

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Յ Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

LX, № 4

1975

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, անխն. գիտ. բեկեա-
ծու (պատ. Բարասդար), Ն. Գ. ԱՅՐԻՆՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Բ. ԲԱՐԱ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
ՅԱՔՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
ԻՍԼԱՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
Վ. Մ. ԲԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-ան-
դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
(պատ. խմբագրի անդակայ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի),
Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
Ս. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-
անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ
ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՆԱՆԱՐՋՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ

Редакционная коллегия

Վ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Դ. Ա.
ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանլ տեխ. յաւկ (օտն.
սեկրետար), Յ. Դ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, Վլ-կորր.
ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Դ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ
ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Դ. Խ. ԲՄՆՅԱՆ, ակադե-
միկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Օ. ԿԱՅԱՐՅԱՆ, ակա-
դեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ (չամ. օտն. ռեդակտոր),
Ի. Դ. ՄԱԴԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ Արմ
ՍՍՐ, Ա. Դ. ՆԱՅԱՐՈՎ, ակադեմիկ ԱՆ
ԱրմՍՍՐ (օտն. ռեդակտոր), Դ. Տ. ՏԱԿՅԱՆ,
Վլ-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆ-
ԺՅԱՆ, Վլ-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Ա. ԴԱ-
ԼԱԼՅԱՆ, Վլ-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Մ.
ԴԱՐԱՅԱՆ, Վլ-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Մ. Լ.
ԴԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, Վլ-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ,
Վ. Վ. ՓԱՆԱՐԺՅԱՆ, Վլ-կորր. ԱՆ
ԱրմՍՍՐ

Բ Ո Վ Ա Ն Ի Ա Կ Ո Ւ Ք Ց Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Է. Մ. Պոզոսյան—Հետազարծ կապով ինդուկտիվ արտածում	199
Ի. Ս. Կոց—Երկրորդ կարգի ընդհանրացված գիճերենցիալ արտահայտությունների սեփական Ֆուրիեի և Լա-լանջուանի մասին	19*
Վ. Մ. Եղիզարյան—Մի հանրազումարման մեթոդի վերաբերյալ	204
Խ. Մ. Մկոյան—Պարբերական պոտենցիալով Շտուրմ—Լիովիլի օպերատորի սպեկտրում լակունների բնույթի մասին	212
Ո. Ե. Մաբկոսյան—Կատարյալ և կրթականական գրաճներ	213

ԷԼԵԿՏՐԱՄԵԿԱՆԻԿԱ

Պ. Լ. Արեշյան—Բարախոզ հասցով միաճազ ինդուկտորային գեներատորներում հազեցման հաշվառումը	224
---	-----

ՐԻՈՑԻՄԻԱ

Ա. Ա. Գալոյան, Ռ. Հ. Կարապետյան—Առմատոստատիկ և թիրեոտրոպին ռիլզինգ հորմոնի (ՔՌՀ) ազդեցությունն օջախացիոն ֆոսֆորիլացման վրա հիպոֆիզէկտոմիայի ենթարկված սպիտակ առնետների մի քանի օրգանների միտոքոնդրիաներում	232
Ո. Ս. Ալեխանյան, Ա. Ա. Գալոյան, Յ. Ե. Պուտիլինա—Նեյրոհորմոն C-ի ազդեցությունն որոշ գեհրոգենազների ակտիվության վրա	237

ՐՈՒՑՍԵՐԻ ՃԻՉՈՒՈՒՆՑԻԱ

Մ. Խ. Չալոյան, Կ. Խ. Օվչարով, Լ. Պ. Խյուպենկովա, Մ. Մ. Չալոյան—Ոչորի գայաց և բարձրահասակ սարտերի աճը և ծաղկումը սերմերի գիրերելիկով նախացանրային թրջման հետ կապված	242
--	-----

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ե. Լ. Գուրյեվա—Զրխկան ըզեզներ (Coleoptera, Elateridae) երկու նոր տեսակ կովկասից	248
---	-----

ՀԵԼՄԻՆՈԹՈՒՆՑԻԱ

Հ. Ե. Պոզոսյանի Meloidoderita kirjanovae Poghossian, 1966 արուի նկարագրությունը (Nematoda, Meloidoderitidae)	252
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

- Э. М. Погосян*—Индуктивный вывод с обратной связью 193
- И. С. Кац*—О неполноте системы собственных функций обобщенного линейного дифференциального выражения второго порядка 198
- В. М. Едигарян*—Об одном методе суммирования 204
- Х. М. Мкоян*—О характере лакун в спектре оператора Штурма—Лиувилля с периодическим потенциалом 212
- С. Е. Маркосян*—Совершенные и критические графы 218

ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

- Г. Л. Арешян*—Учет насыщения в однофазных индукторных генераторах с пульсирующим потоком 224

БИОХИМИЯ

- А. А. Галоян, Р. О. Карапетян*—Влияние соматостатина и тиреотропина риллинга гормона на окислительное фосфорилирование в митохондриях некоторых органов гипофизэктомированных крыс 232
- С. С. Александян, А. А. Галоян, Ф. Е. Путилина*—Влияние нейрогормона «С» на активность некоторых дегидрогеназ 237

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- М. Х. Чайлазян, К. Е. Овчирев, Л. П. Хлопенкова, М. М. Чадлахян*—Влияние предпосевной обработки семян гиббереллином на рост и цветение карликового и высокорослого сортов гороха 242

ЭНТОМОЛОГИЯ

- Е. Л. Гурьева*—Два новых вида жуков-щелкунов (Coleoptera, Elateridae) с Кавказа 248

ГЕЛЬМИНТОЛОГИЯ

- Э. Е. Погосян*—Описание самца *Meloidoderita kirjanovae* Poghosyan, 1966 (Nematoda Meloidoderitidae) 252

CONTENTS

	p.
MATHEMATICS	
<i>E. M. Pogossian</i> — Inductive inference with feedback	193
<i>I. S. Kac</i> — On incompleteness of the system of eigenfunctions of general- ized linear second order differential expression (summary)	198
<i>V. W. Edigarian</i> — On a method of summation	204
<i>Ch. M. Mkoyan</i> — On the property of lacuna in the spectrum of Sturm— Louville operator with the periodic potential	212
<i>S. E. Markosian</i> — Perfect and critical graphs	218
ELECTROMECHANICS	
<i>G. L. Areshian</i> — The account of saturation in one—phase pulse flux induction generators	224
BIOCHEMISTRY	
<i>A. A. Galoyan, R. O. Karapetian</i> — The effect of somatostaline and thyreotropic releasing hormone on the oxidative phosphorylation in mitochondria of some organs of hypophysectomized rats	232
<i>S. S. Aleksanton, A. A. Galoyan, F. E. Putilina</i> — Effect of neurohor- mone C on the activity of some dehydrogenases	237
PLANT PHYSIOLOGY	
<i>M. Kh. Chailakhjian, K. E. Ovcharov, L. P. Khlopenkova, M. M. Chailakhjian</i> — Influence of presowing seed treatment of gibberellic on the growth and flowering of dwarf and tall pea varieties	242
ENTOMOLOGY	
<i>E. I. Gurjeva</i> — Two new aspects of click—beetle (Coleoptera, Elateridae) from the Caucasus	248
HELMINTHOLOGY	
<i>H. E. Pogossian</i> — The description of the male meloidoderita kirjanovae Pogossian, 1966 (Nematoda, Meloidoderitidae)	252

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 0489. Подписано в печать 14/VII 1975 г. Тираж 545. Изд. 4289. Электр. 342

Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2

Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,33.

Издательство АН Армянской ССР, Ереван, Баренамутян, 24
Экспедиторская типография Издательства АН Армянской ССР

УДК 51 : 621.391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

Индуктивный вывод с обратной связью

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 25/X 1974)

1. В заметке рассмотрена одна из формализаций процесса расшифровки пар конечных множеств посредством индукторов—алгоритмов индуктивного обобщения. Предполагается, что информация об искомой паре множеств задается некоторой последовательностью ее подмножеств.

Исследуется процесс расшифровки для случая, когда указанные последовательности порождаются алгоритмами с обратной связью от формируемых индукторами гипотез.

Работа относится к направлению исследований, описанных (¹⁻⁴), и является продолжением работы (⁵), в которой рассмотрены некоторые статические характеристики индукторов.

2. Введем определения, придающие точный смысл нашему пониманию процесса индуктивного обобщения. При этом мы используем обозначения, введенные в (⁵).

Определение 1. Генератором последовательности номеров (ГПН) назовем произвольную ОРФ, значения которой принадлежат T .

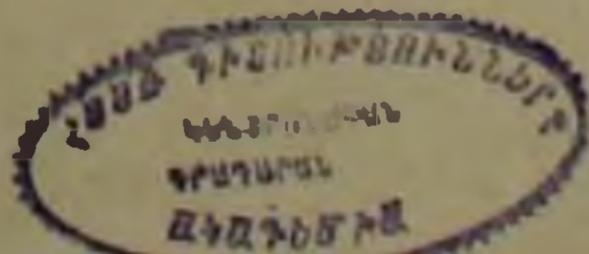
Определение 2. ГПН φ назовем расширяющимся (РГПН), если $\forall t (\varphi(t) \subseteq \varphi(t+1))$, и строго расширяющимся (СРГПН), если $\forall (t < k \rightarrow \varphi(t) \subset \varphi(t+1) \vee |\varphi(t)| = k)$.

Определение 3. Будем говорить, что ГПН φ согласован с ПМ v , если $\forall t (\varphi(t) \subseteq v)$.

Через $\Phi(v)$ будем обозначать множество всех ГПН, согласованных с ПМ v .

Отметим, что определение ГПН соответствует интуитивному понятию «обучающей последовательности» часто используемому в литературе по распознаванию образов. В дальнейшем, для каждого ГПН нас будут интересовать лишь значения $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(c)$, при $c \leq k$, т. к. всякая ПМ, составленная из элементов M , может быть описана посредством обучающей последовательности длины не более k , перечисляющей все элементы этой ПМ.

Определение 4. Для произвольных индуктора f и ГПН φ индуктивным выводом с индуктором f над ГПН φ (или сокращен-



но $[f, \varphi] - NB$ назовем функцию h из N в T такую, что

$$h(0) = f(\varphi(0)),$$

$$h(t+1) = \begin{cases} h(t), & \text{если } \varphi(t+1) \subseteq h(t), \\ f(\varphi(t+1)), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $[f, \varphi] - NB$ h является ОРФ.

Определение 5. Для произвольных — индуктора f , ПМ v , ГПН $\varphi \in \Phi(v)$, временной сложности v в $[f, \varphi] NB$ назовем число

$$S_{op}(v, f, \varphi) = \begin{cases} \mu_1 \leq k (v \subseteq h(t)), & \text{если такое } t \text{ существует,} \\ k+1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где μ — оператор минимизации.

Объемной сложностью v в $[f, \varphi] - NB$ назовем число

$$S_{ob}(v, f, \varphi) = \begin{cases} |\varphi(a)|, & \text{при } a \leq k, \text{ где } a = S_{op}(v, f, \varphi), \\ k+1, & \text{в противном случае}^* \end{cases}$$

Определение 6. Для произвольных непустых $A \subseteq T$, $G \subseteq F$, объемной сложностью A в $[G] - NB$ назовем число

$$S_{ob}^1(A, G) = \min_{f \in G} \max_{v \in A} \min_{\varphi \in \Phi(v)} S_{ob}(v, f, \varphi).$$

Очевидны следующие свойства введенных выше понятий.

1. Для произвольных ПМ $v \in T$ индукторов $f_1, f_2 \in F$ и ГПН φ , если $S_{op}(v, f_1, \varphi) = S_{op}(v, f_2, \varphi)$, то $S_{ob}(v, f_1, \varphi) = S_{ob}(v, f_2, \varphi)$.

Обратное в общем случае неверно. Однако для РГПН φ оба утверждения эквивалентны.

$$2. \forall f v (f \in F \& v \in T \rightarrow S_{ob}^1(|v|, f) = \min_{u \subseteq v, v \subseteq f(u)} \ln(u)).$$

Следствие. Для произвольных непустых $A \subseteq T$, $G_1 \subseteq F_{nc}$, $G_2 \subseteq F_c$, имеем $S_{ob}(A, G_1) \leq S_{ob}^1(A, G_1)$ и $S_{ob}(A, G_2) = S_{ob}^1(A, G_2)$.

$$3. \forall v \exists f \forall \varphi (v \in T \setminus D^k \& \varphi \in \Phi(v) \rightarrow f \in F_{nc} \& S_{ob}(v, f, \varphi) = k+1).$$

т. е. v недостижимо в индуктивном выводе со специально выбранным несогласующим индуктором. В классе согласующих индукторов такой выбор невозможен.

$$4. \forall f v \varphi (f \in F_c \& v \in T \& \varphi \in \Phi(v) \& (\varphi - \text{СРГПН}) \rightarrow S_{ob}(v, f, \varphi) \leq |\varphi(t^* + 1)|), \text{ где } t^* = \mu_1 (|\varphi(t)| < v).$$

В нижеследующем следствии к теореме 1 утверждается существование ПМ максимальной сложности для произвольного заданного согласующего индуктора. Тем самым опровергается идея об оптимальном индукторе в индуктивных выводах.

Произвольный индуктор f назовем абсолютизирующим, если

* Введенные понятия временной и объемной сложностей идейно близки рассмотренным в (1).

$\forall x(x \in T \rightarrow f(x) \in D^k)$. Множество абсолютизирующих индукторов обозначим через Ω .

Теорема 1. Для произвольных согласующего абсолютизирующего индуктора f и строго возрастающей ОРФ ψ можно построить РГПН φ такой, что для $[f, \varphi] - ИВ h$

$$\forall t(t \geq 1 \ \& \ \psi(t) \leq k \rightarrow |\varphi(t)| = \psi(t) \ \& \ h(t+1) \neq h(t)).$$

Данная теорема является обобщением аналогичной теоремы, доказанной в (4) для 1-индукторов.

Следствие. $\forall f \exists v \exists \varphi (f \in \Omega \cap F_c \ \& \ t \in N \rightarrow v \in D^k \ \& \ \varphi \in \varphi(v) \ \& \ \varphi(t) \subseteq \varphi(t+1) \ \& \ S_{op}(v, f, \varphi) S_{ob}(v, f, \varphi) = k)$.

Доказательство легко получить, если в условиях теоремы выбрать $\psi(t) = t$.

3. Рассмотрим процесс индуктивного обобщения для случая, когда предоставлена возможность специального типа управления данными, используемыми при построении гипотез.

Определение 7. Произвольную 3-х местную ОРФ q назовем регулятором, если

$$\forall txy((t, x, y) \in N \times T \times T \rightarrow q(t, x, y) \in T \ \& \ v_0(q(t, x, y)) = \Phi).$$

Множество всех регуляторов обозначим через Q .

Определение 8. Для произвольных $f \in F$ и $q \in Q$, произвольный ГПН φ назовем (f, q) -порожденным, а $[f, \varphi] - ИВ h$ назовем $[f, \varphi] - ИВ$ с регулятором q , если φ удовлетворяет следующим условиям:

1. $v_1(\varphi(0)) \cup v_0(\varphi(0)) \subseteq |a|$, где a — заранее фиксированный элемент из M ,

$$2. \ \forall t(t > 0) (v_1(\varphi(t+1)) \cup v_0(\varphi(t+1)) \subseteq v_1(q(t, \varphi(t), h(t))) \cup v_0(q(t, \varphi(t), h(t))))).$$

Определение 9. Для произвольных $f \in F$, $q \in Q$, $v \in T$, (f, q) -порожденный ГПН φ назовем согласованным с v , если φ удовлетворяет следующим условиям:

$$1. \ \varphi(0) = \alpha(v_1(v) \cap |a|, v_0(v) \cap |a|),$$

$$2. \ \varphi(t+1) = \alpha(v_1(v) \cap v_1(q(t, \varphi(t), h(t))), v_0(v) \cap v_0(q(t, \varphi(t), h(t)))), \text{ где } h(t) - [f, \varphi] - ИВ.$$

Очевидно, что при фиксированных $f \in F$, $q \in Q$, $v \in T$ существует единственный (f, q) -порожденный и согласованный с v ГПН φ .

Содержательно, каждый регулятор определяет некоторый способ формирования вопросов, относящихся к расшифровываемой ПМ; способ построения (f, q) -порожденного и согласованного с этой ПМ ГПН описывает механизм получения ответов на заданные вопросы.

Нижеследующие теоремы 2—4 устанавливают некоторые общие ограничения на индуктивный вывод с регулятором.

Теорема 2. $\forall q \forall v \exists f g (q \in Q \ \& \ v \in D^{k-1} \rightarrow f \in F_{nc} \ \& \ g \in F_c \ \& \ S_{ob}(v, f) < k \ \& \ S_{ob}(v, g) < k \ \& \ S_{ob}(v, f, \varphi^*) = S_{ob}(v, g, \varphi_1^*) = k + 1)$, где

φ^* и φ_1^* , соответственно, (f, q) — и (g, q) — порождены и согласованы с ПМ v .

Теорема 2 показывает, что для произвольных регулятора q и абсолютной ПМ v существуют индукторы такие, что в соответствующем процессе индуктивного обобщения регулятор q не сможет выработать тех данных, посредством которых индуктор f мог бы расшифровать задуманную ПМ.

Теорема 3. $\forall f \exists \varphi \exists q^* (f \in F \ \& \ \varphi \in \Phi(v) \ \& \ v \in T \rightarrow q^* \in Q \ \& \ S_{об}(v, f, \varphi^*) \leq S_{об}(v, f, \varphi))$.

где φ^* — (f, q^*) — порожденный и согласованный с v ГПН.

Теорема 3 уточняет интуитивно ясное положение о том, что для произвольных заданных индуктора f , ПМ v и ГПН φ можно построить соответствующий регулятор такой, что порожденный им и согласованный с v ГПН φ^* позволит расшифровать v не хуже чем с ГПН φ .

Теорема 4. 1. $\exists q^* \forall q f v (q \in Q \ \& \ f \in F_{нс} \ \& \ v \in T \rightarrow q^* \in Q \ \& \ S_{об}(v, f, \varphi^*) \leq S_{об}(v, f, \varphi))$.

2. $\exists q^{**} \forall q f v (q \in Q \ \& \ f \in F_c \ \& \ v \in T \rightarrow q^{**} \in Q \ \& \ S_{об}(v, f, \varphi^{**}) \leq S_{об}(v, f, \varphi))$.

где φ^* , φ^{**} и φ , соответственно, (f, q^*) —, (f, q^{**}) — и (f, q) — порождены и согласованы с v .

Теорема 4 непосредственно следует из теорем 2 и 3 и отрицает существование оптимального регулятора для каждого из классов $F_{нс}$ и F_c .

5. Известна следующая задача: для произвольной формулы исчисления высказываний дать оценку числа испытаний, посредством которых можно точно установить, является ли данная формула тавтологией или нет.

В нашей формализации указанная задача соответствует следующей.

Пусть $P = \{q \mid q \in Q \ \& \ \forall t x y (q(t, x, y) \subseteq q(t+1, x, y) \ \& \ |q(t+1, x, y)| = |q(t, x, y)| + 1)\}$.

Требуется найти $\min_{f \in F, q \in P} \max_{v \in U^k} S_{об}(v, f, \varphi^*)$, где φ^* — (f, q) — порожден и согласован с v .

Теорема 5. $\forall f q \exists v (f \in F \ \& \ q \in P \rightarrow v \in D^k \ \& \ S_{об}(v, f, \varphi) = k)$, где φ — (f, q) — порожден и согласован с v .

Автор выражает благодарность И. Д. Заславскому за редактирование статьи.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Հետադարձ կապով ինդուկտիվ աբտաձում

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր բազմությունների զույգերի վերածման պրոցեսն ինդուկտորների (ինդուկտիվ ընդհանրացման ալգորիթմների) միջոցով և այդ պրոցեսի որոշ ձևականացումը:

Ննթադրվում է, որ փնտրվող զույգերի մասին ինֆորմացիան տրվում է նրանց ենթաբազմությունների հաջորդականությամբ:

Հետազոտվում է վերծանման պրոցեսն այն դեպքի համար, երբ վերոհիշյալ հաջորդականությունները կառուցվում են այնպիսի ալգորիթմներով, որոնք ունեն հետադարձ կապ ինդուկտորների միջոցով կառուցված վարկածների հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. А. Трихтенброт, Сложность алгоритмов и вычислений, ИГУ, Новосибирск, 1967. ² Я. М. Барздинь, ДАН СССР, т. 206, № 3 (1972). ³ Э. Хант, Дж. Марин, Ф. Стоун, Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине «Мир», М., 1970. ⁴ Э. М. Погорсян, ДАН Арм. ССР, т. LVIII, № 1 (1974). ⁵ Э. М. Погорсян, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 31, 1975.

УДК 517.512.7

МАТЕМАТИКА

И. С. Кац

О неполноте системы собственных функций обобщенного
 линейного дифференциального выражения второго порядка

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 1/III 1975)

1. Пусть на интервале $I = (a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) заданы неубывающая функция $M(x)$ и функция $Q(x)$ — разность двух неубывающих. Обозначим через $D = D_{MQ}$ множество функций $f(x)$ ($a < x < b$) таких, что 1) $f(x)$ абсолютно непрерывна на $I = (a, b)$, 2) в каждой точке $x \in (a, b)$ существует правая производная $f^+(x)$, 3) функция

$$f^{(+)}(x) = f^-(x) - \int_{k+0}^{x+0} f(s) dQ(s) \quad (a < x < b), \quad (1)$$

где $k \in I$ — фиксированная точка, M — абсолютно непрерывна. Для $f(x) \in D_{MQ}$ при M — почти всех $x \in I$ имеет смысл дифференциальное выражение

$$l_{MQ}|f| = l_{MQ}|f|(x) = - \frac{d}{dM(x)} f^{(+)}(x), \quad (2)$$

где производная по отношению к $M(x)$ понимается как симметричная производная.* Для дифференциального выражения $l_{MQ}|\cdot|$ левый (правый) конец интервала I называют регулярным, если ограничены снизу (сверху) множество F_M точек роста функции $M(x)$ и множество ее значений, а $Q(x)$ имеет ограниченное изменение в правой (левой) окрестности точки $a_0 = \inf F_M$ ($b_0 = \sup F_M$). В противном случае этот конец называют сингулярным.

* В нашей работе ((¹), § 7) дифференциальное выражение $l_{MQ}|\cdot|$ вводилось и в случаях, когда $I = [a, b)$, $I =]a, b]$, $I = (a, b]$, где включение $a \in I$ ($b \in I$) допускалось лишь при $a > -\infty$ ($b < +\infty$). В этих случаях $l_{MQ}|\cdot|$ рассматривалось на «продленных функциях» (в случае, когда $Q(x) = \text{const}$, см. (²)). Однако уже в (²) приводилось построение, приводившее все эти случаи к рассматриваемому здесь случаю с $I = (a, b)$ ((¹) стр. 216, 182—183). Впервые дифференциальное выражение $l_{MQ}|\cdot|$ было введено в нашей работе (²).

Функцию $u(x)$ считаем решением дифференциального уравнения $l_{M,Q}|u| = \varphi(x)$ ($a < x < b$), если $u(x) \in D_{M,Q}$ и равенство $l_{M,Q}|u|(x) = \varphi(x)$ имеет место M -почти всюду на (a, b) . Нетрудно убедиться, что дифференциальное уравнение

$$l_{M,Q}|y| - \lambda y = 0 \quad (a < x < b) \quad (3)$$

с параметром λ в том частном случае, когда $M(x)$ и $Q(x)$ абсолютно непрерывны, равносильно нагруженному уравнению Штурма—Лиувилля

$$-y'' + q(x)y - \lambda p(x)y = 0 \quad (a < x < b), \quad (4)$$

где $p(x) = M'(x) (\geq 0)$, $q(x) = Q'(x)$ почти всюду на I .

Обобщенное дифференциальное уравнение (3) обладает многими свойствами, аналогичными свойствам уравнения (4) ([1], стр. 216, §2). В частности, задача Коши с уравнением (3) и условиями: $y^-(c) = m$, $y^+(c) = n$ — для любой фиксированной точки $c \in I$ и любых фиксированных комплексных λ , m , n имеет решение, причем единственное („—“ символ левой производной по переменной x).

Дифференциальное выражение $l|\cdot| = l_{M,Q}|\cdot|$ формально самосопряжено по отношению к M -мере, т. е. для любых $\alpha, \beta \in I$ и $f(x), g(x) \in D$ имеет место „тождество Лагранжа“

$$\int_{\alpha}^{\beta} (|f|'(x) \overline{g(x)} - f(x) \overline{|g|'(x)}) dM(x) = |f(\beta) \overline{g^+(\beta)} - f^+(\alpha) \overline{g(\alpha)}|. \quad (5)$$

2. Пусть \mathbf{H} — гильбертово пространство $L^2_M(I)$ M -измеримых функций, имеющих M -суммируемый квадрат. Точнее говоря, элемент $f \in \mathbf{H}$ — это семейство „изображающих этот элемент“ функций $f(x) \in L^2_M(I)$, попарно совпадающих M -почти всюду на I ; для них мы пишем $f(x) \in f$. Говоря, что $f(x)$ принадлежит множеству V , где $V \subseteq \mathbf{H}$, или записывая „ $f(x) \in V$ “, подразумеваем, что существует изображаемая функцией $f(x)$ элемент $f \in V$. Через \mathbf{H} обозначаем множество $f \in \mathbf{H}$ таких, что существует $f(x) \in f$, равная нулю в окрестностях сингулярных концов интервала I (если оба конца регулярны, $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}$).

Будем говорить, что функция $f(x) \in \mathbf{H}$ разложима по собственным функциям дифференциального выражения $l_{M,Q}|\cdot|$, если существует неубывающая функция $\lambda_f(i)$ ($-\infty < i < +\infty$) и функция $v_f(x, \lambda)$ ($x \in I, -\infty < \lambda < +\infty$), которая при любом фиксированном λ является собственной функцией этого выражения, т. е. решением уравнения (3), а при любом фиксированном $x \in I$ v_f — измерима и локально ограничена, такие, что

$$f(x) = \lim_{\substack{\mu \rightarrow +\infty \\ \nu \rightarrow -\infty}} \int_{\nu}^{\mu} v_f(x, \lambda) d\lambda_f(\lambda), \quad (6)$$

где интеграл как функция переменной x при любых $\mu, \nu \in (-\infty, +\infty)$ принадлежит \mathbf{H} , а предел понимается в смысле метрики пространства \mathbf{H} . Будем говорить, что система собственных функций дифференциального выражения $[M, Q] \cdot |$ полна в пространстве \mathbf{H} , если любая функция $f(x) \in \mathbf{H}$ разложима по его собственным функциям.

Зафиксируем некоторую точку $c \in I$. Обозначим через $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ решения уравнения (3) такие, что $u_1(c, \lambda) = u_2^-(c, \lambda) = 1$, $u_1^-(c, \lambda) = u_2(c, \lambda) = 0$.

Эрмитово-неубывающую матрицу матрицу-функцию $S(\lambda) = (s_{ij}(\lambda))_{ij=1}^2$ ($-\infty < \lambda < +\infty$; $S(\lambda) = \frac{1}{2}(S(\lambda-0) + S(\lambda+0))$, $S(0) = 0$)

называют спектральной матрицей-функцией дифференциального выражения $[M, Q] \cdot |$, соответствующей точке $x=c$, если отображение $U: f \rightarrow F(\lambda)$, где $f \in \mathbf{H}$, а $F(\lambda)$ — вектор-функция $(F_1(\lambda), F_2(\lambda))$ ($-\infty < \lambda < +\infty$), определяемая равенствами

$$F_j(\lambda) = \int_I f(x) v_j(x, \lambda) dM(x) \quad (j=1, 2; f(x) \in \mathbf{H}), \quad (7)$$

изометрически переводит \mathbf{H} в гильбертово пространство $L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)^*$. Спектральная матрица-функция $S(\lambda)$ называется ортогональной, если $U\mathbf{H} = L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)^*$.

Наличие соответствующей точке $c \in I$ спектральной матрицы-функции дифференциального выражения $[M, Q] \cdot |$ влечет за собой полноту в \mathbf{H} системы его собственных функций.

3. В том частном случае, когда функции $M(x)$ и $Q(x)$ абсолютно непрерывны и $M'(x) > 0$ п. в. на I (т. е., когда уравнение (3) эквивалентно уравнению (4) с вещественными локально суммируемыми $p(x) > 0$ и $q(x)$), как хорошо известно, для любой точки $c \in I$ существует хотя бы одна соответствующая ей ортогональная спектральная матрица-функция и, следовательно, система собственных функций полна в \mathbf{H} . Как оказалось, в общем случае нельзя утверждать полноту в \mathbf{H} системы собственных функций дифференциального выражения $[M, Q] \cdot |$.

Если $[\alpha, \beta] \subset I$, то через $h_{\alpha\beta}(x)$ ($\alpha < x < \beta$) обозначаем функцию, которая абсолютно непрерывна на $[\alpha, \beta]$, имеет в каждой точке $x \in (\alpha, \beta)$ правую производную $h_{\alpha\beta}^+(x)$ и такую, что $h_{\alpha\beta}(\alpha) = 0$,

$$h_{\alpha\beta}^+(x) = \int_{\alpha+0}^{x+0} h_{\alpha\beta}(s) dQ(s) = 1 \quad (\alpha < x < \beta). \quad (8)$$

* Гильбертово пространство $L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)$ вектор-функций впервые было построено в нашей работе (4) (см. также (5), § 1 и (6), п. 86).

Существует единственная функция, обладающая указанными свойствами (в случае, когда $Q(x)$ абсолютно непрерывна, $h_{\alpha, \beta}(x)$ — решение задачи Коши: $y'' - q(x)y = 0$ ($\alpha < x < \beta$), $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 1$ — в классе функций, абсолютно непрерывных на $[\alpha, \beta]$ вместе с производной).

Интервал $[\alpha, \beta] \subset I$ называем MQ -сильно искажающим, если 1) $M(\alpha-0) < M(\alpha+0) = M(\beta-0) < M(\beta+0)$, 2) $h_{\alpha, \beta}(\beta) = 0$. Заметим, что второе требование не может выполняться, если $Q(x)$ не убывает на (α, β) .

Теорема 1. Система собственных функций дифференциального выражения $|m_0| \cdot |$ в том и только том случае полна в \mathbb{H} , когда отсутствуют MQ -сильно искажающие интервалы; в этом случае для любой точки $c \in I$ существует хотя бы одна соответствующая ей ортогональная спектральная матрица-функция дифференциального выражения $|m_0| \cdot |$.

Из этой теоремы вытекает, что в случае абсолютной непрерывности функций $M(x)$ и $Q(x)$, требование положительности $M'(x)$ для существования спектральных матриц-функций и для полноты в \mathbb{H} системы собственных функций излишне* (уже непрерывность функции $M(x)$ влечет отсутствие MQ -сильно искажающих интервалов).

Поясним причину неполноты системы собственных функций при наличии MQ -сильно искажающих интервалов. В работе (12), где была вскрыта особая роль MQ -сильно искажающих интервалов, (они были введены еще в работе (11)), MQ -сильно искажающему интервалу $[\alpha, \beta]$ ставилась в соответствие функция $u_{\alpha, \beta}(x)$, равная нулю всюду на I за исключением точек α и β , где $u_{\alpha, \beta}(\alpha) = -1/m_m\{\alpha\}$, $u_{\alpha, \beta}(\beta) = h_{\alpha, \beta}(\beta)/m_m\{\beta\}$ ($m_m\{\gamma\}$ — M -мера точки γ), и изображаемый ею элемент $u_{\alpha, \beta}$. Там, с помощью тождества (5) установлено ((12), лемма 2), что для любой функции $f(x) \in D_{m_0}$ и любого MQ -сильно искажающего интервала $[\alpha, \beta]$

$$\int_I u_{\alpha, \beta}(x) f(x) dM(x) = 0 \quad (f(x) \in D_{m_0}), \quad (9)$$

что равносильно равенству: $f(\alpha) = f(\beta)h_{\alpha, \beta}(\beta)$. Очевидно последнему соотношению удовлетворяет любая функция $f(x)$, представимая в виде интеграла из (6), а. т. к. M -меры точек α и β MQ -сильно искажающего интервала $[\alpha, \beta]$ положительны, то ему должна удовлетворять любая функция $f(x) \in \mathbb{H}$, разложимая по собственным функциям.

Итак, если $f(x) \in \mathbb{H}$ разложима по собственным функциям диф-

* Обычно (см., например, (1-10)) при доказательстве полноты требуют, чтобы в уравнении (4) функция $q(x)$ ни на каком интервале не обращалась в нуль п. в., либо рассматривают уравнения, равносильные (4) с $q(x) > 0$. Исключение составляет монография (11) Ф. Аткинсона. Однако, допустив наличие таких интервалов, автор требует в (11) равенства нулю на этих интервалах функции $q(x)$ и налагает еще одно трудно проверяемое условие ((11), гл. VIII).

дифференциального выражения $l_{MQ}|\cdot|$, то $f(x)$ принадлежит множеству N_1 тех элементов из N , которые ортогональны ко всем элементам u_n , соответствующим MQ -сильно искажающим интервалам (при отсутствии последних $N_1 = N$ и этот факт тривиален). Если имеется хотя бы один MQ -сильно искажающий интервал $[a, \beta]$, то $N_1 \neq N$, ибо $\|u_n\|_n \neq 0$; отсюда вытекает неполнота в N системы собственных функций дифференциального выражения $l_{MQ}|\cdot|$. Попутно установлена часть теоремы 2, обобщающей теорему 1. В (12) построен пример, где $N_1 = \{0\}$, а N бесконечномерно.

Обобщением понятия спектральной матрицы-функции является понятие квазиспектральной матрицы-функции. Определения квазиспектральной матрицы-функции и ортогональной квазиспектральной матрицы-функции получаются из приведенных выше определений спектральной и ортогональной спектральной матрицы-функции заменой в них множества N' на множество N_1 тех элементов $f \in N_1$, которые изображаются функциями $f(x)$ такими, что сходятся интегралы в (7) при любом вещественном i .

Из наличия квазиспектральной матрицы-функции вытекает разложимость по собственным функциям дифференциального выражения $l_{MQ}|\cdot|$ любой функции $f(x) \in N_1$. Имеет место

Теорема 2. Какова бы ни была точка $s \in I$, существует хотя бы одна соответствующая ей ортогональная квазиспектральная матрица-функция дифференциального выражения $l_{MQ}|\cdot|$ и, следовательно, по собственным функциям этого дифференциального выражения разложимы те и только те $f(x) \in N$, которые принадлежат N_1 .

4. Приведем идею доказательства теорем 1 и 2. По аналогии с тем, как это делается, например, в (14) ((14), § 17) строим оператор, порождаемый в N дифференциальным выражением $l_{MQ}|\cdot|$.

Элемент $f \in N$ относим к множеству D_0 , если существует функция $f(x) \in f$ такая, что 1) $f(x) \in D_{MQ}$, 2) $f(x) = 0$ вне некоторого сегмента $[a_f, b_f] \subset (a, b)$, 3) $l_{MQ}|f|(x) \in N$; при этом полагаем, что функция $l_{MQ}|f|(x)$ изображает элемент $L_0'f \in N$.

Несмотря на полную аналогию с (14)' так построенное бинарное отношение L_0' не всегда является оператором (т. е. не всегда $L_0'f$ однозначно определяется элементом $f \in D_0$). Оказывается (это устанавливается с помощью рассуждений из (12)) оно в том и только в том случае является оператором, когда отсутствуют MQ -сильно искажающие интервалы. В этом случае, как это вытекает из (5), L_0' эрмитов в N оператор. Доказательство существования спектральной матрицы-функции при условии теоремы 1 проводится путем применения метода направляющих функционалов М. Г. Крейна (15) к оператору L_0' .

В том случае, когда имеются MQ -сильно искажающие интервалы для любого $f \in D_0$ одно и только одно значение $L_0 f$ принадлежит H_\perp (это устанавливается с помощью рассуждений, проведенных в нашей работе (¹²)). Положим $L_{0\perp} f$ равным указанному значению $L_0 f$, этим определим оператор с областью задания $D_{0\perp} = D_0$. Как явствует из (9), $D_{0\perp} \subset H_\perp$. Таким образом, $L_{0\perp}$ — действующий в H_\perp оператор. Он эрмитов. Существование квазиспектральной матрицы-функции доказывается с помощью применения метода направляющих функционалов к этому оператору.

Одесский технологический институт
пищевой промышленности им. М. В. Ломоносова

Ի. Ս. ԿԱՅ

Երկրորդ կարգի րևիաներացված դիֆերենցիալ աղտահայտության սեփական ֆունկցիաների ոչ-լրիվության մասին

Ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման այն բանի, որպեսզի

$$-\frac{d}{dM(x)} \left[y^+(x) - \int_{x+0}^{x+0} y(s) dQ(s) \right] - \lambda y(x) = 0 \quad (a < x < b)$$

Շտուրմ — չի ուփոխվում րևիաներացված հավասարման լուծումների սխտեմը ինչի լրիվ $L_M^{(2)}(a, b)$ տարածության մեջ: Այստեղ $M(x)$ -ը (a, b) -ում չնվազող ֆունկցիա է, $Q(x)$ -ը երկու մոնոտոն չնվազող ֆունկցիաների տարբերություն է, k -ն ֆիքսած կետ է (a, b) -ից, λ -ն կոմպլեքս պարամետր է: Ոչ լրիվության դեպքում պարզվում է, թե $L_M^{(2)}(a, b)$ -ի որ ենթատարածության մեջ է այդ սխտեմը լրիվ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. С. Кац, Матем. сборн., т. 68 (110), № 2, 174 (1965). ² И. С. Кац и М. Г. Крейн, О спектральных функциях струны, Доп. 2 к кн. Ф. Аткинсона: Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., 1968, стр. 648. ³ И. С. Кац, ДАН СССР, т. 106, № 1 (1956). ⁴ И. С. Кац, Ученые записки Харьковского госуниверситета, т. 34 (1950). ⁵ И. С. Кац, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 27, № 5 (1963). ⁶ Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Изд. «Наука», М., 1966. ⁷ J. Weyl, Math. Zeitschr., b. 98, 268 (1957). ⁸ H. Weyl, Math. Ann., b. 68, 220 (1910). ⁹ Н. Данфорд, Дж. Т. Шаури, Линейные операторы, «Мир», М., 1966. ¹⁰ Э. Л. Котликов, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958. ¹¹ Ф. Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, «Мир», М., 1968. ¹² И. С. Кац, Матем. сборн., т. 79 (121), № 3, 368 (1969). ¹³ И. С. Кац, Матем. сборн., т. 76 (118), № 1, 147 (1968). ¹⁴ М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», М., 1969. ¹⁵ М. Г. Крейн, Сборник работ Института математики АН УРСР, т. 10, 83 (1948).

УДК 5175

МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

Об одном методе суммирования

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 4/III 1975)

В работе (1) были получены абелевы и тауберовы теоремы для преобразования

$$\int_0^{\infty} \omega(xt) S(t) dt, \tag{1}$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_v}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_v}}, \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v^2} < \infty, \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty, \delta > 0 \tag{2}$$

которое является естественным обобщением (см. (2)) преобразования Лапласа. При замене переменной $x = e^{x'}$, $t = e^{t'}$ преобразование (1) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x' - t') \psi(t') dt', \tag{3}$$

где

$$G(x-t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i+i\infty} \frac{e^{s(x-t)} d\zeta}{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_v}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_v}}, \tag{4}$$

которое есть преобразование типа свертки.

Заметим, что преобразование (1) можно рассматривать как некоторый метод суммирования функции $S(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и, таким образом, этот метод будет обобщением метода суммирования по Абелю.

В данной работе рассматривается другое обобщение преобразования Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu t} t^{\mu-1} S(t) dt. \tag{5}$$

где $\rho \geq \frac{1}{2}$, $0 < \mu < \infty$ произвольные числа.

Заметим, что в частном случае, когда $\mu\rho = 1$, преобразование (5) получается из (1), взяв $\gamma_1 = \rho \cdot \nu$.

Метод суммирования (5) применен в работе (1), где он использован для обобщения интеграла Фурье и для представления произвольных непрерывных функций.

Используя методы работы (1), здесь мы исследуем свойства метода суммирования (5).

Определение. Пусть $\rho \geq \frac{1}{2}$, $\mu > 0$ — произвольные положительные числа. Функцию $S(x)$ назовем $L_{\mu}^{(\rho)}$ суммируемой к S , если существует интеграл

$$L_{\mu}^{(\rho)}(u) \equiv \frac{\rho u^{\mu\rho}}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho} u^{\rho}} t^{\mu\rho-1} S(t) dt \quad (6)$$

для всех $u > 0$ и

$$\lim_{u \rightarrow 0} L_{\mu}^{(\rho)}(u) = S. \quad (7)$$

Следующая абелева теорема устанавливает регулярность метода суммирования $L_{\mu}^{(\rho)}(u)$

Теорема 1. Если $S(t) \sim At^{\alpha}$ при $t \rightarrow \infty$ и сходится интеграл

$$L_{\mu}^{(\rho)}(u) \equiv \frac{\rho u^{\mu\rho}}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} S(t) e^{-u^{\rho} t^{\rho}} t^{\mu\rho-1} dt \quad \text{при } u > 0, \text{ то}$$

$$L_{\mu}^{(\rho)}(u) \sim \frac{A\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)}{u^{\alpha} \Gamma(\mu)} \quad \text{при } u \rightarrow 0$$

Взяв $\alpha = 0$, получим, что при предположении $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = A$ имеет место $\lim_{u \rightarrow 0} L_{\mu}^{(\rho)}(u) = A$, т. е. метод суммирования $L_{\mu}^{(\rho)}(u)$ регулярен.

Доказательство теоремы 1 получается методом доказательства теоремы 3.2 работы (1).

Теорема 2. Если $S(t) \sim At^{\alpha}$ при $t \rightarrow 0$ и сходится интеграл $L_{\mu}^{(\rho)}(u)$ при любом $u > 0$, тогда

$$L_{\mu}^{(\rho)}(u) \sim \frac{A\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)}{u^{\alpha} \Gamma(\mu)} \quad \text{при } u \rightarrow \infty \quad (9)$$

Замечание. Взяв $\alpha = 0$, получим, что если существует

$$\lim_{t \rightarrow 0+} S(t) = S(0+) \quad (10)$$

тогда существует предел

$$\lim_{u \rightarrow \infty} L_{\mu}^{(\rho)}(u) = S(0_+). \quad (11)$$

Следствие. Пусть функция $S(t)$ измерима на полуоси $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} |S(t)| t^{\mu\rho-1} dt < \infty, \quad \rho \geq \frac{1}{2}, \quad 0 < \mu \leq \rho^{-1} \quad (12)$$

Предположим, что существует $S(0_+)$. Определим

$$L_{\mu}^{(\rho)}(+\infty) = S(0_+).$$

Тогда $L_{\mu}^{(\rho)}(u)$ непрерывна относительно u на $0 < u \leq \infty$.

Доказательство следует из теоремы 2 и известного факта, что преобразование (5) есть регулярная функция в угле $|\arg u| < \frac{\pi}{2\rho}$ (см. (3)).

Доказательство теоремы 2. Так как $S(t) = At^{\alpha} + \varepsilon(t)t^{\alpha}$, где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то мы можем написать

$$L_{\mu}^{(\rho)}(x) = \frac{\rho x^{\mu\rho}}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} e^{-x^{\rho} t^{\rho}} t^{\mu\rho-1} S(t) dt = \frac{A\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)}{\Gamma(\mu)x^{\alpha}} +$$

$$+ \frac{\rho \cdot x^{\mu\rho}}{\Gamma(\mu)} \int_0^T \varepsilon(t) t^{\alpha+\mu\rho-1} e^{-x^{\rho} t^{\rho}} dt + \frac{\rho x^{\mu\rho}}{\Gamma(\mu)} \int_T^{\infty} e^{-x^{\rho} t^{\rho}} t^{\mu\rho-1} \left[S(t) - At^{\alpha} \right] dt,$$

откуда

$$\left| L_{\mu}^{(\rho)}(x) \cdot \frac{\Gamma(\mu)x^{\alpha}}{\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)} - A \right| \leq o(1) + \left| \frac{\rho \cdot x^{\alpha}}{\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)} \int_{Tt}^{\infty} e^{-u^{\rho}} u^{\mu\rho-1} S\left(\frac{u}{x}\right) du - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho A}{\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)} \int_{Tt}^{\infty} e^{-u^{\rho}} u^{\alpha+\mu\rho-1} du \right|.$$

Примем, что T и t зависят от некоторого параметра x , при стремлении которого к некоторому пределу $T \rightarrow 0$, а $t \rightarrow \infty$ так, что $Tt \rightarrow q \neq 0$, $q < \infty$. Тогда окончательно будем иметь, если учесть, что при $x \rightarrow \infty$

$$S\left(\frac{u}{x}\right) \sim \frac{Au^{\alpha}}{x^{\alpha}},$$

$$\left| L_{\mu}^{(\rho)}(x) \frac{\Gamma(\mu)x^{\alpha}}{\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)} - A \right| \leq o(1) + \left| \frac{\rho A}{\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)} \int_0^{\infty} e^{-u^{\rho}} u^{\alpha + \mu\rho - 1} du - \right. \\ \left. - \frac{\rho A}{\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)} \int_0^{\infty} e^{-u^{\rho}} u^{\alpha + \mu\rho - 1} du \right| = o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

то есть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L_{\mu}^{(\rho)}(x) \frac{\Gamma(\mu)x^{\alpha}}{\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{\rho}\right)} = A.$$

Теорема 2 доказана.

Методом работы (1) можно доказать также следующую тауберovu теорему.

Теорема 3. Пусть

$$S(x) = \int_0^x a(t) dt,$$

где $a(t)$ интегрируемая функция на всяком интервале $(0, x)$. Тогда из условия $a(x) = o(1)$ при $x \rightarrow \infty$ и $L_{\mu}^{(\rho)}(u) \rightarrow A$ при $u \rightarrow 0$ следует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = A.$$

Следующая теорема даёт ответ о сравнимости методов суммирования $L_{\mu}^{(\rho)}(u)$ для различных значений μ .

Теорема 4. Предположим, что существует $L_{\mu_2}^{(\rho)}(u)$ для всех $u > 0$ и для некоторого $\mu_2 > 0$. Тогда существует $L_{\mu_1}^{(\rho)}(u)$ для всех $u > 0$ и $\mu_1 > 0$, $0 < \mu_1 < \mu_2$, и мы имеем также

$$\frac{u^{\mu_1} \Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_2 - \mu_1) \Gamma(\mu_1)} \int_u^{\infty} (t-u)^{\mu_2 - \mu_1 - 1} t^{-\mu_2} L_{\mu_2}^{(\rho)}(t) dt = L_{\mu_1}^{(\rho)}(u). \quad (13)$$

Более того, если функция $S(t)$ $L_{\mu_2}^{(\rho)}$ -суммируема к A , то она суммируема также в смысле $L_{\mu_1}^{(\rho)}$ к тому же пределу.

Для доказательства теоремы 3 сначала доказывается существование повторного интеграла

$$\int_0^{\infty} (t-\tau)^{\mu_2 - \mu_1 - 1} t^{-\mu_2} L_{\mu_2}^{(\rho)}(t) dt =$$

$$= \Gamma(\mu_2) \int_z^\infty (t-z)^{\mu_2-\mu_1-1} \left\{ \int_0^\infty S(u^{1/\rho}) u^{\mu_1-1} e^{-tu} du \right\} dt$$

и законность перемен порядка интегрирования. После чего имеем

$$\begin{aligned} & \int_z^\infty (t-z)^{\mu_2-\mu_1-1} \left\{ \int_0^\infty S(u^{1/\rho}) u^{\mu_1-1} e^{-tu} du \right\} dt = \\ &= \int_0^\infty S(u^{1/\rho}) u^{\mu_1-1} \left\{ \int_z^\infty (t-z)^{\mu_2-\mu_1-1} e^{-tu} dt \right\} du = \\ &= \int_0^\infty S(u^{1/\rho}) u^{\mu_1-1} \frac{\Gamma(\mu_2-\mu_1) e^{-tz}}{u^{\mu_2-\mu_1}} du = \Gamma(\mu_2-\mu_1) \int_0^\infty S(u^{1/\rho}) u^{\mu_1-1} e^{-zu} du = \\ &= \frac{\Gamma(\mu_2-\mu_1) \Gamma(\mu_1) L_{\mu_1}^{(\rho)}(z)}{z^{\mu_1}} \end{aligned}$$

следовательно

$$\frac{z^{\mu_1} \Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_2-\mu_1) \Gamma(\mu_1)} \int_z^\infty (t-z)^{\mu_2-\mu_1-1} t^{-\mu_1} L_{\mu_1}^{(\rho)}(t) dt = L_{\mu_1}^{(\rho)}(z).$$

Легко видеть, что левая часть формулы (13) является регулярным преобразованием $L_{\mu_2}^{(\rho)}(t)$ на $L_{\mu_1}^{(\rho)}(t)$ и этот факт заканчивает полное доказательство теоремы 3.

Для более общего вида метода суммирования

$$L_{\mu}^{(\rho)}(u) \equiv \frac{u^\mu}{\bar{\Gamma}(\mu)} \int_0^\infty \omega(ut) t^{\mu-1} S(t) dt, \quad (14)$$

где

$$\bar{\Gamma}(\mu) = \frac{1}{\mu \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{\gamma_\nu}\right) e^{-\mu/\gamma_\nu}}$$

есть обобщенная гамма-функция Эйлера, заметим, что если сходится интеграл

$$\int_0^\infty \omega(x_0 t) t^{\mu-1} s(t) dt,$$

то сходится также интеграл

$$\int_0^\infty \omega(xt) t^{\mu-1} S(t) dt \quad \text{при } x > x_0.$$

Отсюда следует, что и для преобразования (14) имеет смысл понятие абсциссы сходимости. Следующая теорема дает формулу вычисления абсциссы сходимости преобразования (14).

Теорема 5. Если $\gamma_{k+1} - \gamma_k > 1$ и сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\omega'_t(xt)}{\omega(x_0t)} \right| dt \quad \text{при } x > x_0$$

то абсцисса сходимости λ интеграла

$$\int_0^{\infty} \omega(xt) F(t) dt \tag{15}$$

определяется из следующего равенства

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \int_0^A F(u) du \right|}{\ln \frac{1}{\omega(\lambda A)}} = 1. \tag{16}$$

Доказательство. Заметим сначала, что из (16) следует, что при достаточно больших A имеем

$$\frac{\ln \left| \int_0^A |F(u)| du \right|}{\ln \frac{1}{\omega \left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) A \right]}} \leq 1,$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно меньше.

Следовательно

$$\ln \left| \int_0^A F(u) du \right| \leq \ln \left| \frac{1}{\omega \left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) A \right]}} \right|$$

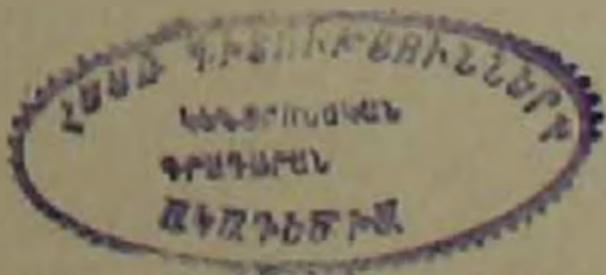
или

$$\omega \left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) A \right] \left| \int_0^A F(u) du \right| \leq 1.$$

Теперь докажем, что интеграл $\int_0^{\infty} \omega(xt) F(t) dt$ сходится при $x > \lambda$.

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{\lambda}^{A'} \omega(xt) F(t) dt = \left[\omega(xt) \cdot \int_0^t F(u) du \right] \Big|_{\lambda}^{A'} - \int_{\lambda}^{A'} \omega'_t(xt) dt \cdot \int_0^t F(u) du.$$



С другой стороны, знаем, что $\omega(xt)/\omega(x_0t) \rightarrow 0$, если только $x > x_0$ и $t \rightarrow \infty$. Учитывая все эти замечания, получим

$$\omega(xt) \left| \int_0^t F(u) du \right| = \frac{\omega(xt)}{\omega \left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) A \right]} \cdot \omega \left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) A \right] \left| \int_0^t F(u) du \right| \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$ и $x > \lambda + \varepsilon$. Теперь оценим второе слагаемое

$$\left| \int_A^{A'} \omega'_t(xt) dt \cdot \int_0^t F(u) du \right| \leq \left| \int_A^{A'} \frac{\omega'_t(xt)}{\omega \left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right]} \cdot \omega \left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] \right| \left| \int_0^t F(u) du \right| dt < < \varepsilon \quad x > \lambda + \varepsilon.$$

Следовательно интеграл сходится при $x > \lambda + \varepsilon$ и так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то наш интеграл сходится при $x > \lambda$.

Докажем теперь, что интеграл расходится при $x < \lambda$. Предположим обратное, что он сходится для некоторого $x_0 < \lambda$. Тогда

$$\int_0^t F(u) du = o \left(\frac{1}{\omega(x_0t)} \right),$$

а это означает, что при достаточно больших t имеем

$$\left| \int_0^t F(u) du \right| < \frac{M}{\omega(x_0t)}.$$

Логарифмируя обе части и деля на $\ln \frac{1}{\omega(\lambda t)}$, получим

$$\frac{\ln \left| \int_0^t F(u) du \right|}{\ln \frac{1}{\omega(\lambda t)}} \leq \frac{\ln M}{\ln \frac{1}{\omega(\lambda t)}} + \frac{\ln \frac{1}{\omega(x_0t)}}{\ln \frac{1}{\omega(\lambda t)}}$$

или

$$\begin{aligned} 1 = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \int_0^t F(u) du \right|}{\ln \frac{1}{\omega(\lambda t)}} &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{\omega(x_0t)}}{\ln \frac{1}{\omega(\lambda t)}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_0 \omega'(x_0t)}{\omega(x_0t)}}{\frac{\lambda \omega'(\lambda t)}{\omega(\lambda t)}} = \frac{x_0}{\lambda} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega'(x_0t)}{\omega'(\lambda t)}, \end{aligned}$$

где применены правила Лопиталя. Применяя лемму 2.2 работы (1), получаем противоречие $1 \leq \frac{x_0}{i} \cdot 1 < 1$.

Теорема полностью доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Մ. ԵՂԻԴԱՐՅԱՆ

Ընդհանուր դիֆերենցիալի վերաբերյալ

Անջատանքում դիտարկվում է հետևյալ հանրագումարման մեթոդը

$$L_{\mu}^{(\rho)}(u) = \frac{\rho u^{\mu\rho}}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} e^{-t\rho u^{\rho}} t^{\mu\rho-1} S(t) dt \quad (1)$$

և այդ մեթոդի վերաբերյալ ասիադուցվում են արևելյան և տաուբերյան թեորեմներ: Ապացուցվում է նաև գումարման այդ մեթոդի վերաբերյալ համեմատության թեորեմ և պարամետրի տարրեր արժեքների համար:

Վերջում քերված է (1) ձևափոխության գուգամիտության արսցիսայի հաշվման բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. М. Едигарян, ДАН Арм ССР, т. LV, № 5 (1972). ² Г. В. Бадалян, Проблема моментов Стильеса ИАН СССР, серия мат., т. 31, вып. 3, 491—530 (1967). ³ М. М. Джрбашян, ИАН СССР, серия мат., т. 18, № 5 (1964).

УДК 517.942

МАТЕМАТИКА

Х. М. Мкоян

О характере лакун в спектре оператора Штурма—Лиувилля
 с периодическим потенциалом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/III 1975)

Пусть задан оператор Штурма—Лиувилля на всей оси

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где потенциал $q(x)$ предполагается периодическим и бесконечно дифференцируемым.

Хорошо известно (см., например, (1) и (2)), что спектр такого оператора имеет лакуны, длина которых стремится к нулю тем быстрее, чем глаже потенциал $q(x)$.

В работе (2) рассматривался случай аналитического потенциала и было установлено, что длина лакун стремится к нулю экспоненциально.

В настоящей работе рассматривается случай, когда потенциал $q(x)$ удовлетворяет неравенству:

$$|q^{(n)}(x)| \leq A^n n^{\alpha n}, \quad \alpha \geq 1. \quad (2)$$

Случай $\alpha = 1$ рассматривался в работе (2). Отметим, что метод работы (2) в нашем случае совершенно неприменим.

Имеет место

Теорема. Если потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию (2), то для длины n -ой лакуны l_n справедливо неравенство:

$$l_n \leq Ce^{-\lambda n^{1/\alpha}}.$$

Доказательство теоремы основывается на детальном изучении асимптотики спектра периодической и антипериодической задач.

Обозначим через $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ решения уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (3)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$C(0, \lambda) = 1, \quad C'(0, \lambda) = 0,$$

$$S(0, \lambda) = 0, \quad S'(0, \lambda) = 1.$$

Далее рассмотрим функцию

$$A(\lambda) = C(1, \lambda) + S'(1, \lambda).$$

Так как $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ есть целые функции по λ при каждом фиксированном x , то $A(\lambda)$ — целая.

Известно (4), что собственные значения периодической задачи на интервале $[0, 1]$ для уравнения (3) являются корнями функции $A(\lambda) - 2$, а собственные значения антипериодической задачи для того же уравнения есть корни функции $A(\lambda) + 2$.

Как показано нами в работе (3) для функции $A(\rho)$ справедливо асимптотическое разложение:

$$A(\rho) \equiv A(\rho^2) = e^{i\rho} \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{\rho^k} + \frac{\alpha_N^{(1)}(\rho)}{\rho^{N+1}} + e^{-i\rho} \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{a_k}{\rho^k} + \frac{\alpha_N^{(2)}(\rho)}{\rho^{N+1}}, \quad (4)$$

причем для коэффициентов a_k , $\alpha_N^{(1)}$ и $\alpha_N^{(2)}$ имеют место оценки

$$|a_k| \leq CB^k k^{1/2}, \quad (5)$$

$$|\alpha_N^{(j)}(\rho)| \leq CB^{N+1} (N+1)^{1/(N+1)}, \quad j=1, 2. \quad (5')$$

Для доказательства теоремы необходимо получить асимптотическое разложение корней функций $A(\rho) \pm 2$ с хорошей оценкой остатка. Рассмотрим, например, уравнение $A(\rho) = 2$. Его корни образуют две последовательности, для определения асимптотического поведения которых необходимо решать уравнения

$$e^{i\rho} \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{\rho^k} = 2, \quad (6)$$

$$e^{-i\rho} \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{a_k}{\rho^k} = 2. \quad (7)$$

Рассмотрим уравнение (6). Оно может быть записано в виде

$$2e^{-i\rho} = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{\rho^k} + \frac{\alpha_N(\rho)}{\rho^{N+1}}. \quad (8)$$

Логарифмируя уравнение (8), получим

$$-i\rho = \ln \frac{a_0}{2} + \ln \left(1 + \frac{a_1}{a_0 \rho} + \dots + \frac{a_N}{a_0 \rho^N} + \frac{\alpha_N(\rho)}{a_0 \rho^{N+1}} \right) - 2k\pi i. \quad (9)$$

Здесь ветви выбраны так, что $-i\rho$ отличается от $\ln \frac{a_0}{2}$ на $-2k\pi i$,

а второй логарифм в правой части (9) при $\rho \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Тогда

$$\ln \left(1 + \frac{a_1}{a_0 \rho} + \dots + \frac{a_N}{a_0 \rho^N} + \frac{\alpha_N(\rho)}{a_0 \rho^{N+1}} \right) = \frac{b_1}{\rho} + \dots + \frac{b_N}{\rho^N} + \frac{B_N(\rho)}{\rho^{N+1}},$$

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2 - \frac{1}{2} b_1, \quad \dots, \quad b_N = a_N - \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} k b_k a_{N-k}. \quad (10)$$

Для a_j выполнены оценки (5). Из представления b_j в форме (10) нетрудно получить, что b_k удовлетворяют неравенствам:

$$|b_k| \leq CB^k k^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Так как в равенстве (9) под знаком логарифма стоит аналитическая функция, то записывая остаточный член $B_N(\rho)$ для логарифма в интегральной форме и учитывая оценку (5) для $a_N(\rho)$, получаем оценку остатка $B_N(\rho)$:

$$|B_N(\rho)| \leq CB^{N+1} (N+1)^{\sigma(N+1)}. \quad (12)$$

Как известно, корни уравнения (8) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho_k &= 2k\pi + c_1 + \frac{c_2}{k} + \dots + \frac{c_{N+1}}{k^N} + \frac{\Delta_{N+1}(k)}{k^{N+1}}, \\ C &= i \ln \frac{a_0}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Покажем, что для $\Delta_{N+1}(k)$ выполнена оценка:

$$|\Delta_{N+1}(k)| \leq A\rho^{N+1} (N+1)^{\sigma(N+1)}, \quad N=0, 1, \dots \quad (14)$$

Заметим, что при $N=0$ оценка (14) означает, что

$$\rho_k = 2\pi k + C + \frac{\Delta_0(k)}{k}, \quad |\Delta_0| \leq A\rho.$$

Это представление ρ_k непосредственно следует из уравнения (8). Предположим теперь, что оценки (14) выполнены для $N=0, 1, \dots, L$. Докажем, что эта оценка имеет место и при $N=L+1$.

Из (13) имеем:

$$\begin{aligned} \rho^{-s} &= (2\pi)^{-s} \left(k + \frac{c}{2\pi} + \dots + \frac{c_{N+1}}{2\pi k^N} + \frac{\Delta_{N+1}(k)}{2\pi k^{N+1}} \right)^{-s} = \\ &= (2\pi)^{-s} \left(k^{-s} + \frac{1}{2\pi} \binom{-s}{1} c_1 k^{-(s+1)} + \left[\binom{-s}{2} \left(\frac{c_1}{2\pi} \right)^2 + \binom{-s}{1} \frac{c_2}{2\pi} \right] k^{-(s+1)} + \right. \\ &+ \dots + \left. \left\{ \sum_{r=1}^{N-s} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^r \binom{-s}{r} \left(\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_r=N-s-r} c_{\alpha_1} \dots c_{\alpha_r} \right) \right\} k^{-N} + \frac{\delta_{N-s}(k)}{k^{N+1}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Записав в формуле Тейлора для $(1+u)^{-s}$ остаточный член в интегральной форме и учитывая предположение индукций, получаем, что для $\delta_{L-s}(k)$ выполнены оценки

$$|\delta_{L-s}(k)| \leq A\rho^{L-s} (L-s)^{\sigma(L-s)}, \quad s = 1, 2, \dots, L-1, L. \quad (16)$$

При этом заметим, что для получения членов разложения со степенями $-s, -(s+1), \dots, N$ при возведении ρ_k в s -ую степень достаточно взять ρ_k в виде

$$\rho_k = 2k\pi + c_1 + \frac{c_2}{k} + \dots + \frac{c_{L-1}}{k^{L-1-1}} + \frac{\Delta_{L-1}}{k^{L-1}}$$

Отсюда уже и видно, что оценка (16) выполнена.

Теперь подставим (15) в уравнение (9). Мы получим

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{k} + \dots + \frac{c_{L+1}}{k^{L+1}} + \frac{\Delta_{L+1}}{k^{L+1}} &= \frac{b_1}{2\pi} \left\{ k^{-1} + \binom{-1}{1} \frac{c_1}{2\pi} + \dots + \right. \\ &+ \left. \left[\sum_{r=1}^{L-1} \binom{-1}{r} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^r \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = L-r-1} c_{\alpha_1} \dots c_{\alpha_r} \right] k^{-L} + \frac{\delta_{L-1}}{k^{L+1}} \right\} + \\ &+ \frac{b_L}{(2\pi)^L} \left\{ k^{-L} + \frac{\delta_0(k)}{k^{L+1}} \right\} + \frac{B_N(\rho_k)}{\rho_k^{L+1}} \end{aligned} \quad (17)$$

Из оценок (17) получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов c_k :

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{b_1}{2\pi}, \quad c_3 = \binom{-1}{1} \frac{c_1}{2\pi} \cdot \frac{b_1}{2\pi} + \frac{b_2}{(2\pi)^2}, \\ c_{L+1} &= \sum_{l=1}^L \frac{b_l}{(2\pi)^l} \left\{ \sum_{r=1}^{L-l} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^r \binom{-l}{r} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = L-l-r} c_{\alpha_1} \dots c_{\alpha_r} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из этих формул с помощью индукции легко вывести, что для коэффициентов c_k имеет место оценка:

$$|c_k| \leq CB^k k^{\gamma k}. \quad (19)$$

Для $k=1, 2$ эти оценки выполнены. Проверим, что они имеют место для $k=m$, если они справедливы при $k=1, 2, \dots, m-1$. Действительно,

$$\begin{aligned} |c_m| &\leq \sum_{l=0}^m \frac{CB^l l^{\gamma l}}{(2\pi)^l} \left| \sum_{r=1}^{m-l} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^r \binom{-l}{r} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = m-l-r} B^{m-l-r} C^r x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r} \right| \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^m \frac{CB^l l^{\gamma l}}{(2\pi)^l} \left| \sum_{r=1}^{m-l} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^r \binom{-l}{r} C^r B^{m-l-r} (m-l-r)^{\gamma(m-l-r)} \right| \leq \\ &\leq CB^m \sum_{l=1}^m \frac{l^{\gamma l}}{(2\pi)^l} (m-l)^{\gamma(m-l)} \leq CB^m m^{\gamma m}, \end{aligned}$$

при $C \leq 2\pi B$. Из оценки (17) получаем, что

$$\Delta_{L+1} = \sum_{m=1}^L \frac{b_m}{(2\pi)^m} \delta_{L-m} + B_L(\rho_k) \left(\frac{k}{\rho_k} \right)^{L+1},$$

откуда учитывая (11), (12) и (16), получаем

$$\begin{aligned} |\Delta_{L+1}| &\leq \sum_{m=1}^L \frac{CB^m m^{\gamma m}}{(2\pi)^m} CB^{L-m} (L-m)^{\gamma(L-m)} + \\ &+ CB^{L+1} (L+1)^{\gamma(L+1)} \leq 2CB^{L+1} (L+1)^{\gamma(L+1)} \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $C \ll B$ и $a \geq 1$. Отметим, что если считать $a < 1$, то удается получить оценку для Δ_L такую же, как и при $a = 1$, т. е.

$$|\Delta_L| \leq A\rho^L L^L.$$

Аналогичные результаты получаются и при решении уравнения (7). Именно, его корни имеют вид:

$$\rho_k' = 2\pi k + c_1' + \frac{c_2'}{k} + \dots + \frac{c_{N+1}'}{k^N} + \frac{\Delta_{N+1}'}{k^{N+1}}. \quad (21)$$

Для Δ_{N+1}' также выполнена оценка (20). Имеют место и рекуррентные соотношения (10) и (18). Из них и из уравнений (6) и (7) легко заметить, что постоянные c_k и c_k' отличаются только знаком.

Таким образом получаем, что собственные значения периодической задачи образуют две последовательности λ_k и λ_k' , для которых имеют место асимптотические формулы:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k = \rho^2 &= 4\pi^2 k^2 + d_{-1}k + d_0 + \frac{d_1}{k} + \dots + \frac{\gamma_{N+1}(k)}{k^{N+1}}, \\ \lambda_k' = \rho_k'^2 &= 4\pi^2 k^2 + d_{-1}k + d_0 + \frac{d_1}{k} + \dots + \frac{\gamma_{N+1}'(k)}{k^{N+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

при этом для $\gamma_{N+1}(k)$ выполнена оценка

$$|\gamma_{N+1}(k)| \leq B^{N+1}(N+1)^{N+1}.$$

Аналогичные оценки выполнены и для $\gamma_{N+1}'(k)$.

Точно такими же свойствами обладают и собственные значения μ_k и μ_k' антипериодической задачи.

Как известно, лакуны в спектре рассматриваемого оператора L образуются последовательностями отрезков (λ_k', λ_k) и (μ_k', μ_k) . Из (22) мы получаем, что

$$|\mu_k' - \lambda_k| \leq \frac{|\gamma_{N+1}'(k) - \gamma_{N+1}(k)|}{k^{N+1}} \leq \frac{2CB^{N+1}(N+1)^{N+1}}{k^{N+1}}.$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом N , то если взять нижнюю грань по N , получим, что

$$|\mu_k' - \lambda_k| \leq Ce^{-ck^{1/2}}$$

Аналогично получим

$$|\mu_k' - \mu_k| \leq Ce^{-ck^{1/2}}.$$

Тем самым теорема доказана.

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического института

Պարբերական պոտենցիալով Շտուրմ-Հիլբերտի օպերատորի սպեկտրում
լակունների բնույթի մասին

Դիտարկվում է Շտուրմ-Հիլբերտի օպերատորն անվերջ ածանցելի և պարբերական $q(x)$ պոտենցիալով: Ուսումնասիրվում է այդ օպերատորի սպեկտրում լակունների բնույթը և ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. — Իրե $q(x)$ պոտենցիալը բավարարում է

$$|q^{(n)}(x)| \leq A^n n^a, \quad a \geq 1$$

պայմանին, ապա n -րդ լակունի δ_n երկարության համար իրավացի է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\delta_n \leq C e^{-An^{1/a}}$$

$a = 1$ դեպքում պոտենցիալն անսլիտիկ է և այդ դեպքն ուսումնասիրված է (1) աշխատանքում: Նշենք սակայն, որ այդ աշխատանքի մեթոդը սովորաբար կիրառելի չէ:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТИРОВАННОЕ

¹ И. М. Рапопорт, ДАН СССР, т. 76, № 6 (1951). ² Hochstadt Harry, Proc. Amer. Math. Soc., 14, № 6 (1963). ³ С. Т. Симонян, Дифференциальные уравнения т. XVI, № 7 (1970). ⁴ Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. II, М., ИЛ (1961). ⁵ Х. М. Мкоян, Сборник материалов IX конференции Ленинградского филиала ЕРПИ, ч. 2, физико-математические науки, 1974.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Е. Маркосян

Совершенные и критические графы

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 24/III 1975)

Граф $G = (X, U)$ называется совершенным, если для каждого подграфа G' графа G хроматическое число $\chi(G')$ равно плотности $\varphi(G) : \chi(G) = \varphi(G')$.

Следуя Олару ⁽¹⁾ кликоматическим числом $\sigma(G)$ графа G назовем минимальное число полных подграфов, с помощью которых можно покрыть все вершины графа G . Пусть $\alpha(G)$ — число внешней устойчивости графа G . Очевидно $\sigma(G) \geq \alpha(G)$ для произвольного графа. Скажем, граф G имеет α -покрытие, если $\sigma(G) = \alpha(G)$.

Нечетной дыркой в графе G назовем нечетный цикл без диагоналей. Относительно совершенных графов Берж ⁽²⁾ выдвинул следующие две гипотезы:

первая гипотеза — Дополнение совершенного графа совершенный граф, вторая (сильная) гипотеза — Если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок, то он совершенный.

Ловас ⁽³⁾ получил результат, из которого непосредственно следует вторая гипотеза, а именно:

граф $G = (X, U)$ является совершенным тогда и только тогда, когда для любого подграфа $G' = (X', U')$ графа G , $\alpha(G') \cdot \varphi(G') \geq |X'|$.

Вторая гипотеза пока еще не решена. Так как условие этой гипотезы: не содержание нечетных дырок, — наследственное свойство (свойство называется наследственным, если из того, что граф имеет данное свойство следует, что любой подграф имеет данное свойство), то очевидно сильная гипотеза равносильна следующей:

Если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок, то он имеет α -покрытие.

Класс совершенных графов является подклассом класса графов, имеющих α -покрытие, и второй класс существенно шире. Ниже определим несколько понятий, с помощью которых будем изучать графы, не имеющие нечетных дырок, совершенные и критические графы и графы, имеющие α -покрытие.

Ребро $u = (x, y)$ в графе $G = (X, U)$ назовем критическим, если $\alpha(G \setminus u) > \alpha(G)$. Пусть граф G имеет α -покрытие, тогда ребро u назовем существенным, если при любом α -покрытии ребро u принадлежит какому-нибудь полному подграфу.

Если граф имеет α -покрытие, то тогда критическое ребро в то же время является существенным, но обратное неверно. Последнее легко проверить на пятиугольнике с одной диагональю. Диагональ будет существенным, но не критическим ребром. Произвольный граф G назовем критическим, если любое ребро этого графа критическое. Например, пятиугольник или полный граф являются критическим.

Возьмем произвольный граф $G = (X, U)$ и с помощью только критических ребер составим компоненты связности $G_1 = (X_1, U_1)$, $G_2 = (X_2, U_2)$, \dots , $G_k = (X_k, U_k)$ суграфа $G' = (X', U')$, где U' множество критических ребер графа G . Подграфы $G_1 = (X_1, U_1)$, $G_2 = (X_2, U_2)$, \dots , $G_k = (X_k, U_k)$ — графа G назовем критическими компонентами. В графе G_i не все ребра критической компоненты могут быть критическими. Возьмем как пример опять пятиугольник с одной диагональю. Треугольник будет одной критической компонентой, но диагональ не будет критическим ребром.

Произвольный граф разбивается на критические компоненты.

Может случиться так, что каждая компонента будет состоять из одной вершины (если граф не имеет критических ребер), например, простой цикл четной длины. Интересен тот факт, что граф может не иметь критических ребер, но иметь существенные ребра.

Построим такой пример. Для этого воспользуемся тем, что существуют графы с данной плотностью и с данным хроматическим числом. Когда $\varphi(G) = 2$, $\chi(G) = 4$ таким графом является граф Мицельского. Кроме того, этот граф обладает следующим свойством: при добавлении любого ребра плотность увеличивается (возникают треугольники). Возьмем по одному экземпляру графов Мицельского и полного пятивершинника, добавим две вершины x и y . Соединим вершины x и y со всеми вершинами графа Мицельского (рис. 1). Хроматическое число полученного графа равно пяти и добавление любого ребра плотность не увеличивает. При любой минимальной раскраске вершины x и y раскрашиваются одним цветом.

Дополнение полученного графа (рис. 2) будет тем примером, который мы хотели построить. Ребро $u = (x, y)$ будет существенным.

Особый интерес представляют критические графы, когда $\alpha(G) = \alpha(G)$, $\alpha(G) = \alpha(G) + 1$, в связи с изучением совершенных графов.

Ниже опишем процедуру, которая в некоторой степени выявляет структуру графов, имеющих α -покрытие.

Пусть граф G имеет α -покрытие. Тогда критические компоненты G_1, G_2, \dots, G_k графа G должны быть полными, так как критическое ребро одновременно является и существенным. Если две критические компоненты G_l и G_m , $l \neq m$, $l, m < k$, содержат соответственно такие две вершины x_l и x_m , которые в графе G не смежны, то

очевидно множество ребер, соединяющих вершины G_l и G_m можно удалить из графа, при этом не нарушится наличие α -покрытия.

Действительно, При любом α -покрытии все вершины одной критической компоненты должны принадлежать одному и тому же полному подграфу α -покрытия. Полные подграфы, содержащие G_l и G_m , не могут совпадать, так как вершины x и y не смежны. Значит ребра, соединяющие вершины G_l с вершинами G_m , не могут принадлежать никакому полному подграфу при любом α -покрытии и все такие ребра можно удалить из графа G не нарушая наличия α -покрытия. Полученный граф обозначим через G' . Так как G' имеет α -покрытие, то опять можно выбрать две критические компоненты графа G' , G'_l, G'_m , которые содержат несмежные вершины x'_l и x'_m и удалить все ребра между этими компонентами, получим граф G^2 и т. д.

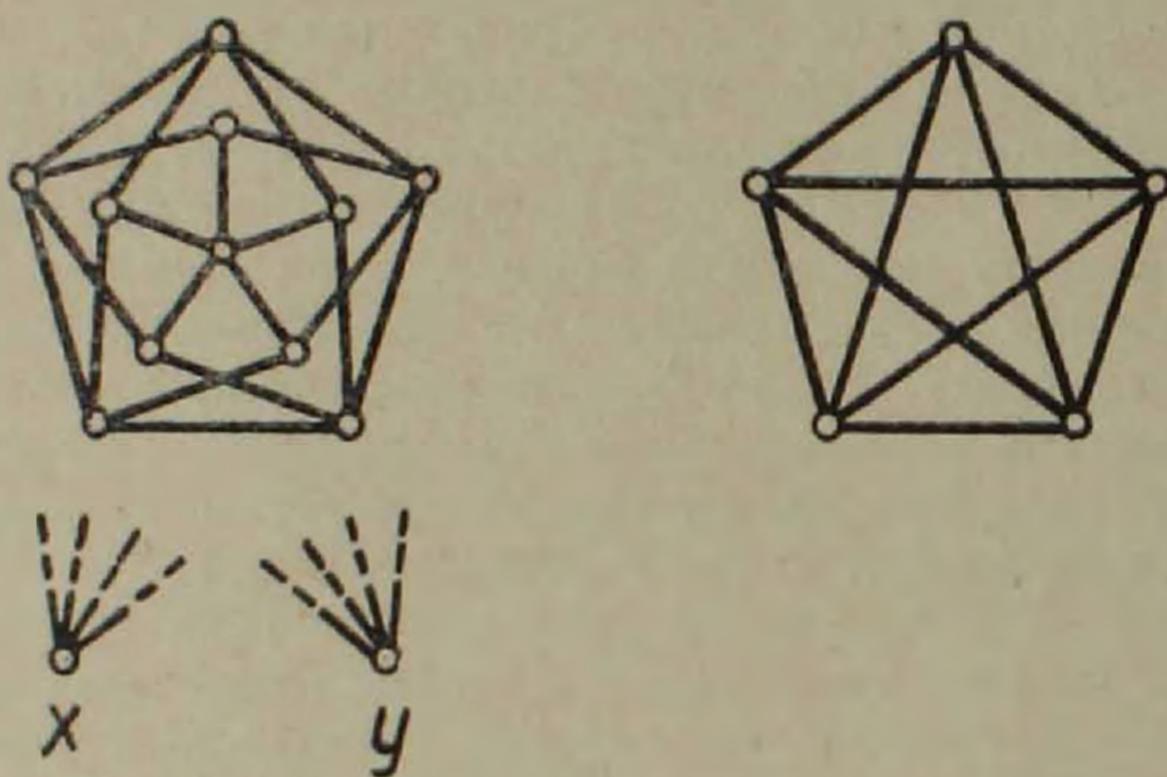


Рис. 1

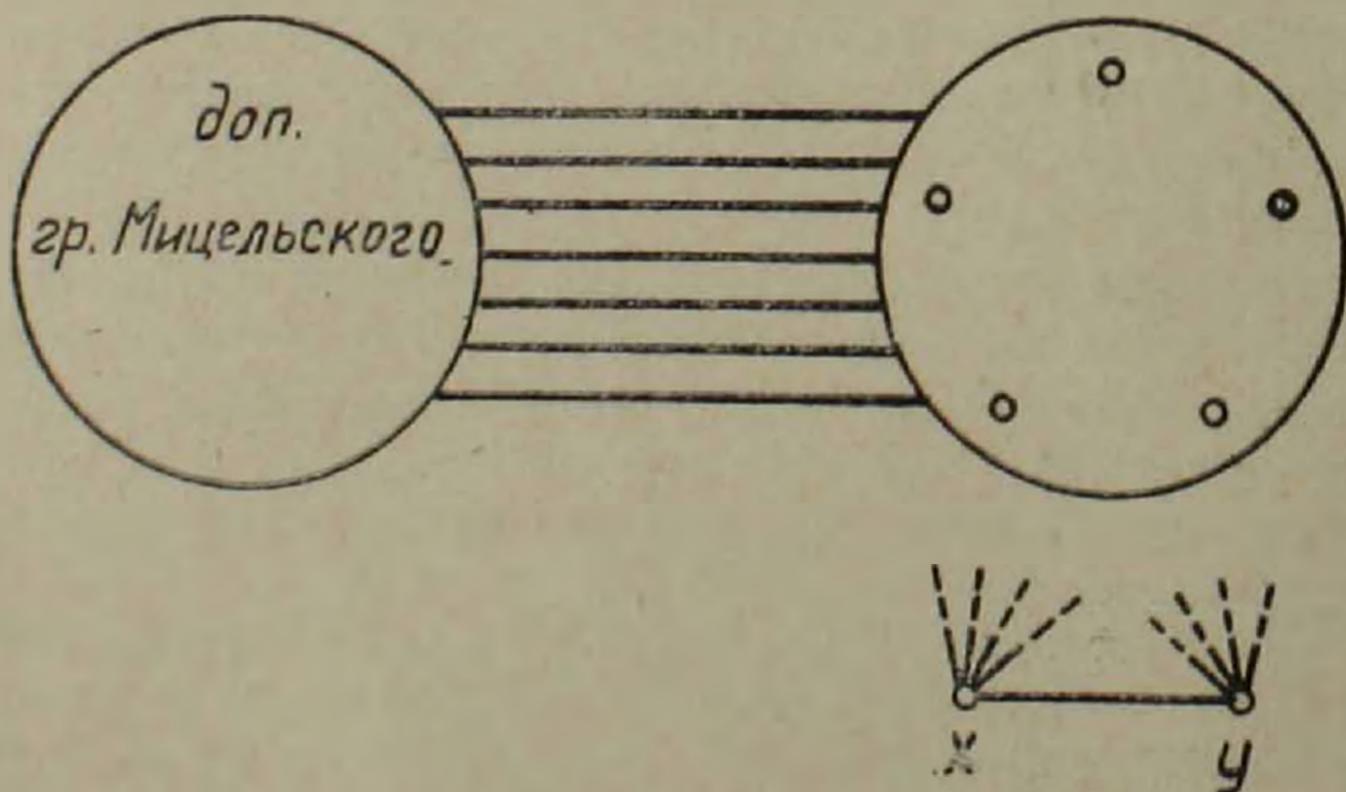


Рис. 2

Описанный процесс повторяем до тех пор, пока не получим такой граф G^s , в котором любые две вершины x_l^s и x_m^s , соответствующих компонент G_l^s и G_m^s , $l \neq m$, $l, m = 1, 2, \dots$ смежны или никакие две вершины из этих компонент не смежны. Итак, граф G^s получается из исходного графа G с помощью повторений следующих двух шагов.

1°. Составление критических компонент и переход к 2°, если еще не получен граф G^s .

2°. Удаление множества ребер между двумя компонентами, которые вместе не составляют полный подграф и переход к 1°. Вместо графа G^s , можно рассмотреть граф $G_{пр}$, вершинами которого являются критические компоненты графа G^s , и две вершины G_l^s, G_m^s смежны в $G_{пр}$, если они смежны в графе G^s . Граф $G_{пр}$ назовем приведенным графом графа G .

Теперь легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *Если критические компоненты в G^s полные, то граф G имеет α -покрытие тогда и только тогда, когда граф $G_{пр}$ имеет α -покрытие.*

Теорема 1 показывает, что при изучении графов, имеющих α -покрытие, можно ограничиться приведенными графами. В связи с этим интересен следующий вопрос: содержит ли приведенный граф существенные дуги?

При отрицательном ответе можно предложить 3° шаг вышеописанного процесса.

3°. В приведенном графе $G_{пр}$ выбрать произвольное ребро и удалить его, после чего перейти к 1°.

К сожалению, можно привести пример приведенного графа, который содержит существенное ребро. Граф, изображенный на рис. 2 приведенный и $u = (x, y)$ —единственное существенное ребро. Несмотря на положительный ответ на данный вопрос для графов, имеющих α -покрытие, кажется верным следующее утверждение. Приведенные графы совершенных графов не содержат существенных дуг. Было бы интересно выяснить этот вопрос. Из правильности сильной гипотезы Бержа непосредственно следует: если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок, то его критические компоненты являются полными подграфами.

Очевидно, что последнее утверждение является более слабой гипотезой, чем сильная гипотеза и вполне естественно сначала попробовать решить эту «слабую» гипотезу. Пока удалось доказать правильность этой гипотезы для частного случая.

Теорема 2. *Пусть граф G не содержит нечетных дырок. Если два различных ребра $u = (x, y)$ и $v = (y, z)$ критические, то в графе G существует ребро $w = (x, z)$.*

Для доказательства этой теоремы, докажем одну простую лемму.

Пусть в произвольном графе L имеем два наибольших внутренне устойчивых множества S и T . Рассмотрим подграф L_{ST} , порожденный множеством вершин S и T . Обозначим компоненты связности подграфа L_{ST} через $L_{ST}^1, L_{ST}^2, \dots$.

Лемма. В любой компоненте $L_{ST}^i, i=1, 2, \dots$ число вершин, принадлежащих множеству S и множеству T , равно:

$$|L_{ST}^i \cap S| = |L_{ST}^i \cap T|, \quad i=1, 2, \dots$$

Доказательство леммы. Если в некоторой i -ой компоненте $|L_{ST}^i \cap S| > |L_{ST}^i \cap T|$, то образовав множество

$$T' = (T \setminus (L_{ST}^i \cap T)) \cup (L_{ST}^i \cap S),$$

мы получим новое внутренне устойчивое множество, число вершин которого больше $\alpha(L)$, лемма доказана.

Доказательство теоремы. Так как ребро uv критическое, то после его удаления в графе G возникает внутренне устойчивое множество с $\alpha(G) + 1$ элементами, содержащее вершины x и y . Это означает, что в графе G существует S_u внутренне устойчивое множество с $\alpha(G) - 1$ элементами, которые вместе с вершинами x или y образуют внутренне устойчивое множество с $\alpha(G)$ элементами. Точно также существует внутренне устойчивое множество S_v .

Обозначим через

$$S_x = \{x\} \cup S_u, \quad S_z = \{z\} \cup S_v.$$

Пусть G_{xz} подграф графа G , порожденный множеством вершин $S_{xz} = S_x \cup S_z$, а G_{xz}^1 и G_{xz}^2 компоненты связности этого подграфа, содержащие соответственно вершины x и z .

Покажем, что компоненты G_{xz}^1 и G_{xz}^2 совпадают.

Если G_{xz}^1 и G_{xz}^2 не пересекаются, то в силу доказанной леммы

$$|G_{xz}^i \cap S_x| = |G_{xz}^i \cap S_z|, \quad i=1, 2, \dots$$

Рассмотрим множество

$$S_v = (S_z \cap G_{xz}^1) \cup (S_x \cap G_{xz}^2) \cup \{y\}.$$

Оно внутренне устойчиво и содержит $\alpha(G) + 1$ элементов. Значит G_{xz}^1 и G_{xz}^2 совпадают, т. е. вершины x и z принадлежат одной и той же компоненте. В подграфе G_{xz} возьмем кратчайшую цепь $P(x, z)$, соединяющую вершины x и z . Легко убедиться, что $P(x, z)$ вместе с ребрами uv и vw составляет простой нечетный цикл и в графе G этот цикл не имеет диагоналей. Так как граф G не содержит нечетных дырок, то отсюда следует, что $P(x, z)$ представляет собой одно ребро $P(x, z) = (x, z) = w$.

Теорема доказана.

Цепь назовем критической, если все ребра критические.

Следствие 1. Слабая гипотеза верна, если в каждой критической компоненте графа G между любыми двумя вершинами существует критическая цепь длины не больше двух.

Следствие 2. Критический связный граф, не содержащий нечетных дырок, является полным. Если критический граф не связный, то он является объединением полных графов.

Следствие 3. Если связный критический граф имеет 1 -покрытие, то он полный.

Все следствия непосредственно вытекают из теоремы 2.

Если связный критический граф совершенный, то из следствия 1 вытекает, что он полный. Следствия 2 и 3 описывают критические графы, когда они не содержат нечетных дырок они имеют 1 -покрытие.

Ереванский научно-исследовательский институт
математических машин

ՈՒՆԻՎԵՐՍԻՏԵՏ

Կատարյալ և կրիտիկական գրաֆուեր

Հոդվածում տրված է կրիտիկական գրաֆի գաղափարը և նրա օգնությամբ ուսումնասիրված է կատարյալ գրաֆների որոշ հատկությունները նկարագրված է կրիտիկական գրաֆների դասը 1 -ծածկույթ ունեցող գրաֆների համար Գտնված է անհրաժեշտ և բավարար պայման 1 -ծածկույթի գոյության համար բերված գրաֆների օգնությամբ, Զնակերպված է Բերդի ուժեղ հիպոթեզից բխող հետևյալ պնդումը՝ Եթե գրաֆը և նրա լրացումը չեն պարունակում կենտ ցիկլեր առանց անկյունագծերի, ապա նրանց կրիտիկական կոմպոնենտները լրիվ են: Իկաացուցված է հետևյալ փաստը՝ Եթե կրիտիկական կոմպոնենտի մեջ կամայական երկու գագաթների միջև գոյություն ունի 2 երկարությամբ կրիտիկական շղթա, ապա այդ կոմպոնենտը լրիվ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ E. Oloru. An. st. Univ. Iasi, Secta 19, № 2, 1973. ² C. Berg. Recent progress in Combinatorics Academic Press, New-York, 1969. ³ L. A. Lovasz I. Comb. Theory, v. 13, № 2 (1972).

УДК 621.313.30

ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

Г. Л. Арешян

Учет насыщения в однофазных индукторных генераторах с пульсирующим потоком

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Носифьяном; 6/IV 1975)

Все индукторные машины с пульсирующим потоком обладают присущей только им особенностью, заключающейся в том, что при изменении мдс приложенной к зубцовой зоне, происходит изменение относительной (по отношению к постоянной составляющей) амплитуды первой гармоники пульсирующего магнитного потока. Известно (1,2), что с увеличением указанной мдс, величина относительной амплитуды уменьшается. Это обстоятельство обуславливает появление явно выраженных экстремумов в характеристиках холостого хода и короткого замыкания однофазных индукторных генераторов с пульсирующим потоком.

В настоящей статье ставится задача обосновать и разработать метод получения корректирующих коэффициентов применительно к теории, развитой в работе автора (3), в одном частном случае. А именно, получение корректирующих коэффициентов исходя из экспериментальных характеристик холостого хода и короткого замыкания.

В основу теории (3) положены дифференциальные уравнения электрических цепей и магнитные проводимости обмоток возбуждения, силовой и демпферной (соответствующие индексы „в“, „с“, „д“)

$$L_{\alpha\beta}(\gamma) = L_{\alpha\beta 0} + \sum_{m=1}^s L_{\alpha\beta m} \cos m\gamma \quad (\alpha, \beta = в, с, д) \quad (1)$$

В линейной постановке (без учета насыщения) проводимости $L_{\alpha\beta m}$ ($m=0, 1, \dots, s$) являются постоянными величинами, не зависящими от величины мдс обмоток.

Поэтому, если параметры $L_{\alpha\beta m}$ определены для какого-либо одного частного режима работы генератора (например для номинального), то величины этих параметров могут быть использованы для всех остальных режимов. Когда же рассматривается нелинейная задача, параметры $L_{\alpha\beta m}$ должны быть определены методом последовательных приближений для каждого конкретного режима работы генератора. Не останавливаясь подробно на этом общем методе, перейдем к рассмотрению част-

ного случая, когда для корректировки используются две экспериментальные характеристики холостого хода и короткого замыкания. Достоинства и недостатки этого метода обсудим в конце статьи.

Выпишем основную систему мдс для случая идеального короткого замыкания и при учете первых гармоник мдс и магнитных проводимостей (обозначения те же, что и в (2)). Для этих условий матрица поперечных мдс $F^d = 0$, матрица $G = 0$, а матрицы D_{α} и B_{α} вырождаются в скаляры, причем

$$D_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta 11} = \lambda_{\alpha\beta 0} + 0,5 \lambda_{\alpha\beta 2} = \lambda_{\alpha\beta 0}, \quad B_{\alpha} = \lambda_{\alpha n 1} \quad (\alpha, \beta = \text{в.с.д}) \quad (2)$$

В соответствии с уравнением (2) и уравнением (38) работы (2), получаем три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{nn0} F_{n1}^d + \lambda_{nc0} F_{c1}^d + \lambda_{na0} F_{a1}^d &= -\lambda_{nn1} f_{n0} \\ \lambda_{cn0} F_{n1}^d + \lambda_{cc0} F_{c1}^d + \lambda_{ca0} F_{a1}^d &= -\lambda_{cn1} f_{n0} \\ \lambda_{an0} F_{n1}^d + \lambda_{ac0} F_{c1}^d + \lambda_{aa0} F_{a1}^d &= -\lambda_{an1} f_{p0} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Амплитуду первой гармоники эдс, которая индуцируется в силовой обмотке от постоянной составляющей мдс обмотки возбуждения получим из уравнения (44) работы (3)

$$E_{\text{остmax}}^d = \omega_1 \omega_c \lambda_{cn1} f_{n0}. \quad (4)$$

В режиме холостого хода генератора эта эдс равна напряжению на зажимах генератора и следовательно, уравнение (4) определяет характеристику холостого хода.

В уравнениях (3) и (4) значения магнитных проводимостей выразим через базовое значение $\frac{\lambda_{cp}}{4p_n}$ и относительные величины (снабжаются волнистой линией сверху):

$$\lambda_{\alpha\beta 0} = \frac{\lambda_{cp}}{4p_n} \bar{\lambda}_{\alpha\beta 0}, \quad \lambda_{\alpha\beta 1} = \frac{\lambda_{cp}}{4p_n} \bar{\lambda}_{\alpha\beta 1} \quad (5)$$

В уравнении (5) $\lambda_{cp} = l_l n_d \lambda_0$, где l_l — аксиальная длина пакета; n_d — число малых зубцов статора, охваченных одной катушкой силовой обмотки; λ_0 — среднее значение магнитной проводимости воздушного зазора на участке одного малого зубцового статора; p_n — число пар полюсов обмотки возбуждения. Относительные значения $\bar{\lambda}_{\alpha\beta 0}$ и $\bar{\lambda}_{\alpha\beta 1}$ могут быть представлены двумя составляющими

$$\bar{\lambda}_{\alpha\beta 0} = \lambda_{\alpha\beta 0}^0 + \rho_{\alpha\beta}, \quad \bar{\lambda}_{\alpha\beta 1} = \lambda_{\alpha\beta 1}^0 + \rho_{\alpha\beta 1}, \quad (6)$$

где $\lambda_{\alpha\beta 0}^0$ и $\lambda_{\alpha\beta 1}^0$ — определены для данного типа генератора в предположении, что стальные участки магнитопровода имеют $\mu = \infty$; $\rho_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta 1}$ — определены как добавки с учетом того, что $\mu \neq \infty$.

В линейной постановке ($\mu = \text{const}$) $\rho_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta 1}$ — оказываются постоянными, в нелинейной постановке ($\mu = \text{var} \neq \infty$) они являются слож-

ными функциями от мдс обмоток.

Можно показать, что при правильно выбранной зубцовой зоне для всех индукторных генераторов с пульсирующим потоком при $\mu = \infty$, $\lambda_{\text{вн1}} = \lambda_{\text{вн2}} = 0$. Сохраняя это условие для $\mu = \text{var}$, получаем

$$\lambda_{\text{вн1}}^0 = \lambda_{\text{вн2}}^0 = 0, \quad \rho_{\text{вн1}} = \rho_{\text{вн2}} = 0 \quad (7)$$

Тогда с учетом (5) + (7), система (3), описывающая режим идеального короткого замыкания, примет вид:

$$\begin{cases} (\lambda_{\text{вн0}}^0 + \rho_{\text{вн}}) F_{\text{вн1}}^d + (\lambda_{\text{вн0}}^0 + \rho_{\text{вн}}) F_{\text{вн2}}^d + (\lambda_{\text{вн0}}^0 + \rho_{\text{вн}}) F_{\text{вн3}}^d = 0 \\ (\lambda_{\text{св0}}^0 + \rho_{\text{св}}) F_{\text{св1}}^d + (\lambda_{\text{св0}}^0 + \rho_{\text{св}}) F_{\text{св2}}^d + (\lambda_{\text{св0}}^0 + \rho_{\text{св}}) F_{\text{св3}}^d = -(\lambda_{\text{св1}}^0 + \rho_{\text{св1}}) f_{\text{в0}} \\ (\lambda_{\text{ав0}}^0 + \rho_{\text{ав}}) F_{\text{ав1}}^d + (\lambda_{\text{ав0}}^0 + \rho_{\text{ав}}) F_{\text{ав2}}^d + (\lambda_{\text{ав0}}^0 + \rho_{\text{ав}}) F_{\text{ав3}}^d = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Решая первое и третье уравнение системы (8), относительно $F_{\text{вн1}}^d$ и $F_{\text{ав1}}^d$ находим

$$F_{\text{вн1}}^d = -\varphi_{\text{в}} F_{\text{св1}}^d, \quad F_{\text{ав1}}^d = -\varphi_{\text{а}} F_{\text{св1}}^d, \quad (9)$$

где

$$\varphi_{\text{в}} = \varphi_{\text{в}}(\lambda_{\text{вн}}^0, \rho_{\text{вн}}); \quad \varphi_{\text{а}} = \varphi_{\text{а}}(\lambda_{\text{ав}}^0, \rho_{\text{ав}}).$$

Подставляя (9) во второе уравнение системы (8), находим зависимость между мдс силовой обмотки $F_{\text{св1}}^d$ и мдс $f_{\text{в0}}$ для режима короткого замыкания

$$F_{\text{св1}}^d = -\frac{(\lambda_{\text{св1}}^0 + \rho_{\text{св1}})}{\varphi_{\text{с}}} f_{\text{в0}}, \quad (10)$$

где

$$\varphi_{\text{с}} = -(\lambda_{\text{св0}}^0 + \rho_{\text{св}}) \varphi_{\text{в}} + (\lambda_{\text{св0}}^0 + \rho_{\text{св}}) - (\lambda_{\text{св0}}^0 + \rho_{\text{св}}) \varphi_{\text{а}}$$

Переходя к эффективным токам $F_{\text{св1}}^d = \sqrt{2} \omega_{\text{с}} I_{\text{с}}^d$, $f_{\text{в0}} = \omega_{\text{в}} I_{\text{в0}}$ и не учитывая знака в уравнении (10) (продольная мдс направлена в режиме короткого замыкания по отрицательной оси „d“) получаем

$$I_{\text{с}}^d = \frac{(\lambda_{\text{св1}}^0 + \rho_{\text{св1}}) \omega_{\text{в}}}{\sqrt{2} \varphi_{\text{с}} \omega_{\text{с}}} I_{\text{в0}}. \quad (11)$$

Интегральное влияние эффектов насыщения в режиме короткого замыкания будем учитывать одним коэффициентом $k_{\text{м}}$. В этом случае уравнение (11) можно представить в виде:

$$I_{\text{с}}^d = c_1 k_{\text{м}} I_{\text{в0}}. \quad (12)$$

где величина c_1 равна тангенсу угла наклона прямолинейной части характеристики короткого замыкания $c_1 = \text{tg} \alpha$ (см. рис. 1.)

Таким образом c_1 может быть определена экспериментально. С другой стороны c_1 определим расчетно при условии, что все $\rho_{\text{ав}} = 0$ и $\rho_{\text{св1}} = 0$, тогда

$$c_1 = \frac{\lambda_{\text{сн1}}^0 \omega_n}{\sqrt{2} \varphi_c^0 \omega_c}, \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c^0 &= -\lambda_{\text{св0}}^0 \varphi_n^0 + \lambda_{\text{сс0}}^0 - \lambda_{\text{сд0}}^0 \varphi_{\text{д}}^0, & \varphi_n^0 &= \frac{\lambda_{\text{вс0}}^0 \lambda_{\text{длс}}^0 - \lambda_{\text{вл0}}^0 \lambda_{\text{дс0}}^0}{\Delta}; \\ \varphi_{\text{д}}^0 &= \frac{\lambda_{\text{дс0}}^0 \lambda_{\text{вл0}}^0 - \lambda_{\text{дл0}}^0 \lambda_{\text{вс0}}^0}{\Delta}; & \Delta &= \lambda_{\text{ов0}}^0 \lambda_{\text{дл0}}^0 - \lambda_{\text{вл0}}^0 \lambda_{\text{дл0}}^0 \end{aligned} \right\} (14)$$

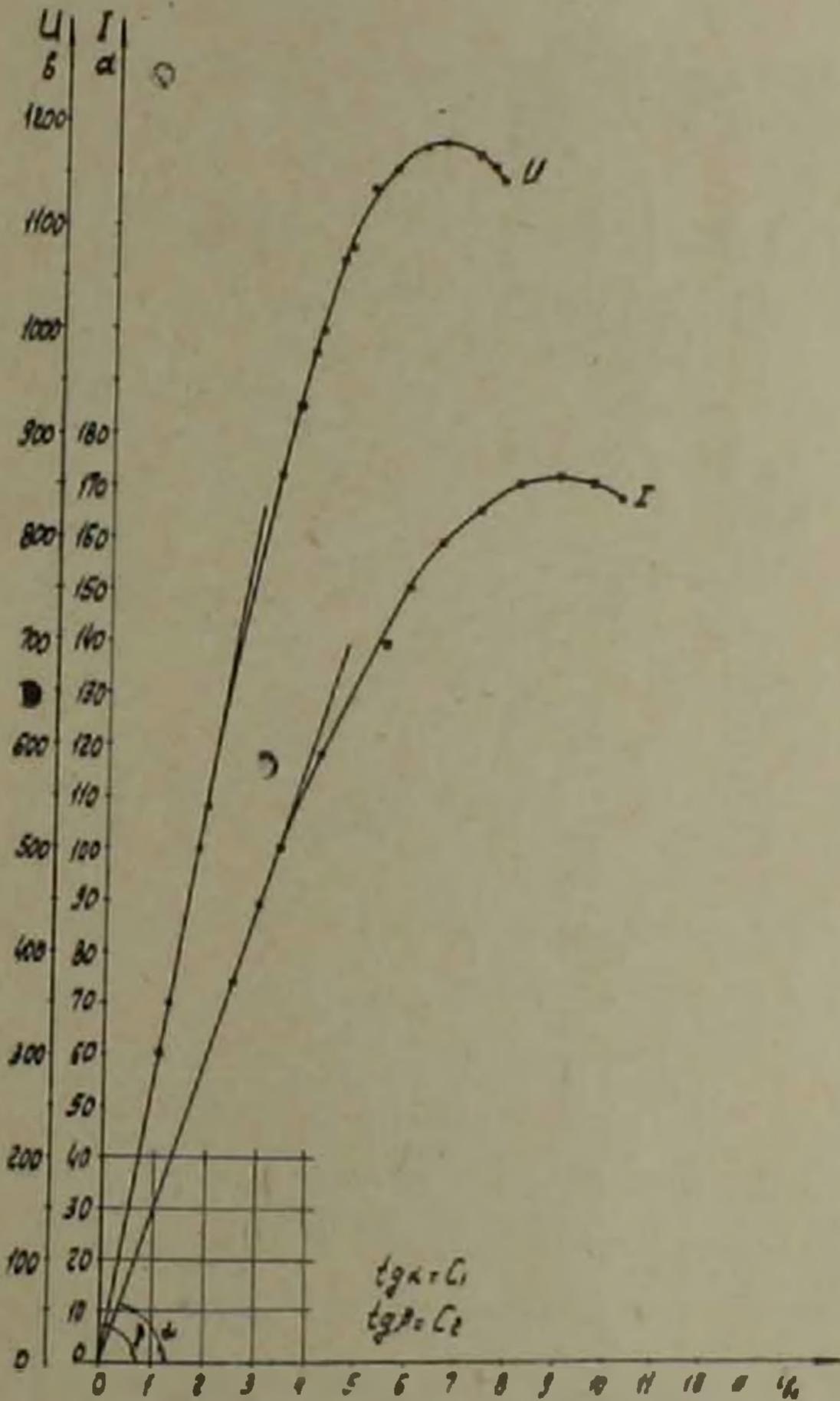


Рис. 1 Характеристики холостого хода и короткого замыкания генератора 100 кат 8000 гц серии ВПЧ. Обмотка возбуждения включена на 120 в. Силовая обмотка включена на 800 в

Величина $\lambda_{\text{сн1}}^0$ для индукторных генераторов (автор проанализировал 13 различных типов) выражается через первый коэффициент мо-

дуляции магнитной проводимости m_1 и для всех типов (кроме генератора типа Гюн) равен

$$\lambda_{\text{св1}}^0 = 2m_1. \quad (15)$$

Для генератора Гюн $\lambda_{\text{св1}}^0 = 4m_1$.

При принятых условиях учета эффектов насыщения, вполне естественно, их интегральное влияние отнести за счет изменения величины коэффициента модуляции. Тогда необходимо считать.

$$i_{\text{св1}}^0 = 2m_1^0, \quad m_1 = k_m m_1^0. \quad (16)$$

Коэффициент k_m легко определяется из характеристики короткого замыкания с учетом уравнения (12) и условия

$$c_1 = ig^2. \quad (17)$$

Полученные численные значения k_m в функции $i_{\text{н0}}$ для генератора серии ВПЧ 100 квт 8000 гц даны на рис. 2

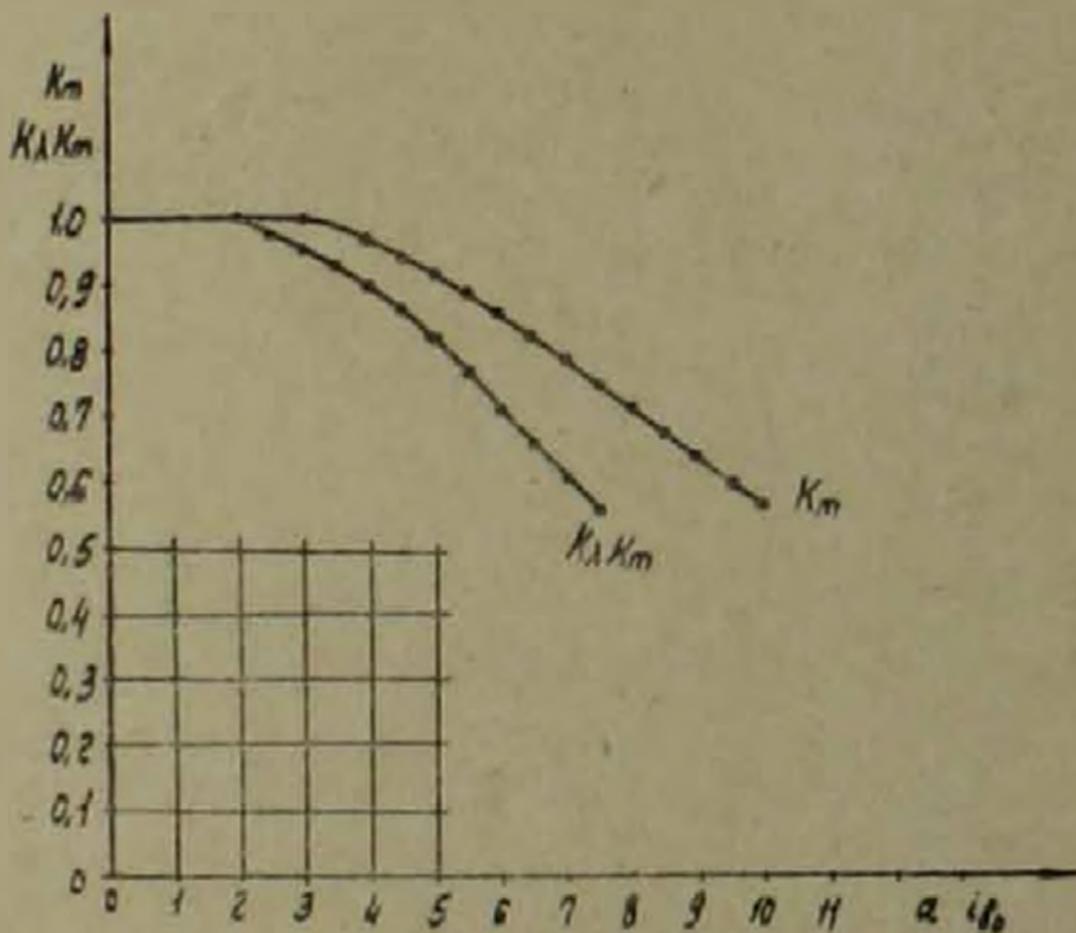


Рис. 2. Коэффициенты корректирующие эффекты насыщения, полученные по характеристикам рис. 1

Из уравнения (4), получаем для характеристики холостого хода, с учетом уравнений (5) и (6):

$$U_0 = \sqrt{2} E_{\text{вс max}} = \sqrt{2} \omega_1 \omega_c \omega_b \frac{\lambda_{\text{ср}}}{4\rho_0} (\lambda_{\text{св1}}^0 + \rho_{\text{св1}}) i_{\text{н0}} \quad (18)$$

Изменение трех параметров $\lambda_{\text{ср}}$ (или λ^0), $\lambda_{\text{св1}}^0$ (или m_1) и $\rho_{\text{св1}}$ определяют отклонение характеристики холостого хода от прямолинейной

Поскольку изменение $\lambda_{\text{св1}}^0$ и $\rho_{\text{св1}}$ в режиме короткого замыкания было учтено коэффициентом k_m , причем считалось, что $\rho_{\text{св1}} = 0$, то уравнение (18) представим в виде

$$U_0 = c_2 k_m k_\lambda i_{\text{н0}}, \quad (19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= \sqrt{2} \omega_1 \omega_c \omega_n \frac{i_{\text{ср}}^0}{4\rho_n} i_{\text{св1}}^0, & i_{\text{св1}}^0 &= 2m_1^0 \\ \lambda_{\text{ср}} &= k_\lambda i_{\text{ср}}^0, & \lambda_0 &= k_\lambda i_0^0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

С другой стороны из характеристики холостого хода (см. рис. 1)

$$c_2 = \text{tg} \beta, \quad (21)$$

Тогда величина $k_m k_\lambda$ как функция $i_{\text{н0}}$ легко определяется экспериментально (см. рис. 2).

Имея $k_m = k_m(i_{\text{св}})$ из характеристики короткого замыкания и $k_m k_\lambda = k_m k_\lambda(i_{\text{н0}})$ из характеристики холостого хода, легко определяется $k_\lambda = k_\lambda(i_{\text{н0}})$. Распространяя полученные изменения магнитных проводимостей на остальные режимы работы генератора (что конечно не совсем корректно), получаем для использования линейной теории с учетом коррекции

$$\lambda_{\text{ср}} = k_\lambda \lambda_{\text{ср}}^0, \quad m_1 = k_m m_1^0, \quad (22)$$

причем

$$\rho_{\alpha\beta} = 0 \quad \rho_{\alpha\alpha} = 0 \quad (\alpha, \beta = \text{в, с, д}). \quad (23)$$

Кратко остановимся на вопросе влияния насыщения на индуктивные сопротивления.

Умножим второе уравнение системы (8) на $\omega_1 \omega_c \frac{i_{\text{ср}}}{4\rho_n}$ и заменим амплитуды мдс эффективными токами $F_{\alpha 1}^d = \sqrt{2} \omega_n I_{\alpha 1}^d$, $F_{\alpha 2}^d = \sqrt{2} \omega_c I_{\alpha 2}^d$, $F_{\alpha 3}^d = \sqrt{2} \omega_n I_{\alpha 3}^d$ тогда с учетом (4) и (5) получим

$$\left(x_{\alpha 1}^d \frac{I_{\alpha 1}^d}{I_c^d} + x_{\alpha 2}^d + x_{\alpha 3}^d \frac{I_{\alpha 3}^d}{I_c^d} \right) I_{\alpha 1}^d = -E_{0\alpha}^d, \quad (24)$$

где $E_{0\alpha}^d = \sqrt{2} E_{0\alpha}^q$, $x_{\alpha 1}^d$ — индуктивные машинные сопротивления для первых гармоник токов и эдс силовой обмотки (см. уравнения (49) и (50) работы (2)).

В уравнении (24) выражение в скобках представляет собой машинное эксопротивление силовой обмотки по продольной оси (4).

$$x_{\alpha 1}^d = x_{\alpha 1}^d \frac{I_{\alpha 1}^d}{I_c^d} + x_{\alpha 2}^d + x_{\alpha 3}^d \frac{I_{\alpha 3}^d}{I_c^d}. \quad (25)$$

С учетом (25) получаем из (24) (знак минус опускаем из тех же соображений, что и при получении уравнения (12) из уравнения (10))

$$x_c^d I_c^d = E_0^q. \quad (26)$$

Считая, что в режиме короткого замыкания величина эдс E_{0c}^q при данном токе $i_{\text{в0}}$ такая же, как и в режиме холостого хода, можем использовать уравнение (19). Подставляя в (26) выражение I_c^d по (12), с учетом (19), получаем $x_c^d c_1 k_m i_{\text{в0}} = c_2 k_m k_1 i_{\text{в0}}$ откуда

$$x_c^d = \frac{c_2}{c_1} k_1. \quad (27)$$

Ненасыщенное значение x_c^d равно отношению $\frac{c_2}{c_1}$. Зависимость x_c^d от тока возбуждения, с учетом эффектов насыщения, находится из характеристик короткого замыкания и холостого хода

$$x_c^d = \frac{E_0^q}{I_c^d}, \quad (28)$$

где $E_0^q = E_0^q(i_{\text{в0}})$ — характеристика холостого хода; $I_c^d = I_c^d(i_{\text{в0}})$ — характеристика короткого замыкания.

Таким образом, для принятой методики коррекции эффектов насыщения, коэффициент k_m корректирует первый коэффициент модуляции m_1 , коэффициент k_1 корректирует среднее значение магнитной проводимости $i_{\text{ср}}$ (см. уравнение (20)) и одновременно корректирует индуктивное машинное экасопротивление силовой обмотки по продольной оси x_c^d . Основным достоинством предлагаемого метода коррекции является возможность учитывать изменение средней величины магнитной проводимости $i_{\text{ср}}$ и первого коэффициента модуляции m_1 через один независимый параметр $i_{\text{в0}}$ — постоянную составляющую тока возбуждения. Так как при этом используются экспериментальные характеристики холостого хода и короткого замыкания, то при коррекции одновременно учитываются эффекты насыщения стальных участков магнитопровода не только в зоне малых зубцов, но и во всех остальных участках (если таковые имеют место).

Отмеченная возможность корректировки по одному независимому параметру $i_{\text{в0}}$ в свою очередь, дает возможность рассчитывать конкретный установившийся режим работы генератора сразу, не прибегая к методу последовательных приближений.

К недостаткам предлагаемого метода относятся:

а) необходимость наличия экспериментальных характеристик холостого хода и короткого замыкания;

б) использование корректирующих коэффициентов k_m и k_1 в ограниченной области множества установившихся режимов, таких, в которых величина продольной составляющей мдс силовой обмотки изменяется мало, при изменении нагрузки и фиксированной постоянной составляющей тока возбуждения $i_{\text{в0}}$. Практически, однако, эта область достаточно велика и включает нагрузки с изменением $\cos\varphi$ от $\cos\varphi = 0$

через $\cos\varphi=1$, до $\cos\varphi=0,8$ емкостной. Такой широкий диапазон изменения $\cos\varphi$ объясняется большими (по сравнению с величиной полного сопротивления внешней нагрузки) машинными индуктивными экасопротивлениями по продольной и поперечной осям однофазных индукторных генераторов с пульсирующим потоком. Это обстоятельство обуславливает сравнительно малые изменения продольной составляющей мдс силовой обмотки, а следовательно и относительные малые изменения размагничивающего влияния этой мдс при фиксированных значениях постоянной составляющей тока возбуждения.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Գ. Լ. ԱՐԵՇՅԱՆ

Մարախող հոսքով միաֆազ ինդուկտորային գեներատորներում հազեցման հաշվառումը

Ցույց է արվում, որ երկու կորեկտոր գործակիցներ մտցնելով կարելի է հաշվի առնել հազեցումը: Այդ գործակիցներն որոշվում են պարասյ ընթացքի և կարճ միացման բնութագրերից: Նրանք կախված են գրգռման հոսանքից: Գործակիցներից մեկը կորեկտում է մոդուլյացիայի առաջին գործակիցը իսկ մյուսը՝ մագնիսական հաղորդականության միջին արժեքը: Այդ գործակիցների ավելացումը տեսության⁽¹⁾ բանաձևերի մեջ թույլ է տալիս շրջանցել հազեցման էֆեկտները հաշվի առնող աստիճանական մոտեցումների մեթոդով հաշվարկները:

Առաջարկված մեթոդը խիստ շի համարվում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Алексеева, Машинные генераторы повышенной частоты, изд. Энергия, 1967.
² Н. Я. Альпер, А. А. Терзян, Индукторные генераторы, изд. «Энергия», 1970. ³ Г. Л. Арешян, ДАН Арм. ССР, т. 58, № 5 (1974). ⁴ Г. Л. Арешян, «Известия АН Арм. ССР» (серия технических наук) т. 27, № 5 (1974).

УДК 577.17

БИОХИМИЯ

Член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Галоян,
 Р. О. Карапетян

**Влияние соматостатина и тиреотропин-рилизинг гормона
 на окислительное фосфорилирование в митохондриях
 некоторых органов гипофизэктомированных крыс**

(Представлено 16/IX 1974)

В предыдущей работе мы сообщили о влиянии нового гипоталамического фактора—соматостатина, на окислительное фосфорилирование митохондрий различных органов кролика. Было показано, что как в условиях *in vivo*, так и *in vitro* этот тетрадекапептид сильно ингибирует окислительное фосфорилирование в митохондриях печени, почек, сердца и гипоталамуса.

Нами было показано также влияние тиреотропин-рилизинг (ТРГ) гормона на окислительное фосфорилирование в митохондриях сердца, гипоталамуса, почек и печени кролика. Данные показывают, что ТРГ⁽¹⁾ оказывает стимулирующее влияние на окислительное фосфорилирование в митохондриях вышеуказанных органов как при внутривенном введении, так и при прямом воздействии на митохондрии⁽²⁾.

Представляло интерес изучить влияние соматостатина и ТРГ на окислительное фосфорилирование митохондрии вышеуказанных органов после гипофизэктомии у крыс.

Гипофизэктомия у крыс проводили паратрахеальным и трансуретеральным методами^(3,4). Соматостатин и ТРГ растворяли в физиологическом растворе и вводили в яремную вену или добавляли в среду в следующих дозах: при внутривенном введении по 1 мкг/кг, а при прямом добавлении по 0,01 мкг на пробу. Через 20—25 минут после введения животных быстро обезглавливали, отделяли сердце, гипоталамус, печень, почки и изучали окислительное фосфорилирование в митохондриях этих тканей. В контрольных опытах вместо препаратов вводили тот же объем физиологического раствора. Изолирование митохондрий и изучение окислительного фосфорилирования в них проводили по методам С. Е. Северина и соавт.⁽⁵⁾ и В. П. Скулачева⁽⁶⁾.

Путем дифференциального центрифугирования отделяли митохондрии. Инкубацию проводили в сосудиках Варбурга при 26° 30 мин. Количество эстерифицированного фосфата устанавливали по разности в содержании фосфата в пробах до и после инкубации. Фосфор и белок определяли по Лоури^(7,8).

Таблица 1

Влияние соматостатина и ТРГ на окислительное фосфорилирование в митохондриях сердца гипофизэктомированных крыс (О и Р в мкатамах, $M \pm m$). Число опытов—5.

	О	Р	Р,О
Контроль (интакт. крысы)	0.66±0.1	0.0±0.0	0.0±0.0
Сукцинат	2.02±0.19	3.33±0.2	1.67±0.13
Гипофизэктомия (ГЭ)	0.55±0.03	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + сукцинат	1.61±0.11 $P_2 < 0.1$	2.22±0.4 $P_2 < 0.05$	1.4±0.29 $P_2 < 0.2$
ГЭ + соматостатин	0.12±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + соматостатин + сукц. (in vivo)	0.49±0.07 $P_2 < 0.001$	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + соматост. + сукцинат (in vitro)	0.24±0.05 $P_2 < 0.05$	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + ТРГ	0.52±0.15	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + ТРГ + сукцинат (in vivo)	2.62±0.39 $P_2 < 0.2$	3.17±0.28 $P_2 < 0.5$	1.03±0.11 $P_2 < 0.01$
ГЭ + ТРГ + сукцинат (in vitro)	2.98±0.12 $P_4 < 0.001$	2.59±0.4 $P_4 < 0.5$	0.88±0.16 $P_4 < 0.1$
α — КГ	2.98±0.08	8.31±0.45	2.79±0.29
ГЭ + α — КГ	2.64±0.24 $P_{11} < 0.2$	5.11±0.57 $P_{11} < 0.02$	1.98±0.29 $P_{11} < 0.05$
ГЭ + α — КГ + соматост. (in vivo)	0.68±0.07 $P_2 < 0.1$	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + α — КГ + соматост. (in vitro)	0.39±0.08 $P_2 < 0.02$	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + α — КГ + ТРГ (in vivo)	5.19±0.64 $P_{12} < 0.02$	9.21±0.81 $P_{12} < 0.01$	1.76±0.16 $P_{12} < 0.5$
ГЭ + α — КГ + ТРГ (in vitro)	5.63±0.07 $P_{12} < 0.001$	7.76±0.2 $P_{12} < 0.001$	1.5±0.12 $P_{12} < 0.2$

Примечание. Цифра у Р указывает, с какой серией сравнивается достоверность различий.

Таблица 2

Влияние соматостатина и ТРГ на окислительное фосфорилирование в митохондриях гипоталамуса гипофизэктомированных крыс (О и Р в мкатамах, $M \pm m$). Число опытов—5.

	О	Р	Р,О
Контроль (интакт. крысы)	0.31±0.05	0.0±0.0	0.0±0.0
Сукцинат	2.07±0.2	3.33±0.4	1.59±0.12
Гипофизэктомия (ГЭ)	0.22±0.01	0.0±0.0	0.0±0.0
Гипофизэктомия + сукцинат	1.77±0.31 $P_2 < 0.2$	2.59±0.4 $P_2 < 0.2$	1.48±0.16 $P_2 < 0.001$
ГЭ + соматостатин	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + соматост. + сукц. (in vivo)	0.43±0.1 $P_4 < 0.01$	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + соматост. - - сукц. (in vitro)	0.19±0.03 $P_2 < 0.2$	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + ТРГ	0.36±0.05	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + ТРГ + сукцинат (in vivo)	2.59±0.25 $P_2 < 0.2$	3.38±0.79 $P_2 < 0.5$	1.35±0.28 $P_2 < 0.2$
ГЭ + ТРГ + сукцинат (in vitro)	2.81±0.12 $P_4 < 0.02$	2.79±0.33 $P_4 < 0.5$	1.03±0.08 $P_4 < 0.05$
α — КГ	2.95±0.11	8.33±0.65	2.82±0.13
ГЭ + α — КГ	3.07±0.86 $P_{11} < 0.5$	6.35±1.19 $P_{11} < 0.2$	2.19±0.23 $P_{11} < 0.05$
ГЭ + α — КГ + соматост. (in vivo)	0.73±0.08 $P_2 < 0.001$	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + α — КГ + соматост. (in vitro)	0.39±0.08 $P_2 < 0.1$	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + α — КГ + ТРГ (in vivo)	5.11±0.48 $P_{12} < 0.1$	9.31±1.25 $P_{12} < 0.1$	1.85±0.18 $P_{12} < 0.2$
ГЭ + α — КГ + ТРГ (in vitro)	4.98±0.32 $P_{12} < 0.1$	7.65±0.2 $P_{12} < 0.2$	1.56±0.1 $P_{12} < 0.2$

Примечание. Цифра у Р указывает, с какой серией сравнивается достоверность различий.

Влияние соматостатина и ТРГ на окислительное фосфорилирование в митохондриях печени гипофизэктомированных крыс (О и Р в мкатамах, $M \pm m$) Число опытов—5.

	О	Р	Р/О
Контроль (инт. крысы)	0.59±0.06	0.0±0.0	0.0±0.0
Сукцинат	1.89±0.14	3.31±0.12	1.75±0.14
Гипофизэктомия (ГЭ)	0.91±0.2	1.06±0.05	0.0±0.0
ГЭ + сукцинат	2.26±0.27	3.15±0.4	1.39±0.1
	$P_2 < 0.2$	$P_2 < 0.5$	$P_2 < 0.05$
ГЭ + соматостатин	0.1±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + соматост. + сукц. (in vivo)	0.36±0.07	0.0±0.0	0.0±0.0
	$P_4 < 0.001$		
ГЭ + соматост. + сукц. (in vitro)	0.2±0.04	0.0±0.0	0.0±0.0
	$P_3 < 0.05$		
ГЭ + ТРГ	0.36±0.08	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + ТРГ + сукцинат (in vivo)	3.6±0.49	3.81±0.51	1.62±0.31
	$P_2 < 0.2$	$P_2 < 0.2$	$P_2 < 0.5$
ГЭ + ТРГ + сукцинат (in vitro)	2.88±0.13	3.15±0.4	1.1±0.16
	$P_4 < 0.1$		$P_4 < 0.1$
α — КГ	3.25±0.1	8.4±0.65	2.62±0.24
ГЭ + α — КГ	4.44±0.85	9.44±1.84	2.14±0.12
	$P_{11} < 0.2$	$P_{11} < 0.2$	$P_{11} < 0.1$
ГЭ + α — КГ + соматост. (in vivo)	0.49±0.03	0.0±0.0	0.0±0.0
	$P_3 < 0.1$		
ГЭ + α — КГ + соматост. (in vitro)	0.34±0.08	0.0±0.0	0.0±0.0
	$P_3 < 0.02$		
ГЭ + α — КГ + ТРГ (in vivo)	5.37±0.33	7.99±0.45	1.5±0.03
	$P_{12} < 0.2$	$P_{12} < 0.2$	$P_{12} < 0.01$
ГЭ + α — КГ + ТРГ (in vitro)	4.1±0.45	7.73±1.05	1.99±0.36
	$P_{12} < 0.5$	$P_{12} < 0.1$	$P_{12} < 0.5$

Примечание. Цифра у Р указывает, с какой серией сравнивается достоверность различий

Таблица 1

Влияние соматостатина и ТРГ на окислительное фосфорилирование в митохондриях почек гипофизэктомированных крыс (О и Р в мкатамах, $M \pm m$) Число опытов—5.

	О	Р	Р/О
Контроль (инт. крысы)	0.32±0.05	0.0±0.0	0.0±0.0
Сукцинат	1.92±0.1	3.7±0.4	1.92±0.14
Гипофизэктомия (ГЭ)	0.25±0.07	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + сукцинат	2.18±0.27	3.7±1.19	1.61±0.39
	$P_2 < 0.2$		$P_2 < 0.2$
ГЭ + соматостатин	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + соматост. + сукц. (in vivo)	0.39±0.06	0.0±0.0	0.0±0.0
	$P_4 > 0.001$		
ГЭ + соматост. + сукц. (in vitro)	0.23±0.06	0.0±0.0	0.0±0.0
	$P_3 < 0.5$		
ГЭ + ТРГ	0.3±0.01	0.0±0.0	0.0±0.0
ГЭ + ТРГ + сукцинат (in vivo)	2.97±0.43	3.8±0.51	1.36±0.18
	$P_2 < 0.05$	$P_2 < 0.5$	$P_2 < 0.05$
ГЭ + ТРГ + сукцинат (in vitro)	2.95±0.21	3.73±0.63	1.28±0.21
	$P_4 < 0.001$	$P_4 < 0.5$	$P_4 < 0.2$
α — КГ	3.03±0.18	8.02±0.54	2.69±0.24
ГЭ + α — КГ	3.65±0.49	9.21±1.19	2.42±0.12
	$P_{11} < 0.2$	$P_{11} < 0.2$	$P_{11} < 0.2$
ГЭ + α — КГ + соматост. (in vivo)	0.59±0.07	0.0±0.0	0.0±0.0
	$P_3 < 0.02$		
ГЭ + α — КГ + соматост. (in vitro)	0.41±0.07	0.0±0.0	0.0±0.0
	$P_3 < 0.1$		
ГЭ + α — КГ + ТРГ (in vivo)	5.49±0.25	8.23±0.8	1.53±0.2
	$P_{12} < 0.02$	$P_{12} < 0.5$	$P_{12} < 0.01$
ГЭ + α — КГ + ТРГ (in vitro)	4.78±0.15	8.71±0.79	1.85±0.14
	$P_{12} < 0.05$	$P_{12} < 0.5$	$P_{12} < 0.05$

Примечание. Цифра у Р указывает, с какой серией сравнивается достоверность различий.

Соматостатин при внутривенном введении гипофизэктомированным животным (табл. 1) резко ингибирует поглощение кислорода: при добавлении сукцината оно составляет $0,49 \pm 0,07$, а при α -кетоглутарате — $0,68 \pm 0,07$ мкатама. При этом эстерификация фосфата не происходит. Ингибирующее влияние соматостатина на поглощение кислорода еще более выражено в опытах при прямом добавлении в пробы: при наличии сукцината поглощение кислорода составляет $0,24 \pm 0,05$, а α -кетоглутарата — $0,39 \pm 0,08$ мкатама.

У гипофизэктомированных крыс ТРГ слегка стимулирует поглощение кислорода митохондриями сердца в присутствии сукцината, однако при этом сопряженное фосфорилирование не повышается. При добавлении α -кетоглутарата отмечается некоторое повышение поглощения кислорода. Одновременно количество эстерифицированного фосфата понижается.

Почти аналогичные сдвиги в окислительном фосфорилировании наблюдаются в митохондриях печени, почек и гипоталамуса (табл. 2, 3, 4) как при внутривенном введении гипофизэктомированным крысам, так и при прямом добавлении соматостатина и ТРГ. Но в условиях *in vitro* ингибирующий эффект соматостатина на дыхание и фосфорилирование во всех органах более выражен.

Таким образом, эффект соматостатина на окислительное фосфорилирование изученных органов, по-видимому, не осуществляется через гипофиз, наоборот в гипофизе, по-видимому, имеются факторы, которые понижают действие соматостатина на дыхание и еще сильнее на эстерификацию фосфата.

Иные результаты отмечаются под влиянием ТРГ. Сохраняя свой характерный стимулирующий эффект на поглощение кислорода и незаметное уменьшение на эстерификацию фосфата, во всех случаях Р/О снижается, причем более заметно в присутствии α -кетоглутарата.

Полученные данные показывают, что ТРГ стимулирует дыхание в митохондриях вышеуказанных органов и у гипофизэктомированных крыс, а также свидетельствуют о том, что во всех изученных органах соматостатин резко подавляет дыхание митохондриями и сопряженное фосфорилирование у интактных животных, в то время как у гипофизэктомированных полностью ингибирует фосфорилирование.

Результаты наших исследований свидетельствуют о том, что соматостатин является мощным ингибирующим фактором окислительно-восстановительных, протеолитических (и, вероятно, других ферментов), чем можно объяснить его физиологическое влияние. Вероятно, при уменьшении концентраций вещества проявятся различные стороны его действия.

Սոմատոստատինի և քիբոտրոպին ռիլիզինգ հորմոնի (ՔՌՀ) ազդեցությունը
օբսիդացիոն ֆոսֆորիլացման վրա հիպոֆիզկտոմիայի ենթարկված սպի-
տակ առնետների մի Բանի օրգանների միտոքոնդրիաներում

Ցույց է տրվել սոմատոստատինի և ՔՌՀ-ի ազդեցությունն օբսիդացիոն
ֆոսֆորիլացման վրա հիպոֆիզկտոմիայի ենթարկված սպիտակ առնետների
վերը նշված օրգանների միտոքոնդրիաներում:

Սոմատոստատինի ազդեցության տակ բոլոր օրգանների միտոքոնդրիա-
ներում նկատվում է թթվածնի աննկատելի կլանում, մանավանդ in vitro
փորձերում, իսկ ֆոսֆորի էսթերիֆիկացում երկու դեպքումն էլ տեղի չի
ունենում:

ՔՌՀ-ը, սակայն խթանում է թթվածնի կլանումը բոլոր օրգանների միտո-
քոնդրիաներում, որը ավելի ցայտուն կերպով նկատվում է սրտում 1-կետո-
գլյուտարատի օգտագործման դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Галоян, Р. О. Карапетян, ДАН Арм. ССР, т. 59, № 3 (1974). ² А. А. Га-
лоян, Р. О. Карапетян, В. С. Сафарян, ДАН Арм. ССР, т. 58, № 4 (1974). ³ Э. Р. Баг-
рамян, Т. С. Сахацкая, Пробл. эндокринологии, 5, 46 (1962). ⁴ В. П. Федотов, Э. Р.
Баграмян, Л. В. Алексина, Пробл. эндокринологии, 2, 102 (1971). ⁵ А. М. Зубавская,
Н. О. Степанян, С. Е. Северин, Вопросы мед. химии, 14, 533 (1968). ⁶ В. П. Ску-
лачев, Состояние окисления и фосфорилирования в дыхательной цепи. М., 1962.
⁷ O. H. Lowry and J. A. Lopez, J. Biol. Chem., 162, 421 (1946). ⁸ O. H. Lowry et
al., J. Biol. Chem., 193, 265 (1951)

УДК 577.17

БИОХИМИЯ

С. С. Алексанян, член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Галоян,
 Ф. Е. Путилина

Влияние нейрого르몬а «С» на активность
 некоторых дегидрогеназ

(Представлено 12/II 1974)

Цикл трикарбоновых кислот занимает одно из центральных мест в метаболизме клетки и прежде всего в силу своей высокой энергетической эффективности. Наиболее важными в этом отношении являются дегидрогеназные реакции цикла; в ходе их водород от субстрата переносится на соответствующий кофермент (ФАД, НАД, НАДФ), при окислении которого с участием электрон-транспортной цепи митохондрий и выделяется основное количество энергии в клетке. От активности дегидрогеназных реакций в значительной мере зависит интенсивность всего цикла трикарбоновых кислот, а, следовательно, и продукция энергии в клетке.

Ранее одним из авторов статьи (1-4) из гипоталамуса крупного рогатого скота был выделен препарат, условно названный нейрого르몬ом «С». Дальнейшие исследования показали, что этот препарат является сильным коронарорасширяющим средством и оказывает заметное влияние на интенсивность метаболических процессов, в частности, на обмен пирувата и лактата (5).

Целью настоящей работы явилась попытка выяснения влияния нейрого르몬а «С» на активность ряда дегидрогеназ в мозгу, сердце, печени и почках крыс.

Опыты ставили на белых крысах обоего пола, весом 120—130 г. Нейрого르몬 «С» вводили в V. jugularis под эфирным наркозом. Доза однократного введения 1—2 мкг на целое животное. Животные забивались декапитацией через 30 мин после введения нейрого르몬а.

В работе проводили определение активности следующих дегидрогеназ: изоцитратдегидрогеназы (ИЦДГ, 1.1.1.41—42), α-кетоглутаратдегидрогеназы (КДГ, 1.2.4.2), сукцинатдегидрогеназы (СДГ, 1.3.99.1), малатдегидрогеназы (МДГ, 1.1.1.37.40), пируватдегидрогеназы (ПДГ, 1.2.4.1) и лактатдегидрогеназы (ЛДГ, 1.1.1.27). Определение актив-

ности ферментов проводили по методу Нордманна и соавторов (7), а модификации Ф. Е. Путильной и Н. Д. Ещенко (8). Активность ферментов определяли в гомогенатах мозга, сердца, печени, почек и выражали в мкг тетразолия синего, восстановленного за 20 мин инкубации в расчете на 1 мг белка. Для определения содержания белка в гомогенатах использовали метод Лоури (9). Полученные данные обработаны статистически, в таблицах приводятся средние результаты из 7 опытов.

Результаты, полученные при определении активности дегидрогеназ в исследованных органах контрольных животных и получавших нейрогормон «С», представлены в табл. 1—4. Как видно из данных, однократная инъекция животным нейрогормона приводит к заметным изменениям в активности дегидрогеназ ЦТК, причем величина и направленность этих изменений неодинакова в разных органах. Наиболее чувствительными к действию нейрогормона «С» являются дегидрогеназы сердечной мышцы (табл. 1). Активность ИЦДГ в сердце через 30 мин после введения нейрогормона уменьшается в среднем на 71%. Снижение интенсивности первого окислительного звена ЦТК, в значительной мере определяющего скорость всего цикла, несомненно будет отражаться на активности и других окислительных стадий ЦТК. Действительно, как видно из табл. 1, активность КДГ и СДГ также снижается хотя и в меньшей степени, чем активность ИЦДГ (на 23 и 33% соответственно). Активность МДГ фактически не изменяется, наблюдаемое небольшое повышение оказалось статистически недостоверным.

Что касается ПДГ и ЛДГ, то активность этих энзимов, в отличие от дегидрогеназ ЦТК, повышается на 60%. Изменение активности ферментов согласуется с изменением уровня некоторых субстратов их окисления. Так, например, уменьшение активности КДГ сопровождается накоплением α -кетоглутаровой кислоты в сердечной мышце, в то же время повышение активности ПДГ вызывает резкое падение уровня пирувата в этой ткани (10). В то же время необходимо отметить, что, поскольку эти две кетокислоты относятся к таким веществам, которые располагаются в точке перекреста нескольких метаболических путей, то уровень их будет зависеть от активности ряда ферментов, катализирующих их превращения. В связи с этим становится понятным, почему повышение активности ПДГ всего на 60% вызывает уменьшение уровня пирувиноградной кислоты в сердечной мышце в 5 раз, а снижение активности КДГ лишь на 23% сопровождается увеличением концентрации α -кетоглутаровой кислоты на 63% (11).

Активность ЛДГ в сердце после внутривенного введения нейрогормона «С» повышается на 60% по сравнению с контролем; одновременно с этим уровень лактата возрастает в 2 раза. Можно предположить, что повышается не только активность ЛДГ, но и сдвигается равновесие лактатдегидрогеназной реакции в сторону образования лактата. Это предположение подтверждается данными, полученными при определении содержания пирувиноградной кислоты. Все выше изложенное дает основание сделать предположение, что нейрогормон «С» вызывает

уменьшение интенсивности реакций ЦТК и, напротив, интенсификации реакций гликолиза в сердечной мышце.

Таблица 1

Активность дегидрогеназ в сердце крыс в норме и после введения нейрогормона «С» (мкг восстановленного тетразолия/20 мин/мг белка)

Ферменты	Активность ферментов		Изменение, %
	Контроль	Введение нейрогормона «С»	
Изоцитрат — ДГ	16,4 ± 5,5	4,7 ± 1,1	- 71%
α — кетоглутарат — ДГ	48,6 ± 13,6	37,4 ± 8,9	- 23%
Сукцинат — ДГ	84,7 ± 15,1	65,6 ± 3,9	- 33%
Малат — ДГ	17,2 ± 7,6	20,4 ± 4,7	+ 19%
Пируват — ДГ	9,7 ± 2,4	15,6 ± 2,3	+ 61%
Лактат — ДГ	10,3 ± 2,6	16,5 ± 3,7	+ 60%

Таблица 2

Активность дегидрогеназ в почках крыс в норме и после введения нейрогормона «С» (мкг восстановленного тетразолия/20 мин/мг белка)

Ферменты	Активность ферментов		Изменение, %
	Контроль	Введение нейрогормона «С»	
Изоцитрат — ДГ	15,5 ± 3,9	6,7 ± 2,6	- 57%
α — кетоглутарат — ДГ	48,2 ± 6,5	16,2 ± 6,8	- 66%
Сукцинат — ДГ	89,2 ± 14,7	57,4 ± 10,1	- 36%
Малат — ДГ	7,3 ± 3,0	8,5 ± 3,7	+ 16%
Пируват — ДГ	16,3 ± 3,5	6,6 ± 2,2	- 60%
Лактат — ДГ	7,9 ± 2,8	7,3 ± 2,4	- 8%

Таблица 3

Активность дегидрогеназ в печени крыс в норме и после введения нейрогормона «С» (мкг восстановленного тетразолия/20 мин/мг белка)

Ферменты	Активность ферментов		Изменения
	Контроль	Введение нейрогормона «С»	
Изоцитрат — ДГ	19,3 ± 1,7	9,9 ± 1,7	- 49%
α — кетоглутарат — ДГ	20,2 ± 2,4	23,5 ± 1,9	+ 12%
Сукцинат — ДГ	61,8 ± 2,7	63,9 ± 3,4	+ 3%
Малат — ДГ	21,9 ± 2,7	27,7 ± 1,8	+ 11%
Пируват — ДГ	15,3 ± 2,9	20,1 ± 1,4	+ 31%
Лактат — ДГ	15,4 ± 2,7	17,7 ± 1,3	+ 15%

Активность дегидрогеназ в головном мозгу крыс в норме и после введения нейрогормона «С» (мкг восстановленного тетразолия/20 мик/мг белка)

Ферменты	Активность ферментов		Изменения %
	Контроль	Введение нейрогормона «С»	
Изоцитрат — ДГ	6.8 ± 1.4	9.8 ± 3.3	+ 44%
α — кетоглутарат — ДГ	7.5 ± 1.7	11.5 ± 3.3	+ 54%
Сукцинат — ДГ	71.6 ± 3.5	64.5 ± 3.7	+ 11%
Малат — ДГ	8.9 ± 2.5	15.5 ± 1.8	+ 74%
Пируват — ДД	13.6 ± 1.5	11.2 ± 3.0	- 18%
Лактат — ДГ	15.1 ± 2.1	12.1 ± 3.7	- 20%

Значительные изменения под влиянием нейрогормона «С» обнаружены также в активности исследованных ферментов в почках. Направленность и глубина изменений сходны с теми, которые наблюдались в сердечной мышце: активность дегидрогеназ ЦТК (ИЦДГ, КДГ и СДГ) уменьшается на 40—70%. Исходя из данных, приведенных в табл. 2, можно предположить, что в почках замедляется образование ацетил-КОА из пирувата и окисление его в ходе ЦТК. Вследствие этого содержание интермедиентов ЦТК будет меняться незначительно, что и было показано ранее (5). В отличие от сердечной мышцы, нейрогормон «С» тормозит активность ПДГ—на 60%, ЛДГ—на 8%.

Окислительные ферменты ЦТК в печени менее подвержены влиянию нейрогормона «С». Исключение составляет ИЦДГ, активность которой снижается на 49% по сравнению с контролем.

Характер действия нейрогормона «С» на окислительные процессы в головном мозгу имеет некоторые особенности: активность дегидрогеназ ЦТК под влиянием исследованного гормона отчетливо повышается: КДГ—на 54%, ИЦДГ—на 44%, МДГ—на 74%. На основании данных, приведенных в табл. 4, можно заключить, что нейрогормон «С» вызывает интенсификацию окислительных стадий ЦТК в мозгу.

Таким образом, полученные данные, несомненно, свидетельствуют, что нейрогормон «С» влияет на интенсивность окислительных стадий ЦТК, причем в действии его проявляется органное специфичность. Можно предположить, что степень влияния нейрогормона «С» зависит от его концентрации в органе. Об этом свидетельствует тот факт, что при использованном в работе способе введения нейрогормон в первую очередь попадает в сердце, где и обнаружены наиболее отчетливые изменения активности исследованных ферментов.

Институт биохимии
Академии наук Армянской ССР

ՆԵՅՐՈՆՈՐՄՈՆ Շ-ի ազդեցությունն ուրոշ դեհիդրոգենազների ակտիվության վրա

Ուսյն հետազոտությամբ մեր առաջ խնդիր է դրված եղել ուսումնասիրելու եռարբոնաթթվային ցիկլի ուրոշ դեհիդրոգենազների ակտիվության փոփոխումը նեյրոհորմոն Շ-ի ազդեցության ներքո: Հետազոտության արդյունքները պարզեցին, որ նեյրոհորմոն Շ-ի ազդեցության ներքո, եռարբոնաթթվային ցիկլի էտապների արագությունը փոխվում է, հատկապես նրա ազդեցությունը դրսևորվում է օրգանային առանձնահատկությամբ: Ընդ մասին վկայում է այն փաստը, որ նեյրոհորմոն Շ-ի ներարկման մեթոդի շնորհիվ, նա առաջին հերթին հայտնվում է սրտում, որտեղ և հայտնաբերվում է ավելի ցայտուն փոփոխություններ հետազոտվող ֆերմենտների ակտիվության մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Галоян, ДАН Арм. ССР, т. 34, № 2, (1962). ² А. А. Галоян, Некоторые проблемы биохимии гипоталамической регуляции, Изд. «Айастан», Ереван, 1965.
³ А. А. Галоян, Вопросы биохимии мозга, 3, 291 (1967). ⁴ А. А. Галоян, Ф. М. Саакян, ДАН СССР, 201, 2, 483 (1971). ⁵ А. А. Галоян, С. С. Алексанян, ДАН Арм. ССР, т. 58, 3, № 3, (1974). ⁶ Ф. Е. Пугилица, Н. Д. Ещенко, Биология, 21, 4 (1969). ⁷ J. Nordmann, N. Nordmann, O. Gauchery, Bull. Chim. Biol., 33, 1826 (1951). ⁸ O. H. Loury et al, J. Biol. Chem., 265 — 275 (1951).

УДК 581.145

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЯ

Академик М. Х. Чайлахян, К. Е. Овчаров,
 Л. П. Хлопенкова, М. М. Чайлахян

**Влияние предпосевной обработки семян гиббереллином на
 рост и цветение карликового и высокорослого сортов гороха**

(Представлено 10/XI 1974)

Одной из основных закономерностей во влиянии фитогормонов на растения является компенсаторность их действия, заключающаяся в том, что эффект извне вводимых, т. е. экзогенных препаратов фитогормонов зависит от уже имеющихся в растениях природных, или эндогенных гормонов (¹). В отношении гиббереллина—гормона, отличающегося сильным стимуляторным действием на рост стеблей растений (²), было уже показано, что у сеянцев карликового гороха сорта Пионер эффект гиббереллина в отношении ускорения роста значительно выше, чем у высокорослого сорта гороха Штамбовый ранний (²⁻⁴). В этих опытах воздействие гиббереллином производилось путем многократной обработки растений гороха раствором гибберелловой кислоты.

Имея в виду необычайно высокую физиологическую активность гиббереллина, нами был предпринят опыт по влиянию гиббереллина на рост и цветение карликового и высокорослого сортов гороха при однократной предпосевной обработке семян. Опыт проводился в оранжерее и вегетационном домике Института физиологии растений имени Тимирязева Академии наук СССР в весенний период 1973 года. В качестве объектов были взяты сорта гороха: карликовый Пионер и высокорослый Торсдаг. Семена 23/III замачивали в растворах гиббереллина (гибберелловой кислоты), трех концентраций: 0,0001; 0,001 и 0,01% в течение 18 часов; контролем служили семена, замоченные в воде.

После обработки семена высевались в небольшие 15 см глиняные вазоны с почвой, которые были разделены на две группы. Одна группа вазонов обоих сортов гороха была поставлена в оранжерею, где растения выращивались на естественном свете. Другая группа вазонов с сеянцами только сорта Пионер была перенесена в камеры с люминесцентными лампами, где растения выращивали 1) на красном свете интенсивностью 15 тысяч эрг м²/сек, 2) на синем—22 тысячи эрг м²/сек и 3) на белом свете—60 тысяч эрг м²/сек. В каждом варианте опыта было

по пять вазонов с пятью растениями в каждом. В течение опыта проводили наблюдения за развитием растений и измерения интенсивности роста, а также фотографирование растений.

Предпосевная обработка семян в растворах гиббереллина оказала сильное влияние на рост растений. Данные по интенсивности роста контрольных и обработанных растений сортов Пионер и Торсдаг в условиях оранжерей на естественном свете приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Рост растений гороха сортов Пионер и Торсдаг при предпосевной обработке семян гиббереллином в условиях оранжерей на естественном свете

Сорт гороха	Вариант опыта	Высота растений							
		2/IV		9/IV		17/IV		24/IV	
		см	%	см	%	см	%	см	%
Пионер	Контроль, вода	3	100	7	100	9	100	13	100
	Гиббереллин, 0,0001%	4	133	9	128	12	133	17	130
	Гиббереллин, 0,001%	23	766	43	614	48	533	54	415
Торсдаг	Контроль, вода	9	100	22	100	39	100	55	100
	Гиббереллин, 0,0001%	9	100	24	109	40	102	59	107
	Гиббереллин, 0,001%	17	188	37	168	51	130	68	123

Из таблицы видно, что 18-часовое предпосевное замачивание семян гороха оказывает различное влияние на рост растений в зависимости от концентрации раствора—в случае 0,0001%-ного раствора ускорение было слабое, в случае 0,001%-ного—весьма сильное, а при обработке семян раствором 0,01% была задержка прорастания семян.

Действие гиббереллина у взятых в опыт сортов гороха проявляется по-разному. У растений карликового сорта Пионер уже через 10 дней после обработки семян 0,001%-ным раствором ГК наблюдался резкий скачок в росте—28 см при 3 см в контроле (766%) и далее рост растений проходил весьма интенсивно и через 32 дня достиг 54 см при 13 см в контроле (415%). У растений высокорослого сорта Торсдаг после обработки семян 0,001%-ным раствором первоначальный скачок в росте через 10 дней был менее выражен—17 см при 9 см в контроле (188%), а через 32 дня разница в росте обработанных и контрольных растений в значительной мере сгладилась—у опытных 68 см, у контрольных 55 см (123%).

Соотношение роста обработанных гиббереллином и контрольных растений гороха сортов Пионер и Торсдаг хорошо видно на рис. 1 и 2.

на которых показано состояние растений этих же сортов гороха в начале и в конце опыта

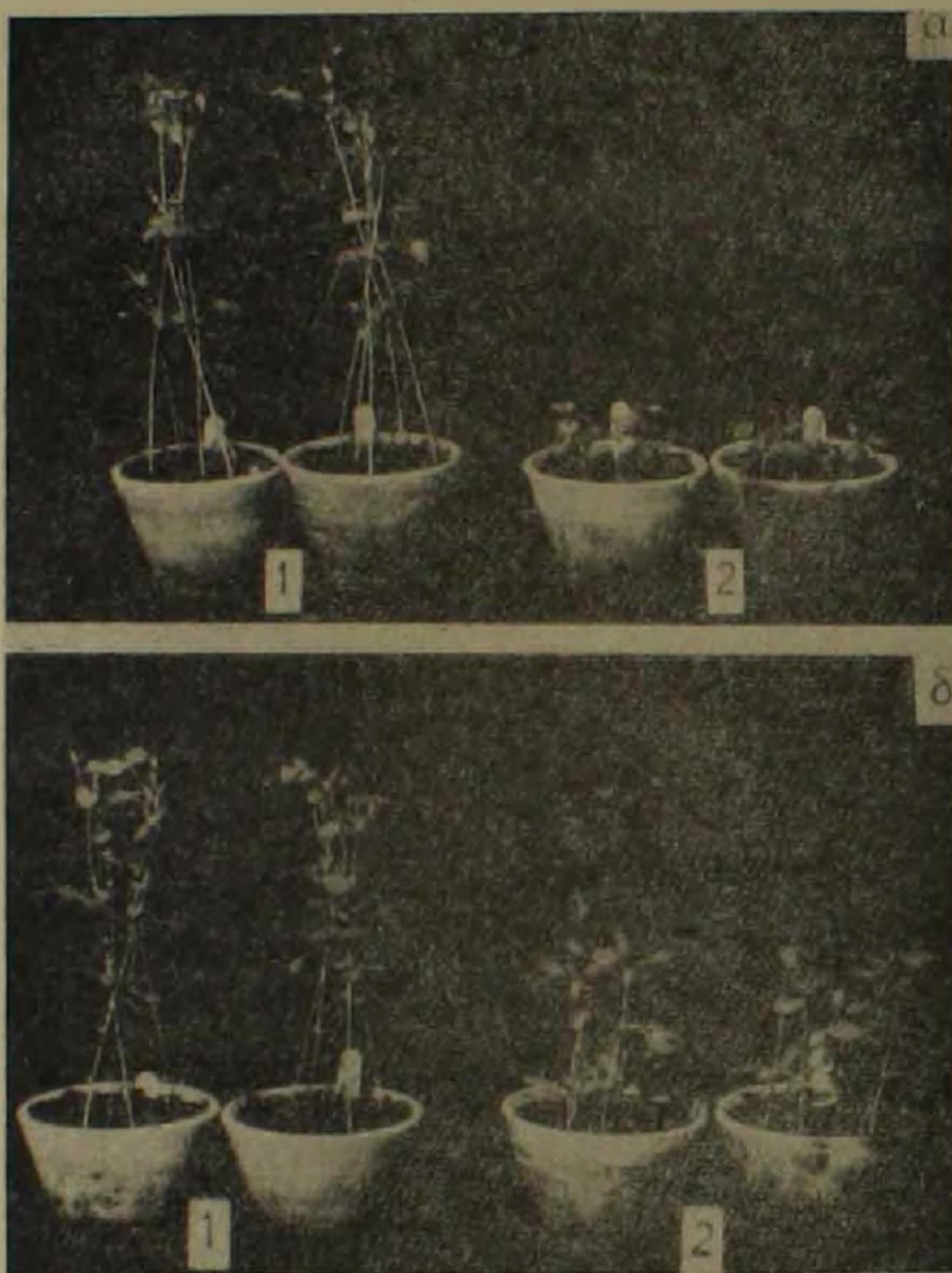


Рис. 1. Влияние предпосевной обработки семян гиббереллином на рост сеянцев гороха сорта Пионер (а) и сорта Торпед (б) через 10 дней после посева: 1—растения из семян, обработанных 0,001%-ным раствором гиббереллина; 2—растения из контрольных семян, подержанных в воде (фото 27/IV 1973 г.)

Рост растений карликового сорта Пионер, не обработанных гиббереллином на белом, красном и синем свету проходил без существенных различий—через 32 дня после обработки семян (26/IV) растения имели высоту соответственно 15,14 и 14 см. Предпосевная обработка семян 0,001%-ным раствором гиббереллина приводила к резкому усилению роста растений—на белом свету они были высотой 50 см, на красном—52 см и на синем—47 см. Очевидно, что усиление роста расте-

ний было примерно одинаковым, если не считать, что на красном свете они были несколько более вытянуты, чем на белом, а на синем свету — немного ниже контрольных.

Во всех проведенных опытах предпосевная обработка семян гороха сортов Пионер и Торсдаг 0,0001 и 0,001% растворами гиббереллина, вызывая изменения в росте растений, не влияла на бутонизацию и цветение растений, сроки наступления которых были одинаковы. Особенно отчетливо выявилась синхронность зацветания растений у гороха Пионер, где бутоны и цветки появлялись одновременно как на карликовых контрольных, так и на высокорослых опытных экземплярах.



Рис. 2. Влияние предпосевной обработки семян гиббереллином на рост сеянцев гороха сорта Пионер (а) и сорта Торсдаг (б) через 33 дня после посева: 1—растения из семян, обработанных 0,001%-ным раствором гиббереллина; 2—растения из семян, выдержанных в воде (фото 4/IV 1973 г.)

Таким образом предпосевная обработка семян гороха сортов Пионер и Торсдаг в 0,001% растворе гиббереллина в течение 18 часов оказалась приемом, обеспечивающим действие гиббереллинов на протяжении всего периода роста растений. Она вызвала большое ускорение роста обоих сортов гороха: этот способ обработки семян растворами регуляторов роста, не нашедший приложения в отношении многих других культур, для гороха оказался весьма эффективным и может быть рекомендован как методический прием. Концентрация растворов гиббереллина при этом играет существенную роль. Раствор гиббереллина более слабой концентрации 0,0001% оказал слабое стимулирующее действие, а раствор более сильной концентрации 0,01% вызвал задержку прорастания семян.

Ростовая реакция сортов гороха на предпосевную обработку семян оказалась различной. У карликового сорта Пионер резкое ускорение интенсивности роста растений, обработанных гиббереллином, наметившееся сначала, в дальнейшем увеличивалось и к фазе цветения опытные растения резко отличались по высоте от контрольных. У высокорослого гороха Торсдаг различие в интенсивности роста опытных и контрольных растений было выражено в меньшей мере и с течением времени постепенно сглаживалось так, что к фазе цветения опытные и контрольные растения по высоте мало отличались друг от друга. Это указывает на то, что действие гиббереллина сильнее сказывается на растениях карликового сорта Пионер и в меньшей мере на растениях высокорослого сорта Торсдаг.

Рост растений карликового сорта Пионер, не обработанных гиббереллином на белом, красном и синем свете не выявил существенных различий. В результате обработки гиббереллином существенных различий в интенсивности роста на свете разного качества не было: несколько более интенсивно идет рост растений на красном свете сравнительно с растениями на белом свете, тогда как растения на синем свете по росту были немного ниже контрольных. Это показывает, что обработка растений гиббереллином снимает тормозящее рост действие красных лучей в большей мере, чем действие синих.

Предпосевная обработка семян гороха в растворах гиббереллина, вызвавшая резкие изменения в росте растений, не повлияла на скорость цветения растений обоих сортов гороха как в условиях оранжерей, так и в камерах с различным качеством света. Поскольку оба сорта гороха, взятые в опыты, являются нейтральными по отношению к длине дня, полученные данные подтверждают имеющиеся в литературе указания на то, что обработка гиббереллином фотопериодически нейтральных видов не влияет на скорость цветения растений.

Институт физиологии растений
и.ч. К. А. Тимирязева Академии наук СССР

Ազգայնական Մ. Կ. ԶԱՅԼԱՆՅԱՆ, Կ. Խ. ՍՎՋԱՐՈՎ, Լ. Գ. ԿԼՈՊԵՆԿՈՎԱ, Մ. Մ. ԶԱՅԼԱՆՅԱՆ

Ոլոռի գաջաջ և բարձրահասակ սորտերի աճը և ծաղկումը սերմերի
գերերելիկով նախաքանակային քրջման հետ կապված

Ոլոռի գաջաջ Պիոնի և բարձրահասակ Տորսդազ սորտերի սերմերը 18
ժամվա ընթացքում թրջվել են գիրերելիկի 0,001%-անոց լուծույթով:

Այդ մշակումը ուժեղ խթանել է Պիոնի սորտի աճը և այդ խթանումը
պահպանվել է մինչև ծաղկում և պտղաբերում, իսկ Տորսդազ սորտի բույսե-
րի աճը խթանվել է ավելի թույլ և ծաղկման շրջանում մշակված և ստուգիչ
բույսերն իրենց բարձրությամբ զգալի չէին տարբերվում:

Տարբեր գույնի ցերեկային լույսը (սպիտակ, կարմիր և կապույտ) Պիո-
նի սորտի բույսերի վրա զգալի ազդեցություն չի ներգործել: Օդտազործված
սորտերի սերմերի նախաքանակային մշակումը գիրերելիկով խիստ խթանելով
բույսերի աճը չի ազդել ծաղկման արագացման վրա ինչպես ջերմոցում, այն-
պես էլ տարբեր գույնի լույսի տակ կամերաներում:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИЦЦЪЛЪРЪЗНЪ

- ¹ М. Х. Чайлахян, Химическая регуляция роста и цветения растений. Вестник Академии наук СССР, 10, стр. 35—45, (1969). ² Г. С. Муромцев, Л. А. Пенкина, Гиббереллины, Сельхозиздат, М., 1962. ³ М. Х. Чайлахян, Н. А. Иванова. Известия Института физиологии растений имени Методия Попова Болгарской Академии наук, т. XVI, стр. 45—64, (1970). ⁴ М. Kh. Chalkhyan, I. A. Ivanova, Comptes rendues de l'Académie bulgare des Sciences, t. 22, N 2, pp. 197—200 (1969).

Е. Л. Гурьева

Два новых вида жуков—шелкунов (Coleoptera, Elateridae)
с Кавказа

(Представлено чл.-корреспондентом АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 31/1 1975)

Ниже приводятся описания новых видов жуков-шелкунов с Кавказа. Типы описываемых видов хранятся в Зоологическом институте АН СССР.

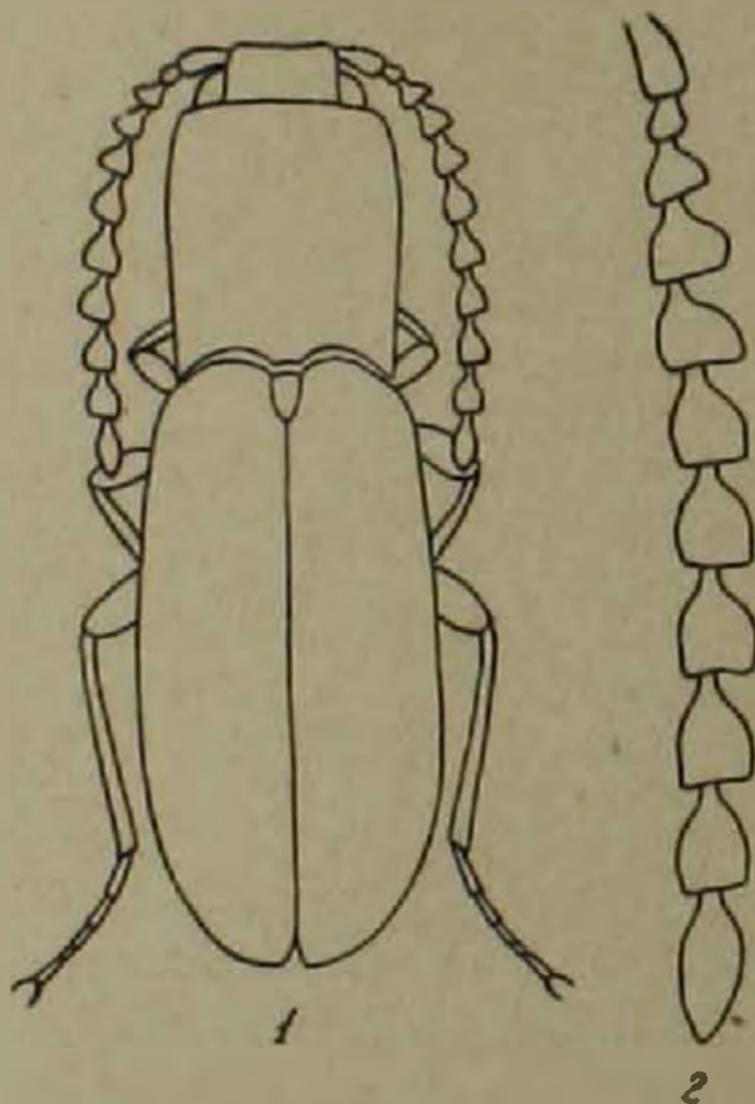


Рис. 1. *Selatosomus nanus* Gur., sp. n.
1—общий вид; 2—усик

Selatosomus nanus Gurjeva, sp. n. (рис. 1)

Самец. Одноцветно коричнево-бурый, голова и переднеспинка более интенсивно окрашены, чем остальное тело; низ в прилегающих, верх в отстоящих густых серых волосках. Длина—5,7 мм, наибольшая ширина 1,8 мм.

Голова в довольно грубых и частых точках, промежутки между которыми меньше точек либо равны им; лоб слегка широко вдавлен, с явственными вздутиями над усиковыми впадинами. Усики 3-мя члениками заходят за задние углы переднеспинки, почти четковидные; 1-й членик вздутый, но небольшой; 2-й очень маленький, шаровидный; членики, начиная с 3-го резко расширенные к вершине, их длина постепенно увеличивается по направлению к вершине усика; 3-й членик явственно поперечный, 10-й явственно продольный (рис. 1, 2). Члени-

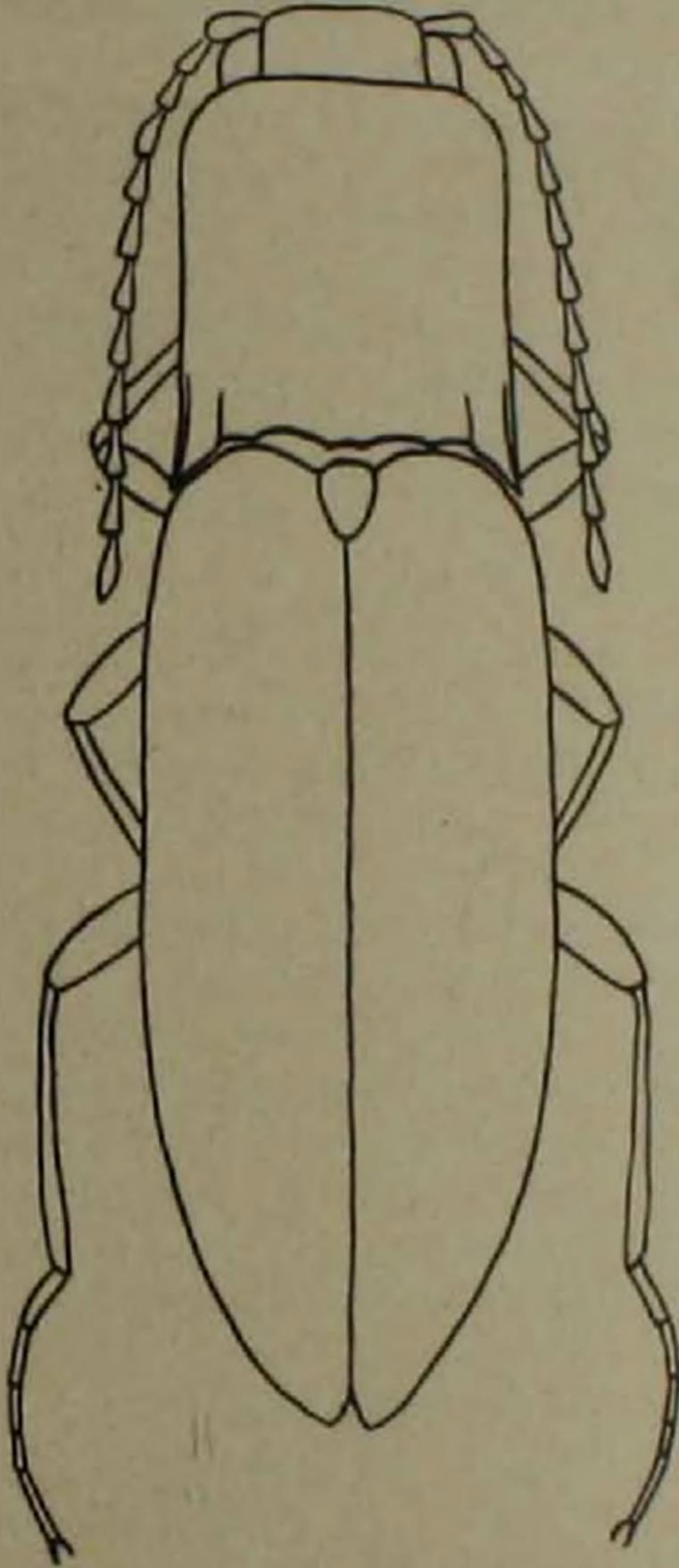


Рис. 2. *Agriotes colchicus* Gur., sp. n.,
общий вид

ки усиков матовые в очень мелкой и густой рашпилевидной скульптуре. Переднеспинка в длину слегка больше, чем в ширину, почти параллельносторонняя; задние углы короткие, не расходящиеся в стороны; срединная линия неглубокая, но явственная до середины длины переднеспинки; пунктировка грубая, простая, довольно густая; по срединной

линии и у самой боковой каемки межточечные промежутки меньше точки, кое-где равны ей, на остальной части диска переднеспинки они равны точке и более ее.

Переднегрудь густо и грубо пунктирована; проплевры в передней половине густо- и груботочечные, в задней половине лишены пунктировки, зеркально гладкие.

Щиток круглый, в грубой рашпилевидной скульптуре. Заднегрудь и бедренные покрывки задних голеней в грубых и редких точках межточечные промежутки между которыми превышают диаметр точек. Надкрылья в 2,5 раза длиннее переднеспинки, от плеч до задней четверти постепенно расширяющиеся; с четкими бороздками, ямки в которых продольно удлиненные, не превышающие ширины бороздок, междурядия исключительно грубо шероховатые.

Брюшко довольно густо и грубо шероховато-точечное, особенно густо и грубо пунктирована вершина последнего сегмента, где точки пупковидные и почти сливаются друг с другом. Последний стернит брюшка сильно выпуклый, в длину равен 2-м предыдущим, с оттянутой назад и приподнятой вершиной.

Самка не известна.

Материал. Голотип, ♀: Кавказ, Зорское ущелье, Малюженко.

По строению последнего сегмента брюшка этот вид относится к группе *S. spretus* Mnh., по строению усиков ближе всего к *S. nigricus* Gur. Внешне напоминает *S. messorobius* Dol., но отличается от него более вытянутым телом и иным строением усиков.

Agriotes colchicus Gurjeva, sp. n. (рис.2)

Самец. Одноцветно каштаново-коричневый; весь в золотистых волосках. Длина 7,2 мм, наибольшая ширина 2,1 мм.

Голова в крупных простых точках, особенно густых на лбу, промежутки равны точке или чуть больше ее, на лбу меньше точки; надусиковые кили доходят до переднего края лба. Усики заходят за вершины задних углов переднеспинки 2,5 члениками; 2-й и 3-й членики одинакового размера и формы, их длина в 1,7 раза больше ширины; начиная с 4-го, членики треугольно-расширенные, примерно одинаковой длины, но последовательно становятся уже, так что длина 4-го больше его ширины на вершине в 1,8,—10-го в 2,2 раза.

Переднеспинка имеет равные длину и наибольшую ширину; наибольшая ширина вблизи переднего края, откуда ее бока вперед сильно округло, назад слегка почти прямолинейно сужаются; задние углы слабо расходящиеся в стороны; кили мощные, параллельны боковой каемке; боковая каемка острая по своей длине, в передней половине подвернута на нижнюю сторону; срединная бороздка отсутствует; точки крупные, простые, на диске круглые, у бокового края овальные, промежутки меньше точек, местами равны им. Проплевры и переднегрудь в таких же точках как диск переднеспинки, задняя треть проплевр лишена пунктировки.

Щиток языковидный, его длина в 1,5 раза больше ширины. Надкрылья в 3,3 раза длиннее переднеспинки, чуть шире ее, их наибольшая ширина позади задней трети; бороздки не очень глубокие, ямки в них глубокие, слегка овальные, не превышающие ширину бороздки; междурядия плоские, у вершины слабо выпуклые, в сравнительно крупных и редких точках и бугорках.

Самка. Длина 9 мм, наибольшая ширина 2,5 мм. Усики не доходят до вершины задних углов переднеспинки на длину 1,5 члеников; членики, начиная с 4-го, примерно одинаковой длины и ширины, их длина в 1,8 раза больше ширины на вершине. Переднеспинка едва заметно поперечная. Надкрылья сильнее расширены, чем у самца.

Материал. Голотип, ♂: Абхазия, Ажары у Чхалты на Кодоре, 21/VII 1905, Калишевский; 1 паратип, ♀, там же, 14/VII 1905, Калишевский.

Описываемый вид близок к *A. turkistanicus* Pic. и *A. flavobasalis* Heyd., от первого он хорошо отличается формой переднеспинки и бедренных покрывок, от второго размерами 2-го и 3-го члеников усиков, формой переднеспинки и бедренных покрывок задних тазиков.

Зоологический институт
Академии наук СССР

ԻՆՎ. ԳՈՒՐՅԱՆ

Զրիկան րգեզների (Coleoptera, Elateridae) երկու նոր տեսակ Կովկասից

Հոդվածում նկարագրված են չրիկան րգեզների 2 նոր տեսակ Կովկասից. *Selatosomus nanus* Gur., sp. n. պատկանում է *S. spretus* Mnh. խմբին. րեխիկների կառուցվածքով այն մոտ է *S. mirificus* Gur. տեսակին:

Արխագիայից նկարագրված *Agriotes colchicus* Gur., sp. n. մոտ է *A. turkistanicus* Pic և *A. flavobasalis* Heyd. տեսակներին:

УДК 632.651

ГЕЛЬМИНТОЛОГИЯ

Э. Е. Погосян

Описание самца *Meloidoderita kirjanovae*
Poghossian, 1966 (Nematoda, Meloidoderitidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 25/XI 1974)

В 1966 году по самкам, личинкам и цистам был описан новый род и вид нематоды *Meloidoderita kirjanovae* (¹). Самцы не были найдены. Наконец, весной 1974 года (12/V), в одном из лабораторных поколений *M. kirjanovae* нам удалось обнаружить самца.

Первоначально этот род был отнесен нами к семейству Heteroderidae, в дальнейшем же, на основании накопленного большого материала по этому виду, первоописание было пересмотрено, дополнено, вид переописан и выделен в самостоятельное семейство Meloidoderitidae (²).

До опубликования нашей последней статьи (¹) американскими учеными W. M. Wouts and S. A. Sher (³) род *Meloidoderita* был признан за genus *Inquitranda*. В дальнейшем, в 1973 году, Wouts (⁴) на основании полученного им от Э. Л. Кралля материала (5 самок *M. kirjanovae*) отнес род *Meloidoderita* к семейству Meloidogynidae (подсем. Meloidogyninae). Приведенные однако в статье Wouts (⁴) рисунки головного конца самки и галлов на корнях мяты скорее всего похожи на *Meloidogyne hapla*, чем на *M. kirjanovae*. В природе (в Мегри) эти два вида очень часто встречаются вместе на корнях одного и того же растения мяты. Возможно, что полученный Wouts материал был нечистый.

Обнаружение самца помогло нам уточнить систематическое положение и родственные отношения семейства Meloidoderitidae к близким семействам.

Паратипы (n=23)—длина тела от 350 до 432 (402,91) мк, ширина—10—15 (10,2) мк, a=32,2—43,2 (39,53), c=7,6—10,5 (9,23). Длина копыа 7,7—8,8 (7,9) мк (n=6) длина спикулы—15—19,8 (17,66) мк (n=17), рулек—4,4—5,5 (4,84) мк (n=15).

Аллотип (самец)—длина тела 425 мк, ширина—13,2 мк, a=32,2, c=7,6. Длина копыа—7,7 мк, длина спикулы—17,6 мк, рулек—4,4 мк.

Самцы очень маленькие, тонкие, величиной почти не отличаются от

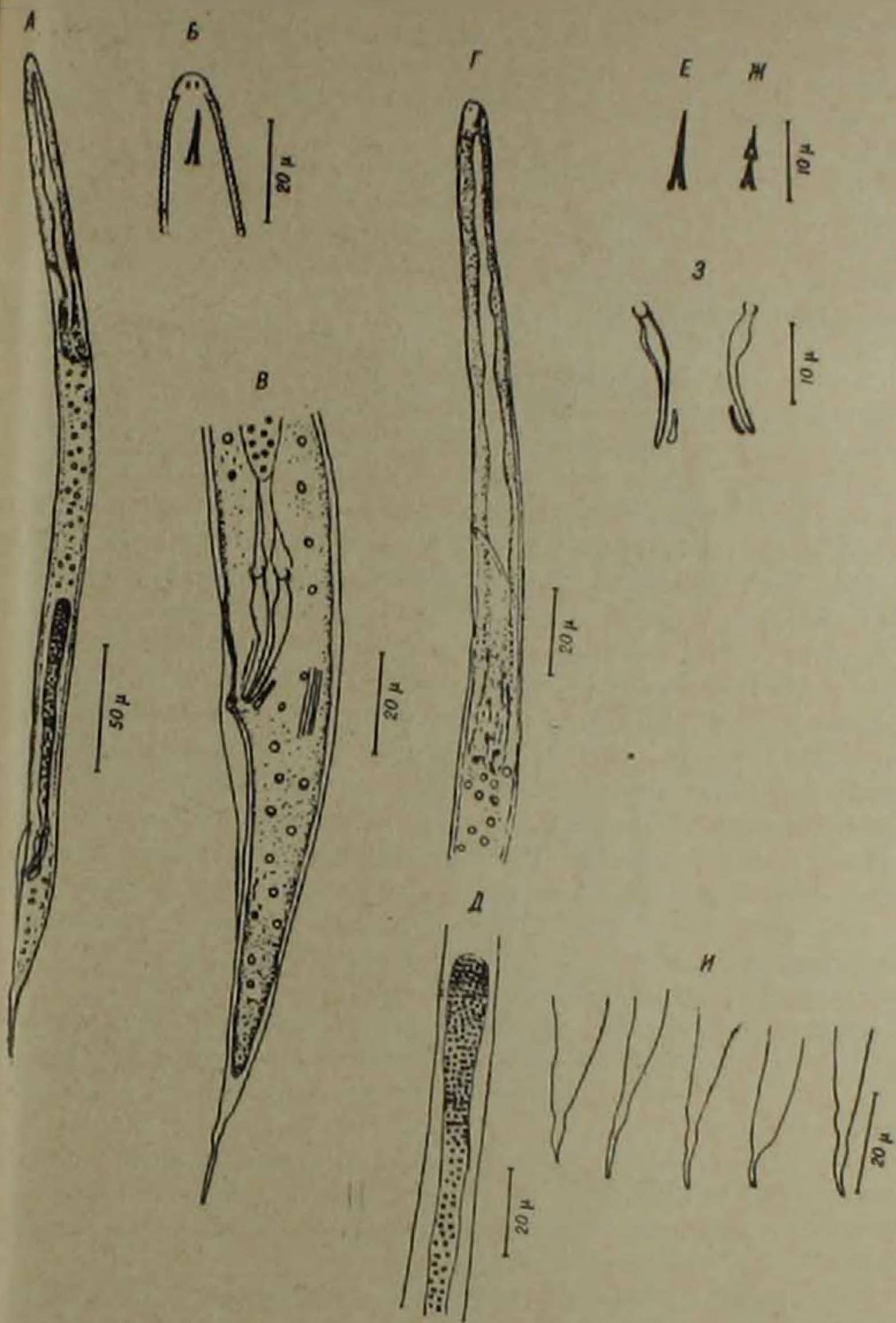


Рис. 1 — *Meloidoderita kirjanovae* Poghosian.

А — самец; Б — головной конец; В — задняя и Г — передняя части тела самца. Д — средняя часть тела с семенником, Е и Ж — концы (Ж — концы линяющего самца); З — сиккулы и рулек (в разном положении); И — вариации формы терминуса хвоста у самцов

личинки второго возраста этого вида. Форма тела нитевидная, суживающаяся к обоим концам. Терминус хвоста острый. Кутикула тонкоко-

чатая, ширина колец около 1 мк. Голова слегка отделена от тела. Копье у большинства особей отсутствует (недоразвито), у некоторых экземпляров оно сохранилось и было выражено довольно хорошо. Пищевод также недоразвит. У некоторых самцов удалось наблюдать пищеводные железы.

Выделительная пора находится в пределах пищевода ($n=13$), она открывается на расстоянии 80,3—88 (85,24) мк от головного конца тела, что составляет от 19,32 до 22,94 (21,20) % длины тела.

Гемизонид расположен или непосредственно над выделительной порой (у двух особей) или на 4 кольца выше (у одной особи) и занимает 3 кольца кутикулы. Боковое поле с 4 инцизурами.

Семенник один, длина его колеблется между 85 и 120 (99,89) мк, что составляет 21,43—31,55 (26,21) % длины тела. Сперматоциты расположены 5—6 рядами. Сперматозонды округлой формы, их много в половых путях самца. Бурса очень узкая и очень трудно просматривается даже на живых особях. Спиккулы небольшие, тонкие, с небольшой головкой, несколько расширенным корпусом, за которым следует узкая часть тела с заостренным концом. Рулек маленький, «ложечкообразный», длиной 4,4—5,5 мк.

Дифференциальный диагноз. По наличию терминальной вульвы и яйцевого мешка, а также по форме тела самок и личинок, семейство Meloidoderitidae сближается с семействами Heteroderidae и Sphaeronematidae⁽²⁾. От сем. Heteroderidae оно отличается непарной половой трубкой с большой шаровидной маткой, сильно склеротизированным просветом пищевода и иным строением метакорпального бульбуса, а также своеобразным образованием цист у самок. Самцы Meloidoderita kirjanovae очень маленькие, отличаются остроконечным хвостом, присутствием бурсы, формой рулька, несколько недоразвитым пищеводом и копьем. От Sphaeronematidae отличаются меньшим метакорпальным бульбусом со слабо развитой мускулатурой и превращающейся в цисту маткой (у Sphaeronematidae метакорпальный бульбус пищевода большой с мощной мускулатурой, а матка в цисту не превращается). Кроме этого самцы отличаются наличием бурсы и копьем.

Все черты строения самок, самцов и личинок *M. kirjanovae* показывают, что выделение его в самостоятельное семейство Meloidoderitidae обосновано, а также указывают на ее близко родственное отношение к семейству Sphaeronematidae.

Типовое местонахождение — Армянская ССР, Мегри, фруктовый сад.

Самцы обнаружены 12/V 1974г. в одном из лабораторных поколений Meloidoderita kirjanovae (из корней мяты — *Mentha longifolia* (L.) Huds.)

Типичный хозяин — *Mentha longifolia* (L.) Huds.

А л л о т н и (самец) микроскопический препарат №821^а/3 и паратипы (самцы) №№824^а/1 — 824^а/2, 824^а/4 — 824^а/16 хранятся в нематологических коллекциях Института зоологии АН Армянской ССР, г. Ереван.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Հ. Խ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Meloidoderita kirjanovae Poghossian,

1966 արուի նկարագրությունը
(Nematoda, Meloidoderitidae)

1966 թվին մեր կողմից նկարագրվել է նեմատոդի նոր սեռ և տեսակ — *Meloidoderita kirjanovae* էղեղի, ցիստների և թրթուրների հիման վրա, որպես *Heteroderidae* ընտանիքի սեռերից մեկը ⁽¹⁾։ Արուն մինչ այժմ հայտնի չէր։ Հետազոտում ավելի մեծ քանակությամբ նյութեր հավաքվեցին, որոնց հիման վրա վերանայվեց այդ տեսակի առաջին նկարագրությունը, լրացվեց և վերանկարագրվեց որպես նոր, ինքնուրույն՝ ընտանիք (*Meloidoderitidae*) *Meloidoderita* սեռով և *M. kirjanovae* տեսակով ⁽²⁾։

1974 թվի գարնանը մեզ հաջողվեց հայտնաբերել այդ տեսակի արուն, որի նկարագրությանն է նվիրված ներկա հոդվածը։

Արուի հայտնաբերումը հնարավորություն տվեց լրացնելու *Meloidoderitidae* ընտանիքի և *Meloidoderita* սեռի դիագնոզներն, ինչպես նաև, ճշտելու այդ ընտանիքի սիստեմատիկական դիրքը և ազգակցական կապերը *Sphaeronematidae* ընտանիքի հետ։

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ի Ն Մ Ի Ն Ս Ի Տ Ր Ե Ն

¹ Э. Е. Погосян, ДАН АрмССР, т. XLII, № 2 (1966). ² E. С. Курьянов и Э. Е. Погосян, Паразитология, т. VII, 2, 280—285 (1973). ³ W. M. Wouts and S. A. Sher, J. of Nematology, vol. 3, 2, 129 — 144 (1971). ⁴ W. M. Wouts, Nematologica, vol. 19, 2: 218 — 235 (1973).

