operatorname{div}\bar{B}&=\rho_m\left(\frac{в\ сек}{м^3}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

и плотности: а) „электрического тока" $\bar{j}=\bar{j}_{пр}+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\left(\frac{a}{м^2}\right)$

б) „магнитного тока" $\bar{j}_m=-\bar{j}_{прm}-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\left(\frac{в}{м^2}\right)$.

Как указывают Дж. А. Стреттон [1] Ч. Г. Папаз [2], А. А. Семенов [3] плотности магнитных зарядов ρ_m и плотности магнитных токов $\bar{j}_m$ являются „фиктивными", не имеющими реального физического существования.

Между тем, в работе [4] было показано, что при применении двух обобщенных пространств Лагранжа: в одном пространстве которого электрический заряд q является координатой, ток $i=\dot{q}$ является обобщенной скоростью, магнитный поток $\Phi=i.q$—импульсом (электрокинетическим количеством движения) можно определить значение ЭДС в форме;

$$Э = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_s \bar{B}d\bar{s} = -\frac{d}{dt}\oint \bar{A}d\bar{l},$$

$$i = \frac{dq}{dt},$$

что при $\bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A}$ приводится к первой группе уравнений Максвелла в виде:

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,|\bar{B} \times \bar{U}|,$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi_e - |\bar{B} \times \bar{U}|,$$

$$\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho_э,$$

$$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0. \qquad (2)$$

В другом пространстве Лагранжа, применяя в качестве переменных: магнитный поток Φ в качестве координаты, обобщенную скорость в форме напряжения производной от координаты $V = \dot{\Phi}$, электрический импульс $Q = c\Phi$ в форме электрического потока—(заряда) и тогда обобщенной силой в этом пространстве будет „ток" в виде мдс:

$$M = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_s \bar{D}^* d\bar{s} = -\frac{d}{dt}\oint \bar{K}d\bar{l},$$

$$V = \frac{d\Phi}{dt},$$

что при $\bar{D}^* = \mathrm{rot}\,\bar{K}$ приводит к первой группе уравнений в инверсно-сопряженной системе автора ([4]):

$$\mathrm{rot}\,\bar{H}^* = -\frac{\partial \bar{D}^*}{\partial t} - \mathrm{rot}\,|\bar{D}^* \times \bar{U}^*|$$

$$\bar{H}^* = -\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi_m - |\bar{D}^* \times \bar{U}^*|$$

$$\mathrm{div}\,\bar{D}^* = 0$$

$$\mathrm{div}\,\bar{B}^* = \rho_m. \qquad (3)$$

Очевидно, что уравнения (2) и (3) действуют в различных обобщенных лагражовых пространствах и соответственно электромагнитного поля и поэтому уравнения в форме (1), примененные в системе уравнений Максвелла, являются явно непоследовательными; между тем как (2) и (3) отражают «не фиктивные», а реальные возможности квантования электромагнитного поля ([4]).

Всесоюзный научно-исследовательский
институт электромеханики

Հայկական ՍՍՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Ա. Ղ. ԻՍԱԻՖՅԱՆ

Դուալ էլեկտրադինամիկայի ֆիզիկական հիմունքների մասին

Հայտնի է, որ Մաքսվելի հավասարումներից ստացվող դուալ հավասարումներում «մագնիսական» լիցքերը և «մագնիսական» հոսանքները կրում են ֆիկտիվ բնույթ։ Աշխատանքում մատնանշվում է, որ եթե դիտարկվեն Լագրանժի երկու ընդհանրացված տարածությունները, ապա նրանցից մեկում (երբ էլեկտրական լիցքը ընդհանրացված կոորդինատ է, իսկ մագնիսական հոսքը՝ ընդհանրացված իմպուլս) տեղի ունեն Մաքսվելի սովորական հավասարումները, իսկ մյուս տարածությունում (երբ մագնիսական հոսքը ընդհանրացված կոորդինատ է, իսկ էլեկտրական լիցքը՝ ընդհանրացված իմպուլս) տեղի ունի հեղինակի կողմից ստացված համալուծ սիստեմը։ Այդ պատճառով էլ հետևություն է տրվում, որ ընդհանրացված սիստեմն անհետևողական է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Дж. А. Стрэттон*, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М.—Л., 1948. [2] *Ч. Г. Папов*, Теория распространения электромагнитных волн, Изд. АН Арм. ССР, 1974. [3] *А. А. Семенов*, Теория электромагнитных волн, Изд. МГУ, 1962. [4] *А. Г. Иосифян*, ДАН Арм. ССР, т. LV, № 2 (1972), т. LIX, № 4 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 530.145

ФИЗИКА

Г. А. Варданян

Вклад дефектонов в теплоемкость кристалла

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 4/IV 1975)

Задача о вычислении сдвигов различных термодинамических величин была поставлена и решена И. М. Лифшицем.

В настоящей работе будет вычислен вклад дефектонов, расположенных вблизи поверхности Ферми, в теплоемкость квантового кристалла, методом, развитым в работах [1,2].

Запишем волновую функцию дефектона в виде [3,4]:

$$\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2)=\varphi_0(\vec{R}_1, \vec{R}_2)+iI(\vec{R}_2-\vec{R}_1). \tag{1}$$

Входящий здесь интеграл

$$I(\vec{R}_2-\vec{R}_1)=\int\frac{e^{i\vec{x}(\vec{R}_2-\vec{R}_1)}d^3x}{\varepsilon(\vec{x}-\vec{q})+\varepsilon(\vec{x}+\vec{q})-2\varepsilon(\vec{q}'/2)+i0} \tag{2}$$

связан с амплитудой рассеяния дефектонов. Последняя есть величина определяющая влияние взаимодействия на свойства системы. Следовательно, спектральная плотность $\nu(\varepsilon)$ будет:

$$\nu(\varepsilon)=\operatorname{arctg}\frac{\tau_0 \operatorname{Im} I_F(0)}{1+\tau_0 \operatorname{Re} I_F(0)}, \tag{3}$$

где

$$\operatorname{Im} I(0)=-\pi\int\frac{d\Omega}{|\nabla\varepsilon(\vec{x}-\vec{q})+\nabla\varepsilon(\vec{x}+\vec{q})|}, \tag{4}$$

а величина τ_0 — определяется соотношением:

$$\frac{1}{\tau_0}\leqslant\int\frac{d\varepsilon\nu(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Воспользуясь выражением спектральной плотности, можем представить сдвиг энергии

$$E-E_0=\mathrm{Sp}\left\{\varphi(\hat{\Lambda}+\hat{L})-\varphi(\hat{L})\right\}, \tag{5}$$

где функция

$$\varphi(z)=T\ln\left\{1-\exp\left[-\frac{\hbar\sqrt{z}}{T}\right]\right\}+\frac{\hbar\sqrt{z}}{2}$$

$\hat{L}$ —гамильтониан кристалла в основном состоянии, $\hat{\Lambda}$ —добавка, обусловленная взаимодействием дефектонов, в виде:

$$E-E_0=n\int\tau(z)\left|\nu(z)-\nu_0(z)\right|dz, \tag{6}$$

где n —число дефектонов,

$$\nu_0(z)=\int\limits_{\varepsilon(\vec{x})=z}\frac{d\Omega}{|\nabla\varepsilon(\vec{x})|}$$

сдвиг энергии при $T=0$:

$$E_0=2(\varepsilon_0-\varepsilon_g)+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\omega}\mathrm{arctg}\,\frac{\tau_0\mathrm{Im}I_F(0)}{1+\tau_0\mathrm{Re}I_F(0)}dz \tag{7}$$

После простых вычислений, имеем:

$$E-E_0=\frac{\pi}{3}nT^2\left.\frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \tag{8}$$

Следовательно, вклад в теплоемкость кристалла будет:

$$\Delta C=\frac{2}{3}\pi\tau_0T\frac{\frac{d}{d\varepsilon}\left|\mathrm{Im}I_F(0)\right|+\tau_0\frac{d}{d\varepsilon}\left|\mathrm{Im}I_F(0)\right|\mathrm{Re}I_F(0)-\frac{d}{d\varepsilon}\mathrm{Re}I_F(0)\mathrm{Im}I_F(0)}{\left|\tau_0\mathrm{Im}I_F(0)\right|^2+\left|1+\tau_0\mathrm{Re}I_F(0)\right|^2}. \tag{9}$$

Очевидно, что к выражению (9) должен быть прибавлен член ($\sim T^3$), соответствующий вкладу бозевских ветвей возбуждений в теплоемкость кристалла ([5]). Это ограничивает применимость полученной формулы областью предельно низких температур:

$$T^2\ll\frac{N_F}{n}\frac{T_F^3}{T}, \qquad T\ll T_F$$

где T_F — температура фермиевского вырождения, N_F — число дефектонов (выражаемое объемом поверхности ферми), T_0—температура, определяемая граничной частотой фононных возбуждений. Зависимость

$T(T_0)$ и линейное поведение по T сдвига (например, для He^3) позволяют считать, что твердый He является кристаллом с дефектонами, что и достаточно хорошо объясняет экспериментальные результаты ([6]).

Выражаю глубокую благодарность академику И. М. Лифшицу за советы.

Ереванский государственный университет

Դ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Դեֆեկտոնների ներդրումը բյուրեղի ջերմունակության մեջ

Զրոյական տատանումների և բյուրեղի ցանցի հաստատունի համեմատականությունը բերում է կվազիմասնիկների առաջացմանը։ Այն կվազիմասնիկները, որոնք գտնվում են Ֆերմի մակերևույթի մոտ, բյուրեղի ջերմունակության մեջ առաջացնում են ջերմաստիճանին համեմատական շեղում, որը նշանակում է, որ օրինակ, պինդ հելիումը պարունակում է դեֆեկտորներ։ Այս արդյունքը շատ լավ բացատրում է փորձից ստացված տվյալները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

И. М. Лифшиц, Nuovo. Cimm. Suppl., 3, 716 (1956). [2] *И. М. Лифшиц*, УМН, 7, 170 (1952). [3] *А. Ф. Андреев, И. М. Лифшиц*, ЖЭТФ, 56, 2057 (1969). [4] *И. М. Лифшиц, Г. А. Варданян*, ДАН АрмССР, т. LVIII, №2(1974). [5] *Л. Е. Дзялошинский, П. С. Кондратенко, В. С. Левченков*, ЖЭТФ, 62, 2318 (1972). [6] *E. C. Heltems, C. A. Swenson*, Phys. Rev. 128, 1512 (1962)

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 621.37/39

РАДИОФИЗИКА

К. А. Барсуков, Г. А. Григорян

О распространении электромагнитных волн в волноводе с неравномерно движущейся границей

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Мирзабекяном 12/VI 1975)

Исследования волноводов с подвижной границей оказываются существенными для решения многих вопросов радиофизики, таких, как влияние вибраций стенок на характеристики волновода, перестройка полосы пропускания, преобразования частот и т. п. Известные к настоящему времени точные решения этой задачи относятся к плоскому волноводу, образованному двумя идеально-проводящими плоскостями, для волны типа H_{n0} [1, 2]. В первой из этих работ рассматривается линейный закон движения границы $x=a+vt$, во второй — параболический: $x=\sqrt{a^2+2avt}$.

Ниже предлагается исследование прямоугольного волновода для любого типа поляризации волны при параболическом законе движения его стенки.

Пусть $x=0$, $y=\pm\frac{b}{2}$ уравнения трех стенок прямоугольного волновода без заполнения ($\varepsilon=\mu=1$), а четвертая в момент времени $t=0$ начинает двигаться по закону

$$x=x(\tau)=\sqrt{a^2+2a\beta\tau}, \tag{1}$$

где a — начальный размер волновода, $\tau=ct$, $v=\beta c$ есть начальная скорость движения стенки. С точностью до членов порядка β^2 (1) моделирует равнозамедленное движение с ускорением $g=\beta^2c^2/a$, а в пренебрежении членами с β^2 — равномерное со скоростью v. Граничные условия, в предположении идеальной проводимости стенок волновода, имеют вид:

$$\begin{gathered} E_x=E_z=0 \quad \text{при} \quad y=\pm\frac{b}{2}, \\ E_z=E_y=0 \quad \text{при} \quad x=0 \text{ и} \\ E_z+\bar{\beta}H_y=0, \quad E_y-\bar{\beta}H_z=0 \quad \text{при } x=\bar{x}(\tau), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\bar{\beta}=\frac{d\bar{x}(\tau)}{d\tau}$. Поля в волноводе выразим через две скалярные функ-

шии $A_n^{(1)}(x, \tau)$ и $A_n^{(2)}(x, \tau)$ соотношениями:

$$E_x=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(1)}(x, \tau)\ \sin\frac{\pi n}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)e^{ihz}=\sum_{n=0}^{\infty}E_{xn},$$

$$\vec{E}_\perp=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{E}_{n\perp}=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n^{-2}\left\{\nabla\frac{\partial E_{xn}}{\partial x}-\mathrm{rot}\frac{\partial H_{xn}}{\partial \tau}\vec{e}_x\right\}, \tag{3}$$

$$H_x=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(2)}(x, \tau)\cos\frac{\pi n}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)e^{ihz}=\sum_{n=0}^{\infty}H_{xn},$$

$$\vec{H}_\perp=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{H}_{n\perp}=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n^{-2}\left\{\nabla\frac{\partial H_{xn}}{\partial x}+\mathrm{rot}\frac{\partial E_{xn}}{\partial \tau}\vec{e}_x\right\},$$

где h—постоянная распространения в волноводе, $\Delta_n=\sqrt{h^2+(\pi n/b)^2}$. $\vec{E}_\perp$ и $\vec{H}_\perp$—нормальные к оси Ox составляющие полей, $\vec{e}_x$—орт оси Ox.

Неизвестные функции $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ удовлетворяют обычным волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 A_n^{(1,2)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_n^{(1,2)}}{\partial \tau^2}-\Delta_n^2 A_n^{(1,2)}=0, \tag{4}$$

Такое представление полей обеспечивает выполнение граничных условий при $y=0$ и $y=b$. Заметим, что (3) описывают „гибридные" волны в волноводе, состоящие из ТМ и ТЕ мод, так как только такой тип решения позволяет в общем случае удовлетворить первому из условий (2).

Подстановка полей из (3) в граничные условия (2) приводит, как это нетрудно видеть, к следующим простым соотношениям для функций $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$:

$$\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial A_n^{(2)}}{\partial \tau}=0\ \text{при}\ x=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial x}+\bar{\beta}\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial \tau}=0,\quad \frac{\partial A_n^{(2)}}{\partial \tau}+\bar{\beta}\frac{\partial A_n^{(2)}}{\partial x}=0\ \text{при}\ x=\bar{x}(\tau). \tag{6}$$

В уравнении (4) введем новые переменные, предложенные в работе ([2]):

$$\eta=\frac{1}{2}\left[\varphi(\tau+x)-\varphi(\tau-x)\right],$$

$$\xi=\frac{1}{2}\left[\varphi(\tau+x)+\varphi(\tau-x)\right], \tag{7}$$

где $\varphi(\xi)=\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}+\frac{2\xi}{\alpha\beta^2}}-\frac{1}{\beta}$.

Из (7) следует, что граница $x=0$ переходит в $\eta=0$, а $x=\bar{x}(z)$ в $\eta=1$. Проведя замену переменных (7) в (4) получим:

$$\frac{\partial^2 A_n^{(1,2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 A_n^{(1,2)}}{\partial \eta^2} + \Delta_n^2 a^2 \left| (1+\beta\xi)^2 - \beta^2\eta^2 \right| A_n^{(1,2)} = 0. \qquad (8)$$

Можно показать, что граничные условия с помощью замены (7) переходят в следующие

$$\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial \eta} = 0, \; A_n^{(2)} = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } \eta = 1. \qquad (9)$$

Следовательно, в переменных ξ, η задача нахождения полей в волноводе сведена к решению уравнений (8) с граничными условиями (9).

Очевидно, (8) допускает разделение переменных. Будем искать $A_n^{(1,2)}$ в виде:

$$A_n^{(1,2)}(\xi, \eta) = U_n^{(1,2)}(\xi)\, V_n^{(1,2)}(\eta). \qquad (10)$$

Если теперь подставить $A_n^{(1,2)}$ из (10) в (8), то получим

$$U_n^{(1,2)''} + \left[a^2\Delta_n^2 (1+\beta\xi)^2 + \mu^2\right] U_n^{(1,2)} = 0, \; V_n^{(1,2)''} + \left[(a\Delta_n\beta)^2\eta^2 + \right.$$

$$\left. + \mu^2\right] V_n^{(1,2)} = 0, \qquad (11)$$

где μ^2 — постоянная разделения, причем граничные условия (9) принимают вид

$$V_n^{(1)'}(0) = 0, \quad V_n^{(1)'}(1) = 0,$$

$$V_n^{(2)}(0) = 0, \; V_n^{(2)}(1) = 0. \qquad (12)$$

Решениями уравнений (11) являются соответственно четная ${}_eU_{\varkappa_n}(\zeta)$ и нечетная ${}_0U_{\varkappa_n}(\zeta)$ функции параболического цилиндра, подробная теория которых содержится в работе ([3]), где $\varkappa_n = \mu^2/\Delta_n a\beta$ и $\zeta = \sqrt{\Delta_n a\beta}\,\eta$ либо $\zeta = \sqrt{\Delta_n a\beta}\left(\xi + \frac{1}{\beta}\right)$. С учетом граничных условий (12) при $\eta=0$ и (10) решения (8) могут быть представлены следующим образом:

$$A_n^{(1,2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left| \begin{matrix} {}_eU_{\varkappa_{nm}}(\sqrt{\Delta_n a\beta}\,\eta) \\ {}_0U_{\varkappa_{nm}}(\sqrt{\Delta_n a\beta}\,\eta) \end{matrix} \right| \left\{ \alpha_{nm}\, {}_0U_{\varkappa_{nm}}\left[\sqrt{\Delta_n a\beta}\left(\xi + \frac{1}{\beta}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \beta_{nm}\, {}_eU_{\varkappa_{nm}}\left[\sqrt{\Delta_n a\beta}\left(\xi + \frac{1}{\beta}\right)\right]\right\}, \qquad (13)$$

где $\varkappa_{nm} = \mu_m^2/\Delta_n a\beta$, α_{nm} и β_{nm} — коэффициенты, определяемые из условий возбуждения данного типа колебаний, и верхняя строка относится к $A_n^{(1)}$, а нижняя — к $A_n^{(2)}$.

В работе ([2]) было исследовано распространение волны H_{n0}, которое получается из (13) при нечетной функции параболического цилиндра и значении $n = 0$. Здесь мы не будем повторять результаты работы ([2]) и заметим, что они обобщаются на наш случай, если в ([2]) заменить h на $\sqrt{h^2 + (\pi n/b)^2}$.

Поэтому ниже мы исследуем случай четной функции параболического цилиндра, через которую выражается потенциал $A_n^{(1)}$. Граничные условия в точке $\eta = 1$ приводят к следующим дисперсионным соотношениям

$$
{}_0U_{\nu_n}(\sqrt{\Delta_n a\beta}) = 0,
$$

$$
{}_eU'_{\nu_n}(\sqrt{\Delta_n a\beta}) = 0, \tag{14}
$$

дающие зависимость между параметрами $\Delta_n a\beta$ и μ. В соответствии с теоремой Штурма—Лиувилля уравнения (14) имеют бесконечное число ветвей, причем, каждая из этих ветвей определена в области $0 \leq \mu \leq m\pi$, где m — номер ветви. Граничные значения каждой функции в своей области могут быть легко найдены. В самом деле, при малых $\Delta_n a\beta$ ветви обеих функций для нулей могут быть представлены формулами

$$
tg\mu = -\frac{1}{4\mu^2}\left(\frac{2}{3}\mu^2 \pm 1\right)\left(\Delta_n a\beta\right)^2,
$$

где знак плюс берется для функции ${}_eU_{\nu_n}$ и знак минус — для ${}_0U_{\nu_n}$. Очевидно, что при малых $\Delta_n a\beta$ имеем $\mu \approx \pi m$ и график для четной функции идет ниже графика для нечетной. При $\mu = 0$ (см.([3])) соответствующие значения функции могут быть найдены из соотношений

$$
J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\Delta_n a\beta}{2}\right) = 0 \text{ или } J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\Delta_n a\beta}{2}\right) = 0,
$$

где первое равенство относится к нечетной, а второе — к четной функции параболического цилиндра.

Для первых двух ветвей рассматриваемые зависимости представлены графически на рис. 1 в виде сплошных кривых, которые рассчитывались по представлениям функций параболического цилиндра в виде степенных рядов, (см. ([3])).

Точные выражения для $V_n^{(1)}$ оказываются сложными для физического анализа. Поэтому ниже мы получм, как и в ([2]), приближенное решение методом ВКБ, справедливое в достаточно широкой области значений переменных. Следуя ([2]), получим

$$
V_n^{(1)} = C_n\left(\frac{\Delta_n^2 a^2\beta^2}{\mu^2}\eta^2 + 1\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \cos\frac{\mu^2}{\Delta_n a\beta}\int_0^{(\Delta_n a\beta)\eta}\sqrt{1+\zeta^2}\,d\zeta, \tag{15}
$$

причем область применимости этой формулы дается неравенством

$$0,105\,\frac{\Delta_n a\beta}{\mu^2} \ll 1 \tag{16}$$

при любых значениях η.

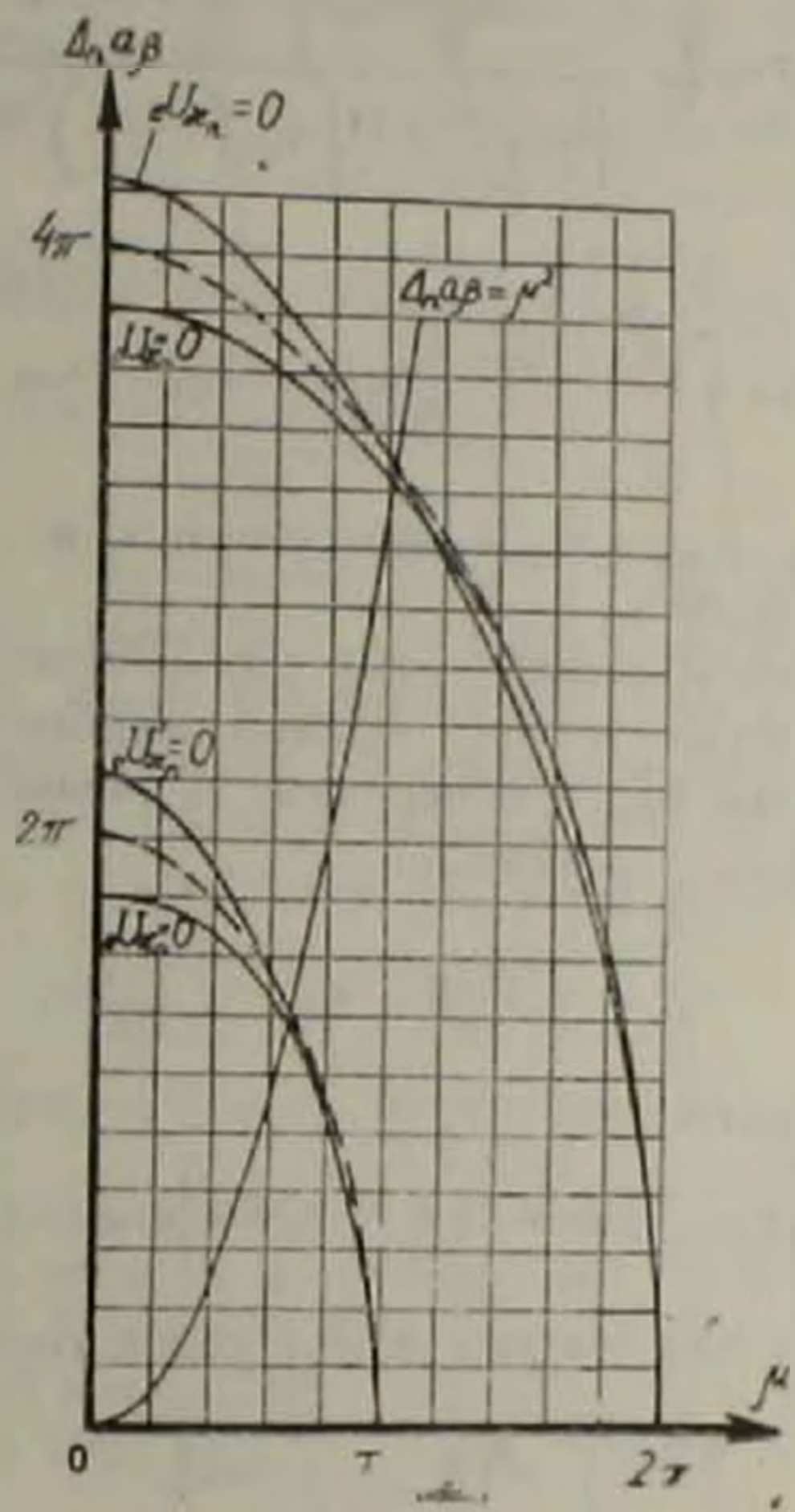

Рис. 1

Первое из граничных условий $V_n^{(1)}(0)=0$ удовлетворяется автоматически с точностью рассматриваемого приближения (16), а второе условие $V_n^{(1)}(1)=0$ приводит к следующему уравнению

$$\sqrt{1+\gamma_n^2}+\frac{1}{\gamma_n}\ln\left(\gamma_n+\sqrt{1+\gamma_n^2}\right)=\frac{2\pi m}{\mu}, \tag{17}$$

где $\gamma_n=\Delta_n a\beta/\mu$. Это уравнение дает зависимость между параметрами $\Delta_n a\beta$ и μ. Графически эта связь изображена на рис. 1 пунктирной линией для $m=1, 2$. На этом же рисунке нанесена кривая $\Delta_n a\beta=\mu^2$, дающая запас точности в один порядок. Заметим, что расхождение мало между точным и приближенным значениями функции для любых значений μ и $\Delta_n a\beta$ и уже при $m=2$ составляет несколько процентов при малых μ, где нарушается условие (16), и при дальнейшем увеличении m это расхождение стремится к нулю. Заметим, что отклонения точных значений от приближенных, даваемых соотношением (15),

оказываются, как это видно из рис. 1, при малых μ, разных знаков.

Поступая аналогично со вторым уравнением (11), получим в конечном счете:

$$A_n^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{ i\varkappa_{nm} \int_0^{\gamma_{nm}\eta} \sqrt{1+\zeta^2}\, d\zeta \right\}}{\left\{(\gamma_{mn}^2\eta^2+1)\left[\gamma_{mn}^2\left(\xi+\frac{1}{\beta}\right)^2+1\right]\right\}^{\frac{1}{4}}} \times$$

$$\times \left[a_{nm} \exp\left\{ i\varkappa_{nm} \int_0^{\gamma_{nm}\left(\xi+\frac{1}{\beta}\right)} \sqrt{1+\zeta^2}\, d\zeta \right\} + b_{nm} \exp\left\{ -i\varkappa_{nm} \int_0^{\gamma_{nm}\left(\xi+\frac{1}{\beta}\right)} \sqrt{1+\zeta^2}\, d\zeta \right\} \right], \quad (18)$$

где $\gamma_{nm} = \Delta_n a\beta/\mu_m$. a_{nm} и b_{nm}—определяются из начальных условий рассматриваемой задачи.

Из выражения (18) видно, что здесь образуются своеобразные „динамические" моды в виде прямой и обратной стоячих волн. Мгновенные частоты $\omega_{nm}^{\pm}$ и поперечные волновые числа $k_{nm\perp}^{\pm}$ определяются из обычных соотношений

$$\omega_{nm}^{\pm} = c\,\frac{\partial \Phi_{nm}^{\pm}}{\partial z}, \quad k_{nm\perp}^{\pm} = \frac{\partial \Phi_{nm}^{\pm}}{\partial x}, \quad (19)$$

где

$$\Phi_{nm}^{\pm} = \varkappa_{nm} \left\{ \int_0^{\gamma_{nm}\left(\xi+\frac{1}{\beta}\right)} \sqrt{1+\zeta^2}\, d\zeta + \int_0^{\gamma_{nm}\eta} \sqrt{1+\zeta^2}\, d\zeta \right\}.$$

Заметим, что они связаны между собой соотношением

$$\left(\frac{\omega_{nm}^{\pm}}{c}\right)^2 - \left(k_{nm\perp}^{\pm}\right)^2 = \Delta_n^2,$$

справедливым для стационарного волновода.

Следует также отметить, что при $b \to \infty$ функция $A_n^{(1)}$ описывает волну типа ТМ в плоском волноводе. Все приведенные выше результаты остаются справедливыми для этого случая, если в них положить $b = \infty$.

Ленинградский ордена Ленина электротехнический
институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Կ. Ա. ԲԱՐՍՈՒԿՈՎ, Գ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Անհավասարաչափ շարժվող սահման ունեցող ալիքատարում էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածման մասին

Հետազոտվում է էլեկտրամագնիսական ալիքի տարածումն ուղղանկյուն ալիքատարի առանցքի երկայնությամբ։ Երբ ալիքատարի պատերից մեկը շարժվում է $x=\sqrt{a^2+2avt}$ օրենքով պատի նորմալի ուղղությամբ։ Փոփոխականի փոխարինման միջոցով շարժվող պատով տիրույթը ձևափոխվում է

սահմանային ուղղանկյուն տիրույթի, որտեղ ալիքի տարածումը նկարագրվում է փոփոխական գործակիցներով ալիքային հավասարումով։ Առաջարկված փոփոխական փոխարինումը թույլատրում է նրանց անջատումը վերջին հավասարման մեջ և բերել այն 2 պարաբոլիկ գլանի ֆունկցիաների հավասարմանը։ Ցույց է տրվում, որ շարժվող պատով ալիքատարում դաշտի բաժանումը TE և TM մոդաների հնարավոր չէ (բացի H_{n0} տիպի ալիքից), այլ առաջանում է «հիբրիդային» մոդաների նոր տիպ։ Ստացված են դիտարկվող խնդրի ճշգրիտ լուծումը և արտահայտություններ էլեկտրամագնիսական ալիքի դաշտի համար։ Ուսումնասիրված է նրա սպեկտրը և լայնական ալիքային թվերի կախումը պատի շարժումից։ Ավելի մանրամասն արդյունքներ են ստացված վկբ մոտավորությամբ, երբ՝

$$\frac{0{,}105\sqrt{h^2+(\pi n/b)^2}\,av}{c\mu^2(h)} \ll 1,$$

որտեղ h-տարածման հաստատունն է, a և b-ալիքատարի սկզբնական չափերն են, v-պատի սկզբնական արագությունը, μ-բաժանման հաստատունը, որը որոշված է որպես ֆունկցիա h-ից։ Ցույց է տրված, որ ակրնքարթային հաճախականությունը և լայնական ալիքային թիվը կապված են սովորական առնչությամբ, որը ճիշտ է ստացիոնար ալիքատարի համար։ Վերջինս նշանակում է, որ պատի շարժումը չի կարող ալիքատարը դարձնել անդրսահմանային։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Весницкий*, Распространение электромагнитных волн в волноводе с подвижными границами, Изв. высш. уч. зав. «Радиофизика», 12, № 6, 935 (1969). [2] *К. А. Бирсуков, Г. А. Григорян*, К теории волновода с подвижными границами, Изв. высш. уч. зав. «Радиофизика», 18, вып. 5 (1975). [3] *C. P. Wells, R. D. Spence*, The parabolic cylinder function, J. Math. Phys. Mass. Inst. Techn., 24, No. 1, 51(1945).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 541.64+678.02:66.095.2

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

С. Т. Барсамян, С. А. Казарян

Структурные превращения в полихлоропрене при нагреве

(Представляется академиком АН Армянской ССР А. Б. Налбандяном 4/VII 1975)

Структурирование каучука происходит в результате многих причин, в том числе за счет раскрытия двойных связей, разрыва боковых привесков и др. В общем, картина термоокислительных и деструкционных процессов, сопровождающих процессы сшивания в каучуках и превалирующих над ними при повышенных температурах, ясна. В этом отношении некоторые особенности сшивания хлоропреновых каучуков обусловлены наличием атомов хлора, различно связанных с основной ненасыщенной карбоцепью ([1,2]).

В настоящей работе изучаются структурные превращения хлоропренового каучука меркаптанового регулирования (наирит П с средним M_n = 250000) в процессе нагрева в среде воздуха. Для выяснения поведения двойных связей и боковых привесков при высокотемпературных структурных превращениях ПХП был исследован также ряд полимеров: полибутадиен (СКБ), натуральный каучук (НК) бутадиенакрилонитрильный сополимер (СКН-40), полидихлорбутадиен (ПДХБ), поливинилхлорид (ПВХ), перхлорвиниловая смола (ПСХ-С) и полистирол (ПС).

Исследования проводились методами дифференциально-термического анализа (ДТА) и термогравиметрии (ТГ) на дериватографе системы Паулик-Эрдеи при скорости нагрева 2.5 *град/мин* в интервале температур 20—500°С. Вес образцов составлял 800±10 *мг* за исключением образца ПСХ-С (460 *мг*).

На рис. 1 изображены кривые ДТА, ТГ и Т вальцованного (кривые *1, 1', 1''*), термовулканизованного (при 160°С 30 *мин*, кривые *2, 2', 2''*), серусодержащей (5 в. ч. ZnO, 4 в. ч. MgO, 1 в. ч. дифенилгуанидин, 1 в. ч. сера на 100 в. ч. ПХП, кривые *3, 3', 3''*) и безсерной (5 в. ч. ZnO, 4 в. ч. MgO на 100 в. ч. ПХП, кривые *4, 4', 4''*) смесей. На кривых ДТА (кривые *1, 2, 3, 4*), кроме низкотемпературного (25—70°С) эндотермического процесса плавления кристаллов ПХП ([3]), остальные процессы экзотермические, сопровождающиеся изменением веса, что наблюдается на кривых ТГ (кривые *1', 2', 3', 4'*). Такие экзотермы свидетельствуют о химической природе происходящих процессов, связанных с структурными превращениями макромолекул. В низкотемпературной области деструкции (начало отклонения кривой ТГ от горизонтальной линии) за

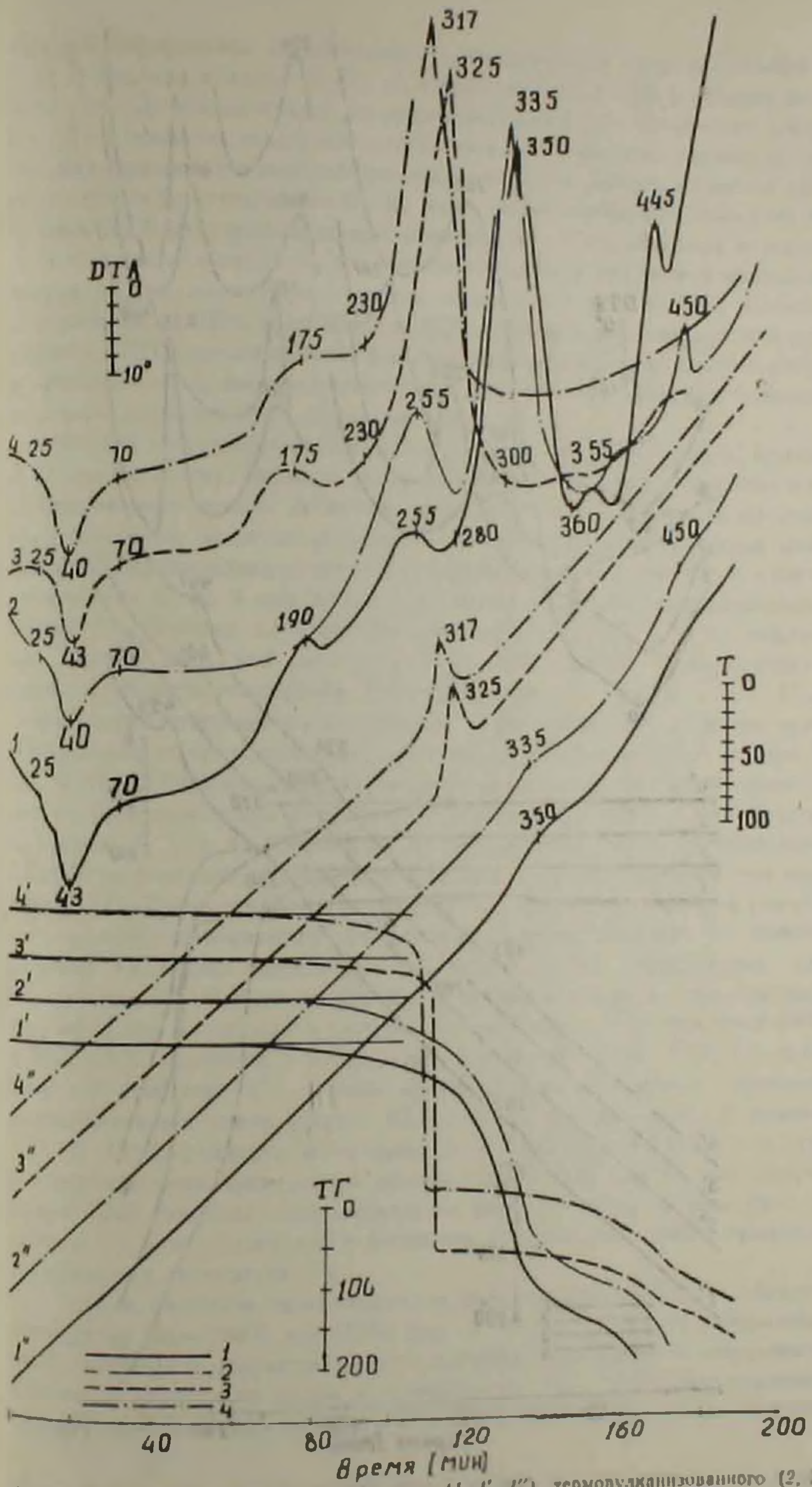

Рис. 1. Кривые ДТА, ТГ и Т вальцованного (1, 1', 1''), термовулканизованного (2, 2', 2''), серусодержащей (3, 3', 3'') и безсерной (4, 4', 4'') смесей ПХП

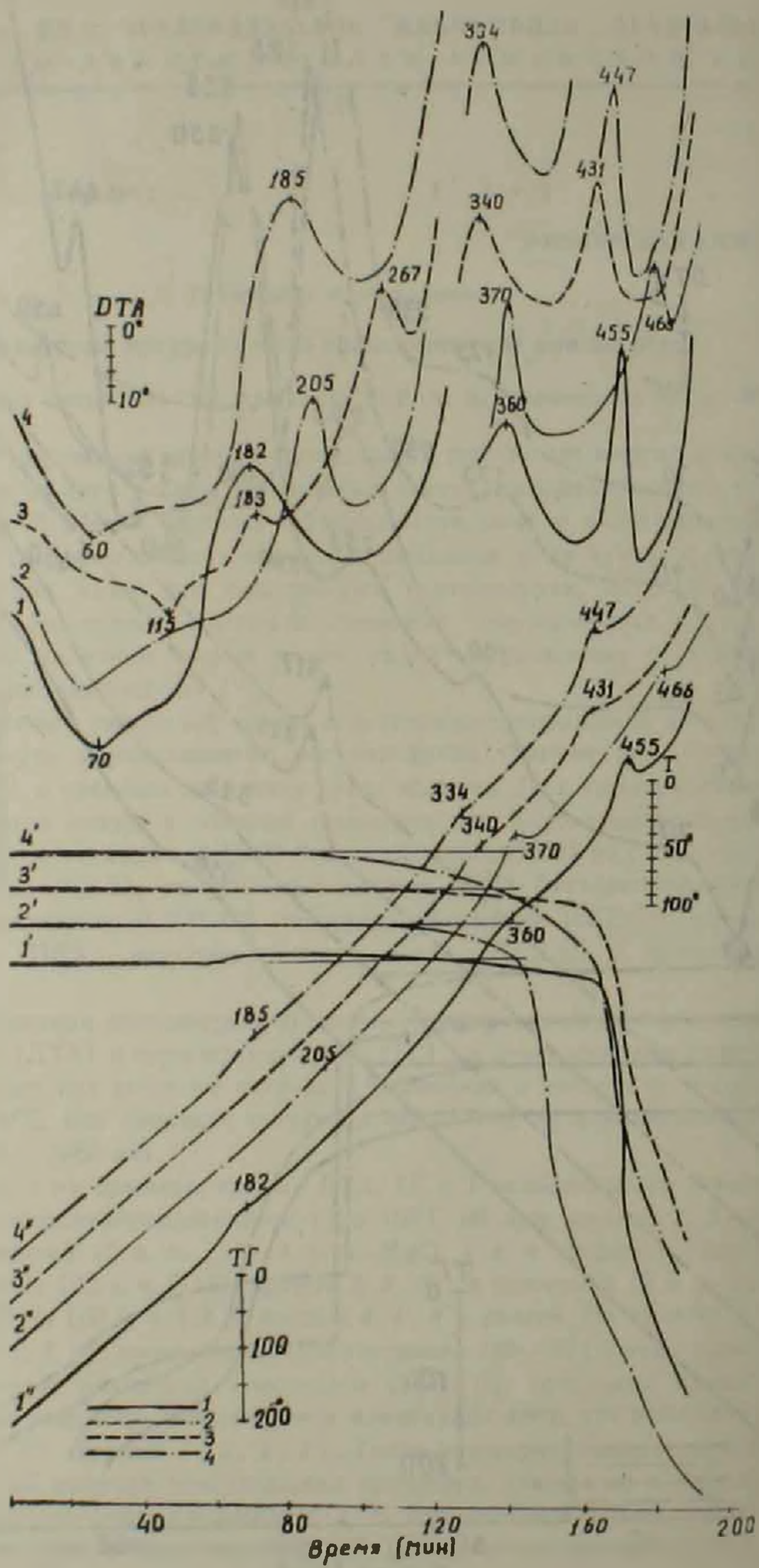

Рис. 2. Кривые ДТА, ТГ и Т СКБ (*1, 1', 1''*), НК (*2, 2', 2''*), СКН-40 (*3, 3', 3''*) и ПДХБ (*4, 4', 4''*)

дегидрохлорирование ответственен слабо связанный хлор в положении 1, 2. Потери на кривых ТГ (*1'*, *3'*, *4'*) составляют 1—1,5% общего веса образцов, что соответствует содержанию в них слабо связанного хлора ([4]). Этот процесс полностью отсутствует для образца, подвергнутого предварительной термообработке—вулканизации. Экзотермические процессы соответствующие сшивке по месту этого хлора, наблюдаемые на кривых ДТА невулканизованных образцов (*1*, *3*, *4*), исчезают в термовулканизованном варианте (*2*) и соответствующей убыли веса не наблюдается (*2'*). Вулканизующие агенты ингибируют этот процесс и температура пика от 190°С снижается до 175°С. Прямым доказательством специфики ПХП, обусловленной первым актом вулканизации за счет хлора в положении 1,2, является отсутствие аналогичного процесса у других диеновых каучуков (рис. 2, кривые *1*, *2*, *3*, *4*).

Второй экзотермический процесс с пиком при 255°С (рис. 1, кривые *1*, *2*), по-видимому, связан с присоединением кислорода к цепи каучука с образованием второй полярной группы. Известно, что после завершения окисления, наличие двух полярных групп в одном участке цепи (атом Cl, кислородная группа) и появление в связи с этим возможности отщепления хлора в положении 1, 4, ускоряет процесс дегидрохлорирования ([5]). Поэтому процесс окисления сопровождается более медленным спадом веса, чем высокотемпературный процесс дегидрохлорирования в области температур 300°—350°С (рис. 1, кривые *1'*, *2'*). Подтверждением этого процесса окисления являются соответствующие экзотермические пики в изученных нами каучуках. Аналогичный процесс в НК, СКБ, ПДХБ и полибутадиенном участке цепи в СКН-40 происходит соответственно при температурах 205°С, 182°С, 185°С и 183°С (рис. 2, кривые *1*, *2*, *3*, *4*). Окисление же акрилонитрильного участка цепи СКН-40 происходит при 267°С, что близко к соответствующей температуре ПХП. Такие температурные сдвиги процессов окисления в указанных каучуках объясняются тем, что в неполярных каучуках акт присоединения кислорода происходит при более низких температурах, чем в полярных ([6]). Эти экзотермические процессы косвенно характеризуют диффузию кислорода в каучук. Так, константа диффузии кислорода в НК, СКБ, нербунан и неопрен соответственно равна: 1,58; 1,5; 0,43; 0,38; $\times 10^{-6} см^2 \cdot сек^{-1}$ ([7]). С этим соотношением согласуются площади соответственных пиков кривых ДТА (рис. 1, кривая *1*, рис. 2, кривые *1*, *2*, *3*). Специфичность этого процесса в ПХП заключается в том, что в изменении веса превалирует дегидрохлорирование, тогда как, например, в СКБ окисление сопровождается даже увеличением веса (рис. 2, кривая *1'*), что согласуется с взрывным характером данного процесса, описанного в литературе ([5]).

Третий, наиболее интенсивный, экзотермический процесс в области температур 280—360°С для ПХП (рис. 1, кривая *1*) связан с образованием трехмерной структуры за счет непредельных связей и отщепления основного количества хлора в положении 1, 4. Такое утверждение обосновывается рядом экспериментальных результатов. При помощи

ДТА для неопрена в атмосфере азота и воздуха доказан ([8]) процесс сшивания в результате дегидрохлорирования с пиком при 377°С. Некоторое смещение этого пика в данном эксперименте (350°С) объясняется более медленным нагревом (в 4 раза) образца. Этот процесс, сопровождаемый дегидрохлорированием согласуется с интенсивной убылью веса (рис. 1, кривая *1'*), соответствующей количеству гидрохлорида, и составляющей 38±2% от общего веса без учета доли хлора в положении 1, 2.

Авторы работы ([2]) обнаружили такой же процесс дегидрохлорирования в наирите П при длительном воздействии температуры 170°С. Количество отщепленного хлора при этом составляет 20%. Отмечается повышающее действие серы и металлоксидных вулканизаторов на скорость и степень дегидрохлорирования, особенно при высокой температуре. В нашем же эксперименте это ускорение приводит к смещению пика и области вулканизации в сторону низких температур соответственно на 25—33° и 55—60° при введении в ПХП серы и металлооксидных вулканизаторов (рис. 1, кривые *4, 3*). Наличие этих агентов приводит к более резкому спаду веса образцов (рис. 1, кривые *4', 3'*), по сравнению с чистым ПХП.

Относительно участия непредельных связей в процессе вулканизации ПХП доказательством может служить не только классическое представление о раскрытии этих связей в процессе вулканизации диеновых каучуков, но и их дифференциально-термический анализ. В СКБ, НК, СКН-40, ПДХБ в аналогичной ПХП области температур наблюдается большой экзотермический процесс с пиками при температурах соответственно 360, 370, 340, 334°С, (рис. 2, кривые *1, 2, 3, 4*). В этих каучуках распада, подобного дегидрохлорированию не наблюдается (рис. 2, кривые *1', 2', 3', 4'*) ([5,9]). В пользу участия двойных связей в процессе структурирования свидетельствует отсутствие подобных процессов для предельных полимерных цепей. Это наблюдается на кривых ДТА для ПС, ПСХ-С и ПВХ. Следует отметить, что если ДТА ПС (рис. 3, кривая *1*) полностью подтверждает отсутствие процесса структурирования, то в случае ПСХ-С и ПВХ (рис. 3, кривая *2, 3*) наблюдается незначительный процесс сшивания с пиком на кривых ДТА при температуре 305°С. За сшивку этих полимеров, при участии кислорода, ответственны двойные связи, образовавшиеся после дегидрохлорирования (рис. 3, кривые *2, 3*) ([10]).

Высокотемпературный экзотермический пик при 445°С на кривой ДТА (рис. 1 кривая *1*) свидетельствует о термоокислительной деструкции дегидрохлорированного остатка ПХП. Подтверждением этого является, найденный авторами ([8]), аналогичный пик при нагреве неопрена в среде воздуха, который исчезает в среде азота. В этом интервале (400°С и выше) наблюдается дополнительная убыль веса, вызванная, по-видимому, распадом углеродных связей и образованием новых летучих продуктов, в основном, окислов углерода ([11]). Такой термоокислительный распад цепей наблюдается у всех исследованных каучуков

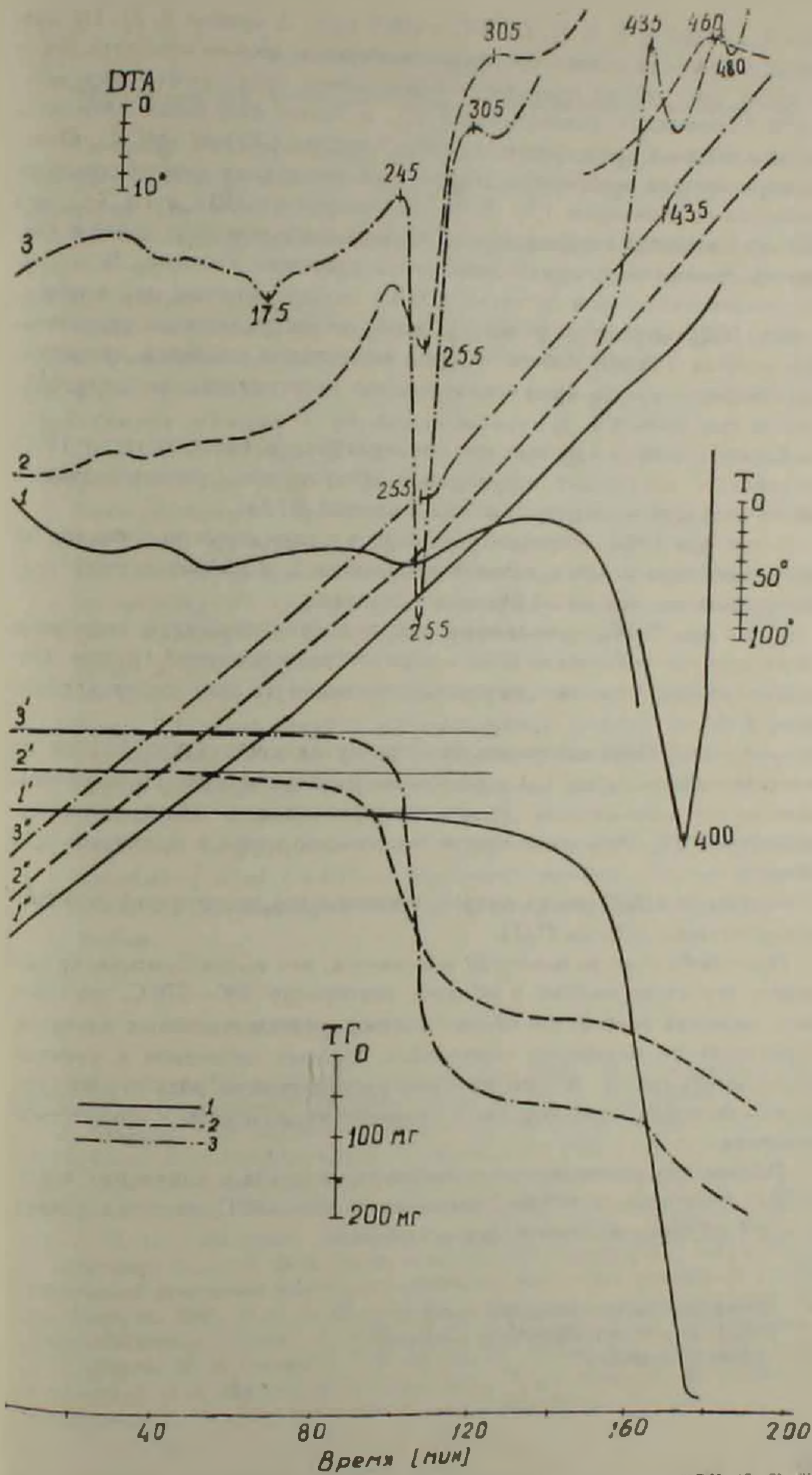

Рис 3. Кривые ДТА, ТГ и Т ПС (1, 1', 1"), ПСХ—С (2, 2', 2") и ПВХ (3, 3', 3")

(рис. 2, кривые *1, 2, 3, 4*), ПСХ-С и ПВХ (рис. 3, кривые *2, 3*). Не претендуя на полный анализ продуктов деструкции, можно отметить, что в каучуках этот распад приводит к образованию предельных, непредельных и циклических углеводородов ([9]), а также отдельных элементов распада боковых привесков (например, в случае СКН-40—HCN). Отмечается некоторая особенность термической деструкции хлорсодержащих карбоцепных полимеров ([12]). В них, в частности в ПВХ и ПСХ-С, при 450°С наблюдается карбонизация с образованием осколков цепей с диеновыми, тройными и кумулированными двойными связями. В случае же термоокислительной деструкции ПВХ экзотермический пик в области 400—500°С отнесен к окислительному процессу дегидрохлорированного остатка ([13]). Отличным от этих механизмов является деполимеризация полистирола, выраженная только эндотермическим процессом с пиком при 400°С ([9]).

Таким образом при высоких температурах в среде воздуха ПХП претерпевает следующие структурные превращения, характеризуемые пиками экзотермических процессов на кривых ДТА:

—пик при 190°С соответствует первому акту структурирования за счет отщепления слабого хлора в положении 1, 2. Образованный гидрохлорид составляет 1,0—1,5% от общего веса;

—пик при 255°С, по-видимому, связан с присоединением кислорода к цепи каучука—окисление цепи с образованием полярной группы. Последняя ускоряет процесс дегидрохлорирования за счет хлора в положении 1, 4.

—пик при 350°С соответствует второму акту структурирования за счет хлора в положении 1, 4 и раскрытия двойных связей. Процесс сопровождается интенсивным дегидрохлорированием и убыль веса составляет 38±2%. Это соответствует содержанию хлора в положении 1, 4 в цепи.

—пик при 445°С связан с термоокислительной деструкцией дегидрохлорированного остатка ПХП.

При обобщении результатов выясняется, что высокотемпературный процесс структурирования в области температур 330—370°С, по-видимому, является общим для чистых углеводородных диеновых каучуков и протекает по механизму отщепления боковых привесков и расхода непредельных связей. В этом процессе регулирующую роль играют как природа боковых привесков, так и вулканизующие агенты и присутствие кислорода.

Общим для углеводородных диеновых каучуков и винильных насыщенных полимеров в области температур 400—470°С является распад их цепей по термоокислительным механизмам.

Всесоюзный научно-исследовательский и
проектный институт полимерных продуктов
(ВНИИПОЛИМЕР)

Մ. Թ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Ս. Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Պոլիքլորապրենի կառուցվածքային վերափոխումները տաքացումից

Կաուչուկի կառուցվածքային վերափոխումները տեղի են ունենում տարբեր պատճառներով, այդ թվում կրկնակի կապերի բացումով, կողային ռադիկալների կտրումով և այլն։

Այս տեսակետից քլորոպրենային կաուչուկի որոշ յուրահատկությունները պայմանավորված են չհագեցված ածխածնի շղթայի նկատմամբ քլորի ատոմի տարբեր դիրքերից։

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է քլորոպրենային կաուչուկի (մերկապտանային կարգավորիչով-նափրիտ Պ ՄԿ-250000) կառուցվածքային վերափոխումներն օդի միջավայրում տաքացնելուց, դիֆերենցիալ-թերմոմետրիկ անալիզի և թերմոգրավիմետրիայի մեթոդներով։

Հետազոտությունները ցույց տվեցին, որ քլորոպրենին ենթարկվում է հետևյալ կառուցվածքային վերափոխումների՝

— *Կառուցվածքային վերափոխումների առաջին փուլը տեղի է ունենում 190°C-ում, 1,2 դիրքում թույլ կապված քլորի հաշվին։*
— *255°C-ում տեղի է ունենում թթվածնի միացումը շղթային, դա կաուչուկի օքսիդացումն է, բևեռային խմբավորումների գոյացումով։ Վերջինս արագացնում է դեհիդրոքլորացման պրոցեսը, այս անգամ 1,4 դիրքի քլորի հաշվին։*
— *340°C-ում տեղի է ունենում կառուցվածքային վերափոխման երկրորդ փուլը 1,4 դիրքի քլորի և շղթայի կրկնակի կապերի բացման հաշվին։ Այս պրոցեսը 330—370°C-ում ընդհանուր է համարյա բոլոր չհագեցված մաքուր դիենային կաուչուկների համար, որը ցույց է տրված ներկա աշխատանքում փորձերի արդյունքներով։*
— *445°C-ում պոլիքլորապրենի մոլեկուլի մնացորդի ջերմաօքսիդացման պատճառով տեղի է ունենում վերջնական տրոհում։ Այս պրոցեսը 400—470°C-ում նույնպես ընդհանուր է վինիլային չհագեցված կաուչուկների համար։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Гофман*, Вулканизация и вулканизующие агенты, пер. с немецкого под ред. Н. Я. Поздубного, «Химия», Л., 1968. [2] *Н. А. Жовкер, Н. Д. Захаров, С. В. Орехов, Р. Р. Романова, Г. Н. Кострыкина*, ВМС, т. (А) XVI, с. 821 (1974). [3] *Н. М. Кочарян, Ю. А. Рапян, П. А. Безирганян*, ВМС, т. (А) IX, с. 545 (1967). [4] *Г. А. Блох*, Органические ускорители вулканизации каучуков, «Химия», Л., 1972. [5] *А. С. Кузьминский, Н. Н. Лежнев, Ю. С. Зуев*, Окисление каучуков и резин, Госхимиздат, 1957. [6] *С. А. Рейтлингер*, ЖОХ, 14, с. 420 (1944). [7] *G. Amerongen*, J. Polymer Sci., 5, 3,307 (1950). [8] *R. F. Schwenker, Jr., L. R. Beck*, Textile Resarch J., 624 August, 1960. [9] *С. Модорский*, Термическое разложение органических полимеров, пер. с англ. под ред. С. Р. Рафикова, "Мир", М., 1967. [10] *К. С. Минкер, Г. Т. Федосеева*, Деструкция и стабилизация поливинилхлорида, "Химия", М., 1972. [11] *Д. А. Вихирева, Л. Е. Решетникова, Л. И. Слюсарева, Н. В. Стинкова, Т. Н. Шувалова*, „Пластмассы", №9, 1974. [12] *В. Н. Касаточкин, А. А. Берлин, З. С. Смуткина, Ю. Г. Алеев, Р. М. Алеева, Г. Б. Финкельштейн*, Известия АН СССР, сер. хим. №6, (1965).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 533.409(474.25)

ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ

А. А. Гюрджян, П. М. Бартикян

О выявлении согласных рудных тел на Советашенском месторождении ртути

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Г. Магакьяном 28/VII 1975)

Одной из наиболее важных задач в процессе изучения Советашенского месторождения ртути является установление морфологических типов рудных тел, ибо этим и обусловлен характер и направление разведочных работ. В этом отношении, среди исследователей этого месторождения имеются некоторые предположения, которые не всегда подтверждаются в процессе поисково-разведочных работ.

Согласно данным А. Г. Мидяна ([1]), оруденение ртути приурочено к измененным, раздробленным дайкам санидиновых трахитов, где оно образует прожилки и мелкую вкрапленность. Ш. Антонян и др. (1972) отмечают трубообразные, линзообразные тела и линейно вытянутые гидротермально измененные зоны, имеющие согласные направления с основными складчатыми и разрывными структурами. Они выделяют семь таких зон.

Изучение Советашенского месторождения ртути позволило нам выделить согласные рудные тела, и в этой связи существенно изменяются наши представления о месторождении и его перспективах в целом. Дело в том, что в пределах собственно Советашенского месторождения ртути согласные рудные тела являются доминирующими, часть которых считали гидротермально измененными зонами.

Согласные рудные тела представляют собой выполнения отрицательных частей пермского палеорельефа, которые в дальнейшем были метасоматически преобразованы в связи с внедрением субвулканических тел санидиновых трахитов. Изменение, преобразование этих выполнений было довольно интенсивным, поскольку они по своим физическим свойствам представляли рыхлую массу. Они залегают под эоценовыми известняками, а также выходят на эрозионной поверхности перми и эоцена (рис. 1).

Согласные рудные тела Советашенского месторождения литологически представлены обломочно-галечным материалом известняков, аплезитов и трахитов, представленным как окатанными, так и остроугольными и слабо окатанными обломками (рис. 2). Обломочный материал сцементирован песчано-глинистой массой, большей частью трахитового состава. В отдельных случаях, в результате интенсивного метасоматоза,

трахитоидный материал преобладает над обломками известняков.

Мощность отдельных согласных рудных тел варьирует от 10 до 55 м и прослеживается по простиранию на 30—400 м. Содержание ртути в этих телах варьирует от сотых долей процента до 0,25%. Макси-

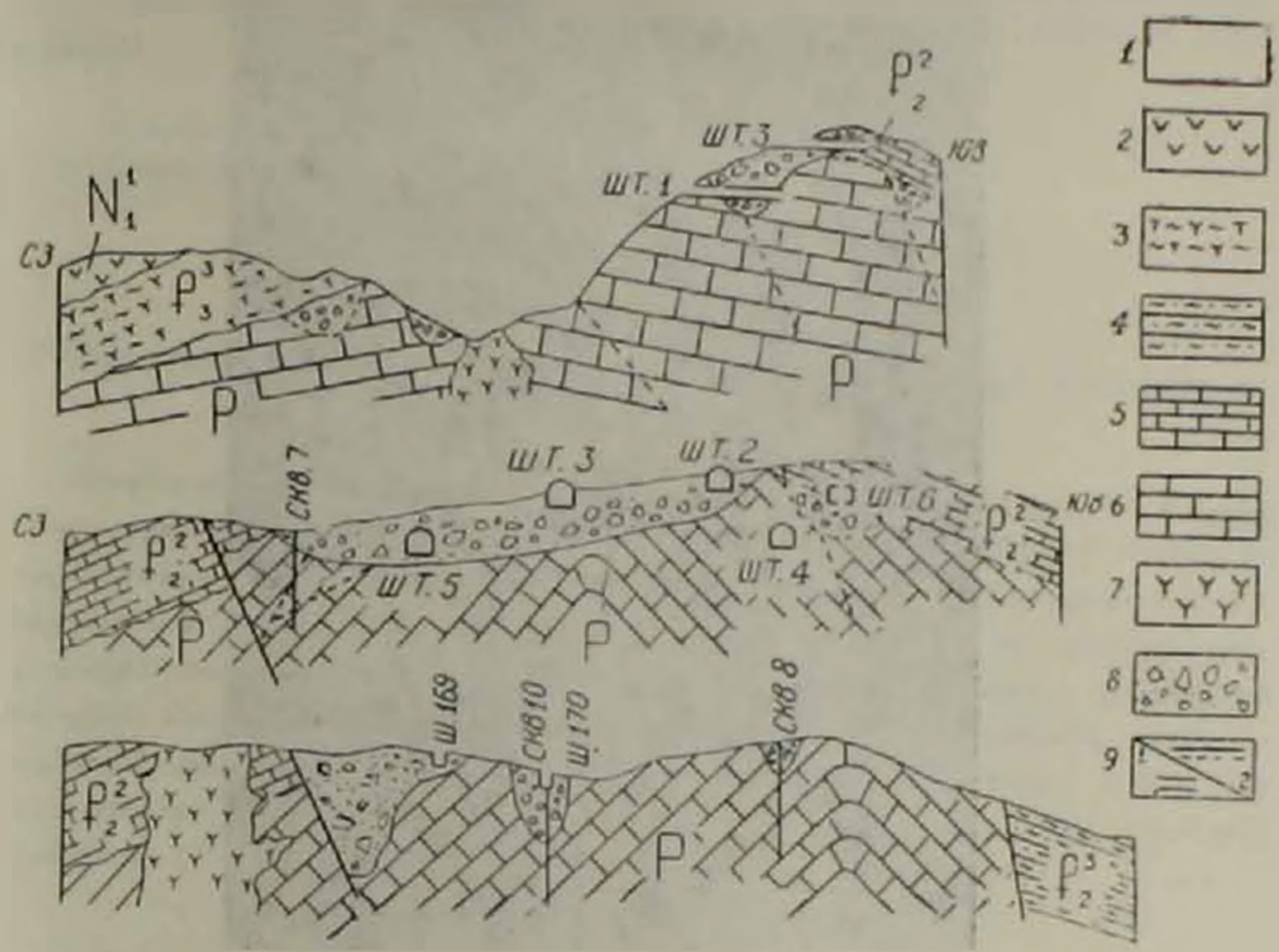

Рис. 1. Геологические разрезы Советашенского месторождения ртути. *1*—современные делювиальные отложения; *2*—трахиандезиты (N_1^1); *3*—белесоватая свита туфов, туфопесчаников и др. (f_3^3); *4*—глинистые песчаники (f_2^3); *5*—мергелистые известняки (f_2^3); *6*—битуминозные известняки (P); *7*—санидиновые трахиты (N_1^{1-2}); *8*—конгломерато-брекчии согласных рудных тел; *9*—горные выработки *9*—тектонические нарушения

мальные содержания киновари сосредоточены в основании согласных тел и содержатся, в основном, в цементе конгломерато-брекчий.

Характер согласных рудных тел Советашенского месторождения во многом напоминает аналогичные тела известного месторождения Монте-Амиата в Италии ([2]). Здесь оруденение также локализовано в обломочно-галечных отложениях, именуемых детритусом, заполнивших отрицательные части эрозионной поверхности известняков (рис. 3). Роль непроницаемого экрана здесь выполняют трахиты, а в условиях Советашенского месторождения—эоценовые известняки, а на соседних участках, возможно, другие породы.

В практическом отношении большой интерес представляют участки вдоль контактовой линии пермских и эоценовых известняков, а

Рис. 2. Конгломерато-брекчии согласных рудных тел Совсташенского месторождения ртути

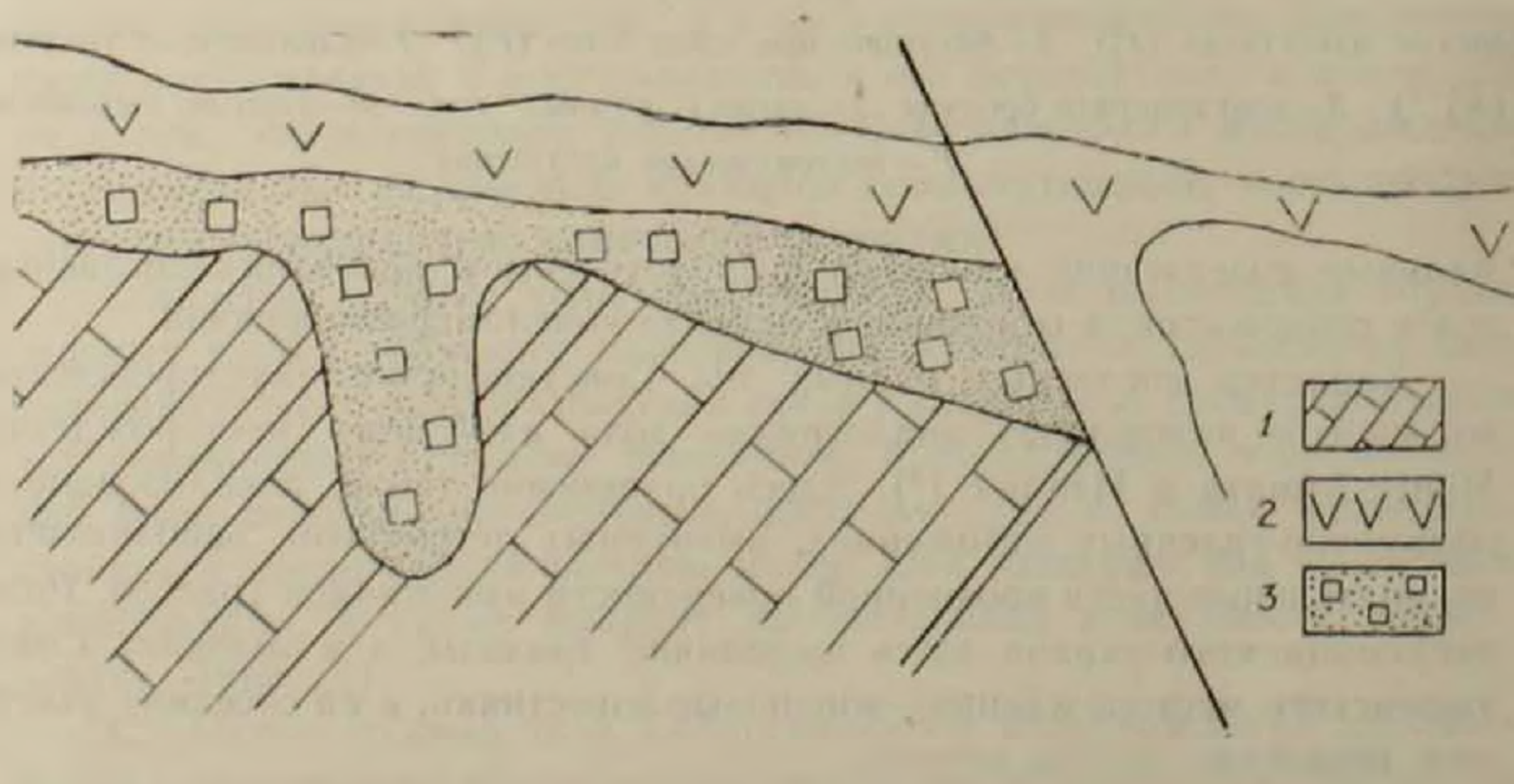

Рис. 3. Согласные рудные тела месторождения Монте-Амиата (Италия). *1*—известняк; *2*—трахит; *3*—оруденелый детритус

также других пород, перекрывающих пермские известняки, где возможно остались неэродированные части согласных рудных тел.

Представление о согласном характере рудных тел на Советашенском месторождении ртути дает основание по-новому направить поисково-разведочные работы и не нести больше затраты по изучению глубоких горизонтов рудных тел, представленных обломочно-галечным материалом.

Управление геологии
Совета Министров Армянской ССР

Ա. Ա. ԳՅՈՒՐՋՅԱՆ, Գ. Մ. ԲԱՐԹԻՆՅԱՆ

Սովետաշենի անդիկի հանքավայրում ներդաշնակ հանքային մարմինների հայտնաբերման մասին

Սովետաշենի անդիկի հանքավայրում, տարբեր հեղինակների կողմից նկարագրված, որպես հիդրոթերմալ ծագման, կտրող բազմաթիվ հանքային մարմինները, մեր տեսանկյունների հիման վրա հանդիսանում են՝ ներդաշնակ մարմիններ։ Այդ մարմինները ներկայացված են՝ բեկորա-գլաքարային նստվածքներով, որոնք լցնում են պերմի հասակի կրաքարերի էրոզիոն մակերևույթի, ռելիեֆի բացասական մասերը։ Հիդրոթերմալ պրոցեսների հետևանքով, այդ լցվածքները, որպես փոխար միջավայր, իրենց մեջ պարփակել են անդիկի հանքայնացումը։ Հանքայնացումը մեծ մասամբ գտնվում է՝ բեկորա-գլաքարային նստվածքների ցեմենտում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. А. Г. Мадян, «Известия АН Арм. ССР», Науки о Земле, т. XXII, № 1, 1969.
St. Zuccetti, Bull. Assoc. miner. subalpina, 2, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 576—809.516

МИКРОБИОЛОГИЯ

Р. Ш. Арутюнян, М. Д. Степанян, Н. А. Карапетян,
академик М. Х. Чайлахян

Влияние регуляторов роста на восприимчивость растений гороха к клубеньковым бактериям и содержание ауксиноподобных и фенольных веществ

(Представлено 5/V 1975)

Среди факторов, определяющих вирулентность клубеньковых бактерий некоторые исследователи определенное значение придавали способности клубеньковых бактерий продуцировать гетероауксин или β — индолилуксусную кислоту, содействующую процессу инвазии [1-5], полагая, что ауксиновый фактор является одной из причин, влияющих на процесс инокуляции [6].

По данным наших исследований [7-11], а также исследований В. Д. Тагиева [12-14] выяснилось, что обработка бобовых растений регуляторами роста меняет восприимчивость бобовых растений к клубеньковым бактериям.

Результаты наших опытов, полученные при обработке регуляторами роста растений, инокулированных соответствующими штаммами клубеньковых бактерий (табл. 1) показывают, что при опрыскивании растений растворами β -индолилуксусной, α -нафтилуксусной и салициловой кислот восприимчивость корней растений гороха к инокуляции клубеньковыми бактериями у гороха повышалась, что выражается в увеличении числа клубеньков; и вместе с этим видно, что гиббереллин и морфактин оказывают задерживающее действие на образование клубеньков, т. е. понижают восприимчивость растений к заражению клубеньковыми бактериями.

В настоящей работе, проведенной в течение лета 1974 года, представлены данные об изменениях в содержании активных соединений в корнях растений, вызванных действием этих регуляторов роста, меняющих восприимчивость растений к клубеньковым бактериям.

Объектом исследования служили растения гороха. Семена до посева дезинфицировали серной кислотой и многократно промывали водой. Инокуляция суспензией клубеньковых бактерий не производилась. Растения выращивали в условиях вегетационного опыта и подвергали воз-

действию α-нафтилуксусной, β-индолилуксусной и салициловой кислот, гиббереллина, кинетина и морфактина путем опрыскивания их надземных частей в 10 сроков с 2-дневным интервалом. Обработка растений была начата в период после появления 6—7 листьев. Пробы, взятые из корней растений подвергались экстракции бутанолом, после чего методом тонкослойной хроматографии определяли ауксиноподобные и фенольные вещества. Разделение веществ проводили пользуясь растворителем бутанол-уксусная кислота-вода 100:19:35. При наблюдении под ультрахимископом проявились зоны. Вещества, расположенные в разных Rf-ах хроматограмм идентифицировались с помощью цветных реакций. При этом за основу были приняты показатели, предложенные В. И. Кефели и Р. Х. Турецкой ([11]). Данные биопроб обработаны статистически.

Таблица 1

Действие регуляторов роста на образование клубеньков у растений гороха*

Опыты	Варианты	Число клубеньков
Опыты 1969 г.	Контроль	1212
	Гиббереллин 0,005%	665
	β—индолилуксусная кислота 0,005%	1281
	Морфактин 0,0001%	124
Опыты 1972г.	Контроль	286
	α—нафтилуксусная кислота 0,005%	1553
	Ретардант ССС 0,5%	1480
	Салициловая кислота 0,005%	668

Из хроматографических анализов корней нешнокулированных растений, обработанных регуляторами роста, выяснилось, что под действием изученных веществ изменяется содержание физиологически активных соединений в корнях растений гороха. В корнях растений гороха, обработанных гиббереллином и α-нафтилуксусной кислотой обнаружено больше всего веществ, однако их число не превышает контроля, меньше всего веществ обнаружено в корнях растений гороха, обработанных кинетином (рис. 1). С помощью цветных реакций выяснилось, что большинство из обнаруженных веществ являются фенолкарбоновыми кислотами, которые находятся в зонах Rf 0,28—0,33. Вещества в зонах Rf 0,73—0,82, 0,98 являются флаванолгликозидами или фенолальдегидами. Характер же соединений, находящихся между двумя этими группами веществ, цветными реакциями не выявлен.

* —статья в списке литературы под порядковым номером 10

Для определения биологической активности веществ, находящихся в разных зонах Rf хроматограмм, использовался метод, предложенный А. Н. Бояркиным ([15]). В корнях растений, обработанных изученными препаратами обнаружены вещества, стимулирующие рост корней (табл. 2 и рис. 2).

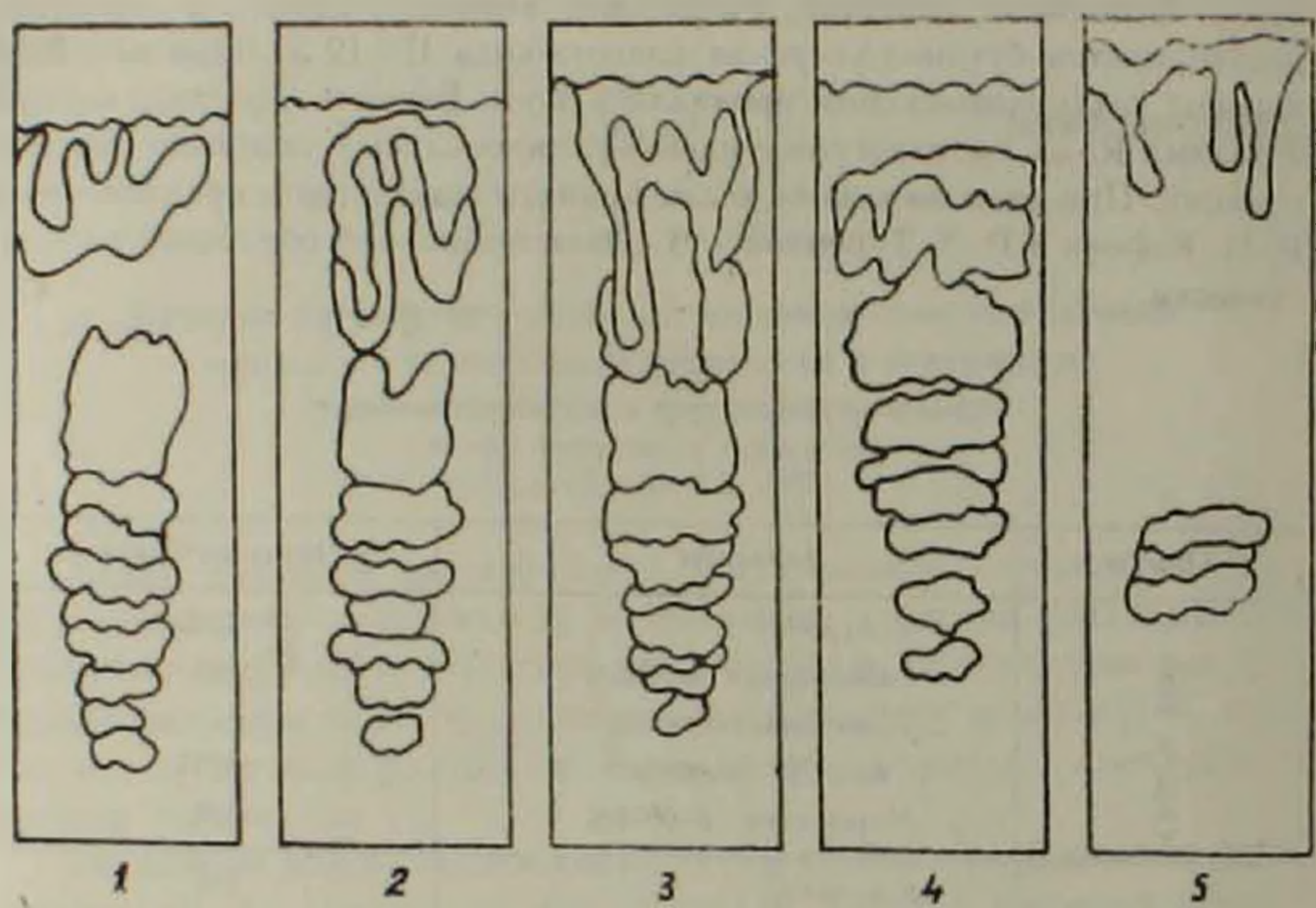

Рис. 1. Хроматограммы корней растений гороха, обработанных регуляторами роста. *1*—контроль, *2*—α-нафтилуксусная кислота; *3*—гиббереллин; *4*—морфактин; *5*—кинетин

Эти вещества в большинстве случаев находятся на хроматограммах в зоне с Rf 0,32—0,6, которая соответствует Rf β-индолилуксусной кислоты. Из табл. 2 и рис. 2 видно также, что по сравнению с контролем больше всего ростстимулирующих веществ обнаруживается в корнях растений гороха, обработанных α-нафтилуксусной и салициловой кислотами. Если в контрольном варианте выявлены три активные зоны, из которых две с небольшой степенью достоверности (t=3,0, 3,05), и одна с большой (4,80), то в варианте с α-нафтилуксусной кислотой обнаружены пять активных зон, из которых у двух довольно высокая степень достоверности (4,2; 4,87), а у остальных более низкая (3,5; 3,4; 3,3). При обработке растений салициловой кислотой в корнях растений обнаружены 4 активные зоны, имеющие достаточно высокую степень достоверности (5,76; 4,46; 4,19; 3,2).

В корнях растений, обработанных гиббереллином выявлены две зоны с достоверной активностью (4,88 и 3,45), а в варианте с морфактином обнаружен лишь только ингибитор роста с достоверной актив-

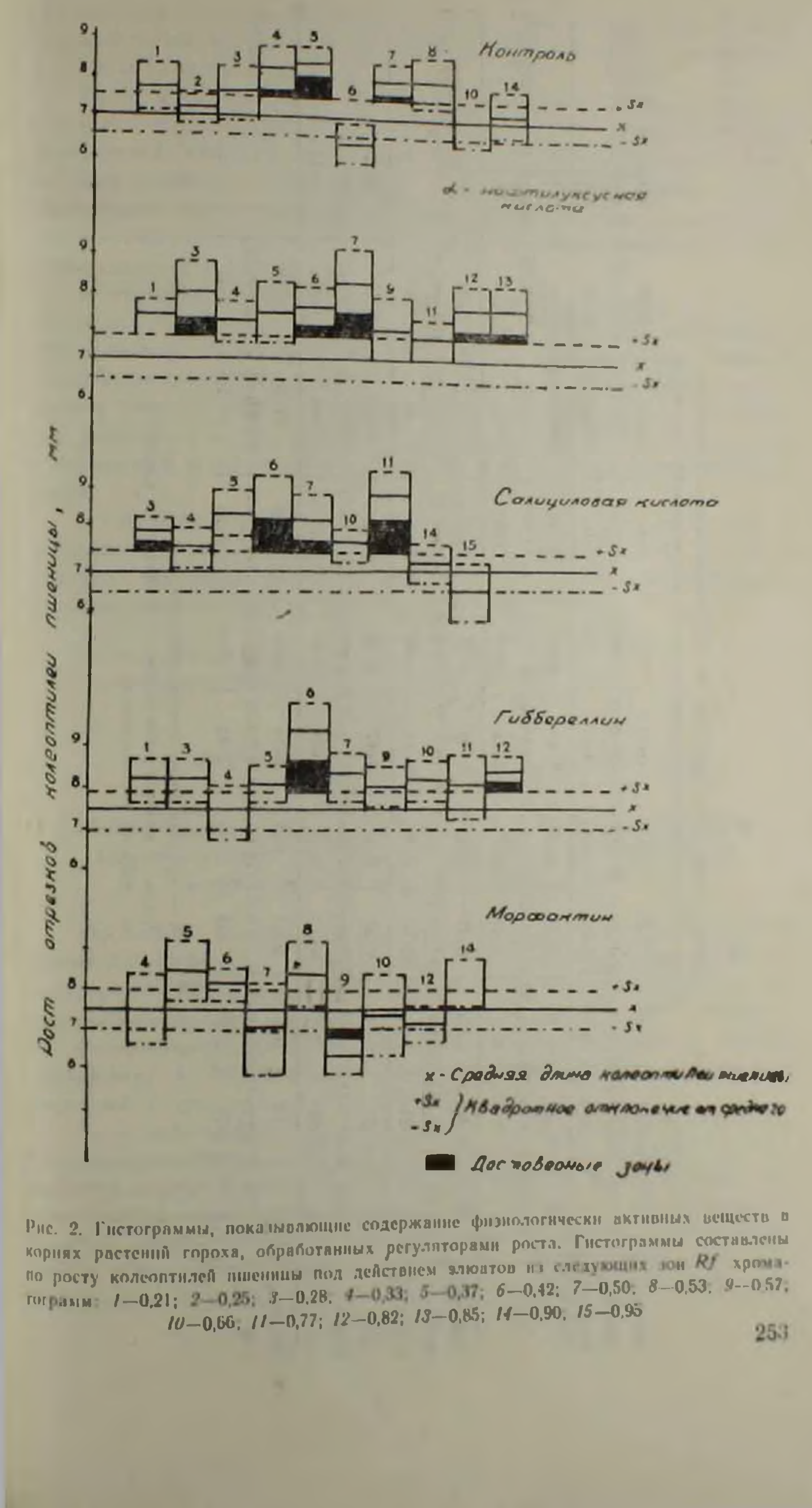

Рис. 2. Гистограммы, показывающие содержание физиологически активных веществ в корнях растений гороха, обработанных регуляторами роста. Гистограммы составлены по росту колеоптилей пшеницы под действием элюатов из следующих зон *Rf* хроматограмм: *1*—0,21; *2*—0,25; *3*—0,28; *4*—0,33; *5*—0,37; *6*—0,42; *7*—0,50; *8*—0,53; *9*—0,57; *10*—0,66; *11*—0,77; *12*—0,82; *13*—0,85; *14*—0,90; *15*—0,95

Таблица 2

Действие элюатов из разных зон Rf хроматограмм корней растений гороха, обработанных регуляторами роста, на рост колеоптилей пшеницы

Контроль (необработанный)	Rf	0,21	0,25	0,28	0,33	0,37	0,42	0,47	0,53	0,66	0,91	Контроль
	X±Sx	7,7±0,26	7,2±0,15	7,6±0,3	8,1±0,29	8,4±0,18	6,3±0,29	7,9±0,2	7,5±0,25	7,1±0,17	7,2±0,23	7,0±0,22
	t	2,6	0,74	1,62	3,05	4,82	1,93	3,0	2,72	0,36	0,63	
АНУ	Rf	0,21	0,28	0,33	0,37	0,42	0,50	0,57	0,77	0,82	0,85	
	X±Sx	7,6±0,29	8,2±0,30	7,5±0,26	7,7±0,33	7,8±0,25	8,5±0,31	7,3±0,31	7,1±0,22	7,9±0,31	7,8±0,28	6,5±0,27
	t	2,75	4,2	2,67	2,79	3,52	4,87	1,95	1,71	3,41	3,33	
Салициловая кислота	Rf	0,28	0,33	0,37	0,42	0,50	0,66	0,77	0,91	0,94		
	X±Sx	7,9±0,17	7,6±0,22	7,9±0,26	8,8±0,25	8,3±0,22	7,7±0,16	8,9±0,25	7,2±0,22	6,5±0,28		7,0±0,22
	t	3,21	1,93	2,65	5,46	4,19	2,58	5,76	0,64	1,39		
Гиббереллин	Rf	0,21	0,28	0,33	0,37	0,42	0,50	0,57	0,77	0,77	0,82	
	X±Sx	8,3±0,18	8,3±0,19	7,5±0,23	8,2±0,18	9,5±0,36	8,4±0,24	8,1±0,19	8,3±0,19	8,2±0,3	8,5±0,21	7,5±0,20
	t	2,96	2,6	0,3	2,59	4,88	2,9	2,15	2,85	1,95	3,45	
Морфактин	Rf	0,33	0,37	0,45	0,5	0,53	0,57	0,66	0,82	0,89		
	X±Sx	7,6±0,31	8,5±0,27	8,2±0,14	7,1±0,42	8,4±0,31	6,4±0,22	7,4±0,39	7,2±0,18	8,2±0,26		7,5±0,20
	t	0,27	2,98	2,8	0,86	2,43	3,6	0,23	1,11	2,12		

X — средняя длина колеоптилей, *мм*;
X±Sx — квадратичная ошибка отклонения от среднего;
t — степень достоверности.

ностью (3,8). Последние два препарата, как уже сказано было раньше, уменьшали восприимчивость корней растений гороха к инокуляции клубеньковыми бактериями.

Ранее в наших опытах было установлено, что обработка бобовых растений стимуляторами роста: α -нафтилуксусной, β-индолилуксусной салициловой кислотами и ретардантом ССС меняет восприимчивость бобовых растений к клубеньковым бактериям, существенно повышая образование клубеньков. Обработка же бобовых растений стимулятором роста—гиббереллином и ингибитором—морфактином, наоборот, снижает интенсивность образования клубеньков.

В настоящей работе показано, что под действием изученных веществ в корнях растений гороха изменяется содержание физиологически активных соединений: ауксиноподобных и фенольных веществ. Наибольшее количество ауксиноподобных веществ обнаруживается в корнях растений гороха, обработанных α -нафтилуксусной и салициловой кислотами, меньше всего при обработке гиббереллином, тогда как в варианте с морфактином установлено лишь образование ингибитора роста.

Из этого сопоставления вытекает, что влияние регуляторов роста на интенсивность образования клубеньков на корнях бобовых растений связано с усилением или ослаблением синтеза ауксиноподобных веществ в корнях растений.

Институт микробиологии
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Շ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Մ. Դ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ, Ն. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ,
ակադեմիկոս Մ. Խ. ՋԱՅԼԱԽՅԱՆ

Աճման կարգավորիչների ազդեցությունը պալարաբակտերիաների նկատմամբ ոլոռի բույսի վարակունակության և աուքսինանման ու ֆենոլային նյութերի պարունակության վրա

Մեր նախկին փորձերով հաստատվել է, որ թիթեռնածաղկավոր բույսերն աճման խթանիչներով՝ α -նավթիլքացախաթթվով, β -ինդոլիլքացախաթթվով, սալիցիլային թթվով մշակելիս փոխվում է թիթեռնածաղկավոր բույսերի վարակունակությունը պալարաբակտերիաների նկատմամբ, կապես ուժեղացնելով պալարագոյացումը, իսկ թիթեռնածաղկավոր բույսերն աճման խթանիչ գիբերելինով և աճը կասեցնող մորֆակտինով մշակելիս, ընդհակառակը թուլանում է պալարագոյացման ինտենսիվությունը։

Նույն աշխատանքում ուսումնասիրվել է α -նավթիլքացախաթթվի, β—ինդոլիլքացախաթթվի, սալիցիլային թթվի, ինչպես նաև գիբերելինի ու մորֆակտինի ազդեցությունն ոլոռի բույսի արմատներում ֆիզիոլոգիապես ակտիվ նյութերի պարունակության վրա և ցույց է տրվել, որ ուսումնասիրված նյութերի ազդեցության տակ ոլոռի արմատներում փոխվում է աուքսինանման և ֆենոլային նյութերի պարունակությունը։ Ամենից շատ աուքսինանման նյութեր հայտնաբերվում են α -նավթիլքացախաթթվով և սալիցիլային

քիմիով մշակած ոլորի բույսի արմատներում, ամենից քիչ՝ կիբերելինով մշակվածում, այնինչ մորֆակտինով մշակված տարբերակում հաստատվել է միայն աճը կասեցնող նյութի առաջացումը։

Այստեղից հետևում է, որ աճման կարգավորիչների ազդեցությամբ քիմիանածաղկավոր բույսերի արմատների վրա պալարագոյացման ինտենսիվացումը կապված է արմատներում առաջացման նյութերի սինթեզի ուժեղացման կամ թուլացման հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. G. Thornton*, Ann. Bot. new ser., 14, 385—392 (1930). [2] *K. V. Thimann*, Proc. Nat. Acad., Sci., U. S. A., 22, 511—514 (1936). [3] *G. K. K. Link, R. M. Klein*, Bot. gaz., 112, N 4, 400—417 (1951). [4] *N. P. Kefford, Brocwell, I. A. Zwar*, Austral, J. Biol. Sci., 13, N 4, 456—467 (1960). [5] *K. Opilstilova*, Vancura Sbor. Ceskosl. Acad. Zemed. ved. Rostl, vyroba 9, N 7—8, 734—736 (1963). [6] *P. Manil* Hallsworth E. g (ed.). London, p. 124—135, 1958. [7] *М. Х. Чайлахян, А. А. Меграбян Н. А. Карапетян, Н. Л. Каладжян*. «Известия АН. Арм. ССР», т.14, №12, 25—28 (1961). [8] *М. Х. Чайлахян, А. А. Меграбян, Н. А. Карапетян, Н. Л. Каладжян*. ДАН АрмССР, т. 36, № 3, 189—192 (1963). [9] *М. Х. Чайлахян, Р. Ш. Арутюнян*, Биолог. журнал АН АрмССР, т. 21, № 4, 3—11 (1968). [10] *Р. Ш. Арутюнян, Н. А. Карапетян, Н. Л. Каладжян, М. Д. Степанян, М. Х. Чайлахян*. Первое всесоюзное совещание по проблеме патолог. морфобраз., 26/II—1/III 1974. [11] *М. Х. Чайлахян, Р. Ш. Арутюнян, М. Д. Степанян, Н. А. Карапетян*. ДАН АрмССР, т. 46, № 3, 182—187 (1973). [12] *В. Д. Тагиев*. «Известия АН СССР», серия биол., вып. 2 (1965). [13] *В. Д. Тагиев*. «Известия АН СССР», серия биол., вып. 3 (1966). [14] *В. И. Кефели, Р. Х. Турецкая*. Методы определения регуляторов роста и гербицидов, М., 1966. [15] *А. Н. Бояркин*. ДАН СССР, 57, № 2, 197—200 (1947).

ՀՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ԳՐԱԴԱՐԱՆ