

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LXI, № 1

1975

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, անվան. գիտ. բեկեա-  
ծու (պատ. Բարասողար), Է. Գ. ԱՅՐՈՒՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ, Ա. Բ. ԲԱՐԱ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-  
ՅԱՔՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.  
ԹԱՆԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ,  
Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-ան-  
դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,  
Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս  
(պատ. Խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԲ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի),  
Գ. Ս. ՍԱԼԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ,  
Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-  
անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ  
ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.  
АРЗУМАНЯН, канд техн наук (отв.  
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.  
АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик  
АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-  
мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-  
демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),  
И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм  
ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН  
АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,  
чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-  
ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-  
ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.  
ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.  
ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,  
В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН  
АрмССР.

Ր Ո Վ Ա Ն Կ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Խ Ա Ս Ի Մ Ա Տ Ի Կ Ա

Ե. Մ. Մկոյան—Դիրակի պերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի միակաթյունը . . . . . 3

Ս. Ք. Հաբուսյան—Ո պարամետրներից կախված Ո-պատիկ ինտեգրալի  
երկրաչափություն . . . . . 7

Ժ. Գ. Լիկոզոյան—Գրաֆների նվազագույն ջանակի անտառների տրոհման  
մասին . . . . . 15

Ա. Մ. Գյուլումյան—Հստ ներկման կրիտիկական գրաֆների մասին . . . . . 21

Ա. Հ. Հովնանիսյան—Քույլ հիպերբոլական սխեմաների համար վերացման  
հիպերհարթության վրա սկզբնական սվյալներով Կոչու խնդրի մասին . . . . . 27

Ն Ի Ջ Ի Կ Ա

Ռ. Ե. Դրամվյան, Մ. Ս. Մովսիսյան—Արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի  
ազդեցությունն ստիպողական էլեկտրոնային կոմբինացիոն ջրման վրա կալիումի  
գոյորչիներում . . . . . 33

Ի Ա Ն Ա Ն Ե Ր Ա Յ Ի Ն Ս Ե Յ Ս Մ Ո Ւ Ո Յ Ի Ա

Ա. Գ. Խալատցով—Ուժեղ երկրաչափների մամանակ գեանի տեղափոխությունների  
վեկտորների բեռման մասին . . . . . 38

Ս Ր Գ Ա Ն Ա Կ Ա Ն Ք Ի Մ Ի Ա

Ա. Թ. Բաբայան, Կ. Մ. Թանմազյան, Լ. Գ. Կարապետյան, Ա. Վ. Հաբուսյան—  
—ժ ջ -անգաղապար Ժ ջ ժ —գիհիդրոդինամիկային ռոմային օդակի արամատացմամբ  
ստացված ամոնիումային իլիդի ներմուխկույային վերախմբավորման սեակցիաներ . . . . . 40

Ի Ո Ն Ի Ջ Ի Կ Ա

Ա. Ռ. Մովսիսյան, Ե. Վ. Բայ, Ս. Ս. Հովնանիսյան—Ցորենի մայապղծհիդրոգե-  
նակի և նրա իզոֆերմենտների սարսկատուրային կայունությունը . . . . . 44

Ր Ի Ո Ք Ի Մ Ի Ա

Ա. Ա. Գալոյան, Ռ. Մ. Սրապիտոնյան, Յ. Մ. Սանակյան, Ս. Մ. Գալոյան—Սոմա-  
տոստատիկ ազդեցությունը պեպտիդի-պեպտիդ հիդրոլազայի ակտիվության վրա  
ուզեղի և հիպոֆիզի տարրեր մասերում . . . . . 50

Գ. Վ. Ասլիկյան, Վ. Ա. Շանինյան, Գ. Հ. Բունյարյան—Ոռտենսի և վիտամին  
Ք1-ի ազդեցությունը դուալամինաթթվի օքսիդացիոն գեամինացման վրա սպիտակ առ-  
նետների յարգի ինտակտ միտոքոնդրիալ ֆրակցիայում . . . . . 54

Ժ. Ա. Գևորգյան, Ա. Ս. Հովնանիսյան—Սույֆիդրիլ խմբերի գերը նրիկամային  
հյուսվածքում ամինաթթուներից ամիակի աուրացման վրա շինուկի արդիակող ֆակ-  
տորի ազդեցության մեխանիզմում . . . . . 60

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
<b>МАТЕМАТИКА</b>	
<i>Х. М. Мкоян</i> —Единственность спектральной функции оператора Дирака . . . . .	3
<i>С. Х. Арутюнян</i> —Геометрия $n$ -кратного интеграла, зависящего от $n$ параметров . . . . .	7
<i>Ж. Г. Никогосян</i> —О разложении графов на минимальное число остовных лесов . . . . .	15
<i>С. М. Гюлумян</i> —О критических по раскраске графах . . . . .	21
<i>А. О. Оганесян</i> —О задаче Коши для слабо гиперболических систем с данными на гиперплоскости вырождения . . . . .	27
<b>ФИЗИКА</b>	
<i>Р. А. Дримчян, М. Е. Мовсисян</i> —Влияние внешнего постоянного магнитного поля на вынужденное электронное комбинационное рассеяние в парах катиона . . . . .	33
<b>ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ</b>	
<i>А. Г. Назаров</i> —К подбору векторов смещения грунта при сильных землетрясениях . . . . .	36
<b>ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ</b>	
<i>А. Т. Бабоян, К. Ц. Тагмазян, Л. П. Карапетян, А. В. Арутюнян</i> —Внутримолекулярные перегруппировки аммоний изида, образующегося в результате расщепления солей $4\alpha$ замещенного $4\alpha$ 1 дигидронзондолинна . . . . .	40
<b>БИОФИЗИКА</b>	
<i>А. Р. Мовсисян, Н. В. Бай, С. С. Оганесян</i> —Структурная стабильность малатдегидрогеназы пшеницы и ее изоферментов . . . . .	44
<b>БИОХИМИЯ</b>	
<i>А. А. Галочин, Р. М. Срипионян, Ф. М. Савкян, С. М. Галочин</i> —Влияние соматостатина на активность пептидил-пептид гидролазы (Е.С. 3.4.4) различных частей мозга . . . . .	50
<i>Г. В. Априкян, В. А. Шагинян, Г. Г. Бунятыч</i> —Влияние ротенона и витамина $K_2$ на окислительное деаминарование глутаминовой кислоты в митохондриальной фракции печени белых крыс . . . . .	54
<i>Ж. С. Геворкян, А. С. Оганесян</i> —Роль сульфгидрильных групп в механизме действия сывороточного ингибитора на процессы аминокислотобращения из L-аминокислот в почечной ткани . . . . .	60

CONTENTS

	p
<b>MATHEMATICS</b>	
<i>Kh. M. Mkoyan</i> —Singularity of spectral function of the Dirac operator . . . . .	3
<i>S. K. Harutyunian</i> —The geometry of the $n$ -multiple integral, depending on $n$ parameters . . . . .	7
<i>G. G. Nikoghosian</i> —On the decomposition of graphs into minimum number forests . . . . .	15
<i>S. M. Gyoulumian</i> —On the colour critical graphs . . . . .	21
<i>A. H. Hovannisian</i> —On the correctness of Cauchy's problem for weak hyperbolic systems with data on the degeneration hyperplane . . . . .	27
<b>PHYSICS</b>	
<i>R. Ch. Drampian, M. E. Movsesian</i> —The influence of the external constant magnetic field on stimulated electron Raman scattering in potassium vapor Engineering seismology . . . . .	33
<i>A. G. Nazarov</i> —The choice of vectors of ground displacements by strong earthquakes Organic chemistry . . . . .	36
<i>A. T. Babayan, K. Tch. Yakmazian, L. P. Karabedian, A. V. Haroutyunian</i> —Intermolecular rearrangement of ammonium ilid, formed by aromatisation of 4 $\alpha$ -substituted 4 $\alpha$ ,4-dihydroisoindolinium ring . . . . .	40
<b>BIOPHYSICS</b>	
<i>A. R. Movsesian, N. V. Bay, S. S. Oganessian</i> —Structural stability of malate dehydrogenase of wheat and its isoenzymes . . . . .	44
<b>BIOCHEMISTRY</b>	
<i>A. A. Galoyan, R. M. Srapontian, F. M. Saukyan, S. M. Galolian</i> —The effect of somatostatine on the activity of peptide hydrolases in the different parts of rat brain and hypophysis . . . . .	50
<i>G. V. Aprikan, V. A. Shahinian, G. H. Bunlattan</i> —The effect of rotenone and vitamin K $_2$ in the oxidative deamination of glutamic acid in liver mitochondrial fraction of albino rats . . . . .	54
<i>I. S. Gevorkian, A. S. Oganessian</i> —The role of sulphhydryl groups in the mechanism of serum in inhibitor action on the formation of ammonia from L-amino acids in renal tissue . . . . .	60

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04048. Подписано к печати 17.10.1975 г. Тираж 545. Изд. 4388. Заказ 504.  
 Формат бумаги 70x108 $\frac{1}{16}$ . Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0.  
 Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,59.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24.  
 Эмивадзинская типография АН Армянской ССР.

УДК 517.912

МАТЕМАТИКА

Х. М. Мкоин

Единственность спектральной функции оператора Дирака

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Л. Александряном 5/III 1975)

Пусть  $L$  означает оператор

$$Ly = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  ограниченные, суммируемые в каждом конечном интервале действительные функции, определенные на полупрямой  $(0, \infty)$ .

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Ly = \lambda y, \quad y_2(0) - hy_1(0) = 0, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Обозначим через  $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$  решение уравнения

$Ly = \lambda y$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h.$$

Известно (см. например (1)), что если вектор-функция  $f(x) \in L_2(0, \infty)$ , то при данном  $h$  существует неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция  $\rho(\lambda)$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ , называемая спектральной функцией задачи (1), порождающая изометрическое отображение пространства вектор-функции  $L_2(0, \infty)$  на пространство  $L_{2, \rho}(-\infty, \infty)$  по формулам

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f^T(x) \varphi(x, \lambda) dx,$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

где интегралы сходятся в метриках пространств  $L_{2, \rho}(-\infty, \infty)$  и  $L_{2, \rho}(0, \infty)$  соответственно и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |F(\lambda)|^2 d\rho(\lambda).$$

Б. М. Левитаном (1) и независимо В. В. Мартыновым (2) доказано, что если коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  непрерывны, то спектральная функция  $\rho(\lambda)$  единственна.

В настоящей работе приводится другое, на наш взгляд более

простое, доказательство этого утверждения притом при менее ограничительных условиях на коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$ .

Обозначим через  $D_{L_0}$  семейство финитных, непрерывно-дифференцируемых вектор-функций.

Легко убедиться, что оператор  $L$  симметричен на семействе  $D_{L_0}$ . Оператор  $L$  на  $D_{L_0}$  обозначим через  $L_0$ . Это так называемый минимальный симметричный оператор. Очевидно, что оператор  $L_0$  имеет одинаковые индексы дефекта, так как коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  действительны.

**Теорема:** Оператор  $\bar{L}_0$  — замыкание  $L_0$  является самосопряженным оператором, т. е. имеет индексы дефекта  $(0, 0)$ .

**Доказательство.** Пусть оператор  $L_0$  имеет индексы дефекта не  $(0, 0)$ .

Тогда имеется по крайней мере два различных самосопряженных расширения  $L_0^1$  и  $L_0^2$  соответственно с областями значений

$$D_{L_0^1} \supset D_{L_0} \text{ и } D_{L_0^2} \supset D_{L_0}.$$

Рассмотрим следующие задачи Коши для операторных уравнений Шредингера

$$\frac{du_k}{dt} = i L_0^{(k)} u_k, \quad u_k(x, 0) \in D_{L_0^{(k)}}, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Под слабым решением задачи Коши для уравнения

$$\frac{du}{dt} = i Au, \quad (3)$$

где  $A$  — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $H = L_2(-\infty, \infty) \otimes L_2(-\infty, \infty)$  с областью определения  $D_A$ , мы понимаем такую непрерывную по  $t$  векторнозначную функцию  $u(t) \in D_A$  для любого  $t, -\infty < t < \infty$ , для которой выполнено равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u(t), z'(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (iAu(t), z(t)) dt,$$

где  $z(t)$  — произвольная непрерывно-дифференцируемая по  $t$  (в сильном смысле) финитная функция со значением в  $H$ , при этом  $u(0) = f \in D_A$ .

Хорошо известно (см. например <sup>(3)</sup>), что слабое решение задачи Коши для уравнения (3) единственно. Оно задается формулой

$$u(t) = e^{iAt} f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_{\lambda} f, \quad (4)$$

где  $E_{\lambda}$  — спектральное семейство оператора  $A$ . Рассмотрим теперь задачи (2). Напишем решение этих задач Коши, пользуясь формулой (4),

$$u_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_{\lambda}^{(k)} f, \quad f \in D_{L_0^{(k)}}, \quad k = 1, 2,$$

Рассмотрим также задачу Коши

$$\frac{du}{dt} = iL_0 u, \quad u(0) = f \in D_{L_0} \quad (5)$$

Как следует из результатов работы (1) существует сильное решение задачи Коши (5) при сделанных предположениях относительно коэффициентов  $p(x)$  и  $q(x)$ . Сильное решение будет также и слабым.

Если у задачи Коши (5) существует слабое решение  $u(t)$ , то это будет также решением для задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = iL_k^{(0)} u, \quad u(0) = f \in D_{L_k}, \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

Согласно теореме единственности слабого решения задачи Коши (6), мы имеем  $u_1(t) = u_2(t)$  или, в силу формулы (4)

$$\int_{-\infty}^t e^{i\lambda s} dE^{(1)} f = \int_{-\infty}^t e^{i\lambda s} dE^{(2)} f \quad (7)$$

для любого  $f \in D_{L_k}$ . Умножая скалярно равенство (7) на  $f$ , получаем

$$\int_{-\infty}^t e^{i\lambda s} d(E^{(1)} f, f) = \int_{-\infty}^t e^{i\lambda s} d(E^{(2)} f, f)$$

для всех  $t, -\infty < t < \infty$ , откуда следует, что

$$(E^{(1)} f, f) = (E^{(2)} f, f).$$

Если квадратные формы операторов  $E^{(1)}$  и  $E^{(2)}$  равны, то равны и их билинейные формы

$$(E^{(1)} f, g) = (E^{(2)} f, g).$$

Из этого равенства, в силу плотности  $D_{L_k}$  в  $M$ , следует

$$E^{(1)} f = E^{(2)} f, \quad f \in D_{L_k}$$

А так как  $E^{(k)}, k = 1, 2$ , ограниченные операторы, то

$$E^{(1)} = E^{(2)}$$

что и доказывает самосопряженность оператора  $\bar{L}_0$ . Теорема доказана.

Таким образом оператор  $\bar{L}_0$  имеет индексы дефекта  $(0, 0)$ , т. е. для оператора Дирака имеет место только случай точки Вейля, а случай круга Вейля реализоваться не может. Заметим, что в диссертации Р. Маклеуди (1) подробно рассматривается этот гипотетический случай.

Теперь докажем, что спектральная функция  $p(\lambda)$  единственна.

Действительно, обозначим через  $\mathfrak{N}(x, y; \lambda)$  спектральное ядро задачи (1), т. е. положим

$$\mathfrak{N}(x, y; \lambda) = \int_0^1 \varphi(x, \rho) \varphi^*(y, \rho) d\rho(\rho).$$

Известно, что спектральное ядро  $\mathfrak{N}(x, y; \lambda)$  по формуле

$$G(x, y; z) = \int \frac{d\lambda \theta(x, y; \lambda)}{\lambda - z}$$

порождает матрицу-функцию Грина—ядро резольвенты некоторого самосопряженного расширения оператора  $L_0$ . Из теоремы следует, что матрица-функция Грина  $G(x, y; z)$  единственна, значит единственно ядро  $\theta(x, y; \lambda)$ , следовательно и спектральная функция  $\rho(\lambda)$ .

Ленинградский филиал Ереванского  
политехнического института им. К. Маркса

Ե. Մ. ՄԿՈՅԻԱՆ

Իրական սպեքտրոսի սպեկտրալ ֆունկցիայի միակությունը

Հոդվածում ուսումնասիրվում է (1) սպեքտրոսի սպեկտրալ ֆունկցիայի միակության հարցը, Այդ հարցը նախկինում ուսումնասիրվել է Ռ. Մ. Հեյտանի (1) և Վ. Վ. Մարտինովի (2) կողմից, սակայն ավելի խիստ ենթադրությունների դեպքում և այլ մեթոդով:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Б. М. Левитан, И. С. Сарссян, Введение в спектральную теорию, «Наука», М., 1970. 2 В. В. Мартынов, ДАН СССР, 165, 996—999 (1965). 3 Н. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции, вып. 3, Госнауч. физ. мат. литературы, М., 1958. 4 И. С. Сарссян, ДАН Арм. ССР, 27, 1966, 129—133 (1966). 5 R. MacLeod Some problems in the theory of eigenfunctions, Thesis, Oxford, 1966.

УДК 513.838

МАТЕМАТИКА

С. Х. Арутюнян

**Геометрия  $n$ -кратного интеграла, зависящего от  $n$  параметров**

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 14/IV 1975)

При решении различного рода задач анализа приходится рассматривать интегралы вида

$$I = \int K(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n) dx^1 \dots dx^n,$$

которые зависят от  $n$  параметров.

Цель настоящей работы состоит в изучении геометрии, которая определяется таким интегралом в пространстве переменных

$$x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n.$$

Для этого к интегралу (при наличии некоторых естественных условий) инвариантно присоединяется псевдориманова метрика, впервые рассмотренная П. К. Ращевским (<sup>1</sup>). Показано, что в случае метрик Эйнштейнова типа и только в этом случае существует двойственный интеграл, который имеет смысл применять к задаче обращения интегрального преобразования с ядром  $k$ .

Рассмотрим дифференцируемое многообразие  $M$  четной размерности  $2n$ , которое одновременно является дважды расслоенным пространством: задано два дифференцируемых отображения  $M$  на  $n$ -мерные дифференцируемые многообразия  $M_1$  и  $M_2$ , обозначим их через  $\pi_1$  и  $\pi_2$ ; слои расслоения, то есть прообразы точек из  $M_1$  и  $M_2$  при отображениях  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , являются  $n$ -мерными многообразиями, и, наконец, касательные пространства к слоям расслоений  $\pi_1$  и  $\pi_2$  имеют лишь нулевое пересечение.

Зафиксируем в пределах произвольной карты с локальными координатами  $x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n$  некоторый репер  $(e_i)_\alpha, (e^k)_\alpha, i, k = 1, \dots, n$  и положим

$$e_i = \bar{x}_i^j(e_k)_\alpha, e^k = \bar{y}_k^l(e^l)_\alpha,$$

где новые переменные  $\bar{x}_i^j$  и  $\bar{y}_k^l$  независимы от ранее введенных координат и друг от друга, причем образуют матрицы с ненулевыми определителями. Образует дифференциальные формы.

$$\omega^i = \bar{x}_i^k dx^k, \omega_l = \bar{y}_l^k dy_k.$$

где через  $x_k^i$  и  $y_i^j$  обозначены элементы матриц, обратных естественно к матрицам  $(\bar{x}_i^k)$  и  $(\bar{y}_i^j)$  (2).

Таким образом, в каждой точке касательного пространства к слою имеется базис, который преобразуется элементами полной линейной группы. В результате на всем пространстве двойного расслоения возникает подвижный репер, половина векторов которого в каждой точке составляет базис касательного пространства к слою в этой точке, и система заданных на всем  $M^{(1)}$  линейных дифференциальных форм

$$\omega_1, \dots, \omega_n, \omega^1, \dots, \omega^n,$$

не зависящих от выбора локальных координат. Эти главные формы характеризуют расслоение  $M$  в следующем смысле: слои первого расслоения являются интегральными многообразиями максимальной размерности для системы уравнений  $\omega^i = 0, i = 1, \dots, n$ , а слои второго расслоения находятся в аналогичном отношении с вполне интегрируемой системой линейных дифференциальных уравнений  $\omega_i = 0, i = 1, \dots, n$ .

Структурные уравнения этих форм получаются в результате внешнего дифференцирования их выражений. Таким образом, они имеют вид

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega_k^i \wedge \omega^k \\ d\omega_i = -\bar{\omega}_j^i \wedge \omega_j \end{cases} \quad (1)$$

где  $\omega_k^i = \bar{x}_k^p dx_p^i + x_{kp}^i \omega^p, \bar{\omega}_j^i = -\bar{y}_j^p dy_p^i + y_j^{ip} \omega_p$ , причем переменные  $x_{kp}^i$  и  $y_j^{ip}$  симметричны относительно индексов  $k$  и  $p$ .

Внешнюю дифференциальную  $n$ -форму вида

$$\Omega = K(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

на многообразии  $M$  двойного расслоения будем называть полубазовой  $n$ -формой первого расслоения  $\pi_1$ . Она определяет гладкую меру (объем) на каждом слое второго расслоения  $\pi_2$ . Форму  $\Omega$  можно, подставив вместо  $dx^i$  их выражения через  $\omega^i$ , записать в виде

$$\Omega = \lambda \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n,$$

где  $\lambda = k \cdot \det(\bar{x}_i^j)$  является гладкой функцией, определенной на многообразии  $M^{(1)}$  реперов и отличной от нуля.

Найдем условия, которым удовлетворяет функция  $\lambda$ . Внешний дифференциал

$$d\Omega = (d\lambda + \lambda \sum_{i=1}^n \omega_i^i) \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$$

является формой на  $M$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение

$$d\lambda + \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i^i = \lambda_i \omega^i + \bar{\lambda}^i \omega_i \quad (2)$$

Часть уравнений, которые получаются в результате внешнего дифференцирования соотношения (2) и применении леммы Картана (1), имеет вид

$$d\omega^i - \lambda^k \omega_k^i = \lambda^{ik} \omega_k + \lambda_k^i \omega^k, \quad (3)$$

где коэффициенты  $\lambda^{ik}$  симметричны относительно индексов  $i$  и  $k$ . Заметим теперь, что форма  $\varphi = \lambda^i \omega_i$  является формой на многообразии двойного расслоения  $M$ . Это следует из того факта, что  $\varphi$  однозначно определяется условием

$$d\varphi = \varphi \wedge \varphi$$

и, кроме того, обращенном в нуль на слоях второго расслоения  $\pi_2$ . Внешний дифференциал формы  $\varphi$  с помощью соотношений (3) может быть приведен к виду

$$d\varphi = \lambda_k^i \omega^k \wedge \omega_i + \lambda^{ik} \omega_k \wedge \omega_i$$

В силу симметричности коэффициентов  $\lambda^{ik}$  относительно  $i$  и  $k$  и антикоммутативности внешнего умножения  $\lambda^{ik} \omega_k \wedge \omega_i = 0$  и поэтому

$$d\varphi = \lambda_k^i \omega^k \wedge \omega_i$$

Будем предполагать форму  $d\varphi$  невырожденной, этим из рассмотрения исключается случай, когда  $\det(\lambda_k^i) = 0$ . Тогда матрицу  $(\lambda_k^i)$  можно привести к диагональному виду и сделать единичной. Поэтому  $\lambda_k^i = \delta_k^i$  и

$$d\varphi = \omega^i \wedge \omega_i \quad (4)$$

Отметим сразу, что на  $M^{(1)}$  выделяется подмногообразие  $M_1^{(1)} \subset M^{(1)}$  реперов, характеризующихся условием  $\lambda_k^i = \delta_k^i$  (форма  $d\varphi$  на  $M_1^{(1)}$  имеет вид (4)).

Форма (4), как легко можно проверить (2), порождает на пространстве расслоения метрику по формуле

$$dl^2 = H^i \cdot H_i \quad (5)$$

где  $H^i = \omega^i$ ,  $H_i = \omega_i$  (по индексу  $i$  идет суммирование по всем значениям  $i = 1, \dots, n$ ). Благодаря ковариантному постоянству метрики (5) уравнения соответствующей псевдоримановой связности могут быть приведены к виду:

$$\begin{cases} d\Theta^i = \Theta_k^i \wedge \Theta^k \\ d\Theta_i = -\Theta_j^i \wedge \Theta_k^j \end{cases}$$

где  $\Theta_k^i$  — формы связности. Внешнее дифференцирование этих уравнений и применение леммы Картана дает соотношение

$$d\Theta_k^i = \Theta_p^i \wedge \Theta_k^p = K_{kp}^i \Theta^p \wedge \Theta_k,$$

где величины  $K_{kp}^i$  симметричны по верхним и нижним индексам и в совокупности образуют тензор кривизны расслоенного пространства.

Таким образом, рассматриваемое расслоенное пространство несколь-

ко специализировалось благодаря наличию невырожденной формы  $d\mathfrak{F}$  и превратилось в пространство, рассмотренное П. К. Рашевским (1). Оно характеризуется выделенностью двух семейств  $n$ -мерных поверхностей (слоев первого и второго расслоений) и тем, что каждое из этих семейств обладает свойством абсолютного параллелизма: векторы, касательные к слоям данного семейства, остаются касательными к ним при параллельном переносе по любому пути.

Таким образом, имеет место

**Предложение.** *Задание на пространстве двойного  $2n$  расслоения  $M$  внешней  $n$ -формы  $\Omega$ , полубазовой на слоях одного из расслоений, при условии невырожденности соответствующей формы  $d\mathfrak{F}$  определяет на многообразии  $M$  структуру расслоенного пространства Рашевского.*

Все дальнейшие рассуждения относятся только к расслоенным пространствам Рашевского. Отметим, что подмногообразие  $M_1^{(1)}$  репером такого пространства описывается с помощью компонент метрического тензора, соответствующего метрике (5):

$$g_{ik} = g^{ik} = 0, \quad g_i^i = \delta_i^i, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим теперь на многообразии  $M_1^{(1)}$  реперов произвольного пространства Рашевского дифференциальные формы  $\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}^i, \Theta_i^j$ , удовлетворяющие системе внешних уравнений

$$\begin{cases} d\mathfrak{H}^i = \mathfrak{H}_k^i \wedge \mathfrak{H}^k \\ d\mathfrak{H}_i = -\mathfrak{H}^k \wedge \mathfrak{H}_k \\ d\Theta_i^j = \mathfrak{H}_p^j \wedge \mathfrak{H}_i^p + K_{ip}^j \mathfrak{H}^p \wedge \mathfrak{H}_i \end{cases} \quad (1)$$

определенную псевдориманову метрику (5) и соответствующую связность. Выясним при каких условиях форма

$$\Phi_1 = a \mathfrak{H}^1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{H}^n$$

обладает свойствами формы  $\Omega$ . Исходя из тех же соображений, что и при получении разложения (2), будем иметь

$$d \ln a + \sum_{i=1}^n \mathfrak{H}_i^i = a_i \mathfrak{H}^i + a^i \mathfrak{H}_i \quad (6)$$

Внешнее дифференцирование этого соотношения с последующим применением леммы Картана дает

$$\begin{cases} \Delta a_i = a_{ik} \mathfrak{H}^k + a_i^k \mathfrak{H}_k, \quad a_{ik} = a_{ki} \\ \Delta a^i = \bar{a}_k^i \mathfrak{H}^k + a^{ik} \mathfrak{H}_k, \quad a^{ik} = a^{ki} \end{cases} \quad (3')$$

где обозначено

$$\begin{cases} \Delta a_i = da_i + \lambda_k \mathfrak{H}_i^k \\ \Delta a^i = da^i - a^k \mathfrak{H}_k^i \end{cases}$$

Обратная подстановка этих выражений в результат дифференцирования (6) даст конечное соотношение

$$\bar{a}_i^r - a_i^r = K_i^r, \quad (7)$$

где через  $K_i^r$  обозначены компоненты тензора Риччи:

$$K_i^r = \sum_{l=1}^n K_{li}^{rl}$$

на основании этих формул получаем

$$d\varphi_1 = a^i \theta_i \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$$

Выделим теперь форму  $\varphi_1 = a^i \theta_i$  (заметим, что она, по-существу, совпадает с формой  $\bar{\omega}_1$  из (2)) и сосчитаем ее внешний дифференциал:

$$d\varphi_1 = \dots = \bar{a}_i^1 \theta^i \wedge \theta_1$$

Но с другой стороны  $\varphi_1$  играет роль  $\Omega$ , поэтому

$$d\varphi_1 = \theta^1 \wedge \theta_1$$

Сравнение этих соотношений приводит к равенству:

$$\bar{a}_i^1 = \delta_i^1. \quad (8)$$

Условие (8) является необходимым и достаточным для того, чтобы  $\varphi_1$  обладала свойствами формы  $\Omega$ .

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть на пространстве  $M$  двойного расслоения задана полубазовая форма  $\Phi_1$  первого расслоения  $\pi_1$  с соответствующей невырожденной формой  $d\bar{\omega}_1$ . Форма объема на пространстве Рашиевского имеет вид

$$\Phi = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \wedge \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n.$$

Выделим среди множества внешних  $n$ -форм вида

$$\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta_n$$

полубазовую форму  $\Phi_2$  второго расслоения с соответствующей невырожденной формой  $d\bar{\omega}_2$  таким образом, чтобы

$$\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2, \quad (9)$$

и выполняем условия, при осуществлении которых формы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  порождают на пространстве  $M$  двойного расслоения одну и ту же геометрию Рашиевского.

Предположим, что  $\theta_i, \theta^i, \theta_i^k$  — структурные формы искомого пространства Рашиевского ( $i, k = 1, \dots, n$ ). Тогда, если  $\Phi_1 = a^i \theta^i \wedge \dots \wedge \theta^n$ , то форму  $\Phi_2$  определим формулой

$$\Phi_2 = \frac{1}{n} \Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n.$$

этим условие (9) выполнено. Рассматривая  $\Phi_2$  по аналогии с формой  $\Phi_1$ , получим

$$d\Phi_2 = \dots = -a_i \Theta^i \wedge \Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n.$$

Внешний дифференциал формы  $\varphi_2 = -a_i \Theta^i$  равен

$$d\varphi_2 = -a_k^i \Theta_k \wedge \Theta^i.$$

Две римановы метрики на одном и том же многообразии считают эквивалентными, если они отличаются постоянным множителем. Значит для того, чтобы формы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определяли одну и ту же псевдориманову геометрию, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие формы  $d\varphi_1$  и  $d\varphi_2$  отличались постоянным ненулевым множителем:

$$d\varphi_2 = c d\varphi_1, \quad c = \text{const} \neq 0;$$

тогда тензор Риччи принимает вид

$$K_{ij}^k = (1 - c) \delta_{ij}^k. \quad (10)$$

Как известно, пространства, тензор Риччи которых пропорционален (с постоянным коэффициентом) метрическому тензору, называются пространствами Эйнштейна. Поскольку в данном случае роль компонент метрического тензора играют символы Кронеккера, имеет место

*Теорема.* Пусть в пространстве двойного расслоения подбазовые формы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  первого и второго расслоений определяют одну и ту же псевдориманову геометрию Рашевского, в которой форма объема имеет вид:

$$\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$$

Тогда пространство Рашевского имеет структуру пространства Эйнштейна.

Обратно, на пространстве Рашевского, удовлетворяющем уравнению  $g_{ir} = K \cdot K_{ir}$  Эйнштейна, существуют формы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  с вышеуказанными свойствами.

В качестве иллюстрации к изложенному выясним вопрос, какие именно интегралы порождают псевдоевклидово пространство Рашевского (кривизна равна нулю). В этом случае можно пользоваться подсемейством параллельных реперов ( $\Theta^k = 0$ ). Тогда

$$d\Theta^i = 0, \quad d\Theta_i = 0$$

и, полагая  $\Theta^i = dx^i$ ,  $\Theta_i = dy_i$ , получим уравнения нашей задачи в виде

$$\Phi_1 = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

$$d \ln a = a_i dx^i + a^i dy_i \quad (6)$$

$$\begin{cases} da_i = a_{ik} dx^k + dy_i \\ da^i = dx^i + a^{ik} dx_k \end{cases} \quad (3'')$$

Дифференцируя соотношения (3''), получим

$$da_{ik} \wedge dx^k = 0, \quad da^{ik} \wedge dy_i = 0,$$

откуда следует, что

$$a_{ik} = a_{ik}(x^1, \dots, x^n), \quad a^{ik} = a^{ik}(y_1, \dots, y_n)$$

Интегрирование уравнений (3'') дает

$$\begin{cases} a_i = A_i(x^1, \dots, x^n) + y_i \\ a^i = x^i + A^i(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Подставим эти выражения в соотношение (6') и проинтегрируем полученное уравнение. Поскольку интеграл от формы  $A_i(x^1, \dots, x^n) dx^i$  является функцией от  $x^1, \dots, x^n$ , а интеграл от формы

$A^i(y_1, \dots, y_n) dy_i$  — функцией от  $y_1, \dots, y_n$ , то форма  $\Phi_1$  принимает вид

$$\Phi_1 = P(x^1, \dots, x^n) Q(y_1, \dots, y_n) e^{i^j y_j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (11);$$

легко видеть, что при этом

$$\Phi_2 = \frac{1}{P(x^1, \dots, x^n) Q(y_1, \dots, y_n)} e^{i^j y_j} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

Таким образом, имеет место

**Предложение.** *Всякий интеграл, порождающий в  $M$  псевдоевклидову метрику Ращевского, может быть приведен к интегралу от формы вида (11).*

Тем самым выяснен внутренний геометрический смысл интегралов Лапласа—Фурье. Интегралы, приводящие к метрикам Эйнштейна, следует считать естественным обобщением интегралов такого типа.

Приношу свою глубокую благодарность А. М. Васильеву за постановку задачи и внимательное отношение к работе.

Московский государственный университет  
им. Ломоносова

Ս. Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

« պարամետրներից կախված n-պատիկ ինտեգրալի երկրաչափություն »

Սույն աշխատանքի նպատակը n-պատիկ

$$J = \int K(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n) dx^1 \dots dx^n$$

ինտեգրալի շնորհիվ  $x^1, \dots, x^n$  փոփոխականների և  $y_1, \dots, y_n$  պարամետրների բազմաձևության մեջ առաջացող երկրաչափության ուսումնասիրությունն էլ շիմնական արդյունքն այն է, որ  $J$  ինտեգրալին ինվարիանտ կերպով միաց-

վում է պսևդոդիմանյան մետրիկա, որը և պայմանավորում է այդ ինտե-  
գրալի բոլոր ինվարիանտ հատկությունները:

Ապացուցված է, որ էյնշտեյնյան մետրիկաներին համապատասխանող  
ինտեգրալները (և միայն նրանք) թույլ են տալիս երկակի

$$\bar{J} = \int \bar{K}(y_1, \dots, y_n, x^1, \dots, x^n) dy_1 \dots dy_n$$

ինտեգրալներ, այսինքն բնական կերպով ընդհանրացնում են Զուրյե-Հապլասի  
ինտեգրալը:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> П. К. Раишевский, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 6, 225—248, 1948. <sup>2</sup> А. М. Васильев, Математический сборник, т. 70 (112): 4, 457—480, 1966. <sup>3</sup> С. Стернберг, «Лекции по дифференциальной геометрии», «Мир», М., 1970. <sup>4</sup> А. П. Норден, «Пространства аффинной связности», М.—Л., Гостехиздат, 1950.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Ж. Г. Никогосян

О разложении графов на минимальное число остовных лесов\*

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 29/V 1975)

Пусть  $G = (X, U)$  — обыкновенный связный граф и  $|X| = p$ . Суграф  $T$  графа  $G$  называется каркасом для графа  $G$ , если  $T$  связен и не имеет циклов. Скажем, что граф  $G = (X, U)$  разлагается на минимальное число остовных лесов  $T_i = (X, U_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , если  $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$ ,  $\forall i, j \in \overline{1, k}$  ( $i \neq j \Rightarrow U_i \cap U_j = \emptyset$ ), каждый суграф  $T_i$  является лесом и  $k$  — минимальное число, удовлетворяющее этому свойству. Число  $k$  называется древесностью графа  $G$  и обозначается через  $r(G)$ .

Пусть  $G' = (X', U')$  — часть графа  $G = (X, U)$  и  $u \in U'$ . Обозначим через  $G'(u)$  часть графа  $G$ , множество ребер которого состоит из всех ребер графа  $G'$ , каждый из которых принадлежит некоторой простой цепи  $l$ , состоящая из ребер графа  $G'$  и соединяющая концы ребра  $u$ .

Обобщив это определение, для частей  $G'$  и  $G''$  графа  $G$  обозначим

$$G'(G'') = \bigcup_{u \in G'} G'(u)$$

Если в графе  $H = (Y, V)$  имеются реберно непересекающиеся части  $H_1 = (Y_1, V_1)$  и  $H_2 = (Y_2, V_2)$  и  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ , то заменой ребер  $v_1$  и  $v_2$  в частях  $H_1$  и  $H_2$  назовем следующую операцию

$$H_1 = (Y_1, (V_1 / \{v_1\}) \cup \{v_2\}), \quad H_2 = (Y_2, (V_2 / \{v_2\}) \cup \{v_1\}).$$

Условимся, после этой операции, части  $H_1$  и  $H_2$  обозначать прежними символами.

Опишем алгоритм  $A$  для выделения из графа максимального числа каркасов попарно без общих ребер.

Пусть  $G = (X, U)$  — обыкновенный связный граф. Выделим из графа  $G$  некоторый каркас  $T_1 = (X, U_1)$ . Если граф  $G^{(1)} = (X, U/U_1)$  связен, то из  $G^{(1)}$  выделим второй каркас  $T_2 = (X, U_2)$ . Предположим, что таким образом мы из графа  $G$  последовательно выделили каркасы  $T_i = (X, U_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Пусть компонентами связности получен-

\* В настоящей статье мы придерживаемся терминологий и обозначений, принятых в (1) и (2).

ного несвязного графа  $G^{(m)} = (X, \bigcup_{i=1}^l U_i)$  являются  $G_i^{(m)} = (X_i, U_i^{(m)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Если  $G^{(m)}$  не содержит циклов, то очевидно, что число выделенных каркасов максимально. Пусть некоторая компонента связности графа  $G^{(m)}$ , скажем  $G_1^{(m)}$ , содержит циклы. В графе  $G_1^{(m)}$  возьмем один простой цикл  $C_1$ . Рассмотрим граф  $G$  и предположим, что он разложен на части  $T_1, T_2, \dots, T_m, G^{(m)}$ . Легко проверить, что граф  $G_1^{(m)}(C_1) = P_1$  — блок. Обозначим

$$\bigcup_{j=1}^m T_j(P_i) = Q_i, G_1^{(m)}(Q_i) = P_{i+1}, i = 1, 2, \dots$$

Предположим, что граф  $Q_h$  выходит за пределы множества  $X_1$ , где  $h \geq 1$  — наименьшее число с таким свойством. Из построения множеств  $P_i$  и  $Q_i$  следует, что существует последовательность ребер  $(x_1, y_1) \in P_1, (x^1, y^1), (x_2, y_2), (x^2, y^2), \dots, (x_k, y_k) = u, (x^k, u^k) = v$ , где

$$\forall i \in \overline{1, k}, \exists k(i) \in \overline{1, m}, ((x^i, y^i) \in T_{k(i)}(x_i, y_i)) \text{ и } \forall i \in \overline{1, k-1}, \\ ((x_{i+1}, y_{i+1}) \in G_1^{(m)}(x^i, y^i)), x^k \in X_1, y^k \notin X_1.$$

При  $i = 1, 2, \dots, k$  заменим ребра  $(x_i, y_i)$  и  $(x^i, y^i)$  в частях  $P_i$  и  $Q_i$ . Легко проверить, что каркасы  $T_1, T_2, \dots, T_m$  после этой операции остаются каркасами и число компонент связности графа  $G^{(m)}$  уменьшится. Описанный алгоритм обозначим через  $\mathfrak{X}$ .

Предположим, что для всех чисел  $i = 1, 2, \dots$  части  $P_i$  и  $Q_i$  графа  $G$  находятся в компоненте связности  $X_1$ . Граф

$$\bigcup_i (P_i \cup Q_i) = (\bar{X}_1, \bar{U}_1) = \bar{G}_1$$

назовем предельным графом, а множество  $X_1 \subseteq \bar{X}_1$  — предельным множеством.

Если в графе  $G^{(m)}$  существует цикл  $C_2$ , не имеющий общих ребер с предельными графами, то применим на  $C_2$  алгоритм  $\mathfrak{X}$ . Тогда, либо уменьшится число компонент связности  $G^{(m)}$ , либо на множестве  $X$  возникнет новый предельный граф и т. д. Если останется одна компонента связности, то выделим следующий каркас. Пусть из графа  $G$  выделены каркасы  $T_1, T_2, \dots, T_m, \dots, T_r$ , оставшаяся часть  $G^{(k)}$  графа  $G$  разложена на компоненты связности  $G_1^{(k)} = (X_1^{(k)}, U_1^{(k)}), \dots, G_r = (X_r^{(k)}, U_r^{(k)}), r \geq 2$  и алгоритм  $\mathfrak{X}$  больше невозможно применить. Тогда, всякий граф  $G_i^{(k)}, i \in \overline{1, r}$  или ациклический, или в  $G^{(k)}$  имеются предельные графы  $\bar{G}_i = (\bar{X}_i, \bar{U}_i), i = 1, 2, \dots, s$ , вне которых не существует циклов. Весь этот алгоритм, состоящий из последовательного применения алгоритма  $\mathfrak{X}$ , обозначим через  $A$ .

**Теорема 1.** Алгоритм  $A$  выделяет из графа максимальное число каркасов попарно без общих ребер.

**Доказательство.** Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Если  $\bar{G}$  — предельный граф, то для любых различных двух вершин  $x, y \in \bar{G}$ , простая цепь, соединяющая вершины  $x, y$  и состоящая из ребер каркаса  $T_i$ , где  $i \in \overline{1, k}$ , лежит в предельном графе.

Доказательство. Так как  $\bar{G}$  связан, то в  $\bar{G}$  существует простая цепь  $l(x, y)$  соединяющая вершины  $x, y$ . Если на цепи  $l(x, y)$  есть ребра из  $G^{(k)}$ , то их заменим цепями из  $T_i$ , замыкающих концы  $x$  и  $y$ , которые по построению  $\bar{G}$  входят в  $\bar{G}$ . Полученная цепь состоит из ребер  $T_i$ . Лемма доказана.

Аналогично можно доказать следующую лемму:

Лемма 2. Если  $\bar{G}$  — предельный граф, то для любых двух различных вершин  $x, y \in \bar{G}$ , всякая простая цепь, соединяющая вершины  $x, y$  и состоящая из ребер графа  $G^{(k)}$ , лежит в  $\bar{G}$ .

Из леммы 1 следует, что те части каркасов  $T_1, T_2, \dots, T_{(k)}$ , которые лежат на предельном графе, сами являются каркасами для предельного графа.

Из леммы 2 следует, что в предельном графе существует каркас, состоящий из ребер графа  $G^{(k)}$ .

Предположим, что теорема 1 не верна, т. е. граф  $G$  имеет каркасы  $T_1, T_2, \dots, T_k$  попарно без общих ребер и после выделения их, оставшаяся часть  $G^{(k)'$  связна. Пусть  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_s$  — предельные множества в  $G^{(k)}$ .

Обозначим  $\bar{X} = X / \bigcup_{i=1}^s \bar{X}_i$ .

$Q_1 = \{u = (x, y) \in G^{(k)} / x, y \in \bar{X}\}$ ,  $\bar{Q}_1 = \{u = (x, y) \in G^{(k)} / u \in \bar{Q}_1\}$

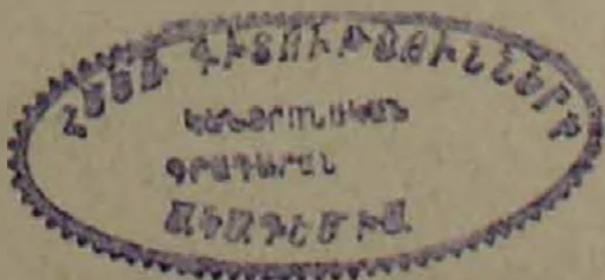
$Q_2 = \{u = (x, y) \in G^{(k)'} / x, y \in \bar{X}\}$ ,  $\bar{Q}_2 = \{u = (x, y) \in G^{(k)'} / u \in \bar{Q}_2\}$ .

Каждое множество  $\bar{X}_i, i = 1, 2, \dots, s$  в графах  $G^{(k)}$  и  $G^{(k)'}$  стянем в одну вершину. Получим  $(|\bar{X}| + s)$ -вершинные графы  $H_1$  и  $H_2$ , соответствующие графам  $G^{(k)}$  и  $G^{(k)'}$ , и имеющие множества ребер  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$  соответственно. Так как  $H_1$  — ациклический и несвязен, то  $|\bar{Q}_1| < |\bar{X}| + s - 1$ . Граф  $H_2$  связан, следовательно  $|\bar{Q}_2| \geq |\bar{X}| + s - 1$  и значит  $|\bar{Q}_1| < |\bar{Q}_2|$ . Из леммы 1 следует, что  $|Q_1| \leq |Q_2|$ . Так как  $|Q_1| + |\bar{Q}_1| = |Q_2| + |\bar{Q}_2|$ , то  $|\bar{Q}_1| \geq |\bar{Q}_2|$ , что является противоречием. Теорема 1 доказана.

Если  $L_1$  и  $L_2$  — предельные графы и имеют общие вершины, то легко проверить, что для графа  $L_1 \cup L_2$  выполняются утверждения лемм 1 и 2. В этом смысле граф  $L_1 \cup L_2$  также назовем предельным. Следовательно, можно предполагать что предельные графы не пересекаются по вершинам.

Опишем алгоритм  $D$ .

Применим к графу  $G$  алгоритм  $A$ . Пусть из графа  $G$  выделены каркасы  $T_1, T_2, \dots, T_k$  и граф  $G$  имеет предельные графы  $\bar{G}_1 = (\bar{X}_1, \bar{U}_1), \dots,$



$\bar{G}_s = (\bar{X}_s, \bar{U}_s)$ . Применим над графами  $\bar{G}_i, i = 1, 2, \dots, s$  алгоритм  $A$ . Если внутри их возникнут новые предельные графы, то снова применим над ними алгоритм  $A$  и т. д., пока не возникнут новые предельные графы. Разложим граф  $\bar{G}$  на леса следующим образом. В качестве первых  $k$  членов разложения возьмем каркасы  $T_1, T_2, \dots, T_k$ . Из леммы 2 следует, что на предельных множествах  $X_i, i = 1, 2, \dots, s$  существуют по одному каркасу  $T_i, i = 1, 2, \dots, s$ , состоящему из ребер графа  $G^{(k)}$ . Очевидно, что  $T' = \bigcup_{i=1}^s T_i$  — лес. Возьмем часть  $T''$  графа  $G^{(k)}$ , ребра которой имеют общие вершины с множеством  $X / \bigcup_{i=1}^s X_i$ .

Легко проверить, что граф  $T_{k+1} = T' \cup T''$  — ациклический. Лес  $T_{k+1}$  будем считать  $(k+1)$ -ым членом разложения. Из графа  $G^{(k)}$  выделив лес  $T_{k+1}$ , получим граф  $G^{(k+1)}$ , из которого аналогично можно выделить лес  $T_{k+2}$  и т. д. Через некоторое число шагов  $G$  разложится на леса  $T_1, T_2, \dots, T_f$ . Описанный алгоритм обозначим через  $D$ .

**Теорема 2.** Алгоритм  $D$  разлагает граф на минимальное число остовных лесов.

**Доказательство.** Применим алгоритм  $D$  к графу  $G$ . Пусть  $G_1^* = (X_1^*, U_1^*), \dots, G_q^* = (X_q^*, U_q^*)$  — последние предельные графы, которые больше не рожают новых предельных графов. Обозначим

$$r = \max_i \left\{ \frac{|U_i^*|}{|X_i^*| - 1} \right\} = \left\{ \frac{|U_{i_0}^*|}{|X_{i_0}^*| - 1} \right\}, \text{ где } i_0 \in \overline{1, q}.$$

По построению разложения  $T_1, T_2, \dots, T_f$  для формирования каждого члена  $T_1, T_2, \dots, T_{f-1}$  из предельного графа  $G_{i_0}^*$  участвует по одному каркасу, а для формирования члена  $T_f$  из подграфа  $G_{i_0}^*$  участвует или каркас, или лес. Так как через  $f$  шагов разложение кончается, то  $|U_{i_0}^*| = (f-1) \cdot (|X_{i_0}^*| - 1) + z$ , где  $0 < z \leq |X_{i_0}^*| - 1$ . Тогда

$$f = \frac{|U_{i_0}^*|}{|X_{i_0}^*| - 1} + 1 - \frac{z}{|X_{i_0}^*| - 1}$$

Легко проверить, что  $f = r$ . Так как  $T_1, \dots, T_f$  — некоторое разложение, то  $r(G) \leq f$ . С другой стороны, для подграфа  $G_{i_0}^* \subset G$  имеет место  $r(G_{i_0}^*) = r = f$  и, значит,  $r(G) \geq r = f$ . Следовательно,

$$r(G) = f = r = \max_i \left\{ \frac{|U_i^*|}{|X_i^*| - 1} \right\}.$$

Итак, алгоритм  $D$  разлагает граф на леса  $T_1, \dots, T_f$ , которое является минимальным разложением графа на остовные леса. Теорема доказана.

Оценим порядок алгоритма  $D$ .

В основе алгоритма  $D$  лежат: алгоритм  $D_1$  для выделения каркаса из связного графа и алгоритм  $D_2$  для построения блоков в графе. Известны простые алгоритмы  $D_1$  и  $D_2$ , имеющие порядки  $|D_1| = c_1 \cdot p^2$ ,  $|D_2| = c_2 \cdot p^4$  соответственно, где  $|X| = p$ . Нетрудно проверить, что алгоритм  $D$  в наилучшем варианте потребует не больше порядка  $|D_1| + 2 \cdot c_3 \cdot p^2 \cdot |D_2| \sim p^6$  операций.

**Теорема 3.** *Каждый максимальный планарный граф с  $p \geq 4$  вершинами можно разложить на три остовных леса так, чтобы два из них были каркасами.*

**Доказательство.** Пусть  $G = (X, U)$  — максимальный плоский граф с  $p \geq 4$  вершинами, т. е.  $G$  — триангуляция. Из графа  $G$  выделим некоторый каркас  $T_1$ . Ребра оставшегося графа  $G^{(1)}$  назовем хордами. Докажем, что  $G^{(1)}$  имеет только одну непустую компоненту связности. На внешнем цикле  $C_1 = (u_1, u_2, u_3)$  триангуляции  $G$  существует хорда, иначе в  $T_1$  возник бы цикл. Для каждой такой хорды рассмотрим непосредственные грани этих хорд, лежащие внутри цикла  $C_1$ . В цикле  $C_1$  все хорды заменим теми парами ребер, которые лежат на рассмотренных гранях. Очевидно, что всякая хорда полученного цикла смежна с некоторой хордой цикла  $C_1$ . Всю эту операцию произведем для полученного цикла, после которого получится новый цикл, который может быть и не простым и т. д. На каждом шагу любая хорда в новом цикле смежна с некоторой хордой предыдущего цикла. Значит, часть графа  $G$ , состоящая из хорд, — компонента связности для  $G^{(1)}$ . Следовательно, если из графа  $G$  выделим каркас  $T_1$ , то в остальном графе одна из компонент связности состоит только из хорд, а остальные компоненты будут изолированными вершинами. Опишем алгоритм, который изменением каркаса  $T_1$  соединит изолированные вершины с компонентой связности, состоящей из хорд. Пусть  $x$  — некоторая изолированная вершина. Так как она стала изолированной после выделения каркаса  $T_1$ , то все инцидентные ребра  $(x, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, g$  вершины  $x$  принадлежат каркасу  $T_1$ . Все ребра  $(y_1, y_2), (y_2, y_3), \dots, (y_g, y_1)$  являются хордами, так как иначе в  $T_1$  возник бы цикл. Заменим ребра  $(y_1, y_2)$  и  $(x, y_1)$  в частях  $G^{(1)}$  и  $T_1$ . После этого преобразования получим новый каркас  $T_1$ . Через некоторое количество шагов получим каркас  $T_1$  графа  $G$ , такой, что после его удаления граф  $G^{(1)}$  станет связным.

Выделим из графа  $G^{(1)}$  каркас  $T_2$ . Оставшуюся часть графа  $G^{(1)}$  обозначим через  $G^{(2)}$ . В случае, если  $G^{(2)}$  — ациклический, доказательство теоремы завершается. Пусть  $G^{(2)}$  содержит цикл. Очевидно, при любом выборе каркасов  $T_1$  и  $T_2$ , граф  $G^{(2)}$  будет несвязным. Это значит, что применением над  $G^{(2)}$  алгоритма  $A$ , получим ациклический граф (что приводит к завершению доказательства) или возникнет предельный граф  $G_1 = (X_1, U_1)$ . Из конструкции предельного графа следует, что граф  $G_1$  имеет три каркаса попарно без общих ребер, т. е.  $|U_1| \geq 3 \cdot (|X_1| - 1)$ . С другой стороны, так как  $G_1$  — планарный,

то  $|U_1| \leq 3|X_1| - 1$ , что является противоречием. Теорема 3 доказана.

Опишем алгоритм, для выявления в графе  $2f$  — вершинного полного подграфа  $K_{2f}$ , где  $f = r(G)$ .

Применим алгоритм  $D$  к графу  $G = (X, U)$ , который разложит  $G$  на леса  $T_1, T_2, \dots, T_f$ . Известно <sup>(1)</sup>, что  $2f$  — вершинный подграф  $K_{2f}$  можно разложить на  $f$  каркасов. Возьмем произвольное ребро  $u_1 \in T_f$  и рассмотрим следующие части графа  $G$

$$\bigcup_{i=1}^{f-1} T_i(u_1) = R_1, \quad T_f(R_1) = S_f, \quad \bigcup_{i=1}^{f-1} T_i(S_f) = R_{f+1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\bigcup_{i=1}^f (R_i \cup S_i) = Q(u_1).$$

Теорема 4. Для того, чтобы ребро  $u \in T_f$  было ребром для некоторого полного подграфа  $K_{2f}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $Q(u) = K_{2f}$ .

Необходимость. Пусть  $u \in T_f$  и  $u \in K_{2f}$ . Так как  $U(K_{2f}) = 2f(2f-1)/2$ , то части каркасов  $T_1, T_2, \dots, T_f$ , лежащие на  $K_{2f}$ , являются каркасами для  $K_{2f}$ . Следовательно, часть  $Q(u)$  не выходит из  $K_{2f}$  и состоит из  $f$  каркасов. Это возможно только тогда, когда  $Q(u) = K_{2f}$ .

Достаточность. Если  $Q(u) = K_{2f}$ , то  $u \in K_{2f}$ . Теорема 4 доказана.

В случае, если никакое ребро каркаса  $T_f$  не является ребром полного подграфа  $K_{2f}$ , то очевидно,  $G$  не содержит полного подграфа  $K_{2f}$ .

Вычислительный центр Академии наук  
Армянской ССР и Ереванского государственного  
университета

Ժ. Չ. ԱՆՈՂՈՍԱՆ

Դրաֆների նվազագույն բանալի անտառների տրոհման մասին

Աշխատանքում բերվում է  $C \cdot p^n$  կարգի սլոպրիթմ, որը յուրաքանչյուր  $\overline{G} = (X, U)$  սախրական գրաֆ տրոհում է նվազագույն քանակի անտառների, որանդ  $|X| = p$ : Մասնախորապես կատարվում է նախն կարգի սլոպրիթմ, որը յուրաքանչյուր կապակցված գրաֆից բնորում է անտառներու քանակի բնդհանուր կոդեր չանեցող կարկասներու Ապացուցվում է, որ  $p \geq 4$  գուգաթանոց յուրաքանչյուր մաքսիմալ հարթ գրաֆ կարկի է տրոհել երեք անտառների այնպես, որ նրանցից երկուսը լինեն կարկասներու Բերվում է  $C \cdot p^n$  կարգի սլոպրիթմ, որը յուրաքանչյուր գրաֆում ի հայտ է բերում  $2f$  — գուգաթանոց լրիվ ենթագրաֆ, որանդ  $f = r(G)$ :

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Փ. Харари, Теория графов, Изд. «Мир», М., 1973; Գ. Գ. Зыков, Теория конечных графов, 1, Изд. «Наука», Новосибирск, 1969

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. М. Гюлумян

О критических по раскраске графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мерцеляном 2/VI 1975г)

В настоящей статье описано необходимое и достаточное условие существования  $\chi$ -реберно-критических  $x$ -связных графов с  $p$  вершинами для произвольных целых чисел  $\chi \geq 4$ ,  $x \leq \chi - 1$  и  $p$ .

Все понятия и обозначения не определяемые здесь, можно найти в работе Ф. Харари [1]. Пусть  $G = G(V, X)$  — конечный граф без петель и кратных ребер.

Граф  $G$  назовем  $n$ -связным, если  $\kappa(G) = n$ . Пусть  $H$  является подграфом для заданных графов  $G_1$  и  $G_2$ . Тогда объединением  $G_1 \cup G_2 = G$  относительно  $H$ , называется граф  $G$ , который получается из  $G_1$  и  $G_2$  совмещением их общей части  $H$  по одноименным вершинам.

$W^{n,m}$  — колесом назовем граф  $W^{n,m} = K_n + C_m$ , где  $K_n$  полный граф с  $n$  вершинами, а  $C_m$  простой цикл длины  $m$ . Цикл  $C_m$  будем называть внешним циклом, а его ребра (вершины) внешними ребрами (вершинами)  $W^{n,m}$  — колеса,  $K_n$  будем называть центром  $W^{n,m}$  — колеса, а его вершины и ребра — центральными. Ребро, соединяющее внешнюю вершину с центральной, будем называть внутренним ребром.

Легко убедиться, что имеет место

$$\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2) \tag{1}$$

и  $G_1 + G_2$  является критическим (реберно-критическим) тогда и только тогда, когда  $G_1$  и  $G_2$  критические (реберно-критические).

Очевидно также, что

$$\chi(G_1 + G_2) = \min(|V_1| + \chi(G_2), |V_2| + \chi(G_1)), \tag{2}$$

где  $V_1$  и  $V_2$  множества вершин  $G_1$  и  $G_2$  соответственно.

Теорема 1. Для любых  $\chi \geq 4$ ,  $p \geq \chi + 2$  существует  $\chi$ -реберно-критический  $\chi - 1$ -связный  $p$ -вершинный граф.

Доказательство. При  $p = \chi + 2 + 2t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  колесо  $W^{\chi-3, 2t+5}$  по (1) и (2) — искомый граф.

Пусть  $p = \chi + 2 + (2t + 1)$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Рассмотрим граф

$$\overline{G}^{\chi+3+2t} = W^{\chi+3, 2t+1} + K_{t-1} \tag{3}$$

где  $W^{\chi+3, 2t+1}$  — граф, изображенный на рис. 1. Легко видеть, что

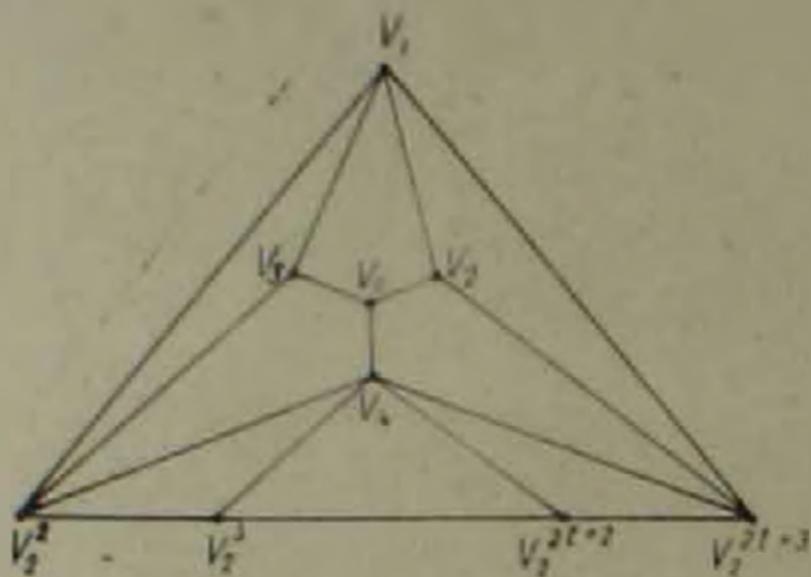


Рис. 1

$W^{2l+1}$  является 4-реберно-критическим 3-связным,  $\overline{G}^{2l+3+2l}$  — искомым графом, так как согласно (2)  $\chi(\overline{G}^{2l+3+2l}) = \chi - 1$  и согласно (1)  $\chi(\overline{G}^{2l+3+2l}) = \chi$ .

**Теорема 2.** Для любых  $\chi \geq 5$ ,  $3 \leq x \leq \chi - 2$ ,  $p \geq 2\chi - x + 1$  существует  $\chi$ -реберно-критический  $x$ -связный  $p$ -вершинный граф.

**Доказательство.** Пусть  $p = 2\chi - x + 1 + 2l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Рассмотрим граф

$$\overline{W}^{2l-2, 2l+3} = W^{2l-2, 2l+3} - x_1 - x_2 - \dots - x_{2l+2}$$

где  $x_1 = (v_1, v_2^1)$ ,  $x_2 = (v_1, v_2^2)$ ,  $\dots$ ,  $x_{2l+2} = (v_1, v_2^{2l+2})$  являются внутренними ребрами  $W^{2l-2, 2l+3}$  — колеса, а  $v_1$  — произвольная центральная вершина  $W^{2l-2, 2l+3}$  — колеса.

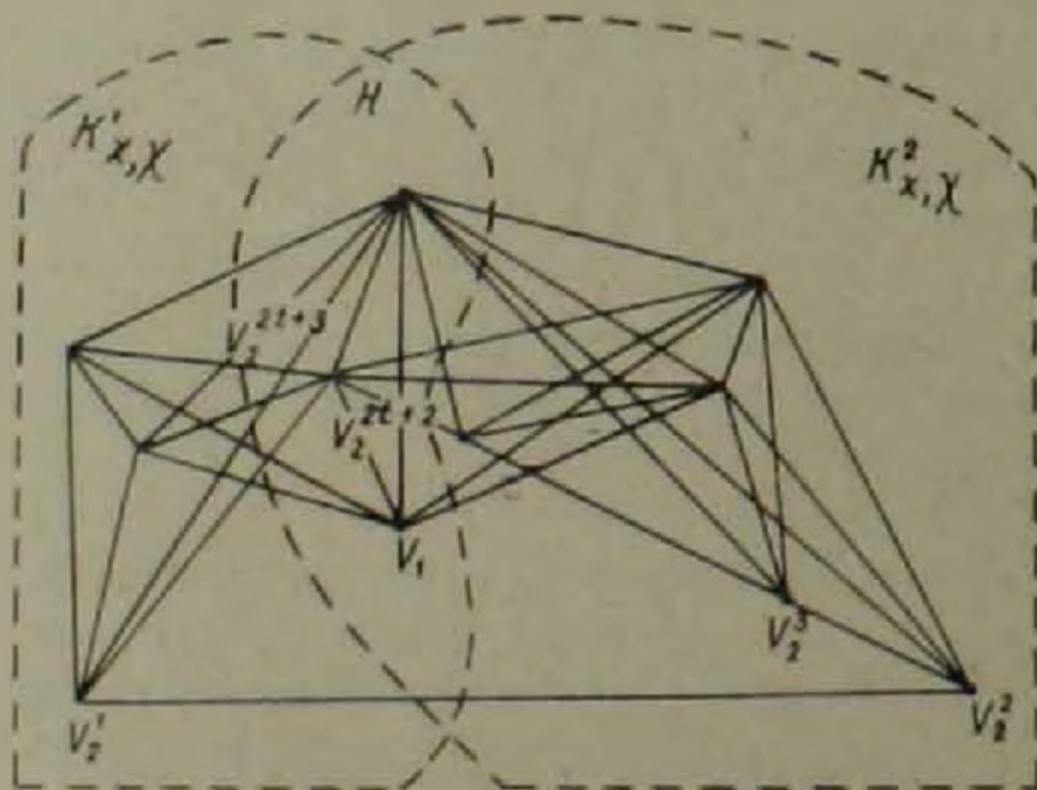


Рис. 2

Пусть

$$K_{x, \chi}^1 = (\overline{W^{2\gamma-2, \chi-1}} - v_2^1 - \dots - v_2^{2\gamma+2}) + K_{1, \dots}$$

$$K_{x, \chi}^2 = (\overline{W^{2\gamma-2, 2\chi-1}} - v_1^1) + K_{1, \dots}$$

Тогда в качестве искомого графа берем граф

$$G^0 = (K_{x, \chi}^1 \cup_H K_{x, \chi}^2) + (v_2^1, v_2^2),$$

где  $H = K_{1, \dots} + v_2^{2\gamma+2}$  (рис. 2). Построенный граф  $G^0$  имеет  $2\gamma - x + 1 + 2\gamma$  вершин. Так как  $x \leq \gamma - 2$ , то  $\chi(K_{x, \chi}^i) \geq \chi$ ,  $i = 1, 2$ . Следовательно,  $\chi(G^0) = \chi$ . Покажем, что  $G^0$  является  $\gamma$ -реберно-критическим графом. Если  $G^0 - (v_2^1, v_2^2)$  произвольно  $\gamma - 1$  раскромшен, то, ввиду  $\gamma$ -реберно-критичности графов  $K_{x, \chi}^i + v_2^i$ ,  $i = 1, 2$ , вершины  $v_1^1, v_2^1, v_2^2$  одноцветны. Следовательно,  $\chi(G^0) \geq \gamma$ . С другой стороны, удаление любого ребра  $x$  из  $G^0$  делает возможным  $\gamma - 1$ -раскраску графа  $G^0 - x$ , ввиду  $\gamma$ -реберно-критичности  $K_{x, \chi}^i + v_2^i$ ,  $i = 1, 2$ .

Пусть  $p = 2\gamma - x + 4 + 2l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Граф, построенный по (3), запишем в виде

$$\overline{G^{2\gamma-3+2l}} = \overline{W^{2\gamma+1}} + K_{x, \chi}^1 + K_{x, \chi}^2$$

и пусть  $\overline{K}_{x, \chi}^i = \overline{G^{2\gamma+1+2l}} - v_2^i$ . Рассмотрим граф

$$G^1 = (K_{x, \chi}^1 \cup_H \overline{K}_{x, \chi}^2) + (v_2^1, v_2^2),$$

где  $H = K_{1, \dots} + v_2^{2\gamma+1}$  (рис. 3).  $G^1$  — искомый граф для рассматриваемого

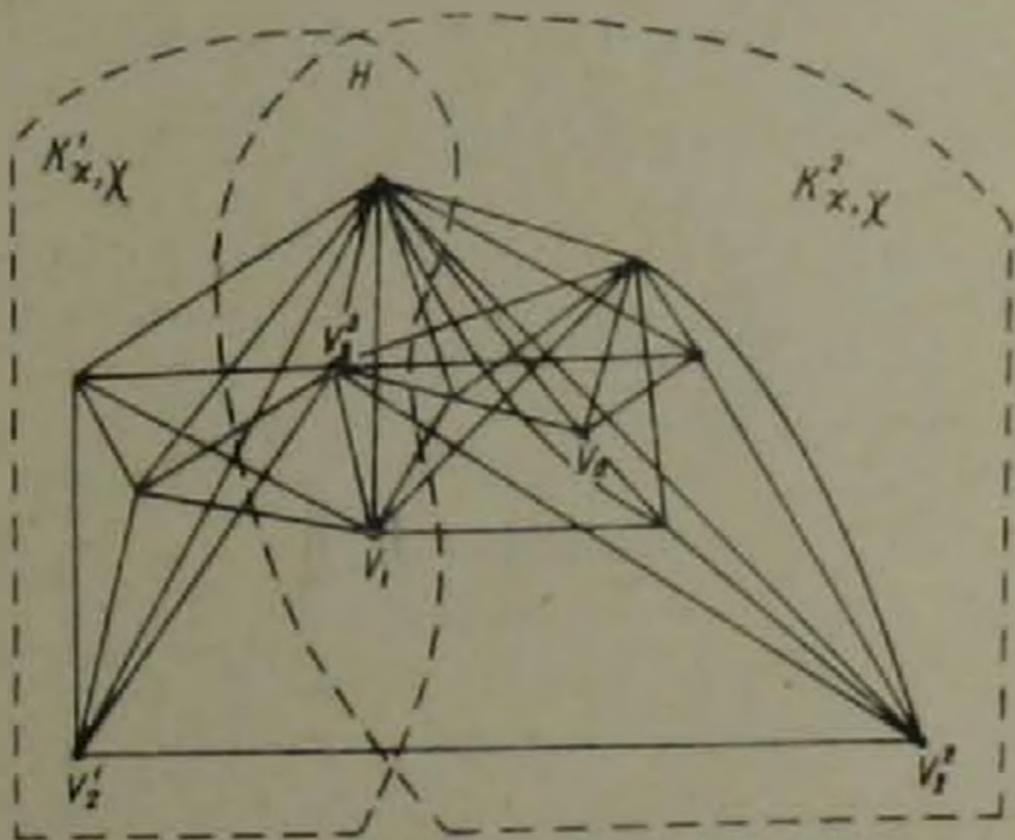


Рис. 3

случая. В этом легко убедиться прежним путем.

Пусть  $p = 2\gamma - x + 2$ . Подграф графа  $W^1$  (рис. 1), порожденный вершинами  $v_1, v_2^1, v_2^2, v_2^3, v_2^4$ , обозначим через  $G^2$ , а подграф графа

$W^*$ , порожденный вершинами  $v_0, v_2, v_3, v_4$  — через  $G_1$ . Пусть

$$J^1 = K_{\gamma-1} + G^1,$$

$$J^2 = K_{\gamma-1} + G^1$$

и пусть

$$N_{3, \gamma} = (J^1 \cup J^2) + (v_3, v_2) + (v_4, v_2).$$

Не трудно заметить, что  $N_{3, \gamma}$  является  $\gamma$ -реберно-критическим 3-связным  $2\gamma-1$ -вершинным графом.

Рассмотрим граф

$$G^2 = N_{3, \gamma-1+3} + K_{1-3}.$$

Он имеет  $2\gamma-1+2$  вершин, а так как  $N_{3, \gamma-1+3}, K_{1-3}$  реберно-критические и, согласно (1),  $\chi(G^2) = \gamma$ , то  $G^2$  является  $\gamma$ -реберно-критическим. Для завершения доказательства теоремы достаточно пользоваться формулой (2).

**Теорема 3.** Для любых  $\gamma \geq 4$ ,  $p \geq 2\gamma-1$  и  $p \neq 2\gamma$  существует  $\gamma$ -реберно-критический 2-связный  $p$ -вершинный граф.

*Доказательство.* Пусть  $p = 2\gamma-1+2t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим  $\bar{K}_\gamma = K_\gamma - (v_1^1, v_2^1)$  и  $\bar{W}^{\gamma-3, 2t+3} = W^{\gamma-3, 2t+3} - (v_1^2, v_2^2)$ , где  $(v_1^1, v_2^1)$  и  $(v_1^2, v_2^2)$  ребра графов  $K_\gamma$  и  $W^{\gamma-3, 2t+3}$  соответственно. Через  $G$  обозначим граф, получаемый из  $\bar{K}_\gamma$  и  $\bar{W}^{\gamma-3, 2t+3}$  совмещением вершин  $v_1^1, v_2^1$  и добавлением ребра  $(v_1^2, v_2^2)$ . Очевидно,  $G$  2-связен  $\gamma$ -реберно-критичен и имеет  $2\gamma-1+2t$  вершин.

При  $p = 2\gamma+2+2t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  вместо  $W^{\gamma-3, 2t+3}$  берем граф  $\bar{G}^{t+1+2t}$ , построенный по (3), и поступаем аналогичным образом.

**Теорема 4.** Для любых  $\gamma \geq 4$ ,  $x, p \leq 2\gamma-x$  не существует  $\gamma$ -критического  $x$ -связного  $p$ -вершинного графа, за исключением  $K_\gamma$ .

*Доказательство.* Будем считать, что  $2 \leq x \leq \gamma-1$ , так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Пусть задан  $\gamma$ -критический  $x$ -связный граф  $G = G(V, X)$  и пусть  $G = v_1 - v_2 - \dots - v_k$  состоит из компонент связности  $G_1 = G_1(V_1, X_1), \dots, G_k = G_k(V_k, X_k)$ , где  $k \geq 2$ . Так как  $\rho(v) \geq \gamma-1$  для произвольной вершины  $v$  графа  $G$ , то  $|V_i| \geq \gamma-x$ ,  $i \in \overline{1, k}$  и, следовательно,  $p \geq k\gamma - (k-1)x$ , причем равенство достигается только в случае, если  $|V_i| = \gamma-x$ ,  $i \in \overline{1, k}$ . Очевидно, при  $k > 2$  или, если для некоторого  $i \in \overline{1, k}$ ,  $|V_i| > \gamma-x$ , то  $p > 2\gamma-x$ . Следовательно, достаточно рассмотреть случай  $k = 2$  и  $|V_1| = |V_2| = \gamma-x$ , откуда следует, что всякая вершина  $v \in V_i$  смежна со всеми вершинами из  $V \setminus V_j$ , где  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ . Известно (3), что критический граф нельзя разделить полным подграфом, следовательно, разрез  $V \setminus (V_1 \cup V_2)$  графа  $G$  содержит несмежные вершины  $v_i, v_j$ ,  $i, j \in \overline{1, x}$  и  $i \neq j$ . Граф  $G$   $\gamma-1$ -раскрасиваем, так как даже в случае смежности всевозможных пар вершин разреза (кроме пары  $v_i, v_j$ ),  $\chi(G) = \gamma-1$ . Полученное противоречие завершит доказательство теоремы.

Следствие 1. Для любых  $\gamma \geq 4$ ,  $x, 1 \leq x \leq 2\gamma - x$  не существует  $\gamma$ -реберно-критического  $x$ -связного  $p$ -вершинного графа,  $\gamma$  и исключением  $K_\gamma$ .

Теорема 5. Для любого  $\gamma \geq 4$  не существует  $\gamma$ -критического 2-связного  $2\gamma$ -вершинного графа.

Доказательство. При  $\gamma = 4$  утверждение теоремы следует из работы [2]. Пусть  $\gamma \geq 5$  и существует  $\gamma$ -критический 2-связный граф  $G = G(V, X)$  с  $2\gamma$  вершинами. Обозначим через  $[v_1, v_2]$  некоторый разрез графа  $G$  и пусть компонентами связности графа  $G - v_1 - v_2$  являются  $G_i = G^i(V^i, X^i)$ , где  $i \in \overline{1, k}$ . Так как для любой вершины  $v$  графа  $G_i$  имеет место  $d(v) \geq \gamma - 1$ , то  $|V^i| \geq \gamma - 2$  при  $i \in \overline{1, k}$ . Следовательно,  $k = 2$ . Возможны следующие случаи:

1.  $|V^1| = \gamma, |V^2| = \gamma - 2$ .
2.  $|V^1| = |V^2| = \gamma - 1$ .

Через  $\beta$  обозначим наибольшее число вершин графа  $G_i$ , удаление которых приводит к  $\gamma - 1$ -критическому графу  $G_i = G(V_i, X_i)$  с  $p_i$  вершинами.

Так как  $v_1$  и  $v_2$  не смежны, то  $\chi(G - v_1 - v_2) = \gamma - 1$ . Откуда,  $\beta \geq \gamma$  и  $p_i = p - \beta \leq \gamma$ . По теореме 4 имеем  $G_i = K_{\gamma-1}$ . В случае, если  $|V^1| = \gamma, |V^2| = \gamma - 2$ , граф  $G^1$  содержит  $K_{\gamma-1}$  и некоторую вершину  $w$ . Очевидно,

$$\exists u_1, u_2 \in V_2 ((v_1, u_1) \in X \& (v_2, u_2) \in X).$$

а)  $u_1 = u_2 = u$ . В этом случае, покрасив граф  $G_i$   $\gamma - 1$  цветами, и придав вершинам  $v_1, v_2$  цвет, приспанный вершине  $u$ , можно продолжить  $\gamma - 1$ -раскраску на весь граф  $G$ .

б)  $u_1 \neq u_2$ . Нетрудно заметить, что в этом случае  $\chi(G - w) = \gamma$ . В обоих случаях пришли к противоречию. Аналогичным путем приходим к противоречию и в случае  $|V^1| = |V^2| = \gamma - 1$ .

Следствие 2. Для любого  $\gamma \geq 4$  не существует  $\gamma$ -реберно-критического 2-связного  $2\gamma$ -вершинного графа.

Следствие 3. Для существования  $\gamma$ -реберно-критического ( $\gamma \geq 4$ )  $x$ -связного ( $2 \leq x \leq \gamma - 1$ )  $p$ -вершинного графа необходимо и достаточно, чтобы

- а)  $p = \gamma + 1$  при  $x = \gamma - 1$ ,
- б)  $p = \gamma, \dots, 2\gamma - x$  при  $3 \leq x \leq \gamma - 2$ ,
- в)  $p = \gamma, \gamma + 1, \dots, 2\gamma - 2, 2\gamma$  при  $x = 2$ .

Следствие 4. Для существования  $\gamma$ -реберно-критического ( $\gamma \geq 4$ )  $x$ -связного ( $2 \leq x \leq \gamma - 1$ )  $p$ -вершинного графа необходимо и достаточно существование  $\gamma$ -критического  $x$ -связного  $p$ -вершинного графа.

Ըստ ներկման կրիտիկական գրաֆների մասին

Հոդվածի հիմնական պնդումը պարունակում է երրորդ նետևանքում, ուր ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որպեսզի գոյություն ունենա  $\gamma$ -կողային կրիտիկական  $x$ -կապակցված  $p$ -գաղաթանի գրաֆ կամայական  $\gamma \geq 4$ ,  $2 \leq x \leq \gamma - 1$  և  $p$  դրական ամբողջ թվերի համար՝

և նաև առ 3.  $\gamma$ -կողային կրիտիկական ( $\gamma \geq 4$ )  $\gamma$ -կապակցված ( $2 \leq x \leq \gamma - 1$ )  $p$ -գաղաթանի գրաֆ գոյություն ունենալու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

ա)  $p \neq \gamma + 1$ , երբ  $x = \gamma - 1$ ,

բ)  $p \neq \gamma, \dots, 2\gamma - x$ , երբ  $3 \leq x \leq \gamma - 2$ ,

գ)  $p \neq \gamma, \gamma + 1, \dots, 2\gamma - 2x, 2\gamma$ , երբ  $x = 2$ ;

Երրորդ նետևանքում ստացված է կապ  $\gamma$ -կողային կրիտիկական և  $\gamma$ -կրիտիկական  $x$ -կապակցված ( $2 \leq x \leq \gamma - 1$ ) գրաֆների միջև:

և նաև առ 4.  $x$ -կողային կրիտիկական ( $x \geq 4$ )  $x$ -կապակցված ( $2 \leq x \leq \gamma - 1$ )  $p$ -գաղաթանի գրաֆ գոյություն ունենալու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի գոյություն ունենա  $\gamma$ -կրիտիկական  $x$ -կապակցված  $p$ -գաղաթանի գրաֆ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԳՐԱՓՆԵՐԻ

<sup>1</sup> Փ. Կարան, Теория графов, «Мир», М., 1973. <sup>2</sup> B. Toft, J., North-Holland pub. comp., Am., V. 7, No 4.(1974).

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

А. О. Огнисян

О задаче Коши для слабо гиперболических систем с данными на гиперплоскости вырождения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 9/VI 1975г)

Как известно <sup>(1)</sup>, задача Коши для строго гиперболических систем поставлена корректно. При нарушении условия строгой гиперболичности корректность задачи зависит от поведения коэффициентов (матриц) при младших производных. Некоторые классы слабо гиперболических систем, для которых кратности характеристических корней постоянны и не превышают трех, рассмотрены в <sup>(2)</sup>, <sup>(3)</sup>. В работе <sup>(4)</sup> изучается характеристическая задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на гиперплоскости с начальными данными. Некоторые классы систем в двумерном случае рассмотрены в <sup>(5)</sup>.

Ниже рассматривается задача Коши для системы

$$qu = Au + Bu = f, \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \| A_{ij}(x, D) \|_i, \quad B = \| B_{ij}(x, D) \|_i, \\ Au &= D_{x_1}^{p_i} u_i, \quad A_{ij} = 0 \quad i \neq j, \quad B_{ij}(x, D) = a_{ij}^{(p_i)}(x) D^s, \quad |z| \leq k_i - 1, 1 \\ u &= {}^t(u_1, \dots, u_s), \quad f = {}^t(f_1, \dots, f_s) \\ D_{x_1}^{p_i} u_i(0, x') &= 0 \quad (p_i = 0, \dots, k_i - 1) \end{aligned} \tag{2}$$

Коэффициенты  $a_{ij}^{(p_i)}(x)$  имеют производные порядка  $\sum_{i=1}^s k_i = m + 1 - k_i$  и бесконечно дифференцируемы по  $x' = (x_2, \dots, x_n)$  при  $|z| = k_i$ .

Задача рассматривается в области  $V_l = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq l\}$

Обозначим  $S_l$  — гиперплоскость  $x_1 = l$ , для любого вектора  $a = (a_1, \dots, a_n)$   $a'$  означает вектор  $a' = (a_2, \dots, a_n)$ . Для оценок используется норма

$$\|D^{p,q} u, V_l\|^2 = \int D^p u_i \overline{D^q u_i} dV_l \tag{3}$$

$$(|z| \leq p, q; \quad l = 1, \dots, s)$$

Пусть  $Pq$  — главная часть оператора  $q$ .

Оператор  $q(x, D)$  называется слабо гиперболическим (относительно первой координаты), если уравнение

$$a(x, \zeta) \equiv \det Pq(x, \zeta) = 0 \quad (4)$$

имеет  $m + 1$  действительных корней.

Пусть элементами полиномиальной матрицы  $G(x, \zeta)$  являются алгебраические дополнения матрицы  $Pq(x, \zeta)$ , так что

$$G(x, \zeta)Pq(x, \zeta) = a(x, \zeta)E \quad (5)$$

Тогда имеем

$$a(x, D)Eu = -L(x, D)u + G(x, D)f \quad (6)$$

где  $L$  — некоторый матричный дифференциальный оператор порядка  $\leq m$ .

Пусть оператор  $b(x, D)$  разделяет оператор  $a(x, D)$  <sup>(1)</sup>. Умножим обе части (6) на  $\overline{b(u)} = (\overline{b(u_1)}, \dots, \overline{b(u_s)})$  и проинтегрируем по  $V_{x_i}$ ,

$$\int \overline{b(u_i)} a(u_i) dV_{x_i} = - \int \overline{b(u)} L.u dV_{x_i} + \int \overline{b(u)} G.f dV_{x_i} \quad (7)$$

( $i = 1, \dots, s$ )

Воспользуемся тождеством <sup>(1)</sup>

$$a\overline{b} + \overline{a}b = (D_j + \overline{D}_j)A^j + A^0 \quad (8)$$

( $j = 1, \dots, n$ )

$$2 \int \operatorname{Re}[\overline{b(u_r)} a(u_r)] dV_{x_i} = \int A^1(u_r, \overline{u}_r) dS_{x_i} - \int A^1(u_r, \overline{u}_r) dS_0 + \int A^0(u_r, \overline{u}_r) dV_{x_i} \quad (9)$$

( $r = 1, \dots, s$ ).

Пусть  $i_1(x, \zeta'), \dots, i_{m+1}(x, \zeta')$  — характеристические числа оператора  $a(x, D)$

Обозначим

$$\Delta_s = \sum_{k_l = k_l} \prod |i_{k_l} - i_{k_j}|^2, \quad \Delta_1 \equiv m + 1, \quad (s = 2, \dots, m + 1) \quad (10)$$

где суммирование производится по всем наборам  $(k_1, \dots, k_s)$  из чисел  $(1, 2, \dots, m + 1)$ . Далее, пусть  $R(x, D')$  матричный псевдодифференциальный оператор с символом

$$r(x, i\tau'_i) = \| r_{pl}(x, i\tau'_i) \|_1^{m+1}, \quad (11)$$

где  $\frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}} r_{lp}^* = a_{lp} - \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} r_{ik}^* r_{kp}$ ,  $p < l$ ,  $r_{ij}^* = \overline{r_{ji}}$  (суммирование только по  $k = 1, 2, \dots, p - 1$ )

$$r_{pl} = 0 \quad \text{при } p > l \text{ и } r_{pp} = 1 \quad p = 1, \dots, m + 1,$$

$$r_{lp} = \frac{1}{\Delta_1} a_{lp}, \quad \Delta_0 \equiv 1,$$

$$a_{pl} = \sum_{k=1}^{m+1} [(-1)^{p-k} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_{p-1}=k \\ l_1, \dots, l_{p-1} \geq 0}} \lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \dots \lambda_{l_{p-1}} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_{n-1}=l \\ l_1, \dots, l_{n-1} \geq 0}} \lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \dots \lambda_{l_{n-1}}]$$

$$\lambda_l = \lambda_l(x, i\tau_j), \quad \lambda_{l_k} = i_{l_k} = 1,$$

Имеет место

Лемма (\*). Пусть  $\Delta_i(x, i\tau_j)$  удовлетворяют условиям

$$c_j (i^{\alpha_j} u(x_1) | \tau_j |)^{\alpha_j - 1} \leq \frac{\Delta_i(x, i\tau_j)}{\Delta_{i-1}(x, i\tau_j)} \leq c_i (i^{\alpha_j} u(x_1) | \tau_j |)^{\alpha_j - 1} \quad (12)$$

$$\left| D^{\alpha} \sigma^{\alpha} \left( \frac{\Delta_i(x, i\tau_j)}{\Delta_{i-1}(x, i\tau_j)} \right) \right| \leq c (i^{\alpha_j} u(x_1) | \tau_j |)^{\alpha_j - 1} |\tau_j|^{\alpha_j - 1} \quad (13)$$

( $j = 2, \dots, n$ )

для каждого  $i = 1, \dots, m+1$ ;  $|\beta| \leq q$ ;  $|\gamma| \leq p$ ;  $c_j, c_i = \text{const}$ ;  $\tau_j > 0$ ,

$u(x_1) \geq 0$ ,  $\sigma^{\alpha} = \sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$ ,  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

Если коэффициенты оператора  $a(x, D)$  слабо зависят от  $x'$  (\*), то существует постоянная  $c > 0$ , не зависящая от  $u_p$ , такая, что

$$\int (A^1(u_p, \bar{u}_p) dS_{x_1} \geq c \int |(i^{\alpha_j} u D_j)^{\alpha_j - 1} \cdot (R\Theta_p)_k|^2 dS_{x_1} - \frac{1}{c} \int \sum_{j=2}^n |(i^{\alpha_j} u D_j)^q (R\Theta_p)_k|^2 dS_{x_1} \quad (14)$$

( $j = 2, \dots, n$ ;  $l = 1, \dots, m+1$ ;  $k = 2, \dots, m+1$ )

для любого  $p = 1, \dots, s$ ,  $\Theta_p = (D_1^{\alpha_1} u_p, \dots, u_p)$ .

Преобразуем интегралы от операторов порядка  $\leq m$

$$\int \overline{b(u)} L_{lp} u dV_{x_1} = \int \overline{b(u_p)} L_{lp}(u_p) dV_{x_1} + \int \overline{b(u_l)} L_{lq}(u_q) dV_{x_1} \quad (l \neq q) \quad (15)$$

$$\int A^1(u_p, \bar{u}_p) dV_{x_1} = \int \overline{b(u_p)} Q(u_p) dV_{x_1} + \int A^{01}(u_p, \bar{u}_p) dV_{x_1} \quad (16)$$

( $p, l, q = 1, \dots, s$ )

Объединим первые слагаемые в (15) и (16)

$$\int \overline{b(u_p)} L_{lp}(u_p) dV_{x_1} + \int \overline{b(u_p)} Q(u_p) dV_{x_1} = \int \overline{b(u_p)} L_{lp}^1(u_p) dV_{x_1} \quad (17)$$

( $p = 1, \dots, s$ )

В дальнейшем будем считать такое объединение заранее сделанным и опускать индекс  $l$  в  $L_{lp}^1$  и  $A^{01}$ .

Пусть  $b_h(x, D)$  ( $h = 0, \dots, m$ ) — последовательность операторов, таких, что  $b_{h+1}$  разделяет  $b_h$ ,  $b_0(x, D) \equiv a(x, D)$ ,  $b_1(x, D) \equiv b(x, D)$ . Пусть  $W$  — некоторая величина, определенная для оператора  $a(x, D)$ . Через  $W^h$  будем обозначать аналогичную величину для оператора  $b_h(x, D)$ . При этом  $W^0 \equiv W$ .

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть для операторов  $b_h$  ( $h = 0, \dots, m$ ) имеют место оценки типа (14). Далее, пусть

$$1. -A^{nh}(x, z) = (f_{jk} + v_{ia} D_1) [(z_{ij}^h(x_1) | z_j |)^{2a-1} | (r^h(x, z) \omega_h)_i |^2].$$

$$2. L_{lq}(x, z) = (z_{ij}^{lh} + \pi_{iq}^{lh} D_1) (z_{ij}^h(x_1) | z_j |)^{l-1} | z |^{-p} \times$$

$$\times (r^h(x, z) \omega_h)_i + \Psi_{lq}^{p\alpha\alpha} q_{pl}(x, z)$$

$$(l, p, q=1, \dots, s; i=1, \dots, m+1-h; h=0, \dots, m; j=0, \dots, i-1; j=2, \dots, n; |z| \leq m-k, 0),$$

где  $\text{Re } z=0$ ,  $f_{jk}(x, z)$ ,  $v_{ia}(x, z)$ ,  $z_{ij}^{lh}(x, z)$ ,  $\pi_{iq}^{lh}(x, z)$ ,  $\Psi_{lq}^{p\alpha\alpha}(x, z)$  имеют производные  $n$ -ого порядка по  $z$ ,  $x$  принадлежащие  $L_1$  равномерно по  $x$ , и  $z$  и нулевую степень однородности по  $z$ ,  $z_{ij}^h \neq 0$  ( $x_1 > 0$ ) при  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $D_1^h(x_1) > 0$ ,  $\mu(x_1) > 0$  при  $x_1 \geq \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$   $\omega^h = (z_1^{m-h}, \dots, 1)$ .

Тогда для любого  $f = (f_1, \dots, f_s)$ ,  $f_i \in H^{m+1-k_i+d}$  — где  $d$  достаточно большая постоянная, существует единственное решение  $u, u_i \in H^{m,d}$ , задачи (1)–(2). При этом

$$|D^{m,d} u, V_i| \leq c(|D^{m-k_i-1+d} f_i, S_0| + |D^{m+1-k_i+d} f_i, V_i|) \quad (18)$$

$$(i=1, \dots, s).$$

Примеры. Рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными данными для системы

$$\begin{aligned} D_1 u_1 + a_{11}^k D_k u_1 + a_{12}^k D_k u_2 + c_{11} u_1 + c_{12} u_2 &= f_1, \\ D_1 u_2 + a_{21}^k D_k u_1 + a_{22}^k D_k u_2 + c_{21} u_1 + c_{22} u_2 &= f_2, \end{aligned} \quad (19)$$

$$(k=2, \dots, n)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a_{kl} &= (a_{11}^k - a_{22}^k)(a_{11}^l - a_{22}^l) + 4a_{12}^k a_{21}^l \\ \gamma_{11}^l &= \frac{1}{2} c_{11}(a_{22}^l - a_{11}^l) - \frac{1}{2} D_1(a_{22}^l - a_{11}^l) - a_{12}^l c_{21} + a_{22}^k D_k a_{11}^l - \\ &\quad - a_{12}^k D_k a_{21}^l + \frac{1}{4} (a_{11}^k + a_{22}^k) D_k (a_{11}^l + a_{22}^l) \\ \gamma_{22}^l &= \frac{1}{2} c_{22}(a_{11}^l - a_{22}^l) - \frac{1}{2} D_1(a_{11}^l - a_{22}^l) - a_{21}^l c_{12} + a_{11}^k D_k a_{22}^l - \\ &\quad - a_{21}^k D_k a_{12}^l + \frac{1}{4} (a_{11}^k + a_{22}^k) D_k (a_{11}^l + a_{22}^l), \\ \gamma_{21}^l &= \frac{1}{2} c_{21}(a_{11}^l - a_{22}^l) - a_{21}^l c_{11}, \\ \gamma_{12}^l &= \frac{1}{2} c_{12}(a_{22}^l - a_{11}^l) - a_{12}^l c_{22} \quad (l, k=2, \dots, n) \end{aligned}$$

Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned}
 c_2^{j, 2^s k} (x_1) |\bar{z}_k|^2 &\leq a_{kl} \bar{z}_k \bar{z}_l \leq c_1^{j, 2^s k} (x_1) |\bar{z}_k|^2 \\
 D_l (a_{kl}) \bar{z}_k \bar{z}_l &\leq c_1^{j, 2^s k} (x_1) |\bar{z}_k|^2 \\
 D_1 (a_{kl}) \bar{z}_k \bar{z}_l &\leq c(1 + D_1) \mu^{2^s k} (x_1) |\bar{z}_k|^2 \quad (\operatorname{Re} \bar{z}_l = 0) \\
 (i, k, l = 2, \dots, n; \quad z_k > 0).
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Тогда условие 2 примет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{z}_j \bar{z}_i &= \varphi_{js}^1 |\bar{z}_i| + \frac{1}{2} (a_{11}^k + a_{22}^k) \bar{z}_k | + \varphi_{js}^2 (\bar{z}_i + D_1) \mu^{2^s k} (x_1) \bar{z}_k + \\
 &+ \Psi_{js}^1 |\bar{z}_i| + (a_{11}^k + a_{22}^k) \bar{z}_k | + \Psi_{js}^2 |\bar{z}_i| + (a_{21}^k + a_{12}^k) \bar{z}_k | \\
 (j, s = 1, 2; \quad k = 2, \dots, n)
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

При  $n = 2$ ,  $a_{11}^2 = a_{22}^2 = 0$ ,  $a_{11}^1 = 1$ ,  $a_{12}^1 = x_1^n$  условие (21) выполняется, если функции  $c_{11}$ ,  $x_1^{1-\frac{n}{2}} c_{12}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{22}$  ограничены, что совпадает с результатом работы (3).

Рассмотрим систему двух уравнений второго порядка с нулевыми начальными данными

$$\begin{aligned}
 D_1^2 u_1 - a_1^{ij}(x) D_i D_j u_1 + b_{1s}^s D^s u_s &= f_1 \\
 D_1^2 u_2 - a_2^{ij}(x) D_i D_j u_2 + b_{2s}^s D^s u_s &= f_2 \\
 (i, j = 2, \dots, n; \quad s = 1, 2; \quad |z| < 1)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Пусть имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
 c_2^{j, 2^s k} (x_1) |\bar{z}_k|^2 &\leq a_{ij}^{ij}(x) \bar{z}_i \bar{z}_j \leq c_1^{j, 2^s k} (x_1) |\bar{z}_k|^2 \\
 D_1 a_{ij}^{ij}(x) \bar{z}_i \bar{z}_j &\leq c(1 + D_1) \mu^{2^s k} (x_1) |\bar{z}_k|^2, \\
 D_k a_{ij}^{ij}(x) \bar{z}_i \bar{z}_j &\leq c_1^{j, 2^s k} (x_1) |\bar{z}_k|^2 \quad (\operatorname{Re} \bar{z}_l = 0), \\
 (k, i, j = 2, \dots, n; \quad s = 1, 2; \quad z_k^s > 0).
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Тогда для выполнения условий корректности достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
 |b_{1l}^{0l} \bar{z}_l|^2 &\leq c(1 + D_1) \mu^{2^s k} |\bar{z}_k|^2 \\
 |b_{1r}^{0r} \bar{z}_r|^2 &\leq c(1 + D_1) (\mu^{2^s k} + \mu^{2^s r}) |\bar{z}_k|^2 \quad (l \neq r) \\
 (l, k = 2, \dots, n; \quad l, r = 1, 2).
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Քույլ հիպերբոլական սիստեմների նամառ վերացման հիպերհարթության վրա սկզբնական տվյալներով Կոչու խնդրի մասին

Հոդվածում քննարկվում է Կոչու խնդիրը Քույլ հիպերբոլական սիստեմների համար: Ենթադրվում է, որ սիստեմի գլխավոր մասի գործակիցներն անվերջ դիֆերենցելի են ըստ տարածական փոփոխականների և խարակտերիստիկ թվերի տարբերությունները ձգտում են դրոյի սկզբնական հիպերհարթությանը մոտենալիս:

Երբ սիստեմի ցածր կարգի գործակիցները բավարարում են որոշակի պայմանների, բերվում է Կոչու խնդրի լուծման գոյություն, միակության և կայունության թեորեմ: Դիտարկվում են օրինակներ, որոնք ցույց են տալիս, որ ստացված արդյունքները կարող են հաջողությամբ կիրառվել:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Դ. Գորդինգ, Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961. <sup>2</sup> В. М. Петков, УМН, т. 27, № 4, 221—222 (1972). <sup>3</sup> В. М. Петков, ДАН СССР, т. 209, № 4, 795—797 (1973). <sup>4</sup> А. Б. Нерсисян, ДАН СССР, т. 196, № 2, 289—292 (1971). <sup>5</sup> С. А. Терсенов, ДАН СССР, т. 155, № 2, 285—288 (1964). <sup>6</sup> А. О. Огинесян, ИАН Арм. ССР, т. 60, № 2 (1975).

УДК 621.375.82

ФИЗИКА

Р. Х. Драмлян, М. Е. Мовсесян

**Влияние внешнего постоянного магнитного поля на вынужденное электронное комбинационное рассеяние в парах калия**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаэляном 10/III 1975)

Взаимодействие резонансного излучения с парами щелочных металлов исследовалось рядом авторов. Наблюдались такие нелинейные эффекты, как уширение спектра резонансного излучения, вынужденное электронное комбинационное рассеяние (ВЭКР), трехфотонное рассеяние, высокочастотный Штарк-эффект и т. д. (1-6). Для более детального изучения многофотонных процессов и при рассмотрении поляризационных вопросов представляет интерес исследовать эти процессы в постоянном магнитном поле, когда вырождение атомных уровней по магнитному квантовому числу снимается (7). В настоящей работе экспериментально исследовалось влияние внешнего постоянного магнитного поля на процесс ВЭКР в парах калия. Насколько нам известно, такой эксперимент проводится впервые.

В качестве резонансного излучения в нашем эксперименте использовалась 1-стоксовая компонента ВКР нитробензола ( $\omega' = 13055 \text{ см}^{-1}$ ) мощностью  $\sim 10 \text{ Мвт/см}^2$ , возбуждаемая рубиновым лазером, с расстройкой резонанса  $\pm = 12 \text{ см}^{-1}$  к атомному переходу  $4S_{1/2} - 4P_{3/2}$  ( $\omega_0 = 13043 \text{ см}^{-1}$ ) паров калия. Исследования проводились с циркулярно поляризованным возбуждающим излучением. Схема экспериментальной установки позволяла различать правые и левые круговые поляризации света.

Эксперименты показали, что поляризация излучения ВЭКР, связанная с переходом  $4P_{3/2} - 4P_{1/2}$  обратна по знаку поляризации возбуждающего излучения. При наличии внешнего постоянного магнитного поля  $H \sim 30 - 40 \text{ кэрстед}$  наблюдалось значительное ослабление интенсивности излучения ВЭКР, которое полностью исчезало в регистрируемом спектре при полях  $H \sim 50 \text{ кэрстед}$  (температура паров калия  $320^\circ\text{C}$ , что соответствует плотности атомов  $n = 2 \times 10^{16} \text{ атомов/см}^3$ ). Этот эффект наблюдался как для правой, так и для левой круговых поляризаций возбуждающего излучения. Следует указать, что частоты ВЭКР

и отсутствии магнитного поля и в поле  $H$  должны отличаться из-за зеемановского расщепления. В наших экспериментах это смещение частоты четко не удалось наблюдать из-за малой дисперсии используемого спектрографа.

Полученные результаты можно объяснить, приняв во внимание релаксационные процессы между магнитными подуровнями и влияние на них внешнего постоянного магнитного поля. При взаимодействии интенсивного резонансного излучения с парами калия уровень  $4P_{3/2}$  может существенно заселиться как за счет трехфотонного процесса

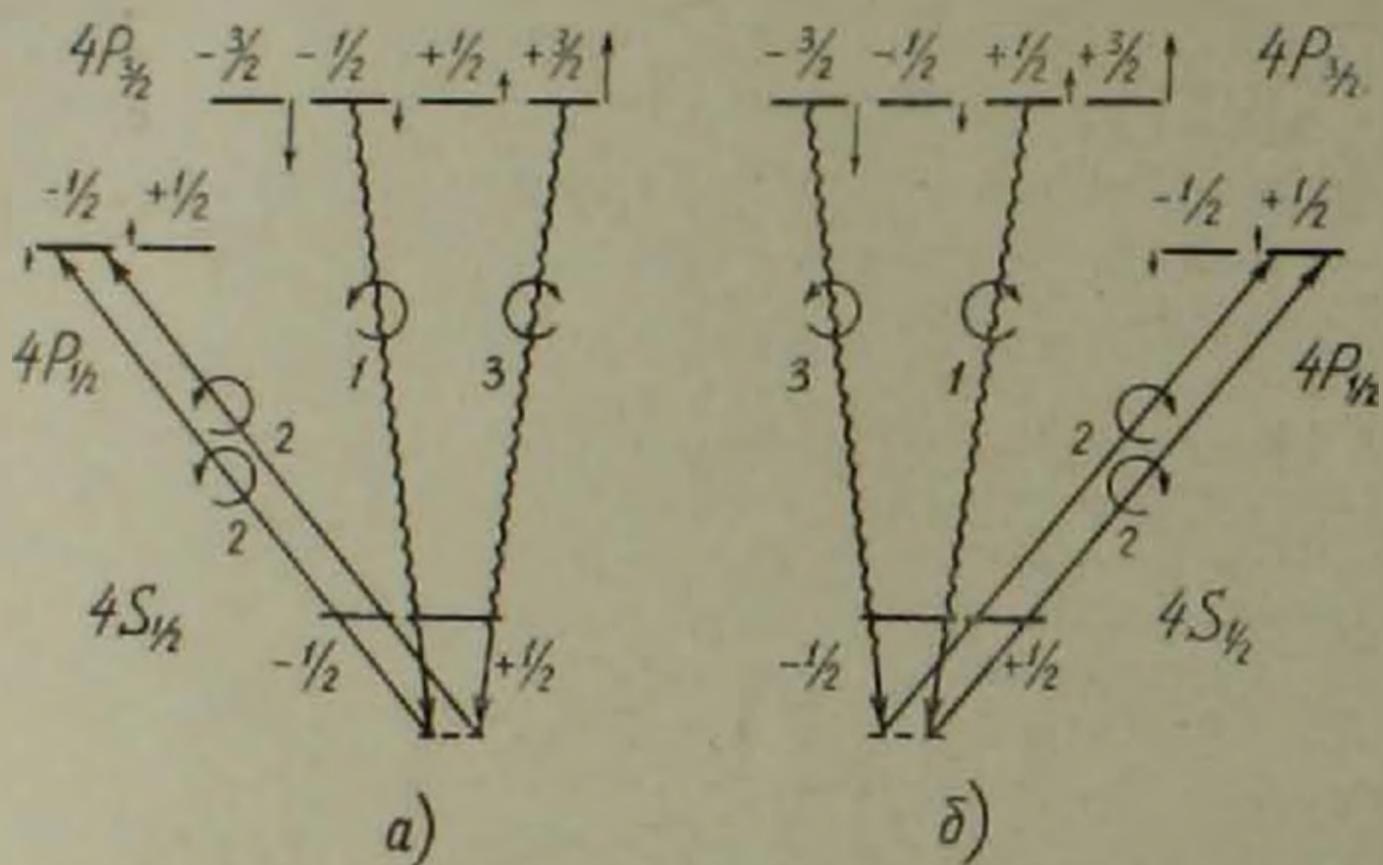


Рис. 1. Схемы процесса ВЭКР для поляризованного по левому кругу (а) и по правому кругу (б) возбуждающего излучения. Вертикальные стрелки указывают направления сдвига подуровней при включении магнитного поля

$(2\omega' - \omega_0)$  (<sup>2</sup>), так и за счет однофотонного поглощения, если линия задающего излучения достаточно широка (<sup>1</sup>). Перенаселенность уровня  $4P_{3/2}$  по отношению к  $4P_{1/2}$  приводит к процессу ВЭКР. Рассмотрим возможные схемы образования ВЭКР для случаев правой и левой циркулярной поляризации возбуждающего излучения (рис. 1). Если возбуждающее излучение поляризовано по левому кругу, то заселяются подуровни  $m = -1/2, -3/2$  уровня  $4P_{3/2}$ . Согласно правилу отбора по магнитному квантовому числу  $m$ , процесс ВЭКР может идти с подуровней  $m = -1/2$  и  $m = +3/2$  (рис. 1.а). Относительные вероятности этих процессов соответственно равны 1 и 3 (<sup>3</sup>). Причем излучение ВЭКР с подуровня  $m = -1/2$  будет поляризовано по левому кругу, а с подуровня  $m = +3/2$  по правому кругу. Как уже указывалось, регистрируемая на эксперименте линия ВЭКР имеет поляризацию, обратную поляризации возбуждающего излучения. Отсюда следует, что ВЭКР идет с подуровня  $m = +3/2$ , который непосредственно не заселяется. Можно предположить, что заселение этого подуровня происходит за счет релаксаций с заселенных подуровней  $m = -1/2, -3/2$ , вызванных соударениями атомов калия между собой. Расчеты показы-

вают (<sup>10</sup>), что время этих релаксаций  $\tau \sim 10^{-10}$  сек при плотности атомов  $n \sim 10^{18}$  атомов/см<sup>3</sup>. При включении внешнего постоянного магнитного поля уровни энергии расщепляются из-за эффекта Зеемана. Для подуровня  $m = +1/2$  уровня  $4P_{3/2}$  смещение  $\Delta E_{\text{Зееман}} \approx 5 \text{ см}^{-1}$  при  $H = 5'$  кэрстед. Вследствие раздвижения магнитных подуровней в поле  $H$  релаксация между ними уменьшится, что должно привести к постепенному ослаблению интенсивности излучения ВЭКР с увеличением магнитного поля. В достаточно сильных магнитных полях ВЭКР в спектре может отсутствовать.

Аналогичные рассуждения справедливы и для случая возбуждения волной, поляризованной по правому кругу (рис. 1,б). Таким образом результаты наших экспериментов можно объяснить исходя из сделанного выше предположения о релаксациях.

В заключение укажем, что влияние высокочастотного Штарк-эффекта (<sup>11</sup>) на указанные выше процессы будет различно в зависимости от того, совпадают или являются противоположными направлениями штарковского и зеемановского сдвигов подуровней при различных знаках круговой поляризации возбуждающего излучения. Для выяснения этих вопросов проводятся более детальные количественные измерения с учетом динамики развития этих процессов.

Институт физических исследований  
Академии наук Армянской ССР

Թ. Կ. ԿՐԱՄՓՅԱՆ, Մ. Կ. ՄՈՂՈՒՅԱՆ

Արտաբնիկ հաստատուն մագնիսական դաշտի ազդեցությունն ստիպողական էլեկտրոնային կոմբինացիոն ցրման վրա կայունի գոյությունը

Առաջին անգամ կատարված է ատոմական կայունի գոյությունը ստիպողական էլեկտրոնային կոմբինացիոն ցրման (ՍէԿՑ) պրոցեսի էքսպերիմենտալ ուսումնասիրությունն արտաբնիկ հաստատուն մագնիսական դաշտում:

Մագնիսական 30—50 կէրստեդ դաշտի և  $n \sim 10^{18}$  ատոմ/սմ<sup>3</sup> ատոմների խտության դեպքում գրանցվող սպեկտրում դիտվել է ՍէԿՑ ճառագայթման գծի թուլացում և փերացում:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՄՓՅԱՆԻ ՄՈՂՈՒՅԱՆԻ

- <sup>1</sup> В. М. Арутюнян, Н. Н. Бадальян, В. А. Ирадян, М. Е. Мовсисян, ЖЭТФ, 58, 17 (1970). <sup>2</sup> P. P. Sorokin, N. S. Shiren, J. B. Lankard, E. C. Hampton, T. G. Kozuaka, Appl. Phys. Lett. 10, 44 (1967). <sup>3</sup> В. М. Арутюнян, Н. Н. Бадальян, В. А. Ирадян, М. Е. Мовсисян, ЖЭТФ, 60, 62, (1971). <sup>4</sup> М. Е. Мовсисян, Докторская диссертация, ФИАН, 1971. <sup>5</sup> Sh. Haraq, Sh. Vatsiv, Phys. Rev. A, 3, 382 (1971). <sup>6</sup> В. М. Арутюнян, Т. А. Папазян, К. С. Чулингарян, А. В. Кармениян, С. М. Саркисян, ЖЭТФ, 66, 509 (1974). <sup>7</sup> W. Harper, B. S. Mathur, Phys. Rev. Lett. 18, 727 (1967). <sup>8</sup> Л. Д. Невлевт, Т. Я. Карагодовт, М. А. Кознер, ЖЭТФ 62, 1681 (1972). <sup>9</sup> П. П. Теофилов, Поляризованная люминесценция атомов, молекул и кристаллов. Физматгиз, М., 1959. <sup>10</sup> C. G. Carrington, D. N. Stacey, J. Cooper, J. Phys. B: Atom Molec. Phys. 6, 417 (1973). <sup>11</sup> А. М. Божь-Бруевич, В. А. Ходовой — УФН, 93, 71 (1967).

УДК 629.844—550.34

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

Академик АН Армянской ССР А. Г. Назаров

К подбору векторов смещений грунта при  
 сильных землетрясениях

(Представлено 10/VI 1975)

Интенсивность землетрясений для данного пункта полностью характеризуется набором (совокупностью, ансамблем) вероятных векторов смещений грунта в функции от времени (<sup>1,2</sup>).

Основным базисом для подбора подходящих векторов смещений (скажем, всех трех компонентов ускорения почвы, короче—акселерограмм) должен служить всемирный каталог и альбом сильных землетрясений. Из них подбираются записи землетрясений, родственных в сеймотектоническом и инженерно-геологическом отношении рассматриваемому пункту.

Существенную помощь процессу подбора может оказать регистрация слабых и слабейших землетрясений в окрестности изучаемого пункта. Такого рода инструментальные данные в основном полезны для проведения сравнения колебаний грунта в различных точках в зависимости от локальных геологических условий, в том числе и от рельефа местности, также оказывающего существенное влияние на характеристики вектора смещения. Это позволит широко пользоваться специальными операторами для переработки сейсмической информации с учетом реальных особенностей окрестности рассматриваемого пункта. Этот прием уже применяется при решении задач сейсмического микрорайонирования. В этом направлении наиболее заслуживающим внимания, с нашей точки зрения, является способ Ш. Г. Напетваридзе (<sup>3</sup>).

Для получения вспомогательных количественных данных землетрясений можно использовать следующие пути.

1. Организация сейсмометрических наблюдений за афтершоками.

Уже сейчас имеются существенные достижения в организации временных сейсмических станций в окрестности очага, где произошло сильное землетрясение. С помощью таких станций получен ценный материал (<sup>4</sup>).

Теперь речь идет о значительном территориальном расширении такого рода наблюдений путем перехода к наблюдениям не только в

окрестности местоположения очага, но и на достаточном удалении от него, в окрестностях крупных населенных пунктов и промышленных объектов.

2. Представляется возможной разработка эффективного скоростного метода получения необходимой сравнительной сейсмической информации по весьма слабым землетрясениям из близких и отдаленных очагов с помощью сейсмической станции, аналогичной станции «Земля», но с обеспечением получения неискаженных записей землетрясений. Это—тяжелая техническая задача, но при удачном ее разрешении мы получим удобное средство исследования.

С помощью такого рода станций можно осуществлять записи слабых и слабейших землетрясений, возникших в интересующих нас очагах, потенциально опасных для рассматриваемого пункта. Возможно также осуществлять записи землетрясений, возникших в удаленных очагах, сейсмические лучи от которых проходят в окрестности интересующих нас очагов и выходят на поверхность в изучаемом пункте.

Эти данные позволяют установить фильтрующие свойства горных пород на пути к рассматриваемому пункту. Если расположить несколько датчиков в рассматриваемом пункте, а также в его окрестности, то возможно будет установить закономерности трансформации сейсмических волн в зависимости от локальных геологических условий.

3. Использование записей колебаний грунта, возбужденных взрывами. В этом направлении осуществлены многочисленные работы для изучения сейсмических свойств грунтов, а также поведения сооружений и их моделей.

В последнее время вплотную подходят к задаче, поставленной Г. А. Гамбурцевым—осуществить сейсмическое микрорайонирование с помощью отдаленных, достаточно мощных взрывов.

Здесь мы не останавливаемся на математической стороне рассмотренной проблемы. Отметим лишь, что основным методом исследования является сопоставление полученных относительных спектров слабых и сильных землетрясений для подбора наиболее подходящих акселерограмм для опорного пункта рассматриваемой площадки (сейсмическое районирование) и других характерных пунктов этой же площадки (сейсмическое микрорайонирование).

Кинематика землетрясения для фиксированного пункта на поверхности земли полностью определяется тремя элементами: структурой очага землетрясения, геологической структурой вдоль траектории сейсмического луча на пути к рассматриваемому пункту и локальными геологическими условиями на месте выхода сейсмического луча.

Часть энергии землетрясения, связанная с раздроблением горных пород и квазипластическими деформациями, практически остается полностью сконцентрированной в зоне очага и ее окрестности. Это объясняется тем, что: во-первых, за пределы элементарного объема горных пород, подвергнутого деформациям за пределы упругости, могут просочиться только потенциальная и кинетическая энергии, во-вто-

рых, эти энергии распределяются, по мере удаления от очага, в большем объеме горных пород, вследствие чего напряжения по мере удаления от очага быстро падают<sup>(5)</sup>. Это подтверждается разрушительными землетрясениями с неглубокими очагами, изосейсты которых имеют крутой градиент в зоне очага. По-видимому, практически очаг землетрясения можно отождествить с зоной остаточных деформаций.

Таким образом, на протяжении всего сейсмического луча, независимо от мощности землетрясения, от очага до поверхности имеют место в основном упругие деформации (может быть за редкими исключениями). По существу на этом представлении построены современные методы сейсмологии и сейсморазведки. Поэтому по характеристикам слабых землетрясений, распространяющихся вдоль сейсмического луча, можно вынести суждение о характеристиках сильных землетрясений, распространяющихся вдоль того же сейсмического луча. Успешно можно также использовать мощный аппарат современной теории линейных операторов в разнообразных вариациях для получения дополнительной информации. При приближении упругих сейсмических волн к поверхности Земли могут представиться два случая. При прочных скальных породах волны остаются упругими до самого их выхода на поверхность Земли, а при слабых или трещиноватых скальных породах и мягких грунтах могут вновь возникнуть неупругие деформации. Это имеет место для самого верхнего слоя Земли толщиной в несколько десятков метров в зависимости от рода грунта. Реологические свойства этой толщи грунта могут быть поэтому установлены лабораторными или полевыми испытаниями.

Поэтому для оценки кинематических характеристик землетрясений на поверхности Земли можно широко использовать фактические данные механики грунтов с привлечением теории колебаний сплошных сред с соответствующими модификациями.

Неясной остается роль структуры очагов в формировании кинематических характеристик на поверхности Земли. Здесь могут быть использованы невыгоднейшие характеристики очагов, взятые из альбома сильных землетрясений. Некоторые, даже существенные уточнения могут быть получены с помощью сеймотектонических данных о структуре очагов, имевших место в прошлом в рассматриваемом регионе. Это позволит сузить круг допустимых акселерограмм из альбома сильных землетрясений.

Проблема сейсмостойкости в самой строгой постановке может быть разрешена, если к верхнему пласту грунтов присоединить интересующее нас сооружение, и эту систему рассматривать под воздействием сейсмических волн. Рекогносцировочные оценки в этом направлении дал А. П. Синицын<sup>(6)</sup>.

В настоящей заметке изложен один из возможных вариантов решения рассматриваемой задачи.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Институт геофизики и инженерной сейсмологии  
Академии наук Армянской ССР

Ուժեղ երկրաշարժերի ժամանակ գետնի տեղափոխումների վեկտորների  
ընտրման մասին

Հեղինակն ելնում է գետնի տեղափոխումների, որպես ժամանակակից ֆունկցիա, վեկտորների հավանական հավաքածուի օգնությամբ երկրաշարժերի ինտենսիվության դեահատումից: Հարմար տեղափոխումների վեկտորների (ակսելերոգրամների) ընտրման համար հիմնական քազիս պիտք է ծառայի ուժեղ երկրաշարժերի համաշխարհային կատալոգը և այրոմը: Այդ ընտրման ընթացքին էական օգնություն կարող է ցույց տալ թույլ երկրաշարժերի և սեյսմոլոգիայի հիմնական տատանումների գործիքային գրանցումը:

Հիմնական նպատակը դա սեյսմիկական սանդղակի միջոցով երկրաշարժերի ինտենսիվության դեահատումից, ժամանակակից հասկացողությամբ սեյսմիկական շրջանցումից և միկրոշրջանցումից հրաժարվելն է:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> А. Г. Назаров, С. С. Дарбинян, Основы количественного определения интенсивности сильных землетрясений, Изд. АН Армянской ССР, Ереван, 1974. <sup>2</sup> А. Г. Назаров, ДАН Арм. ССР, т. LVIII, № 1 (1974), т. LX, № 2 (1975). <sup>3</sup> Ш. Г. Напетваридзе, Некоторые задачи инженерной сейсмологии, Изд. Мецниереба, Тбилиси, 1973. <sup>4</sup> Д. Н. Рустамович, Колебания поверхности земли в эпикентральных зонах сильных землетрясений, Изд. «Наука», М., 1971. <sup>5</sup> Е. Ф. Саваренский, Сейсмические волны, Изд. «Недра», М., 1972. <sup>6</sup> А. П. Силицын, Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки, Стройиздат, М., 1967.

УДК 547.12.333.554

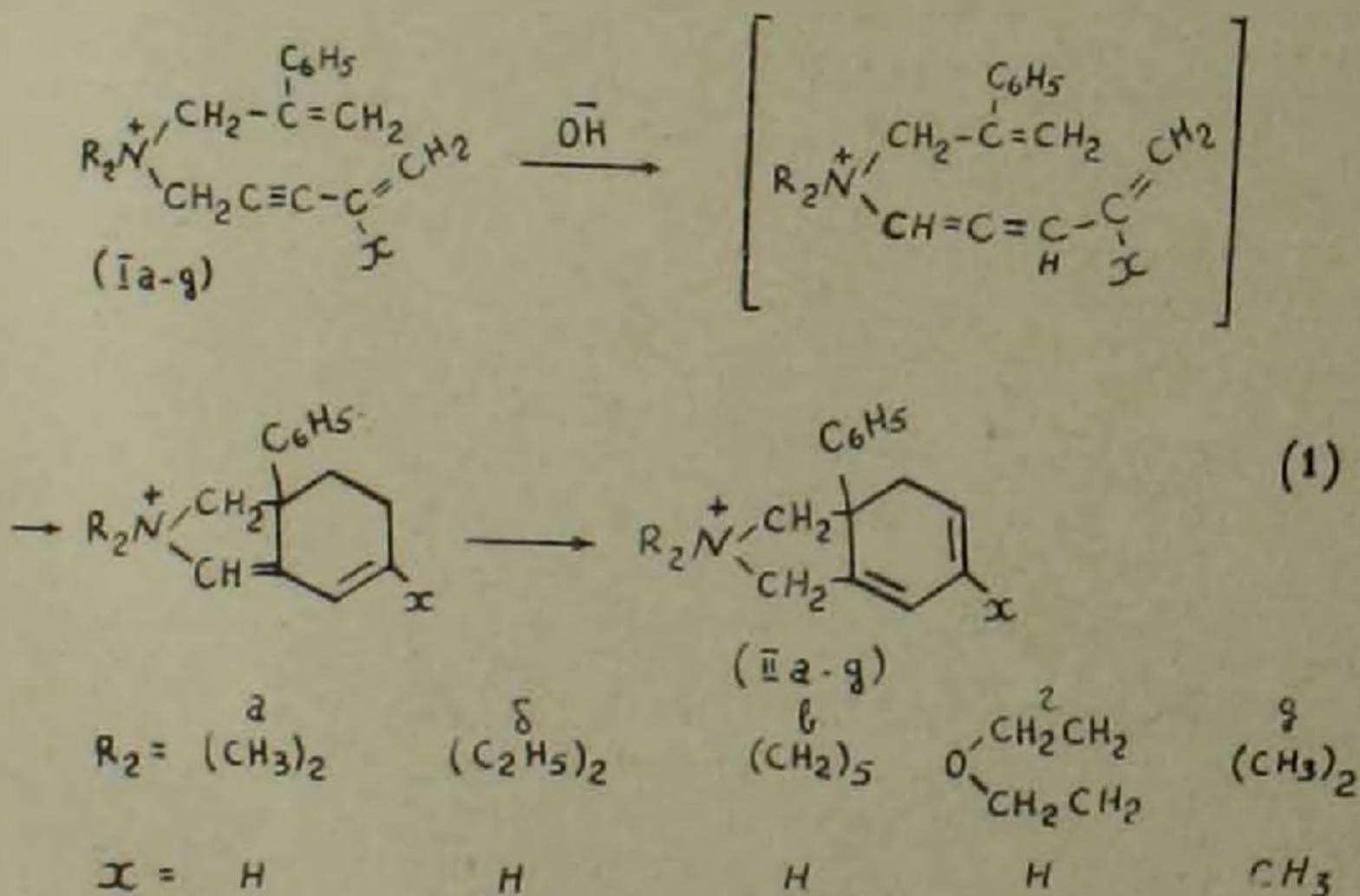
ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабаян,  
 К. Ц. Тагмазян, Л. П. Карапетян, А. В. Арутюнян

Внутримолекулярные перегруппировки аммоний иллада,  
 образующегося в результате расщепления солей  
 4- $\alpha$ -замещенного -4 $\alpha$ , 4-дигидроиндолина

(Представлено 4/IV 1975)

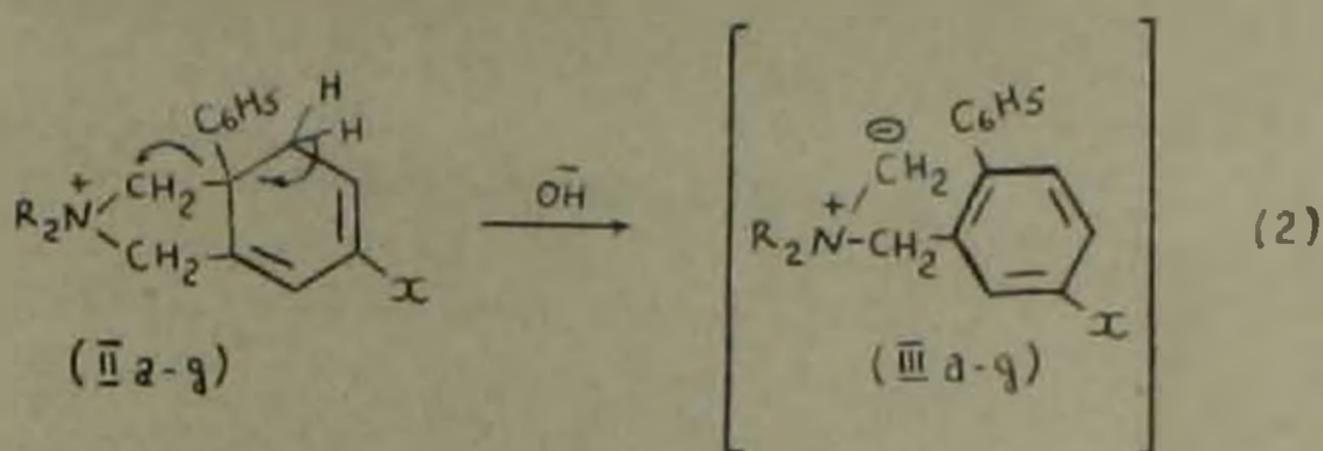
Настоящее исследование посвящено катализируемой основанием внутримолекулярной циклизации солей диалкил(2-фенилаллил)-(3-алкенилпропаргил)аммония (I а-д) в соли 2,2-диалкил-4- $\alpha$ -фенилдигидроиндолина (II а-д) (схема 1).



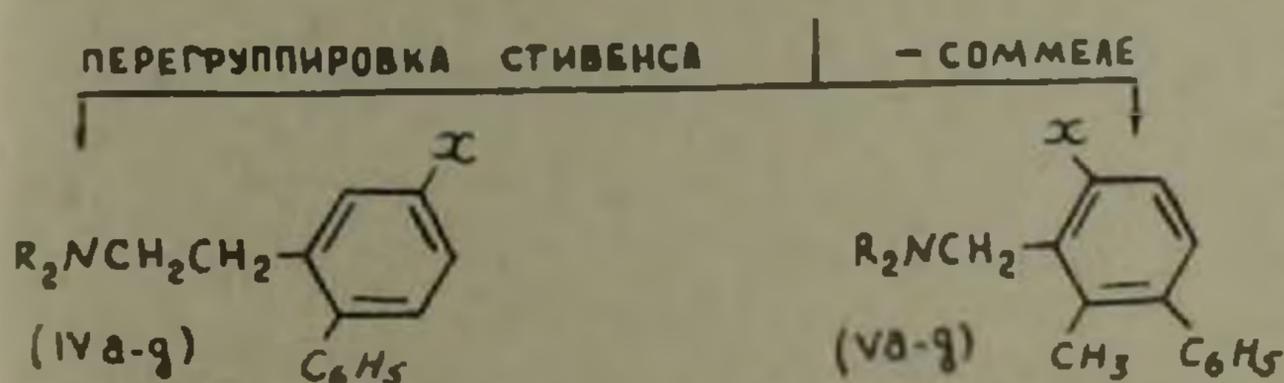
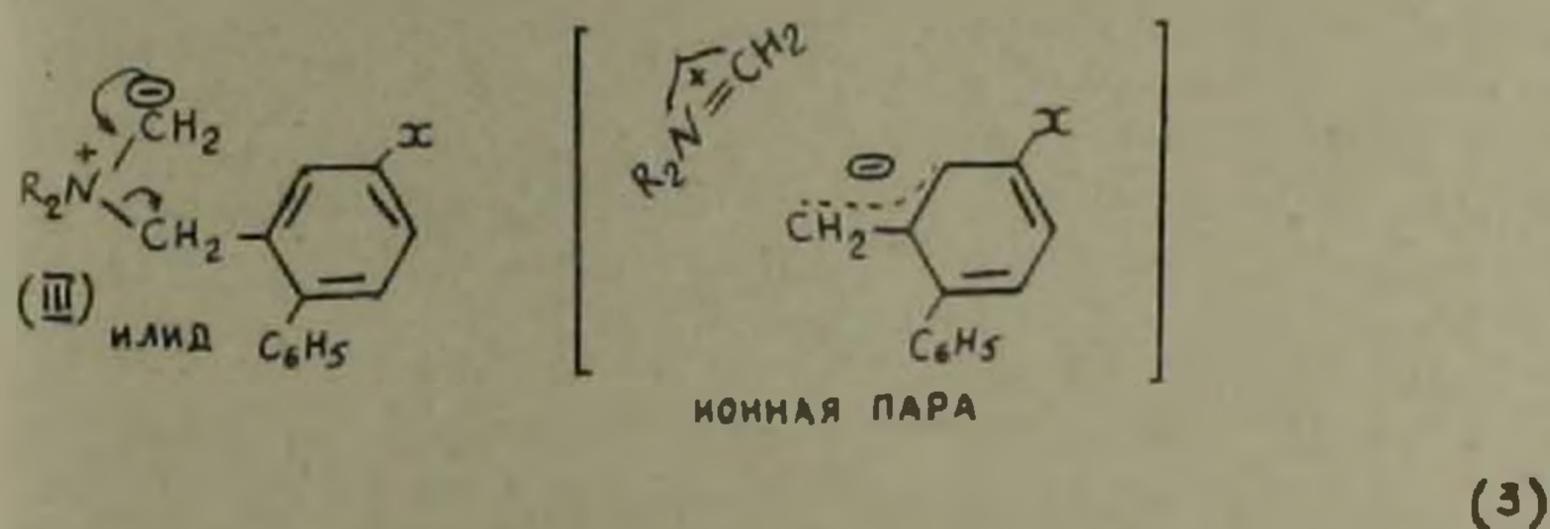
и водно-щелочному расщеплению последних.

Циклизация солей Ia-д в отличие от аналогично построенных солей, содержащих металлильную группу (1,2) вместо 2-фенилаллильной, происходит значительно медленнее, требуется многочасовое нагревание при 40—50° в водном растворе в присутствии каталитического количества щелочи. Реакция происходит однозначно, выходы количественны. Исходные соли и продукты их циклизации приведены в табл. 1.

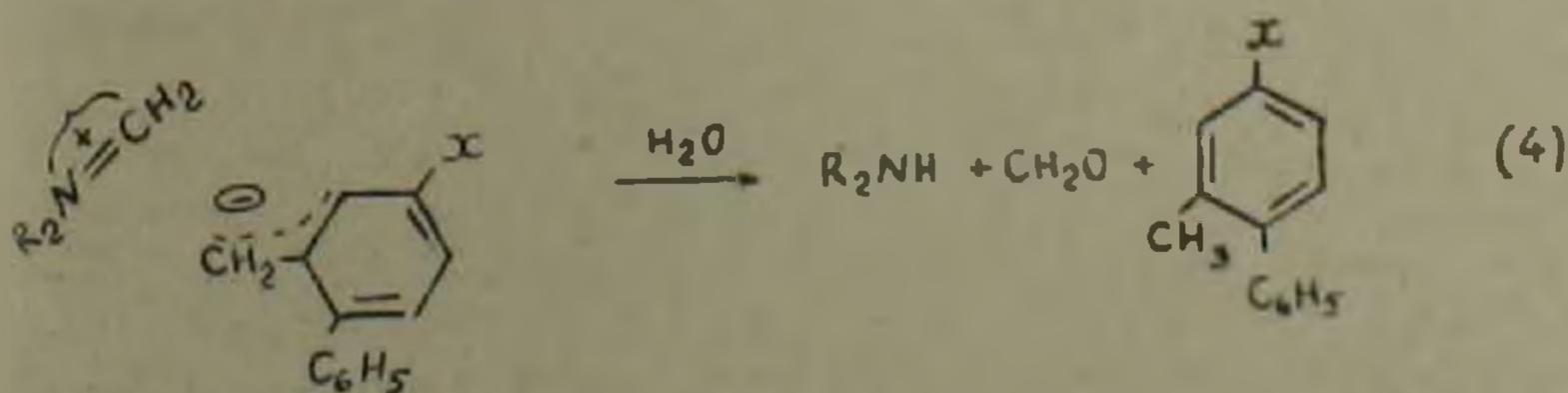
Строение продукта циклизации, аналогично ранее изученным солям диалкил 4-метилдигидроизоиндолония, исключает возможность ароматизации через отщепление. Под действием водной щелочи происходит ароматизация в результате отщепления протона из 4-положения 4,1-дигидроизоиндолониевого кольца и разрыва С-С связи с образованием аммоний ильда III (схема 2)



В результате дальнейших перегруппировок III а-д образуются высококипящие аммониевые продукты водно-щелочного расщепления (IV а-д и V а-д) согласно схеме 3



Вполне естественно в водно-щелочной среде наряду с продуктами перегруппировок образуются и продукты гидролиза ионной пары — вторичный амин, формальдегид и соответствующий ароматический углеводород согласно схеме 4.



Результаты водно-щелочного расщепления продуктов циклизации (II а-д) приведены в таблице 2. Следует отметить, что расщепление II а-д также происходит труднее, чем в случае солей 2,2-диалкил-4-метилдигидроизоиндолиния (2). Таким образом, замена метильной группы на фенильную группу отрицательно сказывается как на процессе циклизации, так и на расщеплении продукта циклизации, однако, ход реакции существенно не изменяется.

Таблица 1  
Результаты каталитической циклизации солей I а-д в соли II а-д

Исходная соль	R <sub>2</sub>	T, °C	Продукт циклизации	T, °C
$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_5 \\   \\ \text{R}_2\text{N}^+ - \text{CH}_2 - \text{C} = \text{CH}_2 \\   \quad \quad   \\ \text{CH}_3 \quad \quad \text{CH}_3 \\   \\ \text{Br}^- \\   \\ \text{CH}_2 - \text{C} = \text{C} - \text{CH} \\   \\ \text{CH}_3 \end{array}$	$\begin{array}{l} (\text{CH}_3)_2 \\ (\text{C}_2\text{H}_5)_2 \\ (\text{CH}_3)_3 \\ \text{CH}_2\text{CH}_3 \\ \text{CH}_2\text{CH}_3 \end{array}$	148–150 134–137 44–45° 114–115°	$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_5 \\   \\ \text{R}_2\text{N}^+ - \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_4 \\   \\ \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_4 \\   \\ \text{Br}^- \end{array}$	190–192 180–184 50–55° 68–70°
$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_5 \\   \\ (\text{CH}_3)_2\text{N}^+ - \text{CH}_2 - \text{C} = \text{CH}_2 \\   \quad \quad   \\ \text{CH}_3 \quad \quad \text{CH}_3 \\   \\ \text{Br}^- \\   \\ \text{CH}_2 - \text{C} = \text{C} - \text{C} \\   \quad \quad   \\ \text{CH}_3 \quad \quad \text{CH}_3 \end{array}$		198–200	$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_5 \\   \\ (\text{CH}_3)_2\text{N}^+ - \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_4 \\   \\ \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_4 \\   \\ \text{Br}^- \\   \\ \text{CH}_3 \end{array}$	275–280

Таблица 2  
Результаты водно-щелочного расщепления солей II а-д

Исходные соли	Продукты расщепления	Выходы, %				
		а	б	в	г	д
$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_5 \\   \\ \text{R}_2\text{N}^+ - \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_4 \\   \\ \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_4 \\   \\ \text{Br}^- \end{array}$	$\text{R}_2\text{N} - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_4 - \text{x}$	20	14	20	14	18
	$\text{R}_2\text{N} - \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_3(\text{CH}_3) - \text{x}$	35	32	35	22	34
	$\text{R}_2\text{N} - \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_4 - \text{x}$	35	15	23	33	30
	$\text{R}_2\text{N} - \text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_3(\text{CH}_3) - \text{x}$	30	10	20	40	26
	$\text{CH}_2\text{O} \\ \text{R}_2\text{NH}$	30	10	17	30	21

\* Гигроскопично

Институт органической химии  
Академии наук Армянской ССР

42 — անդակաված 47, 4 — դինիդրոլիզոլինդոլինիումային օղակի  
արոմատացմամբ ստացված ամոնիումային իլիդի ներմուկուլային  
վերախմբավորման ռեակցիաներ

Ուսումնասիրվել է դիալկիլ (2 — ֆենիլալիլ) (3 — ալկենիլպրոպարգիլ)  
ամոնիումային աղերի (Ia — 1) ներմուկուլային օղակավորումը: Ցույց է  
տրվել, որ ի տարբերություն մեթալիլային խումբ պարունակող աղերի, այս  
դեպքում օղակավորման համար պահանջվում է առավել հրկարստե տաքա-  
ցում 40—50 °C-ում:

Օղակավորումից ստացված Ia — 1 ամոնիակային աղերի կառուցվածքը  
այս դեպքում էլ բացատրվում է արոմատացումը պոկմամբ: Ստացված արդյունքները  
(տղ. 2) համապատասխանում են նախկինում արված ենթադրությանը, որի  
համաձայն արոմատացումը կատարվում է ամոնիումիլիդի առաջացումով:  
Հարկ է նշել, որ Ia — 1 աղերի ճեղքումը նույնպես կատարվում է ավելի  
դժվար, քան համապատասխան 2, 2 — դիալկիլ — 47 — մեթիլդինիդրոլին-  
դոլինիումային աղերին:

Փաստորեն մեթիլ խմբի փոխարինումը ֆենիլով բացասաբար է անդրա-  
դառնում ինչպես օղակավորման, այնպես և վերջինից ստացված արդասի-  
րների ճեղքման փուլի վրա:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Ա. Դ. Բաբայն, Կ. Ս. Կարապետյան և Գ. Դ. Բաբայն, Արմ. քիմ. թ., 19, 9, 685 (1966).  
<sup>2</sup> Ա. Դ. Բաբայն, Կ. Ս. Կարապետյան, Ն. Ս. Կորապետյան, ԺԱՊ Արմ. ՍՍՀ, տ. 60, № 1 (1975).

УДК 577.3

БИОФИЗИКА

А. Р. Мовсесян, Н. В. Бай, С. С. Оганесян

**Структурная стабильность малатдегидрогеназы  
 пшеницы и ее изоферментов**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 14/III 1975)

В последние годы установлено, что для большинства олигомерных ферментов характерна тетрамерная или димерная структура (1,2). К ним относится также малатдегидрогеназа (L-малат-НАД-оксидоредуктаза-1.1.1.37) растений (МДГ), состоящая из изоферментов с молекулярным весом 275 000 дальтон (3). Тетрамерную структуру МДГ можно считать термодинамически достаточно стабильной, однако гетерогенность субъединиц определяет неодинаковую структурную устойчивость отдельных изоферментов. Этот вопрос не исследован в достаточной степени для МДГ различных видов растений и их мутантных форм. Нами было предпринято исследование стабильности МДГ пшеницы сорта (T. aestivum) «Безостая-1» и ее изоферментов в растворе мочевины возрастающих концентраций. Мочевина является интересным модификатором молекулярной структуры белков в силу своей способности вызывать конформационные перестройки макромолекулы и непосредственно влиять на микроокружение хромофорных остатков (4), что возможно выявить обычными оптическими методами. С этой целью исследовалась зависимость МДГ и ее изоферментов в присутствии 0,1—6,0 М мочевины по изменению оптической плотности в УФ области спектра и интенсивности люминесценции.

Выделение и очистку МДГ из пшеницы проводили согласно (5). Белки из раствора осаждали, используя 95% насыщенное сернокислым аммонием (6). После обессоливания гель-фильтрацией через колонку ДЭАЭ-сефадекса Г-75, уравновешенную 0,01 М фосфатным буфером pH 7,6, содержащим  $10^{-2}$  М 2-меркаптоэтанола, белки фракционировали на колонке, заполненной ДЭАЭ-целлюлозой, уравновешенной 0,01 М фосфатным буфером, с  $10^{-2}$  М 2-меркаптоэтанолом при pH 7,6.

Элюцию белка проводили ступенчатым градиентом 0—0,4 М NaCl. Концентрацию белка определяли методом Кьельдаля.

Оптическую плотность в УФ области спектра регистрировали на спектрофотометре «Спектромом-202». Величина соотношения оптической плотности при двух длинах волны  $E_{270}/E_{280}$  растворов МДГ составля-

ла 1,6, что указывает на незначительное содержание пуриновых кислот в препаратах белка.

Интенсивность и спектр люминесценции регистрировали на спектрофлуорографе «Фэрранд-МК-1» (США). Измерения проводили в кварцевой кювете (1 см) с 0,01 М фосфатным буфером рН 7,6. Длина волны возбуждающего света 280 нм. Все измерения проводили при комнатной температуре.

Исследование светопоглощения колоночных фракций МДГ, элюированных ступенчатым градиентом в области 0,02–0,4 М NaCl выявило сходство абсорбционного спектра с выраженным максимумом поглощения в области 280 нм (рис. 1).

В присутствии возрастающих концентраций мочевины в среде происходит изменение величины светопоглощения в области 280 нм во всех колоночных фракциях МДГ без сдвига максимума (рис. 2). В

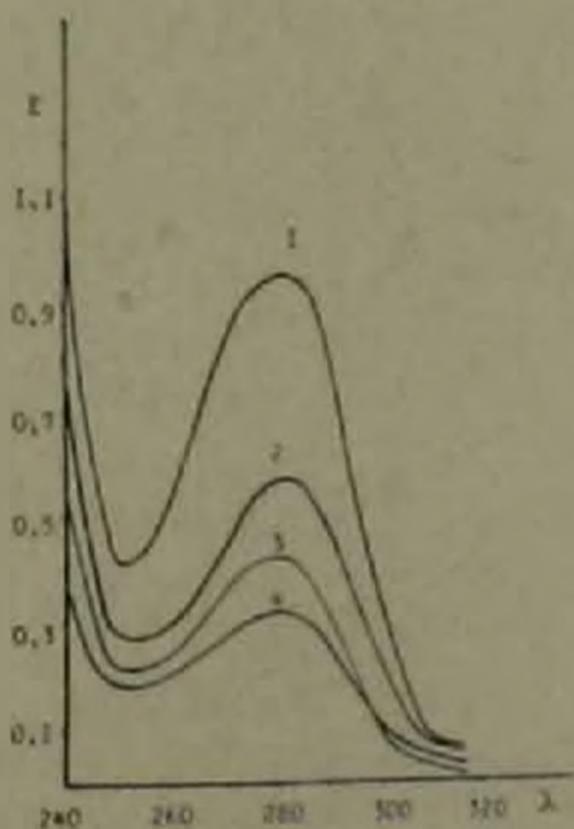


Рис. 1. Спектры поглощения колоночных фракций малатдегидрогеназы, элюируемых разными концентрациями NaCl. 0,01 М фосфатный буфер рН 7,6.  $10^{-2}$  М 2-меркаптоэтанол. 1—0,4 М NaCl; 2—0,2 М NaCl; 3—0,1 М NaCl; 4—0,2 М NaCl

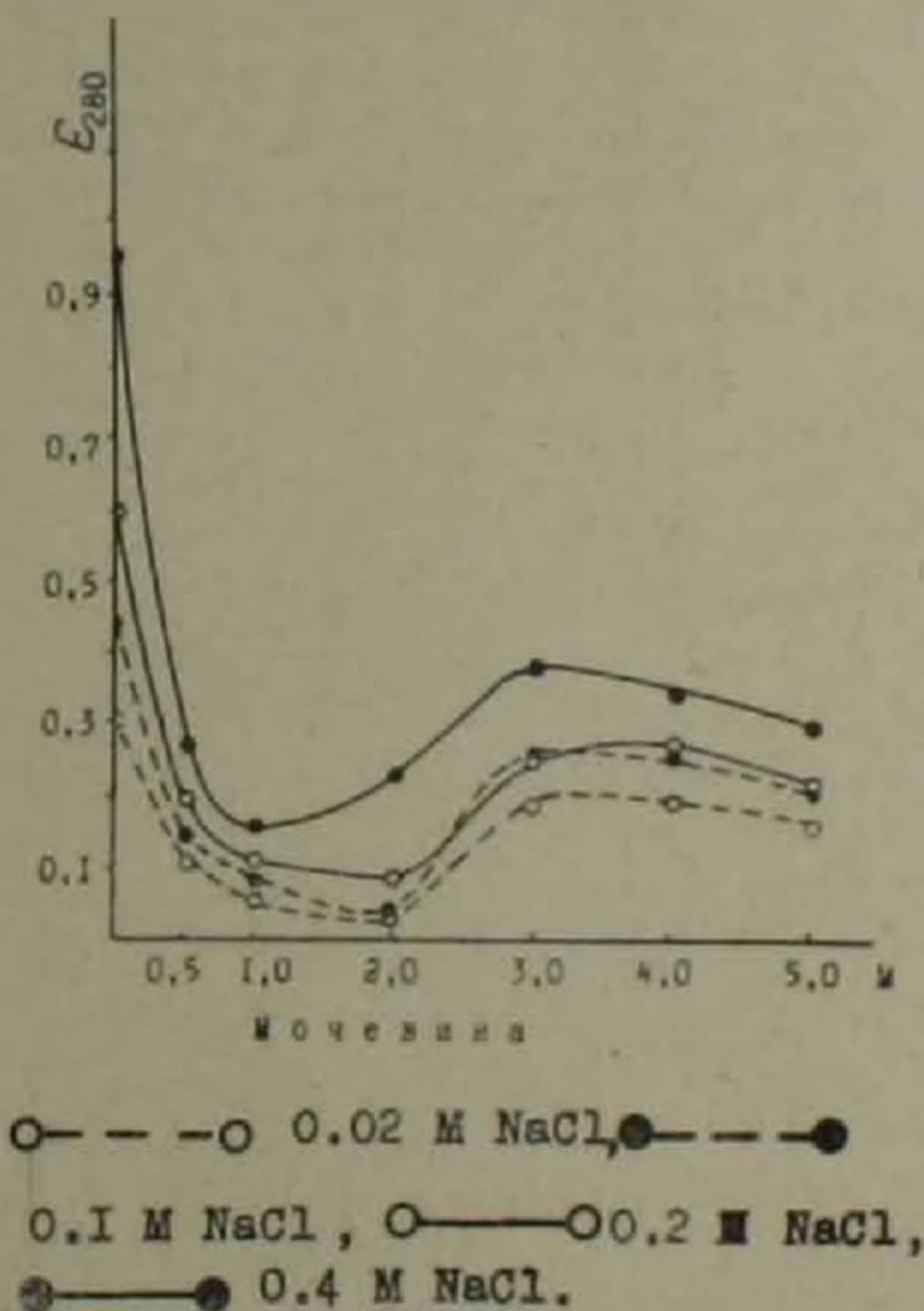


Рис. 2. Зависимость величины максимального светопоглощения колоночных фракций МДГ от концентраций мочевины

присутствии малых концентраций мочевины (0,5–2,0 М) имеет место снижение величины светопоглощения в области максимума, очевидно, из-за локальных изменений при складывании подвижных полипептид-

ных цепей под влиянием органического растворителя. Мочевина в концентрации выше 2,0 М вызывает некоторое повышение оптической плотности белка. Этот эффект можно объяснить распадом тетрамера МДГ на отдельные мономеры с демаскированием соответствующих хромофорных групп, хотя нельзя исключить также деспирализацию макромолекулы фермента в некоторой степени, т. е. частичное его «плавление» под влиянием достаточно высокой концентрации мочевины. Согласно (2), уже в 1,0 М мочевины тетрамер МДГ некоторых растительных организмов распадается на мономеры.

Мочевина как денатурирующий агент в данном случае может действовать двумя способами: при низких концентрациях вызывать разрыв слабых полярных и водородных связей в подвижных участках на уровне четвертичной структуры МДГ и, тем самым, индуцировать локальные сдвиги в малостабилизированных областях макромолекулы; при высоких концентрациях расщеплять тетрамер с развалом четвертичной структуры макромолекулы и с дополнительными изменениями в третичной и вторичной структуре отдельных мономеров, вследствие ослабления гидрофобных взаимодействий. Таким образом, эффект мочевины в зависимости от концентрации можно использовать как тест для исследования стабильности структуры тетрамера МДГ или отдельных мономеров с целью выявления видовых различий, а также мутационных изменений.

Результаты измерения активности препарата МДГ выявили четкую зависимость от концентрации мочевины в среде. Из рис. 3 видно, что сдвиги, вызванные мочевиной в малостабилизированных участках препятствуют аллостерическому кооперативному переходу макромолекулы в новое состояние под влиянием субстрата, что обусловлено небольшими модификациями структуры макромолекулы.

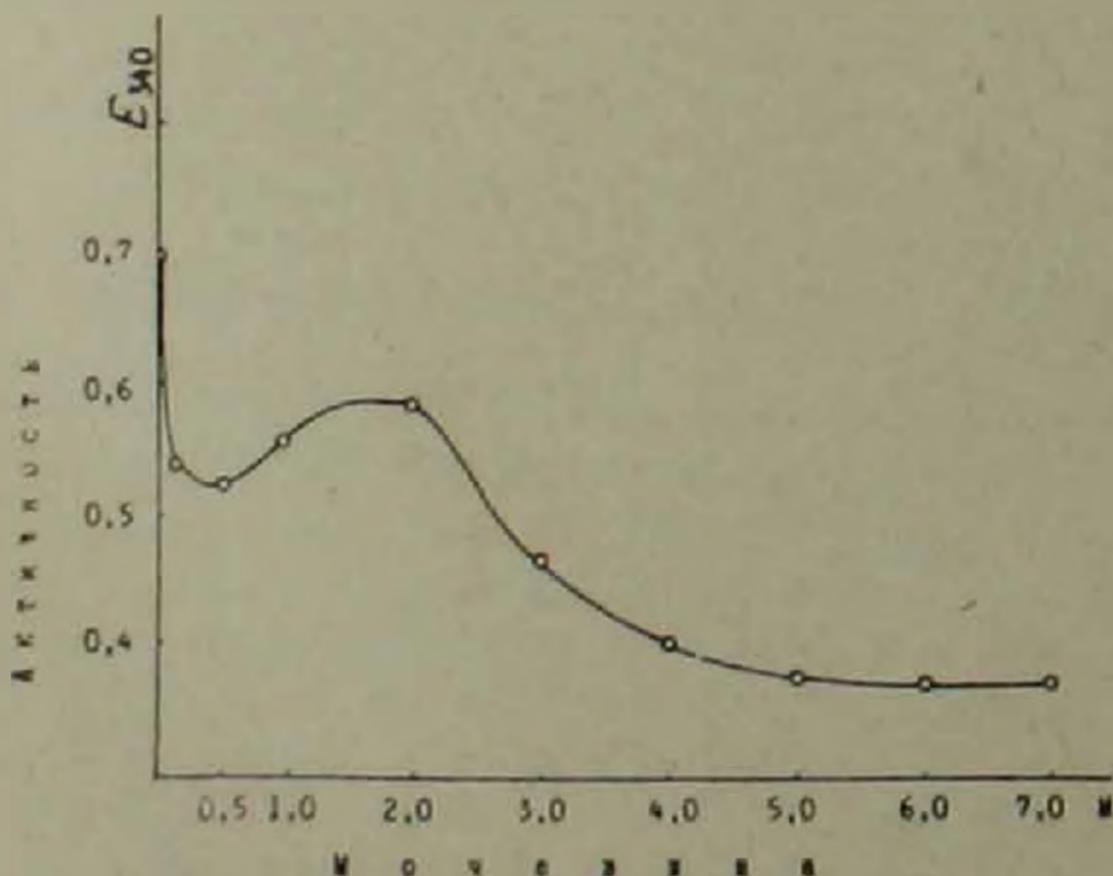


Рис. 3. Зависимость величины каталитической активности смеси колоночных фракций МДГ от возрастающих концентраций мочевины. Буфер фосфатный рН 7,6, 01 М

Мочевина в концентрациях выше 4,0 М вызывает дальнейшее снижение активности фермента, которое не изменяется при повышении ее концентрации выше 5,0 М. Такой тип торможения активности до определенного стабильного уровня, вероятно, объясняется развалом тетрамерной структуры белка, когда минимальная активность обеспечивается раздельным функционированием активных центров на отдельных мономерах, неспособных взаимодействовать друг с другом. Следовательно, результаты исследования влияния мочевины на активность фермента вполне согласуются с результатами исследования ее влияния на кривые оптической плотности растворов МДГ в УФ области.

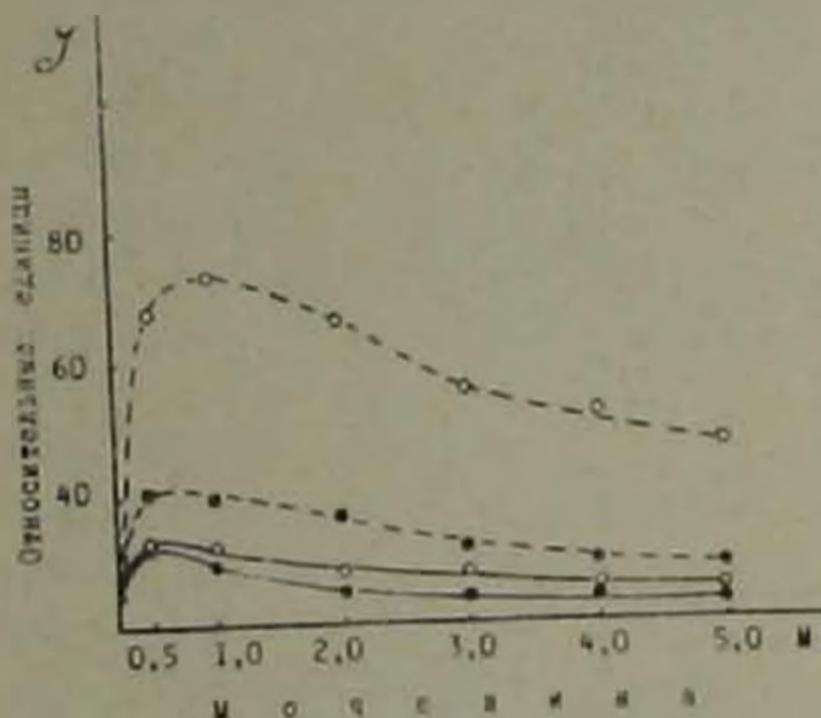


Рис. 4. Зависимость максимальной величины интенсивности люминесценции растворов МДГ (в относительных единицах) от возрастающих концентраций мочевины. Измерение эмиссии в области 335—340 нм. Обозначения те же, что на рис. 2

Возможность появления локальных изменений на уровне четвертичной структуры фермента в присутствии низких концентраций мочевины обнаружена также при исследовании спектров и интенсивности люминесценции препаратов МДГ. Как видно из экспериментов растворы МДГ пшеницы характеризуются спектром люминесценции с максимумом квантовой эмиссии в области 335—340 нм, обусловленном возбуждением остатков тирозина и триптофана в молекуле белка. Важно, что существенных различий в спектре квантовой эмиссии отдельных колоночных фракций не удалось обнаружить. Из рис. 4 видно, что интенсивность люминесценции МДГ в присутствии низких концентраций мочевины повышается. Это увеличение неравномерно для различных колоночных фракций. Наибольшее изменение интенсивности люминесценции наблюдается в колоночной фракции, элюируемой 0,2 М NaCl.

С повышением концентрации мочевины одновременно выявляется сдвиг максимума эмиссии в длинноволновую область (350 нм). Таким образом, в присутствии высоких концентраций мочевины увеличивается доступность триптофановых остатков полярному растворителю. При этом происходит экранировка хромофоров другими частями молекулы, иначе говоря, различные триптофановые остатки оказываются в среде

с разной полярностью. Экранировка уменьшает полярность и спектр эмиссии белков сдвигается в коротковолновую область, по сравнению со спектром индола и триптофана (<sup>8</sup>-<sup>10</sup>) в то время, как мочевины, увеличивая полярность среды, вызывает сдвиг максимума люминесценции вправо. Причем, нужно отметить, что для колоночных фракций, величина сдвига максимума в длинноволновую область спектра различна. Для колоночной фракции 0,1 М NaCl, сдвиг максимума не обнаружен. Самое сильное смещение максимума люминесценции наблюдается для колоночной фракции 0,4 М NaCl.

Сравнение результатов измерения величины светопоглощения, ферментативной активности и люминесценции растворов МДГ позволило найти определенную зависимость между изменениями в структуре тетрамера фермента и его активностью в зависимости от концентрации мочевины. Двухфазность кривых указывает на различную природу сил, стабилизирующих четвертичную структуру и структуру отдельных субъединиц. Стабильность тетрамера обеспечивается слабыми межмолекулярными взаимодействиями между субъединицами и небольшие влияния на этом уровне модифицирующего агента сильно снижают активность фермента. При разрушении тетрамера, отдельные субъединицы проявляют достаточно высокую стабильность ферментативной активности в присутствии больших концентраций мочевины, что, по-видимому, обеспечивается гидрофобными взаимодействиями. Обнаруживается также различная устойчивость структуры отдельных изоферментов к органическому растворителю. Таким образом, наблюдаемые различия стабильности смеси изоферментов МДГ к мочевины, обусловлены различным содержанием отдельных изоферментов, обладающих неодинаковой структурной стабильностью. Последнее служит тестом для оценки изоферментного состава МДГ, а также различий в молекулярной структуре отдельных мономеров.

С целью определения изменений в молекулярной гетерогенности МДГ в разных сортах и мутантах пшеницы нами предпринято сравнительное исследование структурной стабильности этого фермента, что является предметом наших последующих публикаций.

Институт экспериментальной биологии  
Академии наук Армянской ССР  
Институт кардиологии МЗ Армянской ССР

Ա. Ռ. ԽՈՎՈՐՅԱՆ, Ն. Վ. ՐԱՅ, Թ. Թ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Յոսէնի մալաոդէիդրոզենագի և երա իզոֆերմէնտների ստրուկտուրային կայունութիւնը

Ստումնասիրվել է Բեյոսատյա — 1 ցորենի մալաոդէիդրոզենագի (ՄԴԷ) իզոֆերմէնտների կայունութիւնը 0,1—6,0 մոլ. միզանյութի լուծույթում, որը զնահատվել է օպտիկական խտության ուլտրամանուշակագույն տիրույթ-

ում, ֆերմենտատիվ ակտիվության և յլումինեսցենցիայի սպեկտրի ինտենսիվության փոփոխություններով: Գտնվել է կասյ ֆերմենտի շորրորդային կառուցվածքի և նրա ակտիվության միջև՝ կապված միզանյութի լուծույթի կոնցենտրացիայից: Տեսրամեր ֆերմենտի կայունությունը պայմանավորված է ՄՂՀ-ի ենթամիավորների միջև թույլ միջմոլեկուլյար փոխազդեցությամբ: Միզանյութի ցածր կոնցենտրացիաների ազդեցության պայմաններում արգելակվում է ֆերմենտի ակտիվությունը 30%-ով, իսկ առանձին ենթամիավորները ցուցաբերում են բավականին մեծ կայունություն՝ նույնիսկ միզանյութի բարձր կոնցենտրացիաների ներկայությամբ, որը ըստ երևույթին պայմանավորված է միջմոլեկուլյար իդրոֆոր փոխազդեցությամբ: Հայտնաբերվել է, որ առանձին իդոֆերմենտների կառուցվածքային կայունությունը տարբեր է:

Այսպիսով, միզանյութի նկատմամբ ՄՂՀ-ի նկատվող կայունության տարբերությունները պայմանավորված են առանձին իդոֆերմենտների քանակական հարաբերությամբ: Վերջինս կարող է հանդիսանալ ուղենիշ ՄՂՀ-ի իդոֆերմենտային կազմի գնահատման, ինչպես նաև առանձին մոնոմերների մոլեկուլային կառուցվածքի տարբերության բնորոշման համար:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Klotz Darnall, Science, 166, 126, 1969. <sup>2</sup> J. H. Wilkinson Isoenzymes. London: E. F. N. Spon. Ltd, 1965. <sup>3</sup> H. Edelhoch, R. F. Steiner J. Biol. Chem., 238, 3, 931—938, 1963. <sup>4</sup> R. F. Steiner, H. Edelhoch Biochim. Biophys. Acta, 66, 3, 341—355, 1963. <sup>5</sup> В. Л. Кретович, З. С. Броковичкая, Т. Н. Курякина, ДАН СССР, 152, 1247 (1967). <sup>6</sup> G. K. Honold, M. A. Farkas, Stahmann, Cereal Chem., 45, 5, 17, 1966. <sup>7</sup> З. С. Броковичкая, В. Л. Кретович, ДАН СССР, т. 180, №6, 1485 (1968). <sup>8</sup> З. С. Броковичкая, В. П. Горетов, «Прикладная биохимия и микробиология» № 3, 707, 1967. <sup>9</sup> H. Wilham, D. Racusen, Canad. J. Bot., 46, 5, 719—720 (1968). <sup>10</sup> P. W. Cowgill Arch Biochem. Biophys., 104, 1, 81—92 (1963). <sup>11</sup> H. Edelhoch, R. F. Steiner 1964. In "Electronic Aspects of Biochemistry", N. Y., London, 7—22, 1964. <sup>12</sup> В. П. Бобровиц, С. В. Конев, ДАН СССР, 155, 197—200 (1964). <sup>13</sup> В. П. Бобровиц, С. В. Конев, 1965. ДАН БССР, 9, 2, 118—1217 (1965).

УДК 577.1.7

БИОХИМИЯ

Член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Галоян,  
 Р. М. Срапюнян, Ф. М. Саакян, С. М. Галоян

**Влияние соматостатина на активность пептидил-пептид гидролаз  
 (Е. С. 3.4.4) различных частей мозга**

(Представлено 10/X 1974)

Соматостатин—пептид, состоящий из 14 аминокислот следующей структуры:

Н-ала-гли-цис-лиз-асн-фен-фен-три-лиз-тре-фен-тре-сер-цис-ОН

Этот тетрадеканептид был изолирован из гипоталамуса животных и является ингибирующим фактором выделения гормона роста из аденогипофиза как *in vitro* так и *in vivo* (1,2).

Все больше накапливается данных, подтверждающих, что в гипоталамо-нейрогипофизарной системе образуется много гормонов полипептидной природы, оказывающих регулирующее влияние не только на функцию аденогипофиза (рилизинг-гормоны), но и висцеральных органов, в частности на деятельность сердца (К и С) (3-5).

В генезе полипептидных нейрогормонов мы придаем большое значение пептидил-пептид гидролазам мозга, которые действуя на различные белки-предшественники отщепляют от них соответствующий полипептид (6,7). Полипептидные нейрогормоны в свою очередь могут воздействовать на активность этих ферментов. Ранее мы определяли активность кислых и нейтральных протеаз, ди- и триаминопептидаз, моноацил- и дипептидаз ариламидаз в различных частях мозга и гипофиза (6,7). Целью настоящего исследования было изучение влияния соматостатина на активность пептидил-пептид гидролаз (кислые и нейтральные протеазы) в гипоталамусе, нейрогипофизе, коре и аденогипофизе.

Опыты были поставлены на белых крысах весом 150—200 г. Животных быстро декапитировали, в холодных условиях изолировали гипоталамическую часть, кору, аденогипофиз и нейрогипофиз. После очистки от сосудов их взвешивали и гомогенизировали стеклянным гомогенизатором (1:10) в течение 10 мин. Экстракцию ферментов производили в трис-НСI буфере, рН 7,6 (для нейтральных протеиназ) и в цитратном буфере, рН 3,2 (для кислых протеиназ). После центрифугирования в течение 15 мин (5000 об/мин) из надосадочной жидкост-

ти брали 0,1 мл для определения ферментативной активности. Субстратом для обоих ферментов служил денатурированный гемоглобин. Инкубацию проводили в течение 1 часа (37°). Ферментативную реакцию останавливали добавлением 18% трихлоруксусной кислоты. Высвобождающиеся в течение реакции NH<sub>2</sub>-группы определяли никгидрином, используя стандартную кривую глютаминовой кислоты (7). Соматостатин добавляли в каждую пробу в дозе 0,01—0,1 микрограмм.

Таблица 1

Изменение активности кислых протеаз (мкм/г свежей ткани) в гипоталамусе, коре, аденогипофизе и в нейрогипофизе у крыс при прямом добавлении соматостатина

Гипоталамус		Нейрогипофиз		Аденогипофиз		Кора	
контроль	опыт	контроль	опыт	контроль	опыт	контроль	опыт
6,7 ± 0,88	0,6 ± 0,36	15 ± 2,04	0,6 ± 0,22	12,87 ± 0,01	1,7 ± 0,20	6,6 ± 0,90	1,16 ± 0,31
(5)		(6)	(5)	(5)	(4)	(5)	
	$P < 0,001$		$P < 0,001$		$P > 0,001$		$P > 0,001$

Как видно из табл. 1 активность кислой протеиназы наивысшая в нейрогипофизе и аденогипофизе и почти одинакова в коре и в гипоталамусе. Это можно объяснить, по-видимому, тем, что в нейрогипофизе с наибольшей интенсивностью происходит расщепление белков, различных предшественников гормонов. После инкубации фермента с соматостатином через час отмечается резкое понижение активности кислой протеазы во всех изученных частях мозга и в аденогипофизе. В нейрогипофизе активность этого фермента почти полностью ингибируется. Аналогичная картина наблюдается в гипоталамусе. Весьма отчетливо ингибируется активность фермента в аденогипофизе. Затем в коре головного мозга этот эффект почти одинаково повторяется при добавлении соматостатина как в дозе 0,01, так и в дозе 0,1 мкг в пробе. Таким образом, различные дозы соматостатина оказывают одинаковое ингибирующее влияние на активность кислой протеазы. Представляло интерес изучение нейтральной протеазы, ибо главным образом при нейтральных рН среды происходит образование физиологически активных пептидов от белков-предшественников. Как видно из табл. 2 наибольшая активность нейтральной протеазы имеется в аденогипофизе, затем в нейрогипофизе, коре и в гипоталамусе. Под влиянием соматостатина резко ингибируется активность нейтральной протеазы нейрогипофиза и аденогипофиза.

Таблица 2

Изменение активности нейтральных протеаз ( $\mu\text{мг}/\text{г}$  свежей ткани) в гипоталамусе, коре, аденогипофизе и в нейрогипофизе у крыс при прямом добавлении соматостатина

Гипоталамус		Нейрогипофиз		Аденогипофиз		Кора	
контроль	опыт	контроль	опыт	контроль	опыт	контроль	опыт
$4.94 \pm 0.37$	$2.08 \pm 0.17$	$8.3 \pm 0.66$	$0.58 \pm 0.65$	$9.25 \pm 0.87$	$0.68 \pm 0.53$	$7.3 \pm 0.71$	$1.5 \pm 0.09$
(5)	(5)	(5)	(6)	(6)	(7)	(6)	(5)
	$P < 0.001$		$P > 0.1001$		$P > 0.1001$		$P > 0.901$

В отличие от кислой протеазы, в гипоталамусе ингибируется около 40% нейтральной протеазы и в коре происходит торможение ее активности.

Следует отметить, что на активность нейтральной протеазы соматостатин действует ингибирующим образом в дозах 0,01 микрограмм.

Таким образом, соматостатин является мощным естественным ингибитором различных пептидил-пептид гидролаз разных отделов мозга и аденогипофиза. Это явление можно считать исключительно важным с точки зрения наличия регуляторных механизмов распада и вероятно биосинтеза белков и многих полипептидных гормонов самого мозга.

Наши данные показывают, что соматостатин обладает ингибирующим свойством и в отношении активности аминопептидаз.

Гомогенат крысы и субклеточные фракции содержат факторы, которые ингибируют очищенную кислую протениазу (активна при pH 3.2) и трипсин (активен при pH 7.6). Антитриптический фактор является термостабильным и недиализруемым началом, в небольшом количестве находится в ядре (но не является ни нуклеиновой кислотой, ни протамином и ни гистоном).

Экзогенными ингибиторами кислых протеаз является пепстатин — пентапептид бактериального происхождения (<sup>8</sup>).

В поджелудочной железе имеется вещество, которое также ингибирует трипсин. Этот фактор может оказать влияние и на активность кислой протеазы (<sup>9</sup>). Действие же пепстатина не является специфическим, так как последний оказывает влияние и на трипсин. Имеется ряд синтетических ингибиторов пептидил-пептид гидролаз, такие как 7-фенилпируват, индол-3-пируват и т. д. Таким образом, из естественных ингибиторов пептидил-пептид гидролаз в мозгу образуется только неизвестный фактор ядерного происхождения, сравнительно высокого молекулярного веса, неизвестной природы. Соматостатин является первым естественным ингибитором мозга гормонального значения, с известной химической структурой.

Институт биохимии  
Академии наук Армянской ССР

Սոմատոսոտատինի ազդեցությունը պեպտիդիլ-պեպտիլ հիդրոլազայի  
ակտիվության վրա ուղեղի եվ հիպոֆիզի տարբեր մասերում

Սոմատոսոտատինը տեսրադակապեպտիդ է, որն առաջանում է հիպոֆիզամուսուլում և արգելակում է սոմատոտրոպինի արտազատումն ադենոհիպոֆիզից:

Սույն աշխատանքում ցույց է տրված, որ սոմատոսոտատինի ուղղակի ազդեցության ներքո (0,1—0,01 միկրոգրամ) ուղեղի և հիպոֆիզի տարբեր հատվածների պեպտիդիլ-պեպտիդ հիդրոլազների (թթու և չեղոք պրոտեազներ) ակտիվության խիստ անկում է տեղի ունենում: Իկյս փաստը վկայում է այն մասին, որ ուղեղում գոյություն ունի պեպտիդիլ-պեպտիդ հիդրոլազների ակտիվության հորմոնալ կանոնավորման մեխանիզմներ, որոնք մեր կարծիքով կարևոր դեր կունենա պոլիպեպտիդային բնույթ ունեցող հորմոնների զեննեղում:

ЛИТЕРАТУРА — ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> P. Guillemin, B. Veyss и Г. Грант, Вопросы биохимии мозга, Изд. АН Арм. ССР, VIII, 1973. <sup>2</sup> А. А. Галоян, Некоторые проблемы биохимии гипоталамической регуляции, Изд. «Анестан», 1965. <sup>3</sup> А. А. Галоян и Ф. М. Саакян, ДАН СССР, 201, 483 (1971). <sup>4</sup> А. А. Галоян, Р. А. Алексанян, Р. О. Карапетян, Вопросы медицинской химии, т. XVII, 3, 2, 59 (1972). <sup>5</sup> А. А. Galojan, N. Marks and A. Lajtha, Fourth International Meeting of International Society for Neurochemistry, Tokyo, 1973, Abstract of Round-Table discussion. <sup>6</sup> N. Marks, A. Galojan, Alice Grynbaum and A. Lajtha, J. Neurochemistry, 1974. <sup>7</sup> H. Umemi et al., J. Antibiot (Japan), 23, 259, 1970. <sup>8</sup> R. Vogel, J. Trautschold and E. Wörle, Natural proteinase inhibitors, Academic Press, New-York, 1968. <sup>9</sup> S. Serra, A. Grynbaum, A. Lajtha and N. Marks Biran Research, 44, 579 (1972).

УДК 577.161.5 : 577.158.4

БИОХИМИЯ

Г. В. Априкян, В. А. Шагинян и Г. Г. Бунятян

**Влияние ротенона и витамина  $K_3$  на окислительное деаминирование  
 глутаминовой кислоты в митохондриальной  
 фракции печени белых крыс**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятяном 8/V 1975)

Ранее нами было показано, что АДФ при определенных экспериментальных условиях в значительной степени стимулирует образование аммиака из глутаминовой кислоты (ГК) в митохондриальной фракции (МФ) мозга и печени белых крыс (1). На основании собственных и литературных данных сделано заключение, что действие АДФ на продукцию аммиака из ГК осуществляется через глутамат-дегидрогеназный (ГДГ) путь, а основной причиной неэффективности ГДГ пути в образовании аммиака из ГК в условиях *in vitro* является чрезмерная восстановленность пиридин-нуклеотидных коферментов (1).

Между тем, механизм стимулирующего действия АДФ на интенсивность окислительного деаминирования ГК в интактных митохондриях оставался не выясненным, имеющиеся же сведения относились лишь к кристаллической ГДГ (2). Исходя из этого, представляло определенный интерес изучить, с одной стороны, действие на указанный процесс ротенона, который эффективно подавляет окисление пиридин-нуклеотидных коферментов, с другой,—витамина  $K_3$  (менадиона), который не менее эффективно окисляет эти коферменты (1,3).

Исследования проводили на зрелых белых крысах, содержащихся на обычном лабораторном рационе. МФ печени получали по ранее описанной методике и инкубировали в специально подобранном нами К—фосфатном буфере (4). На каждую пробу брали 1 мл митохондриальной взвеси, что соответствовало 500 мг свежей ткани печени. ГК брали в конечной концентрации 10 мМ, АДФ—2 мМ, малонат—20 мМ, ротенон—0,0064 и 0,0128 мМ, витамин  $K_3$ —0,01 мМ. Инкубацию проводили в атмосфере кислорода при 37° в течение 40 минут. Суммарный аммиак (свободный аммиак+амидоазот глутамина) определяли микрометодом Зелигсона (5) в модификации Силаковой (6), а поглощение кислорода манометрическим методом Варбурга в течение 30 минут после 10-минутного выравнивания температуры.

Как видно из табл. 1, ротенон заметно подавляет эндогенное дыхание МФ. АДФ, напротив, усиливает его. При наличии в среде АДФ

ротенон ингибирует дыхание в 3,8 раза. ГК в присутствии ротенона

Таблица 1

Действие ротенона на окисление глутаминовой кислоты  
(мкмоль  $O_2/g$  свежей ткани/30 минут) в митохондриальной фракции печени

Контроль		5,61±0,65	(7)
Ротенон	количество	1,07±0,27	(6)
	разница с контролем	-4,54	$p < 0,001$
АДФ	количество	8,82±1,12	(5)
	разница с контролем	+3,21	$p < 0,001$
АДФ+Ротенон	количество	2,34	(2)
	разница с АДФ	-6,48	
ГК+Ротенон	количество	2,05	(2)
	разница с ротеноном	+1,98	
ГК+Малонат	количество	10,97±0,75	(10)
	разница с контролем	+5,36	$p < 0,001$
ГК+Малонат+АДФ	количество	18,96±0,93	(12)
	разница с АДФ	+10,14	$p < 0,001$
ГК+Малонат+Ротенон	количество	2,65±0,26	(10)
	разница с ротеноном	-1,58	$p < 0,005$
ГК+МАЛ+РОТ+АДФ	количество	2,5±0,28	(11)
	разница с АДФ+РОТ	+0,16	$p > 0,1$

окисляется слабо. Значительно активнее, как и следовало ожидать, она окисляется в присутствии малоната. АДФ в этих условиях выражено стимулирует дыхание на ГК, что согласуется с результатами предыдущих наших исследований (1). Следует отметить, что ротенон в присутствии малоната полностью подавляет дыхание на ГК. В этих условиях стимулирующее действие АДФ на окисление ГК исчезает.

Исходя из вышесказанного, интересно было изучить процесс окислительного деаминарования ГК в аналогичных условиях экспери-

Таблица 2

Действие ротенона на окислительное деаминарование глутаминовой кислоты (мкмоль азота аммиака/g свежей ткани/40 минут) в митохондриальной фракции печени

До-инкубации		0,27±0,02	(11)	
После инкубации	Контроль	количество	1,59±0,12	(17)
		разница	+1,32	$p < 0,001$
	Ротенон	количество	1,4±0,12	(15)
		разница с контролем	-0,19	$p > 0,1$
	АДФ	количество	2,73±0,13	(14)
		разница с контролем	+1,14	$p < 0,001$
	АДФ+Ротенон	количество	1,87±0,06	(12)
		разница с АДФ	-0,86	$p < 0,05$
	ГК+Ротенон	количество	1,93±0,08	(3)
		разница с ротеноном	+0,53	$p > 0,05$
После инкубации	ГК+Малонат	количество	9,45±0,56	(16)
		разница с контролем	+7,86	$p < 0,001$
	ГК+МАЛ+АДФ	количество	18,39±0,67	(17)
		разница с АДФ	+15,66	$p < 0,001$
	ГК+МАЛ+РОТ	количество	3,4±0,18	(17)
		разница с ротеноном	+2,0	$p < 0,001$
После инкубации	ГК+МАЛ+РОТ+АДФ	количество	4,74±0,33	(15)
		разница с АДФ+РОТ	+2,87	$p < 0,025$

мента. Из табл. 2 видно, что при инкубации МФ образуется определенное количество суммарного аммиака. При добавлении ротенона этот процесс не подвергается существенным изменениям. АДФ сам по себе является продуцентом заметного количества аммиака, интенсивность образования которого несколько подавляется в присутствии ротенона.

Нашими предыдущими исследованиями было установлено, что добавленная к МФ печени ГК как в присутствии АДФ, так и в его отсутствие не является источником образования аммиака (1). И при наличии ротенона (табл. 2) уровень образования аммиака из ГК не претерпевает сколько-нибудь заметных изменений. Значительная продукция аммиака наблюдается в присутствии малоната, возрастая по сравнению с контролем почти в 5 раз. АДФ в высокой степени стимулирует этот процесс, увеличивая образование аммиака в 2 раза. Ротенон, напротив, сильно подавляет продукцию аммиака из ГК в присутствии малоната. На этом фоне АДФ не оказывает особого действия на уровень аммиакообразования.

Следовательно, при подавлении окисления пиридин-нуклеотидных коферментов ротеноном образование аммиака из ГК в присутствии малоната почти полностью прекращается, и на этом фоне АДФ не проявляет своего характерного стимулирующего действия.

В следующей серии исследований мы использовали витамин К<sub>2</sub>, который, как уже отмечалось, эффективно окисляет пиридин-нуклеотидные коферменты (5). В его присутствии предстояло проследить за непосредственным действием АДФ на активность ГДГ в условиях по-

Таблица 3

Действие ротенона и витамина К<sub>2</sub> на окисление глутаминовой кислоты  
(мкмоль О<sub>2</sub>/г свежей ткани/30 минут) в митохондриальной фракции печени

Контроль		3.74±0.21	(9)
Ротенон	количество	1.01±0.25	(6)
АДФ	разница с контролем	-2.73	p<0.001
	количество	6.37±0.53	(8)
АДФ+Ротенон	разница с контролем	-2.63	p<0.005
	количество	1.85±0.32	(6)
Витамин К <sub>2</sub>	разница с АДФ	-4.52	p<0.001
	количество	1.89±0.41	(5)
АДФ+Витамин К <sub>2</sub>	разница с контролем	-1.85	p<0.05
	количество	2.69±0.18	(9)
ГК+Малонат	разница с вит. К <sub>2</sub>	+0.8	p>0.1
	количество	8.88±0.82	(4)
ГК+Малонат+АДФ	разница с контролем	+5.14	p<0.005
	количество	15.93±1.18	(5)
ГК+Малонат+Ротенон	разница с АДФ	-9.56	p<0.001
	количество	1.91±0.08	(11)
ГК+МАЛ+РОТ+АДФ	разница с ротеноном	+0.9	p<0.005
	количество	1.62±0.21	(13)
ГК+МАЛ+РОТ+ВИТ.К <sub>2</sub>	разница с АДФ+РОТ	-0.23	p>0.1
	количество	8.49±0.43	(6)
ГК+МАЛ+РОТ+ВИТ.К <sub>2</sub> +АДФ	разница с вит.К <sub>2</sub>	+6.6	p<0.001
	количество	12.61±0.51	(7)
	разница с АДФ+РОТ	+10.76	p<0.001

давления окисления пиридин-нуклеотидных коферментов ротеноном. Следует отметить, что для получения более выраженного эффекта со стороны ротенона, последний применен в концентрации вдвое большей, нежели в предыдущей серии исследований.

При добавлении к инкубационной среде одного витамина  $K_3$ , как видно из табл. 3, интенсивность эндогенного дыхания МФ печени выражено снижается. Витамин  $K_3$  в присутствии АДФ не оказывает заметного действия на дыхательную активность. Данные этой таблицы подтверждают результаты предыдущей серии исследований относительно эффективного подавления ротеноном окисления и деаминирования ГК в присутствии малоната. При добавлении в этих условиях витамина  $K_3$  ингибирующее действие ротенона не проявляется, а дыхательная активность восстанавливается почти до первоначального уровня. На этом фоне окисление ГК четко стимулируется в присутствии АДФ.

Таблица 1

Действие витамина  $K_3$  на окислительное деаминирование глутаминовой кислоты (мкмоль азота аммиака/г свежей ткани/40 минут) в митохондриальной фракции печени

До инкубации			$0.23 \pm 0.03$	(16)
ПОСЛЕ ИНКУБАЦИИ	Контроль	количество	$1.2 \pm 0.05$	(28)
	Ротенон	разница	$-0.97$	$p < 0.001$
	АДФ	количество	$1.24 \pm 0.1$	(13)
	АДФ+Ротенон	разница с контролем	$+0.04$	$p > 0.1$
	АДФ+Ротенон	количество	$2.37 \pm 0.08$	(16)
	АДФ+Ротенон	разница с контролем	$+1.17$	$p < 0.001$
	Витамин $K_3$	количество	$1.87 \pm 0.06$	(12)
	Витамин $K_3$	разница с АДФ	$-0.5$	$p < 0.05$
	АДФ+Витамин $K_3$	количество	$1.3 \pm 0.08$	(12)
	АДФ+Витамин $K_3$	разница с контролем	$-0.1$	$p > 0.1$
	ГК+Малонат	количество	$2.13 \pm 0.14$	(16)
	ГК+Малонат	разница с вит $K_3$	$+0.83$	$p < 0.001$
	ГК+Малонат+АДФ	количество	$8.96 \pm 0.29$	(14)
	ГК+Малонат+АДФ	разница с контролем	$+7.76$	$p < 0.001$
ГК+Малонат+РОТ	количество	$17.88 \pm 0.58$	(14)	
ГК+Малонат+РОТ	разница с АДФ	$+15.51$	$p < 0.001$	
ГК+МАЛ+РОТ+АДФ	количество	$2.34 \pm 0.11$	(27)	
ГК+МАЛ+РОТ+АДФ	разница с ротеноном	$-1.1$	$p < 0.001$	
ГК+МАЛ+РОТ+АДФ	количество	$3.23 \pm 0.1$	(30)	
ГК+МАЛ+РОТ+ВИТ. $K_3$	разница с АДФ+РОТ	$-1.36$	$p < 0.001$	
ГК+МАЛ+РОТ+ВИТ. $K_3$	количество	$11.18 \pm 0.38$	(16)	
ГК+МАЛ+РОТ+ВИТ. $K_3$	разница с вит $K_3$	$-9.88$	$p < 0.001$	
ГК+МАЛ+РОТ+ВИТ. $K_3$	количество	$16.22 \pm 0.44$	(16)	
ГК+МАЛ+РОТ+ВИТ. $K_3$	разница с АДФ+РОТ	$+14.35$	$p < 0.001$	

Из табл. 4 видно, что витамин  $K_3$  не оказывает влияния на продукцию аммиака из эндогенных источников и из АДФ. В то же время он полностью купирует подавляющее действие ротенона на образование аммиака из ГК в присутствии малоната. В этих условиях восстанавливается характерное стимулирующее действие АДФ на интенсивность окислительного деаминирования ГК.

Приведенные в таблицах и полученные ранее (1) данные позво-

ляют сделать заключение, что в интактных митохондриях добавленная ГК в результате переаминирования становится источником образования  $\alpha$ -кетоглутаровой кислоты, которая окисляется в цикле трикарбоновых кислот через янтарную кислоту. Малонат, ингибируя окисление последней, предотвращает обратный транспорт электронов в дыхательной цепи ( $9-12$ ), способствуя тем самым окислению пиридин-нуклеотидных коферментов, что в свою очередь создает благоприятные условия для стимулирования окислительного деаминирования ГК. Можно было допустить, что в интактных митохондриях печени АДФ усиливает образование аммиака из ГК через ГДГ путь, с одной стороны, путем стимулирования окисления НАД-Н, с другой, — в качестве эффективного аллостерического активатора ГДГ ( $13-14$ ). Однако последнее свойство АДФ было показано при работе с кристаллическим ферментом.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при ингибировании окисления НАД-Н ротеноном и, следовательно, исключении возможности стимулирования этого процесса со стороны АДФ интенсивность окислительного деаминирования ГК сводится к нулю. С другой стороны, на этом фоне при неферментативном окислении пиридин-нуклеотидов витамином  $K_3$  наблюдается интенсивное деаминирование ГК, которое стимулируется добавлением АДФ, что может происходить лишь при активировании ГДГ.

Вышеизложенное позволяет сделать заключение, что в интактных митохондриях печени АДФ стимулирует окислительное деаминирование ГК и в качестве аллостерического активатора ГДГ.

Институт биохимии  
Академии наук Армянской ССР

Գ. Վ. ԱՊՐԻՅԱՆ, Վ. Ա. ՇԱԼԻՅԱՆ, Գ. Ը. ԽՈՒՆՅԱԹՅԱՆ

Ռոտենոնի և վիտամին  $K_3$ -ի ազդեցությունը գլյուտամինաթթվի օքսիդացիոն ղեամինացման վրա սպիտակ առնետների լյարդի ինտակտ միտոքոնդրիալ ֆրակցիայում

Լյարդի միտոքոնդրիալ ֆրակցիայում ոռտենոնը մեծ չափով ճնշում է գլյուտամինաթթվի ( $\gamma$ -Կ) օքսիդացումը և ղեամինացումը մալոնատի ներկայությամբ: Նման պայմաններում ԱՎՖ-ը չի դրսևվորում իր խթանող ազդեցությունը վերը նշված պրոցեսների վրա:

Վիտամին  $K_3$ -ը վերացնում է ոռտենոնի արդելակիչ ազդեցությունն ու այդ պայմաններում ԱՎՖ-ը նորից դրսևվորում է իրեն բնորոշ խթանիչ ազդեցությունը:

Ստացված տվյալների հիման վրա հետևություն է արվում այն մասին, որ ԱՎՖ-ի ազդեցությունը  $\gamma$ -Կ-ից ամոնիակի առաջացման վրա իրականանում է  $\gamma$ -Կ-ի ղեհիդրոզենազայի ճանապարհով: Լյարդի ինտակտ միտոքոնդրիաներում ԱՎՖ-ը խթանում է  $\gamma$ -Կ-ի օքսիդացիոն ղեամինացումը մի կողմից

իրրև ԳՄ-ի դեհիդրոգինազիայի ալոստերիկ ակտիվատոր, մյուս կողմից նպաստում է պիրիդիննուկլեոտիդային կոֆերմենտների օքսիդացմանը շնչառական շղթայում էլեկտրոնների տրանսպորտի ուժեղացման շնորհիվ:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> Г. В. Априкян и В. А. Шагинян, Вопросы биохимии мозга, изд. АН Арм.ССР, 8, 91(1973) <sup>2</sup> J. A. Olson, C. B. Anfinsen, J. Biol. Chem., 197, 67(1952). <sup>3</sup> H. J. Strecker, Arch. Biochim. Biophys., 46, 128(1953). <sup>4</sup> S. Pora, J. M. Tager, A. Francavilla, E. J. De Haan and E. Quagliariello, Biochim. Biophys. Acta, 131, 14(1967) <sup>5</sup> C. Saccone, BBA Library, vol. 7, Elsevier, Amsterdam, p. 165, 1966 <sup>6</sup> Г. В. Априкян и В. А. Шагинян, Вопросы биохимии мозга, изд. АН Арм. ССР, 5, 17(1969) <sup>7</sup> D. Sellgson, H. Sellgson, J. Lab. Clin. Med., 38, 324(1951). <sup>8</sup> А. И. Сулакова, Г. П. Труш и А. Являкова, Вопр. мед. химии, 5, 538 (1962) <sup>9</sup> B. Chance, G. R. Williams, Adv. Enzymol. 17, 65(1956). <sup>10</sup> M. Klingenberg, W. Stenczka, E. Ritt, Biochem. Z., 332, 47(1959). <sup>11</sup> L. M. Birt, W. Bartley, Biochem. J., 70, 427 (1960). <sup>12</sup> H. Löw, I. Vallin, Biochim. Biophys. Acta, 69, 361(1963). <sup>13</sup> C. Frieden, J. Biol. Chem., 238, 3286 (1963) <sup>14</sup> C. Frieden, J. Biol. Chem., 240, 2028 (1965).

БИОХИМИЯ

Ж. С. Геворкян, А. С. Огансян

Роль сульфгидрильных групп в механизме действия  
 сывороточного ингибитора на процессы аммиакообразования  
 из L-аминокислот в почечной ткани

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 27/V 1975)

Наши прежние исследования показали<sup>(1,2)</sup>, что сыворотка крови белых крыс (а также человека и кроликов) содержит определенные вещества, которые регулируют процессы деаминирования аминокислот в почечной ткани. Было установлено, что среди них имеются как активаторы, так и ингибиторы этих процессов. Нам удалось выделить и в определенной степени очистить вещество, оказывающее тормозящее действие на деаминирование аминокислот. Оно термостабильное, не подвергается диализу и имеет белковую природу (возможно полипептид, связанный с белковым носителем).

В дальнейшем мы задались целью выяснить участие сульфгидрильных групп в механизме действия этого вещества (тормозящего). С этой целью мы изучали влияние специфического тиолового реагента—5,5-дитиобис (2-нитробензойная кислота—ДТНБ) и цистеина на активность тормозящего фактора сыворотки крови в отношении образования аммиака из различных аминокислот (глутаминовая, аспарагиновая и орнитин) в корковом слое почек. Опыты проводились со срезами коркового слоя почек белых крыс, по методике, описанной нами раньше<sup>(2)</sup>. К инкубационной среде аминокислоты добавляли по 16 мкМ на пробу, концентрация тиолового реагента—ДТНБ в инкубационной среде составляла  $10^{-3}$  М, а цистеина— $10^{-3}$  и  $2 \cdot 10^{-3}$  М. Сыворотку крови белых крыс денатурировали в кипящей водной бане в течение 15 минут, затем путем центрифугирования отделяли супернатант, в котором оказалось активное вещество, обладающее тормозящим эффектом в отношении деаминирования аминокислот. Эта жидкость нами была использована в качестве инкубационной среды. В результате этой процедуры белки сыворотки крови почти полностью осаждались и только их незначительное количество обнаруживалось в надосадочной жидкости.

Результаты исследований (табл. 1) показали, что при добавлении к срезам почек ДТНБ образование аммиака из аминокислот значительно подавляется. При инкубации срезов почек в сыворотке крови наблюдается более выраженное торможение аммиакообразования. Интересно отметить, что при предварительном блокировании SH-групп ферментов, осуществляющих деаминирование упомянутых аминокислот,

Таблица 1

Влияние сыворотки крови и ДТНБ на образование аммиака (мкМ/г ткани/час) из L-аминокислот в срезах почек.  
Средние данные из шести опытов

Условия опыта	Глютаминовая кислота		Аспарагиновая кислота		Орнитин	
	количество аммиака	процент ингибирования	количество аммиака	процент ингибирования	количество аммиака	процент ингибирования
Контроль (в среде буфера)	6.1±0.2		12.7±0.6		13.4±0.5	
ДТНБ (10 <sup>-3</sup> М) в среде буфера	4.3±0.3	29.5	7.9±0.25	37.8	8.7±0.3	35.1
Сыворотка	0.25±0.02	95.5	2.9±0.1	77.2	5.0±0.2	62.7
ДТНБ (10 <sup>-3</sup> М) + сыворотка	0	100	2.0±0.1	84.3	4.4±0.2	67.2
Сыворотка + ДТНБ (10 <sup>-3</sup> М)	0	100	2.7±0.1	78.8	4.8±0.1	64.2

Таблица 2

Влияние преникубации срезов почек и сыворотки крови с цистеином на образование аммиака (мкМ/г ткани/час) из L-аминокислот  
Средние данные из шести опытов

Условия опыта	Глютаминовая кислота	Аспарагиновая кислота	Орнитин
Контроль (буфер)	5.7±0.1	11.2±0.2	13.5±0.2
Цистеин (10 <sup>-3</sup> М, буфер)	5.9±0.2	11.5±0.2	13.2±0.6
Цистеин (2·10 <sup>-3</sup> М, буфер)	5.8±0.1	11.7±0.5	13.3±0.8
Сыворотка	0.2±0.02	2.9±0.08	5.0±0.05
Сыворотка преникубирована с цистеином 10 <sup>-3</sup> М, 20 мин. и добавлена к срезам	0.55±0.07	2.8±0.1	5.1±0.2
Сыворотка преникубирована с цистеином 2·10 <sup>-3</sup> М 20 мин. и добавлена к срезам	1.3±0.09	5.4±0.3	7.5±0.3
Срезы преникубированы в среде буфера с цистеином 10 <sup>-3</sup> М 20 мин. затем добавлена сыворотка	0.5±0.07	2.6±0.3	4.8±0.5
Срезы преникубированы в среде буфера с цистеином 2·10 <sup>-3</sup> М 20 мин. затем добавлена сыворотка	1.2±0.09	5.1±0.2	7.3±0.1
Сыворотка преникубирована с ДТНБ 10 <sup>-3</sup> М 20 мин. затем добавлена к срезам	0.3±0.02	2.9±0.04	4.7±0.2

при помощи ДТНБ, с последующим добавлением сыворотки крови, отмечается дальнейшее усиление подавления процессов деаминации аминокислот, причем в этих условиях деаминация глутаминовой кислоты полностью прекращается, а деаминация аспарагиновой кислоты и орнитина подавляются на 84,2 и 67,2% соответственно. Между тем, как при предварительной инкубации срезов в среде сыворотки крови с последующим добавлением тиолового реагента, наблюдается эффект сыворотки.

Эти данные показывают, что SH-группы ферментов осуществляющих деаминацию как глутаминовой, так и аспарагиновой кислот и орнитина, играют важную роль в процессах образования аммиака из них. С другой стороны, дальнейшее усиление торможения аммиакообразования из аминокислот под действием сыворотки крови, при предварительном блокировании SH-групп ферментов, свидетельствует о том, что кроме сульфгидрильных, в составе этих ферментов имеются и другие функционально-активные группы, которые принимают участие в механизме действия ингибирующего фактора сыворотки крови.

В следующей серии опытов изучалось влияние цистеина на ингибирующий эффект сыворотки крови. С этой целью срезы почек преинкубировали с цистеином в течение 20 минут, а затем добавляли сыворотку крови и продолжали инкубацию в течение 60 минут. Как видно из табл. 2, цистеин в концентрации  $10^{-3}$  М сам по себе не оказывает особого влияния на образование аммиака из аминокислот при инкубировании почечных срезов в буфере и не устраняет ингибирующий эффект сыворотки крови, между тем как при повышении его концентрации до  $2 \cdot 10^{-3}$  М наблюдается частичное устранение подавляющего эффекта сыворотки.

Для выяснения наличия SH или S—S групп в составе ингибирующего фактора и их возможной роли в механизме его действия, сыворотку крови подвергали предварительной инкубации с цистеином или реактивом ДТНБ и затем добавляли к срезам почек. Полученные результаты (табл. 2) показали, что при добавлении к срезам преинкубированной с цистеином сыворотки, отмечается некоторое ослабление ее тормозящего эффекта. Между тем как преинкубирование сыворотки крови с тиоловым реагентом, с последующим добавлением ее к срезам почек, не оказывает особого влияния на процессы образования аммиака из аминокислот, по сравнению с действием одной сыворотки крови.

В следующей серии опытов мы изучали влияние сыворотки крови на образование аммиака из аминокислот после предварительной инкубации срезов почек с соответствующими субстратами (аминокислотами) в среде буфера. Опыты показали (табл. 3), что и в этих условиях тормозящий эффект сыворотки частично устраняется, что более выражено в отношении образования аммиака из глутаминовой кислоты.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что в сыворотке крови содержится вещество, которое в значительной степени ингибирует образование аммиака из аминокислот и этим путем регулирует процессы их деаминации. Каков механизм его действия?

Многочисленными исследованиями установлено, что сульфгидрильные группы играют важную роль в механизме действия глутаматдегидрогеназы, глутаминазы и других ферментов, принимающих участие в процессах образования аммиака. Наши исследования также показывают, что в присутствии такого специфического реагента тиоловых групп, как ДТНБ, подавляются процессы деаминации аминокислот в срезах коркового слоя почек. Надо полагать, что в этих условиях блокируются сульфгидрильные группы глутаматдегидрогеназы и ферментов, осуществляющих деаминацию аспарагиновой кислоты и орнитина. В присутствии сыворотки крови наблюдается более выраженное подавление аммиакообразования, чем под действием ДТНБ в концентрации  $10^{-3}$  М. Предварительная инкубация сыворотки с цистеином частично устраняет её тормозящий эффект, между тем как преинкубация

Таблица 3

Влияние преинкубации срезов почек с аминокислотами на образование аммиака (мкМ/г ткани/час) из них в присутствии сыворотки крови  
Средние данные из пяти опытов

Условия опыта	Глутамино- вая кислота	Аспарагино- вая кислота	Орнитин
Контрольный опыт, преинкубация срезов (20 мин.) с аминокислотами в среде буфера	5,9±0,03	10,1±0,2	11,5±0,2
Сыворотка	0,2±0,01	3,0±0,1	4,8±0,13
Преинкубация срезов (20 мин.) с аминокислотами в среде сыворотки	0,5±0,04	2,9±0,13	4,4±0,2
Преинкубация срезов (20 мин.) с аминокислотами в среде буфера + сыворотка	3,2±0,2	4,3±0,1	6,4±0,13

сыворотки с ДТНБ почти не оказывает влияния на ингибирующий эффект сывороточного фактора. С другой стороны при предварительном блокировании SH групп ферментов тиоловым реагентом, тормозящий эффект сыворотки крови проявляется в неполной мере. Это показывает, что тиоловые группы ферментов, принимающих участие в процессах деаминации вышеупомянутых аминокислот, играют определенную роль в механизме действия сывороточного ингибитора. Добавление сыворотки крови после тиолового реагента вызывает дальнейшее усиление подавления аммиакообразования, однако их ингибирующий эффект не суммируется. Результаты этих исследований дают основание полагать, что в механизме действия сывороточного фактора на процессы деаминации аминокислот, наряду с сульфгидрильными, определенную роль играет и другая функциональная группа (или группы) ферментов. Не исключена возможность, что в составе сывороточного ингибитора содержатся дисульфидные группы, играющие важную роль в механизме его действия, так как цистеин в значительной мере устраняет его ингибирующий эффект.

При предварительном инкубировании срезов с аминокислотами отмечается некоторое ослабление эффекта ингибирующего фактора, что указывает на наличие конкурентного взаимоотношения между ними.

Как отмечалось выше, сыворотки крови содержат как ингибиторы, так и активаторы процессов деаминирования аминокислот. Опыты показали, что активность ингибитора значительно превышает активность активатора. Биологическое значение этого явления, по видимому, состоит в сбережении физиологически активных соединений (аминокислоты) для использования их в процессах, имеющих более важное значение для организма (синтез белков и др.).

Нужно полагать, что *in vivo* эти вещества, действуя совместно, регулируют процессы деаминирования аминокислот в почках в соответствии с физиологическим состоянием организма (кислотно-щелочное равновесие, режим питания и др.).

Институт биохимии  
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ս. ԿԵՎՈՐԿՅԱՆ, Ա. Ս. ՇՈՎՆԱՆԻՍՅԱՆ

Սույֆիդրի խմբերի դերը Երիկամային նյութափոխանման ամինաթթուներից ամինալի առաջացման վրա շինուկի արգելակող ֆակտորի ազդեցության մեխանիզմում

Փորձերը ցույց են տվել, որ արյան շինուկը պարունակում է սպիտակուցային բնույթի որոշակի նյութ, որն արգելակում է որոշ ամինաթթուների (գլյուտամինաթթու, ասպարադինաթթու, օրնիտին) դեամինացումն երիկամների կեղևային կտրվածքներում: Ցույց է տրվել, որ SH—խմբերի հետ միասին, իշյալ ամինաթթուները դեամինացնող ֆերմենտների կազմում գոյություն ունեն ֆունկցիոնալ տեսակետից ակտիվ այլ խմբեր (կամ խումբ), որոնք մասնակցում են արյան շինուկի արգելակող ֆակտորի ազդեցության մեխանիզմում:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԿԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Ж. С. Геворкян, А. С. Оганесян, ДАН АрмССР, т. 59, № 2 (1974); А. С. Оганесян, Ж. С. Геворкян, ДАН АрмССР, т. 56, № 2 (1973).

